České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství

Formulace Einsteinových rovnic pro numerickou relativitu

Formulation of Einstein's equations for numerical relativity

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Vít Beneš
Vedoucí práce: Ing. Josef Schmidt, Ph.D.
Rok: 2021

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Břehová 7 115 19 Praha 1

Název katedry

Akademický rok: rrrr/rrrr

Insert your task scan here

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Jméno Příjmení**

Studijní program: Název programu

Obor: Název oboru

Název práce česky: **Název česky**

Název práce anglicky: Name in English language

Pokyny pro vypracování:

1. Úkol 1

2. Úkol 2

3. Úkol 3

4. Úkol 4

Doporučená literatura:

Literature

[1]

[2]

[3]

[4]

[5]

[6]

[7]

[8]

Jméno a pracoviště vedoucího práce: **Supervisor Name**
Supervisor institution

Jméno a pracoviště konzultanta: **Consultant Name**
Consultant institution

Datum zadání bakalářské práce: Date of issue

Datum odevzdání bakalářské práce: Deadline

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne Date

Speciaization supervisor Name

Signature

Department director Name

Signature

Stamp

Dean Name

Signature

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

Vít Beneš

Poděkování

Děkuji Ing. Josefu Schmidtovi, Ph.D. za věcné připomínky a vedení mé bakalářské práce.

Vít Beneš

Název práce:
Formulace Einsteinových rovnic pro numerickou relativitu

Autor: Vít Beneš

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Josef Schmidt, Ph.D.
Katedra fyziky

Abstrakt: Po zavedení aparátu diferenciální geometrie je provedena foliace prostoročasu na prostorupodobné nadplochy a je zavedena vnější křivost spolu s prostorovou metrikou. Z projekcí Riemannova tenzoru jsou odvozeny Codazziho, Ricciho a Gaussova rovnice, ze kterých jsou za pomocí Einsteinových rovnic získány rovnice pro evoluci vnější křivosti, evoluci prostorové metriky a dvě vazbové rovnice, které tvoří soustavu ekvivalentní původním polním rovnicím. Následným zvolením specifických souřadnic v 3+1 formulaci získáme Arnowittovu–Deserovu–Misnerovu (ADM) formulaci. Nakonec jsou představeny konformní transformace metriky a ostatních veličin, na základě nichž je odvozena Baumgartova–Shapirova–Šibatova–Nakamurova (BSSN) formulace, která, jak se ukazuje, zlepšuje numerickou stabilitu při výpočtech relativistických problémů na počítači.
Klíčová slova: numerická relativita, 3+1 formulace, ADM formulace, konformní transformace, BSSN formulace

Title:
Formulation of Einstein's equations for numerical relativity

Author: Vít Beneš

Abstract: After defining necessary objects from differential geometry, the spacetime is foliated into spacelike hypersurfaces and the extristic curvature along with the spatial metric are introduced. Starting from the projections of the Riemann curvature tensor, we derive the equations of Codazzi, Ricci and Gauss. By employing Einstein's field equations, we arrive at the evolution of equation the extristic curvature, evolution equation of the spatial metric and the two constraint equations, which altogether constitute a system of equations equivalent to the former field equations. By choosing a specific set of coordinates in the 3+1 formulation we obtain the Arnowitt–Deser–Misner (ADM) formulation. Finally we define the conformal transformations of a metric and other quantities, on basis of which the BSSN formulation is derived. The Baumgarte–Shapiro–Shibata–Nakamura (BSSN) formulation is a formulation of Einstein's equations that improves the numerical stability when used for a numerical simulation.
Keywords: numerical relativity, 3+1 formulation, ADM formulation, conformal transformations, BSSN formulation

Obsah

Úvod

Obecná teorie relativity se od svého nalezení Albertem Einsteinem na začátku 20. století nesčetněkrát ukázala jako jedna z nejlépe ověřených fyzikálních teorií. Je to teorie geometrická a jejími centrálními rovnicemi jsou Einsteinovy polní rovnice, které spojují zakřivení časoprostoru se zdroji gravitace. Jedná se o rovnice nelineární, jelikož gravitace sama zakřivuje časoprostor, a není možné využívat principu superpozice, proto je jejich řešení značně složitější, než řešení stejného problému v newtonovském smyslu. Logickým krokem je pokusit se pro složité systémy najít řešení numerická s využitím dostatečně silného počítače a právě tímto úkolem se zabývá numerická relativita. Předmětem zájmu jsou systémy a objekty se silným gravitačním polem, typickou situací jsou např. srážky černých děr nebo srážky neutronových hvězd. Při řešení Einsteinových rovnic ale vyvstává řada problémů, např. jak správně volit souřadnice, jak zadat počáteční podmínky nebo jak se vyhnout oblastem singularit, které jsou např. pro černé díry přítomné. Jednou ze základních potíží je, že rovnice nejsou ve vhodném tvaru pro jejich implementaci v počítači. Je tedy nutné rovnice upravit do praktičtější podoby, a takovou podobou je tzv. 3+1 formulace, kterou po zavedení specifických souřadnic také nazýváme Arnowittova–Deserova–Misnerova (ADM) formulace. 3+1 formulace pomocí skalární časové funkce rozdělí časoprostor na sérii prostorupodobných nadploch a popíše zvlášť vývoj prostorové metriky mezi jednotlivými nadplochami, a vývoj vnější křivosti nadploch. Získáme tak ekvivalentní popis časoprostoru, který je snadněji uchopitelný a umožňuje jednodušší implementaci při numerických simulacích.

Cílem této práce je odvodit právě Einsteinovy rovnice v ADM formulaci a zároveň je dále převést na modifikovanou verzi, kterou je tzv. Baumgartova–Shapirova–Šibatova–Nakamurova (BSSN) formulace, která využívá vhodných konformních transformací polí zavedených v ADM formulaci tak, aby bylo možné získat stabilnější řešení v numerických metodách.

V práci jsou nejprve v první kapitole popsány nutné matematické objekty z oblasti diferenciální geometrie, se kterými obecná teorie relativity pracuje, přičemž definice, věty jsou převzaty z [1] a obsah kapitoly vychází částečně z matematické části [2]. V druhé kapitole je odvozena ADM formulace Einsteinových rovnic a v poslední kapitole jsou představeny konformní transformace spolu s odvozením BSSN formulace Einsteinových rovnic. Tyto dvě kapitoly vycházejí z knihy [3] od spoluautorů BSSN formalismu a z knih [4] a [5].

Kapitola 1

Matematický aparát

Základní strukturou používanou v obecné teorii relativity jsou diferenciální variety, což jsou topologické prostory, které jsou lokálně difeomorfní na nějakou množinu v $\mathbb{R}^n$. Práce s varietami je tedy zprostředkována těmito zobrazeními, jež odpovídají souřadnicím. V této části je popsán minimální matematický aparát používaný v obecné teorii relativity a následující části práce.

1.1 Variety, tečné prostory a tenzory

Začněme přímo definicí (hladké) variety. Varieta je topologický prostor vybavený sadou zobrazení, tzv. map, které jsou kompatibilní ve smyslu záměny souřadnic.

Definice. Buď (M, τ) topologický prostor, $U \in \tau$, buď homeomorfismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Dvojici (U, φ) nazýváme mapou na M.

Poznámka. Každému bodu $p \in U \subset M$ odpovídá při dané mapě n-tice reálných čísel, které nazýváme souřadnice.

Pokud máme mapy definované pro množiny nějakého otevřeného pokrytí variety M, nazýváme množinu těchto map atlasem.

Definice. Buď (M, τ) topologický prostor, $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ otevřené pokrytí M, kde $\mathcal{I}$ je libovolná indexová množina. Množinu všech map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{I}} =: \mathcal{A}$ nazveme atlasem na (M, τ).

Definujme kompatibilitu map tak, že požadujeme, aby existovala funkce přechodu z jedné mapy do druhé, která je invertovatelná a alespoň C^k v obou směrech.

Definice. Nechť pro mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ takové, že $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ je zobrazení

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

difeomorfismus třídy C^k. Potom řekneme, že mapy jsou C^k-kompatibilní. Pokud atlas obsahuje pouze po dvou C^k-kompatibilní mapy, tak řekneme, že je C^k.

Zobrazení z předchozí definice se nazývá přechodová funkce nebo také funkce změny souřadnic. Požadavek na její hladkost je tedy požadavkem na hladkost změny souřadnic. Dále pro korektní definici přidáme do atlasu všechny mapy, které můžeme zvolit.

Definice. Maximálním C^k-atlasem rozumíme atlas, ke kterému přidáme všechny mapy (U, ϕ), které jsou s ním kompatibilní.

Nyní můžeme definovat samotnou varietu, která je množinou s hladkou strukturou. Jednoduše řečeno se jedná o množinu, jež je lokálně podobná $\mathbb{R}^n$.

Definice (Hladká varieta)**.** Buď (M, τ) Hausdorffův topologický prostor, který má spočetnou bázi topologie,[1] a $\mathcal{A}$ maximální C^∞ atlas na (M, τ). Dvojici $(M, \mathcal{A})$ nazveme hladkou varietou.

Poznámka. Dimenzí hladké variety myslíme $n \in \mathbb{N}$ z definice mapy, resp. atlasu. To znamená dimenzi prostoru souřadnic, do kterého zobrazujeme body variety mapou.

Poznámka. Varietu značíme často pouze jako M.

Definice variety nám bude sloužit dobře k popisu časoprostoru. Body z variety jako takové nejsou pro popis veličin dostačující, a proto musíme zavést tečný prostor k varietě.

1.1.1 Tečné a kotečné prostory

Pro popis fyzikálních veličin zavádíme vektory, kovektory a tenzory libovolných řádů. Základní definicí v této konstrukci je tečný prostor. Tečný prostor lze zavést více ekvivalentními způsoby, dvěma základními definicemi jsou třídy ekvivalence křivek na varietě a směrové derivace. Začněme definicí přes třídy ekvivalence.

Poznámka. Množinu všech hladých funkcí na varietě budeme značit jako $\mathcal{F}(M)$.

Definice. Křivkou na varietě rozumíme hladké zobrazení $\gamma : A \subset \mathbb{R} \to M$, kde A je interval a $0 \in A$.

Uvažujme třídu ekvivalence křivek v bodě $p \in M$ tak, že $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pokud $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, a zároveň platí, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma_1)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma_2)\bigg|_{t=0}, \tag{1.1}$$

pro libovolnou $f \in \mathcal{F}(M)$. Třídu ekvivalence značíme $[\gamma]$.

Definice. Buď M hladká varieta. Tečným vektorem v k varietě M bodě p rozumíme třídu ekvivalence $v := [\gamma]$ v bodě p a tečným prostorem v bodě p rozumíme množinu $\mathcal{T}_p M := \{[\gamma] \mid \gamma \text{ křivka na } M, \gamma(0) = p\}$.

Dále zavedeme geometrickou obdobu okamžité rychlosti v bodě, tedy směrovou derivaci podle křivky.

Definice. Buď M hladká varieta, $p \in M$, $v \in \mathcal{T}_p M$. Derivací funkce ve směru vektoru (křivky) v v bodě p rozumíme zobrazení $\hat{v} : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$

$$\hat{v} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\bigg|_{t=0} \quad \text{pro libovolné } \gamma \in v = [\gamma]. \tag{1.2}$$

[1] Požadavek na to, aby byla varieta Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bází topologie, je uveden pouze pro úplnost a nebudeme tento fakt dále nijak explicitně využívat.

Prvky tříd ekvivalence $v = [\gamma] \in \mathcal{T}_pM$ a operátory $\hat{v}$ jsou odlišné objekty, ale existuje mezi nimi izomorfismus, tudíž každé třídě ekvivalencí křivek v přísluší právě jeden funkcionál $\hat{v}$. Budeme dále používat symbol bez stříšky a označíme $\hat{v} \equiv v \in \mathcal{T}_pM$, kde $\hat{v}$ a v jsou objekty z definic výše.

Poznámka. Z definice přes diferenciální operátor je jednoduše vidět, že $\mathcal{T}_pM$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. To znamená, že v je lineární funkcionál na $\mathcal{F}(M)$, tj. $\forall v, w \in \mathcal{T}_pM, \forall f \in \mathcal{F}(M)$:

$$(v + \lambda w)f = vf + (\lambda w)f. \tag{1.3}$$

Od tohoto bodu budeme využívat Einsteinovu sumační konvenci a dva shodné indexy jsou sčítací. Rozmezí sumy odpovídá dimenzi variety, resp. indexů.

Bázi vektorového prostoru $\mathcal{T}_pM$ získáme z konkrétní mapy na varietě M tak, že uvažujme situaci na okolí U s mapou x, tzn. $(U, x) \in \mathcal{A}$, kde máme křivku γ splňující $\gamma(0) = p \in U$, a platí:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\bigg|_{t=0} &= (f \circ \gamma)'|_{t=0} = (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'|_{t=0} \\ &= (x^i \circ \gamma)'|_{t=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ztotožníme-li derivaci funkce podle souřadnice tak, aniž bychom rozepisovali, že se jedná o složenou funkci, tj. $\partial_i(f \circ x^{-1})|_{x(p)} =: \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p f$, a označíme $v^i := (x^i \circ \gamma)'|_{t=0}$, potom můžeme rozepisovat libovolný vektor jako

$$\begin{aligned}vf =&(x^i \circ \gamma)'|_{t=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \\ =&v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Vektory $e_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ tvoří bázi indukovanou mapou x na $\mathcal{T}_pM$. Můžeme také uvažovat změnu jejich báze na nějakém okolí, kde se překrývají dvě mapy, tj. pro $(U_x, x), (U_y, y) \in \mathcal{A}$ splňující $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ získáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})|_{x(p)} &= \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ y^{-1})\bigg|_{y(p)} \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p f.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Tento vztah musí platit pro každou $f \in \mathcal{F}(M)$. Vynásobíme-li vztah inverzní maticí, získáme

$$\widetilde{e}_j = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\bigg|_p e_i, \tag{1.7}$$

kde $\widetilde{e}_j := \frac{\partial}{\partial y^j}\big|_p$ jsou bazické vektory v nové bázi. Uvažujme stejné dvě mapy jako výše. Transformace složek vektorů probíhá opačným způsobem při změně báze:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \widetilde{v}^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p, \tag{1.8}$$

z čehož dostáváme pro transformační vztah pro složky vektorů

$$\widetilde{v}^j = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p. \tag{1.9}$$

Vektorová pole

Definujme (hladké) vektorové pole V jako zobrazení, které každé hladké funkci na M přiřadí novou hladkou funkci způsobem, že zapůsobí v každém bodě variety $p \in M$ vektorem $v_p \in \mathcal{T}_p M$ a získáme tak opět skalární funkci.

Definice. Buď M hladká varieta. Vektorovým polem myslíme zobrazení $V : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ definované bodově tak, aby $\forall p \in M$:

$$(Vf)(p) := v_p(f). \tag{1.10}$$

Množinu všech vektorových polí na M značíme $\mathcal{T}_0^1(M)$.

Poznámka. Vektorové pole přiřazuje každému bodu variety nějaký vektor z jeho tečného prostoru a požadavkem hladkosti výsledné funkce zařídíme, že se vektory mění hladce.[2]

Pro vektorová pole můžeme zavést podobné pojmy jako pro vektory samotné. V každém bodě na nějaké mapě (U, x) je můžeme rozepsat do příslušné báze pro $p \in U$, ale komponenty jsou obecně funkcemi od bodu na varietě, resp. od souřadnic:

$$V = V^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p . \tag{1.11}$$

Při překryvu dvou map jako v případě vektorů, $(U_x, x), (U_y, y) \in \mathcal{A}$, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ dostáváme změnu souřadnic stejnou s tím rozdílem, že matice $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ je funkcí bodu na varietě, resp. souřadnic:

$$\widetilde{V}^j = V^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}. \tag{1.12}$$

Složky vektorů a vektorových polí značíme horním indexem.

Kotečné prostory

Definice. Buď M hladká varieta. Kotečným prostorem v bodě $p \in M$ myslíme duální prostor k $\mathcal{T}_p M$ a značíme ho $\mathcal{T}_p^* M$. Jde o prostor všech lineárních funkcionálů $\varphi : \mathcal{T}_p M \to \mathbb{R}$. Prvky kotečného prostoru $\mathcal{T}_p^* M$ nazýváme 1-formami v bodě p.

Stejně jako u tečných prostorů uvažujme mapu (U, x), aby $p \in U$. Potom je báze kotečného prostoru v bodě p, kterou značíme jako $(\mathrm{d}x^1|_p, \ldots, \mathrm{d}x^n|_p)$, dána jako duální báze[3]:

$$\mathrm{d}x^i|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \delta^i_j, \tag{1.13}$$

kde $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ pro $j \in \{1, \ldots, n\}$ tvoří bázi $\mathcal{T}_p M$. Z toho vyplývá, že bazické 1-formy se transformují jako

$$\mathrm{d}\widetilde{x}^i|_p = \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_p \mathrm{d}x^j|_p. \tag{1.14}$$

[2]Rigoroznější postup při zavádění vektorových polí je zavedením fibrovaných prostorů a jejich řezů.

[3]Jedná se o vnější derivace souřadnicových funkcí $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Můžeme tedy libovolnou 1-formu rozepsat v této bázi jako $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i|_p$. Z tohoto vztahu odvodíme, že pro změnu báze platí vztah

$$\widetilde{\omega}_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_p \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_p \omega_j. \tag{1.15}$$

Kovektorová pole

Stejně jako u vektorového pole definujme pole, které každému bodu na varietě přiřadí nějakou 1-formu, a to hladkým způsobem.

Definice. Buď M hladká varieta. Definujeme kovektorové pole jako zobrazení $\Omega : \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{F}(M)$, které působí bodově $\forall p \in M$:

$$\omega(V)(p) := \omega_p(v_p) \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

kde v_p je vektor z definice vektorového pole a $\omega_p \in \mathcal{T}_p^* M$ je nějaký kovektor.

Poznámka. Pro hladké $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ platí, že $\Omega(V)$ je hladkou funkcí na varietě, kde Ω je z předchozí definice.

To znamená, že pole působí v každém bodě variety jako kovektor. Zadefinujme teď gradienty funkcí, které jsou právě kovektorovými poli.

Definice. Definujeme gradient funkce $f \in \mathcal{F}(M)$, kde M je hladká varieta, jako zobrazení $\mathrm{d}f \in \mathcal{T}_1^0(M)$ způsobem:

$$\mathrm{d}f(V) := V(f). \tag{1.17}$$

Potom přirozenou duální bází v kotečných prostorech jsou opravdu gradienty souřadnicových funkcí, protože

$$\mathrm{d}x^i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_p = \delta_i^j. \tag{1.18}$$

Analogicky jako u vektorových polí můžeme vyjádřit v této bázi libovolné kovektorové $\omega = \omega_i(x)\mathrm{d}x^i|_p$, kde složky budou funkcemi bodu na varietě, resp. souřadnic. Transformační vztah je pak stejný jako pro kovektory, ale transformační matice je je funkcí souřadnic:

$$\widetilde{\Omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\Omega_j. \tag{1.19}$$

Složky kovektorů a kovektorových polí značíme dolním indexem.

1.1.2 Tenzorová pole

Na vektorových prostorech můžeme zavést multilineární zobrazení z kartézského součinu vektorových prostorů a příslušných prostorů duálních do tělesa, kterým v našem případě jsou reálná čísla.

Definice. Nechť V je vektorový prostor. Tenzorem T typu (p, q) myslíme zobrazení definované jako

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\text{-krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{-krát}} \to \mathbb{R},$$

které je $\mathbb{R}$-lineární v každém argumentu. Množinu všech tenzorů typu (p, q) na V značíme $T_q^p(V)$.

Zaveďme si zobrazení, které nám dokáže vytvořit tenzory vyššího řádu z tenzorů nižšího řádu.

Definice. Nechť je V vektorový prostor. Definujme zobrazení $\otimes$ jako

$$\otimes : T^p_q(V) \times T^s_r(V) \to T^{p+s}_{q+r}(V),$$

způsobem:

$$(T_1 \otimes T_2)(v_1, \dots, v_q, w_1 \dots w_r; \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1 \dots \beta_s)$$
$$:= T_1(v_1, \dots, v_q; \alpha_1, \dots, \alpha_p) T_2(w_1 \dots w_r; \beta_1 \dots \beta_s). \tag{1.20}$$

Zobrazení $\otimes$ nazýváme tenzorovým součinem.

Výsledek tenzorového násobení je opravdu tenzor. Stejně jako u vektorů a kovektorů budeme uvažovat tenzory vyjádřené v nějaké bázi.

Definice. Nechť máme bázi $(e_1, \dots, e_n)$ na vektorovém prostoru V a příslušnou duální bázi $(e^1, \dots, e^n)$ na V^*. Složkami tenzoru $T \in T^q_p(V)$ myslíme čísla

$$T^{b_1 \dots b_p}_{a_1 \dots a_q} := T(e_{a_1} \dots e_{a_q}; e^{b_1} \dots e^{b_p}), \tag{1.21}$$

kde $a_1 \dots a_q, b_1 \dots b_p \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Za pomocí tenzorového součinu můžeme vyjádřit tenzor ve složkách pomocí báze vektorového prostoru tenzorů typu $T^q_p(V)$. Jeho bází jsou právě tenzorové součiny bazických vektorů z předchozí definice, tedy tenzory $e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_q}$ pro $a_1 \dots a_q, b_1 \dots b_p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tenzor pak můžeme rozepsat jako

$$T = T^{b_1 \dots b_p}_{a_1 \dots a_q} e^{a_1} \otimes \dots \otimes e^{a_q} \otimes e_{b_1} \otimes \dots \otimes e_{b_p}. \tag{1.22}$$

Jelikož tečné a kotečné prostory v bodě tvoří vektorový prostor a prostor duální, tak budeme uvažovat tenzory na těchto prostorech. Navíc bychom chtěli, stejně jako u vektorů a kovektorů, definovat pole, které každému bodu variety přiřadí nějaký tenzor. To definujeme jako zobrazení z vektorových a kovektorových polí na prostor hladkých funkcí.

Definice. Tenzorovým polem typu (p, q) na hladké varietě M myslíme zobrazení

$$t : \underbrace{\mathcal{T}^1_0(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1_0(M)}_{q\text{-krát}} \times \underbrace{\mathcal{T}^0_1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^0_1(M)}_{p\text{-krát}} \to \mathcal{F}(M),$$

které je $\mathcal{F}(M)$-lineární v každém argumentu. Množinu všech tenzorových polí typu (p, q) značíme $\mathcal{T}^q_p(M)$ a tenzorová pole typu $(0, 0)$ ztotožňujeme s funkcemi $\mathcal{F}(M)$.

Stejně jako pro tenzory budeme popisovat tenzorová pole pomocí jejich složek. Bázi pro pole vektorů, resp. kovektorů, indukujeme z mapy na daném okolí (U, x). Bázemi pro tenzorová pole jsou, stejně jako pro tenzory, tenzorové součiny vektorů příslušných bází v dané mapě, tedy $\mathrm{d}x^{a_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{a_q} \otimes \partial_{b_1} \otimes \dots \otimes \partial_{b_p}$ pro $a_1 \dots a_q, b_1 \dots b_p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nicméně souřadnice jsou pro tenzorová pole obecně funkcemi od bodu na varietě, resp. od souřadnic, tedy pro tenzorové pole $t \in \mathcal{T}^p_q(M)$ platí

$$t = t^{b_1 \dots b_p}_{a_1 \dots a_q}(x)\, \mathrm{d}x^{a_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{a_q} \otimes \partial_{b_1} \otimes \dots \otimes \partial_{b_p}. \tag{1.23}$$

Složky tenzorů, resp. tenzorových polí, plně popisují daný objekt v nějaké libovolné bázi. Stačí tedy pracovat se složkami tenzorů a ty je možné chápat jako tenzory v abstraktním smyslu.[4]

Uvažme opět situaci, kdy se překrývají dvě mapy, tedy $(U_x, x), (U_y, y) \in \mathcal{A}$ tak, že $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Potom transformace je z $\mathcal{F}$-multilinearity daná jako

$$t'^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}(y) = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{a_q}}{\partial y^{i_q}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{b_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{b_p}} t^{b_1 \dots b_p}_{a_1 \dots a_q}(x). \tag{1.24}$$

Horní indexy odpovídají vektorovým (kontravariantním) složkám a dolní indexy kovektorovým (kovariantním) složkám.

Metrický tenzor

V obecné teorii relativity chceme, aby na tečných prostorech byl definovaný skalární součin. To postulujeme tak, že na všech tečných prostorech máme definovaný metrický tenzor $g \in T^0_2(\mathcal{T}_p M)$, který je symetrický a nedegenerovaný. Definujme metrický tenzor na obecném lineárním prostoru.

Definice. Buď V vektorový prostor. Metrickým tenzorem myslíme tenzor $g \in T^0_2(V)$, který pro $v, u \in V$ splňuje:

1. symetričnost:
$$g(v, u) = g(u, v), \tag{1.25}$$

2. nedegenerovanost:
$$g(v, u) = 0 \text{ pro všechny } v \implies u = 0, \tag{1.26}$$

Definujeme zároveň inverzní metrický tenzor g^{-1} tak, že pro libovolnou bázi $(e_1, \dots, e_n)$ a složky metrického tenzoru $g_{ab} = g(e_a, e_b)$ chceme, aby složky (prvky matice) inverzního metrického tenzoru g^{ac} splňovaly $g^{ac} g_{cb} = \delta^b_a$. Inverzní metrický tenzor je potom (2, 0)-tenzor $g^{-1} = g^{ab} e_a \otimes e_b$.

Za vektorový prostor V z definice tedy bereme tečný prostor $T_p M$ pro nějaký $p \in M$ a máme k dispozici kanonický izomorfismus tečného a kotečného prostoru přes skalární součin. To nám umožní definovat operaci zdvihání a snižování indexu. Nechť v^a, resp. ω_a jsou složky vektoru, resp. kovektoru v nějaké bázi. Potom definujeme zdvihnutí a snížení indexu jako:

$$v^a g_{ab} =: v_b \qquad \omega_a g^{ab} =: \omega^b,$$

kde v_a jsou složky duálního kovektoru k v^a a stejně tak to platí pro formu, kde ω^a jsou složky duálního vektoru ke kovektoru ω_a. Tento postup můžeme zobecnit pro tenzory libovolného typu.

Signaturou metrického tenzoru myslíme počet 1 a -1 matice složek metrického tenzoru v polární bázi, tedy bázi $(e_1, \dots, e_n)$, kde má matice tvar:

$$g^{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r-\text{krát}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s-\text{krát}}), \tag{1.27}$$

[4] V druhé části této práce je zvolen formalismus, kdy to, co je zde značeno jako složky tenzorů, bereme opravdu jako objekty ve smyslu multilineárních zobrazení a nikoliv složky v nějaké bázi.

a čísla r a s jsou signaturou metrického tenzoru.[5]

Na celé varietě potom můžeme uvažovat tenzorové pole metrického tenzoru, kterému říkáme metrika na varietě.

Definice. Metrikou na varietě M myslíme tenzorové pole $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, které je v každém bodě metrikou tečného prostoru variety v daném bodě.

Definici inverzní metriky, zvedání a snižování indexů provedeme bodově a platí stejným způsobem. Varietu s metrikou nazýváme riemannovskou varietou a jelikož nám metrika udává další důležité struktury, často ji značíme (M, g).

1.2 Lieova derivace

Chceme-li porovnávat vektory v různých bodech variety, nemůžeme to dělat přímo jejich odečtením, protože mezi prvky tečných prostorů v dvou různých bodech nemáme definované operace jako sčítání. Můžeme však podle nějakého pravidla vektory mezi body přenášet. Jedním způsobem je tzv. lieovský přenos, který vede na Lieovu derivaci. Písmeny M a N budeme všude v této kapitole označovat hladké variety.

Nejdříve začneme definicí nezbytných zobrazení tenzorových polí indukovaných hladkým zobrazením variet. Tyto pojmy nám umožní pomocí nějaké hladké funkce přenášet tenzorová pole mezi varietami, což použijeme v definici Lieovy derivace. Prvním pojmem bude pullback funkce.

Definice. Nechť $f : M \to N$ je hladké zobrazení variet. Definujeme zobrazení f^*, které zobrazí funkci $\varphi : N \to \mathbb{R}$ na funkci $f^*\varphi : M \to \mathbb{R}$, způsobem

$$f^*\varphi := \varphi \circ f. \tag{1.28}$$

Zobrazení f^* nazýváme pullback funkce při funkci f.

Pullback funkce tedy přenese funkci (podle nějaké námi zvolené funkce f) z variety N na varietu M pomocí jednoduchého složení funkcí

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$

Dále bychom pomocí nějakého zadaného hladkého zobrazení variet $f : M \to N$ chtěli přenést vektor z tečného prostoru T_pM na varietě M do tečného prostoru $T_{f(p)}N$ na varietě N.[6] To provedeme pomocí právě zadefinovaného pullbacku.

Definice. Nechť $f : M \to N$ je hladké zobrazení variet. Definujme zobrazení z tečného prostoru variety M v bodě p do tečného prostoru variety N v bodě $f(p)$ jako

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N \qquad\qquad (f_*V)\phi := V(f^*\phi), \tag{1.29}$$

kde ϕ je libovolná funkce $\phi : N \to \mathbb{R}$. Funkci f_* nazýváme pushforward vektoru při funkci f.

[5] Nulové složky na diagonále nemůžou být kvůli podmínce nedegenerovanosti.

[6] Směr přesunu je zde obrácený. Narozdíl od pullbacku jdeme „ve směru zobrazení“ f.

K tomu, abychom obdobným způsobem přenášeli tenzory nebo tenzorová pole, musíme rozšířit definici pullbacku z funkcí na 1-formy.

Definice. Nechť $f : M \to N$ je hladké zobrazení variet. Definujme zobrazení z kotečného prostoru variety N v bodě $f(p)$ do kotečného prostoru variety N v bodě p jako

$$f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_p M \qquad (f^*\varphi)(V) := \varphi(f_*(V)), \tag{1.30}$$

kde φ je 1-forma, $\varphi \in T^*_{f(p)}N$ a V libovolný vektor $T^*_p M$. Zobrazení f^* nazýváme pullback 1-formy při funkci f.

Požadujeme tedy, aby vyhodnocení nějakého funkcionálu φ na vektoru V zobrazeného pushforwardem bylo stejné, jako kdybychom zobrazili funkcionál pullbackem f_* a výsledný funkcionál $f_*\varphi$ vyhodnotili na původním vektoru V. Rozšiřme definici pullbacku z jednotlivých tečných a kotečných prostorů na celá kovariantní tenzorová pole. To provedeme jednoduše bodově přes pushforward vektorů v argumentech pole.

Definice. Nechť $f : M \to N$ je hladké zobrazení variet. Definujme zobrazení $f^* : \mathcal{T}^0_r(N) \to \mathcal{T}^0_r(M)$ tenzorového pole typu $(r, 0)$ na varietě N na tenzorové pole stejného typu na varietě M bodově jako

$$((f^*\Omega)(V_1, \ldots, V_r))(p) := \Omega|_{f(p)}(f_*(V_1|_p), \ldots, f_*(V_r|_p)), \tag{1.31}$$

kde p je libovolný bod z M, Ω je z $\mathcal{T}^0_r(N)$, $V_1, \ldots V_r$ jsou vektorová pole z $\mathcal{T}^1_0(M)$ a $V_1|_p \ldots V_r|_p$ jsou vektory odpovídající vektorovým polím $V_1 \ldots V_r$ v bodě p. Zobrazení f^* nazýváme pullbackem kovektorového pole při zobrazení f.

Takto dokážeme přenést kovariantní tenzorová pole. Proveďme poslední zobecnění pojmu pullback, a to pro tenzorové pole libovolného typu. Na funkci f, při které budeme pullback provádět, ale musíme zesílit požadavky. Kdyby nebyla daná funkce f surjektivní, tak přenesené pole není všude na cílové varietě definované, a kdyby nebyla funkce při zobrazení např. vektorového pole injektivní, můžeme získat v jednom bodě cílové variety dva různé vektory (a takový objekt by nebyl vektorovým polem). Požadujme tedy, aby funkce f byla navíc difeomorfismem a s takovým požadavkem máme zaručenou existenci inverzní funkce f^{-1}, kterou využijeme při zobrazení kovektorové části tenzoru.

Definice. Nechť $f : M \to N$ je difeomorfismus variet. Definujme zobrazení $f^* : \mathcal{T}^s_r(N) \to \mathcal{T}^s_r(M)$ tenzorového pole typu (r, s) na varietě N na tenzorové pole stejného typu na varietě M bodově jako

$$\begin{aligned} &((f^*t)(V_1, \ldots, V_r; \varphi_1, \ldots \varphi_s))(p) \\ &\qquad := t|_{f(p)} \left(f_*(V_1|_p) \ldots f_*(V_r|_p); (f^{-1})^*(\varphi_1|_p), \ldots (f^{-1})^*(\varphi_s|_p) \right), \end{aligned} \tag{1.32}$$

kde $t \in \mathcal{T}^s_r(N)$, $V_1 \ldots V_r$ jsou vektorová pole z $\mathcal{T}^1_0(M)$ a $\varphi_1, \ldots \varphi_s$ jsou kovektorová pole z $\mathcal{T}^0_1(M)$. Vektorová, resp. kovektorová, pole s dolním indexem p značí odpovídající vektory, resp. kovektory v daném bodě, $t|_{f(p)}$ značí tenzor odpovídající tenzorovému poli t v bodě $f(p)$. Zobrazení f^* nazýváme pullbackem tenzorového pole t.

Tímto pojmem dokážeme přenést libovolný tenzor na jinou varietu pomocí difeomorfismu variet f. Můžeme samozřejmě zvolit i zobrazení, které zobrazuje na stejnou varietu $f : M \to M$. Takovým difeomorfismem bude tok vektorového pole, který nám umožní přenést tenzory do jiného, infinitesimálně vzdáleného, bodu naší variety M, a následně je porovnat.

Vezměme vektorové pole X a definujme tok vektorového pole Φ^t_X, které posune body variety o parametrickou vzdálenost $t \in \mathbb{R}$ ve směru integrálních křivek daného pole.

Definice. Nechť $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$, potom tokem vektorového pole rozumíme zobrazení Φ^t_X definované jako

$$\begin{aligned} \Phi^t_X : M &\to M \\ p &\mapsto \gamma_p(t), \end{aligned} \tag{1.33}$$

kde γ_p je integrální křivka vektorového pole X taková, že $\gamma(0) = p$ a $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Zobrazení Φ^t_X je difeomorfismus na nějakém okolí bodu p.

Jelikož je zobrazení difeomorfismus, můžeme pomocí něj definovat pullback.

Definice. Pullback libovolného tenzoru při vektorovém toku Φ^t_X nějakého vektorového pole $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$:

$$\left(\Phi^t_X\right)^* : \mathcal{T}^q_p(M) \to \mathcal{T}^q_p(M)$$

nazveme lieovským přenosem tenzorového pole.

Máme tedy možnost porovnávat pole ve dvou bodech variety tak, že tenzor lieovsky přeneseme ve směru nějakého vektorového a porovnáme s původním tenzorem v daném místě. Na tomto konceptu funguje Lieova derivace.

Definice. Buď $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ vektorové pole na varietě. Definujme zobrazení $\mathcal{L}_\mathbf{X} : \mathcal{T}^q_p(M) \to \mathcal{T}^q_p(M)$ jako

$$\mathcal{L}_\mathbf{X} T := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\Phi^t_X\right)^* T, \tag{1.34}$$

kde $T \in \mathcal{T}^q_p(M)$. Zobrazení nazýváme Lieovou derivací tenzoru T podle pole X.

Z vlastností Lieovy derivace lze odvodit vztah pro derivaci libovolného tenzoru ve složkách jako

$$(\mathcal{L}_\mathbf{X} T)^{l_1 \dots l_q}_{m_1 \dots m_p} = X^i \partial_i T^{l_1 \dots l_q}_{m_1 \dots m_p} + \dots - \partial_j X^k T^{l_1 \dots j \dots l_q}_{m_1 \dots m_p} + \dots + \partial_n X^s T^{l_1 \dots l_q}_{m_1 \dots s \dots m_p} + \cdots \,, \tag{1.35}$$

kde procházíme všechny horní i dolní indexy a podle výše uvedeného pravidla přidáme do součtu členy podle toho, jestli je index kovariantní nebo kontravariantní. Index k, resp. n, ve druhém, resp. třetím, uvedeném sčítanci na pravé straně je index, který byl původně na pozici j, resp. s, v tenzoru $T^{l_1 \dots l_q}_{m_1 \dots m_p}$ na levé straně.

1.3 Konexe a tenzor křivosti

Druhým možným způsobem, jak přenášet vektory, a tedy je i derivovat, je paralelní přenos, který realizujeme přes konexi a kovariantní derivaci. Kovariantní derivaci definujeme algebraicky postulováním vlastností, kterými se řídí.

Definice. Definujme kovariantní derivaci (lineární konexi) podle vektorového pole $X \in \mathcal{T}_1^0$ na hladké varietě $(M, \mathcal{A})$ jako zobrazení ∇_X, které přiřadí

$$\nabla_X : \mathcal{T}_p^q(M) \to \mathcal{T}_p^q(M)$$

a splňuje pravidla:

1. na skalární funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ působí jako
$$\nabla_X f = X(f), \tag{1.36}$$
2. je to lineární operátor na tenzorové algebře, tedy pro $A, B \in \mathcal{T}_p^q(M), \lambda \in \mathbb{R}$ platí
$$\nabla_X(A + \lambda B) = \nabla_X A + \lambda \nabla_X B, \tag{1.37}$$
3. splňuje Leibnizovo pravidlo, tedy pro $A \in \mathcal{T}_p^q(M), B \in \mathcal{T}_r^s(M)$ platí
$$\nabla_X(A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes (\nabla_X B), \tag{1.38}$$
4. je $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-lineární v poli, podle kterého derivujeme:
$$\nabla_{X+fY} T = \nabla_X T + f \nabla_Y T. \tag{1.39}$$

Poznámka. 3. vlastnost z předchozí definice se dá pro $T \in \mathcal{T}_1^1$ rozepsat jako

$$\nabla_X T(\Omega, V) = \nabla_X T(\Omega, V) + T(\nabla_X \Omega, V) + T(\Omega, \nabla_X V), \tag{1.40}$$

kde zobecnění pro tenzory libovolného typu je analogické.

Vyjádříme-li kovariantní derivaci vektorového pole V podle pole X na okolí U pro mapu (U, x), můžeme rozepsat výraz jako

$$\begin{aligned}
\nabla_X V &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= X^i \nabla_i V^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i V^j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= X^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i V^j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= X(V^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i V^j \Gamma^k{}_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k},
\end{aligned} \tag{1.41}$$

kde jsme označili $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} =: \nabla_i$ a zadefinovali jsme tzv. koeficienty konexe $\Gamma^k{}_{ji}$ (při dané mapě) vztahem

$$\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k{}_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.42}$$

které nazýváme Christoffelovými symboly druhého druhu. Pokud odvodíme transformační pravidla, zjistíme, že symboly $\Gamma^i{}_{jk}$ nejsou tenzory, a proto je označujeme jako symboly. Pro kovariantní derivaci kovektorového pole ekvivalentně získáme, že platí

$$\begin{aligned}
\nabla_X \Omega &= X^i \frac{\partial \Omega^j}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i + X^i \Omega_j \nabla_i \mathrm{d}x^j \\
&= X(\Omega^j) \mathrm{d}x^i - X^i \Omega_j \Gamma^j{}_{ki} \mathrm{d}x^k,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

kde vztah $\nabla_i \mathrm{d}x^j = -\Gamma^j{}_{ki}\mathrm{d}x^k$ lze ukázat z Leibnizova pravidla. Pro tenzorové pole libovolného typu je zobecnění dané kovariantní derivací vektorů a kovektorů. Ve složkách získáváme následující vztah:

$$(\nabla_X T)^{l_1,\dots,l_q}_{m_1\dots m_p} = X^i \partial_i T^{l_1,\dots,l_q}_{m_1\dots m_p} + \dots + X^i T^{l_1\dots j\dots l_q}_{m_1\dots m_p}\Gamma^k{}_{ji} + \dots - X^i T^{l_1\dots l_q}_{m_1\dots s\dots m_p}\Gamma^s{}_{ni}\cdots, \tag{1.44}$$

kde index k, resp. n, ve druhém, resp. třetím, uvedeném sčítanci na pravé straně je index, který byl původně na pozici j, resp. s, v tenzoru $T^{l_1\dots l_q}_{m_1\dots m_p}$ na levé straně.

1.3.1 Levi-Civitova konexe

V eukleidovském prostoru určitě platí, že při přenášení vektoru po křivce vektor nemění svou velikost. Jelikož v časoprostoru máme varietu s metrickým tenzorem, budeme požadovat, aby toto splňovala i naše konexe. Tato podmínka se dá postulovat tak, že chceme, aby pro libovolné vektorové pole X platilo

$$\nabla_X g = 0. \tag{1.45}$$

Konexí splňující toto existuje více, postulujeme tedy ještě jeden požadavek, který nám dá jednoznačnou konexi na naší varietě – to bude nulovost tenzoru torze. Tenzor torze je $(2,0)$-tenzor T definovaný pro variety s lineární konexí jako

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \tag{1.46}$$

kde $[X,Y] := XY - YX$ je komutátor vektorových polí. Podmínka nulovosti tenzoru torze T implikuje symetrii symbolů $\Gamma^i{}_{jk}$ v dolních indexech. Totiž potom platí

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}. \tag{1.47}$$

Takovou konexi nazýváme symetrickou. Ze dvou nových axiomů, které jsme přidali k našim čtyřem z definice kovariantní derivace (1.36)–(1.39), dokážeme odvodit, že platí

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} + \partial_l g_{jk}\right). \tag{1.48}$$

Při zadaných předpokladech tudíž dokážeme plně určit Christoffelovy symboly ze složek metrického tenzoru (a tím pádem i konexi). Tato konexe se nazývá Levi-Civitova, zkráceně LC-konexe, a právě tato konexe je uvažována na časoprostorové varietě.

1.3.2 Riemannův tenzor

Důležitým tenzorem na varietě s konexí je Riemannův tenzor, který zjednodušeně řečeno kvantifikuje, jak moc nekomutuje kovariantní derivace. Formálně se definuje následujícím způsobem.

Definice. Tenzorové pole $R \in \mathcal{T}^3_1(M)$ definované jako

$$R(W,U,V;\omega) := \omega(([\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U,V]})W) \tag{1.49}$$

nazýváme Riemannovým tenzorem (tenzorem křivosti).

Riemannův tenzor, zapsaný ve složkách jako $R(e^b, e^c, e^d, e_a) =: R^a{}_{bcd}$, splňuje důležité symetrie, které jsou:

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}, \tag{1.50}$$
$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \tag{1.51}$$
$$R_{abcd} = R_{cdab}. \tag{1.52}$$

Dále je možné vyjádřit Riemannův tenzor pro nějakou souřadnicovou mapu pomocí Christoffelových symbolů jako

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^e{}_{bd}\Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{bc}\Gamma^a{}_{ed}. \tag{1.53}$$

Zaveďme důležité kontrakce:

$$R_{ab} := R^c{}_{acb} \qquad\qquad R := R^a{}_a, \tag{1.54}$$

kde tenzor R_{ab} nazýváme Ricciho tenzorem a R skalární křivostí.

Kapitola 2

3+1 formulace relativity

Časoprostor $(\mathcal{M}, g)$ uvažujeme jako dvojici složenou z hladké reálné variety $\mathcal{M}$ a metriky g se signaturou zvolenou jako $(-,+,+,+)$. Metrika indukuje příslušnou Levi-Civitovu konexi na varietě. Zároveň požadujeme, aby $\mathcal{M}$ byla časově orientovatelná.

Cílem této sekce bude popsat rozštěpení časoprostoru na množinu prostorupdobných nadploch, které budeme značit Σ_t. Pro existenci foliace budeme předpokládat, že časoprostor je globálně hyperbolický. Globálně hyperbolickým prostorem rozumíme prostor, který je kompatibilní s existencí Cauchyho nadplochy.[1]

Přijímáme konvenci, kdy indexací u tenzorů neoznačujeme složku tenzoru, ale tenzor v jeho obecné definici jako multilineární zobrazení. Indexy jsou značené latinkou a jejich rozpětí je určené daným objektem. V práci se vyskytují dva typy tenzorů, buď čtyřidimenzonální, které značíme indexem ${}^{(4)}T^{p_1p_2\dots p_n}{}_{q_1q_2\dots q_m}$, nebo třídimenzionální, které zůstávají bez indexu $T^{p_1p_2\dots p_n}{}_{q_1q_2\dots q_m}$.

2.1 Foliace časoprostoru

Foliace provedeme za pomocí nějakého skalárního pole $\hat{t} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ na naší varietě. Rozdělíme tedy časoprostor na nadplochy Σ_t, na kterých je funkce konstantní a nabývá hodnoty $t \in \mathbb{R}$

$$\Sigma_t \equiv \{p \in M \mid \hat{t}(p) = t\}. \tag{2.1}$$

Budeme předpokládat, že funkci $\hat{t}$ volíme tak, aby byly nadplochy prostorupodobné. Volba je v tento moment zcela formální, ale později budeme funkci $\hat{t}$ chápat jako vlastní čas nějaké třídy pozorovatelů. Chceme, aby naše foliace pokryla celý časoprostor, to znamená, že požadujeme

$$M = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t. \tag{2.2}$$

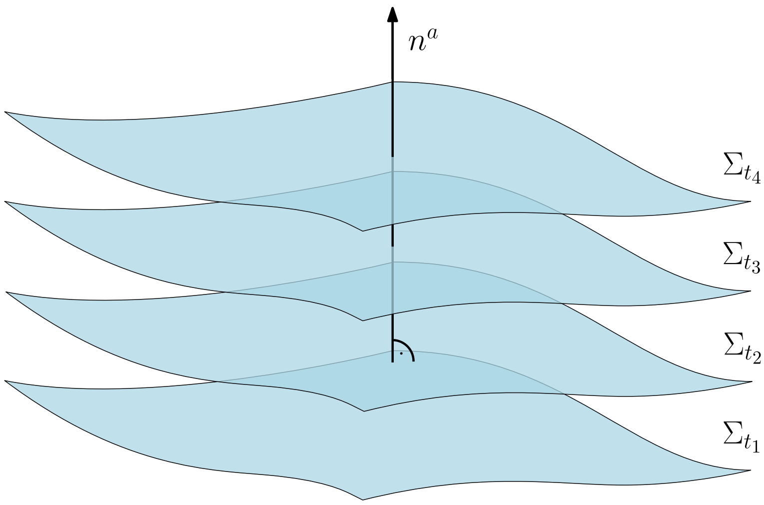
Graficky je foliace znázorněna na obrázku 2.1. V dalším textu nebudeme používat $\hat{t}$, ale budeme označovat funkci pouze t. Definujme teď funkci α. Začněme definicí kovektorového pole Ω_a jako

$$\Omega_a := \nabla_a t, \tag{2.3}$$

které díky exaktnosti splňuje relaci uzavřenosti, v řeči kovariantní derivace

$$\nabla_{[a}\Omega_{b]} = 0. \tag{2.4}$$

[1]Nadplocha v časoprostoru, kterou prodloužení libovolné kauzální křivky protíná právě jednou.



Obrázek 2.1: Foliace časoprostoru pomocí funkce t. Zobrazené prostorupodobné nadplochy Σ_t jsou plochy konstantního času $t =$ konst. Vektorové pole n^α je tvořeno jednotkovými kolmými vektory k těmto nadplochám.

Funkci α potom definujeme jako normalizační faktor pro kovektorové pole Ω_a

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{-g^{ab}\Omega_b\Omega_a}}, \tag{2.5}$$

přičemž pomocí funkce α už jednoduše přeškálujeme pole Ω_a na jednotkovou velikost a zadefinujeme tak novou formu

$$\omega_a := -\alpha\Omega_a. \tag{2.6}$$

Faktor je zvolen se záporným znaménkem, aby následně získaný vektor měl požadovanou orientaci. Z takto definované formy získáme normálový vektor zvýšením indexu

$$n^a := g^{ab}\omega_b, \tag{2.7}$$

kdy si můžeme ověřit, že platí $n^a\omega_a = 1$. Funkce α má speciální postavení (v anglické literatuře se nazývá lapse function) a vyjadřuje vlastní čas uplynulý mezi jednotlivými nadplochami pro pozorovatele, jehož světočára je integrální křivkou pole n^a. Vektor, resp. vektorové pole, n^a je časupodobný s velikostí $n^a n_a = -1$ a je normálou k prostorupodobné nadploše. Za pomocí vektoru n^a a metrického tenzoru definujeme prostorovou metriku γ_{ab}, jinak nazývanou první fundamentální forma nadplochy Σ_t,

$$\gamma_{ab} := g_{ab} + n_a n_b. \tag{2.8}$$

Prostorová metrika γ_{ab} působí netriválně pouze v nadploše Σ_t a normálové části tenzoru vynuluje $\gamma_{ab}n^b = 0$. Zvýšením indexu u metriky γ_{ab} získáme projektor

$$\gamma_a{}^b = \delta_a{}^b + n_a n^b, \tag{2.9}$$

který zobrazí tenzory na nadplochy Σ_t. Dalším potřebným projektorem je projektor na normálovou složku

$$N_a{}^b \equiv -n_a n^b. \tag{2.10}$$

Pomocí projektoru ${\gamma_a}^b$ zavedeme operátor projekce na nadplochu Σ_t pro tenzor libovolného typu (p, q), který značíme symbolem $\perp$

$$\perp T^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} = \gamma^{a_1}{}_{c_1} \cdots \gamma^{a_p}{}_{c_p} {\gamma_{b_1}}^{d_1} \cdots {\gamma_{b_q}}^{d_q} T^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q} . \tag{2.11}$$

Metrika spolu s nadplochou (Σ_t, γ_{ab}) tvoří opět varietu a všechny objekty jsou na ní definovány ekvivalentně jako na celém časoprostoru $(\mathcal{M}, g_{ab})$. Vektory, které leží v tečném prostoru nadplochy Σ_t budeme nazývat prostorovými vektory.

Dalším krokem bude přenést na nadplochu kompatibilní konexi. Operátorem $\perp$ definujeme kovariantní derivaci na nadploše Σ_t jako projekci kovariantní derivace na nadplochu Σ_t, tedy[2]

$$D_c T^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} :=\perp \nabla_c T^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} . \tag{2.12}$$

Operátor D_a je kovariantní derivace (Levi-Civitovy) konexe určené metrikou γ_{ab}. Christoffelovy symboly vyjádřené v metrice jsou

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} \gamma^{ad} \left(\partial_c \gamma_{db} + \partial_b \gamma_{dc} - \partial_d \gamma_{bc} \right) . \tag{2.13}$$

Taková konexe má nulovou torzi a splňuje důležitou kompatibilitu s prostorovou metrikou

$$\begin{aligned} D_a \gamma_{bc} &=\perp \nabla_a (g_{bc} + n_b n_c) =\perp \nabla_a n_b n_c =\perp (n_b \nabla_a n_c + n_c \nabla_a n_b) \\ &= {\gamma_a}^d {\gamma_b}^e {\gamma_c}^f (n_e \nabla_d n_f + n_f \nabla_d n_e) = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

V poslední rovnosti byl využitý vztah ${\gamma_a}^b n_b = 0$, který říká, že projektor ${\gamma_a}^b$ vynuluje časupodobný vektor.

Sérií vztahů definujeme třídimenzionální (prostorový) Riemannův tenzor $R^a{}_{bcd}$ podobně jako čtyřdimenzionální Riemannův tenzor, který budeme značit ${}^{(4)}R^a{}_{bcd}$. Pro každý prostorový vektor w^d, tj. vektor z tečného prostoru k nadploše Σ_t, a normálový vektor n^d platí vztahy

$$2 D_{[a} D_{b]} w_c = R^d{}_{cba} w_d \qquad\qquad R^d{}_{cba} n_d = 0. \tag{2.15}$$

To znamená stejně jako pro ${}^{(4)}R^a{}_{bcd}$, ale s přidanou podmínkou na normálový vektor. Ricciho tenzor je kontrakce Riemannova tenzoru $R_{ab} = R^c{}_{acb}$ a Ricciho skalár je kontrakcí $R^a{}_a = R$.

Třídimenzionální metrikou γ_{ab} a Riemannovým tenzorem $R^a{}_{bcd}$ popíšeme vnitřní geometrii nadploch. Je potřeba vnoření nadploch do časoprostoru. K tomu bude sloužit veličina K_{ab} zvaná vnější křivost. Definujme ji jako

$$K_{ab} := -{\gamma_a}^c {\gamma_b}^d \nabla_{(c} n_{d)} = -{\gamma_a}^c {\gamma_b}^d \nabla_c n_d , \tag{2.16}$$

kde rovnost vychází z toho, že projekce antisymetrické části tenzoru $\nabla_c n_d$ na nadplochu Σ_t je nulová. Můžeme to ukázat použitím identity[3] $\omega_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = 0$:

$${\gamma_d}^a {\gamma_e}^b \nabla_{[a} n_{b]} = -{\gamma_d}^a {\gamma_e}^b n^c (n_a \nabla_{[b} n_{c]} + n_b \nabla_{[c} n_{a]}) = 0, \tag{2.17}$$

kdy bylo opět využito, že ${\gamma_a}^b n_b = 0$. Vnější křivost měří změnu směru normálového vektoru n_a na nadploše Σ_t při pohybu mezi jednotlivými body.

[2]Pro funkci $D_a f = {\gamma_a}^b \nabla_b f$ a pro vektor jednoduše $D_a V_b = {\gamma_a}^c {\gamma_b}^d \nabla_c V_d$.

[3]Identita lze ukázat přímým dosazením a využitím uzavřenosti formy (2.4).

Eulerovský pozorovatel

Eulerovský pozorovatel je pozorovatel, jehož čtyřrychlostí je vektor n^a, a tedy světočáry Eulerovského pozorovatele jsou kolmé k nadplochám Σ_t. Definujme veličinu a_a jako čtyřzrychlení Eulerovského pozorovatele

$$a_a \equiv n^b \nabla_b n_a. \tag{2.18}$$

Zrychlení je prostorový vektor, tedy $n^a a_a = 0$, kde využíváme, že $n^a \nabla_b n_a = 0$ v důsledku normalizace $n^a n_a = -1$. Rozepíšeme-li definici vnější křivosti a následně použijeme definici ${\gamma_a}^b$ získáme vztah K_{ab} a zrychlení

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -{\gamma_a}^c {\gamma_b}^d \nabla_c n_d = -({\delta_a}^c + n_a n^c)({\delta_b}^d + n_b n^d)\nabla_c n_d \\ &= -({\delta_a}^c + n_a n^c){\delta_b}^d \nabla_c n_d = -\nabla_a n_b - n_a a_b. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Zároveň se zrychlení dá přímo získat z funkce α, vyjdeme-li z jeho definice (2.18), tak platí

$$\begin{aligned} a_a &= -n^b \nabla_b \left(\alpha \nabla_a t\right) = -n^b \nabla_a t \nabla_b \alpha - n^b \alpha \nabla_b \nabla_a t = \frac{1}{\alpha} n_a n^b \nabla_b \alpha - \alpha n^b \nabla_a \nabla_b t \\ &= \frac{1}{\alpha} n_a n^b \nabla_b \alpha - \alpha n^b \nabla_a \left(-\frac{1}{\alpha} n_b\right) = \frac{1}{\alpha} n_a n^b \nabla_b \alpha + n^b \nabla_a n_b - n^b n_b \frac{1}{\alpha} \nabla_a \alpha \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(n_a n^b \nabla_b \alpha + \nabla_a \alpha\right) = \frac{1}{\alpha} {\gamma_a}^b \nabla_b \alpha = \frac{1}{\alpha} D_a \alpha \\ &= D_a \ln \alpha, \end{aligned} \tag{2.20}$$

kde byla opakovaně použita definice $n_a = -\alpha \nabla_a t$ a vztah $n^a \nabla_b n_a = 0$.

2.2 Gaussova, Codazziho a Ricciho rovnice

Metrika γ_{ab} i vnější křivost K_{ab} jsou v každé nadploše Σ_t určené zakřivením okolního časoprostoru, do kterého jsou nadplochy vnořené. Vztah mezi veličinami definovanými na nadplochách Σ_t: (γ_{ab}, K_{ab}) a Riemannovým tenzorem ${}^{(4)}{R^a}_{bcd}$ získáme tak, že veličinu ${}^{(4)}{R^a}_{bcd}$ rozepíšeme pomocí ${R^a}_{bcd}$ definovaného na nadplochách Σ_t.

Riemannův tenzor ${}^{(4)}{R^a}_{bcd}$ lze rozložit pomocí tří projekcí. První dvě projekce, při kterých jsou všechny čtyři indexy promítnuty na nadplochu Σ_t, resp. kdy je jedna složka zobrazena na normálový směr a zbylé tři na nadplochu Σ_t, vztahují Gaussova, resp. Codazziho, rovnice k veličinám (γ_{ab}, K_{ab}). Třetí projekce, při které jsou dva indexy promítnuté na normálový směr a zbylé dva na nadplochu Σ_t, je spojená s časovou derivací vnější křivosti přes Ricciho rovnici. Ostatní projekce jsou ze symetrií tenzoru ${}^{(4)}{R^a}_{bcd}$ nulové, a tedy pomocí výše popsaných projekcí získáváme rozklad čtyřdimenzionálního Riemannova tenzoru.[4]

2.2.1 Gaussova rovnice

Abychom získali Gaussovu rovnici, rozepíšeme Riemannův tenzor R_{abcd} z definice (2.15) pro libovolný vektor V^a tečný k nadploše Σ_t. Nejprve upravujeme druhou

[4] Narozdíl od Ricciho rovnice mají Gaussova a Codazziho rovnice smysl i pro jednu nadplochu, protože jsou definované pouze na tečných vektorech a neobsahují časovou derivaci.

kovariantní derivaci vektoru V^a :

$$\begin{aligned}
D_a D_b V^c &= D_a(D_b V^c) = \gamma_a{}^d \gamma_b{}^e \gamma_f{}^c \nabla_d (D_e V^f) = \gamma_a{}^d \gamma_b{}^e \gamma_f{}^c \nabla_d (\gamma_e{}^g \gamma_h{}^f \nabla_g V^h) \\
&= \gamma_a{}^d \gamma_b{}^e \gamma_f{}^c \Big(\gamma_e{}^g \nabla_g V^h \underbrace{\nabla_d \gamma_h{}^f}_{= n_h \nabla_d n^f + n^f \nabla_d n_h} + \gamma_h{}^f \nabla_g V^h \nabla_d \gamma_e{}^g + \gamma_h{}^f \gamma_e{}^g \nabla_d \nabla_g V^h \Big) \\
&= \gamma_a{}^d \gamma_b{}^e \gamma_f{}^c \Big(\gamma_e{}^g \underbrace{\nabla_g V^h n_h}_{= -V^h \nabla_g n_h} \nabla_d n^f + \gamma_h{}^f \nabla_g V^h n^g \nabla_d n_e + \gamma_h{}^f \gamma_e{}^g \nabla_d \nabla_g V^h \Big) \\
&= -\gamma_a{}^d \gamma_b{}^g \gamma_f{}^c V^h \nabla_g n_h \nabla_d n^f + \gamma_a{}^d \gamma_b{}^e \gamma_h{}^c n^g \nabla_g V^h \nabla_d n_e + \gamma_a{}^d \gamma_b{}^g \gamma_h{}^c \nabla_d \nabla_g V^h \\
&= -K_a{}^c K_{bh} V^h - K_{ab} \gamma_h{}^c n^g \nabla_g V^h + \gamma_a{}^d \gamma_b{}^g \gamma_h{}^c \nabla_d \nabla_g V^h,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

přičemž jsme na druhém řádku rozepsali projektor z definice $\gamma_a{}^b = \delta_a{}^b + n_a n^b$ a na třetím řádku využili vlastnosti $\nabla_a \delta_b{}^c = 0$. Záměnou indexů a odečtením už získáme vztah

$$R^{dc}{}_{ba} V_d = 2 D_{[a} D_{b]} V^c = 2 \gamma_a{}^d \gamma_b{}^g \gamma_h{}^c \nabla_{[d} \nabla_{g]} V^h - 2 K_{[ab]} \gamma_h{}^c n^g \nabla_g V^h - 2 K_{[a}{}^c K_{b]h} V^h. \tag{2.22}$$

Tenzor K_{ab} je podle (2.17) symetrický a druhý člen je nulový. První člen se dá přepsat z definice Riemannova tenzoru $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V^c = {}^{(4)}R^c{}_{dab} V^d$. Provedením těchto úprav bude rovnice tvaru

$$R_{dcba} V^d = \gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r \, {}^{(4)}R_{drqp} V^d - 2 K_{c[a} K_{b]d} V^d. \tag{2.23}$$

Předchozí rovnice musí platit pro každý prostorový vektor. Dostáváme tedy rovnost pro tenzory jako takové:

$$\boxed{R_{abcd} + K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{cb} = \gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r \gamma_d{}^s \, {}^{(4)}R_{pqrs}.} \tag{2.24}$$

Předchozí rovnice se nazývá Gaussova rovnice a spojuje projekci ${}^{(4)}R_{abcd}$ s třídimenzionálním Riemannovým tenzorem $R^a{}_{bcd}$ a vnější křivostí K_{ab}.

2.2.2 Codazziho rovnice

Pro odvození Codazziho rovnice vyjdeme z kovariantní derivace vnější křivosti, kterou rozepíšeme pomocí vztahu (2.19)

$$\begin{aligned}
D_a K_{bc} &= \gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r \nabla_p K_{qr} = -\gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r (\nabla_p \nabla_q n_r + \nabla_p (n_q a_r)) \\
&= -\gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r \nabla_p \nabla_q n_r + a_c K_{ab}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Použili jsme vlastnosti, že $n^a a_a = n^a n^b \nabla_b n_a = 0$ a $\gamma_a{}^b n_b = 0$. Ze symetrie tenzoru K_{ab} můžeme v rovnici antisymetrizovat indexy, aby člen $a_c K_{[ab]}$ vymizel, a získáme rovnici

$$D_{[a} K_{b]c} = -\gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r \nabla_{[p} \nabla_{q]} n_r. \tag{2.26}$$

Na pravé straně rovnice (2.26) je definiční vztah Riemannova tenzoru. Po rozepsání dostáváme Codazziho rovnici

$$\boxed{D_b K_{ac} - D_a K_{bc} = \gamma_a{}^p \gamma_b{}^q \gamma_c{}^r n^s \, {}^{(4)}R_{pqrs}.} \tag{2.27}$$

2.2.3 Ricciho rovnice

K odvození Ricciho rovnice nejdříve zderivujeme lieovsky tenzor K_{ab} podle pole normálových vektorů a výsledek rozepíšeme pomocí (2.19):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} &= n^c \nabla_c K_{ab} + 2K_{c(a}\nabla_{b)} n^c \\ &= -n^c \nabla_c \nabla_a n_b - n^c \nabla_c (n_a a_b) - 2K_{c(a} K_{b)}{}^c - 2K_{c(a} n_{b)} a^c. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Do získané rovnice dosadíme ze symetrie upravenou definici Riemannova tenzoru ${}^{(4)}R_{dbac} n^d = 2\nabla_{[c}\nabla_{a]} n_b$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = &-n^c\, {}^{(4)}R_{dbac} n^d - n^c \nabla_a \nabla_c n_b - n^c a_b \nabla_c n_a - n^c n_a \nabla_c a_b - \\ &2K^c{}_{(a} K_{b)c} - 2K_{c(a} n_{b)} a^c. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dále použijeme definici zrychlení $a_a = n^b \nabla_b n_a$ a za použití definice tenzoru K_{ab} ji rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} n^c \nabla_a \nabla_c n_b &= \nabla_a a_b - (\nabla_a n^c)(\nabla_c n_b) \\ &= \nabla_a a_b - \underbrace{(\gamma_a{}^p - n_a n^p)}_{=\delta_a{}^p}(\gamma_b{}^q - n_b n^q)(\nabla_p n^c)(\nabla_c n_q) \\ &= \nabla_a a_b - \gamma_a{}^p \gamma_b{}^q (\nabla_p n^c)(\nabla_c n_q) - n_a n^p \gamma_b{}^q (\nabla_p n^c)(\nabla_c n_q) \\ &= \nabla_a a_b - K_a{}^c K_{cb} - n_a a^c K_{cb}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

kde jsme na třetím řádku využili, že $n^a \nabla_b n_a = 0$ a $\gamma_a{}^b n_b = 0$. Pomocí předchozího vztahu a definice zrychlení můžeme dále upravit Lieovu derivaci vnější křivosti. Po dosazení předchozího vztahu do (2.29) dostaneme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = -n^c n^d\, {}^{(4)}R_{dbac} - \nabla_a a_b - n^c n_a \nabla_c a_b - a_a a_b - K^c{}_b K_{ac} - K_{ca} n_b a^c. \tag{2.31}$$

$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab}$ je čistě prostorový vektor, tedy $n^a \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = 0$ a přidáním projektorů $\gamma_a{}^b$ na pravou stranu jej nezměníme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = -\gamma_a{}^p \gamma_b{}^r n^c n^d\, {}^{(4)}R_{drpc} - \gamma_a{}^p \gamma_b{}^r \nabla_p a_r - a_a a_b - K^c{}_b K_{ac}. \tag{2.32}$$

S použitím (2.20) ukážeme, že platí vztah

$$D_a a_b = D_a \left(\frac{1}{\alpha} D_b \alpha \right) = \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha - \frac{1}{\alpha^2} D_a \alpha D_b \alpha = \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha - a_a a_b, \tag{2.33}$$

což je právě výraz na pravé rovnice (2.32). Jeho dosazením do této rovnice získáme Ricciho rovnici

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = \gamma_a{}^p \gamma_b{}^r n^c n^d\, {}^{(4)}R_{drcp} - \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha - K^c{}_b K_{ac}.} \tag{2.34}$$

2.3 3+1 formulace Einsteinových rovnic

Veškeré dosavadní pojmy byly čistě geometrického charakteru. Spojení těchto geometrických veličin s fyzikálním stavem časoprostoru zprostředkovávají Einsteinovy polní rovnice

$$G_{ab} := {}^{(4)}R_{ab} - \frac{1}{2}\, {}^{(4)}R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \tag{2.35}$$

Získanou znalost rozkladu Riemannova tenzoru využijeme k jejich rozepsání a rovnici přepíšeme v řeči jednotlivých projekcí.

Nejdříve proveďme jednu kontrakci Gaussovy rovnice (2.24):

$$R_{bd} + KK_{bd} - K^c{}_d K_{cb} = \gamma^{pr}\gamma_b{}^q\gamma_d{}^s\,{}^{(4)}R_{pqrs}, \tag{2.36}$$

kde jsme označili $K_a{}^a = K$. Proveďme i druhou kontrakci, abychom získali rovnici

$$R + K^2 - K^{ab}K_{ab} = \gamma^{pr}\gamma^{qs}\,{}^{(4)}R_{pqrs}, \tag{2.37}$$

kde pravou stranu dokážeme přepsat přes čtyřdimenzionální tenzor křivosti

$$\gamma^{pr}\gamma^{qs}\,{}^{(4)}R_{pqrs} = (g^{pr} + n^p n^r)(g^{qs} + n^q n^s)\,{}^{(4)}R_{pqrs} = {}^{(4)}R + 2n^p n^r\,{}^{(4)}R_{pr}, \tag{2.38}$$

kde jsme využili symetrie ${}^{(4)}R_{abcd} = {}^{(4)}R_{cdab}$ a toho, že $n^a n^b n^c n^d\,{}^{(4)}R_{abcd} = 0$. Dále zapůsobíme Einsteinovým tenzorem na normálové vektory a upravíme způsobem

$$\begin{aligned}2n^p n^r G_{pr} &= 2n^p n^r\,{}^{(4)}R_{pr} - {}^{(4)}R n^p n^r g_{pr} = 2n^p n^r\,{}^{(4)}R_{pr} - n^p n^r \left(\gamma_{pr} - n_p n_r\right){}^{(4)}R \\ &= 2n^p n^r\,{}^{(4)}R_{pr} + {}^{(4)}R = \gamma^{pr}\gamma^{qs}\,{}^{(4)}R_{pqrs}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Kombinací předchozího vztahu s dvakrát kontrahovanou Gaussovou rovnicí (2.37) získáme

$$2n^p n^r G_{pr} = R + K^2 - K^{ab}K_{ab}. \tag{2.40}$$

V dalším kroku definujme hustotu měřenou Eulerovským pozorovatelem jako

$$\rho \equiv n_a n_b T^{ab}, \tag{2.41}$$

a kombinací definice hustoty a Einsteinovy rovnice přepišme rovnici (2.40) na vztah

$$\boxed{R + K^2 - K^{ab}K_{ab} = 16\pi\rho,} \tag{2.42}$$

který nazýváme hamiltonovská vazba a tvoří jednu z rovnic 3+1 formulace.

Pro získání druhé vazbové rovnice kontrahujme Codazziho rovnici (2.27) a pravou stranu dál upravme jako

$$\begin{aligned}D_b K_a{}^b - D_a K &= \gamma_a{}^p\gamma^{qr}n^s\,{}^{(4)}R_{pqrs} && (2.43)\\ &= -\gamma_a{}^p\left(g^{qr} + n^q n^r\right)n^s\,{}^{(4)}R_{qprs} = -n^s\gamma_a{}^p\,{}^{(4)}R_{ps} \\ &= -n^s\gamma_a{}^p\,{}^{(4)}R_{ps} + \frac{1}{2}\underbrace{\gamma_a{}^p n^s g_{ps}}_{=0} = -n^s\gamma_a{}^p G_{ps}, && (2.44)\end{aligned}$$

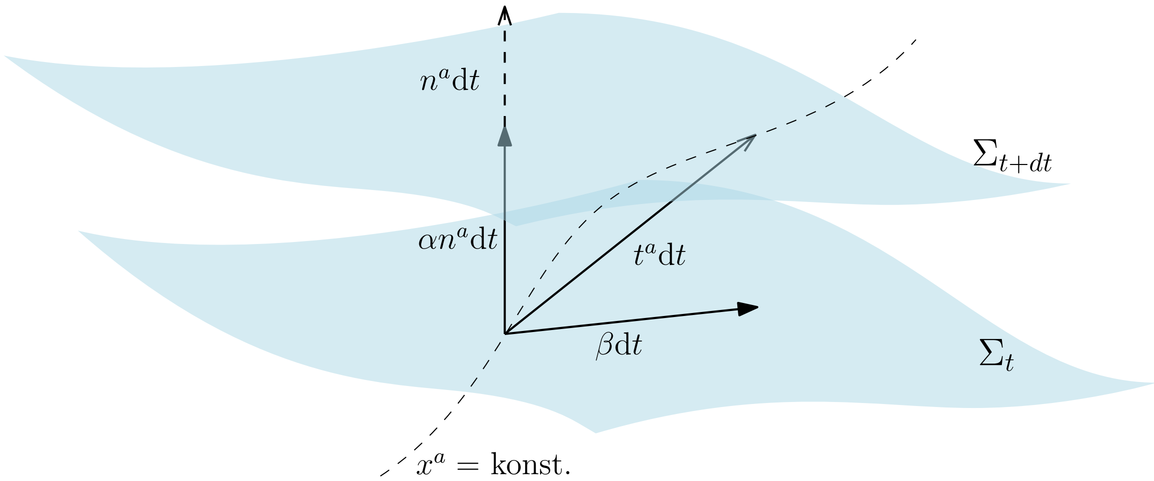
kde jsme využili platnosti symetrie ${}^{(4)}R_{abcd} = -\,{}^{(4)}R_{bacd}$, vlastnosti, že ${}^{(4)}R_{abcd}n^a n^c n^d$ vymizí, a v poslední rovnosti definici Einsteinova tenzoru (2.35). Definujme hustotu hybnosti S_a měřenou Eulerovským pozorovatelem

$$S_a := -\gamma_a{}^b n^c T_{bc}. \tag{2.45}$$

Po dosazení předchozí definice do vztahu (2.44) získáme tzv. hybnostní vazbu

$$\boxed{D_b K^b{}_a - D_a K = 8\pi S_a.} \tag{2.46}$$

Hamiltonovská vazba a hybnostní vazba nám určují veličiny (γ_{ab}, K_{ab}) v jedné konkrétní nadploše Σ_t. Jejich časový vývoj bude určen tzv. evolučními rovnicemi. Před odvozením evolučních rovnic zaveďme vektor shift a časový vektor t^a.



Obrázek 2.2: Znázornění definice vektoru t^a, který spojuje body se stejnými souřadnicemi x^a na dvou nadplochách Σ_t a $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$. Vektor αn^a měří vlastní čas eulerovského pozorovatele mezi těmito dvěma nadplochami a vektor β^a udává posunutí souřadnic v prostorovém směru.

Shift

Lieova derivace podle n^a není vhodná k popisu vývoje nadploch, jelikož lieovským přenesením libovolného tenzoru z nadplochy Σ_t podle infinitesimálního vektoru $n^a dt$ nutně nezískáme tenzor ve stejné nadploše infinitesmiálně posunuté v čase Σ_{t+dt}. Vektor $\alpha n^a dt$ tuto vlastnost ale má a také platí, že lieovský přenos prostorové metriky ${\gamma_a}^b$ vymizí:

$$\mathcal{L}_{\alpha \mathbf{n}} {\gamma_a}^b = 0. \tag{2.47}$$

To znamená, že libovolný prostorový tenzor lieovsky derivovaný podle vektorového pole $\alpha \mathbf{n}$ zůstává tečným tenzorem.

Uvažujme vektor t^a, který je definovaný, aby byl duální k Ω_a a zároveň posunutý v prostorupodobné nadploše. To znamená

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a \qquad \Omega_a t^a = 1, \tag{2.48}$$

kde β^a je libovolný prostorový vektor. Vektor β^a nazýváme shift. Účelem vektoru t^α bude spojování bodů se stejnými souřadnicemi. Pozorovatel, jehož světočára je integrální křivkou pole t^a, se nazývá souřadnicový pozorovatel. Tedy funkce lapse α měří vlastní čas eulerovského pozorovatele uplynulý mezi jednotlivými nadplochami a shift vektor prostorové posunutí po nadploše a obě dvě tyto veličiny jsou stupni volnosti. Zjednodušeně řečeno zvolením lapse určíme, jak daleko budou od sebe dvě nadplochy při posunutí o jednotkový vlastní čas, a zvolením vektoru shift určíme, kde na prostorupodobné nadploše se budou souřadnice shodovat. Situace je znázorněna v obrázku 2.2.

2.3.1 Evoluční rovnice

Abychom získali první rovnici popisující časový vývoj veličin (γ_{ab}, K_{ab}) mezi nadplochami Σ_t, tak rozepíšeme projekci Riemannova tenzoru odpovídající Ricciho rovnici

$$n^c n^d {\gamma_a}^p {\gamma_b}^r \, {}^{(4)}R_{drcp} = \gamma^{dc} {\gamma_a}^p {\gamma_b}^r \, {}^{(4)}R_{drcp} - {\gamma_a}^p {\gamma_b}^r \, {}^{(4)}R_{rp}, \tag{2.49}$$

ve které můžeme první člen nahradit výrazem z Gaussovy rovnice (2.24) a druhý člen vyjádřením ${}^{(4)}R_{ab}$ z Einsteinovy rovnice (2.35) za pomocí její kontrakce $R = -8\pi T^a{}_a$, kde označíme $T^a{}_a := T$. Rovnice přejde ve tvar

$$n^c n^d \gamma_a{}^p \gamma_b{}^r\, {}^{(4)}R_{drcp} = R_{ab} + KK_{ba} - K^c{}_b K_{ac} - 8\pi \gamma_a{}^p \gamma_b{}^r \left(T_{rp} - \frac{1}{2} T g_{rp} \right). \quad (2.50)$$

Definujme prostorový tenzor napětí a jeho kontrakci jako

$$S_{ab} :=\perp T_{ab} \qquad\qquad S := S_a{}^a, \quad (2.51)$$

a využijme definici kontrakce v přepsání posledního členu předchozí rovnice

$$\gamma_a{}^p \gamma_b{}^r g^{qs} g_{rp} T_{qs} = \gamma_{ab} \left(\gamma^{qs} - n^q n^s \right) T_{qs} = \gamma_{ab} \left(S - \rho \right). \quad (2.52)$$

Rozepišme vyjádření Lieovy derivace podle pole n^a do shift vektoru a pole t^a. Použitím vlastnosti linearity Lieovy derivace dostaneme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = \mathcal{L}_{\alpha \mathbf{n} + \beta} = \alpha \mathcal{L}_{\mathbf{n}} + \mathcal{L}_{\beta}. \quad (2.53)$$

Nahraďme v rovnici (2.50) na pravé straně poslední člen vztahem (2.52) a za projekci Riemannova tenzoru dosaďme jeho vyjádření z Ricciho rovnice (2.34), ve kterém nahradíme $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ podle předchozího vztahu. Získáváme rovnici

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{t}} K_{ab} = -D_a D_b \alpha + \alpha \left(R_{ab} + KK_{ba} - 2K^c{}_b K_{ac} \right) - \\ 8\pi\alpha \left(S_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \left(S - \rho \right) \right) + \mathcal{L}_{\beta} K_{ab}. \end{aligned}} \quad (2.54)$$

Tato rovnice je evoluční rovnice pro vnější křivost a vyjadřuje vývoj tenzoru K_{ab} mezi jednotlivými nadplochami Σ_t.

Druhou evoluční rovnici, pro metriku, odvodíme Lieovou derivací γ_{ab}:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{ab} &= \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \left(g_{ab} + n_a n_b \right) = 2\nabla_{(a} n_{b)} + n_a \mathcal{L}_{\mathbf{n}} n_b + n_b \mathcal{L}_{\mathbf{n}} n_a = 2 \left(\nabla_{(a} n_{b)} + n_{(a} a_{b)} \right) \\ &= -2K_{ab}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

ve které jsme použili vztah zrychlení a vnější křivosti (2.19). Opětovným rozepsáním Lieovy derivace podle (2.53) získáme rovnici

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{t}} \gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + \mathcal{L}_{\beta} \gamma_{ab},} \quad (2.56)$$

která je evoluční rovnicí pro metriku γ_{ab}. Tímto jsme získali kompletní soustavu rovnic ekvivalentní Einstenově rovnici. Rovnice (2.56) a (2.54) popisují časový vývoj dvojice (γ_{ab}, K_{ab}) a rovnice (2.42) a (2.46) udávají podmínky k existenci vnoření třídimenzionáního řezu Σ_t do čtyřdimenzionálního časoprostoru.

Volba souřadnic

Celá konstrukce do tohoto bodu je provedena bez závislosti na souřadnicích a funguje tedy pro jejich libovolnou volbu. Pro zjednodušení získaných rovnic se však nabízí zvolit souřadnice co nejjednodušším způsobem. V této podkapitole budeme používat specificky indexy $i, j \in \{1, 2, 3\}$ k označení vyjádření v našich daných souřadnicích a jimi popsané tenzory nejsou myšlené v abstraktním smyslu.

Zvolme souřadnice $e^a_{(i)}$ tak, že leží v jedné nadploše Σ_t, to znamená, že

$$\Omega_a e^a_{(i)} = 0, \tag{2.57}$$

kde do jiných nadploch získáme souřadnice lieovským přenosem podle vektorového pole t^a:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} e^a_{(i)} = 0. \tag{2.58}$$

Nultý bazický vektor zvolíme právě jako $e^a_{(0)} = t^a$, který z normovací podmínky (2.48) musí splňovat, že jeho složky budou $t^a = (1, 0, 0, 0)$. Členy Lieovy derivace podle pole $\mathbf{t}$, kde vystupuje derivace vektoru t^a, díky konstantnosti vymizí a získáme jednoduchý tvar

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = \partial_t. \tag{2.59}$$

Z definiční vlastnosti naší báze na prostorupodobné nadploše

$$\Omega_a e^a_{(i)} = -\frac{1}{\alpha} n_a e^a_{(i)} = 0 \tag{2.60}$$

plyne, že prostorové *kovariantní* složky normálového kovektoru jsou nulové, $n_i = 0$. Jelikož kontravariantní prostorové tenzory vymizí při kontrakcí s n_a, jsou v našich souřadnicích ve svém nultém indexu nulové. Speciálně pro vektor shift platí

$$\beta^a = (0, \beta^i). \tag{2.61}$$

Kontravariantní složky n^a získáme z definice časového vektoru $t^a = \alpha n^a + \beta^a$, kdy rozepsáním vyjde, že

$$n^a = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\beta^i\right). \tag{2.62}$$

Z normalizační podmínky $n^a n_a = -1$ jsou složky kontravariantního normálového vektoru rovny

$$n_a = (-\alpha, 0, 0, 0). \tag{2.63}$$

Z definice prostorové metriky $\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ můžeme najít, že pro složky platí

$$\gamma_{ij} = g_{ij}, \tag{2.64}$$

tedy prostorová část prostorového metrického tenzoru je stejná jako u g_{ab}. Z kovariance toto platí i pro zvýšené indexy. O kontravariantním tenzoru γ^{ij} víme, že je to prostorový tenzor, a tedy v našich souřadnicích nulový ve všech indexech obsahujících nulu, tedy $\gamma^{a0} = 0$. Použitím definice $g^{ab} = \gamma^{ab} - n^a n^b$ získáme rozepsáním pomocí normálového vektoru vyjádření v souřadnicích

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2}\beta^i \\ \alpha^{-2}\beta^j & \gamma^{ij} - \alpha^{-2}\beta^i\beta^j \end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Můžeme rovnou najít inverzi předchozího vztahu jako inverzi matice a získat tak kovariantní metrický tenzor

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma^{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

Vyjádření metriky můžeme napsat přes dráhový element jako

$$\boxed{ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt).} \tag{2.67}$$

Dosazením zjednodušení Lieovy derivace do 3+1 rovnic získáváme jejich vyjádření ve složkách v adaptovaných souřadnicích. Kompletní sada rovnic má pak následující tvar. Dvě rovnice popisující vnoření nadplochy do časoprostoru

$$\boxed{R + K^2 - K^{ij}K_{ij} = 16\pi\rho,} \tag{2.68}$$

$$\boxed{D_i \left(K^{ij} - \gamma^{ij}K\right) = 8\pi S_j,} \tag{2.69}$$

a rovnice popisující vývoj tenzoru vnější křivosti a metrického tenzoru, kde rozepíšeme Lieovu derivaci podle β do složek za využití vztahu Lieovy a kovariantní derivace

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t K_{ij} =& \alpha\left(R_{ij} + KK_{ij} - 2K^k{}_j K_{ki}\right) - 8\pi\alpha\left(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\left(S-\rho\right)\right)\\ &+ \beta^k D_k K_{ij} + K_{ik}D_j\beta^k + K_{kj}D_i\beta^k - D_iD_j\alpha,\end{aligned}} \tag{2.70}$$

$$\boxed{\partial_t\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i.} \tag{2.71}$$

Tímto jsme odvodili ADM rovnice, které jsou, jak už bylo řečeno, ekvivalentní Einsteinovým rovnicím, a jsou vhodné pro popis časoprostoru. Z praktického hlediska jsou vhodnější než původní Einsteinovy rovnice, jelikož umožňují vzít pole $\left(\gamma_{ij}, K_{ij}\right)$ ve fixní nadploše, svázané rovnicemi popisující vnoření (2.68) a (2.69), a pak je pouze vyvinout za pomocí evolučních rovnic (2.70) a (2.71).

Kapitola 3

BSSN formulace Einsteinových rovnic

ADM tvar Einsteinových rovnic sice lze použít pro výpočty v počítači, ale stabilita těchto výpočtů se ukázala jako nevhodná pro systémy, které sledujeme na větším časovém intervalu. V takových případech metody aplikované na ADM rovnice často zdivergují, a bylo proto zájmem najít pro tuto aplikaci lepší tvar Einsteinových rovnic. Takovým tvarem se ukázala být například BSSN formulace, která je, spolu se svými modifikacemi, jednou z nejrozšířenějších formulací používaných při relativistických výpočtech na počítači. Důvody, proč se jedná o rovnice, které jsou numericky stabilnější během jejich řešení na počítači, jsou shrnuté například v [6].

BSSN formulace vychází z ADM formulace, ve které zavedeme několik nových polí, pro které z ADM rovnic získáme zvlášť evoluční rovnice.

3.1 Konformní transformace

Základní myšlenkou v odvození BSSN formalismu, ale i jiných úprav v numerické relativitě, jsou tzv. konformní transformace, které přeškálují vybrané pole kladným faktorem. Získáme tak vlastně dvě nová pole, která ekvivalentně popisují pole původní. Pro metriku konkrétně pak volíme jako:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \tag{3.1}$$

kde faktor ψ nazýváme konformním faktorem a metriku (nebo libovolné jiné pole) $\bar{\gamma}_{ij}$ nazýváme konformně příbuznou metrikou. Čtvrtá mocnina se volí pro zjednodušení některých výrazů. Abychom odvodili inverzní konformně příbuznou metriku využijeme požadavku, aby $\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{jk} = \delta_i^{\ k}$. Potom nutně platí

$$\gamma^{ij} = \psi^{-4} \bar{\gamma}^{ij}. \tag{3.2}$$

3.1.1 Transformace konformně příbuzných veličin

Dosazením konformní transformace metriky (3.1) do vyjádření Christoffelova symbolu pro prostorovou metriku (2.13) získáme jeho vyjádření přes konformně příbuznou metriku $\bar{\gamma}_{ij}$:

$$\Gamma^i_{\ jk} = \bar{\Gamma}^i_{\ jk} + 2\left(\delta^i_{\ j}\bar{D}_k \ln\psi + \delta^i_{\ k}\bar{D}_j \ln\psi - \bar{\gamma}_{jk}\bar{\gamma}^{il}\bar{D}_l \ln\psi\right), \tag{3.3}$$

kde objekty s proužkem mají stejný význam jako bez něj, ale metrika γ_{ij} je nahrazená konformně příbuznou metrikou $\bar{\gamma}_{ij}$.

Dalším důležitým objektem je Ricciho tenzor. Jeho vyjádření v konformně příbuzné metrice, získáme ze vztahu (2.15), který kontrahujeme, abychom získali vztah $R_{ij}v^j = D_j D_i v^j - D_i D_j v^j$, ve kterém přepíšeme kovariantní derivace D_i do kovariantních derivací $\bar{D}_i$, které jsou vyjádřené v konformně příbuzné metrice $\bar{\gamma}_{ij}$. Získáme tak vztah pro Ricciho tenzor:

$$\begin{aligned} R_{ij} = \bar{R}_{ij} &- 2\left(\bar{D}_i \bar{D}_j \ln\psi + \bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}\bar{D}_l\bar{D}_m \ln\psi\right) \\ &+ 4\left((\bar{D}_i \ln\psi)(\bar{D}_j \ln\psi) - \bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}(\bar{D}_l \ln\psi)(\bar{D}_m \ln\psi)\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Z tohoto vztahu můžeme kontrakcí získat navíc vztah mezi skalárními křivostmi R a $\bar{R}$. Použijme vztah (3.2) pro $\bar{\gamma}^{ij}$, abychom vyjádřili vztah $R = \gamma^{ij}R_{ij} = \psi^{-4}\bar{\gamma}^{ij}R_{ij}$ do kterého dosadíme (3.4). Po upravení dostáváme vztah pro skalární křivosti

$$R = \psi^{-4}\bar{R} - 8\psi^{-5}\bar{D}^2\psi. \tag{3.5}$$

Úpravy jsou podrobněji provedeny např. v [4]. Konformní transformaci můžeme provést i na vnější křivosti K_{ij}. Nejdřív tento tenzor ale rozdělíme na jeho stopu $K = K^i{}_i$ a bezestopou část $A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K$:

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K, \tag{3.6}$$

a pro oba členy rozkladu zvolíme různou mocninu konformního faktoru

$$A^{ij} = \psi^{\alpha}\bar{A}^{ij}, \tag{3.7}$$

$$K = \psi^{\beta}\bar{K}. \tag{3.8}$$

Pro naše potřeby budeme požadovat, aby stopa K byla konformně invariantní, tedy $K = \bar{K}$ a volíme $\beta = 0$. U bezestopé části vnější křivosti A_{ij} zvolme faktor $\alpha = 4$. Z této volby můžeme rovnou dosazením (3.5) a (3.6) do (2.42) a následným upravením získat vyjádření hamiltonovské vazby jako

$$0 = \bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_i\bar{D}_j\psi - \frac{1}{8}\psi\bar{R} + \left(\frac{1}{8}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - \frac{1}{12}K^2 + 2\pi\rho\right)\psi^5. \tag{3.9}$$

V hybnostní vazbě (2.46) přepíšeme kovariantní derivace D_i na kovariantní derivace v konformních koeficientech konexe $\bar{D}_i$ a získáme

$$0 = \bar{D}_j\bar{A}^{ij} + 6\bar{A}^{ij}\bar{D}_j \ln\psi - \frac{2}{3}\bar{D}^i K - 8\pi S^i. \tag{3.10}$$

3.2 BSSN formalismus

Dynamické rovnice už rozebereme pouze ve specifickém případě BSSN formulace, jejich odvození pro obecné konformní transformace je provedeno např. v [4]. V BSSN formulaci zvolíme konformní faktor ψ z předchozí podkapitoly jako $\psi = e^{\phi}$, kde ϕ je nějaká skalární funkce. Získáme vztah pro konformně příbuznou metriku

$$\bar{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}. \tag{3.11}$$

Po této konformně transformované metrice $\bar{\gamma}_{ij}$ budeme požadovat, aby její determinant byl stejný jako determinant metriky Minkowského prostoročasu v kartézských souřadnicích $\det(\eta_{ij}) = \eta = 1$. Z podmínky $1 = \eta = \bar{\gamma} := \det(\bar{\gamma}_{ij})$ získáme vyjádření funkce ϕ jako

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\gamma}{\eta} \right). \tag{3.12}$$

Dále proveďme transformaci vnější křivosti jejím rozložením jako v (3.6). Na bezstopé části A_{ij} zvolme faktor stejný jako pro metriku. V řeči značení zavedeného v (3.7) to znamená, že $\alpha = 4$. U konformně transformovaného tenzoru budeme požadovat, aby se jeho indexy zvedaly konformně transformovanou metrikou, $\bar{A}^{ij} = \bar{\gamma}^{ik}\bar{\gamma}^{jl}\bar{A}_{kl}$, z toho vyplývá

$$\bar{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}. \tag{3.13}$$

Vývoj skalárních polí ϕ a K získáme ze stopy evolučních rovnic (2.70) a (2.71), které přejdou na tvar

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -\alpha K + D_i \beta^i, \tag{3.14}$$

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha \left(K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S) \right) + \beta^i D_i K, \tag{3.15}$$

kde $D^2 := \gamma^{ij} D_i D_j$. Ve stopě první rovnice byl použit Jacobiho vzorec pro derivaci determinantu: $\partial_t \gamma = \gamma \gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij}$, a ve stopě druhé rovnice jsme použili vazbu (2.68). Do první z předchozích dvou rovnic dosadíme definici konformní transformace metriky $\gamma_{ij} = e^{-4\phi} \bar{\gamma}_{ij}$, a získáváme rovnici pro vývoj skalárního pole ϕ:

$$\boxed{\partial_t \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \beta^i \partial_i \phi + \frac{1}{6} \partial_i \beta^i.} \tag{3.16}$$

Do druhé rovnice dosadíme rozepsaný tenzor křivosti z (3.6). Zároveň využijeme toho, že u $\bar{A}_{ij}$ zvedáme indexy metrikou $\bar{\gamma}_{ij}$, tudíž pro tenzory platí $A^{ij} A_{ij} = \bar{A}^{ij} \bar{A}_{ij}$. Celkově máme:

$$\boxed{\partial_t K = -\gamma^{ij} D_j D_i \alpha + \alpha \left(\bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha \left(\rho + S \right)) + \beta^i D_i K.} \tag{3.17}$$

Vezmeme-li vyjádření konformní transformace metriky (3.11) a zderivujeme ho, získáme vztah pro vývoj transformované metriky

$$\partial_t \bar{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \left(\partial_t \gamma_{ij} - 4 \gamma_{ij} \partial_t \phi \right), \tag{3.18}$$

do které dosadíme rovnici pro vývoj metriky γ_{ij}, (2.70), resp. skalárního pole ϕ, (2.71), tak získáme rovnici pro vývoj metriky $\bar{\gamma}_{ij}$ v nových proměnných:

$$\boxed{\partial_t \bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha \bar{A}_{ij} + \beta^k \partial_k \bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k.} \tag{3.19}$$

Analogicky provedeme stejný postup pro vnější křivost jako $\bar{A}_{ij}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left(\partial_t A_{ij} - 4 A_{ij} \partial_t \phi \right) \\ &= e^{-4\phi} \left(\partial_t K_{ij} - \frac{1}{3} \left(K \partial_t \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \partial_t K \right) - 4 \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) \partial_t \phi \right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

kde po přepsání $\partial_t \gamma_{ij}$ do řeči konformně příbuzné metriky $\bar{\gamma}_{ij}$ vše známe a můžeme dosadit z výše uvedených rovnic. Dostaneme rovnici pro evoluci pole $\bar{A}_{ij}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t \bar{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left((-D_i D_j \alpha)^{TF} + \alpha(R_{ij}^{TF} - 8\pi S_{ij}^{TF})\right) + \alpha(K\bar{A}_{ij} - 2\bar{A}_{il}\bar{A}^l{}_j) \\ + \beta^k \partial_k \bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ik}\partial_j \beta^k + \bar{A}_{kj}\partial_i \beta^k - \frac{2}{3}\bar{A}_{ij}\partial_k \beta^k,\end{aligned}} \tag{3.21}$$

ve které označujeme horním indexem TF bezestopou část tenzoru, např. $T_{ij}^{TF} = T_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}T$.

Ricciho tenzor je podle (3.4) možné chápat jako součet dvou částí

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} + R_{ij}^{\phi}, \tag{3.22}$$

kdy první část $\bar{R}_{ij}$ je konformně příbuzný Ricciho tenzor a druhá část R_{ij}^{ϕ} je závislá pouze na škálovacím faktoru ϕ. Konformně příbuzný Riemannův tenzor $\bar{R}_{ij}$ je sice vyjádřitelný v proměnné $\bar{\gamma}_{ij}$, ale v rovnicích potom vystupují smíšené druhé derivace, které jsou z hlediska numerického řešení problematické.[1] Zbavme se tedy těchto členů tak, že zavedeme nové pole, tzv. konformní funkce konexe:

$$\bar{\Gamma}^i := \bar{\gamma}^{jk}\bar{\Gamma}^i{}_{jk} = -\partial_j \bar{\gamma}^{ij}, \tag{3.23}$$

přičemž druhá rovnost platí pouze v kartézských souřadnicích. Pomocí těchto funkcí můžeme vyjádřit konformně příbuzný Ricciho tenzor následovně:

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{lm}\partial_m \partial_l \bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\partial_{j)}\bar{\Gamma}^k + \bar{\Gamma}^k \bar{\Gamma}_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{lm}\left(2\bar{\Gamma}^k{}_{l(i}\bar{\Gamma}_{j)km} + \bar{\Gamma}^k{}_{im}\bar{\Gamma}_{klj}\right). \tag{3.24}$$

Ačkoliv jsou koeficienty $\bar{\Gamma}^i$ tvořené známými funkcemi, budeme je brát jako samostatné proměnné a jejich vývoj popíšeme samostatnou rovnicí. Zderivujeme rovnici (3.23) podle času a parciální derivace podle t a j zaměníme:

$$\partial_t \bar{\Gamma}^i = -\partial_j\left(2\alpha \bar{A}^{ij} + \beta^k \partial_k \bar{\gamma}^{ij} - 2\bar{\gamma}^{m(j}\partial_m \beta^{i)} + \frac{2}{3}\bar{\gamma}^{ij}\partial_k \beta^k\right), \tag{3.25}$$

kam jsme dosadili z rovnice pro evoluci metriky (3.19). Dále rozepíšeme za použití hybnostní vazby (2.46):

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t \bar{\Gamma}^i = -2\bar{A}^{ij}\partial_j \alpha + 2\alpha\left(\bar{\Gamma}^i{}_{jk}\bar{A}^{kj} - \frac{2}{3}\bar{\gamma}^{ij}\partial_j K - 8\pi\bar{\gamma}^{ij}S_j + 6\bar{A}^{ij}\partial_j \phi\right) \\ + \beta^j \partial_j \bar{\Gamma}^i - \bar{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3}\bar{\Gamma}^i \partial_j \beta^j + \frac{1}{3}\bar{\gamma}^{li}\partial_l \partial_j \beta^j + \bar{\gamma}^{lj}\partial_j \partial_l \beta^i.\end{aligned}} \tag{3.26}$$

Tak získáváme poslední evoluční rovnici, pro konformí funkce konexe. Rovnice (3.16), (3.17), (3.19), (3.21) a (3.26) tvoří kompletní sadu evolučních rovnic. Hamiltonovská vazba (2.42) v proměnných BSSN formalismu má tvar

$$\boxed{0 = \bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_i \bar{D}_j e^{\phi} - \frac{e^{\phi}}{8}\bar{R} + \frac{e^{5\phi}}{8}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - \frac{e^{5\phi}}{12}K^2 + 2\pi e^{5\phi}\rho,} \tag{3.27}$$

a hybnostní vazba (2.46)

$$\boxed{0 = \bar{D}_j\left(e^{6\phi}\bar{A}^{ji}\right) - \frac{2}{3}e^{6\phi}\bar{D}^i K - 8\pi e^{6\phi}S^i,} \tag{3.28}$$

a tato sada rovnic tvoří tzv. BSSN formulaci 3+1 rovnic.

[1] Problém souvisí s hyperbolicitou rovnic a je blíže rozebrán např. v [3]. Eliminací smíšených derivací naše rovnice získají tvar analogický k vlnové rovnici.

Závěr

V práci byly nejdříve zadefinovány pojmy diferenciální geometrie, vztahující se k hladkým varietám, které nám zprostředkovaly aparát k práci s Einsteinovými rovnicemi.

V druhé části byla následně provedena foliace časoprostoru na prostorupodobné nadplochy pomocí skalární funkce t a byly zavedeny pojmy prostorové metriky a vnější křivosti, (γ_{ab}, K_{ab}), které nám v tomto formalismu popisují geometrii časoprostoru. Dále jsme rozložili Riemannův tenzor ${}^{(4)}R^a{}_{bcd}$ na tři projekce a nalezli jsme jeho vztahy s poli (γ_{ab}, K_{ab}), získali jsme tak Gaussovu, Codazziho a Ricciho rovnici. Nakonec jsme se odkázali na Einsteinovy rovnice, ze kterých jsme vztažením k předchozím třem rovnicím získali postupně dvě vazbové rovnice (hamiltonovskou a hybnostní) a dvě rovnice pro časový vývoj polí γ_{ab} a K_{ab}. Tyto rovnice nám tvořily ekvivalentní vyjádření Einsteinových polních rovnic. Dále byly zavedeny souřadnice tak, aby se členy rovnic zjednodušily a tímto postupem jsme získali rovnice ADM formalismu.

V poslední kapitole práce byly zavedeny konformní transformace metriky a příbuzných veličin a přes konformně příbuzné veličiny byly přepsány vazbové rovnice. Tyto konformní transformace byly dále použity k odvození BSSN formalismu, kde byl zvolen specifický konformní faktor s parametrem ϕ, kterým byla transformovaná bezestopá část vnější křivosti K_{ab} a prostorová metrika γ_{ab}. Zároveň bylo zadefinováno nové pole $\bar{\Gamma}^i$ vztahující se ke koeficientům konexe. Přes tyto nové proměnné byly přepsány rovnice ADM do formalismu BSSN, který je jedním z nejpoužívanějších při výpočtech v numerické relativitě.

V návaznosti na tuto práci bude dalším krokem specifická aplikace BSSN rovnic. Bude zvolen sféricky symetrický prostoročas, ve kterém se značně zjednoduší BSSN rovnice, a bude provedena numerická simulace pro určitý případ zdrojů gravitace.

Bibliografie

[1] FECKO, Marián. Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov. Iris, Bratislava, 2007. ISBN 80-89018-10-6.

[2] CARROLL, Sean M. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Pearson, London, 2014. ISBN 978-1-292-02663-3.

[3] BAUMGARTE, Thomas W.; SHAPIRO, Stuart L. Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Cambridge University Press, New york, 2010. ISBN 978-0-521-51407-1.

[4] GOURGOULHON, Éric. 3+1 Formalism in General Relativity, Bases of Numerical Relativity. Springer-Verlag, Berlin, 2012. ISBN 978-3-642-24525-1.

[5] REZZOLLA, Luciano; ZANOTTI Olindo. Relativistic Hydrodynamics. Oxford University Press, Oxford, 2013. ISBN 978-0-19-852890-6.

[6] SHINKAI, Hisaaki. Formulations of the Einstein Equations for Numerical Simulations. J. Korean Phy. Soc. 2009, **54**, 6(1), 2513-2528. doi: 10.3938/jkps.54.2513