České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika

Kategorie Courantových algebroidů

Category of Courant algebroids

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Michael Píro
Vedoucí práce: Ing. Jan Vysoký, Ph.D.
Rok: 2021

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
PRAHA 1 - STARÉ MĚSTO, BŘEHOVÁ 7 - PSČ 115 19

Katedra: fyziky *Akademický rok:* 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Michael Píro

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Matematické inženýrství

Název práce: (česky) Kategorie Courantových algebroidů

Název práce: (anglicky) Category of Courant algebroids

Pokyny pro vypracování:

1) Úvod do teorie vektorových fibrovaných prostorů
2) Leibnizovy, Lieovy a Courantovy algebroidy
3) Involutivní struktury na Courantových algebroidech
4) Definice morfismu Courantových algebroidů
5) Kategorie Courantových algebroidů a její zobecnění

Doporučená literatura:

[1] J.M. Lee: Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2013

[2] L.W. Tu: Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes, Springer, 2017

[2] J. Vysoký: Hitchhiker's guide to Courant algebroid relations, J. Geom. Phys. 151 103635 (2020)

[4] D. Roytenberg: Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds, Ph.D. thesis, 1999

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Jan Vysoký, Ph.D., Katedra fyziky,
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 23.10.2020

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

………………………………………
garant oboru

……………………………………..
vedoucí katedry

………………………………..
děkan

V Praze dne 23.10.2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

Michael Píro

Poděkování

Děkuji Ing. Janu Vysokému, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, za jeho trpělivost, vstřícný přístup a za čas, který mi věnoval.

Michael Píro

Název práce:
Kategorie Courantových algebroidů

Autor: Michael Píro

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Jan Vysoký, Ph.D.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá Courantovými algebroidy a jejich morfizmy. Cílem bylo prozkoumat podmínky, které musí tyto morfizmy splňovat, aby mohly spolu s algebroidy tvořit kategorii. V první části jsou zavedeny důležité matematické struktury – vektorové bandly a samotné algebroidy. Následuje popis izotropních a involutivních podbandlů, jejichž pochopení je nutné pro zavedení morfizmů. Před jejich definicí je čtenář seznámen s konstrukcí produktového Courantova algebroidu a s popisem vlastností grafu morfizmu vektorových bandlů. Závěr je věnován samotným morfizmům Courantových algebroidů. Jsou zde uvedeny konkrétní podmínky na zobrazení mezi algebroidy, možnosti jejich zjednodušení, exaktní důkaz uzavřenosti této třídy na skládání a diskuze vlastností vytvořené kategorie.

Klíčová slova: Courantův algebroid, kategorie, vektorový bandl, involutivní struktura

Title:
Category of Courant algebroids

Author: Michael Píro

Abstract: This bachelor thesis deals with Courant algebroids and their morphisms. The aim was to investigate the conditions these morphisms must meet in order to form a category. In the first part, important mathematical structures, in particular vector bundles and algebroids, are introduced. It is followed by a description of isotropic and involutive subbundles, the understanding of which is crucial for the introduction of morphisms. Before defining them, the reader is acquainted with the construction of the product Courant algebroid and with the properties of the graph of a vector bundle morphisms. The end is devoted to the morphisms of Courant algebroids. Specific conditions on mappings between algebroids and possibilities of their simplification are listed here. Furthermore, there is an exact proof, that this class is closed under composition, and a discussion of the properties of the created category.

Key words: Courant algebroid, category, vector bundle, involutive structure

Obsah

Úvod

Courantův algebroid je důležitou matematickou strukturou, která nachází uplatnění například v symplektické nebo Poissonově geometrii [2], ale také při popisu klasické mechaniky s vazbami nebo supergravitace [4]. V této práci budeme chtít ukázat, že tyto struktury lze sdružovat do tzv. kategorií, tj. speciálních kolekcí objektů a jejich morfizmů. Abychom však mohli definovat Courantův algebroid a studovat jeho vlastnosti, je v první řadě nutné vybudovat příslušný matematický aparát.

V první kapitole si tedy nejprve představíme vektorové fibrované prostory (vektorové bandly). Jedná se o matematickou strukturu, která sestává z podkladové variety M a kolekce vektorových prostorů. Každému bodu z M je přiřazen jeden z těchto prostorů tak, aby finální struktura vypadala lokálně jako kartézský součin M s $\mathbb{R}^n$. Globálně však tato vlastnost nemusí platit. Z uvedených příkladů pro nás bude důležitý především tečný vektorový bandl. Nakonec se podíváme na vektorový podbandl a produktový bandl, které využijeme při budování morfizmu mezi algebroidy. Způsob výstavby a jednotlivá tvrzení byla do této kapitoly převážně převzata z [11].

Ve druhé kapitole se již seznámíme se samotným pojmem algebroid, tedy vektorovým bandlem s nějakou dodatečnou strukturou (kotva, závorka, povláknová metrika), a jeho základními třemi formami: Leibnizův, Lieův a Courantův. Dále si ukážeme speciální třídu tzv. exaktních Courantových algebroidů a na závěr také jak vypadá izomorfizmus Courantových algebroidů. Jako podklad pro tuto kapitolu posloužila práce [12].

Třetí kapitola je věnována involutivním strukturám, jejichž pochopení je velmi důležité pro zavedení morfizmu mezi Courantovými algebroidy. Postupně zde rozebereme podmínky izotropie, kompatibility kotvy a involutivity, které musí vektorový podbandl splňovat, aby mohl tvořit involutivní strukturu. Jako zdroj byl využit článek [13].

V poslední kapitole se postupně od zavedení produktového Courantova algebroidu přes vlastnosti grafu morfizmu vektorového bandlu dopracujeme až k definici morfizmu Courantových algebroidů. Ten byl původně definován jako Diracova struktura (maximálně izotropní podbandl) nad grafem hladkého zobrazení variet a to pouze mezi algebroidy s neutrální signaturou povláknové metriky [1]. Tento požadavek na signaturu byl později v práci [3] vynechán. Lze však ukázat, že takto zkonstruované morfizmy obecně nelze skládat. V této práci proto budeme morfizmus definovat podle [8] jako involutivní strukturu nad grafem hladkého zobrazení variet. Následně ukážeme ekvivalentní podmínky, které musí zobrazení mezi algebroidy splňovat, aby mohla být jejich morfizmy, a konkrétní případy, ve kterých lze tyto složité vztahy výrazně zjednodušit. Nakonec dokážeme, že lze takto definované morfizmy skládat a že spolu s Courantovými algebroidy opravdu tvoří kategorii.

Kapitola 1

Vektorový bandl

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1.1. Nechť E, M jsou hladké variety a zobrazení $\pi\colon E \to M$ je hladká surjekce. Řekneme, že (E, π, M) je **vektorový bandl** hodnosti r, právě když pro každý bod $p \in M$ platí:

1. Množina $E_p := \pi^{-1}(p)$ je reálný vektorový prostor dimenze r.
2. Existuje otevřené okolí U bodu p a difeomorfizmus $\phi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ tak, že $\pi_1 \circ \phi_U = \pi$, kde $\pi_1\colon U \times \mathbb{R}^r \to U$ je projekce, a jehož zúžení $\phi_U|_{E_p}\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ je lineární izomorfizmus.

Varieta E se nazývá **totální prostor**, varieta M **bazický prostor** a vektorový prostor E_p **vlákno nad bodem** p. Zobrazení ϕ_U nazýváme **lokální trivializací** $\pi^{-1}(U)$.

Pro obecnou konstrukci vektorového bandlu se s výhodou užívá následujícího tvrzení:

Tvrzení 1.1.2. Nechť platí:

1. M je n-rozměrná hladká varieta.
2. E je množina, která spolu se surjekcí $\pi\colon E \to M$ splňuje, že pro každé $p \in M$ je $E_p := \pi^{-1}(p)$ vektorový prostor dimenze $r \in \mathbb{N}_0$.
3. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M a $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ jsou bijekce. Navíc pro každé $\alpha \in I$ je $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$, kde $\pi_1\colon U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to U_\alpha$ je projekce, a pro každé $p \in U_\alpha$ je zúžení $\phi_\alpha|_{E_p}\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ lineární.
4. Pro množiny U_α, U_β s neprázdným průnikem je definováno přechodové zobrazení $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ takto:

$$[g_{\alpha\beta}(p)]x := \pi_2(\phi_\alpha(\phi_\beta^{-1}(p, x))), \quad x \in \mathbb{R}^r, \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

kde $\pi_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ je projekce a $GL(r, \mathbb{R})$ je množina všech regulárních matic rozměru $r \times r$ s hladkou strukturou na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^{r,r}$. Tato zobrazení $g_{\alpha\beta}$ jsou hladká.

Potom lze na E jednoznačně definovat topologii a hladkou strukturu tak, že zobrazení $\pi : E \to M$ je hladké a pro každé $\alpha \in I$ jsou $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ difeomorfizmy a tudíž (E, π, M) vektorový bandl nad M.

Důkaz. Lze nalézt v [6]. □

Definice 1.1.3. Nechť (E_1, π_{E_1}, M_1) a (E_2, π_{E_2}, M_2) jsou vektorové bandly. Řekneme, že dvojice hladkých zobrazení $(\mathcal{F} : E_1 \to E_2, \varphi : M_1 \to M_2)$ je **hladký morfizmus bandlů**, právě když platí:

1. diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & E_2 \\ {\scriptstyle \pi_{E_1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{E_2}} \\ M_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & M_2 \end{array} \tag{1.1}$$

   komutuje,

2. pro každé $p \in M$ je zúžení $\mathcal{F}_p \colon E_1|_p \to E_2|_{\varphi(p)}$ lineární zobrazení.

Pod tímto názvem se často rozumí samotné zobrazení $\mathcal{F} \colon E_1 \to E_2$.

Speciálně, pokud π_{E_1} i π_{E_2} zobrazují do M a φ je identické zobrazení $\mathbb{I}_M$, nazýváme dvojici $(\mathcal{F} : E_1 \to E_2, \mathbb{I}_M)$ **morfizmus bandlů** nad M. Existuje-li navíc morfizmus bandlů $\mathcal{G} : E_2 \to E_1$ nad M takový, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathbb{I}_{E_2}$ a $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathbb{I}_{E_1}$, nazýváme $\mathcal{F}$ **izomorfizmus bandlů** nad M a bandly (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) **izomorfní bandly** nad M.

Definice 1.1.4. Řekneme, že vektorový bandl (E, π_E, M) je **triviální**, právě když je izomorfní s bandlem $(M \times \mathbb{R}^r, \pi, M)$.

Příklad 1 (Produktový bandl)**.** Nechť V je vektorový prostor dimenze r, M je hladká varieta a zobrazení $\pi : M \times V \to M$ je projekce na první složku. Potom $(M \times V, \pi, M)$ tvoří vektorový bandl hodnosti r a nazýváme jej **produktový bandl**.

Příklad 2 (Möbiův bandl)**.** Nechť S^1 je kružnice a E Möbiova páska, kterou získáme jako kvocient prostoru $\langle 0, 1\rangle \times \mathbb{R}$ zavedením ekvivalence

$$[0, t] \sim [1, -t].$$

Nechť $\pi_1 : \langle 0, 1\rangle \times \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ je projekce na první složku, $q : \langle 0, 1\rangle \times \mathbb{R} \to E$ je faktorové zobrazení a nechť $\varphi \colon \langle 0, 1\rangle \to S^1$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, je hladká parametrizace S^1. Definujme projekci $\pi \colon E \to S^1$ tak, aby graf

$$\begin{array}{ccc} \langle 0, 1\rangle \times \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & E \\ {\scriptstyle \pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \langle 0, 1\rangle & \xrightarrow[\varphi]{} & S^1 \end{array}$$

komutoval.

Zkonstruujme nyní lokální trivializace. Mějme dvě otevřená okolí U_1, $U_2 \in S^1$, která pokrývají S^1 a zároveň splňují:

$$U_1 = \{\varphi(\tau) | \tau \in (a_1, b_1)\},$$
$$U_1 = \{\tilde{\varphi}(\tau) | \tau \in (a_2, b_2)\},$$

kde $\tilde{\varphi}\colon \langle 0,1\rangle \to S^1$ je jiná hladká parametrizace S^1. Definujme dále nové faktorové zobrazení $\tilde{q}$ tak, aby zůstala projekce π při záměně $q \leftrightarrow \tilde{q}$, $\varphi \leftrightarrow \tilde{\varphi}$ stejná. Lokální trivializace pak získáme takto:

$$\begin{aligned}\phi_{U_1}(r) &:= (\pi(r), x), \quad r = q(\xi, x) \in \pi^{-1}(U_1), \quad (\xi, x) \in \varphi^{-1}(U_1) \times \mathbb{R},\\ \phi_{U_2}(r) &:= (\pi(r), x), \quad r = \tilde{q}(\xi, x) \in \pi^{-1}(U_2), \quad (\xi, x) \in \tilde{\varphi}^{-1}(U_2) \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Potom (E, π, S^1) tvoří vektorový bandl a nazýváme jej **Möbiův bandl**.

Příklad 3 (Tečný bandl)**.** Nechť M je n-rozměrná hladká varieta. Definujme množinu všech tečných vektorů k M takto:

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM, \tag{1.2}$$

kde T_pM je tečný vektorový prostor k varietě M v bodě p. Dále definujme projekci $\pi : TM \to M : v \mapsto p,\ v \in T_pM$. Na M zvolme atlas $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a označme pro každé $\alpha \in I$ $(x^1_{(\alpha)}, ..., x^n_{(\alpha)})$ soubor souřadnic příslušný dvojici (U_α, ψ_α). Protože pro každé $v \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ existuje jednoznačný rozklad $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i_{(\alpha)}}|_{\pi(v)}$, můžeme definovat zobrazení $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ takto:

$$\phi_\alpha(v) := (\pi(v), (v^1, ..., v^n)^T).$$

Zúžení $\phi_\alpha|_{T_pM}$ je zřejmě lineární. Nakonec pro každé $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ a každé $(v^1, ..., v^n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\phi_\beta^{-1}(p, (v^1, ..., v^n)^T) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i_{(\beta)}}|_p = v^i \frac{\partial x^j_{(\alpha)}}{\partial x^i_{(\beta)}}(p) \frac{\partial}{\partial x^i_{(\alpha)}}|_p.$$

Funkce $\frac{\partial x^j_{(\alpha)}}{\partial x^i_{(\beta)}}(p)$ jsou hladké a tvoří prvky regulární matice $g_{\alpha\beta}$. Odtud plyne, že zobrazení $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$ je hladké. Tím jsou splněny všechny požadavky tvrzení 1.1.2 a soubor (TM, π, M) proto tvoří vektorový bandl. Nazýváme jej **tečný bandl** k M.

1.2 Vektorový prostor řezů

Definice 1.2.1. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a U je otevřená podmnožina M. Řekneme, že zobrazení $\sigma\colon U \to E$ je **řez vektorového bandlu** (E, π, M) nad U, právě když $\pi \circ \sigma = \mathbb{I}_U$.

Množinu všech hladkých řezů vektorového bandlu (E, π, M) nad U označujeme $\Gamma(U, E)$ nebo $\Gamma_U(E)$. Je-li U celá varieta M, zkracujeme zápis $\Gamma(M, E)$ pouze na $\Gamma(E)$.

Poznámka 1. Pro každé $f \in C^\infty(U)$ a $\sigma \in \Gamma(U, E)$ definujeme řez $f\sigma$:

$$(f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p) \in E_p, \quad p \in U. \tag{1.3}$$

Potom je i $f\sigma \in \Gamma(U, E)$ a snadno se ověří, že $\Gamma(U, E)$ tvoří modul nad okruhem $C^\infty(U)$.

Definice 1.2.2. Nechť (E_1, π_{E_1}, M) a (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly nad M a nechť zobrazení $\mathcal{F} : E_1 \to E_2$, $\varphi = \mathbb{I}_M$ splňují požadavky definice 1.1.3, kromě hladkosti. Definujeme zobrazení $\mathcal{F}_\#$ z prostoru řezů bandlu (E, π_E, M) do prostoru řezů bandlu (F, π_F, M) takto:

$$\mathcal{F}_\#(\sigma) := \mathcal{F} \circ \sigma. \tag{1.4}$$

Poznámka 2. Toto zobrazení je $C^\infty(M)$-lineární, neboť pro každé $f \in C^\infty(M)$ platí:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_\#(f\sigma))(p) &= (\mathcal{F} \circ (f\sigma))(p) = \mathcal{F}(f(p)\sigma(p)) = \\ &= f(p)(\mathcal{F} \circ \sigma(p)) = (f\mathcal{F}_\#(\sigma))(p), \quad p \in M.\end{aligned}$$

Poznámka 3. Později budeme symbol # u zobrazení $\mathcal{F}_\#$ často vynechávat, neboť bude z kontextu jasné, o které zobrazení se jedná. V této kapitole ho však pro přehlednost budeme důsledně vypisovat.

Lemma 1.2.3. Zobrazení $\mathcal{F} : E_1 \to E_2$ z definice 1.2.2 je hladké, právě když $\mathcal{F}_\# \colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$.

Tvrzení 1.2.4. Nechť (E, π, M) je hladký vektorový bandl a $\sigma \in \Gamma(U, E)$, kde U je otevřená podmnožina M. Potom pro každé $p \in U$ a každé jeho okolí W, které splňuje $\overline{W} \subset U$, existuje řez $\bar{\sigma} \in \Gamma(E)$ tak, že se s řezem σ shoduje na okolí W.

Zobrazení mezi prostory řezů dvou vektorových bandlů pro nás budou velmi důležité. Prozkoumejme tedy nyní některé jejich vlastnosti.

Definice 1.2.5. Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly a nechť $\alpha : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ je $\mathbb{R}$-lineární zobrazení. Řekneme, že zobrazení α je **lokální operátor**, právě když pro každé otevřené okolí $U \subset M$, na kterém je řez σ nulový, je i řez $\alpha(\sigma)$ nulový. Řekneme, že zobrazení α je **bodový operátor**, právě když pro každý bod $p \in M$, ve kterém je řez σ nulový, je i řez $\alpha(\sigma)$ nulový.

Tvrzení 1.2.6. Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly. Je-li zobrazení $\alpha \colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ $C^\infty(M)$-lineární, potom je to lokální operátor.

Věta 1.2.7. Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly, zobrazení $\alpha \colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ je lokální operátor a $\sigma \in \Gamma(E_1)$ je globální řez. Potom ke každé otevřené podmnožině $U \subset M$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\alpha_U \colon \Gamma(U, E_1) \to \Gamma(U, E_2)$ tak, že

$$\alpha_U(\sigma|_U) = \alpha(\sigma)|_U. \tag{1.5}$$

Zobrazení α_U nazýváme **zúžení** α na U.

Důkaz. Nechť U je otevřená podmnožina M, $p \in U$ a $\sigma \in \Gamma(U, E_1)$. Podle tvrzení 1.2.4 existuje globální řez $\bar{\sigma} \in \Gamma(E_1)$, který se shoduje se σ na nějakém okolí W bodu p. Definujme $\alpha_U(\sigma)$ na W takto:

$$(\alpha_U(\sigma))(q) := (\alpha(\bar{\sigma}))(q), \quad q \in W.$$

Nechť $\tilde{\sigma} \in \Gamma(E_1)$ je jiný řez, který se se σ a $\bar{\sigma}$ shoduje na okolí W. Protože α je lokální operátor, platí $\alpha(\bar{\sigma})|_W = \alpha(\tilde{\sigma})|_W$ a tedy $(\alpha_U(\sigma))(q)$ je dobře definováno, neboť nezávisí na výběru $\bar{\sigma}$. Z definice dále rovnou plyne, že $\alpha_U(\sigma)$ je hladké, jakožto řez (E_2, π_{E_2}, M).

Nechť je nyní $\psi \in \Gamma(E_1)$ globální řez. Zjevně ψ tvoří globální prodloužení $\psi|_U$. Potom pro každé $p \in U$ platí:

$$(\alpha_U(\psi|_U))(p) = (\alpha(\psi))(p),$$

neboli $\alpha_U(\psi|_U) = \alpha(\psi)|_U$. □

Tvrzení 1.2.8. Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly, zobrazení $\alpha\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ je lokální operátor, U je otevřená podmnožina M. Je-li α $C^\infty(M)$-lineární, potom je zúžení $\alpha_U : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F)$ $C^\infty(U)$-lineární.

Při popisu vektorových prostorů často využíváme jejich báze. Obecně nelze podobnou strukturu zavést na celém vektorovém bandlu, ale lokálně můžeme pomocí řezů definovat tzv. rám, který nad každým bodem tvoří bázi příslušného vlákna.

Definice 1.2.9. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl hodnosti r a U je otevřená podmnožina M. Řekneme, že soubor řezů $(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ bandlu (E, π, M) nad U je **lokální rám vektorového bandlu** (E, π, M), právě když pro každé $p \in U$ tvoří soubor $(\sigma_1(p), ..., \sigma_r(p))$ bázi prostoru E_p. $(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ nazveme **globální rám vektorového bandlu** (E, π, M), právě když U tvoří celé M.

Poznámka 4. Z definice vektorového bandlu plyne, že pro každý bod $m \in M$ existuje nějaké okolí, na němž lze sestrojit lokální rám.

Tvrzení 1.2.10. Vektorový bandl (E, π, M) je triviální, právě když má globální rám.

Lemma 1.2.11. $C^\infty(M)$-lineární zobrazení $\alpha\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ je bodový operátor.

Důkaz. Chceme ukázat, že pro každý řez $\sigma \in \Gamma(E_1)$ a bod $p \in M$, platí:

$$\sigma(p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\alpha(\sigma))(p) = 0.$$

Z poznámky 4 víme, že existuje okolí U bodu p, na němž existuje lokální rám. Označme jej $(\sigma_1, ..., \sigma_r)$. Řez σ můžeme tedy na okolí U zapsat ve tvaru

$$\sigma|_U = a^i \sigma_i, \quad a^i \in C^\infty(U).$$

Je-li nyní $\sigma(p) = 0$, potom nutně všechna $a^i(p) = 0$. S využitím 1.2.6, 1.2.7 a 1.2.8 potom můžeme psát:

$$(\alpha(\sigma))(p) = (\alpha|_U(\sigma|_U))(p) = (\alpha|_U(a^i \sigma_i))(p) = a^i(p)(\alpha(\sigma_i))(p) = 0.$$

□

Lokální rám lze také využít pro důkaz následujícího tvrzení.

Tvrzení 1.2.12. Nechť $\alpha : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ je $C^\infty(M)$-lineární. Potom pro každé $p \in M$ existuje jednoznačně lineární zobrazení $\mathcal{F}_p : E_1|_p \to E_2|_p$ tak, že pro každé $\sigma \in \Gamma(E_1)$,

$$\mathcal{F}_p(\sigma(p)) = \alpha(\sigma)(p). \tag{1.6}$$

Věta 1.2.13. Nechť $\{\mathcal{F}\}$ je množina všech morfizmů bandlů E_1 a E_2 nad M a $\{\alpha\}$ množina všech $C^\infty(M)$-lineárních zobrazení z $\Gamma(E_1)$ do $\Gamma(E_2)$. Potom existuje vzájemně jednoznačné přiřazení

$$\{\mathcal{F}\} \longleftrightarrow \{\alpha\}.$$

Důkaz. Ukážeme nejprve surjektivitu. Mějme $C^\infty(M)$-lineární zobrazení $\alpha\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$. Z tvrzení 1.2.12 víme, že pro každé $p \in M$ a $\sigma \in \Gamma(E_1)$ existuje lineární zobrazení $\mathcal{F}_p : E_1|_p \to E_2|_p$ splňující vztah $\mathcal{F}_p(\sigma(p)) = \alpha(\sigma)(p)$. Definujme zobrazení $\mathcal{F}\colon E_1 \to E_2$ pro každé $e \in E_1|_p$ takto:

$$\mathcal{F}(e) = \mathcal{F}_p(e).$$

Potom pro libovolné $p \in M$ a $\sigma \in \Gamma(E_1)$ platí:

$$(\mathcal{F}_\#(\sigma))(p) = \mathcal{F}(\sigma(p)) = \mathcal{F}_p(\sigma(p)) = \alpha(\sigma)(p),$$

což dokazuje $\alpha = \mathcal{F}_\#$. Protože $\mathcal{F}_\#\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$, je zobrazení $\mathcal{F}\colon E_1 \to E_2$ podle lemmatu 1.2.3 hladké. Navíc pro každé $p \in M$ a $e \in E_1|_p$ platí:

$$(\pi_{E_2} \circ \mathcal{F})(e) = \pi_{E_2}(\mathcal{F}_p(e)) = \pi_{E_2}(e') = p = \pi_{E_1}(e), \quad e' \in E_2|_p.$$

$\mathcal{F}$ je tedy podle definice morfizmus vektorových bandlů.

Ukažme dále injektivitu. Nechť $\mathcal{F}, \mathcal{G} : E_1 \to E_2$ jsou dva morfizmy bandlů takové, že $\mathcal{F}_\# = \mathcal{G}_\# = \alpha : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$. Pro libovolné $e \in E_1|_p$ vezmeme řez $\sigma \in \Gamma(E_1)$ tak, aby $\sigma(p) = e$. Potom platí:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e) = \mathcal{F}(\sigma(p)) = (\mathcal{F}_\#(\sigma))(p) = (\mathcal{G}_\#(\sigma))(p) = \\ = \mathcal{G}(\sigma(p)) = \mathcal{G}(e),\end{aligned}$$

tedy $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Tvrzení 1.2.14. Nechť (E_i, π_{E_i}, M), $i \in \{1, ..., k\}$, (E_0, π_{E_0}, M) jsou vektorové bandly a nechť zobrazení $\alpha\colon \Gamma(E_1) \times ... \times \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_0)$ je $C^\infty(M)$-lineární v každém argumentu. Potom pro každé $p \in M$ existuje zobrazení $\mathcal{F}_p\colon E_1|_p \times ... \times E_k|_p \to E_0|_p$, které je $\mathbb{R}$-lineární v každém argumentu a pro všechna $\sigma_i \in \Gamma(E_i)$ splňuje:

$$\mathcal{F}_p(\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p)) = (\alpha(\sigma_1, ..., \sigma_k))(p).$$

1.3 Operace na vektorových bandlech

Definice 1.3.1. Řekneme, že vektorový bandl (L, π_L, M) je **podbandl** vektorového bandlu (E, π_E, M), právě když platí:

1. Prostor L je regulární (vložená) podvarieta variety E.
2. Vložení $i\colon L \to E$ je hladký morfizmus bandlů nad M.

Definice 1.3.2. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a zobrazení $\varphi : N \to M$ je hladké zobrazení variet. Definujme množinu $\varphi^* E$, projekci $\pi^!\colon \varphi^* E \to N$ a zobrazení $\hat{\varphi}\colon \varphi^* E \to E$ následovně:

$$\begin{aligned}\varphi^* E &:= \{(n, e) \in N \times E \mid \varphi(n) = \pi(e)\},\\ \pi^!(n, e) &:= n,\\ \hat{\varphi}(n, e) &:= e.\end{aligned}$$

Trojici $(\varphi^* E, \pi^!, N)$ nazveme **pullback bandl** vektorového bandlu (E, π, M).

Poznámka 5. Pullback bandl tedy splňuje následující komutativní diagram:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*E & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & E \\ {\scriptstyle \pi^!}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ N & \xrightarrow[\varphi]{} & M. \end{array}$$

Poznámka 6. Ke každému řezu $\sigma \in \Gamma(E)$ lze definovat **pullback řez** $\varphi^*\sigma \in \Gamma(\varphi^*E)$, který každému $n \in N$ přiřazuje bod $(n, e) \in \varphi^*E$ tak, aby platilo:

$$\hat{\varphi}((\varphi^*\sigma)(n)) = \sigma(\varphi(n)).$$

Tvrzení 1.3.3. Pullback bandl $(\varphi^*E, \pi^!, N)$ má strukturu vektorového bandlu nad N.

Důkaz. Opět využijeme tvrzení 1.1.2. První dva požadavky tohoto tvrzení jsou zjevně splněny. Protože (E, π, M) je vektorový bandl, existuje soubor $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, kde $\{U_\alpha\}$ je otevřené pokrytí M a $\phi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ jsou lokální trivializace. Pomocí zobrazení φ můžeme zavést pokrytí $\{V_\alpha\}$ variety N, kde

$$V_\alpha := \varphi^{-1}(U_\alpha).$$

Toto pokrytí je díky hladkosti φ opět otevřené. Definujme nyní zobrazení $\psi_\alpha : \pi^{!^{-1}}(V_\alpha) \to V_\alpha \times \mathbb{R}^r$:

$$\psi_\alpha(n, e) := (n, \pi_2(\phi_\alpha(e))).$$

Z definice V_α a φ^*E je pro všechna $(n, e) \in \pi^{!^{-1}}(V_\alpha)$, $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Zjevně platí, že $\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi^!$, a z linearity $\phi_\alpha|_{E_p}$ je pro všechna $n \in N$ i $\psi_\alpha|_{(\varphi^*E)_n} : (\varphi^*E)_n \to \{n\} \times \mathbb{R}^r$ lineární. Ukažme, že je toto zobrazení bijektivní. Definujme zobrazení ψ_α^{-1} pro všechna $(n, x) \in V_\alpha \times \mathbb{R}^r$ takto:

$$\psi_\alpha^{-1}(n, x) := (n, \phi_\alpha^{-1}(\varphi(n), x)).$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1})(n, x) &= \psi_\alpha(n, \phi_\alpha^{-1}(\varphi(n), x))) = (n, \pi_2(\varphi(n), x)) = (n, x), \\ (\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha)(n, e) &= \psi_\alpha^{-1}(n, \pi_2(\phi_\alpha(e))) = (n, \phi_\alpha^{-1}(\pi(e), \pi_2(\phi_\alpha(e)))) = (n, e). \end{aligned}$$

Nakonec je třeba ukázat hladkost přechodových zobrazení. Pro libovolná dvě okolí V_α, V_β s neprázdným průnikem a pro každé $n \in V_\alpha \cap V_\beta$ platí:

$$\begin{aligned} [g^*_{\alpha\beta}(n)]x &= \pi_2(\psi_\alpha(\psi_\beta^{-1}(n, x))) = \pi_2(\psi_\alpha(n, \phi_\beta^{-1}(\varphi(n), x))) = \\ &= \pi_2(\phi_\alpha(\phi_\beta^{-1}(\varphi(n), x))) = [g_{\alpha\beta}(\varphi(n))]x, \end{aligned}$$

kde $g_{\alpha\beta}$ značí přechodová zobrazení na (E, π, M). Vidíme, že $g^*_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ \varphi$. Z hladkosti $g_{\alpha\beta}$ a φ plyne hladkost $g^*_{\alpha\beta}$ a $(\varphi^*E, \pi^!, N)$ tedy tvoří vektorový bandl. □

Věta 1.3.4 (univerzální vlastnost pullback bandlu)**.** Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, N) jsou vektorové bandly, $(\mathcal{F} : E_2 \to E_1, \varphi : N \to M)$ je morfizmus bandlů a nechť

$(\varphi^* E_1, \pi^!, N)$ je pullback bandl. Potom existuje právě jeden morfizmus vektorových bandlů $(\hat{\mathcal{F}}\colon E_2 \to \varphi^* E_1, \mathbb{I}_N)$ tak, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[drr, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, dotted, "\hat{\mathcal{F}}"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_{E_2}"'] & & \\
& \varphi^* E_1 \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[d, "\pi^!"] & E_1 \arrow[d, "\pi_{E_1}"] \\
& N \arrow[r, "\varphi"'] & M.
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Důkaz. Jednoznačnost plyne přímo z diagramu (1.7), neboť pro každé $q \in E_2$ je nutně $\hat{\mathcal{F}}(q) = (\pi_{E_2}(q), \mathcal{F}(q))$. Navíc $\varphi(\pi_{E_2}(q)) = \pi_{E_1}(\mathcal{F}(q))$ a proto $(\pi_{E_2}(q), \mathcal{F}(q)) \in \varphi^* E$. Protože $\mathcal{F}$ je lineární po vláknech, je i zobrazení $\hat{\mathcal{F}}$ lineární po vláknech. Z hladkosti π_{E_2}, $\mathcal{F}$ dostáváme hladkost $\hat{\mathcal{F}}$. $\hat{\mathcal{F}}$ je tedy morfizmus bandlů nad N. $\square$

Příklad 4 (Restrikce vektorového bandlu)**.** Nechť (E, π, M) je vektorový bandl, $S \subset M$ je podvarieta a $i\colon S \to M$ její vložení do M. Označme $E|_S := \pi^{-1}(S)$ a π_S zúžení π na $E|_S$. Z definice pullback bandlu a vložení i platí:

$$i^* E = \{(s, e) \in S \times E \mid i(s) = \pi(e)\} = \{(s, e) \in s \times E \mid s = \pi(e)\}.$$

Prostor $i^* E$ lze tedy ztotožnit s $E|_S$ a projekce $\pi^!\colon i^* E \to S$ s π_S. $(E|_S, \pi_S, S)$ proto má strukturu vektorového bandlu a nazýváme jej **restrikce vektorového bandlu** (E, π, M).

Definice 1.3.5. Nechť (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) jsou vektorové bandly obecně různé hodnosti. Direktní součet totálních prostorů E_1, E_2 definujme jako množinu

$$E_1 \oplus E_2 := \bigsqcup_{p \in M} E_1|_p \oplus E_2|_p.$$

Dále definujme projekci $\pi : E_1 \oplus E_2 \to M$ pro každý bod $(e, e') \in E_1|_p \oplus E_2|_p$ přirozeně jako

$$\pi((e, e')) := p.$$

Trojici $(E_1 \oplus E_2, \pi, M)$ nazveme **direktní součet** vektorových bandlů (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M).

Poznámka 7. Na tomto direktním součtu lze pomocí vlastností vektorových bandlů (E_1, π_{E_1}, M), (E_2, π_{E_2}, M) opět zavést strukturu vektorového bandlu.

Kapitola 2

Leibnizovy, Lieovy a Courantovy algebroidy

2.1 Leibnizovy algebroidy

Definice 2.1.1 (Leibnizův algebroid)**.** Nechť (E, π, M) je vektorový bandl, dvojice $(\rho\colon E \to TM, \mathbb{I}_M)$ hladký morfizmus bandlů nad M a nechť $[\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ je $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení. Řekneme, že trojice $(E, \rho, [\cdot,\cdot]_E)$ je **Leibnizův algebroid**, právě když platí:

1. Pro každé $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ a $f \in C^\infty(M)$ platí *Leibnizovo pravidlo*:
$$[\sigma, f\sigma']_E = f[\sigma, \sigma']_E + (\rho(\sigma)f)\sigma'. \tag{2.1}$$
2. Pro každé $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Gamma(E)$ splňuje zobrazení $[\cdot,\cdot]_E$ *Leibnizovu identitu*:
$$[\sigma, [\sigma', \sigma'']_E]_E = [[\sigma, \sigma']_E, \sigma'']_E + [\sigma', [\sigma, \sigma'']_E]_E. \tag{2.2}$$

Zobrazení ρ nazýváme **kotva Leibnizova algebroidu**.

Poznámka 8. Nechť $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Gamma(E)$ a $f \in C^\infty(M)$. Z (2.2) dostáváme:
$$[\sigma, [\sigma', f\sigma'']_E]_E = [[\sigma, \sigma']_E, f\sigma'']_E + [\sigma', [\sigma, f\sigma'']_E]_E. \tag{2.3}$$
Všechny tři výrazy upravíme pomocí Leibnizova pravidla:
$$\begin{aligned}[\sigma, [\sigma', f\sigma'']_E]_E &= [\sigma, f[\sigma', \sigma'']_E + (\rho(\sigma')f)\sigma'']_E = f[\sigma, [\sigma', \sigma'']_E]_E + \\ &+ (\rho(\sigma)f)[\sigma', \sigma'']_E + (\rho(\sigma')f)[\sigma, \sigma'']_E + (\rho(\sigma)(\rho(\sigma')f))\sigma'',\end{aligned}$$

$$[[\sigma, \sigma']_E, f\sigma'']_E = f[[\sigma, \sigma']_E, \sigma'']_E + (\rho([\sigma, \sigma']_E)f)\sigma,$$

$$\begin{aligned}[\sigma', [\sigma, f\sigma'']_E]_E &= [\sigma', f[\sigma, \sigma'']_E + (\rho(\sigma)f)\sigma'']_E = f[\sigma', [\sigma, \sigma'']_E]_E + \\ &+ (\rho(\sigma')f)[\sigma, \sigma'']_E + (\rho(\sigma)f)[\sigma', \sigma'']_E + (\rho(\sigma')(\rho(\sigma)f))\sigma''.\end{aligned}$$
Dosazením do (2.3) získáváme:
$$(\rho(\sigma')(\rho(\sigma)f))\sigma'' + (\rho([\sigma, \sigma']_E)f)\sigma'' = (\rho(\sigma)(\rho(\sigma')f))\sigma''.$$
A konečně z definice komutátoru $[\cdot,\cdot]$:
$$\rho([\sigma, \sigma']_E) = [\rho(\sigma), \rho(\sigma')]. \tag{2.4}$$
Zobrazení ρ je tedy závorkový homomorfizmus.

Příklad 5. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a nechť pro každé $m \in M$ existuje $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení $[\cdot,\cdot]_m : E_m \times E_m \to E_m$ splňující Leibnizovu identitu. Dále definujme pro každé $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ zobrazení $[\cdot,\cdot] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ takto:

$$[\sigma, \sigma'](m) := [\sigma(m), \sigma'(m)]_m, \quad m \in M.$$

Potom pro všechny $f \in C^\infty(M)$ platí

$$[\sigma, f\sigma'] = f[\sigma, \sigma']$$

a zobrazení $[\cdot,\cdot]$ navíc splňuje Leibnizovu identitu. $(E, 0, [\cdot,\cdot])$ tedy tvoří Leibnizův algebroid.

Poznámka 9. Jedná se o příklad tzv. *úplně netranzitivního Leibnizova algebroidu* $(\rho = 0)$.

Příklad 6. Nechť $E = TM \oplus \Lambda^p T^*M$, kde $p \geq 0$. Potom řezy E označíme $X+\xi$, kde $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $\xi \in \Omega^p(M)$. Kotvu ρ definujeme jako projekci na TM, tj. $\rho(X+\xi) := X$, a závorku $[\cdot,\cdot]_D$ (nazývanou **Dorfmanové závorka**) definujeme pro všechny řezy $X+\xi$, $Y+\eta \in \Gamma(E)$ následovně:

$$[X+\xi, Y+\eta]_D := [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - i_Y d\xi.$$

Ukažme nyní, že $[\cdot,\cdot]_D$ splňuje Leibnizovo pravidlo.

$$\begin{aligned}
[X+\xi, f(Y+\eta)]_D &= [X+\xi, fY+f\eta]_D = [X, fY] + \mathcal{L}_X(f\eta) + i_{fY}d\xi = \\
&= X(fY) - fYX + f\mathcal{L}_X\eta + \mathcal{L}_X(f)\eta - fi_Y d\xi = \\
&= fXY + (Xf)Y - fYX + f\mathcal{L}_X\eta + (Xf)\eta - fi_Y d\xi = \\
&= f[X,Y] + f\mathcal{L}_X\eta - fi_Y d\xi + Xf(Y+\eta) = \\
&= f[X+\xi, Y+\eta]_D + (\rho(X+\xi)f)(Y+\eta)
\end{aligned}$$

Dále chceme ukázat, že $[\cdot,\cdot]_D$ splňuje i Leibnizovu identitu, tj. že platí

$$\begin{aligned}
[X+\xi, [Y+\eta, Z+\tau]_D]_D = {} & [[X+\xi, Y+\eta]_D, Z+\tau]_D + \\
& + [Y+\eta, [X+\xi, Z+\tau]_D]_D.
\end{aligned}$$

Ekvivalentně pomocí definice $[\cdot,\cdot]_D$

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\tau - i_Z d\eta) - i_{[Y,Z]}d\xi = {} & [[X,Y]Z] + \mathcal{L}_{[X,Y]}\tau - i_Z d(\mathcal{L}_X\eta - i_Y d\xi) + \\
& + [Y,[X,Z]] + \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\tau - i_Z d\xi) - i_{[X,Z]}d\eta.
\end{aligned}$$

Protože pro komutátor a Lieovu derivaci platí

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]], \\
\mathcal{L}_{[X,Y]} &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X,
\end{aligned}$$

stačí ukázat následující rovnost

$$-\mathcal{L}_X(i_Z d\eta) - i_{[Y,Z]}d\xi = -i_Z d(\mathcal{L}_X\eta) + i_Z d(i_Y d\xi) - \mathcal{L}_Y(i_Z d\xi) - i_{[X,Z]}d\eta. \tag{2.5}$$

Pro vnitřní součin, Lieovu derivaci a vnější derivaci dále platí následující identity (vizte [5]):

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X, \tag{2.6}$$
$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X, \tag{2.7}$$
$$\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X. \tag{2.8}$$

Upravíme (2.5) a dostáváme

$$\begin{aligned} i_Z \mathcal{L}_Y d\xi &= -i_Z d(\mathcal{L}_X \eta) + i_Z d(i_Y d\xi) + i_Z \mathcal{L}_X d\eta, \\ i_Z(i_Y d + d i_Y) d\xi &= i_Z d(i_Y d\xi) \end{aligned}$$

Tato rovnost je již splněna, neboť $dd = 0$. Trojice $(E, \rho, [\cdot,\cdot]_D)$ tedy tvoří Leibnizův algebroid.

Definujme nyní ještě zobrazení $\mathcal{L}^E$ jako analogii Lieovy derivace na tenzorové algebře $\mathcal{T}(E)$, které je indukované závorkou $[\cdot,\cdot]_E$.

Definice 2.1.2. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a dále nechť $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$, $\psi \in \Gamma(E^*)$ a $f \in C^\infty(M)$. Potom na prostoru hladkých tenzorových polí typu $\binom{p}{q}$ definujeme zobrazení $\mathcal{L}^E_\sigma \colon \mathcal{T}^p_q(E) \to \mathcal{T}^p_q(E)$ takto:

1. Pro $\mathcal{T}^0_0(E) \cong C^\infty(M)$, $\mathcal{L}^E_\sigma f = \rho(\sigma) f$.
2. Pro $\mathcal{T}^1_0(E) \cong \Gamma(E)$, $\mathcal{L}^E_\sigma \sigma' = [\sigma, \sigma']_E$.
3. Pro $\mathcal{T}^0_1(E) \cong \Gamma(E^*)$, definujeme $\mathcal{L}^E_\sigma \psi$ pomocí kontrakce
$$\langle \mathcal{L}^E_\sigma \psi, \sigma' \rangle = \rho(\sigma)\langle \psi, \sigma' \rangle - \langle \psi, [\sigma, \sigma']_E \rangle.$$
4. Pro obecný tenzor $\tau \in \mathcal{T}^p_q(E)$ definujeme $\mathcal{L}^E_\sigma \tau$ takto:
$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^E_\sigma \tau)(\sigma_1, \dots, \sigma_q; \psi_1, \dots, \psi_p) = \rho(\sigma)\tau(\sigma_1, \dots, \sigma_q; \psi_1, \dots, \psi_p) - \\ - \tau(\mathcal{L}^E_\sigma \sigma_1, \dots, \sigma_q; \psi_1, \dots, \psi_p) - \dots \\ \dots - \tau(\sigma_1, \dots, \sigma_q; \psi_1, \dots, \mathcal{L}^E_\sigma \psi_p), \end{aligned}$$
pro všechny $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in \Gamma(E)$, $\psi_1, \dots, \psi_p \in \Gamma(E^*)$.

2.2 Lieovy algebroidy

Definice 2.2.1 (Lieův algebroid)**.** Nechť $(L, l, [\cdot,\cdot]_L)$ je Leibnizův algebroid. Řekneme, že trojice $(L, l, [\cdot,\cdot]_L)$ je **Lieův algebroid**, právě když $[\cdot,\cdot]_L$ je antisymetrické zobrazení. $[\cdot,\cdot]_L$ nazýváme **Lieova závorka** a Leibnizovu identitu **Jacobiho identita**.

Příklad 7. Nechť (TM, π, M) je tečný bandl k M a $[\cdot,\cdot]$ je komutátor vektorových polí. Potom $(TM, \mathbb{I}_{TM}, [\cdot,\cdot])$ tvoří Lieův algebroid.

Příklad 8. Nechť $M = \{p\}$ a $(V, [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra. Potom $(V, 0, [\cdot,\cdot])$ je Lieův algebroid nad bodem p.

Příklad 9. Nechť $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ je antisymetrický bivektor na M a $L = T^*M$. Pro každé $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ definujme kotvu ρ a závorku $[\cdot,\cdot]_\Pi$ takto:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha) &:= \Pi(\alpha,\cdot),\\ [\alpha,\beta]_\Pi &:= \mathcal{L}_{\Pi(\alpha,\cdot)}\beta - i_{\Pi(\beta,\cdot)}d\alpha.\end{aligned}$$

Ukažme, že závorka je antisymetrická a splňuje Leibnizovo pravidlo.

$$\begin{aligned}[\alpha, f\beta]_\Pi &= \mathcal{L}_{\Pi(\alpha,\cdot)}(f\beta) - i_{\Pi(f\beta,\cdot)}d\alpha =\\ &= f\mathcal{L}_{\Pi(\alpha,\cdot)}\beta + (\Pi(\alpha,\cdot)f)\beta - f i_{\Pi(\beta,\cdot)}d\alpha =\\ &= f[\alpha,\beta] + (\rho(\alpha)f)\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]_\Pi + [\beta,\alpha]_\Pi &= \mathcal{L}_{\Pi(\alpha,\cdot)}\beta - i_{\Pi(\beta,\cdot)}d\alpha + \mathcal{L}_{\Pi(\beta,\cdot)} - i_{\Pi(\alpha,\cdot)}d\beta =\\ &= i_{\Pi(\alpha,\cdot)}d\beta + d i_{\Pi(\alpha,\cdot)}\beta - i_{\Pi(\beta,\cdot)}d\alpha +\\ &+ i_{\Pi(\beta,\cdot)}d\alpha + d i_{\Pi(\beta,\cdot)}\alpha - i_{\Pi(\alpha,\cdot)}d\beta = 0,\end{aligned}$$

kde jsme pro úpravu druhého vztahu využili identity (2.7) a antisymetrie bivektoru Π. Určit, za jakých podmínek splňuje závorka Jacobiho identitu je obtížnější. Lze však ukázat, že to nastane právě když Π je Poissonův bivektor, tj. právě když vztah $\{f,g\} = \Pi(df, dg)$ definuje Poissonovu závorku na M [12].

2.3 Courantovy algebroidy

Definice 2.3.1. Nechť (E,π,M) je vektorový bandl. Symetrickou $C^\infty(M)$-bilineární formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_E \colon \Gamma(E)\times\Gamma(E) \to C^\infty(M)$, která v každém bodě $p \in M$ indukuje skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$, nazýváme **povláknová metrika** (párování) na E.

Poznámka 10. Je-li z kontextu jasné, nad kterým bodem z M uvažujeme skalární součin, a je-li třeba rozlišit metriku podle totálního prostoru, píšeme v dolním indexu pouze označení prostoru, bod vynecháváme.

Definice 2.3.2 (Courantův algebroid podle Roytenberga [9])**.** Nechť $(E,\rho,[\cdot,\cdot]_E)$ je Leibnizův algebroid a $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ je povláknová metrika na E. Řekneme, že čtveřice $(E,\rho,\langle\cdot,\cdot\rangle_E,[\cdot,\cdot]_E)$ je **Courantův algebroid**, právě když platí:

1. Pro všechny $\sigma,\sigma',\sigma'' \in \Gamma(E)$,

$$\rho(\sigma)\langle\sigma',\sigma''\rangle_E = \langle[\sigma,\sigma']_E,\sigma''\rangle_E + \langle\sigma',[\sigma,\sigma'']_E\rangle_E. \tag{2.9}$$

2. Pro všechny $\sigma,\sigma' \in \Gamma(E)$,

$$\langle[\sigma,\sigma]_E,\sigma'\rangle_E = \frac{1}{2}\rho(\sigma')\langle\sigma,\sigma\rangle_E. \tag{2.10}$$

Formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ nazýváme **Courantova metrika**.

Poznámka 11. Označme $g_{E\#} \in \mathcal{T}^0_2(E)$ tenzorové pole odpovídající formě $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$. Potom lze podmínku (2.9) přepsat takto:

$$\mathcal{L}^E_e g_{E\#} = 0.$$

Na tenzorové pole $g_{E\#}$ můžeme také nahlížet jako na zobrazení $g_{E\#}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E^*)$, kterému lze díky větě 1.2.13 jednoznačně přiřadit morfizmus bandlů $g_E\colon E \to E^*$. Z definice $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ navíc plyne, že se jedná o izomorfizmus bandlů nad M. Označme dále $\rho^T : T^*M \to E^*$ transpozici kotvy ρ. Složení $g_E^{-1} \circ \rho^T$ definuje nové užitečné zobrazení $\rho^*\colon T^*M \to E$, které pro každé $\alpha \in \Omega^1(M)$ a $\sigma \in \Gamma(E)$ splňuje podmínku

$$\langle \rho^*(\alpha), \sigma\rangle_E = \langle \alpha, \rho(\sigma)\rangle. \tag{2.11}$$

Nakonec definujme zobrazení $\mathcal{D}\colon C^\infty(M) \to \Gamma(E)$ jako $\mathcal{D} := \rho^* \circ d$, kde d je vnější derivace. $\mathcal{D}$ je tedy zavedeno vztahem

$$\langle \mathcal{D}f, \sigma\rangle_E = \rho(\sigma)f, \tag{2.12}$$

pro každé $f \in C^\infty(M)$ a $e \in \Gamma(E)$. Podmínka (2.10) lze potom přepsat do tvaru

$$[\sigma,\sigma]_E = \frac{1}{2}\mathcal{D}\langle\sigma,\sigma\rangle_E, \tag{2.13}$$

což můžeme dále upravit na

$$[\sigma,\sigma']_E = -[\sigma',\sigma]_E + \mathcal{D}\langle\sigma,\sigma'\rangle_E. \tag{2.14}$$

Poznámka 12. Vztah (2.14) nyní umožňuje odvození Leibnizova pravidla v prvním argumentu:

$$[f\sigma,\sigma']_E = f[\sigma,\sigma']_E - (\rho(\sigma')f)\sigma + \langle\sigma,\sigma'\rangle_E \mathcal{D}f, \tag{2.15}$$

pro všechny $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$.

Poznámka 13. Ke každému Courantovu algebroidu $(E, \rho, \langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_E)$ přirozeně existuje algebroid $(E, \rho, -\langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_E)$, který označujeme $\overline{E}$.

Definice 2.3.3. Řekneme, že Courantův algebroid $(E, \rho, \langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_E)$ je **exaktní**, právě když je krátká posloupnost vektorových bandlů

$$0 \longrightarrow T^*M \xrightarrow{\rho^*} E \xrightarrow{\rho} TM \longrightarrow 0 \tag{2.16}$$

exaktní.

Od zobrazení ρ^*, ρ tedy požadujeme, aby ρ^* bylo injektivní, ρ surjektivní a $\operatorname{Im}\rho^* = \ker\rho$.

Tvrzení 2.3.4. Inkluze $\operatorname{Im}\rho^* \subseteq \ker\rho$ platí obecně pro všechny Courantovy algebroidy.

Důkaz. K důkazu využijeme Leibnizova pravidla pro první i druhý argument. Nejprve zapůsobíme zobrazením ρ na vztah (2.1), kde zaměníme $\sigma \leftrightarrow \sigma'$. Po úpravě dostáváme identitu

$$(\rho(\sigma')f)\rho(\sigma) = 0.$$

Dále zapůsobíme zobrazením ρ na vztah (2.15). Opět upravíme a dostáváme

$$(\rho(\sigma')f)\rho(\sigma) = \langle\sigma,\sigma'\rangle_E \rho(\mathcal{D}f),$$

což po využití první odvozené identity přepíšeme jako

$$\langle\sigma,\sigma'\rangle_E\rho(\mathcal{D}f)=0,$$

pro všechna $\sigma,\sigma'\in\Gamma(E)$ a $f\in C^\infty(M)$. Protože je pro každé $p\in M$ skalární součin, který indukuje povláknová metrika nedegenerovaný, lze volit řezy σ,σ' tak, aby $\langle\sigma,\sigma'\rangle_E(p)$ bylo nenulové. Tím obdržíme obecný vztah pro zobrazení ρ a $\mathcal{D}$:

$$\rho\circ\mathcal{D}=0. \tag{2.17}$$

Nakonec využijeme toho, že každé $\alpha\in\Omega^1(M)$ lze lokálně psát jako diferenciál nějaké funkce $f\in C^\infty(M)$. □

Příklad 10. Nechť $E=TM\oplus T^*M$ a $(E,\rho,[\cdot,\cdot]_D)$ je Leibnizův algebroid z příkladu 6 pro $p=1$. Definujme kanonické párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ pro každé $X+\xi,Y+\eta\in\Gamma(E)=\mathfrak{X}(M)\oplus\Omega^1(M)$ takto:

$$\langle X+\xi,Y+\eta\rangle_E:=\langle\xi,Y\rangle+\langle\eta,X\rangle.$$

Toto párování indukuje kanonický izomorfismus E a E^*, který zde působí jako identita. Z toho plyne, že zobrazení $\mathcal{D}$ působí na libovolnou funkci $f\in C^\infty(M)$ jednoduše jako

$$\mathcal{D}f=0+df.$$

Potom pro všechna $X+\xi\in\Gamma(E)$ platí

$$\begin{aligned}[X+\xi,X+\xi]_D&=[X,X]+\mathcal{L}_X\xi-i_Yd\xi=0+di_X\xi=\mathcal{D}(i_X\xi)=\mathcal{D}\langle\xi,X\rangle=\\&=\frac{1}{2}\mathcal{D}\langle X+\xi,X+\xi\rangle_E\end{aligned}$$

a pro všechna $X+\xi,Y+\eta,Z+\tau\in\Gamma(E)$ platí:

$$\begin{aligned}\rho(X+\xi)\langle Y+\eta,Z+\tau\rangle_E&=X(\langle\eta,Z\rangle+\langle\tau,Y\rangle)=\mathcal{L}_X(\langle\eta,Z\rangle+\langle\tau,Y\rangle)=\\&=\langle\mathcal{L}_X\eta,Z\rangle+\langle\eta,[X,Z]\rangle+\langle\mathcal{L}_X\tau,Y\rangle+\langle\tau,[X,Y]\rangle-i_Zi_Yd\xi-i_Yi_Zd\xi=\\&=\langle\tau,[X,Y]\rangle+\langle\mathcal{L}_X\eta-i_Yd\xi,Z\rangle+\langle\eta,[X,Z]\rangle+\langle\mathcal{L}_X\tau-i_Zd\xi,Y\rangle=\\&=\langle[X,Y]+\mathcal{L}_X\eta-i_Yd\xi,Z+\tau\rangle_E+\langle Y+\eta,[X,Z]+\mathcal{L}_X\tau-i_Zd\xi\rangle_E=\\&=\langle[X+\xi,Y+\eta]_D,Z+\tau\rangle_E+\langle Y+\eta,[X+\xi,Z+\tau]_D\rangle_E,\end{aligned}$$

kde jsme využili identitu

$$i_Yi_Z+i_Zi_Y=0.$$

$(E,\rho,\langle\cdot,\cdot\rangle_E,[\cdot,\cdot]_D)$ tedy tvoří Courantův algebroid. Upravme nyní ještě závorku $[\cdot,\cdot]_D$ následujícím způsobem. Nechť $H\in\Omega^3(M)$ je 3-forma na M. Definujme novou závorku $[\cdot,\cdot]_D^H$, zvanou **H-twistovaná Dorfmanové závorka**, pro všechna $X+\xi,Y+\eta\in\Gamma(E)$ takto:

$$[X+\xi,Y+\eta]_D^H:=[X+\xi,Y+\eta]_D-H(X,Y,\cdot).$$

Protože H je $C^\infty(M)$-lineární a úplně antisymetrická, je splnění axiomů (2.1), (2.9), (2.10) zachováno. Otázkou zůstává, za jakých podmínek je splněna i Leibnizova identita. Dosadíme tedy do vztahu (2.2) a využijeme toho, že pro klasickou Dorfmanové závorku je vztah splněn. Obdržíme následující rovnost:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X H(Y,Z,\cdot) + H(X,[Y,Z],\cdot) = -i_Z d(H(X,Y,\cdot)) + H([X,Y],Z,\cdot) +\\ + \mathcal{L}_Y H(X,Z,\cdot) + H(Y,[X,Z],\cdot).\end{aligned}$$

Výrazy upravíme pomocí vnitřního součinu i a převedeme na jednu stranu:

$$\mathcal{L}_X i_Z i_Y H + i_{[Y,Z]} i_X H + i_Z d i_Y i_X H - i_Z i_{[X,Z]} H - \mathcal{L}_Y i_Z i_X H - i_{[X,Z]} i_Y H = 0.$$

Třetí výraz upravíme pomocí identity (2.7) tak, abychom dostali vnější derivaci až k formě H, a operátory $i_{[\cdot,\cdot]}$ rozložíme pomocí vztahu (2.6). Potom pro každé $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ dostáváme

$$i_Z i_Y i_X dH = 0.$$

Forma H tedy musí být uzavřená. V takovém případě tvoří $(E, \rho, \langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_D^H)$ Courantův algebroid.

Definice 2.3.5. Nechť $(E_1, \rho_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}, [\cdot,\cdot]_{E_1})$, $(E_2, \rho_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}, [\cdot,\cdot]_{E_2})$ jsou Courantovy algebroidy nad varietou M a nechť zobrazení $\mathcal{F} : E_1 \to E_2$ je izomorfizmus bandlů nad M. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **izomorfizmus Courantových algebroidů**, právě když pro všechna $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ platí:

1. $\rho_2(\mathcal{F}(\sigma)) = \rho_1(\sigma)$,
2. $\langle \mathcal{F}(\sigma), \mathcal{F}(\sigma')\rangle_{E_2} = \langle \sigma, \sigma'\rangle_{E_1}$,
3. $[\mathcal{F}(\sigma), \mathcal{F}(\sigma')]_{E_2} = \mathcal{F}([\sigma, \sigma']_{E_1})$.

Tvrzení 2.3.6 (Ševera [10])**.** Každý exaktní Courantův algebroid je izomorfní Courantovu algebroidu vybavenému H-twistovanou Dorfmanové závorkou.

Kapitola 3

Involutivní struktury

3.1 Izotropní podbandl

Definice 3.1.1. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a S je podvarieta M. Řekneme, že (L, π_L, S) je **podbandl nad** S, právě když (L, π_L, S) je podbandl restrikce $(E|_S, \pi_S, S)$.

Mějme nyní na bandlu (E, π, M) definovanou povláknovou metriku $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Ta indukuje povláknovou metriku na $E|_S$ (pro jednoduchost ji budeme značit stejně). V každém bodě $p \in M$ tedy máme definovaný skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Pomocí něj můžeme k podbandlu (L, π_L, S) nad S sestrojit ortogonální podbandl $(L^\perp, \pi_L, S)$ nad S. Vlákno $L_s^\perp$ nad bodem $s \in S$ definujeme následovně:

$$L_s^\perp := \{v \in E_s \,|\, \langle v, l \rangle_s = 0, \, \forall l \in L_s\},$$

kde L_s je vlákno původního podbandlu L nad S.

Definice 3.1.2. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl s povláknovou metrikou $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Řekneme, že L je

1. **izotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, právě když $L \subset L^\perp$,
2. **koizotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, právě když $L^\perp \subset L$.

Množinu všech řezů L izotropních vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ označujeme $\Gamma^0(L)$, tj.

$$\Gamma^0(L) := \{\sigma \in \Gamma(L) \,|\, \langle \sigma, \sigma \rangle_E = 0\}. \tag{3.1}$$

Lemma 3.1.3. Podbandl (L, π_L, S) nad S je izotropní, právě když $\Gamma(L) = \Gamma^0(L)$.

Definice 3.1.4. Nechť $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je kvadratický vektorový prostor a W je jeho podprostor. Řekneme, že W je **maximálně izotropní**, právě když je izotropní a není vlastní podmnožinou jiného izotropního podprostoru.

Definice 3.1.5. Podbandl (L, π_L, S) nad S nazveme **maximálně izotropní**, právě když je pro každý bod $s \in S$ vlákno L_s maximálně izotropní podprostor kvadratického prostoru $(E_s, \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$.

Tvrzení 3.1.6. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl s povláknovou metrikou $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Označme (r, s) signaturu formy $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:

1. L je maximálně izotropní.
2. $\operatorname{rank}(L) = \min\{r, s\}$.
3. $\Gamma(L) = \Gamma^0(L^\perp)$.

Definice 3.1.7. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl, na kterém je definovaná kotva ρ, a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Řekneme, že L je **kompatibilní s kotvou** ρ, právě když $\rho(L) \subset TS$.

Pro účely dalších tvrzení označme symbolem $\Gamma(E; L)$ množinu všech řezů bandlu (E, π, M), jejichž zúžení na podvarietu $S \subset M$ jsou řezy podbandlu (L, π_L, S) nad S, tj.

$$\Gamma(E; L) := \{\sigma \in \Gamma(E) \,|\, \sigma|_S \in \Gamma(L)\}.$$

Lemma 3.1.8. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl s povláknovou metrikou $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a kotvou ρ a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S kompatibilní s ρ. Potom pro všechna $\psi \in \Gamma(E; L)$ a $f \in C^\infty(M)$ platí:

$$\rho(\psi|_S)(f|_S) = (\rho(\psi)f)|_S. \tag{3.2}$$

Obecněji, pro každé $\sigma \in \Gamma(L)$ a $f \in C^\infty(M)$ platí:

$$\rho(\sigma)(f|_S) = \langle (\mathcal{D}f)|_S, \sigma \rangle_E. \tag{3.3}$$

Důkaz. Ukažme nejprve, že vztah (3.2) plyne přímo z (3.3) dosazením $\sigma := \psi|_S$:

$$\rho(\psi|_S)(f|_S) = \langle (\mathcal{D}f)|_S, \psi|_S \rangle_E = \langle \mathcal{D}f, \psi \rangle_E|_S = \langle df, \rho(\psi) \rangle|_S = \rho(\psi)f)|_S.$$

V důkazu vztahu (3.3) budeme postupovat zprava doleva:

$$\langle (\mathcal{D}f)|_S, \sigma \rangle_E = \langle \rho^*|_S(df)|_S, \sigma \rangle_E = \langle (df)|_S, \rho(\sigma) \rangle = \langle d(f|_S), \rho(\sigma) \rangle = \rho(\sigma)(f|_S).$$

□

Lemma 3.1.9. Nechť S je vložená podvarieta M a $X \in \mathfrak{X}(M)$. Potom $X|_S \in \mathfrak{X}(S)$, právě když pro každé $f \in C^\infty(M)$ takové, že $f|_S = 0$, je $Xf|_S = 0$.

Tvrzení 3.1.10. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl s povláknovou metrikou $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a kotvou ρ a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Potom je (L, π_L, S) kompatibilní s kotvou ρ, právě když pro každou funkci $f \in C^\infty(M)$ platí implikace:

$$f|_S = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{D}f)|_S \in \Gamma^0(L^\perp).$$

Důkaz. Že se jedná o nutnou podmínku plyne přímo z lemmatu 3.1.8, konkrétně ze vztahu (3.3), a z toho, že pro všechna $f \in C^\infty(M)$ je $\mathcal{D}f \in \Gamma^0(E)$ (vizte (2.11) a (2.17)). Pro důkaz obrácené implikace mějme libovolný bod $s \in S$ a k němu $l \in L_s$. Sestrojme řez $\sigma \in \Gamma_U(E; L)$ procházející bodem l. Z předpokladů plyne, že pro každou funkci $f \in C^\infty(M)$ splňující $f|_S = 0$ platí:

$$(\rho(\sigma)(f))(s) = (\rho(\sigma|_S)(f|_S))(s) = \langle (\mathcal{D}f)|_S, \sigma|_S \rangle_E(s) = 0.$$

To už ale podle lemmatu 3.1.9 znamená, že $\rho(L) \subset TS$. □

Tvrzení 3.1.11. Nechť (L, π_L, S) je podbandl E nad S kompatibilní s kotvou. Nechť $\sigma \in \Gamma(E; L)$ a $\sigma' \in \Gamma(E)$ tak, že $\sigma'|_S = 0$. Potom $[\sigma, \sigma']_E|_S = 0$ a $[\sigma', \sigma]_E|_S \in \Gamma^0(L^\perp)$.

Důkaz. Označme $n = \operatorname{rank}(E)$. Mějme libovolný bod $s \in S$ a k němu na nějakém jeho okolí $U \subset M$ lokální rám $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$. Označme dále $S' = S \cap U$. Na okolí U tedy můžeme psát $\sigma' = f^i \sigma_i$, kde $f^i|_{S'} = 0$ pro všechna $i \in \{1, ..., n\}$. S využitím Leibnizova pravidla (2.1) a vztahu (3.2) potom dostáváme:

$$[\sigma, \sigma']_E|_{S'} = f^i|_{S'}[\sigma, \sigma_i]_E|_{S'} + (\rho(\sigma)(f^i))|_{S'}\sigma_i|_{S'} = (\rho(\sigma|_{S'})(f^i|_{S'}))\sigma_i|_{S'} = 0.$$

Tento vztah platí pro každé $s \in S$ a tudíž platí $[\sigma, \sigma']_E|_S = 0$. Této identity zároveň využijeme spolu se vztahem (2.14) k důkazu druhé části tvrzení:

$$[\sigma', \sigma]_E|_S = -[\sigma, \sigma']_E|_S + \mathcal{D}\langle\sigma', \sigma\rangle_E|_S = \mathcal{D}\langle\sigma', \sigma\rangle_E|_S.$$

Navíc $\langle\sigma', \sigma\rangle_E|_S = \langle\sigma'|_S, \sigma|_S\rangle_E = 0$, neboť $\sigma'|_S = 0$. Z tvrzení 3.1.10 tedy plyne, že $[\sigma', \sigma]_E|_S \in \Gamma^0(L^\perp)$. □

3.2 Involutivní podbandl

Definice 3.2.1. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl vybavený Courantovou závorkou $[\cdot, \cdot]_E$ a nechť (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Řekneme, že (L, π_L, S) je **involutivní**, právě když pro každé $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E; L)$ je $[\sigma, \sigma']_E \in \Gamma(E; L)$.

Řekneme, že (L, π_L, S) je **lokálně involutivní na otevřeném okolí** $U \subset M$, právě když pro každé $\sigma, \sigma' \in \Gamma_U(E; L)$ je $[\sigma, \sigma']_E \in \Gamma_U(E; L)$.

Lemma 3.2.2. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl a (L, π_L, S) je jeho podbandl nad S. Pak (L, π_L, S) je involutivní, právě když je lokálně involutivní na každé otevřené podmnožině $U \subset M$. Navíc platí, že pro libovolné otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ množiny S je (L, π_L, S) je involutivní, pokud je lokálně involutivní na každém U_α.

Definice 3.2.3. Nechť $(E, \rho, \langle\cdot, \cdot\rangle_E, [\cdot, \cdot]_E)$ je Courantův algebroid a L je podbandl E nad S. Řekneme, že L je **téměř involutivní struktura nad** S, právě když platí:

1. L je izotropní vzhledem k $\langle\cdot, \cdot\rangle_E$,
2. $L^\perp$ je kompatibilní s kotvou ρ.

Slovo *téměř* vynecháváme, právě když je L involutivní. Téměř involutivní strukturu nad S nazýváme **téměř Diracova struktura nad** S, právě když je L maximálně izotropní.

Tvrzení 3.2.4. Nechť (E, π, M) je vektorový bandl s kotvou ρ a závorkou $[\cdot, \cdot]_E$ a nechť (L, π_L, S) je jeho involutivní podbandl nad S. Potom platí:

1. Je-li $L \neq E|_S$, pak je L kompatibilní s kotvou.
2. Je-li $L \neq 0|_S$, pak je $L^\perp$ kompatibilní s kotvou.
3. Pro každé $\sigma \in \Gamma(E; L)$, $\psi \in \Gamma(E; L^\perp)$ je i $[\sigma, \psi]_E \in \Gamma(E; L^\perp)$.

Poznámka 14. Z tohoto tvrzení je tedy vidět, že pro netriviální podbandl (L, π_L, S) nad S je kompatibilita $L^\perp$ s kotvou nutnou podmínkou involutivity L.

Lemma 3.2.5. Nechť L je téměř involutivní struktura nad S a nechť $\sigma, \sigma', \psi, \psi' \in \Gamma(E;L)$ jsou řezy splňující $\sigma|_S = \psi|_S$ a $\sigma'|_S = \psi'|_S$. Potom platí:

$$[\sigma, \sigma']_E|_S \in \Gamma(L) \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\psi, \psi']_E|_S \in \Gamma(L).$$

Důkaz. Z definice téměř involutivní struktury víme, že $L^\perp$ je kompatibilní s kotvou. Protože $L \subset L^\perp$, je i $\Gamma(E;L) \subset \Gamma(E;L^\perp)$. Z tvrzení 3.1.11 potom dostáváme:

$$[\sigma, \sigma']_E|_S - [\psi, \psi']_E|_S = [\sigma - \psi, \sigma']_E|_S - [\psi, \psi' - \sigma']_E|_S = [\sigma - \psi, \sigma']_E|_S \in \Gamma^0(L).$$

□

Tvrzení 3.2.6. Nechť L je téměř involutivní struktura nad S s hodností n. Nechť pro každé $s \in S$ existuje okolí V a nad ním lokální rám $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ bandlu L. Dále nechť $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \in \Gamma_U(E)$, kde $V \subset U$, je množina řezů takových, že $\psi_i|_V = \sigma_i|_V$ pro všechna $i \in \{1, ..., n\}$ a $[\psi_i, \psi_j]_E \in \Gamma(E;L)$ pro všechna $i, j \in \{1, ..., n\}$. Potom je L involutivní struktura nad S.

Důkaz. Mějme dva řezy $\psi, \psi' \in \Gamma(E;L)$ a označme $\sigma = \psi|_V, \sigma' = \psi'|_V$ jejich zúžení na okolí V. Tyto řezy lze rozepsat pomocí funkcí $f^1, ..., f^n, g^1, ..., g^n \in C^\infty(V)$ jako $\sigma = f^i \sigma_i, \sigma' = g^i \sigma_i$. K těmto existuje okolí $W \subset U$ v M a funkce $\hat{f}^1, ..., \hat{f}^n, \hat{g}^1, ..., \hat{g}^n \in C^\infty(W)$ tak, že $W \cap S = V$ a $\hat{f}^i|_V = f^i, \hat{g}^i|_V = g^i$, pro všechna $i \in \{1, ..., n\}$. Definujme dále řezy $\phi, \phi' \in \Gamma_W(E;L)$ jako $\phi = \hat{f}^i \psi_i, \phi' = \hat{g}^i \psi_i$. Potom z Leibnizova pravidla pro první a druhý argument dostáváme:

$$[\phi, \phi']_E = \hat{f}^i \hat{g}^j [\psi_i, \psi_j]_E + (\rho(\phi)\hat{g}^j)\psi_j - (\rho(\phi')\hat{f}^i)\psi_i + \langle \psi_i, \phi' \rangle_E \mathcal{D} \hat{f}^i. \tag{3.4}$$

Podívejme se nyní na zúžení pravé strany vztahu (3.4) na V. $(\hat{f}^i \hat{g}^j [\psi_i, \psi_j]_E)|_V = f^i g^j [\psi_i, \psi_j]_E|_V \in \Gamma_V(L)$ podle předpokladu. 2. a 3. člen jsou také z $\Gamma_V(L)$, neboť $\psi_j|_V = \sigma_j$. Protože L je izotropní, platí, že $\langle \psi_i, \phi' \rangle_E|_V = \langle \sigma_i, \sigma \rangle_E = 0$. Odtud tedy $[\phi, \phi']_E \in \Gamma_W(E;L)$. Využijeme-li nyní lemma 3.2.5, dostáváme, že i $[\psi, \psi']_E|_W \in \Gamma_W(E;L)$. Protože $s \in S$ bylo voleno libovolně, platí $[\psi, \psi']_E \in \Gamma(E;L)$ a L je tedy involutivní. □

Kapitola 4

Morfizmus Courantových algebroidů

Cílem této kapitoly je zadefinovat pojem morfizmu Courantových algebroidů a ukázat, že Courantovy algebroidy tvoří spolu s tímto morfizmem kategorii. Než k tomu však přistoupíme, je klíčové zkonstruovat produktový Courantův algebroid $E_1 \times \overline{E}_2$ (analogické produktovému Lieovu algebroidu, jehož konstrukci lze nalézt v [7]) a především ukázat, že graf morfizmu vektorových bandlů $\mathcal{F}\colon E_1 \to E_2$ nad $\varphi\colon M_1 \to M_2$ tvoří podbandl $E_1 \times \overline{E}_2$ nad grafem φ.

4.1 Produktový Courantův algebroid

Mějme dva Courantovy algebroidy $(E_1, \rho_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}, [\cdot,\cdot]_{E_1})$, $(E_2, \rho_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}, [\cdot,\cdot]_{E_2})$ zkonstruované nad vektorovými bandly (E_1, π_{E_1}, M_1), (E_2, π_{E_2}, M_2). Z těchto bandlů lze sestrojit nový vektorový bandl (E, π, M), kde $E = E_1 \times E_2$, $M = M_1 \times M_2$ a $\pi = \pi_{E_1} \times \pi_{E_2}$. Zaveďme nyní na (E, π, M) strukturu Courantova algebroidu. K tomu se nám bude hodit skutečnost, že na tento bandl lze nahlížet jako na vektorový bandl s totálním prostorem $\pi_1^* E_1 \oplus \pi_2^* E_2$, kde $\pi_1\colon M \to M_1$, $\pi_2\colon M \to M_2$ jsou projekce. Všechny řezy tohoto bandlu lze potom lokálně vyjádřit pomocí pullbacků původních řezů na E_1, E_2. Díky tomu stačí konstruovat struktury Courantova algebroidu pouze na těchto pullback řezech a definice přirozeně přenést na všechny řezy E.

Přenesme tedy řezy $\sigma_1 \in \Gamma(E_1)$ a $\sigma_2 \in \Gamma(E_2)$ pullbacky π_1^* a π_2^* do $\Gamma(E)$. Pomocí $\pi_1^*(\sigma_1)$, $\pi_2^*(\sigma_2)$ (vizte poznámku 6) nyní definujme postupně kotvu, párování a závorku na E.

Kotvu $\rho\colon E \to TM$ definujme takto:

$$\begin{aligned} \rho(\pi_1^*(\sigma_1)) &:= \pi_1^{*\prime}(\rho_1(\sigma_1)), \\ \rho(\pi_2^*(\sigma_2)) &:= \pi_2^{*\prime}(\rho_2(\sigma_2)), \end{aligned}$$

kde $\pi_1^{*\prime}$, $\pi_2^{*\prime}$ jsou opět pullbacky, tentokrát ale na tečných prostorech TM_1 a TM_2, tj. $\pi_i^{*\prime}\colon \mathfrak{X}(M_i) \to \mathfrak{X}(M)$. Dále definujme párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_E\colon \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \langle \pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')\rangle_E &:= \langle \sigma_1, \sigma_1'\rangle_{E_1} \circ \pi_1, \\ \langle \pi_2^*(\sigma_2), \pi_2^*(\sigma_2')\rangle_E &:= \langle \sigma_2, \sigma_2'\rangle_{E_2} \circ \pi_2, \\ \langle \pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2)\rangle_E &:= 0. \end{aligned}$$

Nakonec definujme závorku $[\cdot,\cdot]_E\colon \Gamma(E)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$:

$$\begin{aligned}
&[\pi_1^*(\sigma_1),\pi_1^*(\sigma_1')]_E := \pi_1^*[\sigma_1,\sigma_1']_{E_1},\\
&[\pi_2^*(\sigma_2),\pi_2^*(\sigma_2')]_E := \pi_2^*[\sigma_2,\sigma_2']_{E_2},\\
&[\pi_1^*(\sigma_1),\pi_2^*(\sigma_2)]_E := 0.
\end{aligned}$$

Pro všechny definice je $\sigma_1,\sigma_1'\in\Gamma(E_1)$ a $\sigma_2,\sigma_2'\in\Gamma(E_2)$.

V sekci o Courantových algebroidech jsme vztahem (2.12) zadefinovali na E zobrazení $\mathcal{D}\colon C^\infty(M)\to\Gamma(E)$. Označme $\mathcal{D}_1$, resp. $\mathcal{D}_2$, takto zavedená zobrazení na algebroidech E_1, resp. E_2. Pomocí nich lze snadno vyjádřit působení $\mathcal{D}$ na pullbacky funkcí na M_1 a M_2, jak ukazuje následující lemma.

Lemma 4.1.1. Pro každé zobrazení $f_i\in C^\infty(M_i)$, kde $i\in\{1,2\}$, platí:

$$\mathcal{D}(f_i\circ\pi_i)=\pi_i^*(\mathcal{D}_i f_i). \tag{4.1}$$

Důkaz. Pro všechny řezy $\sigma_1\in\Gamma(E_1)$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{D}(f_1\circ\pi_1),\pi_1^*(\sigma_1)\rangle_E &= \rho(\pi_1^*(\sigma_1))(f_1\circ\pi_1) = (\pi_1^{*\prime}(\rho_1(\sigma_1)))(f_1\circ\pi_1) =\\
&= ((\rho_1(\sigma_1))f_1)\circ\pi_1 = \langle\mathcal{D}_1 f,\sigma_1\rangle_{E_1}\circ\pi_1 =\\
&= \langle\pi_1^*(\mathcal{D}_1 f_1),\pi_1^*(\sigma_1)\rangle_E.
\end{aligned}$$

Dále pro všechny řezy $\sigma_2\in\Gamma(E_2)$ platí:

$$\langle\mathcal{D}(f_1\circ\pi_1),\pi_2^*(\sigma_2)\rangle_E = \rho(\pi_2^*(\sigma_2))(f_1\circ\pi_1) = 0 = \langle\pi_1^*(\mathcal{D}_1 f_1),\pi_2^*(\sigma_2)\rangle_E.$$

Totožná tvrzení platí i při záměně indexů $1\leftrightarrow 2$. □

Tvrzení 4.1.2. Nechť $\sigma_1,\sigma_1'\in\Gamma(E_1)$ a $f\in C^\infty(M_1)$. Potom platí:

$$\rho(\pi_1^*(f\sigma_1)) = (f\circ\pi_1)\rho(\pi_1^*(\sigma_1)), \tag{4.2}$$

$$\langle\pi_1^*(\sigma_1),\pi_1^*(f\sigma_1')\rangle_E = (f\circ\pi_1)\langle\pi_1^*(\sigma_1),\pi_1^*(\sigma_1')\rangle_E. \tag{4.3}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme přímo z definic zobrazení ρ, $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ a z vlastností zobrazení ρ_1, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}$ na původních Courantových algebroidech:

$$\rho(\pi_1^*(f\sigma_1)) = \pi_1^{*\prime}(\rho_1(f\sigma_1)) = \pi_1^{*\prime}(f\rho_1(\sigma_1)) = (f\circ\pi_1)\rho(\pi_1^*(\sigma_1)),$$

$$\begin{aligned}
\langle\pi_1^*(\sigma_1),\pi_1^*(f\sigma_1')\rangle_E &= \langle\sigma_1,f\sigma_1'\rangle_{E_1}\circ\pi_1 = (f\langle\sigma_1,\sigma_1'\rangle_{E_1})\circ\pi_1 =\\
&= (f\circ\pi_1)(\langle\sigma_1,\sigma_1'\rangle_{E_1}\circ\pi_1) = (f\circ\pi_1)\langle\pi_1^*(\sigma_1),\pi_1^*(\sigma_1')\rangle_E.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 15. Ze symetrie definic plyne, že platí obdobné vztahy pro řezy $\sigma_2,\sigma_2'\in\Gamma(E_2)$ a funkci $g\in C^\infty(M_2)$.

Lemma 4.1.3. Závorka $[\cdot,\cdot]_E$ splňuje spolu s párováním $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ a kotvou ρ Leibnizovo pravidlo v prvním i druhém argumentu.

Důkaz. Ověříme tyto vlastnosti na pullback řezech $\pi_1^*(\sigma_1)$, $\pi_1^*(\sigma_1')$, kde $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma(E_1)$, a funkcích přenesených pullbackem. Pro všechna $f_1 \in C^\infty(M_1)$ a $f_2 \in C^\infty(M_2)$ platí:

$$\begin{aligned}
[\pi_1^*(\sigma_1), (f_1 \circ \pi_1)\pi_1^*(\sigma_1')]_E &= [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(f_1\sigma_1')]_E = \pi_1^*[\sigma_1, f_1\sigma_1']_{E_1} = \\
&= \pi_1^*(f_1[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} + (\rho_1(\sigma_1)f_1)\sigma_1') = \\
&= (f_1 \circ \pi_1)[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E + ((\rho_1(\sigma_1)f_1) \circ \pi_1)\pi_1^*(\sigma_1') = \\
&= (f_1 \circ \pi_1)[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E + (\rho(\pi_1^*(\sigma_1))(f_1 \circ \pi_1))\pi_1^*(\sigma_1'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\pi_1^*(\sigma_1), (f_2 \circ \pi_2)\pi_2^*(\sigma_2)]_E &= [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(f_2\sigma_2)]_E = 0 = \\
&= (f_2 \circ \pi_2)[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2)]_E + (\rho(\pi_1^*(\sigma_1))(f_2 \circ \pi_2))\pi_2^*(\sigma_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_1 \circ \pi_1)\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E &= [\pi_1^*(f_1\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E = \pi_1^*[f_1\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} = \\
&= \pi_1^*(f_1[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} - (\rho_1(\sigma_1')f_1)\sigma_1) + \langle \sigma_1, \sigma_1' \rangle_{E_1} \mathcal{D}_1 f_1) = \\
&= (f_1 \circ \pi_1)[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E - (\rho(\pi_1^*(\sigma_1'))(f_1 \circ \pi_1))\pi_1^*(\sigma_1) + \\
&+ \langle \pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1') \rangle_E \mathcal{D}(f_1 \circ \pi_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_1 \circ \pi_1)\pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2)]_E &= [\pi_1^*(f_1\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2)]_E = 0 = (f_1 \circ \pi_1)[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2)]_E - \\
&- (\rho(\pi_2^*(\sigma_2))(f_1 \circ \pi_1))\pi_1^*(\sigma_1) + \langle \pi_1^*(\sigma_1), \pi_2^*(\sigma_2) \rangle_E \mathcal{D}(f_1 \circ \pi_1).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.4. Závorka $[\cdot, \cdot]_E$ splňuje Leibnizovu identitu.

Důkaz. Opět ověříme tuto vlastnost pouze na pullback řezech:

$$\begin{aligned}
[\pi_1^*(\sigma_1), [\pi_1^*(\sigma_1'), \pi_1^*(\sigma_1'')]_E]_E &= [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*[\sigma_1', \sigma_1'']_{E_1}]_E = \pi_1^*[\sigma_1, [\sigma_1', \sigma_1'']_{E_1}]_{E_1} = \\
&= \pi_1^*([[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}, \sigma_1'']_{E_1} + [\sigma_1', [\sigma_1, \sigma_1'']_{E_1}]_{E_1} = \\
&= [[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E, \pi_1^*(\sigma_1'')]_E + \\
&+ [\pi_1^*(\sigma_1'), [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1'')]_E]_E,
\end{aligned}$$

kde $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_1'' \in \Gamma(E_1)$. Pokud by byl kterýkoliv z pullback řezů $\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1'), \pi_1^*(\sigma_1'')$ nahrazen nějakým pullback řezem $\pi_2^*(\sigma_2)$, kde $\sigma_2 \in \Gamma(E_2)$, byly by z definice $[\cdot, \cdot]_E$ všechny tři členy v Leibnizově identitě rovny nule a tedy opět platí. □

Tvrzení 4.1.5. $(E, \rho, \langle \cdot, \cdot \rangle_E, [\cdot, \cdot]_E)$ tvoří Courantův algebroid.

Důkaz. Zbývá ukázat, že platí vztahy (2.9), (2.10) z definice Courantova algebroidu. Obdobně jako v předchozích lemmatech ověříme tuto vlastnost na pullback řezech s využitím definic struktur Courantova algebroidu na E. Pro každé $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_1'' \in \Gamma(E_1)$ platí:

$$\begin{aligned}
\rho(\pi_1^*(\sigma_1))\langle \pi_1^*(\sigma_1'), \pi_1^*(\sigma_1'') \rangle_E &= \pi_1^{*\prime} \rho_1(\sigma_1)(\langle \sigma_1', \sigma_1'' \rangle_{E_1} \circ \pi_1) = (\rho_1(\sigma_1)(\langle \sigma_1', \sigma_1'' \rangle_{E_1})) \circ \pi_1 = \\
&= (\langle [\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}, \sigma_1'' \rangle_{E_1} + \langle \sigma_1', [\sigma_1, \sigma_1'']_{E_1} \rangle_{E_1}) \circ \pi_1 = \\
&= \langle [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1')]_E, \pi_1^*(\sigma_1'') \rangle_E + \\
&+ \langle \pi_1^*(\sigma_1'), [\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1'')]_E \rangle_E,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1)]_E &= \pi_1^*[\sigma_1, \sigma_1]_{E_1} = \pi_1^*(\frac{1}{2}\mathcal{D}_1 \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle_{E_1}) = \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{D}(\langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle_{E_1} \circ \pi_1) = \frac{1}{2}\mathcal{D}\langle \pi_1^*(\sigma_1), \pi_1^*(\sigma_1) \rangle_E,
\end{aligned}$$

kde jsme využili vztah (4.1). Tím je důkaz ukončen. $\square$

$(E, \rho, \langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_E)$ nazýváme **produktový Courantův algebroid**.

Poznámka 16. Pro zápis řezu $\pi_1^*(\sigma_1)+\pi_2^*(\sigma_2) \in \Gamma(E)$ budeme dále využívat zkrácený zápis (σ_1, σ_2).

4.2 Graf morfizmu vektorového bandlu

Lemma 4.2.1. Nechť $\varphi\colon M \to N$ je hladké zobrazení variet. Potom graf tohoto zobrazení $\mathrm{gr}(\varphi) := \{(m, \varphi(m)) \,|\, m \in M\}$ je uzavřená vložená podvarieta variety $M \times N$ difeomorfní M.

Důkaz. Označme $r := \dim(M)$. Dále definujme zobrazení $j_\varphi : M \to M \times N$ tak, aby $j_\varphi(M) = \mathrm{gr}(\varphi)$, tj. pro všechna $p \in M$, $j_\varphi(p) := (p, \varphi(p))$. Zřejmě j_φ je prosté. Navíc je odtud již vidět, že v Jacobiho matici J_{j_φ} je jednotkový blok $r \times r$ a jedná se tedy o injektivní vnoření. Protože π_1 i j_φ jsou spojité a platí, že $\pi_1 \circ j_\varphi = \mathbb{I}_M$ a $j_\varphi \circ \pi_1|_{\mathrm{gr}(\varphi)} = \mathbb{I}_{\mathrm{gr}(\varphi)}$, je zobrazení j_φ homeomorfizmus na svůj obraz a (M, j_φ) vložená podvarieta. Mějme dále konvergentní posloupnost $(y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{gr}(\varphi)$, která konverguje k nějakému bodu (x, y). Potom posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty \subset M$, $x_n := \pi_1(y_n)$, konverguje k bodu x. Ze spojitosti φ je $y = \varphi(x)$ a tedy $(x, y) \in \mathrm{gr}(\varphi)$. $\square$

Mějme nyní dva vektorové bandly (E_1, π_{E_1}, M_1), (E_2, π_{E_2}, M_2) a hladké zobrazení $\varphi\colon M_1 \to M_2$ a zkoumejme restrikci vektorového bandlu $(E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$.

Lemma 4.2.2. Nechť (E, π, M), (E', π', M) jsou vektorové bandly a $\varphi\colon N \to M$, $\omega\colon S \to N$ hladká zobrazení variet. Potom platí:

1. Existuje kanonický izomorfizmus $(\varphi \circ \omega)^* E \cong \omega^*(\varphi^* E)$.

2. Existuje kanonický izomorfizmus $\varphi^*(E \oplus E') \cong \varphi^* E \oplus \varphi^* E'$.

Důkaz. Dokažme první tvrzení. Z konstrukce pullback bandlů máme komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd}
\omega^*(\varphi^* E) \arrow[r, "\hat{\omega}"'] \arrow[d, "\pi^{!!}"'] & \varphi^* E \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[d, "\pi^{!}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
S \arrow[r, "\omega"'] & N \arrow[r, "\varphi"'] & M.
\end{tikzcd}$$

Navíc dostáváme morfizmus vektorových bandlů $(\widehat{\varphi \circ \omega}, \varphi \circ \omega)$. Z univerzální vlastnosti pullback bandlu víme, že existuje právě jeden morfizmus bandlů $(\hat{\mathcal{F}}, \mathbb{I}_S)$ tak, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
\omega^*(\varphi^* E) \arrow[dr, dotted, "\hat{\mathcal{F}}"] \arrow[drr, bend left, "\hat{\varphi} \circ \hat{\omega}"] \arrow[ddr, "\pi^{!!}"'] & & \\
& (\varphi \circ \omega)^* E \arrow[r, "\widehat{\varphi \circ \omega}"'] \arrow[d, "\pi^{!!!}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& S \arrow[r, "\varphi \circ \omega"'] & M.
\end{tikzcd}$$

Protože $\hat{\varphi} \circ \hat{\omega}$ je po vláknech bijektivní, je i morfizmus $\hat{\mathcal{F}}$ po vláknech bijektivní. To už ale znamená, že $\hat{\mathcal{F}}$ je izomorfizmus bandlů. Obdobně lze ukázat i druhé tvrzení. $\square$

Tvrzení 4.2.3. Existuje kanonický izomorfizmus $j_\varphi^*(E_1 \times E_2) \cong E_1 \oplus (\varphi^* E_2)$.

Důkaz. Nejprve připomeňme, že je výhodné na bandl $E_1 \times E_2$ nahlížet jako na bandl $(\pi_1^* E_1) \oplus (\pi_2^* E_2)$. Potom pomocí předchozího lemmatu dostáváme:

$$\begin{aligned} j_\varphi^*(E_1 \times E_2) = j_\varphi^*((\pi_1^* E_1) \oplus (\pi_2^* E_2)) &\cong (j_\varphi^*(\pi_1^* E_1)) \oplus (j_\varphi^*(\pi_2^* E_2)) \cong \\ &\cong ((\pi_1 \circ j_\varphi)^* E_1) \oplus ((\pi_2 \circ j_\varphi)^* E_2) = E_1 \oplus (\varphi^* E_2), \end{aligned}$$

kde jsme využili, že $\pi_1 \circ j_\varphi = \mathbb{I}_{M_1}$ a $\pi_2 \circ j_\varphi = \varphi$. $\square$

Nechť $(\mathcal{F}, \varphi)$ je morfizmus bandlů $(E_1, \pi_{E_1}, M_1), (E_2, \pi_{E_2}, M_2)$. Zkoumejme nyní graf $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset E_1 \times E_2$. Z komutativního diagramu

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

lze snadno vidět, že pro každý bod $(e_1, \mathcal{F}(e_1)) \in \mathrm{gr}(\mathcal{F})$ platí:

$$\pi((e_1, \mathcal{F}(e_1))) = (\pi_{E_1}(e_1), \pi_{E_2}(\mathcal{F}(e_1)) = (\pi_{E_1}(e_1), \varphi(\pi_{E_1}(e_1))) \in \mathrm{gr}(\varphi).$$

Vidíme tedy, že $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset (E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$. Z univerzální vlastnosti pullback bandlu dále víme, že existuje morfizmus bandlů $(\hat{\mathcal{F}}, \mathbb{I}_{M_1})$ tak, že $\hat{\varphi} \circ \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$, kde $\hat{\mathcal{F}} \colon E_1 \to \varphi^* E_2$ a $\hat{\varphi} : \varphi^* E_2 \to E_2$. Tohoto morfizmu využijeme k tomu, abychom ukázali, že graf $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je podbandl restrikce $(E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$.

Lemma 4.2.4. Graf $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ lze ztotožnit s grafem $\mathrm{gr}(\hat{\mathcal{F}})$.

Důkaz. Mějme libovolný bod $(e_1, e_2) \in (E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$, tj. $\varphi(\pi_{E_1}(e_1)) = \pi_{E_2}(e_2)$. Tento bod můžeme identifikovat s bodem $(e_1, (\pi_{E_1}(e_1), e_2)) \in (E_1 \oplus (\varphi^* E_2))$. Potom každý bod $(e_1, \mathcal{F}(e_1)) \in \mathrm{gr}(\mathcal{F})$ lze identifikovat s bodem $(e_1, (\pi_{E_1}(e_1), \mathcal{F}(e_1))) = (e_1, \hat{\mathcal{F}}(e_1)) \in \mathrm{gr}(\hat{\mathcal{F}})$. $\square$

Tvrzení 4.2.5. Graf $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset (E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$ je podbandl izomorfní E_1.

Důkaz. Podle předchozího lemmatu je toto tvrzení ekvivalentní tomu, že graf $\hat{\mathcal{F}}$ $\mathrm{gr}(\hat{\mathcal{F}}) \subset (E_1 \oplus (\varphi^* E_2))$ je podbandl izomorfní E_1. Uvažujme nyní morfizmus bandlů $(\mathcal{J}_{\hat{\mathcal{F}}}, \mathbb{I}_{M_1})$, kde $\mathcal{J}_{\hat{\mathcal{F}}} : E_1 \to (E_1 \oplus (\varphi^* E_2)) : e_1 \mapsto (e_1, \hat{\mathcal{F}}(e_1))$. Toto zobrazení je hladké a platí, že $\mathrm{Im}(\mathcal{J}_{\hat{\mathcal{F}}}) = \mathrm{gr}(\hat{\mathcal{F}})$. Na každém vlákně je navíc prosté. To už ale dokazuje tvrzení, neboť platí, že obraz po vláknech prostého morfizmu nad identitou je podbandl izomorfní jeho vzoru [6]. $\square$

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom mohli definovat pojem morfizmu Courantových algebroidů.

4.3 Morfizmus Courantových algebroidů

Definice 4.3.1. Nechť $(E_1, \rho_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}, [\cdot,\cdot]_{E_1})$, $(E_2, \rho_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}, [\cdot,\cdot]_{E_2})$ jsou Courantovy algebroidy zkonstruované nad vektorovými bandly (E_1, π_{E_1}, M_1), (E_2, π_{E_2}, M_2) a nechť $(\mathcal{F}, \varphi)$ je morfizmus těchto bandlů. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **morfizmus Courantových algebroidů** E_1, E_2, právě když tvoří podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset E_1 \times \overline{E}_2$ involutivní strukturu nad $\mathrm{gr}(\varphi)$.

Definice 4.3.2. Nechť podbandl $R \subset E_1 \times \overline{E}_2$ nad $S \subset M_1 \times M_2$ tvoří involutivní strukturu. Dále nechť $\sigma_1 \in \Gamma(E_1)$, $\sigma_2 \in \Gamma(E_2)$ a $f_1 \in C^\infty(M_1)$, $f_2 \in C^\infty(M_2)$. Řezy σ_1, σ_2 nazveme R**-příbuzné**, značíme $\sigma_1 \sim_R \sigma_2$, právě když $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; R)$. Píšeme $f_1 \sim_S f_2$, právě když $f_1(s_1) = f_2(s_2)$ pro všechny body $(s_1, s_2) \in S$.

Lemma 4.3.3. Nechť $(E_1, \rho_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}, [\cdot,\cdot]_{E_1})$, $(E_2, \rho_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}, [\cdot,\cdot]_{E_2})$ jsou Courantovy algebroidy, podbandl $R \subset E_1 \times \overline{E}_2$ nad $S \subset M_1 \times M_2$ je involutivní struktura a nechť řezy $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma(E_1)$, $\sigma_2, \sigma_2' \in \Gamma(E_2)$ splňují:

$$\sigma_1 \sim_R \sigma_2, \quad \sigma_1' \sim_R \sigma_2'.$$

Potom pro závorku a párování platí:

$$[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} \sim_R [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2},$$
$$\langle\sigma_1, \sigma_1'\rangle_{E_1} \sim_S \langle\sigma_2, \sigma_2'\rangle_{E_2}.$$

Důkaz. Z předpokladů víme, že $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2') \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; R)$. Potom z involutivity R plyne:

$$[(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2')]_{E_1 \times \overline{E}_2} = ([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}, [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}) \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; R),$$

a tedy $[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} \sim_R [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}$. Podobně z izotropie pro každý bod $(s_1, s_2) \in S$ dostáváme:

$$\langle(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2')\rangle_{E_1 \times \overline{E}_2}(s_1, s_2) = \langle\sigma_1, \sigma_1'\rangle_{E_1}(s_1) - \langle\sigma_2, \sigma_2'\rangle_{E_2}(s_2) = 0.$$

Platí tedy, že $\langle\sigma_1, \sigma_1'\rangle_{E_1}(s_1) = \langle\sigma_2, \sigma_2'\rangle_{E_2}(s_2)$ pro všechna $(s_1, s_2) \in S$. To je dle definice přesně $\langle\sigma_1, \sigma_1'\rangle_{E_1} \sim_S \langle\sigma_2, \sigma_2'\rangle_{E_2}$. $\square$

Poznámka 17. Nechť $\sigma_1 \in \Gamma(E_1)$, $\sigma_2 \in \Gamma(E_2)$. Potom $\sigma_1 \sim_{\mathrm{gr}(\mathcal{F})} \sigma_2$, právě když $\mathcal{F}(\sigma_1(m_1)) = \sigma_2(\varphi(m_1))$ pro každé $m_1 \in M_1$, tj. diagram

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\mathcal{F}"] & E_2 \\ M_1 \arrow[u, "\sigma_1"] \arrow[r, "\varphi"'] & M_2 \arrow[u, "\sigma_2"'] \end{tikzcd}$$

komutuje. Tyto řezy nazýváme zkráceně $\mathcal{F}$**-příbuzné** a značíme $\sigma_1 \sim_{\mathcal{F}} \sigma_2$.

Ve zbytku oddílu si ukážeme přesné podmínky, které musí zobrazení $\mathcal{F}$ splňovat, aby se jednalo o morfizmus Courantových algebroidů. Tyto se objevily již v práci Popescua [8].

Lemma 4.3.4. Nechť dvojice $(\mathcal{F},\varphi)$ je morfizmus vektorových bandlů (E_1,π_{E_1},M_1), (E_2,π_{E_2},M_2), na kterých jsou definovaná povláknová párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}$. Potom je podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F})\subset E_1\times\overline{E}_2$ izotropní vzhledem k povláknovému párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}$, právě když pro každý bod $m_1\in M_1$ a každou dvojici bodů $e_1,e_1'\in(E_1)_{m_1}$ platí:

$$\langle e_1,e_1'\rangle_{E_1}=\langle\mathcal{F}(e_1),\mathcal{F}(e_1')\rangle_{E_2}. \tag{4.4}$$

V takovém případě je $\mathcal{F}$ po vláknech prosté. Nechť dále (r_1,s_1), resp. (r_2,s_2), značí signatury párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}$, resp. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}$. Potom je graf $\mathrm{gr}(\mathcal{F})\subset E_1\times\overline{E}_2$ maximálně izotropní vzhledem k povláknovému párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}$, právě když $r_1=r_2$ nebo $s_1=s_2$.

Důkaz. Pro každý bod $e_1\in(E_1)_{m_1}$ je $\mathcal{F}(e_1)\in(E_2)_{\varphi(m_1)}$. Podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je izotropní vůči $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}$, právě když pro všechny body $m_1\in M_1$ a $(e_1,\mathcal{F}(e_1)),(e_1',\mathcal{F}(e_1'))\in\mathrm{gr}(\mathcal{F})$, kde $e_1,e_1'\in(E_1)_{m_1}$, platí:

$$\langle(e_1,\mathcal{F}(e_1)),(e_1',\mathcal{F}(e_1'))\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}=\langle e_1,e_1'\rangle_{E_1}-\langle\mathcal{F}(e_1),\mathcal{F}(e_1')\rangle_{E_2}=0.$$

Tím dostáváme přesně (4.4). Z tohoto vztahu dále plyne, že je-li $\mathcal{F}(e_1)=0$ pro nějaké $m_1'\in M_1$, pak $\langle e_1,e_1'\rangle_{E_1}=0$ pro každé $e_1'\in(E_1)_{m_1'}$. Z nedegenerovanosti $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}$ potom plyne, že $e_1=0$. $\mathcal{F}$ je tedy po vláknech prosté. Signatura párování $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}$ je (r_1+s_2,s_1+r_2). Z lemmatu 3.1.6 dále víme, že $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je maximálně izotropní, právě když platí:

$$\mathrm{rank}(\mathrm{gr}(\mathcal{F}))=r_1+s_1=\min\{r_1+s_2,s_1+r_2\},$$

tedy $r_1=r_2$ nebo $s_1=s_2$. □

Lemma 4.3.5. Nechť dvojice $(\mathcal{F},\varphi)$ je morfizmus vektorových bandlů (E_1,π_{E_1},M_1), (E_2,π_{E_2},M_2), na kterých jsou definované kotvy ρ_1, ρ_2. Potom je podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F})\subset E_1\times\overline{E}_2$ kompatibilní s kotvou ρ na $E_1\times\overline{E}_2$, právě když následující graf komutuje:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & E_2 \\ {\scriptstyle\rho_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho_2} \\ TM_1 & \xrightarrow[T(\varphi)]{} & TM_2. \end{array} \tag{4.5}$$

Podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F})^\perp\subset E_1\times\overline{E}_2$ je kompatibilní s kotvou ρ, právě když pro každé $f_2\in C^\infty(M_2)$ a každé $m_1\in M_1$ platí:

$$\mathcal{F}((\mathcal{D}_1(f_2\circ\varphi))(m_1))=(\mathcal{D}_2(f_2))(\varphi(m_1)). \tag{4.6}$$

Důkaz. Mějme bod $(e_1,\mathcal{F}(e_1))\in\mathrm{gr}(\mathcal{F})$. Z definice kotvy ρ víme, $\rho((e_1,\mathcal{F}(e_1)))=(\rho_1(e_1),\rho_2(\mathcal{F}(e_1)))$. Navíc platí, že $T(\mathrm{gr}(\varphi))=\mathrm{gr}(T(\varphi))$. Kompatibilita s kotvou je tedy ekvivalentní vztahu $\rho_2(\mathcal{F}(e_1))=(T(\varphi))(\rho_1(e_1))$. To neznamená ale nic jiného, než že diagram (4.5) komutuje.

Mějme dále izomorfizmy vektorových bandlů $g_1:E_1\to E_1^*$, $g_2:E_2\to E_2^*$ indukované příslušnými povláknovými párováními. Pomocí nich definujme zobrazení $\mathcal{F}^\dagger\colon E_2\to E_1$, $\mathcal{F}^\dagger=g_1^{-1}\circ\mathcal{F}^T\circ g_2$. Bod (e,e') grafu $\mathrm{gr}(\mathcal{F})^\perp$ musí pro všechna $e_1\in E_1$ splňovat následující vztah:

$$\begin{aligned}\langle(e_1,\mathcal{F}(e_1)),(e,e')\rangle_{E_1\times\overline{E}_2}&=\langle e_1,e\rangle_{E_1}-\langle\mathcal{F}(e_1),e'\rangle_{E_2}=\langle e_1,e\rangle_{E_1}-\langle e_1,\mathcal{F}^\dagger(e')\rangle_{E_1}=\\&=\langle e_1,e-\mathcal{F}^\dagger(e')\rangle_{E_1}=0.\end{aligned}$$

Platí tedy, že $e = \mathcal{F}^\dagger(e')$ a proto $\mathrm{gr}(\mathcal{F})^\perp = \{(\mathcal{F}^\dagger(e_2), e_2) \,|\, e_2 \in E_2\}$. Z první části důkazu potom plyne, že je tento podbandl kompatibilní s kotvou, právě když $\rho_2(e_2) = (T(\varphi))(\rho_1(\mathcal{F}^\dagger(e_2)))$. Ekvivalentně lze psát, že pro každé $\alpha_2 \in T * M_2$ platí:

$$\rho_2^\dagger(\alpha_2(\varphi(m_1))) = \mathcal{F}(\rho_1^\dagger(\varphi^*(\alpha_2(\varphi(m_1))))). \tag{4.7}$$

Zvolíme-li $\alpha_2 = df_2$, kde $f_2 \in C^\infty(M_2)$, dostáváme vztah (4.6). Naopak, platí-li vztah (4.6) na lokálních souřadnicových funkcích okolí bodu $\varphi(m_1)$, platí (4.7) pro jejich vnější derivaci a tedy z linearity pro všechny α_2. □

V předchozím oddílu jsme si ukázali, že existuje právě jedno zobrazení $\hat{\mathcal{F}} : E_1 \to \varphi^* E_2$, které tvoří spolu s identitou na M_1 morfizmus vektorových bandlů. Toto zobrazení bude užitečné k vyjádření podmínky pro involutivitu podbandlu $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset E_1 \times \overline{E}_2$. K tomu využijeme faktu, že každý lokální řez $\sigma_2 \in \Gamma(U, E_2)$ indukuje na $\varphi^* E_2$ lokální pullback řez $\sigma_2^* \in \Gamma(\varphi^{-1}(U), \varphi^* E_2)$, pro který platí:

$$\sigma_2^*(m_1) = \sigma_2(\varphi(m_1)),$$

pro každé $m_1 \in \varphi^{-1}(U)$.

Tvrzení 4.3.6. Nechť dvojice $(\mathcal{F}, \varphi)$ je morfizmus vektorových bandlů (E_1, π_{E_1}, M_1), (E_2, π_{E_2}, M_2) a nechť podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset E_1 \times \overline{E}_2$ tvoří téměř involutivní strukturu nad $\mathrm{gr}(\varphi)$. Dále nechť $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma(E_1)$ a $(\psi_i)_{i=1}^{\mathrm{rank}(E_2)}$ je lokální rám E_2 nad $U \subset M_2$. Potom je $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ involutivní, právě když na $\varphi^{-1}(U)$ platí:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}) = f^i g^j [\psi_i, \psi_j]^*_{E_2} + (\rho_1(\sigma_1) g^j)\psi_j^* - (\rho_1(\sigma_1') f^i)\psi_i^* + \\ + \langle \psi_i^*, \hat{\mathcal{F}}(\sigma_1')\rangle_{\varphi^*(E_2)} \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_1 f^i), \end{aligned} \tag{4.8}$$

kde $f^i, g^j \in C^\infty(\varphi^{-1}(U))$ tak, že $\hat{\mathcal{F}}(\sigma_1) = f^i \psi_i^*$ a $\hat{\mathcal{F}}(\sigma_1') = g^j \psi_j^*$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je involutivní. Definujme $\hat{U} := \varphi^{-1}(U) \times U$ a řezy $\sigma, \sigma' \in \Gamma_{\hat{U}}(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F}))$ takto:

$$\sigma(m_1, m_2) := (\sigma_1(m_1), f^i(m_1)\psi_i(m_2)), \tag{4.9}$$

$$\sigma'(m_1, m_2) := (\sigma_1'(m_1), g^j(m_1)\psi_j(m_2)), \tag{4.10}$$

pro každý bod $(m_1, m_2) \in \hat{U}$. Potom z definice involutivity víme, že i $[\sigma, \sigma']_{E_1 \times \overline{E}_2} \in \Gamma_{\hat{U}}(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F}))$. Konkrétně dosazením za σ, σ' dostáváme:

$$\begin{aligned} &[\sigma, \sigma']_{E_1 \times \overline{E}_2}(m_1, \varphi(m_1)) = \\ &\quad = [\pi_1^*(\sigma_1) + (f^i \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_i)\,,\, \pi_1^*(\sigma_1') + (g^j \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_j)]_{E_1 \times \overline{E}_2}(m_1, \varphi(m_1)) = \\ &\quad = (\pi_1^*[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} + [\pi_1^*(\sigma_1), (g^j \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_j)]_{E_1 \times \overline{E}_2} + [(f^i \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_i), \pi_1^*(\sigma_1')]_{E_1 \times \overline{E}_2} + \\ &\quad + [(f^i \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_i), (g^j \circ \pi_1)\pi_2^*(\psi_j)]_{E_1 \times \overline{E}_2})(m_1, \varphi(m_1)) = \\ &\quad = (\pi_1^*[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} + (\rho(\pi_1^*(\sigma_1))(g^j \circ \pi_1))\pi_2^*(\psi_j) - (\rho(\pi_1^*(\sigma_1'))(f^i \circ \pi_1))\pi_2^*(\psi_i) + \\ &\quad + (f^i \circ \pi_1)(g^j \circ \pi_1)[\psi_i, \psi_j]_{E_2} - (g^j \circ \pi_1)(\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{E_2} \circ \pi_2)\pi_1^*(\mathcal{D}_1 f))(m_1, \varphi(m_1)) = \\ &\quad = \Big([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1) - (\langle \psi_i^*, \hat{\mathcal{F}}(\sigma_1')\rangle_{\varphi^* E_2}(\mathcal{D}_1 f))(m_1)\,, \\ &\qquad (f^i g^j [\psi_i, \psi_j]^*_{E_2})(m_1) + ((\rho_1(\sigma_1) g^j)\psi_j^*)(m_1) - ((\rho_1(\sigma_1') f^i)\psi_i^*)(m_1)\Big). \end{aligned}$$

Tento bod je z $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$, a proto musí být obraz první složky zobrazením $\mathcal{F}$ roven druhé složce. Totéž dostáváme vyjádřením (4.8) v bodě m_1.

Abychom ukázali obrácenou implikaci, využijeme lemma 3.2.2. Pro libovolný bod $(m_1, \varphi(m_1)) \in \mathrm{gr}(\varphi)$ vezměme libovolný lokální rám $(\psi_i)_{i=1}^{\mathrm{rank}(E_2)}$ prostoru E_2 nad $U \subset M_2$, kde $\varphi(m_1) \in U$. Mějme řezy $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma_{\varphi^{-1}(U)}(E_1)$ a označme opět $\hat{U} := \varphi^{-1}(U) \times U$. Potom lze získat řezy v $\Gamma_{\hat{U}\cap\mathrm{gr}(\varphi)}(\mathrm{gr}(\mathcal{F}))$ restrikcí řezů $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2)$ definovaných jako v (4.9), (4.10). Protože pro σ_1, σ_1' platí podmínka (4.8) a z první části důkazu víme, že je to ekvivalentní podmínce $[\sigma, \sigma']_{E_1\times\overline{E}_2} \in \Gamma_{\hat{U}}(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F}))$, je $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ lokálně involutivní na $\hat{U}$. Nakonec díky tomu, že $(m_1, \varphi(m_1))$ byl libovolný bod z $\mathrm{gr}(\varphi)$, lze tímto postupem sestrojit pokrytí $\{\hat{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ tak, že $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je lokálně involutivní na každém $\hat{U}_\alpha$. Tím je tvrzení dokázané. □

Poznámka 18. Nechť $\mathcal{F}$ je morfizmus Courantových algebroidů a řezy $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma(E_1)$, $\sigma_2, \sigma_2' \in \Gamma(E_2)$ nechť splňují $\sigma_1 \sim_{\mathcal{F}} \sigma_2$ a $\sigma_1' \sim_{\mathcal{F}} \sigma_2'$. Potom přímo z lemmatu 4.3.3 dostáváme, že $[\sigma_1, \sigma_1']_{E_1} \sim_{\mathcal{F}} [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}$. Pokud tedy pro každé $m_1 \in M_1$ platí $\mathcal{F}(\sigma_1(m_1)) = \sigma_2(\varphi(m_1))$, $\mathcal{F}(\sigma_1'(m_1)) = \sigma_2'(\varphi(m_1))$, potom:

$$\mathcal{F}([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1)) = [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}(\varphi(m_1)).$$

Je-li navíc φ difeomorfizmus, můžeme definovat zobrazení $\mathcal{F}_\# : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$: $\mathcal{F}_\#(\sigma_1) = \mathcal{F} \circ \sigma_1 \circ \varphi^{-1}$. Potom zřejmě $\sigma_1 \sim_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_\#(\sigma_1)$ a $\sigma_1' \sim_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_\#(\sigma_1')$ a můžeme tedy psát:

$$\mathcal{F}_\#([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}) = [\mathcal{F}_\#(\sigma_1), \mathcal{F}_\#(\sigma_1')]_{E_2}. \tag{4.11}$$

Nechť nyní platí podmínka (4.11). Ukažme, že pak je $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ involutivní. Mějme dva řezy $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2') \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F}))$. Potom platí:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1)) = \mathcal{F}_\#([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1})(\varphi(m_1)) = [\mathcal{F}_\#(\sigma_1), \mathcal{F}_\#(\sigma_1')]_{E_2}(\varphi(m_1)) = \\ = [\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}(\varphi(m_1)),\end{aligned}$$

neboť pro všechna $m_1 \in M_1$

$$\begin{aligned}(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F})) &\iff \mathcal{F}_\#(\sigma_1)(\varphi(m_1)) = \mathcal{F}(\sigma_1(m_1)) = \sigma_2(\varphi(m_1)), \\ (\sigma_1', \sigma_2') \in \Gamma(E_1 \times \overline{E}_2; \mathrm{gr}(\mathcal{F})) &\iff \mathcal{F}_\#(\sigma_1')(\varphi(m_1)) = \mathcal{F}(\sigma_1'(m_1)) = \sigma_2'(\varphi(m_1)).\end{aligned}$$

Podbandl $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ je tedy involutivní.

Poznámka 19. Uvažujme nyní morfizmus Courantových algebroidů $\mathcal{F}$ nad identitou, tj. $\varphi \equiv \mathbb{I}$. Podmínka (4.4) se potom zjednoduší do tvaru:

$$\langle \sigma_1, \sigma_1' \rangle_{E_1} = \langle \mathcal{F}_\#(\sigma_1), \mathcal{F}_\#(\sigma_1') \rangle_{E_2},$$

pro všechny řezy $\sigma_1, \sigma_1' \in \Gamma(E_1)$. Ze vztahu (4.7) dále získáváme:

$$\rho_2^\dagger = \mathcal{F} \circ \rho_1^\dagger, \tag{4.12}$$

což můžeme ekvivalentně přepsat jako:

$$\rho_1 \circ \mathcal{F}^\dagger = \rho_2. \tag{4.13}$$

Protože pro všechna $m_1 \in M_1$ a $e_1, e_1' \in E_1$ platí

$$\langle (\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F})(e_1), e_1' \rangle_{E_1} = \langle \mathcal{F}(e_1), \mathcal{F}(e_1') \rangle_{E_2} = \langle e_1, e_1' \rangle_{E_1},$$

a tedy $\mathcal{F}^\dagger\mathcal{F} = \mathbb{I}$, dostáváme pomocí (4.13) pro všechna $\sigma_1 \in \Gamma(E_1)$ vztah

$$\rho_1(\sigma_1) = \rho_2(\mathcal{F}_\#(\sigma_1)). \tag{4.14}$$

Z podmínek (4.11), (4.12) a (4.14) již vidíme, že morfizmus Courantových algebroidů $\mathcal{F}$ nad identitou odpovídá naší definici izomorfizmu Courantových algebroidů za předpokladu, že $\mathcal{F}$ je izomorfizmus vektorových bandlů (vizte definici 2.3.5).

4.4 Kategorie Courantových algebroidů

V posledním oddíle budeme chtít ukázat, že Courantovy algebroidy tvoří spolu s jejich morfizmy kategorii. K tomu je nutné ověřit, že je třída těchto morfizmů uzavřená na skládání. Nejprve však uveďme definici kategorie.

Definice 4.4.1. Kolekci $\mathcal{K}$ třídy objektů $ob(\mathcal{K})$ a třídy morfizmů $\mathrm{Hom}(\mathcal{K})$ nazveme **kategorie**, právě když platí následující podmínky:

1. Ke každé dvojici objektů A, B existuje množina morfizmů $\mathrm{Hom}(A, B)$.

2. Každý morfizmus kategorie $\mathcal{K}$ patří do právě jedné množiny $\mathrm{Hom}(A, B)$.

3. Je dána operace (značíme $\circ$) skládání dvou morfizmů $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon C \to D$, právě když $B = C$. V takovém případě je $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(A, D)$.

4. Pro každé tři morfizmy $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ a $\gamma\colon C \to D$ je operace skládání asociativní, tj. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.

5. Každá množina $\mathrm{Hom}(A, A)$ obsahuje morfizmus $\mathbb{I}_A$ zvaný identita, který pro všechny objekty $X, Y \in ob(\mathcal{K})$ a morfizmy $\alpha : X \to A$, $\beta : A \to Y$ splňuje: $\mathbb{I}_A \circ \alpha = \alpha$, $\beta \circ \mathbb{I}_A = \beta$.

Snadno vidíme, že roli identity nad libovolným algebroidem $(E, \rho, \langle\cdot,\cdot\rangle_E, [\cdot,\cdot]_E)$ nad M hraje triviální izomorfizmus $(\mathbb{I}_E, \mathbb{I}_M)$.

Tvrzení 4.4.2. Složení dvou morfizmů Courantových algebroidů je opět morfizmus Courantových algebroidů.

Důkaz. Mějme Courantovy algebroidy $(E_1, \rho_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_1}, [\cdot,\cdot]_{E_1})$, $(E_2, \rho_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2}, [\cdot,\cdot]_{E_2})$ a $(E_3, \rho_3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_3}, [\cdot,\cdot]_{E_3})$ a jejich morfizmy $(\mathcal{F}, \varphi)$, $(\mathcal{G}, \omega)$, kde $\mathcal{F} : E_1 \to E_2$, $\mathcal{G} : E_2 \to E_3$ a $\varphi\colon M_1 \to M_2$, $\omega\colon M_2 \to M_3$. Potom pro všechna $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, $e_1, e_1' \in (E_1)_{m_1}$, $e_2, e_2' \in (E_2)_{m_2}$, $f_2 \in C^\infty(M_2)$ a $f_3 \in C^\infty(M_3)$ platí:

$$\langle e_1, e_1'\rangle_{E_1} = \langle \mathcal{F}(e_1), \mathcal{F}(e_1')\rangle_{E_2}, \tag{4.15}$$
$$\langle e_2, e_2'\rangle_{E_2} = \langle \mathcal{G}(e_2), \mathcal{G}(e_2')\rangle_{E_3}, \tag{4.16}$$
$$\mathcal{F}((\mathcal{D}_1(f_2 \circ \varphi))(m_1)) = (\mathcal{D}_2(f_2))(\varphi(m_1)), \tag{4.17}$$
$$\mathcal{G}((\mathcal{D}_2(f_3 \circ \omega))(m_2)) = (\mathcal{D}_3(f_3))(\omega(m_2)). \tag{4.18}$$

Označme dále $(\psi_1, ..., \psi_r)$ lokální rám E_2 nad nějakým okolím U_2 bodu $\varphi(m_1) \in M_2$ a $(\phi_1, ..., \phi_d)$ lokální rám E_3 nad nějakým okolím U_3 bodu $\omega(m_2) \in M_3$. Potom existuje sada funkcí $f^i, g^j \in C^\infty(U_2)$ a $h^i, k^j \in C^\infty(U_3)$ tak, že platí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1)) &= (f^i g^j)(m_1)[\psi_i, \psi_j]_{E_2}(\varphi(m_1)) + (\rho_1(\sigma_1)g^j)(m_1)\psi_j(\varphi(m_1)) - \\
&- (\rho_1(\sigma_1')f^i)(m_1)\psi_i(\varphi(m_1)) + \\
&+ g^j(m_1)\langle \psi_i, \psi_j\rangle_{E_2}(\varphi(m_1))\mathcal{F}(\mathcal{D}_1 f^i(m_1)), \qquad (4.19)\\
\mathcal{G}([\sigma_2, \sigma_2']_{E_2}(m_2)) &= (h^i k^j)(m_2)[\phi_i, \phi_j]_{E_3}(\omega(m_2)) + (\rho_2(\sigma_2)k^j)(m_2)\phi_j(\omega(m_2)) - \\
&- (\rho_2(\sigma_2')h^i)(m_2)\phi_i(\omega(m_2)) + \\
&+ k^j(m_2)\langle \phi_i, \phi_j\rangle_{E_3}(\omega(m_2))\mathcal{G}(\mathcal{D}_2 h^i(m_2)), \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

kde $\hat{\mathcal{F}}(\sigma_1) = f^i\psi_i^*$, $\hat{\mathcal{F}}(\sigma_1') = g^i\psi_i^*$, $\hat{\mathcal{G}}(\sigma_2) = h^i\phi_i^*$ a $\hat{\mathcal{G}}(\sigma_2') = k^i\phi_i^*$. Dosazením $e_2 = \mathcal{F}(e_1) \in (E_2)_{\varphi(m_1)}$, $e_2' = \mathcal{F}(e_1') \in (E_2)_{\varphi(m_1)}$ do (4.16) dostáváme s využitím (4.15)

$$\langle e_1, e_1'\rangle_{E_1} = \langle (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(e_1), (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(e_1')\rangle_{E_2}. \qquad (4.21)$$

Zapůsobíme-li zobrazením $\mathcal{G}$ na (4.17), kde $f_2 = f_3 \circ \omega$, a dosadíme-li $m_2 = \varphi(m_1)$ do (4.18), získáváme

$$(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})((\mathcal{D}_1(f_3 \circ (\omega\circ\varphi)))(m_1)) = (\mathcal{D}_3(f_3))((\omega\circ\varphi)(m_1)). \qquad (4.22)$$

Nakonec musíme ukázat podmínku involutivity. Tu hledáme v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1)) &= a^l(m_1)b^m(m_1)[\phi_l, \phi_m]_{E_3}((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\
&+ (\rho_1(\sigma_1)b^m)(m_1)\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)) - \\
&- (\rho_1(\sigma_1')a^l)(m_1)\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\
&+ b^m(m_1)\langle \phi_l, \phi_m\rangle_{E_3}((\omega\circ\varphi)(m_1))(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\mathcal{D}_1 a^l(m_1)),
\end{aligned}$$

kde $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\sigma_1(m_1)) = a^l(m_1)\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1))$ a $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\sigma_1'(m_1)) = b^m(m_1)\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1))$. Pokud zapůsobíme zobrazením $\mathcal{G}$ na (4.19) a využijeme-li vztahu (4.20) pro $\sigma_2 = \psi_i, \sigma_2' = \psi_j$ a $m_2 = \varphi(m_1)$, obdržíme vztah

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})([\sigma_1, \sigma_1']_{E_1}(m_1)) &= (f^i g^j)(m_1)\Big((h_i^l k_j^m)(\varphi(m_1))[\phi_l, \phi_m]_{E_3}((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\
&+ (\rho_2(\psi_i)k_j^m)(\varphi(m_1))\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)) - (\rho_2(\psi_j)h_i^l)(\varphi(m_1))\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\
&+ k_i^m(m_2)\langle \phi_l, \phi_m\rangle_{E_3}(\omega(\varphi(m_1)))\mathcal{G}(\mathcal{D}_2 h^i(\varphi(m_1)))\Big) + \\
&+ (\rho_1(\sigma_1)g^j)(m_1)\mathcal{G}(\psi_j(\varphi(m_1))) - (\rho_1(\sigma_1')f^i)(m_1)\mathcal{G}(\psi_i(\varphi(m_1))) + \\
&+ g^j(m_1)\langle \psi_i, \psi_j\rangle_{E_2}(\varphi(m_1))\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(\mathcal{D}_1 f^i(m_1)),
\end{aligned}$$

kde $\mathcal{G}(\psi_i(\varphi(m_1))) = h_i^l(\varphi(m_1))\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1))$ a $\mathcal{G}(\psi_j(\varphi(m_1))) = k_j^m(\varphi(m_1))\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1))$. Odtud hned vidíme, že

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\sigma_1(m_1)) &= f^i(m_1)h_i^l(\varphi(m_1))\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)), \\
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\sigma_1(m_1)) &= g^j(m_1)k_j^m(\varphi(m_1))\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)),
\end{aligned}$$

a porovnáním s hledaným tvarem dostáváme vztah pro funkce a^l, b^m:

$$a^l = f^i(h_i^l \circ \varphi), \qquad (4.23)$$
$$b^m = g^j(k_j^m \circ \varphi). \qquad (4.24)$$

Nyní můžeme pomocí Leibnizova pravidla rozepsat výrazy obsahující kotvu ρ_1:

$$\begin{aligned}(\rho_1(\sigma_1')a^l)(m_1)\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)) &= (\rho_1(\sigma_1')f^i)(m_1)h_i^l(\varphi(m_1))\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\ &+ f^i(m_1)(\rho_1(\sigma_1)(h_i^l\circ\varphi))(m_1)\phi_l((\omega\circ\varphi)(m_1)), \\ (\rho_1(\sigma_1)b^m)(m_1)\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)) &= (\rho_1(\sigma_1)g^j)(m_1)k_j^m(\varphi(m_1))\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)) + \\ &+ g^j(m_1)(\rho_1(\sigma_1)(k_j^m\circ\varphi))(m_1)\phi_m((\omega\circ\varphi)(m_1)),\end{aligned}$$

kde dále s využitím (4.5) platí:

$$\begin{aligned}f^i(m_1)(\rho_1(\sigma_1')(h_i^l\circ\varphi))(m_1) &= f^i(m_1)(\rho_2(\mathcal{F}(\sigma_1'(m_1)))h_i^l(\varphi(m_1)) = \\ &= (f^ig^j)(m_1)(\rho_2(\psi_j)h_i^l)(\varphi(m_1)), \\ g^j(m_1)(\rho_1(\sigma_1)(k_j^m\circ\varphi))(m_1) &= g^j(m_1)(\rho_2(\mathcal{F}(\sigma_1(m_1)))k_j^m(\varphi(m_1)) = \\ &= (f^ig^j)(m_1)(\rho_2(\psi_i)k_j^m)(\varphi(m_1)).\end{aligned}$$

Na závěr musíme vyřešit členy obsahující povláknové párování:

$$\begin{aligned}&b^m(m_1)\langle\phi_l,\phi_m\rangle_{E_3}((\omega\circ\varphi)(m_1))(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\mathcal{D}_1a^l(m_1)) = \\ &\quad= (f^ig^j)(m_1)k_j^m(\varphi(m_1))\langle\phi_l,\phi_m\rangle_{E_3}(\omega\circ\varphi)(m_1)(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\mathcal{D}_1(h_i^l\circ\varphi)(m_1)) + \\ &\quad+ g^j(m_1)k_j^m(\varphi(m_1))h_i^l(\varphi(m_1))\langle\phi_l,\phi_m\rangle_{E_3}(\omega\circ\varphi)(m_1)(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\mathcal{D}_1f^i(m_1)) = \\ &\quad= (f^ig^j)(m_1)k_j^m(\varphi(m_1))\langle\phi_l,\phi_m\rangle_{E_3}(\omega\circ\varphi)(m_1)\mathcal{G}(\mathcal{D}_2h_i^l(\varphi(m_1))) + \\ &\quad= g^j(m_1)\langle\psi_i,\psi_j\rangle_{E_2}(\varphi(m_1))(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(\mathcal{D}_1f^i(m_1)),\end{aligned}$$

kde jsme využili vztahů (4.16) a (4.17). Zobrazení $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ tedy skutečně tvoří morfizmus Courantových algebroidů E_1 a E_3. □

Courantovy algebroidy spolu s jejich morfizmy tedy tvoří kategorii. Pro morfizmy nad obecným hladkým zobrazením (ne nutně difeomorfizmem) jsou uvedené podmínky bohužel velice restriktivní a není snadné najít příklad netriviálního morfizmu. Pokud bychom uvažovali morfizmy pouze jako involutivní struktury v $E_1\times\overline{E}_2$ nad $S\subset M_1\times M_2$, kde S je grafem $\varphi\colon M_1\to M_2$, dostaneme bohatší třídu zobrazení mezi Courantovými algebroidy. Takto zkonstruované morfizmy však nelze obecně skládat a tedy nemohou tvořit spolu s Courantovými algebroidy kategorii (přesnou definici výše uvedeného morfizmu včetně konkrétního protipříkladu uzavřenosti jejich skládání lze nalézt v [13]).

Závěr

Cílem této práce bylo představit Courantovy algebroidy a jejich morfizmy a ukázat, že tvoří kategorii.

V úvodní kapitole věnované vektorovým bandlům jsme ukázali, že prostor jejich řezů lze lokálně popsat pomocí tzv. lokálního rámu, a odvodili jsme důležitou vlastnost, že každému morfizmu bandlů $\mathcal{F}\colon E_1 \to E_2$ nad M lze jednoznačně přiřadit $C^\infty(M)$-lineární zobrazení řezů $\mathcal{F}_\# : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$. Představili jsme koncept podbandlu, produktového a pullback bandlu a způsob, jakým na nich lze zavést řezy.

V další části jsme zadefinovali Courantovy algebroidy, a sice jako vektorové bandly s nějakou dodatečnou strukturou. Tu tvoří konkrétně zobrazení zvané kotva, dále závorka a povláknová metrika, které spolu splňují určité speciální požadavky. Detailně jsme rozebrali několik příkladů těchto algebroidů a zavedli pojem izomorfizmu Courantových algebroidů.

Pro definici morfizmu Courantových algebroidů, bylo třeba se seznámit s involutivními strukturami. Zde jsme nejprve definovali ortogonální podbandl vzhledem k povláknové metrice a pomocí něj pojem izotropie. Ukázali jsem, co to znamená, když je podbandl kompatibilní s kotvou a zavedli jsme samotné involutivní struktury.

Poté co jsme zkonstruovali produktový Courantův algebroid $E_1 \times E_2$ jsme se zabývali některými vlastnostmi grafu morfizmu bandlů $\mathcal{F}$. Konkrétně jsme ukázali, že $\mathrm{gr}(\mathcal{F}) \subset (E_1 \times E_2)|_{\mathrm{gr}(\varphi)}$ je podbandl izomorfní bandlu E_1. Následně již bylo možné zavést morfizmus Courantových algebroidů $\mathcal{F}\colon E_1 \to E_2$, a to jako morfizmus vektorových bandlů (E_1, π_{E_1}, M_1), (E_1, π_{E_1}, M_1), jehož graf tvoří involutivní strukturu v $E_1 \times \overline{E}_2$ nad grafem $\varphi\colon M_1 \to M_2$. Ukázali jsme, jaké podmínky musí v takovém případě zobrazení $\mathcal{F}$ splňovat a ve kterých případech lze tyto zjednodušit. Nakonec jsme provedli důkaz uzavřenosti třídy těchto morfizmů na skládání a tím došli k závěru, že spolu s Courantovými algebroidy opravdu tvoří kategorii.

Literatura

[1] A. Alekseev a P. Xu. „Derived brackets and Courant algebroids“. Nepublikováno.

[2] D. Li-Bland a E. Meinrenken. „Courant Algebroids and Poisson Geometry“. In: *International Mathematics Research Notices* (dub. 2009).

[3] Henrique Bursztyn, David Iglesias Ponte a Pavol Ševera. *Courant morphisms and moment maps*. 2008. arXiv: `0801.1663 [math.SG]`.

[4] André Coimbra, Charles Strickland-Constable a Daniel Waldram. „Supergravity as generalised geometry I: type II theories“. In: *Journal of High Energy Physics* 2011.11 (lis. 2011).

[5] Marián Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. IRIS, 2004, s. 722.

[6] John M. Lee. „Vector Bundles“. In: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013, s. 249–271.

[7] Kirill C. H. Mackenzie. „Lie Algebroids: Algebraic Constructions“. In: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2005, s. 148–178.

[8] Paul Popescu. „On generalized algebroids“. In: *New Developments in Differential Geometry, Budapest 1996*. Springer, 1999, s. 329–342.

[9] Dmitry Roytenberg. *Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*. University of California, Berkeley, 1999.

[10] Pavol Ševera. *Letters to Alan Weinstein about Courant algebroids*. 2017. arXiv: `1707.00265 [math.DG]`.

[11] Loring W. Tu. *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes*. Springer, 2017, s. 347.

[12] Jan Vysoký. *Geometry of Membrane Sigma Models*. 2015. arXiv: `1512.08156 [math.DG]`.

[13] Jan Vysoký. „Hitchhiker’s guide to Courant algebroid relations“. In: *Journal of Geometry and Physics* 151 (květ. 2020), s. 103635.