

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Využití stavového pozorovatele pro rekonstrukci rychlostního signálu stejnoseměrného motoru

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Kraffer

MMXXI

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kraffer** Jméno: **David** Osobní číslo: **482413**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Využití stavového pozorovatele pro rekonstrukci rychlostního signálu stejnosměrného motoru

Název bakalářské práce anglicky:

Application of a State Reconstructor for Speed Signal Evaluation in a DC Motor

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši využití stavového pozorovatele pro řízení stejnosměrných motorů s permanentními magnety
2. Sestavte simulační model stejnosměrného motoru a stavového pozorovatele pro rekonstrukci rychlostního signálu
3. Sestavte řídicí model k stejnosměrnému motoru z bodu 2.
4. Proveďte simulační experimenty s využitím přímé rychlostní vazby a rekonstruované rychlostní vazby z pozorovatele
5. Kriticky zhodnoťte dosažené výsledky

Seznam doporučené literatury:

- [1] LUENBERGER, David G. (1964) "Observing the State of a Linear System." IEEE Transactions of Military Electronics ME-8 (April), pp. 74-80.
- [2] ELLIS, George. Control system design guide: using your computer to understand and diagnose feedback controllers. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [3] PULLE, Duco WJ; DARNELL, Pete; VELTMAN, André. Applied control of electrical drives. Springer, New York, 2015.
- [4] KNOBLOCH Hans W. and KWAKERNAAK Huibert (1985) Lineare Kontrolltheorie, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **13.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

3.6.2021

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 3.6.2021

Podpis: 

Poděkování

Děkuji Ing. Martinu Nečasovi, M.Sc., Ph.D. za vedení práce.

David Kraffer

Abstrakt: Luenbergerovy pozorovatele, regulátory a polohovací servomechanismy založené na stejnosměrných motorech jsou vypracovány a simulovány na třech konečně dimenzionálních lineárních časově invariantních modelech vzrůstající složitosti. Modely a na kvadratických metodách založené návrhy řídicích systémů jsou ve stavovém prostoru, pomocí inženýrského prostředí od firmy The MathWorks, Inc. Teorie je podpořena 36 schémata, jazyk je čeština.

Klíčová slova: stavový popis systému, stejnosměrný motor, Luenbergerův pozorovatel, rekonstrukce stavové proměnné

Abstract: Luenberger observers, regulators, and servo systems for DC motor-based positioning systems are developed and simulated, based on three finite dimensional linear time invariant models of increasing complexity. The models and quadratic methods-based control system design are in state space, via the engineering environment provided by The MathWorks, Inc. The theory is supported by 36 diagrams, the language is Czech.

Keywords: state-space representation, DC motor, Luenberger observer, state variable reconstruction

Obsah

Úvod	1
1 Luenbergerův pozorovatel	7
1.1 Luenbergerova dynamická rekonstrukce (LDR)	7
1.2 Stabilita	9
1.3 Vztah k jiným metodologiím	11
1.4 Dualita	14
2 Úloha o servu	17
2.1 Servo systém	17
2.2 Princip vnitřního modelu	18
2.3 Úloha o servu jako úloha o regulátoru	18
3 Stavový model stejnosměrného motoru	21
3.1 Rovnováha napětí	21
3.2 Rovnováha točivých momentů	22
3.3 Model	22
3.4 Jednodušší model	24
3.5 Nejjednodušší model	25
3.6 Rozšířené modely	26
4 Model a servo	29
4.1 Nejjednodušší model	29
4.2 Jednodušší model	34
4.3 Model	36
5 Implementace a simulace	45

5.1 Parametry stejnosměrného motoru	45
Závěr	63
Seznam použitých zdrojů	64
Příloha	66

Seznam obrázků

1	David G. Luenberger, photo courtesy Stanford University, U.S.A. [2].	1
2	Stavová zpětná vazba v problému optimálního regulátoru výstupu. . .	3
3	Dodefinování externího vstupu ve frekvenčním přístupu.	4
1.1	Luenbergerův pozorovatel.	7
1.2	Příklad vývoje dynamiky odchylky LDR.	9
1.3	Model s Luenbergerovým pozorovatelem.	10
1.4	Dynamická zpětná vazba od výstupu. Časová oblast.	12
1.5	Dynamická zpětná vazba od výstupu. Frekvenční oblast.	12
1.6	Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení zesílení stavové zpětné vazby a dynamického kompenzátoru.	13
1.7	Aproximace stavové zpětné vazby pomocí LDR.	13
1.8	Dualita: zesílení stavové zpětné vazby K, Luenbergerovo zesílení L. . .	15
2.1	Řídící obvod pro servo problém.	17
2.2	Struktura servo návrhu.	19
2.3	Struktura servo návrhu s odhadem stavu. Luenbergerův pozorovatel – LDR.	19
2.4	Lineární kvadratické integrální řízení.	19
3.1	Schéma stejnosměrného elektromotoru.	21
4.1	Nejjednodušší model motoru, maticově.	30
4.2	Nejjednodušší model motoru.	31
4.3	Úloha o regulátoru, nejjednodušší model, maticově.	32
4.4	Úloha o regulátoru, nejjednodušší model. Zpětná vazba od stavu $\begin{bmatrix} \theta(t) & \omega(t) \end{bmatrix}^T$	32
4.5	Úloha o regulátoru, nejjednodušší model, příprava na úlohu o servu. .	32
4.6	Úloha o regulátoru jako úloha o servu, nejjednodušší model.	33

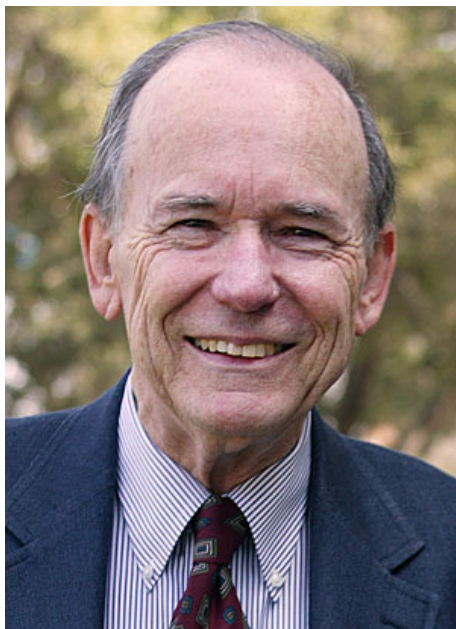
4.7	Úloha o servu, nejjednodušší model.	33
4.8	Jednodušší model motoru.	35
4.9	Úloha o regulátoru, jednodušší model. Zpětná vazba od stavu $[\theta(t) \ \omega(t)]^T$	35
4.10	Úloha o servu, jednodušší model.	35
4.11	Model ve stavovém prostoru $\mathbf{x}(t) = [\theta(t) \ \omega(t) \ i(t)]^T$	37
4.12	Model ve stavovém prostoru $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\theta(t)/R \ \omega(t) \ Ri(t)]^T$	38
4.13	Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu. Maticově.	41
4.14	Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu.	42
4.15	Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu. Maticově. Odhad stavu Luenbergerovým pozorovatelem – LDR.	43
5.1	Zapojení jednotkové zpětné vazby.	58
5.2	Nejjednodušší model Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.	58
5.3	Jednodušší model Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.	59
5.4	Model Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.	59
5.5	Nejjednodušší model Úhel natočení hřídele pro servo znázorněné na obr. 4.7 pro $K_1 \in \langle 1, 10 \rangle$	60
5.6	Model Úhel natočení hřídele pro servo znázorněné na obr. 4.15 pro $K_\xi \in \langle 200, 10\,000 \rangle$	60
5.7	Model Úhlová rychlost hřídele motoru a její rekonstrukce LDR pro rozdílné parametry s relativní chybou max $\pm 10\%$	61
5.8	Model Úhlová rychlost hřídele motoru a její rekonstrukce LDR pro rozdílné parametry s relativní chybou max $\pm 20\%$	61

Seznam tabulek

1.1	Dualita mezi stavovou zpětnou vazbou a rekonstrukcí stavu.	14
5.1	Hodnoty parametrů DC motoru.	58

Úvod

Asymptotická estimace hodnoty stavové proměnné ve stavovém modelu lineárního deterministického dynamického systému, když je tato stavová proměnná fyzicky nedostupná k měření, je na základě širokého konsensu připisována Američanu jménem David G. Luenberger [1]. Luenbergerův pozorovatel, asymptotická estimace, dynamická rekonstrukce jsou sousloví v literatuře. Prvně jmenované je historické, ne faktické, protože pozorovatelnost (schopnost pozorovat stav, observability, Beobachtbarkeit) se z definice vztahuje k budoucímu, ne k minulému vývoji dynamického systému, a tudíž i k budoucímu vývoji stavové proměnné (dále jen stavu). Pozorovatelnost znamená, že na základě budoucího pozorování jsme schopni určit *současný stav*. Naproti tomu Luenbergerův pozorovatel funguje tak, že na základě pozorování jsme schopni určit *budoucí stav*, a to tak, že asymptoticky. Luenbergerův pozorovatel je založen na pojmu rekonstruovatelnost (schopnost rekonstruovat stav, reconstructability, Rekonstruierbarkeit), a proto případnější jméno pro Luenbergerův pozorovatel by bylo rekonstruovatel. Zde budeme používat akronym **LDR**, který je v češtině,



Obr. 1: David G. Luenberger,
photo courtesy Stanford University, U.S.A. [2].

angličtině i němčině funkční: **L**uenbergerova **D**ynamická **R**ekonstrukce, **L**uenberger **D**ynamic **R**econstruction, **L**uenberger **D**ynamische **R**ekonstruktion. Historicky: Luenbergerův pozorovatel, Luenberger Observer, Luenberger dynamische Beobachter, динамический наблюдатель состояния.

Zájem o studium dynamické rekonstrukce stavu, včetně zájmu takové studium velkoryse finančně i jinak podporovat, vycházel z široké aplikovatelnosti, která zahrnuje a přesahuje strategické aplikace, jako jsou mezinárodní a národní politika, finance, obranné systémy, letectví a kosmonautika. Technicky vycházel z částečného odklonu od metody přenosových funkcí, tj. od frekvenčních metod návrhu řídicích systémů jak se používaly zejména v elektrotechnice, a z příklonu k metodám návrhu ve stavovém prostoru, které se prosadily především díky práci na optimálním řízení kolektivu sovětských autorů [3] a především geniálního ruského autora jménem Alexander Michajlovič Ljapunov (1857–1918) [4], jehož knihovna, život i část díla se staly obětí závěrečné fáze ruské revoluce. Trvalo dalších 50 let, než se Ljapunovově práci dostalo náležité pozornosti, úcty a slávy.

Jak je Alexander Michajlovič Ljapunov navždy spojen s Ljapunovovými funkcemi a stabilitou, je David G. Luenberger spojen s dynamickou rekonstrukcí hodnoty stavu stavového modelu systému. A to přesto, že Luenbergerův pozorovatel mu jako studentu jistě nezabral tolik času jako ostatní, podstatně širší problematika, kterou se zabývá. David G. Luenberger je žijící legendou, která svou genialitu dokázala nejen prodat, ale i úspěšně komunikovat širší odborné veřejnosti. Svědčí o tom i status na Stanford University a učebnice z oblasti systémů a řízení, která je všeobecně známá, uznávaná a úspěšně vzdoruje testu časem. Důležitost nejznámějšího Luenbergerova počínu nejlépe ilustruje kontext optimálního řízení.

Řešení problémů kvadratické optimalizace [5] je pravděpodobně prvním explicitním případem, kdy kompenzace dynamického chování systému popsáného modelem ve stavovém prostoru vedla na použití lineární zpětné vazby od stavu, a to i v případech, kdy stav není přímo měřitelný, jeho měření je finančně náročné nebo snižuje celkovou spolehlivost/odolnost/robustnost provozovaného zařízení, apod. Tím byla připravena scéna a nastoupil na ni David G. Luenberger tím, že umožnil širší využití lineární zpětné vazby od stavu. Konkrétně je dynamický systém popsán formou stavového modelu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

kde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} jsou reálné matice, $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavové proměnné (stav), $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupní proměnné (vstup), $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupní proměnné (výstup), \mathbf{x}_0 je vektor libovolné a pevně dané počáteční podmínky stavu. Dimenze stavu, vstupu a výstupu budeme značit jako n , m a p , jak je zvykem v literatuře.

Posuzování kvality odezvy stavového systému (1–2) zahrnuje odezvu na obecné počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ v situaci, kdy $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, tj. odezvu systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (4)$$

Je-li dynamika odezvy systému (1–2) z nějakého důvodu neuspokojivá, pak je ji třeba vhodně kompenzovat. Příkladem takové situace je, když je odezva málo tlumená nebo dokonce nestabilní. Často nás zajímá, jak zajistit, aby probíhal přechodový děj z libovolného počátečního stavu do ustáleného stavu tak, že

- i) celý stav $\mathbf{x}(t)$ kompenzovaného systému se vrátí pokud možno co nejrychleji do počátku stavového prostoru, tj. $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ s ohledem na fakt, že pro tech-

nické účely *dostatečně blízko je dostatečně dobře*, a to bez zbytečných oscilací (Typicky se s tímto problémem setkáme tam, kde některé vstupy modelujeme jako poruchy a chceme se zbavit jejich vlivu na stav systému, např. sledování radiolokátorem.),

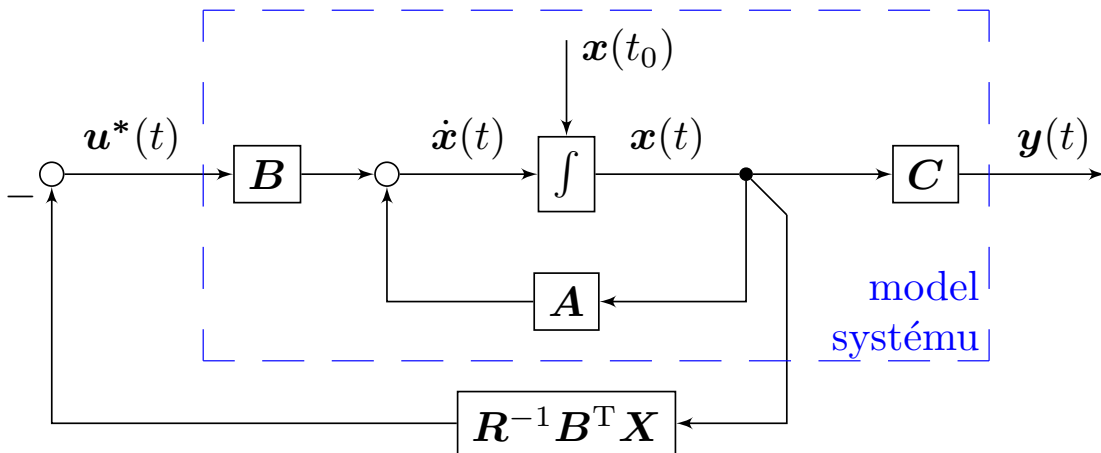
- ii) nadměrné úsilí se nemusí vynaložit, čímž se mj. zabrání saturování akčních členů a tudíž nelineárnímu chování, případně přílišné spotřebě paliva, případně nerealistickým požadavkům na zrychlení, (Např. na jedné straně zamezujeme požadavkům na produkci nadměrného kroutícího momentu, který nejsme schopni fyzicky vyprodukovat (vrtulník) a na druhé straně zamezujeme požadavkům na produkci nadměrného zrychlení u dopravních prostředků s posádkou, které posádka nebude fyziologicky přijatelně snášet.), apod.

Navíc může být záhodno určitým komponentám stavového vektoru přiřadit různé váhy, a tím jim zajistit prioritu oproti ostatním komponentám. Fyziologická omezení, namáhání materiálu a využitelný příkon jsou příkladem, kde u manévrování je třeba zabránit nadměrným zrychlením. Jinými slovy je třeba cíle návrhu řízení vhodně matematicky interpretovat. Tomu nejlépe vyhovuje optimální řízení [5], jehož cílem je nalézt optimální průběh řídicí veličiny $\mathbf{u}^*(x(t_0))$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$, jestliže existuje, co minimalizuje hodnotu kvadratického kritéria

$$J(x(t_0), u(t)) = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (5)$$

vzhledem k omezení, že $\mathbf{x}(t)$ splňující (5) je jednoznačné řešení systému (1–2) z libovolné ale pevně dané počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0)$.

Požadujeme, aby \mathbf{R} byla reálná, symetrická, pozitivně definitní matice, tzn. aby šlo napsat $\mathbf{R} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ pro nějakou nesingulární matici \mathbf{M} s prvky v oboru reálných čísel. Tento předpoklad implikuje, že $\mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) > 0$ pro všechna $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$, a že $\mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) = 0$ pouze když $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$. Tento předpoklad spolu s říditelností (1–2) jsou nutnou podmínkou pro zajištění existence a jednoznačnosti optimálního řízení $\mathbf{u}^*(t)$. Pozorovatelnost (1–2) je nutnou podmínkou, že celý stavový prostor ovlivní hodnotu kritéria optimality $J(x(t_0), u(t))$.



Obr. 2: Stavová zpětná vazba v problému optimálního regulátoru výstupu.

Optimální systém je znázorněn na obr. 2, z kterého je patrné, že úloha vede na použití zpětné vazby od stavu,

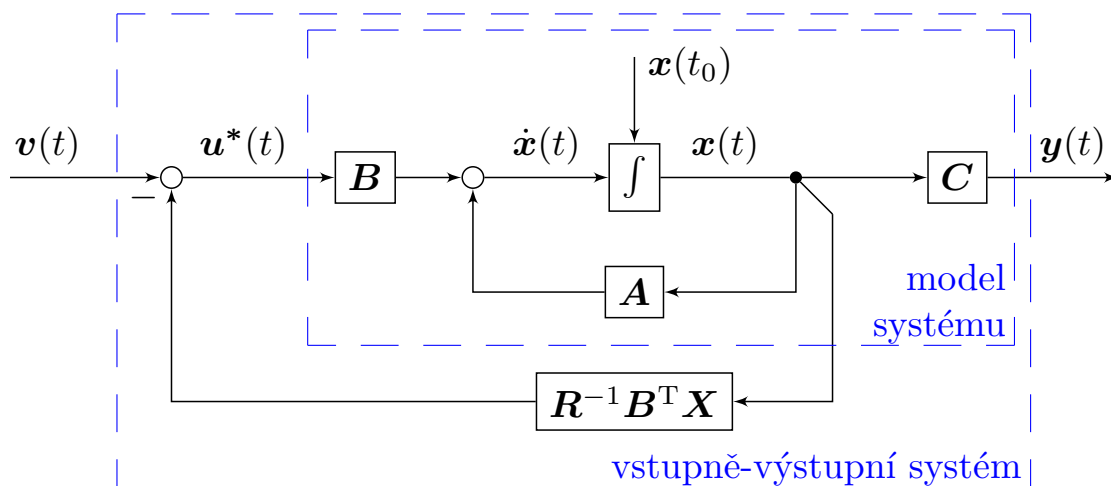
$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}\mathbf{x}(t), \quad (6)$$

kde \mathbf{X} je jednoznačné, pozitivně definitní řešení (nelineární) maticové Riccatiho rovnice

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}. \quad (7)$$

Platí, že vlastní čísla optimálního systému $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})$, $i = 1, 2, \dots, n$ matice $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$ budou ležet v levé otevřené polorovině komplexní roviny, tj. $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})) < 0$.

Protože řešení problému optimálního řízení nevede na externí řízení, obr. 2, nemůžeme hovořit o přenosové funkci optimálního systému. Abychom mohli terminologii přenosových funkcí (frekvenční metody) použít, musíme vytvoření přenosové funkce umožnit. Tím, že takové externí řízení budeme a posteriori definovat zavedením externího vektorového vstupu $\mathbf{v}(t)$ podle obr. 3. Maticové přenosové funkci



Obr. 3: Dodefinování externího vstupu ve frekvenčním přístupu.

z Laplaceova obrazu externího vstupu $\mathcal{L}\{\mathbf{v}(t)\} = \mathbf{V}(s)$ na Laplaceův obraz výstupu $\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} = \mathbf{Y}(s)$ pak přísluší charakteristický polynom $\chi_{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})$, jehož kořeny $s_i(\chi)$, $i = 1, 2, \dots, n$ leží v levé otevřené polorovině komplexní roviny, $\text{Re}(s_i(\chi)) < 0$, kde kořeny $s_i(\chi)$ jsou totožné s vlastními čísly $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})$ matice $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$, $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tato čísla jsou známá jako n pólů optimálního systému.

Dále platí, že $J^*(x_{t_0})$, minimální hodnota $J(x(t_0), u(t))$, se rovná číslu $\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{X}\mathbf{x}(t_0)$. Protože řešení je nezávislé na konkrétních počátečních podmínkách $\mathbf{x}(t_0)$, je zřejmé, že některé konkrétní počáteční podmínky povedou na nižší hodnotu kritéria J než nějaké jiné počáteční podmínky. Minimální hodnota kritéria, $J^*(x_{t_0})$, tedy není cíl, ale prostředek návrhu minimalizací kritéria $J(x(t_0), u(t))$; kvalitu kompenzace není možné hodnotit jedním kladným reálným číslem. Jinými slovy, nejde o hodnotu kritéria dosaženou optimálním řízením, ale o optimální řízení jako postup. Minimalizací kritéria se ukazuje, že okamžitá hodnota výstupu regulátoru je funkcí okamžité

hodnoty stavu. Jinými slovy: Minimalizací kritéria dostaneme strukturu regulátoru v podobě, které se říká vazba od stavu systému, stavová vazba, a dostaneme hodnotu této vazby takovou, že pro dané konkrétní počáteční podmínky bude řešení zaručeně optimální ve smyslu kritéria (5).

Co se LDR týče, pro elementární úvod do techniky estimace stavu je dobré si uvědomit, proč v obecném případě nemůžeme získat informaci o hodnotě stavu jinak než dynamicky. Na konci tohoto úvodu to ukážeme. Za jakých podmínek informaci získat můžeme řešením statického problému a za jakých podmínek nám nezbyvá než tuto informaci získat řešením problému dynamického je důležité, protože to vede na jisté omezující podmínky ve formě předpokladů, které budeme muset přijmout a splnit. Je to důsledek faktu, že dynamické problémy jsou obvykle složitější než statické, které mohou být speciálním případem nebo součástí problémů dynamických. Také platí, že některé dynamické problémy je možné za určitých předpokladů přeformulovat a řešit jako statické. Schopnost rozlišovat mezi dynamickými a statickými problémy je klíčová i v běžném životě, např. abychom nenaslouchali „odborníkům“, kteří nám rádi a často tvrdí, že nemáme od systému čekat jinou reakci, když stále děláme totéž. V případě dynamického systému takové tvrzení opravdu neplatí.

Předpoklady existence řešení dynamické rekonstrukce stavu představují cenu, kterou musíme zaplatit, abychom dostali záruku, že hodnotu stavu dokážeme rekonstruovat. Můžeme se na ně dívat stejně, jako bychom se dívali na jakékoliv předpoklady příslušné tvrzením, která je možné formálně dokázat. Zatímco v různých dobách se za formální důkaz považovalo leccos, napříč časem a kulturami je uznávaný test časem. Z tohoto pohledu je cena přesně určena, pro praktické aplikace nikterak vysoká; předpoklady jsou poměrně neomezující a umožňují formulovat velmi silná, přesná a široce aplikovatelná tvrzení. Předností je spolehlivost záruky, která je v dnešní postfaktické době komodita, o které se více mluví, než se vyskytuje. Měli bychom si jí proto náležitě cenit. Zbývá dodat, že jestli stav modelu systému skutečně zjistíme, záleží na správném pochopení a implementaci Luenbergerovy teorie. To je účelem této bakalářské práce.

Implementace se omezuje na zjištění stavu stavového modelu stejnosměrného motoru s permanentními magnety, kde budeme zjišťovat hodnotu úhlové rychlosti hřídele motoru a to na základě hodnoty napájecího napětí motoru a na základě měření úhlu natočení hřídele motoru a proudu vinutím (armaturou) motoru. Protože měření hodnoty úhlu natočení a proudu provádíme fyzicky existujícími senzory, v našem případě enkodérem a ampérmetrem, a protože hodnotu úhlové rychlosti otáčení hřídele motoru měříme nepřímou, a to implementací předmětné teorie a ne fyzicky realizovaným měřícím přístrojem k měření veličiny určeným, tj. protože měření budeme provádět pomocí algoritmu provozovaného v číslicovém počítači, můžeme na naši implementaci měření nahlížet jako na návrh softwarového senzoru.

Interpretace jako „software sensor“ se vyskytuje v literatuře a zdůrazňuje fakt, že LDR je implementovaná programem v číslicovém počítači. Nicméně je třeba mít na paměti, že i jiné implementace jsou možné a mohou být z různých důvodů i nezbytné. Jsou to implementace pomocí analogového počítače nebo fyzické realizace formou elektricky, hydraulicky, pneumaticky nebo jinak realizovaných systémů, např. v extrémně prašném, vlhkém nebo výbušném prostředí. Nevylučuje se ani použití počítačů s ozubenými koly, které svého času sloužily ve vojenských aplikacích, kde

byla ve srovnání s elektronickými číslicovými počítači zdůrazňována jejich odolnost vůči účinkům elektromagnetického pulsu způsobenému nukleárním výbuchem.

Inherentní omezení vyplývající ze statické rekonstrukce stavu ukážeme pomocí transformace výstupního a stavového prostoru. Tato transformace je vratná a slouží výlučně k analýze podstaty problému. Vhodnou volbou transformace výstupního a stavového prostoru

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{y}} \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} \quad (9)$$

můžeme „stlačit“ řádky a sloupce matice \mathbf{C} a „stlačenou“ matici normalizovat tak, že

$$\mathbf{PCT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

a tím (1–2) vratně transformovat do tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{y}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Existenci konstrukcí dostaneme, když v matici \mathbf{C} na pozici 11 přesuneme nenulový prvek, použijeme ho k vynulování pozic pod a napravo od pozice 11, a normujeme pozici 11 na číslo jedna. Obdobně postupujeme u pozic 22, 33, ...

Je zřejmé, že $\bar{\mathbf{y}}_1(t)$ je určeno $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ jednoznačně jen když nulové matice v (10) jsou prázdné, tj. neexistují. V takovém případě ale máme přímý přístup ke stavu a můžeme tedy použít stavovou zpětnou vazbu.

V případě, že nulové matice v (10) jsou neprázdné, $\bar{\mathbf{y}}_1(t)$ je generováno nejen $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$, ale i libovolným $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. K $\bar{\mathbf{y}}_1(t)$ tedy nemůžeme jednoznačně přiřadit stav, protože $\bar{\mathbf{y}}_1(t)$ generuje jednoznačně část stavu značená jako $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ a nekonečně mnoho stavů značených jako $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. Podobně $\bar{\mathbf{y}}_2(t) = \mathbf{0}$ je generováno libovolným $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ a libovolným $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. Ke stavu nemáme přímý přístup a musíme použít dynamickou rekonstrukci stavu viz podkapitola 1.1.

Kapitola 1

Luenbergerův pozorovatel

V této kapitole je popsána Luenbergerova dynamická rekonstrukce hodnoty stavové proměnné (LDR).

1.1 Luenbergerova dynamická rekonstrukce (LDR)

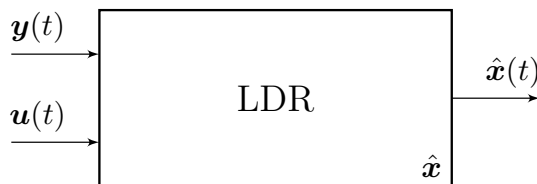
LDR chceme navrhnout za účelem aproximace stavu modelu dynamického systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.2)$$

protože k tomuto stavu nemáme fyzický přístup nebo z jiných důvodů, viz str. 2, a protože znalost stavu potřebujeme k návrhu dynamické kompenzace.

Stejně jako model popíšeme LDR jako dynamický systém ve stavovém prostoru a budeme postupovat tak, že ústřední snahou návrhu bude, aby se asymptoticky blížila nule odchylka stavu modelu od aproximovaného stavu modelu. Za tímto účelem volíme dynamiku LDR jako u modelu. Tak jak je model buzen počáteční podmínkou stavu \mathbf{x}_0 spolu se vstupem \mathbf{u} , LDR budíme počáteční podmínkou stavu LDR $\hat{\mathbf{x}}_0$ spolu se vstupem a výstupem modelu, tj. \mathbf{u} a \mathbf{y} . Takto si počínáme, protože chování vstupu a výstupu systému zprostředkovává informaci o jeho stavu, a stav chceme prostřednictvím LDR aproximovat.



Obr. 1.1: Luenbergerův pozorovatel.

Pro model (1.1)–(1.2) tedy volíme LDR ve tvaru

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + f(\mathbf{y}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (1.3)$$

kde $f(\mathbf{y}(t))$ je vhodná lineární funkce výstupu modelu. Tuto funkci zvolíme s ohledem na základní myšlenku, že se snažíme, **aby se odchylka mezi stavem modelu a stavem LDR asymptoticky blížila nule**. Odchylka je definována

$$\mathbf{e}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (1.4)$$

a její dynamika je

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - f(\mathbf{y}(t)), \quad (1.5)$$

kde jsme napřed zderivovali (1.4) a následně za derivace dosadili z (1.1) a (1.3). Tento postup nám umožňuje

- i) od $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ z modelu (1.1) odečíst $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ z LDR (1.3),
- ii) vytknout \mathbf{A} a pracovat v odchylce $\mathbf{e}(t)$.

Takže z (1.5) dostáváme

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - f(\mathbf{y}(t)), \quad (1.6)$$

kde můžeme nahradit $\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{e}}(t)$ a můžeme nahradit $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$ a tím z (1.6) dostat

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) - f(\mathbf{y}(t)), \quad (1.7)$$

kde lineární funkci $f(\mathbf{y}(t))$ potřebujeme zvolit s ohledem na hlavní myšlenku, totiž že chceme, **aby se odchylka asymptoticky blížila nule**, a aby se k nule blížila nezávisle na stabilitě systému (1.1)–(1.2), tedy i například pro $\mathbf{y}(t)$ rostoucí nade všechny meze.¹ V tomto smyslu tedy nebudeme dynamiku odchylky ladit výstupem modelu, ale uděláme ji autonomní, a to tak, že místo lineární funkce $f(\mathbf{y}(t))$ budeme uvažovat lineární funkci $g(\mathbf{y}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$, což nám umožní zvolit

$$g(\mathbf{y}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad (1.8)$$

kde vytknutím \mathbf{C} dostáváme

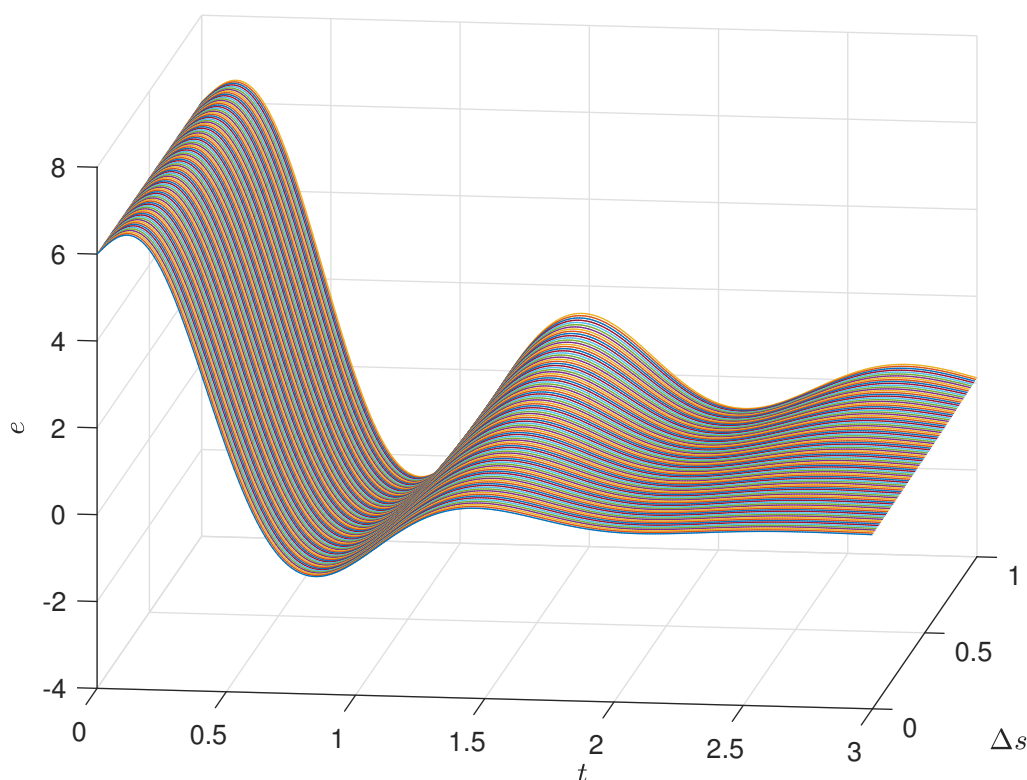
$$g(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (1.9)$$

Tím se nám podařilo zavést výraz pro odchylku, tj. $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$. Za povšimnutí stojí, že $\mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ je výstup modelu, kdežto $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t)$ je kvantita, kterou můžeme chápat jako výstup z LDR, tj. rekonstruovaný výstup modelu, rekonstruovaný na základě rekonstruovaného stavu. Tento výstup však používáme jen jak je výše popsáno a do LDR patří jen implicitně.

Dynamika odchylky stavu modelu a stavu LDR, (1.4), je pak popsána jako autonomní systém buzený počáteční podmínkou \mathbf{e}_0 ,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t), \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{e}_0, \quad (1.10)$$

kde \mathbf{L} je vhodná konstantní matice, kterou můžeme zvolit tak, abychom její pomocí zvolili dynamiku odchylky. Tuto dynamiku zvolíme s ohledem na potřebu rekonstrukce stavu. Typicky budeme \mathbf{L} volit jako kompromis mezi rychlostí přiblížení



Obr. 1.2: Příklad vývoje dynamiky odchylky LDR.

k nule a průběhem přechodového děje. Typický příklad rychlého versus pomalého přechodového děje je na obr. 1.2.

Dynamickému systému, popsanému

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (1.11)$$

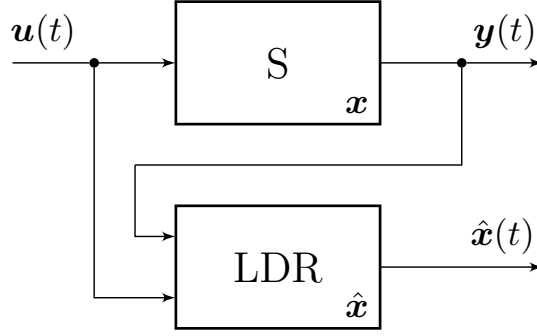
se říká Luenbergerův pozorovatel stavu a slouží k LDR (Luenbergerově dynamické rekonstrukci stavu). Model s Luenbergerovým pozorovatelem je znázorněn na obr. 1.3.

1.2 Stabilita

Stabilita je základní vlastnost systémů, která nás zajímá a o kterou při návrhu zpětnovazebního řídicího systému usilujeme. V bezprostředně následujícím textu ukážeme, jak se projeví použití LDR (Luenbergerovy dynamické rekonstrukce) stavu na změně dynamiky ve srovnání s dynamikou kompenzovanou výhradně a pouze jen zpětnou vazbou od stavu.

Systém se zpětnou vazbou od stavu realizovanou pomocí LDR je popsán definicí modelu dynamického systému (1.12) a (1.13), definicí zpětné vazby od stavu (1.14),

¹Jinými slovy: V tomto stadiu úvah upíráme naši pozornost k rekonstruování stavu nezávisle na stabilitě nebo nestabilitě systému, jehož stav rekonstruujeme. Později naznačíme, proč stabilitu systému potřebujeme.



Obr. 1.3: Model s Luenbergerovým pozorovatelem.

srov. (6), a definicí LDR (1.15), viz (1.11), podkapitola 1.1, které jsou postupně:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.14)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (1.15)$$

Přímým dosazením (1.14) do (1.12) a (1.15) a přímým dosazením (1.13) do (1.15) dostáváme dynamický systém

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.18)$$

který pro přehlednost přepíšeme maticově jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Z důvodů, které budou brzy zřejmější, transformujeme souřadnice stavového prostoru pomocí stavové transformace

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

tztn. transformujeme stavovou realizaci (1.19)–(1.20) na stavovou realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

která vychází ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{e}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

kde jsme použili definici odchytky (1.4) z podkapitoly 1.1, tj. $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$.

Z realizace (1.25–1.26) je dobře vidět, že pro odstranění vlivu neurčitosti, tzn. pro odstranění vlivu neznámých počátečních podmínek \mathbf{x}_0 kompenzované soustavy a neznámých počátečních podmínek \mathbf{e}_0 modelu odchytky, který je předmětem podkapitoly 1.1, je nezbytné, aby vlastní čísla kompenzovaného systému a vlastní čísla modelu odchytky, tzn. LDR, byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny. Aby totiž vlastní čísla matice systému (1.25) byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny, musí být v levé polorovině komplexní roviny i vlastní čísla podmatice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ a vlastní čísla podmatice $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$, tzn. $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})) < 0$, $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{LC})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pro lepší názornost ještě vyjádříme analytické řešení stavových realizací (1.19–1.20) a (1.25–1.26), a to ne v časové oblasti, ale po Laplaceově transformaci. Nejsnáze toto řešení dostaneme přímou inverzí Laplaceova obrazu matice systému v (1.25–1.26) spolu s přímočarou analogií známého vzorečku pro přiřazení přenosové matice množině stavově ekvivalentních stavových realizací. Snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= \mathbf{Y}(s) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{x}_0}_{\text{vliv poč. podm. modelu}} + \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{e}_0}_{\text{vliv poč. podm. LDR}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.3 Vztah k jiným metodologiím

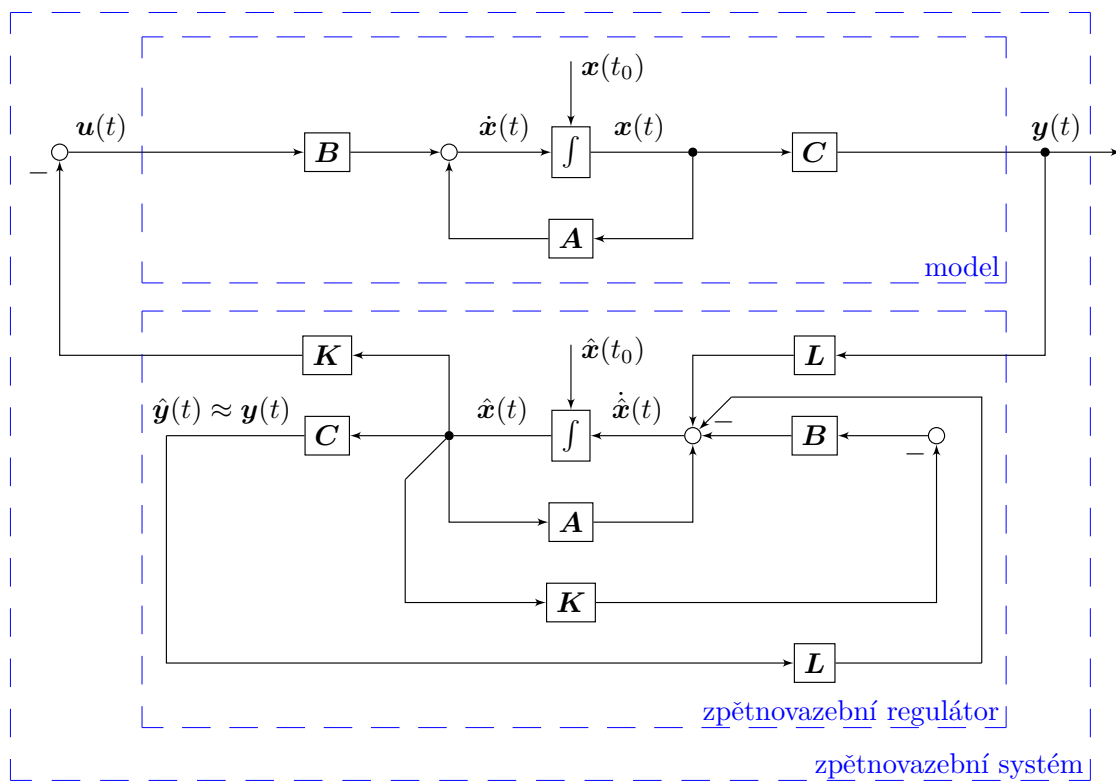
Frekvenční metody návrhu řídicích systémů mají původ v aplikacích řízení z oblasti elektrotechniky a vhodně doplňují metody návrhu ve stavovém prostoru, které svůj původ odvozují především z aplikací v oblasti mechaniky. Jedním z podstatných rozdílů obou hlavních metodologií, tedy frekvenčních a stavových, je absence stavové zpětné vazby ve frekvenčních metodách. Ta nicméně nebrání srovnávat předmětné metodologie a přeformulovávat problémy.

Z analytického vyjádření (1.27) je dobře vidět, že jestliže stavová zpětná vazba nemění dynamický stupeň, tj. dimenze matice systému implementací stavové zpětné vazby se nemění, pak dimenze matice systému implementací stavové zpětné vazby

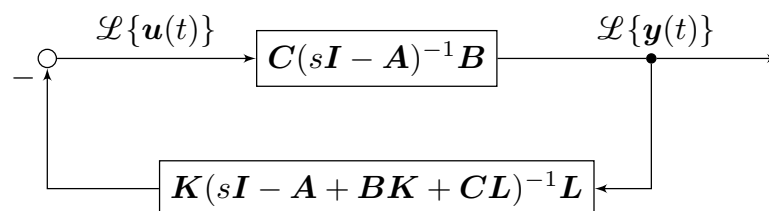
přes LDR se mění. Vzroste na dvojnásobek. Dynamický stupeň výsledného systému vzniklého stavovou zpětnou vazbou implementovanou pomocí LDR bude dvojnásobkem dynamického stupně původního systému, tj. systému jehož stav asymptoticky rekonstruujeme za účelem získání přístupu k tomuto stavu.

Cena za asymptotickou rekonstrukci stavu je tedy zvýšení dynamického stupně systému. To může mít různé nepříjemné důsledky, jejichž studium a analýza jsou však nad rámec této práce.

Ve vztahu k jiným metodám návrhu řídicích systémů i jinak je dobré mít na paměti, že stav dynamického systému je obecně fikce, protože je to stav stavové realizace, tj. stav modelu, nikoliv nezbytně stav konkrétního fyzicky existujícího systému. Tento fakt pěkně koresponduje s konstrukcí regulátoru pomocí jiných metod než je stavová vazba přes LDR. Na obr. 1.4 je struktura řídicího systému, původně získaná

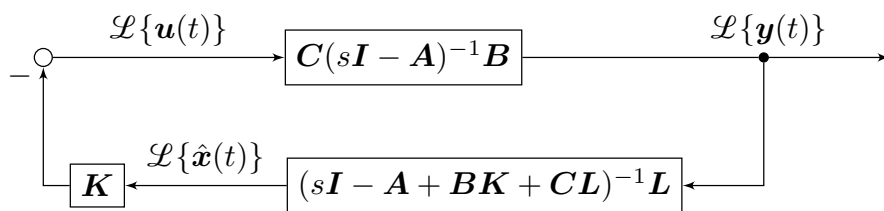


Obr. 1.4: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Časová oblast.



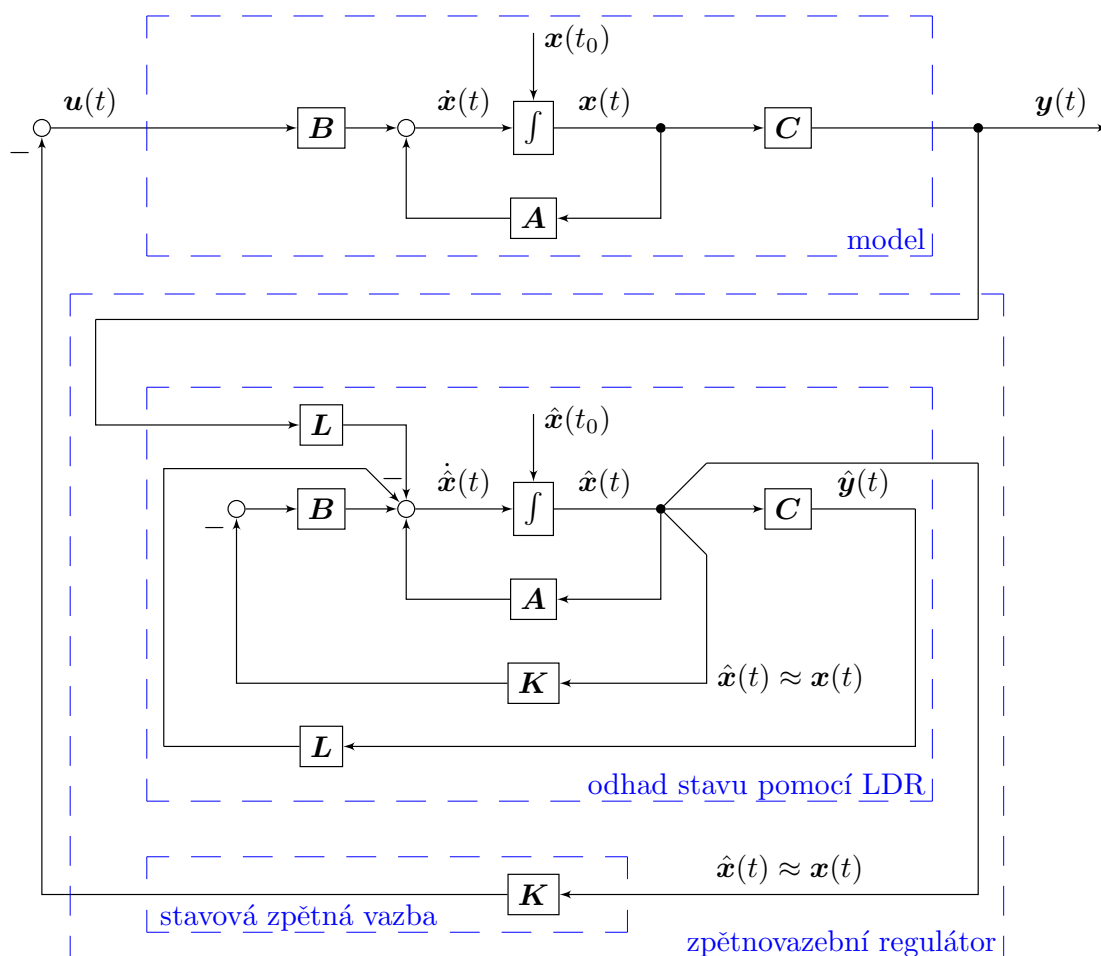
Obr. 1.5: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Frekvenční oblast.

jak je stručně popsáno v Úvodu, nyní překreslená do struktury předem postulovaného zpětnovazebního systému s regulátorem ve zpětné vazbě od výstupu systému.



Obr. 1.6: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení zesílení stavové zpětné vazby a dynamického kompenzátoru.

Jedná se o překreslení obr. 1.7, který je ve stylu obr. 1.3, kterým jsme začali tuto



Obr. 1.7: Aproximace stavové zpětné vazby pomocí LDR.

podkapitolu.

Za povšimnutí stojí absence externího vstupu. Je to tím, že hodnota řídicí proměnné je dána řešením optimálního problému, viz Úvod a primární motivací zavedení zpětné vazby od stavu je kompenzace dynamiky, zajištění návratu systému do počátku stavového prostoru (návrat do pracovního bodu).

Definice zpětné vazby tak, aby vznikla nová řídicí veličina nevychází řešením optimálního problému a je motivována řešením jiného problému, než jsme doposud řešili. Například se jedná o problém sledování, v literatuře známý jako *tracking* nebo *servo*

problem. Speciální příklad takového nového problému je i náš stávající problém, když se na něj budeme dívat jako na problém sledování, v kterém si přejeme, aby výstupní veličina $y(t)$ asymptoticky sledovala žádanou hodnotu, kde žádaná hodnota je rovna nulovému vektoru.

Naposledy, ale v neposlední řadě ještě jednou zmíníme, že formulace konceptu stavové zpětné vazby pochází ze stavového prostoru a že díky neexistenci postulovaného externího vstupu v problému optimálního problému nemá smysl hovořit o maticových přenosových funkcích, protože po zapojení zpětné vazby do existujícího vstupu neexistuje další externí vstup, protože ho prostě není v rámci formulace úlohy třeba, viz původní motivace zpětné vazby a LDR, [1], [2], [3], [4], [5], jak jsou stručně popsány v Úvodu.

1.4 Dualita

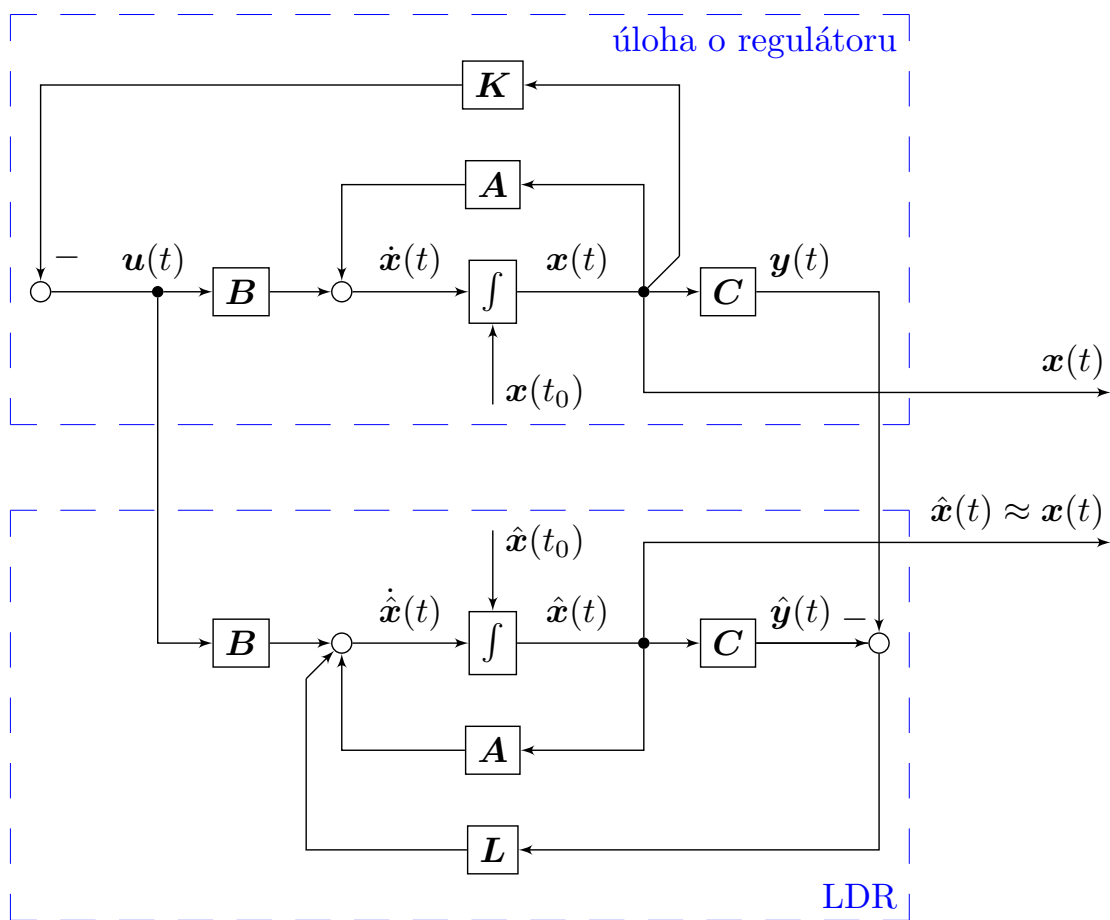
Dualita je vlastnost vyjadřující vztahy mezi modely systémů, úlohami o řízení, vlastnostmi systémů, apod. Pro naše účely nás zajímá dualita mezi úlohou o regulátoru, která je popsána v Úvodu a úlohou o odhadu stavu, která je popsána v kapitole o Luenbergerově dynamické rekonstrukci stavu systému.

Duální vztahy mezi úlohou o regulátoru a úlohou o odhadu stavu jsou shrnuty v tabulce 1.1 a jsou znázorněny na obr. 1.8. Další detaily jsou např. v literatuře [6], kapitola 6, str. 112–114.

regulátor	odhad stavu
\mathbf{A}	\mathbf{A}^T
\mathbf{B}	\mathbf{C}^T
\mathbf{K}	\mathbf{L}^T

Tabulka 1.1: Dualita mezi stavovou zpětnou vazbou a rekonstrukcí stavu.

Dualita se dá využít tak, že k dané úloze vezmeme úlohu duální, kterou řešíme pro duální systém k našemu systému a z řešení této duální úlohy vytvoříme duální úlohy. Toto řešení je pak řešení naší původní úlohy.



Obr. 1.8: Dualita: zesílení stavové zpětné vazby K , Luenbergerovo zesílení L .

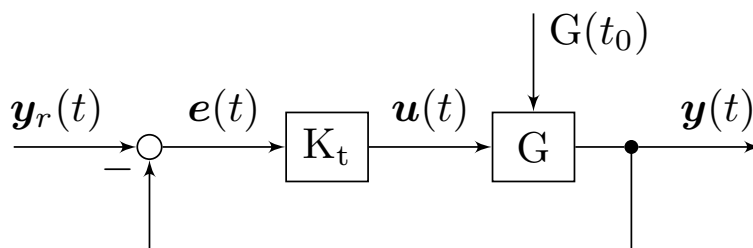
Kapitola 2

Úloha o servu

V této kapitole je popsán návrh servo systému k sledování žádané hodnoty výstupní veličiny. V našem případě se jedná o úhel natočení hřídele stejnosměrného elektromotoru.

2.1 Servo systém

Servo systém navrhujeme za účelem sledování hodnoty žádané hodnoty výstupní veličiny. Situace je znázorněna na obr. 2.1, kde G a K_t jsou symboly označující sys-



Obr. 2.1: Řídící obvod pro servo problém.

tém a kompenzátor, $\mathbf{y}_r(t)$ je vektor žádané hodnoty výstupní proměnné (žádaná hodnota), $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupní proměnné (vstup), $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupní proměnné (výstup), $\mathbf{e}(t)$ je vektor regulační odchylky (odchylka). Dimenze vstupu a výstupu budeme značit jako m a p , jak je zvykem v literatuře. Symbol $G(t_0)$ znázorňuje neznámé, ale konkrétní počáteční podmínky systému. V našem případě to jsou neznámé počáteční podmínky stavové realizace a LDR, jak jsou znázorněny v podkapitole 1.3, např. na obr. 1.4.

Dimenze žádané hodnoty a regulační odchylky, jak je patrné z obr. 2.1, jsou totožné s dimenzí výstupu. Protože zpětná vazba v daném zapojení má zesílení rovné jednotkové matici, zapojení na obr. 2.1 se často říká regulační obvod s jednotkovou zpětnou vazbou, *Unity Feedback System*.

Jako praktická úloha přichází servo problém především z oblasti aplikací zabývajících se problematikou řízení na větší vzdálenost a/nebo řízení, kde pro přenastavo-

vání hodnoty výstupu pomocí uvažovaného řídicího obvodu potřebujeme vynaložit podstatně menší výkon než bychom museli vynaložit přímým řízením systému. Dokážeme si představit i aplikace, kde pro nastavování žádané hodnoty budeme potřebovat podstatně větší výkon, např. navrhujeme-li prostředek umožňující lidskou rukou nastavovat výstup mikromechanického systému.

2.2 Princip vnitřního modelu

Pro naše účely si postačí uvědomit a jako vodítko návrhu používat intuitivní fakt, že aby mohlo dojít k asymptotickému sledování žádané hodnoty, musí být systém tvořený sériovým spojením systému a kompenzátoru schopen generovat výstup $\mathbf{y}(t)$ takový, aby se tento výstup $\mathbf{y}(t)$ asymptoticky blížil žádané hodnotě $\mathbf{y}_r(t)$. Regulační odchylka $\mathbf{e}(t)$ pak bude asymptoticky stabilní, $\mathbf{e}(\infty) = \mathbf{0}$. Celá odchylka $\mathbf{e}(t)$ se vrátí pokud možno co nejrychleji do nuly, tj. $\mathbf{e}(\infty) = \mathbf{0}$ s ohledem na fakt, že pro technické účely *dostatečně blízko je dostatečně dobře*, a to bez zbytečných oscilací.

Cílem aplikace principu vnitřního modelu je tedy nalézt kompenzátor K_t takový, aby regulační odchylka $\mathbf{e}(t)$ byla asymptoticky stabilní.

Předmětný fakt se v literatuře vyskytuje pod názvem *princip vnitřního modelu*, *Prinzip der inneren Modellierung*, *Internal Model Principle* a má široké použití, např. [6] na stránce 128 nebo [6] na stránce 157.

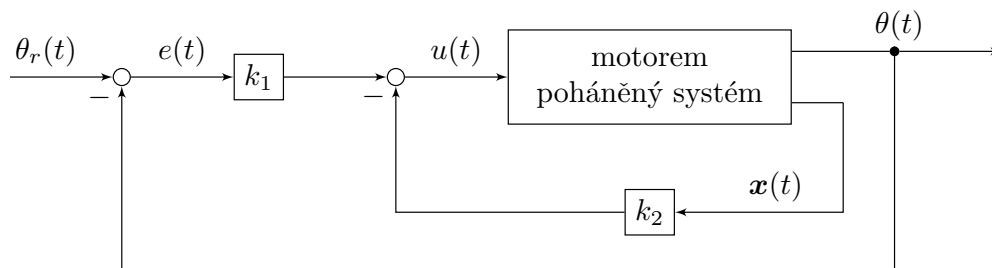
Samozřejmě se princip vnitřního modelu dá využít nejenom pro standardní sledování, ale i na sledování předdefinované jako asymptotické odstranění vlivu deterministického poruchového signálu, který dokážeme modelovat. Takový problém je totiž možné interpretovat jako sledování poruchového signálu za účelem jeho asymptotického odečtení, např. [6].

2.3 Úloha o servu jako úloha o regulátoru

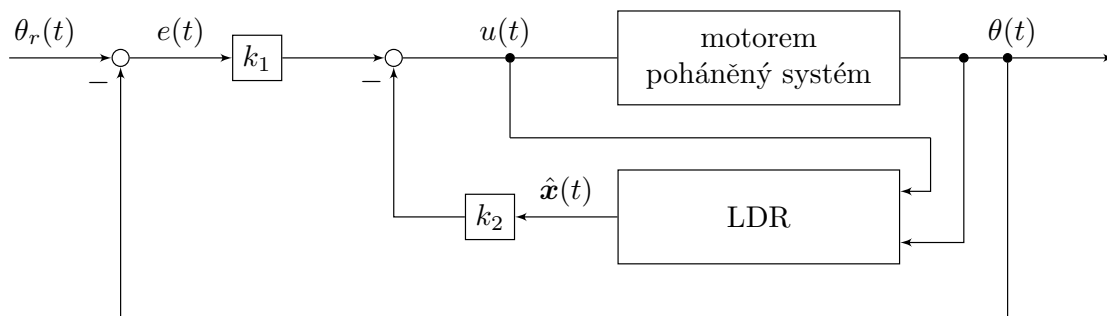
Pro účely použití výsledků popsaných v Úvodu a kapitole 1, které se týkají stavového přístupu k řešení úlohy o regulátoru a k řešení úlohy o dynamické rekonstrukci stavu (Luenbergerův pozorovatel – LDR), je třeba po uzavření zpětné vazby od stavu získat přístup do uzavřené smyčky řídicího systému a využít úlohy o regulátoru tak, aby se jejím řešením docílilo asymptotického přiblížení průběhu výstupu systému $\mathbf{y}(t)$ k průběhu žádaného výstupu systému $\mathbf{y}_r(t)$. Za tímto účelem je minimálně třeba dodefinovat externí vstupní proměnnou kompenzovaného systému. Tím se z úlohy o regulátoru dostáváme k úloze o servu.

Detaily postupu jsou vysvětleny v kapitole 4 na konkrétních příkladech modelů stejnosměrného motoru, kde budeme postupovat od nejjednoduššího modelu, např. [8], podkapitola 7.2, str. 453, a to přes jednodušší model k modelu, kde pro každý ze tří prezentovaných modelů ukážeme jak navrhnout servo řešením úlohy o regulátoru.

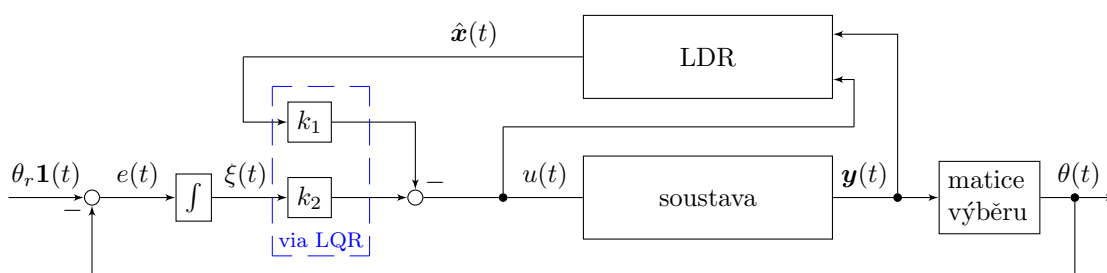
Schématicky je návrh serva znázorněn na obr. 2.2 – obr. 2.4,



Obr. 2.2: Struktura servo návrhu.



Obr. 2.3: Struktura servo návrhu s odhadem stavu.
Luenbergerův pozorovatel – LDR.



Obr. 2.4: Lineární kvadratické integrální řízení.

kde na obr. 2.4 „matice výběru“ je podmaticí matice výstupu v modelu řízeného systému a $\theta_r \mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok. Přítomnost integrátoru se vstupem $e(t)$ je odvozena od Principu vnitřního modelu, viz. podkapitola 2.2. V kapitole 4 je ukázáno u kterého z modelů je integrátor třeba a u kterých modelů ne a proč.

Kapitola 3

Stavový model stejnosměrného motoru

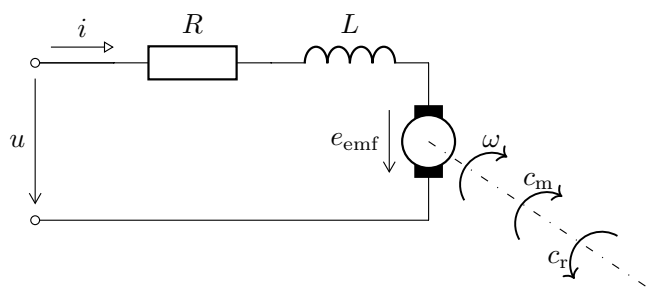
V této kapitole je popsáno určení stavových rovnic systému popisujících dynamické vlastnosti stejnosměrného motoru s cizím buzením nebo s permanentními magnety. Tento systém slouží jako model, na základě kterého budujeme řídicí systém pro řízení skutečného motoru, kde cílem je sledování žádané hodnoty úhlu natočení hřídele.

3.1 Rovnováha napětí

Z elektrického hlediska se proudový obvod elektromotoru skládá z odporu a indukčnosti armatury, změny napětí vlivem elektromotorické síly (electromotive force, zpětné elektromotorické napětí) a stejnosměrného zdrojového napětí, na které je motor připojen. Situace je znázorněna na obr. 3.1.

$$Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + e_{\text{emf}}(t) = u(t), \quad (3.1)$$

kde R a L jsou odpor a indukčnost armatury (vinutí, kotvy), $i(t)$ je proud armaturou, $e_{\text{emf}}(t)$ je změna napětí vlivem elektromotorické síly, a $u(t)$ je zdrojové napětí na armatuře elektromotoru.



Obr. 3.1: Schéma stejnosměrného elektromotoru.

V případě, že budící napětí je konstantní, je točivý moment dodávaný motorem c_m

úměrný proudu armaturou:

$$c_m(t) = K_t i(t), \quad (3.2)$$

kde K_t je momentový koeficient.

Konstantní koeficienty K_t a K_e jsou si rovny, když použijeme jednotky SI, tzn. volt, ampér, Nm, rad/s pro měření napětí, proudu, točivého momentu a úhlové rychlosti. Definici K_e zavedeme v následující podkapitole.

3.2 Rovnováha točivých momentů

Z mechanického hlediska se rovnováha točivých momentů na hřídeli elektromotoru skládá z momentu točení zátěže, momentu odvozeného od momentu setrvačnosti armatury a hřídele, momentu spotřebovaného na viskozní tlumení, a na druhé straně pak z momentu který reprezentuje elektrickou energii vyměňovanou mezi elektromotorem jako točivým elektrickým strojem a zdrojovým napětím na armatuře elektromotoru. Situace je znázorněna na obr. 3.1.

$$c_r(t) + J \frac{d}{dt} \omega(t) + b \omega(t) = c_m(t), \quad (3.3)$$

kde J a b jsou moment setrvačnosti a koeficient viskozního tření v elektromotoru, $\omega(t)$ je úhlová rychlost motoru, a $c_r(t)$ a $c_m(t)$ jsou moment točení zátěže a moment, který reprezentuje elektrickou energii vyměňovanou mezi elektromotorem jako točivým elektrickým strojem a zdrojovým napětím na armatuře elektromotoru.

Úhlová rychlost $\omega(t)$ je definována

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t), \quad (3.4)$$

kde $\varphi(t)$ je úhel natočení hřídele elektromotoru.

V případě, že budící napětí je konstantní, je točivý moment dodávaný motorem c_m úměrný úhlové rychlosti otáčení hřídele:

$$e_{emf}(t) = K_e \omega(t), \quad (3.5)$$

kde K_e je elektromotorický koeficient.

Konstantní koeficienty K_t a K_e jsou si rovny, když použijeme jednotky SI, tzn. volt, ampér, Nm, rad/s pro měření napětí, proudu, točivého momentu a úhlové rychlosti.

3.3 Model

Model vychází z modelování rovnováhy napětí v elektrické části a rovnováhy točivých momentů v mechanické části motoru.

V podkapitole 3.1 zanedbáme moment točení zátěže:

$$c_r(t) = 0, \quad (3.6)$$

protože ho neznáme a motor pro naše účely uvažujeme jako nezatížený točící se zátěží.

Tím dostaneme soustavu rovnic

$$Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + e_{\text{emf}}(t) = u(t), \quad (3.7)$$

$$J \frac{d}{dt}\omega(t) + b\omega(t) = c_m(t), \quad (3.8)$$

$$c_m(t) = K_t i(t), \quad (3.9)$$

$$e_{\text{emf}}(t) = K_e \omega(t), \quad (3.10)$$

z kterých prostým dosazováním dostaneme

$$J \frac{d}{dt}\omega(t) + b\omega(t) = K_t i(t), \quad (3.11)$$

$$Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + K_e \omega(t) = u(t), \quad (3.12)$$

a použitím definice úhlové rychlosti

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\theta(t) \quad (3.13)$$

dostaneme stavové rovnice

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{1}{J}(K_t i(t) - b\omega(t)), \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{L}(u(t) - K_e \omega(t) - Ri(t)), \quad (3.16)$$

z kterých dostaneme stavovou realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Pro další účely budeme stavovou realizaci (3.17–3.18) označovat

$$\text{Model} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (3.19)$$

kde $u(t)$ je napětí na vinutí kotvy, $\theta(t)$ je úhel natočení hřídele a $\dot{\theta}(t)$ je úhlová rychlost hřídele motoru.

3.4 Jednodušší model

Jednodušší model vychází ze zjednodušeného modelování rovnováhy napětí v elektrické části a rovnováhy točivých momentů v mechanické části motoru.

V podkapitole 3.1 zanedbáme změnu napětí vlivem zpětné elektromotorické síly a změnu napětí vlivem indukčnosti vinutí motoru:

$$e_{\text{emf}}(t) = 0, \quad (3.20)$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) = 0. \quad (3.21)$$

V podkapitole 3.2 zanedbáme moment točení zátěže:

$$c_r(t) = 0. \quad (3.22)$$

Tím dostaneme soustavu rovnic

$$Ri(t) = u(t), \quad (3.23)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + b \omega(t) = c_m(t), \quad (3.24)$$

$$c_m(t) = K_t i(t), \quad (3.25)$$

z kterých prostým dosazováním dostaneme

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + b \omega(t) = K_t i(t) = K_t \frac{u(t)}{R}. \quad (3.26)$$

Porovnáním levé a pravé strany v (3.26) dostaneme

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + b \omega(t) = K_t \frac{u(t)}{R} \quad (3.27)$$

a použitím definice úhlové rychlosti

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (3.28)$$

dostaneme „Jednodušší model,“ který je popsán stavovou realizací

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{JR} \end{bmatrix} u(t), \quad (3.29)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Pro další účely budeme stavovou realizaci (3.29–3.30) označovat

$$\text{Jednodušší model} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (3.31)$$

kde

$$\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_t}{RJ}, \quad (3.32)$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{J}. \quad (3.33)$$

3.5 Nejjednodušší model

Nejjednodušší model vychází z maximálně zjednodušeného modelování rovnováhy napětí v elektrické části a rovnováhy točivých momentů v mechanické části motoru. Nejjednodušší model obecně popisuje objekt, který je reprezentovatelný dvojicí sériově zapojených integrátorů, např. [8], podkapitola 7.2, str. 453.

V podkapitole 3.1 zanedbáme změnu napětí vlivem zpětné elektromotorické síly a změnu napětí vlivem indukčnosti vinutí motoru:

$$e_{\text{emf}}(t) = 0, \quad (3.34)$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) = 0. \quad (3.35)$$

Totéž jsme učinili i v podkapitole 3.4 v případě „Jednoduššího modelu.“

V podkapitole 3.2 zanedbáme moment točení zátěže $c_r(t)$ a viskózní tření:

$$c_r(t) = 0, \quad (3.36)$$

$$b\omega(t) = 0. \quad (3.37)$$

Tím dostaneme soustavu rovnic

$$Ri(t) = u(t), \quad (3.38)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = c_m(t), \quad (3.39)$$

$$c_m(t) = K_t i(t), \quad (3.40)$$

z kterých prostým dosazováním dostaneme

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = K_t i(t) = K_t \frac{u(t)}{R}. \quad (3.41)$$

Porovnáním levé a pravé strany v (3.41) dostaneme

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = K_t \frac{u(t)}{R} \quad (3.42)$$

a použitím definice úhlové rychlosti

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (3.43)$$

dostaneme „Nejjednodušší model,“ který je popsán stavovou realizací

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{JR} \end{bmatrix} u(t), \quad (3.44)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Pro další účely budeme stavovou realizaci (3.44–3.45) označovat

$$\text{Nejjednodušší model} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_t}{JR} \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (3.46)$$

kde

$$\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_t}{RJ}. \quad (3.47)$$

Stavová realizace modelu (3.44–3.45) je znázorněna v podkapitole 4.1 na obr. 4.1.

3.6 Rozšířené modely

Jednodušší model, založený na rovnicích

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (3.48)$$

$$J\frac{d}{dt}\omega(t) = -b\omega(t) + \frac{K_t}{R}u(t), \quad (3.49)$$

můžeme v odůvodněných případech vylepšit přidáním vstupu

$$v(t) = e^{\alpha t}v_0, \quad (3.50)$$

kde konstantu α je třeba získat identifikací na konkrétní aplikaci motoru.

Protože $v(t) = e^{\alpha t}v_0$ je řešením diferenciální rovnice popisující autonomní systém

$$\frac{d}{dt}v(t) = \alpha v(t), \quad v(t_0) = v_0 \quad (3.51)$$

můžeme „Rozšířený model“ motoru,

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (3.52)$$

$$J\frac{d}{dt}\omega(t) = -b\omega(t) + \frac{K_t}{R}u(t) + v_0 e^{\alpha t}, \quad (3.53)$$

viz [6], Příklad 4.2, str. 66, přepsat jako

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (3.54)$$

$$J\frac{d}{dt}\omega(t) = -b\omega(t) + \frac{K_t}{R}u(t) + v(t), \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = \alpha v(t) \quad (3.56)$$

a tak se dostat k stavové realizaci „Rozšířeného modelu“ „Jednoduššího modelu“ motoru.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & 1/J \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_t/RJ \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ v(t_0) \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

„Rozšířenému modelu“ „Jednoduššího modelu“ můžeme říkat „Rozšířený jednodušší model“.

Obdobně můžeme postupovat v případě Modelu a Nejjednoduššího modelu, které jsou předmětem podkapitoly 3.3 a 3.5. Tím získáme

1. Rozšířený model
2. Rozšířený jednodušší model
3. Rozšířený nejjednodušší model

Kapitola 4

Model a servo

V této kapitole je popsáno jak k třem modelům motoru navrhnout servo k nastavení polohy hřídele. Postup je aplikovatelný i na další tři modely, které jsou odvozeny v předchozí kapitole společně s modely použitými v bezprostředně následujícím textu.

4.1 Nejjednodušší model

V úloze natočení hřídele stejnosměrného motoru můžeme motorem umístovaný systém v nejjednodušším případě modelovat rovnicí

$$\ddot{\theta}(t) = T(t), \quad (4.1)$$

kde $T(t)$ značí pohánějící točivý moment, např. [6], příklad 2.3, str. 20 a [6], příklad 9.1, str. 194, [8], příklad 6.8, str. 411. Nejjednodušší model obecně popisuje objekt, který je reprezentovatelný dvojicí sériově zapojených integrátorů, např. [8], podkapitola 7.2, str. 453.

Za zmínku stojí, že mezi další zajímavé úlohy, které se dají modelovat rovnicí (4.1), patří i geostacionární družice na oběžné dráze nebo řízený návrat z oběžné dráhy. V souvislosti se neubráníme citovat práci profesora Miloše Hoznauera [7], str. 60–61 přikládáme jako Přílohu 2.

Analýza stability modelu (4.1) je všeobecně známá a najdeme ji např. v [8], příklad 3.65, str. 143, kde spadá pod modely se stavovou realizací

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad (4.2)$$

která je charakterizovaná kořeny rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (4.3)$$

Modely (4.2) jsou asymptoticky stabilní pouze v tom případě, když koeficienty a_0 a a_1 jsou kladná čísla, tj. $a_0 > 0$ a $a_1 > 0$. Když jsou kořeny komplexně sdružená čísla násobnosti větší než jedna, tzn. když $a_1^2 = 4a_0$, je model (4.2) stabilní jen tehdy, když je asymptoticky stabilní. Pro $a_0 = a_1 = 0$ je model (4.2) nestabilní.

Z výše uvedené analýzy plyne, že pro stabilizaci (4.2) je klíčové, aby konstanta $\varkappa \in \mathbb{R}$ splňovala $\varkappa \neq 0$.

Detaily k „Nejjednoduššímu modelu“ motoru jsou v podkapitole 3.5. Ve stavovém prostoru má tento model realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \dot{\theta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kde $\theta(t)$ je úhel natočení hřídele, $u(t)$ je napětí připojené na kotvu stejnosměrného motoru a $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\varkappa > 0$ je konstanta, která je popsána v podkapitolách 3.4 a 3.5.

Požadovaná hodnota průběhu natočení v čase $\theta_r(t)$ je v této práci omezena na skokovou funkci ve tvaru

$$\theta_r(t) = \theta_r \mathbf{1}(t), \quad (4.6)$$

kde $\mathbf{1}(t)$ je jednotková skoková funkce

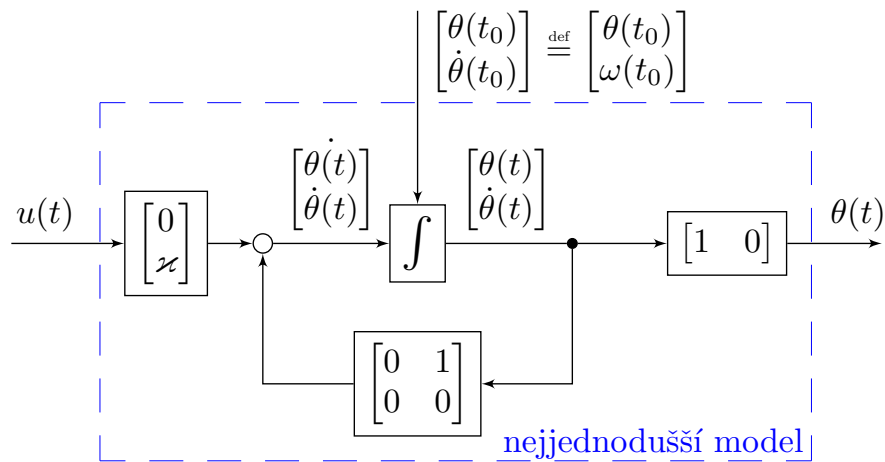
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

kde $\theta_r \in \mathbb{R}$ je konstanta charakterizující požadovanou hodnotu v ustáleném stavu $\theta_r(\infty) = \theta_r \mathbf{1}(\infty) = \theta_r$, která charakterizuje požadovanou hodnotu v ustáleném stavu jako

$$\begin{bmatrix} \theta_r(\infty) \\ \dot{\theta}_r(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

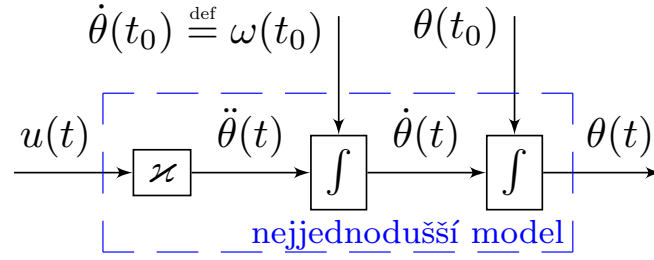
což není nulový stav. V striktním smyslu se tedy nejedná o úlohu regulátoru, ale o úlohu o servu.

Stavová realizace modelu je znázorněna na obr. 4.1, který je možno v detailu pře-



Obr. 4.1: Nejjednodušší model motoru, maticově.

kreslit jako obr. 4.2.



Obr. 4.2: Nejjednodušší model motoru.

Model obsahuje sériové spojení dvou (ideálních) integrátorů. Protože přítomnost již jednoho takového integrátoru signalizuje schopnost generovat předepsanou třídu signálů (4.6), můžeme použít princip vnitřního modelu, viz podkapitola 2.2.

Schopnost generovat $\theta_r(t) = \theta_r \mathbf{1}(t)$ je patrně nejlépe zřejmá analýzou ve frekvenční oblasti, kde Laplaceův obraz skokové funkce $\theta_r(t)$ je

$$\mathcal{L}\{\theta_r(t)\} = \frac{\theta_r}{s} \quad (4.9)$$

a Laplaceův obraz stavové realizace integrátoru s nulovou počáteční podmínkou, tj. přenosová funkce integrátoru, je

$$\mathcal{L}\left\{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right\} = \frac{1}{s}, \quad (4.10)$$

kde symbolem $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$ značíme stavovou realizaci

$$\frac{d}{dt}x(t) = 0x(t) + 1u(t), \quad (4.11)$$

$$y(t) = 1x(t), \quad (4.12)$$

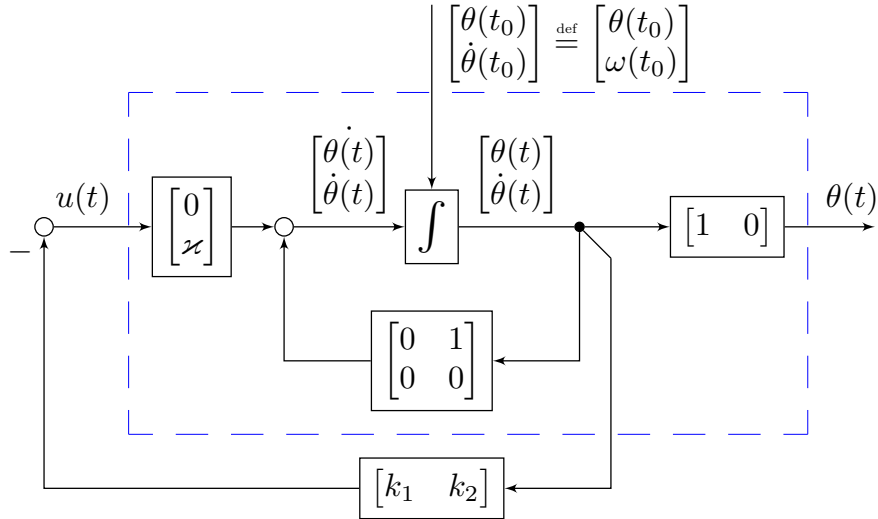
jakožto i všechny ekvivalentní stavové realizace získané transformací stavu, tj.

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = 0\bar{x}(t) + \mathbf{T}^{-1}u(t), \quad (4.13)$$

$$y(t) = \mathbf{T}\bar{x}(t), \quad (4.14)$$

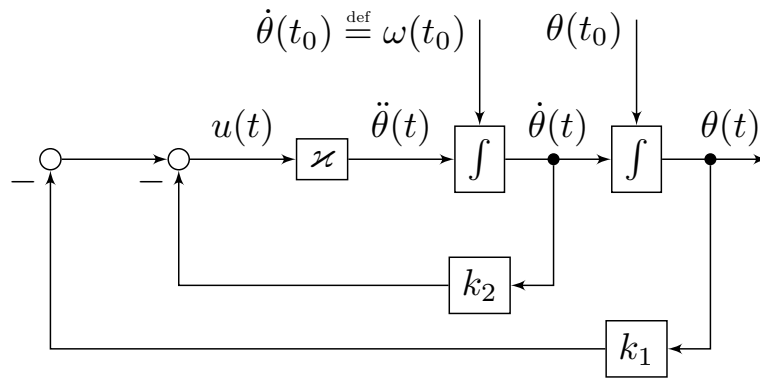
kde matice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ je matice transformace stavového prostoru, tj. $\det \mathbf{T} \neq 0$ a $\bar{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}x(t)$. Pro stavový prostor dimenze 1 je \mathbf{T} skalár $T \neq 0$.

Úlohu o regulátoru, tj. stanovení $[k_1 \ k_2]$ tak, aby autonomní systém na obr. 4.3 byl asymptoticky stabilní,



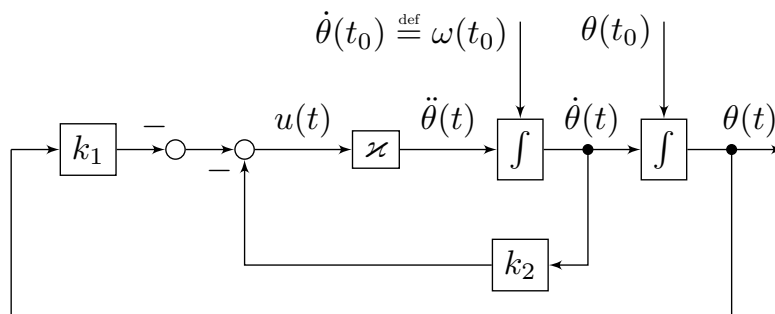
Obr. 4.3: Úloha o regulátoru, nejjednodušší model, maticově.

je úlohou stanovení $[k_1 \ k_2]$ v obr. 4.4, který je jednodušší.



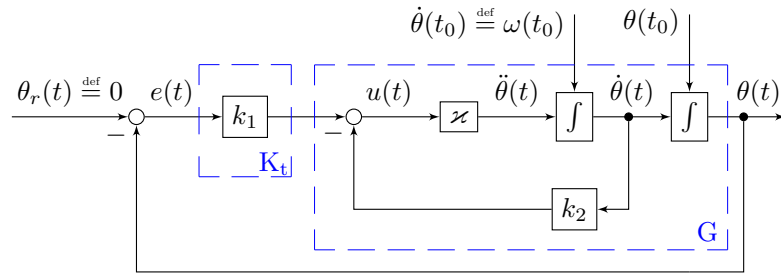
Obr. 4.4: Úloha o regulátoru, nejjednodušší model.
Zpětná vazba od stavu $[\theta(t) \ \omega(t)]^T$.

Obr. 4.4 můžeme překreslit do podoby obr. 4.5, na kterou se můžeme dívat jako na úlohu o servu, když na obr. 2 v Úvodu nahlížíme jako na obr. 2.1 v kapitole 2,



Obr. 4.5: Úloha o regulátoru, nejjednodušší model, příprava na úlohu o servu.

na který můžeme nahlížet jako na obr. 4.6.



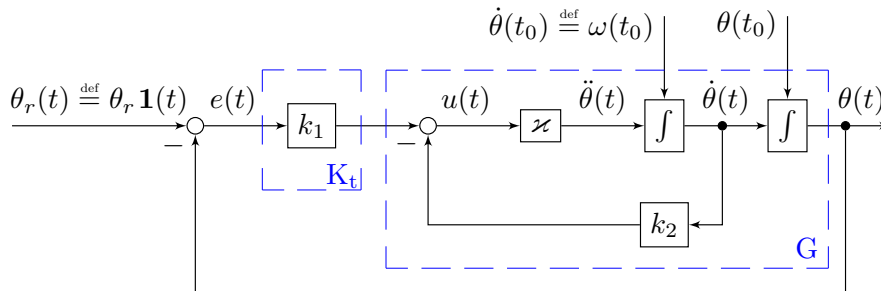
Obr. 4.6: Úloha o regulátoru jako úloha o servu, nejjednodušší model.

Z povahy lineárního prostoru, principu superpozice, posunutí bodu stavového prostoru,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

apod. a z faktu, že G na obr. 4.6 a následně na obr. 4.7 dokáže generovat signály typu $\theta_r(t) = \theta_r \mathbf{1}(t)$, plyne, že $\theta_r(t)$ v kombinaci s modelem je sice úloha o servu jako na obr. 2.1, ale že tuto úlohu o servu můžeme řešit pomocí úlohy o regulátoru jako je na obr. 2 v Úvodu.

Úloha o servu je na obr. 4.7,



Obr. 4.7: Úloha o servu, nejjednodušší model.

zatímco jí příslušející úloha o regulátoru je na obr. 4.3.

Pro úplnost je dobré si všimnout, že stavová zpětná vazba na obr. 4.4,

$$u(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

vede v úloze o regulátoru na autonomní systém

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\zeta k_1 & -\zeta k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \dot{\theta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

První rovnice v (4.17) je triviální $\frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\theta}(t)$. Druhá rovnice v (4.17) je

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -\varkappa k_1\theta(t) - \varkappa k_2\dot{\theta}(t) \quad (4.19)$$

a dá se přehledněji zapsat jako

$$\ddot{\theta}(t) + \varkappa k_2\dot{\theta}(t) + \varkappa k_1\theta(t) = 0. \quad (4.20)$$

Výsledek simulace je prezentován v kapitole 5.

4.2 Jednodušší model

Model motorem umístovaného systému, který je složitější než nejjednodušší model, viz podkapitola 4.1, vychází z rovnice

$$\ddot{\theta}(t) + \alpha\dot{\theta}(t) = T(t), \quad (4.21)$$

kde $T(t)$ značí pohánějící točivý moment a $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ je konstanta zohledňující viskózní tření, např. [6], příklad 2.3, str. 20 a [6], příklad 9.1, str. 194. Na rozdíl od modelu v podkapitole 4.1 uvažuje model (4.21) prostředí s viskózním třením.

Detaily k „Jednoduššímu modelu“ motoru jsou v podkapitole 3.4. Ve stavovém prostoru má model (4.21) realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \dot{\theta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

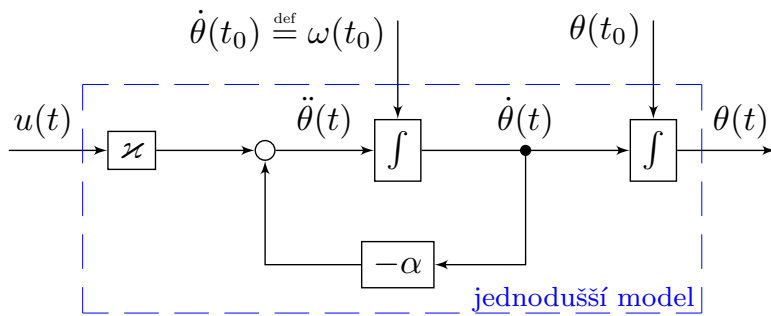
kde $\theta(t)$ je úhel natočení hřídele, $u(t)$ je napětí připojené na kotvu stejnosměrného motoru a $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\varkappa > 0$ je konstanta a $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ je konstanta zohledňující viskózní tření v motorem umístovaném systému. Konstanty jsou popsány v podkapitolách 3.4 a 3.5.

Stejně jako v podkapitole 4.1 a celé práci je $\theta_r(t)$, požadovaná hodnota průběhu natočení v čase, definována jako

$$\theta_r(t) = \theta_r \mathbf{1}(t), \quad (4.24)$$

kde $\mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok. Detaily viz. podkapitola 4.1.

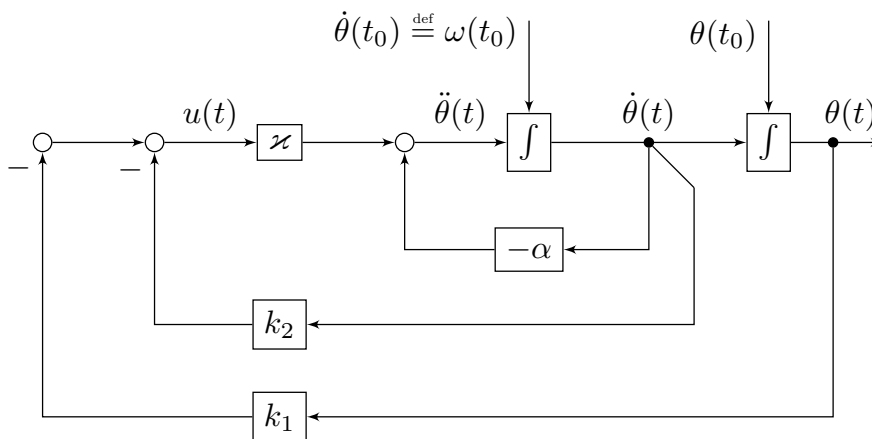
Obr. 4.2 v podkapitole 4.1 odpovídá obr. 4.8.



Obr. 4.8: Jednodušší model motoru.

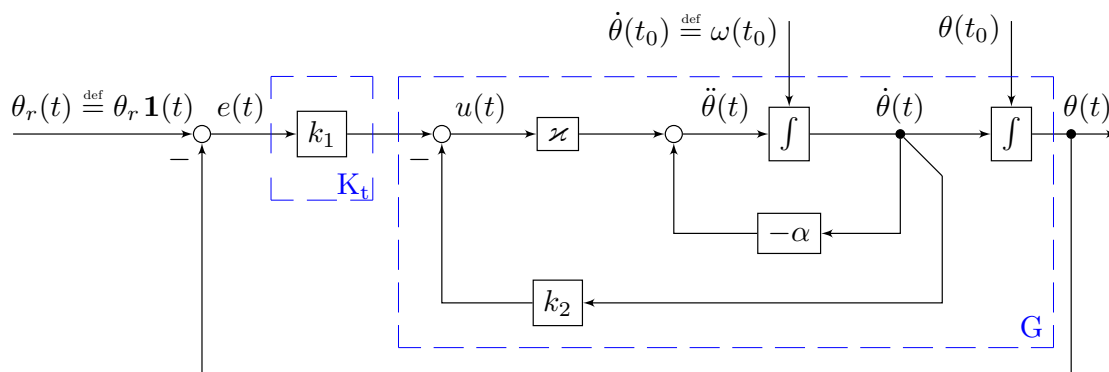
Je patrné, že model obsahuje integrátor a proto můžeme dále pokračovat jak je popsáno v podkapitole 4.1.

Analogie obrázku k úloze o regulátoru je na obr. 4.9, který koresponduje s obr. 4.4.



Obr. 4.9: Úloha o regulátoru, jednodušší model.
Zpětná vazba od stavu $[\theta(t) \ \omega(t)]^T$.

Analogicky pokračujeme k obr. 4.10, který koresponduje s obr. 4.7.



Obr. 4.10: Úloha o servu, jednodušší model.

Úloha o regulátoru vede na autonomní systém

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varkappa k_1 & -\alpha - \varkappa k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Stejně jako v podkapitole 4.1 je první rovnice v (4.25) triviální. Druhá rovnice v (4.25) je

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\varkappa k_1 \theta(t) - (\alpha + \varkappa k_2) \dot{\theta}(t), \quad (4.27)$$

což dává rovnici

$$\ddot{\theta}(t) + (\alpha + \varkappa k_2) \dot{\theta}(t) + \varkappa k_1 \theta(t) = 0, \quad (4.28)$$

která koresponduje s rovnicí (4.20) v podkapitole 4.1.

Výsledek simulace je prezentován v kapitole 5.

4.3 Model

Model motorem umístovaného systému, který je složitější než jsou nejjednodušší model v podkapitole 4.1 a jednodušší model v podkapitole 4.2, je model zohledňující indukčnost vinutí kotvy. Tento model vychází z rovnic popsanych v podkapitolách 3.1 a 3.2 a ve stavovém prostoru má realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

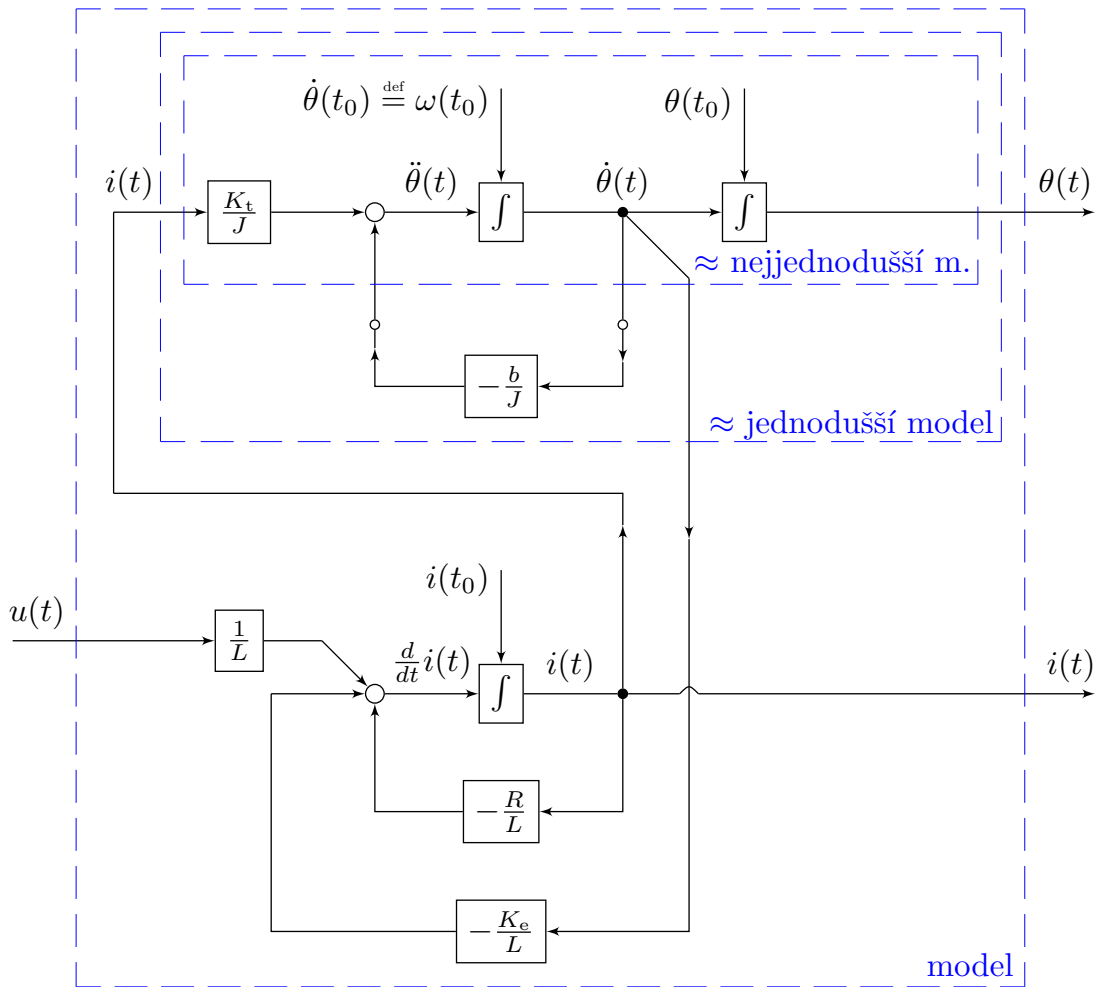
kde $\theta(t)$ a $\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}(t)$ jsou úhel natočení a úhlová rychlost hřídele, $i(t)$ je proud probíhající kotvou a $u(t)$ je napětí připojené na kotvu stejnosměrného motoru. Konstanty b , J , K_t , K_e , R a L jsou kladná reálná čísla. Tyto konstanty jsou blíže specifikovány v podkapitolách 3.1 a 3.2. Jejich hodnoty pro konkrétní motor, který je předmětem simulací v této práci, jsou převzaty z přílohy 1 a uvedeny v tab. 5.1 na straně str. 58.

Stejně jako v podkapitolách 4.1 a 4.2 a celé práci je $\theta_r(t)$, požadovaná hodnota průběhu natočení v čase, definována jako

$$\theta_r(t) = \theta_r \mathbf{1}(t), \quad (4.31)$$

kde $\mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok. Detaily viz. podkapitola 4.1.

Obr. 4.2 v podkapitole 4.1 a obr. 4.8 v podkapitole 4.2 odpovídá obr. 4.11.



Obr. 4.11: Model ve stavovém prostoru $\mathbf{x}(t) = [\theta(t) \ \omega(t) \ i(t)]^T$.

Na obr. 4.11 je naznačen také vztah k nejjednoduššímu a jednoduššímu modelu v podkapitolách 4.1 a 4.2. Znaménko \approx před označením příslušného modelu znamená, že u vztahu se nejedná o identitu. Chceme-li analyzovat přesný vztah modelů v podkapitolách 4.1 a 4.2 k modelu na obr. 4.11, musíme napřed na modelu (4.29–4.30) provést stavovou transformaci.

Postupem dokumentovaným v podkapitole 3.4 a 3.5 dostáváme, že

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_t}{JR}, \quad (4.32)$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{J} \quad (4.33)$$

Výše zmiňovaná stavová transformace $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t)$ převede model (4.29–4.30) ze stavového prostoru $\mathbf{x}(t) = [\theta(t) \ \omega(t) \ i(t)]^T$ do stavového prostoru $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\theta(t)/R \ \omega(t) \ Ri(t)]^T$, kde $\mathbf{T} = \text{diag}(R, 1, 1/R)$, kde $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ je ohmický odpor vinutí kotvy.

Fyzikální význam stavové veličiny $Ri(t)$ je tedy ohmický úbytek napětí průtokem proudu $i(t)$ kotvou stejnosměrného motoru. Veličina $\omega(t)$ zůstává, a je to úhlová rychlost otáčení hřídele. Veličina $\theta(t)/R$ nemá běžně používaný fyzikální význam a jedná se o úhel otočení přepočítaný na odpor vinutí kotvy.

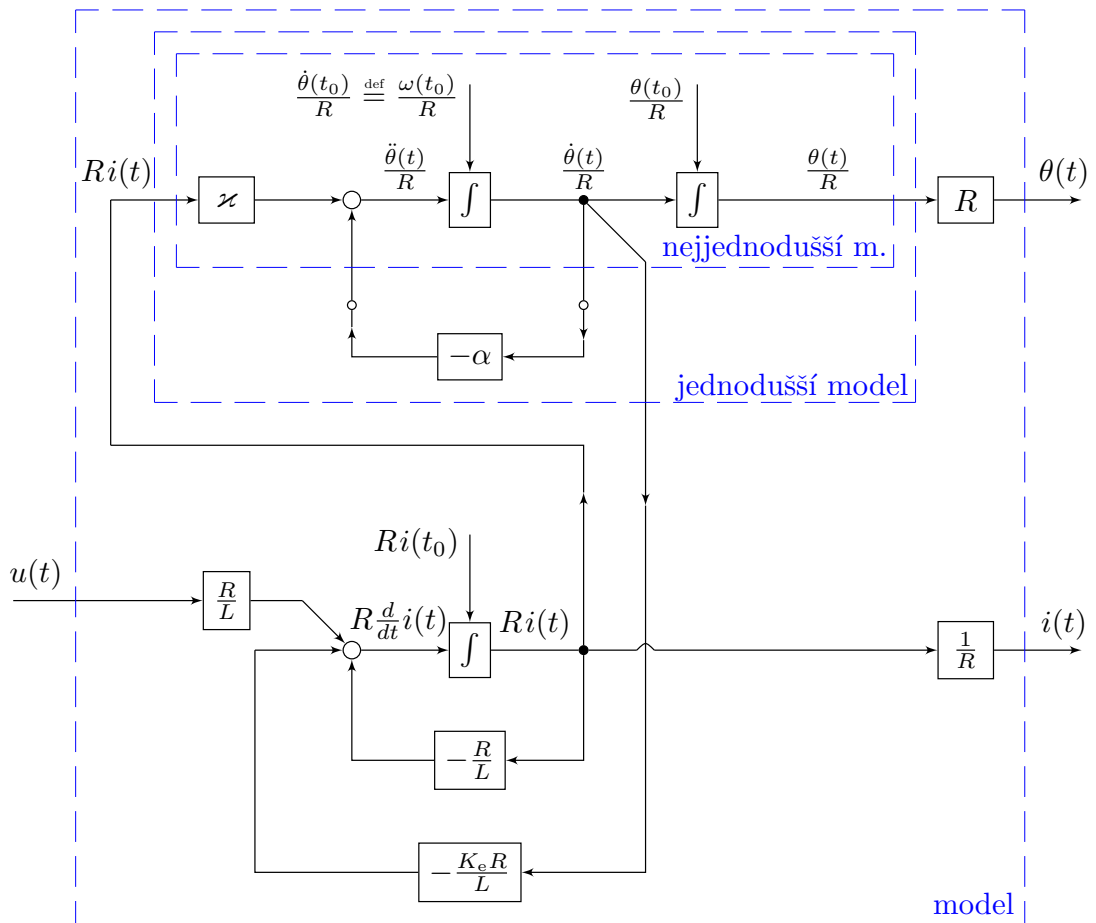
Model (4.29–4.30) má ve stavovém prostoru $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\theta(t)/R \ \omega(t) \ Ri(t)]^T$ ekvivalentní realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t)/R \\ \omega(t) \\ Ri(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/RJ \\ 0 & -K_e R/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t)/R \\ \omega(t) \\ Ri(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R/L \end{bmatrix} u(t), \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t)/R \\ \omega(t) \\ Ri(t) \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t_0)/R \\ \omega(t_0) \\ Ri(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0/R \\ \omega_0 \\ Ri_0 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

která je znázorněna na obr. 4.12.



Obr. 4.12: Model ve stavovém prostoru $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\theta(t)/R \ \omega(t) \ Ri(t)]^T$.

Obr. 4.12 slouží výlučně k analýze vztahu mezi nejjednodušším a jednodušším modelem (4.4–4.5) a (4.22–4.23) na jedné straně a modelem (4.29–4.30) na straně druhé. Z hlediska popisu fyzikální reality je nejpodstatnější rozdíl v modelování změny napětí na kotvě stejnosměrného motoru, kde u modelů (4.4–4.5) a (4.22–4.23) je kotva uvažována jako ideální ohmický odpor, kdežto u modelu (4.29–4.30) je uvažován také vliv indukčnosti kotvy L , kde změny napětí na kotvě způsobené výlučně indukčností jsou modelovány vztahem

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t). \quad (4.37)$$

U modelu (4.29–4.30) tedy kromě úbytku napětí vlivem ohmického odporu

$$u_R(t) = R i(t) \quad (4.38)$$

uvažujeme ještě změny napětí způsobené proudem protékajícím kotvou jako induktorem. Detaily jsou v podkapitole 3.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

kde jsme definovali a k stavové realizaci (4.29–4.30) přidali rovnici

$$\dot{\xi}(t) = -\theta(t) \quad (4.41)$$

Účelem přidání (augmentace) rovnice (4.41) je zajistit, aby dynamický systém tvořený sériovým spojením přímovazební části kompenzátoru a stavými zpětnými vazbami od stavové realizace (4.34–4.35–4.36) byl schopen generovat signály typu jednotkový skok.

Augmentace v našem konkrétním případě znamená, že ke skokům modelu (4.34–4.35–4.36) přidáme další stav, tj. augmentovaný stav $\xi(t)$, který prostřednictvím řešení úlohy o regulátoru augmentovaného systému bude po zapojení příslušných stavových zesílení splňovat $\xi(\infty) = 0$ prostřednictvím intrinsické vlastnosti úlohy o regulátoru, která spočívá v návratu systému do počátku stavového prostoru, tj.

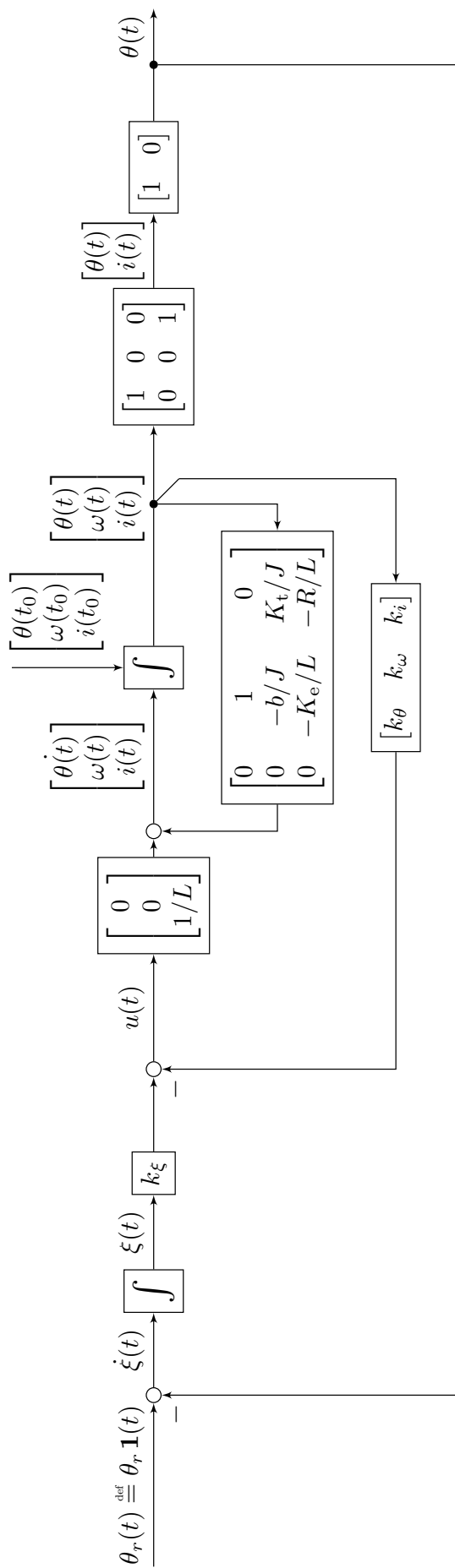
$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{úloha o regulátoru}} \begin{bmatrix} \theta(\infty) \\ \omega(\infty) \\ i(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Požadované $\theta(t)$ z vektorového výstupního signálu $[\theta(t) \ i(t)]^T$ získáme z rovnice

$$\theta(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

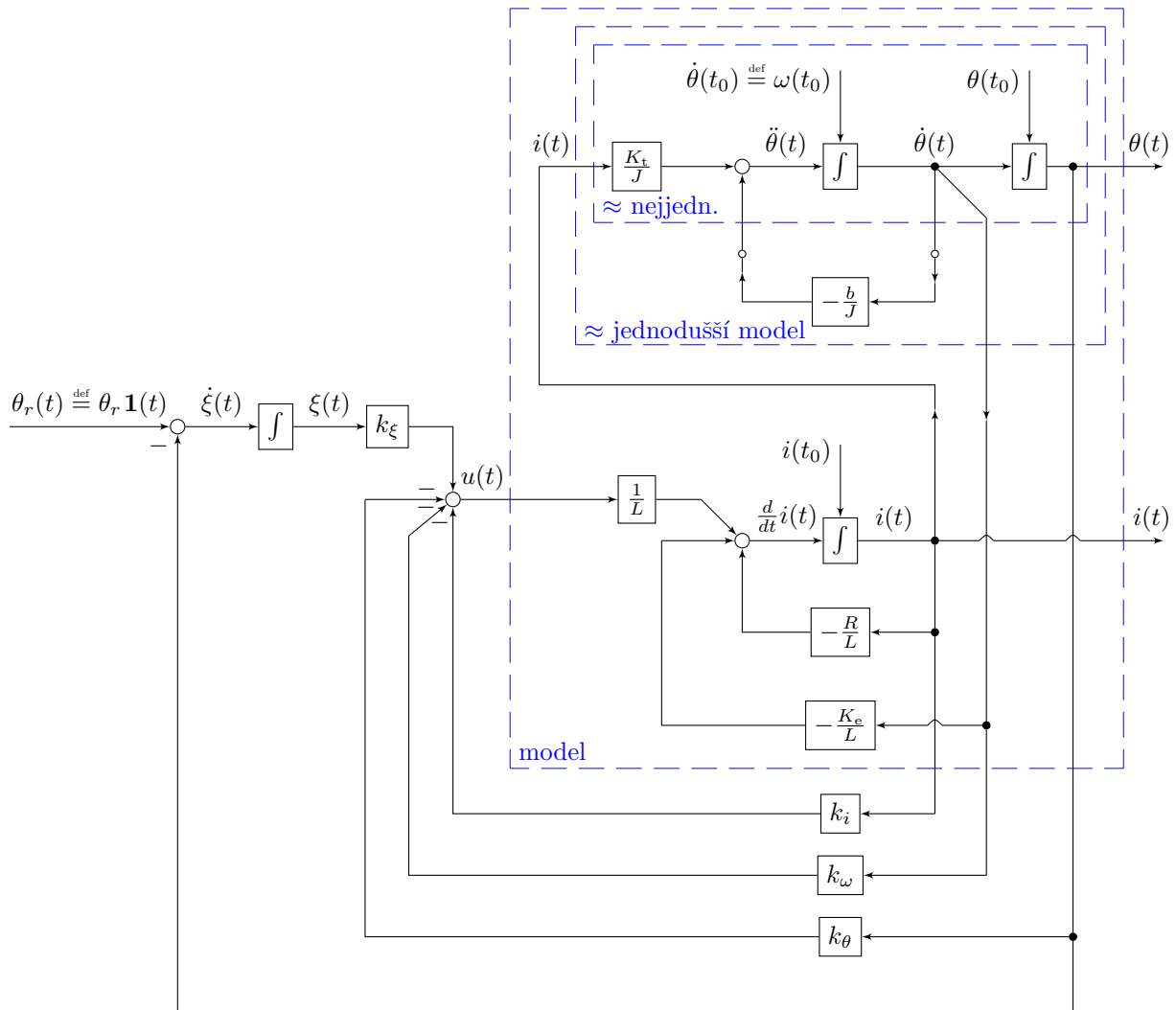
To znamená, že před zapojením jednotkové zpětné vazby servořízení, musí být za blokem výstupní matice modelu (4.29–4.30) sériově zapojen blok $[1 \ 0]$, jak je znázorněno na obr. 2.1.

Servořízení je maticově znázorněné na obr. 4.13.



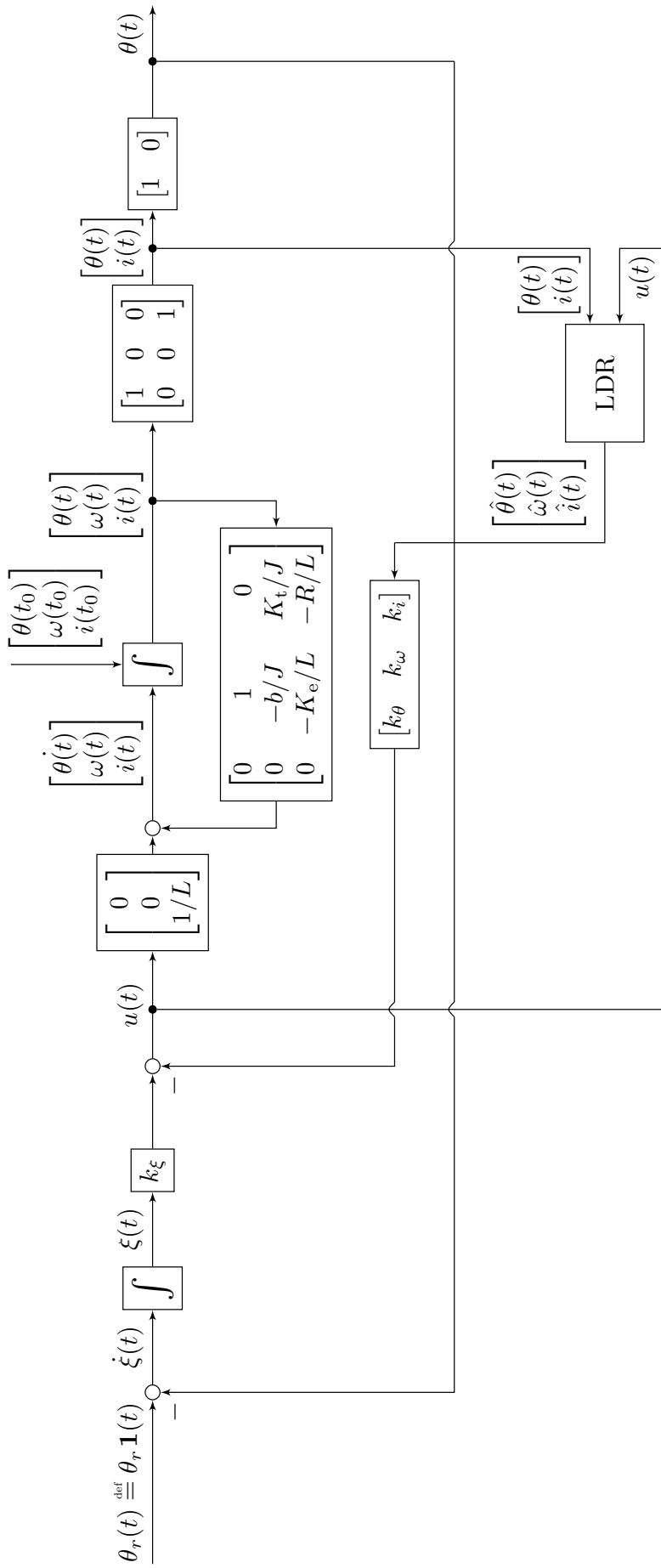
Obr. 4.13: Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu. Maticově.

Na obr.4.14 je detailně popsané zapojení servořízení v případě, že stav modelu motoru je k dispozici na motoru, který tímto modelem reprezentujeme.



Obr. 4.14: Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu.

Na obr. 4.15 je maticově popsané zapojení servořízení v případě, že stav modelu motoru k dispozici není a proto je tento stav třeba rekonstruovat pomocí Luenbergerova pozorovatele – Luenbergerovy dynamické rekonstrukce stavu – LDR.



Obr. 4.15: Úloha o regulátoru augmentovaného modelu jako úloha o servu. Maticově. Odhad stavu Luenbergerovým pozorovatelem – LDR.

Kapitola 5

Implementace a simulace

Implementace návrhu řídicího systému (serva) pro nastavení úhlu natočení hřídele i simulace tohoto systému jsou provedeny v profesionálním prostředí od korporace The MathWorks, Inc., U.S.A.

Návrh zákona řízení používá balík programů Control System Toolbox, [10]. Makro $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ je použito pro výpočet zesílení v úloze o regulátoru, která je vhodně přeformulovaná jako úloha o servu. Toto makro vrací $[K, S, E]$, kde K je zesílení stavové zpětné vazby, S je řešení příslušné ARE (algebraické Riccati rovnice) a E jsou vlastní čísla matice systému po uzavření smyčky stavové zpětné vazby. Vstupní parametry (A, B, Q, R) jsou: A matice systému a B matice řízení v stavové realizaci $\dot{x} = Ax + Bu$, Q váhová matice stavové proměnné x a R váhová matice vstupní proměnné u , když minimalizujeme hodnotu kvadratického kritéria

$$J(x(t_0), u(t)) = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (5.1)$$

vzhledem k omezení, že $\mathbf{x}(t)$ splňující (5.1) je jednoznačné řešení stavové realizace $\dot{x} = Ax + Bu$ z libovolné ale pevně dané počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0)$, viz Úvod.

5.1 Parametry stejnosměrného motoru

Simulace budeme provádět pro C23-L33W20 od firmy Moog. Jedná se o kartáčový stejnosměrný motor s permanentními magnety. Parametry tohoto motoru jsou podle katalogu [9] uvedeny v tab. 5.1 na straně str. 58.

model motoru pro
návrh

váhová matice stavu Q
váhová matice vstupu R

model simulující
motor

póly modelu motoru

póly úlohou o regulátoru
(póly smyčky)

odezva simulujícího modelu na počáteční podmínky – plná černá,
rekonstruovaný stav motoru (LDR) – čárkovaná červená

přechodová charakteristika simulujícího modelu – plná černá,
přechodová charakteristika modelu pro návrh – čárkovaná červená
(shoda simulujícího a pro návrh modelů \rightarrow jedna charakteristika)

simulinkové schéma servořízení s rekonstrukcí stavu (LDR)

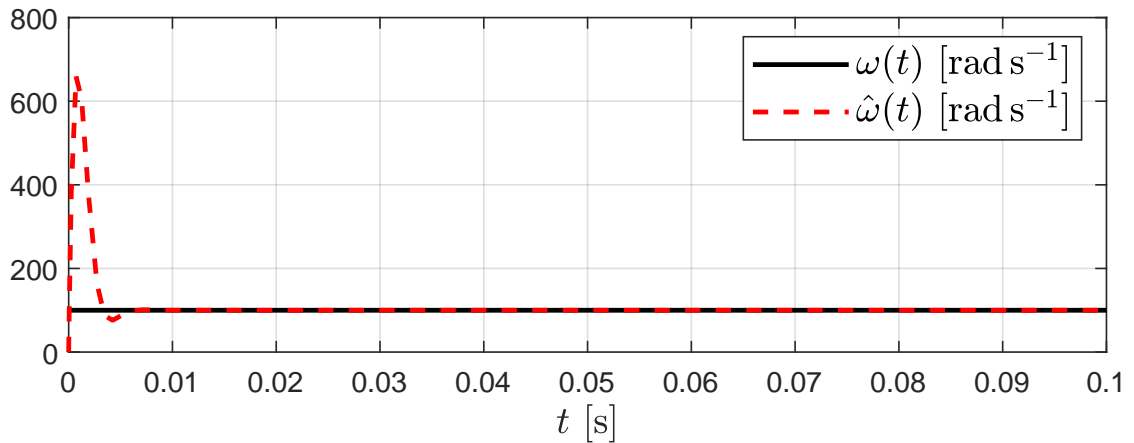
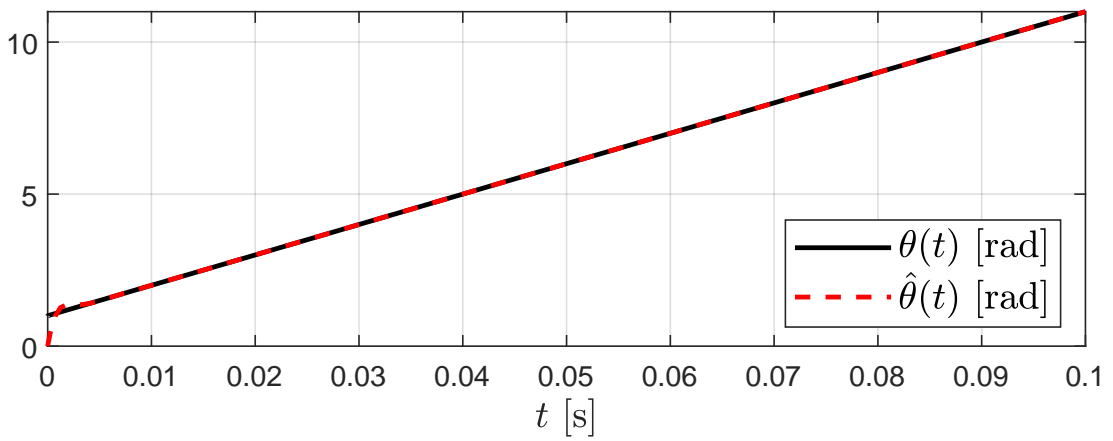
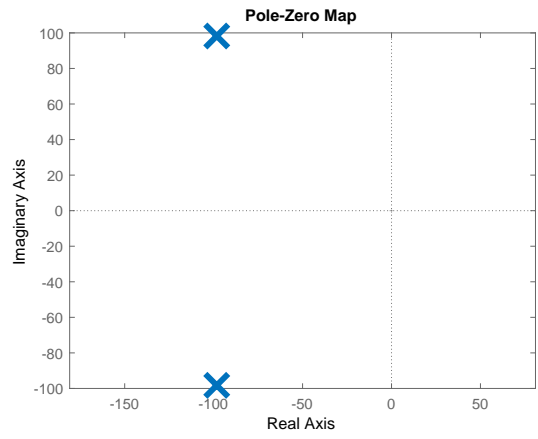
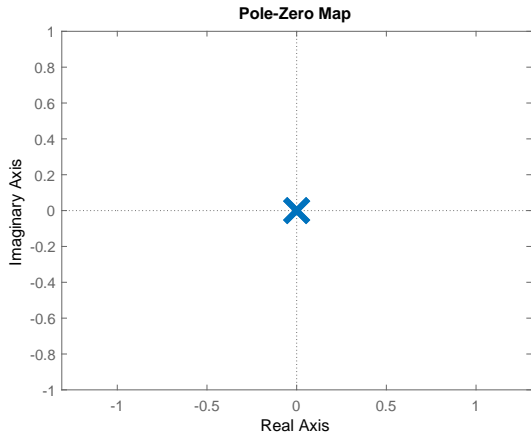
odezva serva s LDR na žádanou hodnotu $\theta_r \mathbf{1}(t)$
 $\theta_r \mathbf{1}(t)$ – čárkovaná červená

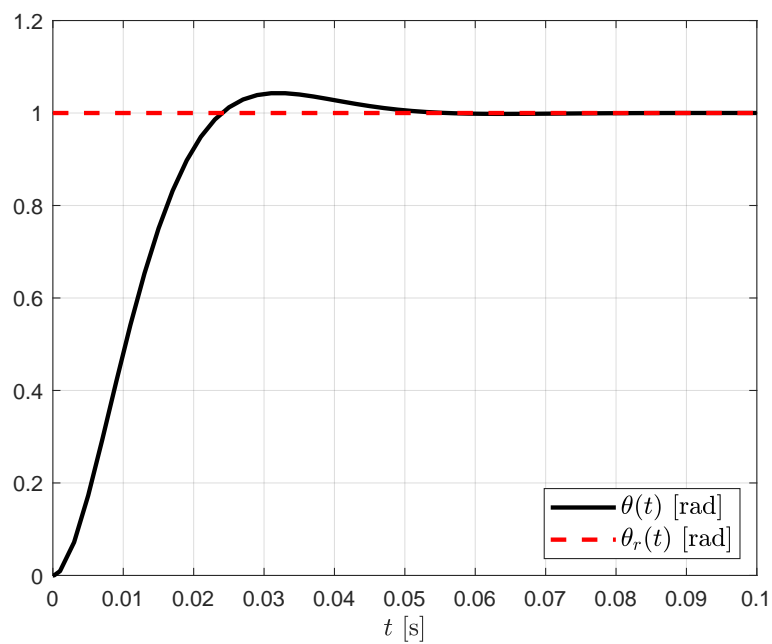
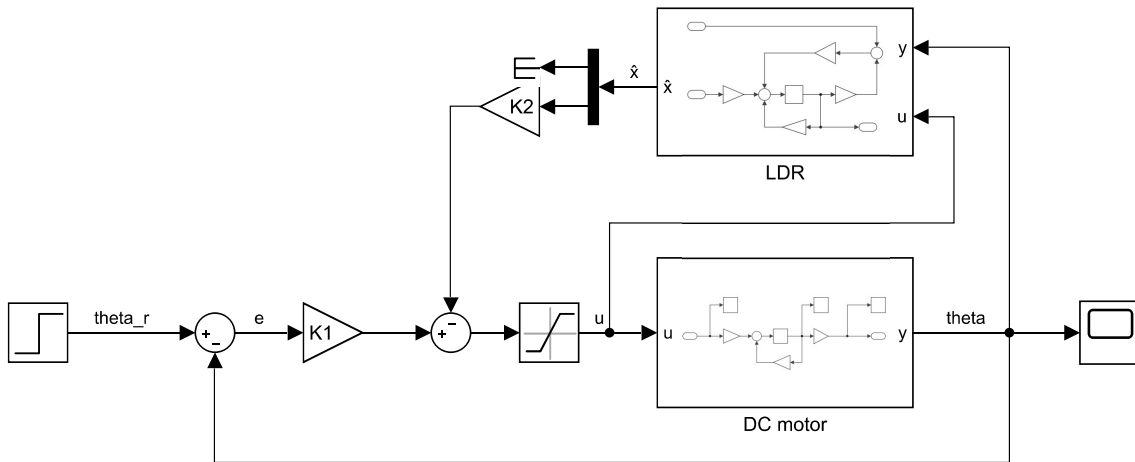
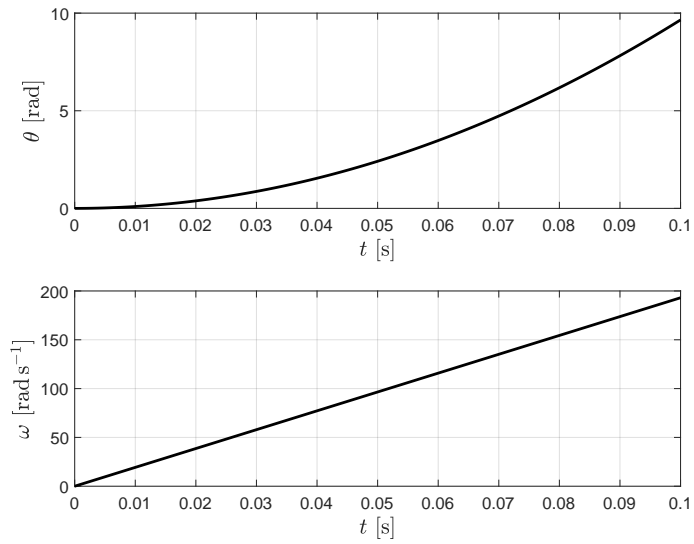
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Q = \text{diag}(100, 0)$$

$$R = 1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



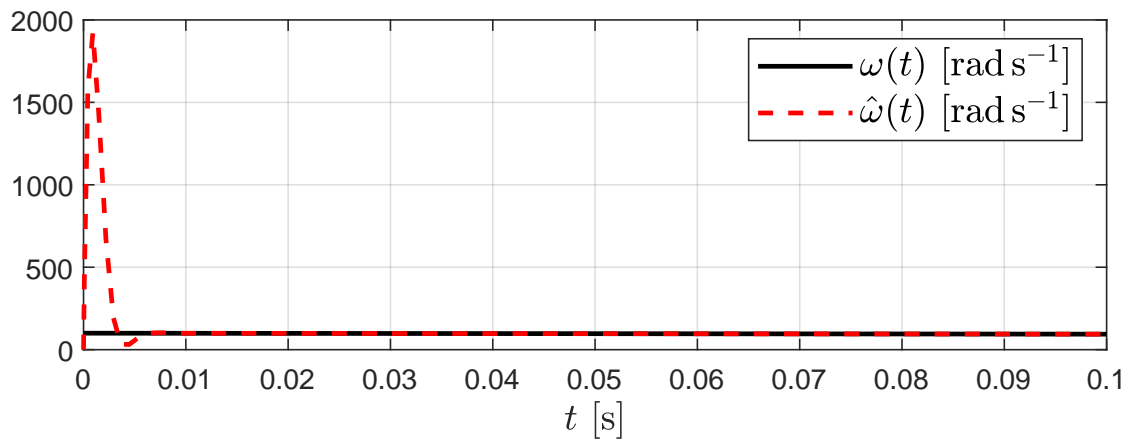
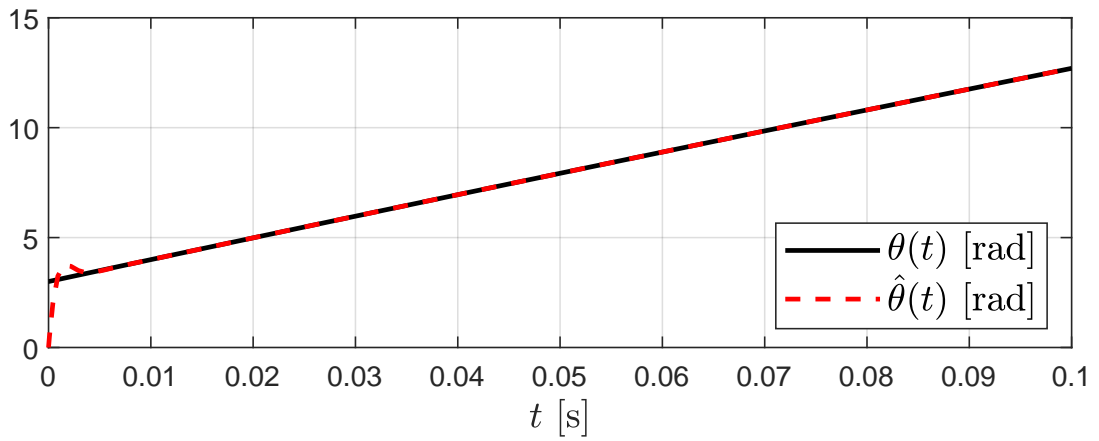
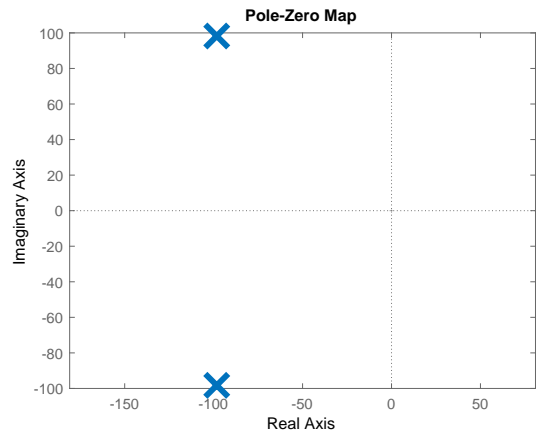
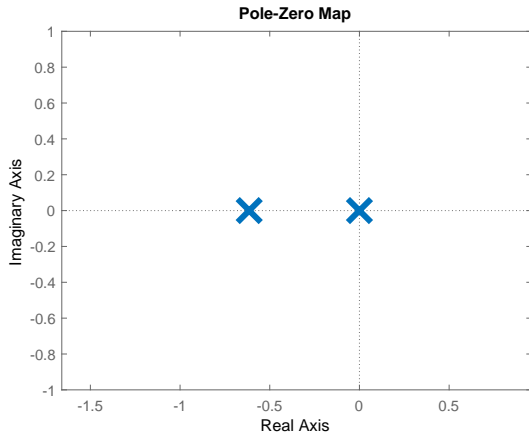


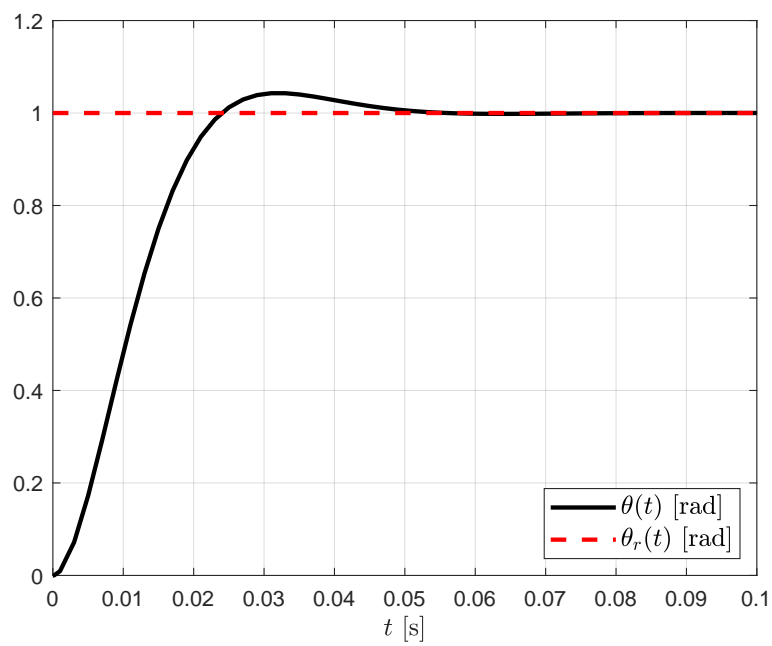
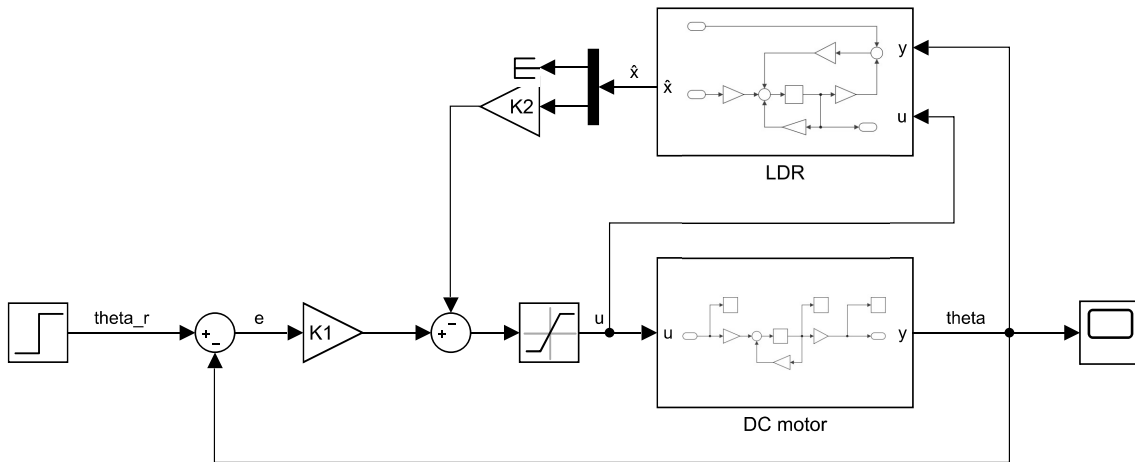
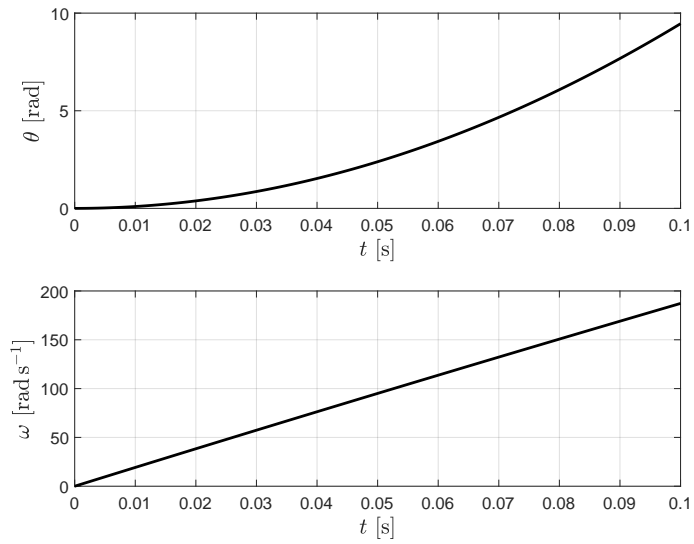
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Q = \text{diag}(100, 0)$$

$$R = 1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



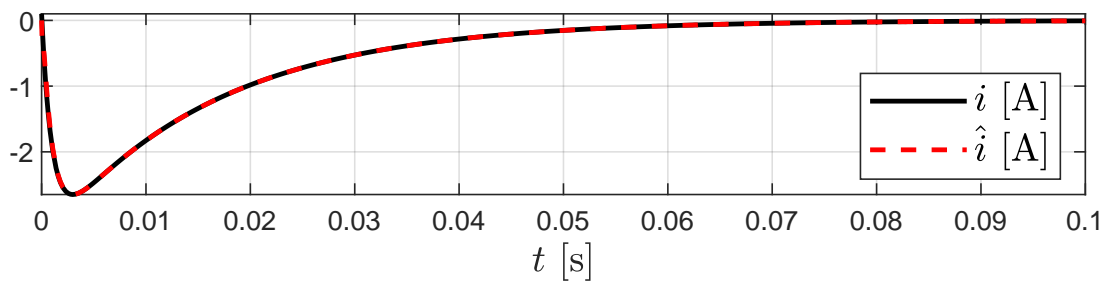
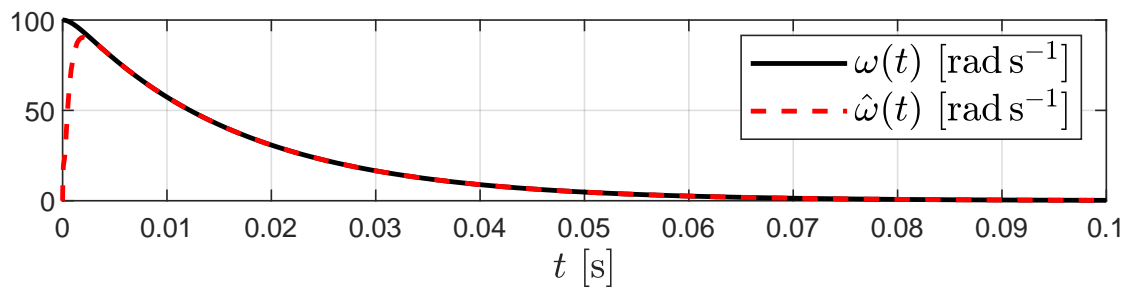
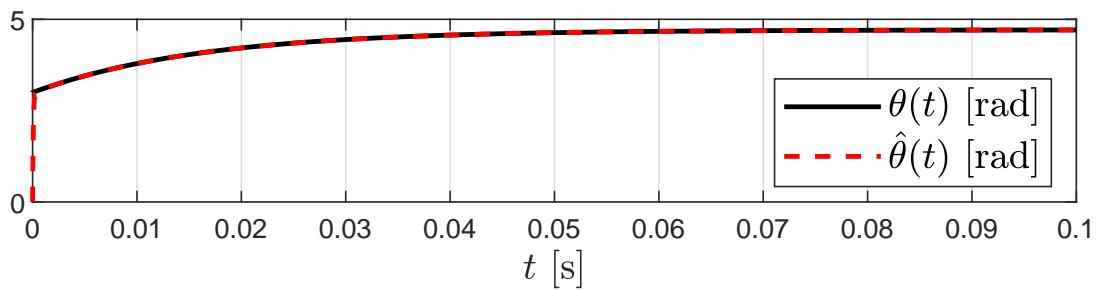
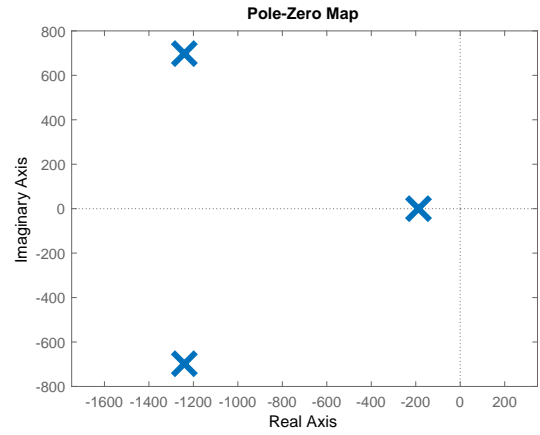
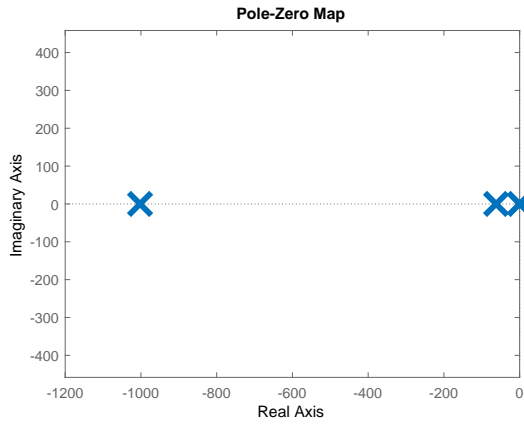


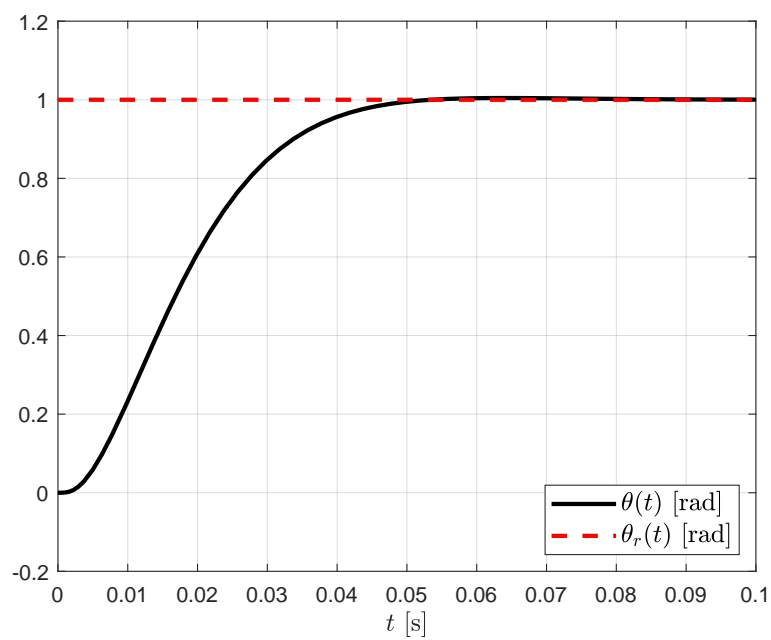
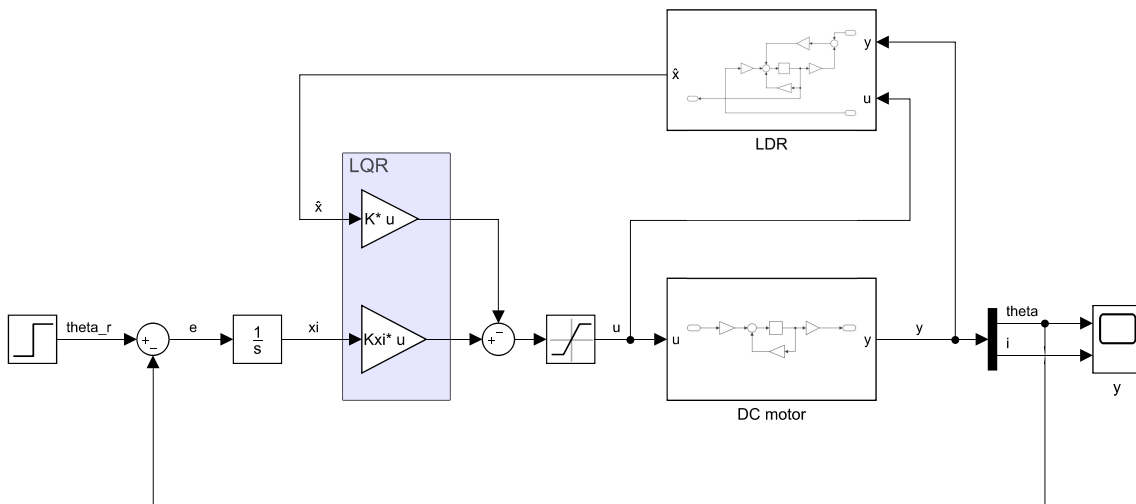
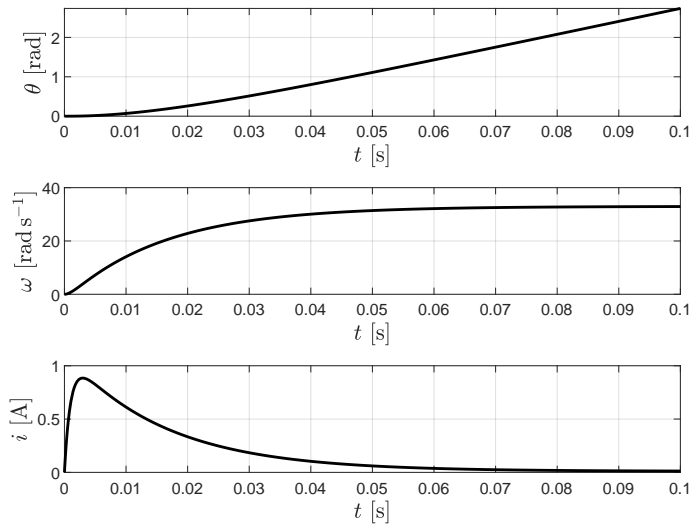
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_i/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$Q = \text{diag}(1000, 1, 1, 100\,000\,000)$$

$$R = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_i/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$



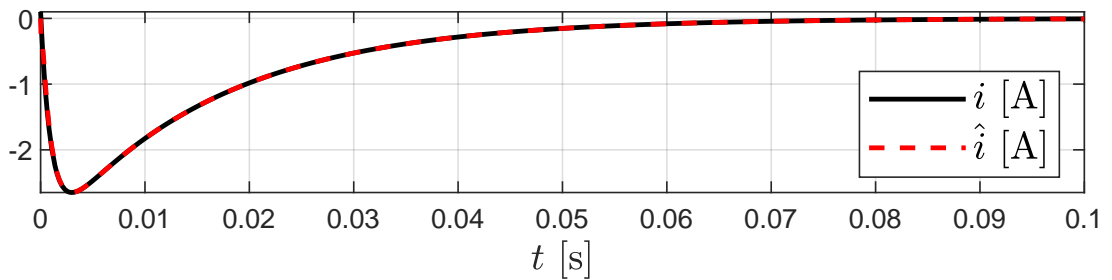
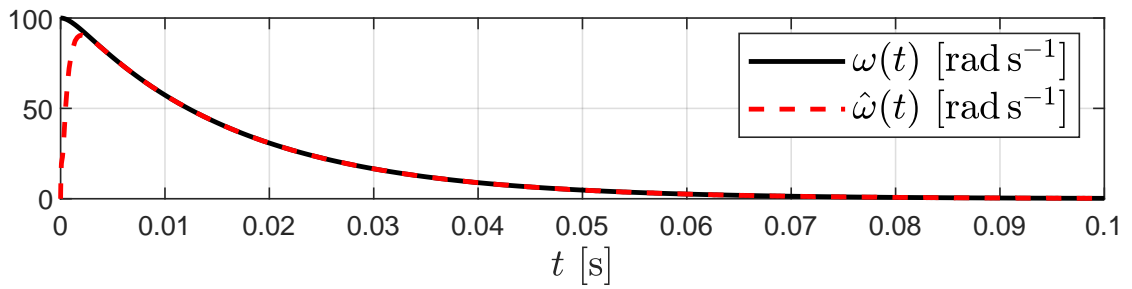
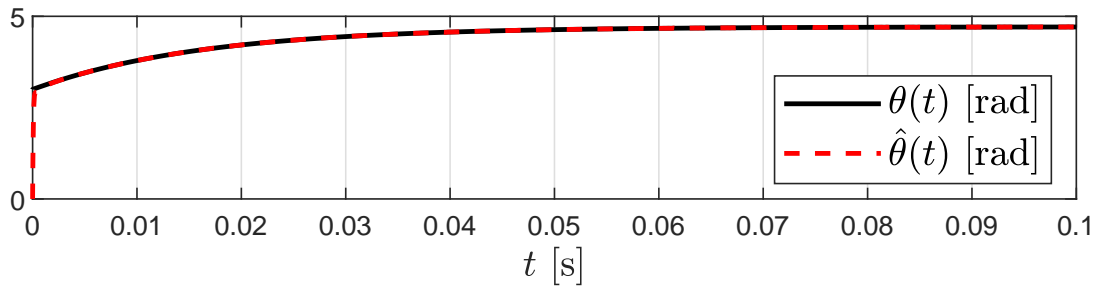
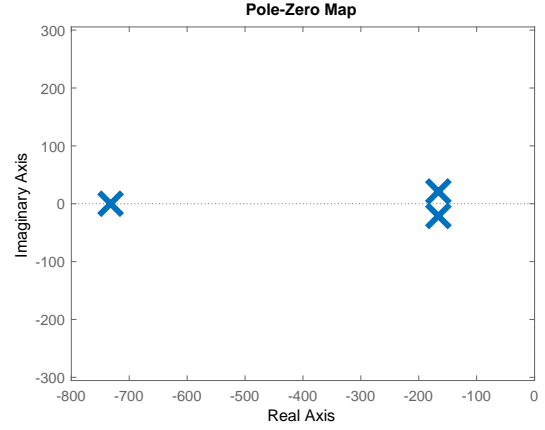
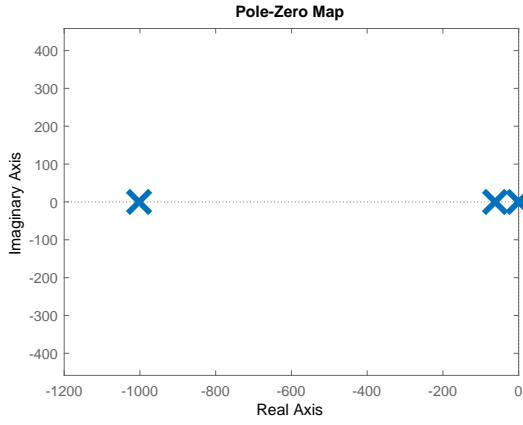


$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Q = \text{diag}(100, 0)$$

$$R = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_i/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

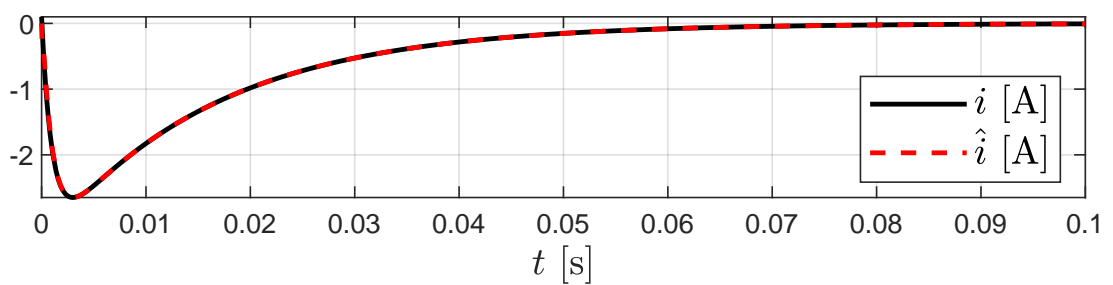
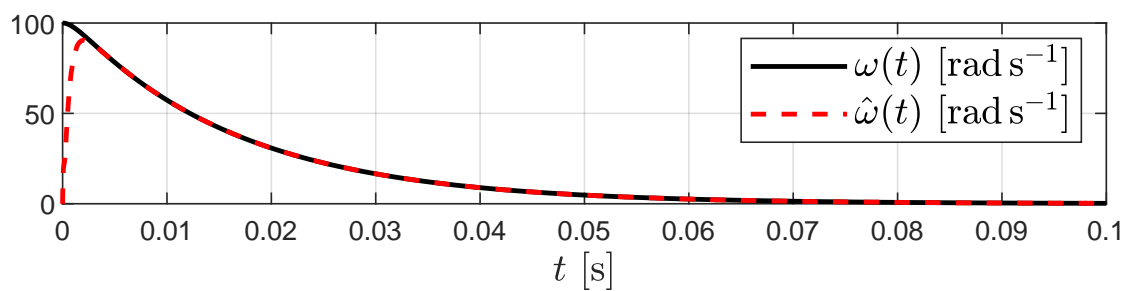
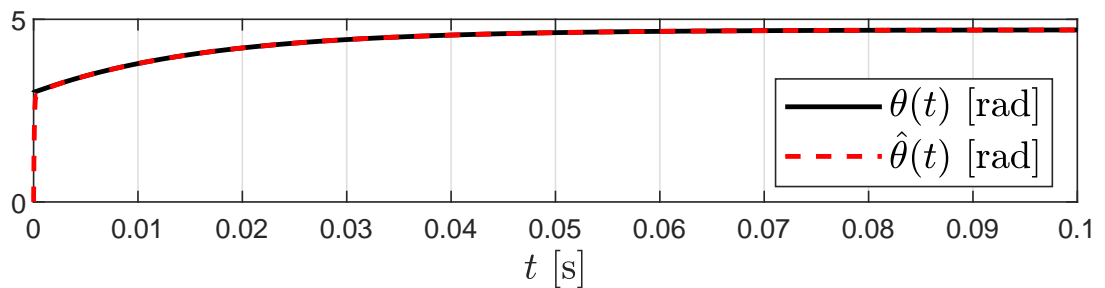
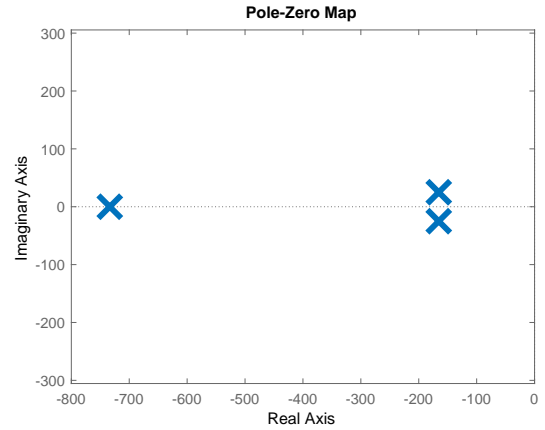
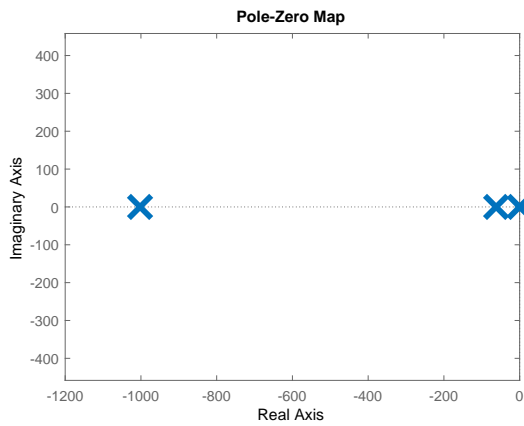


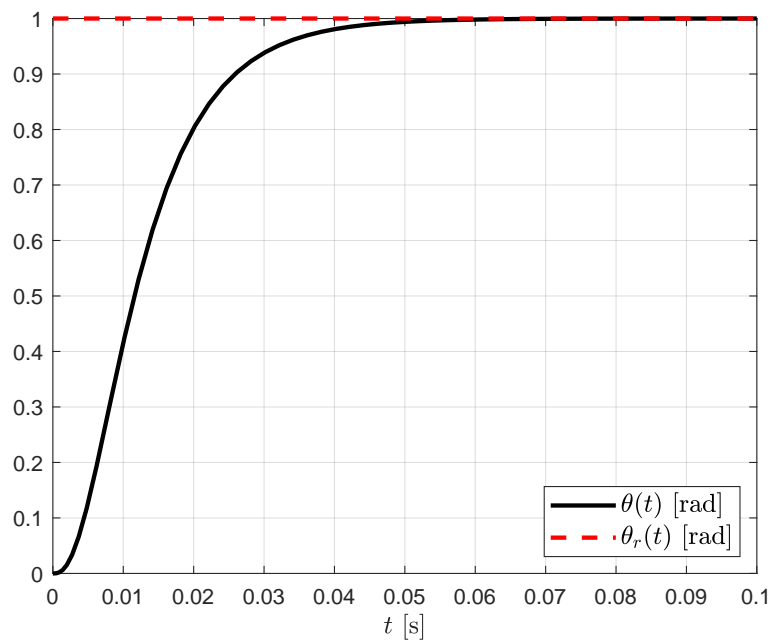
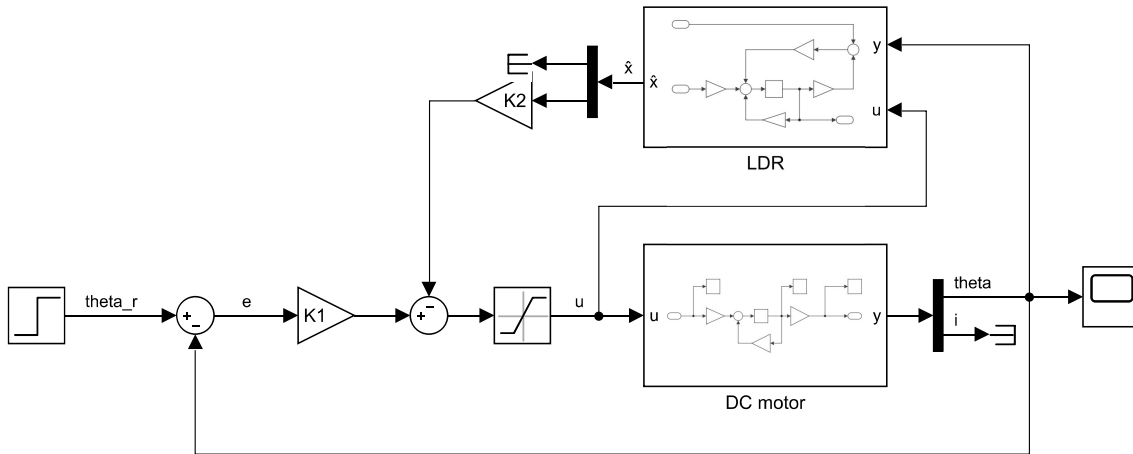
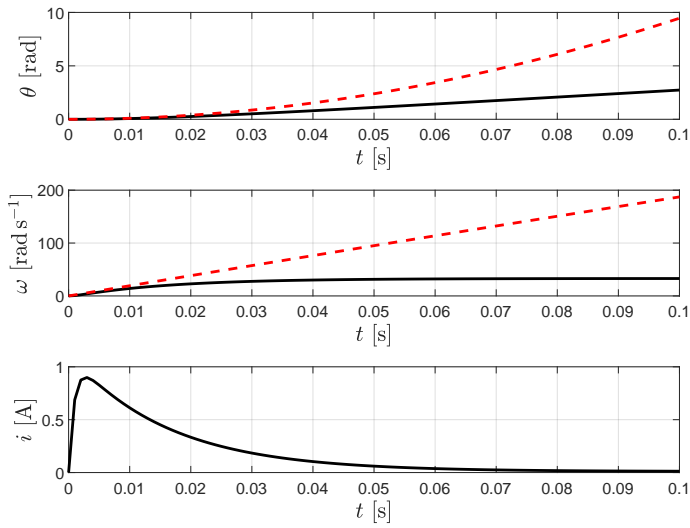
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \kappa \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Q = \text{diag}(100, 0)$$

$$R = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_i/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

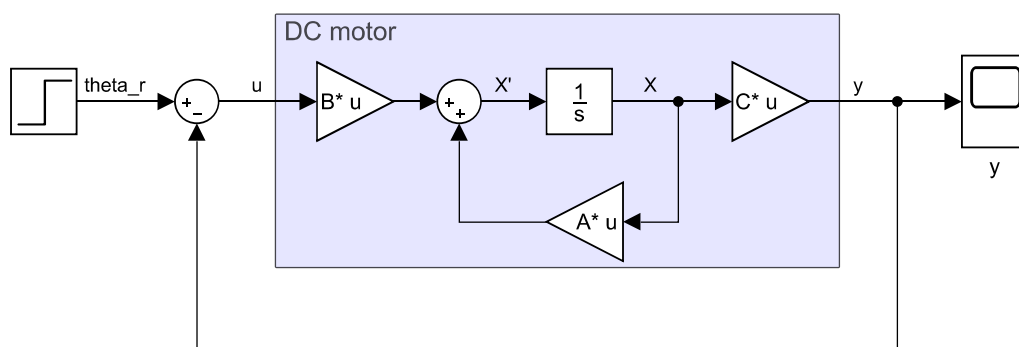




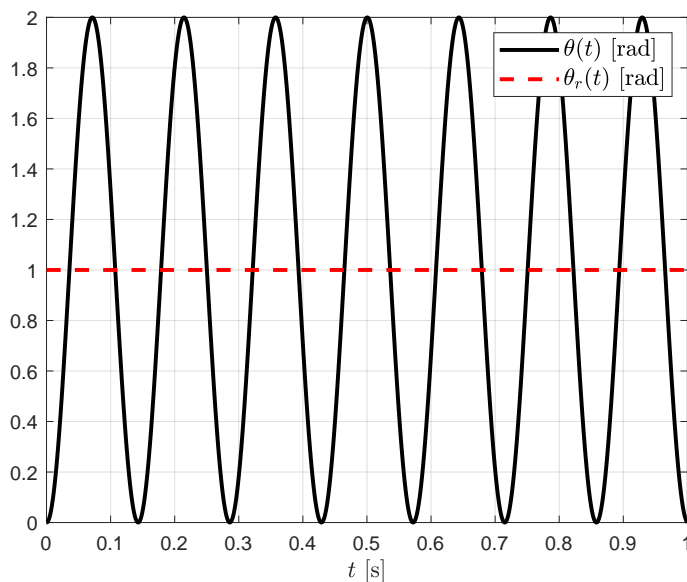
značka	hodnota	značka jednotky	název
J	$1,55 \cdot 10^{-5}$	kg m^2	moment setrvačnosti
b	$9,55 \cdot 10^{-6}$	N m s	konstanta viskózního tření
K_e	0,03	V s	elektromotorická konstanta
K_t	0,03	N m A^{-1}	momentová konstanta
R	1	Ω	odpor kotvy
L	$0,94 \cdot 10^{-3}$	H	indukčnost kotvy

Tabulka 5.1: Hodnoty parametrů DC motoru.

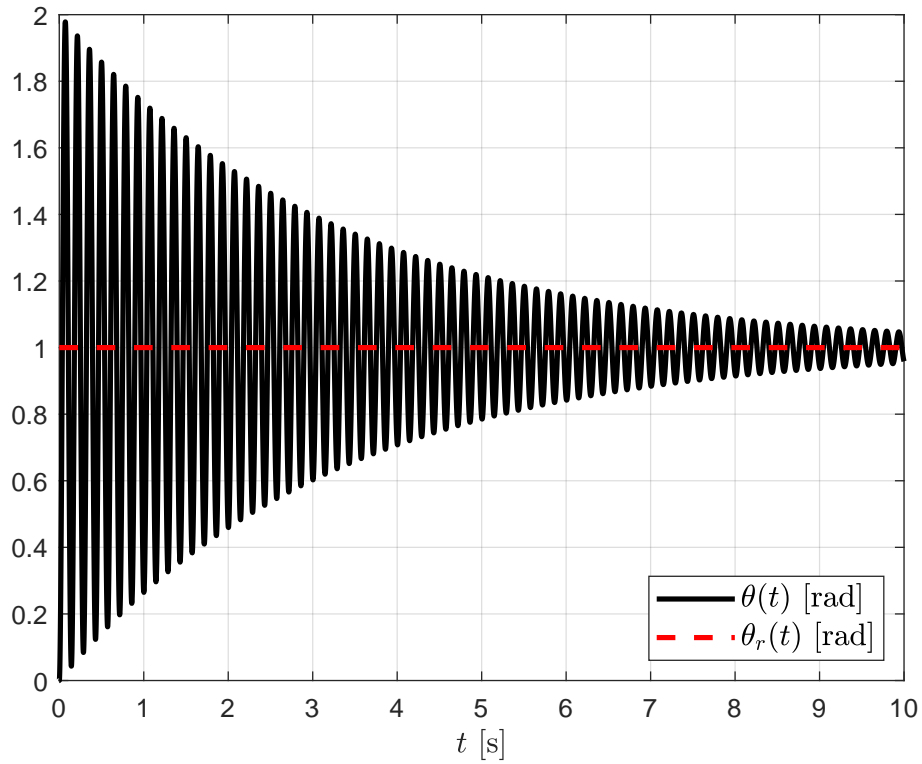
Následující obrázky dokumentují simulace charakterizované v popiskách obrázků.



Obr. 5.1: Zapojení jednotkové zpětné vazby.

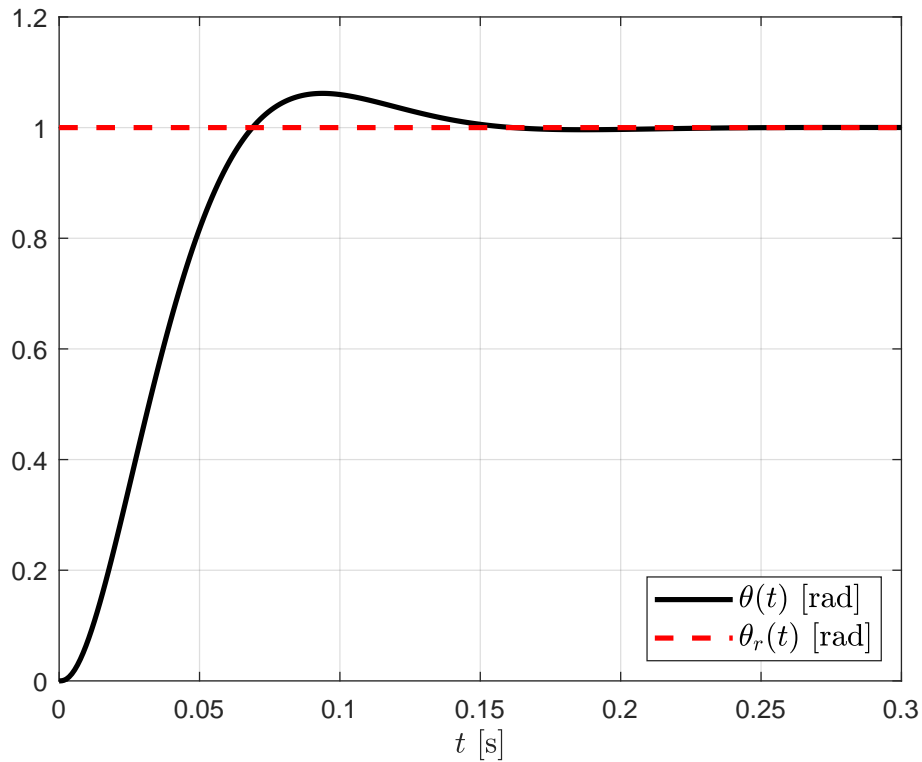


Obr. 5.2: **Nejjednodušší model**
Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.



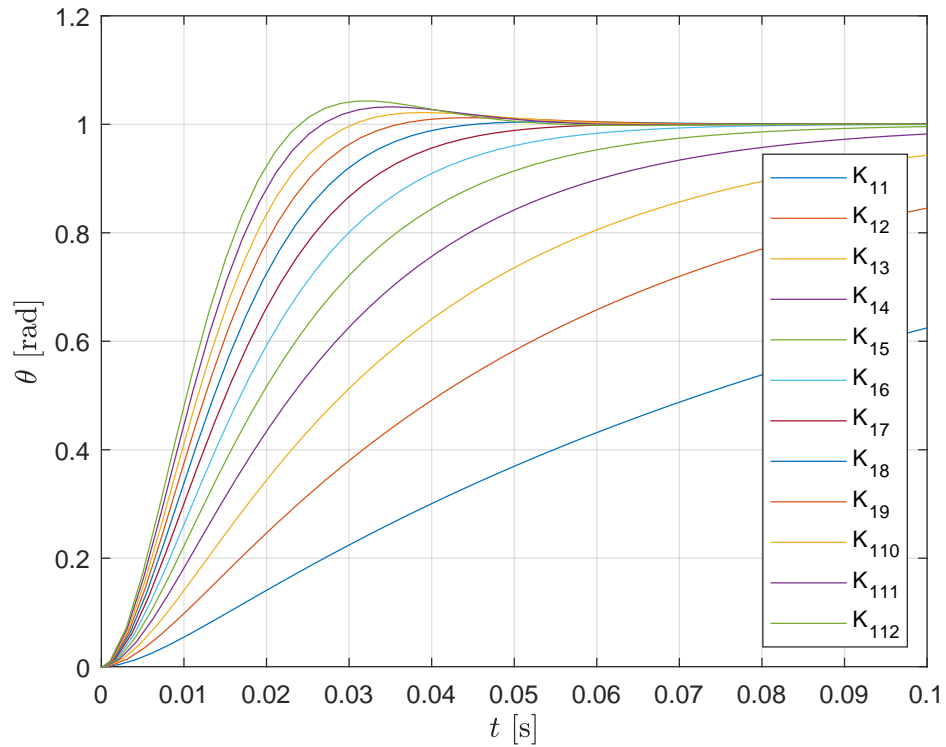
Obr. 5.3: Jednodušší model

Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.



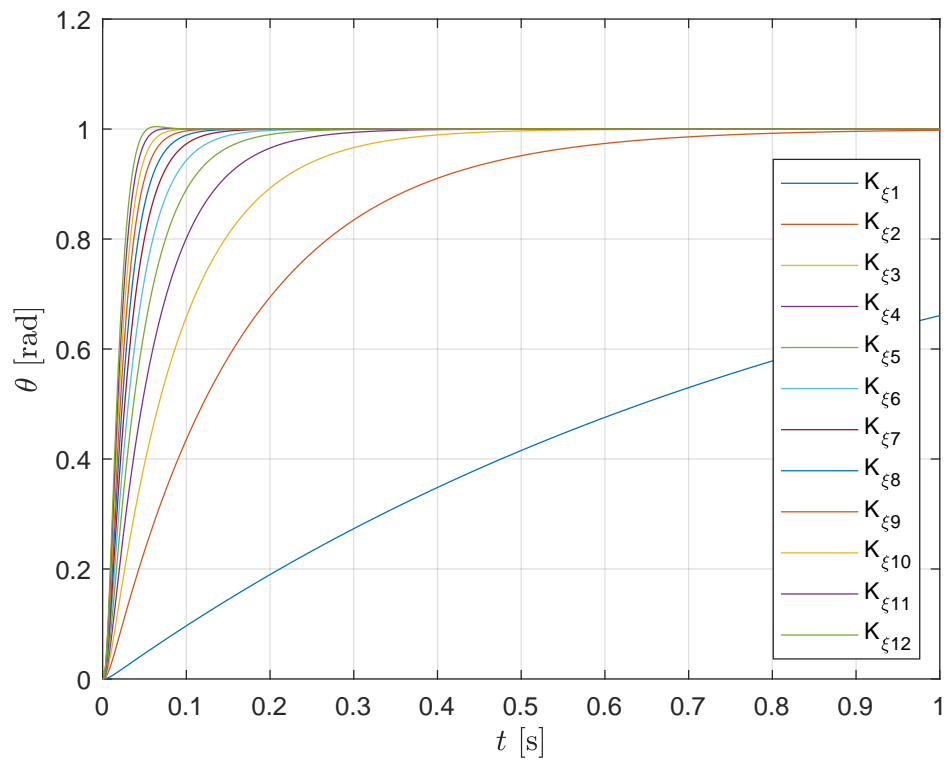
Obr. 5.4: Model

Úhel natočení hřídele po zapojení jednotkové zpětné vazby.



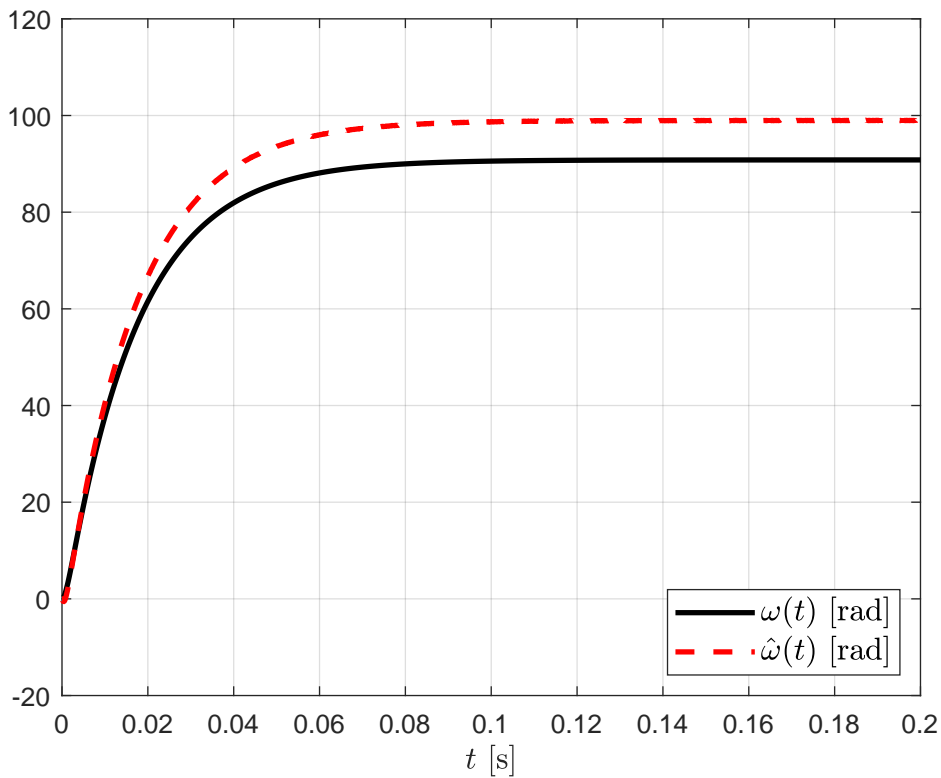
Obr. 5.5: **Nejjednodušší model**

Úhel natočení hřídele pro servo znázorněné na obr. 4.7 pro $K_1 \in \langle 1, 10 \rangle$.



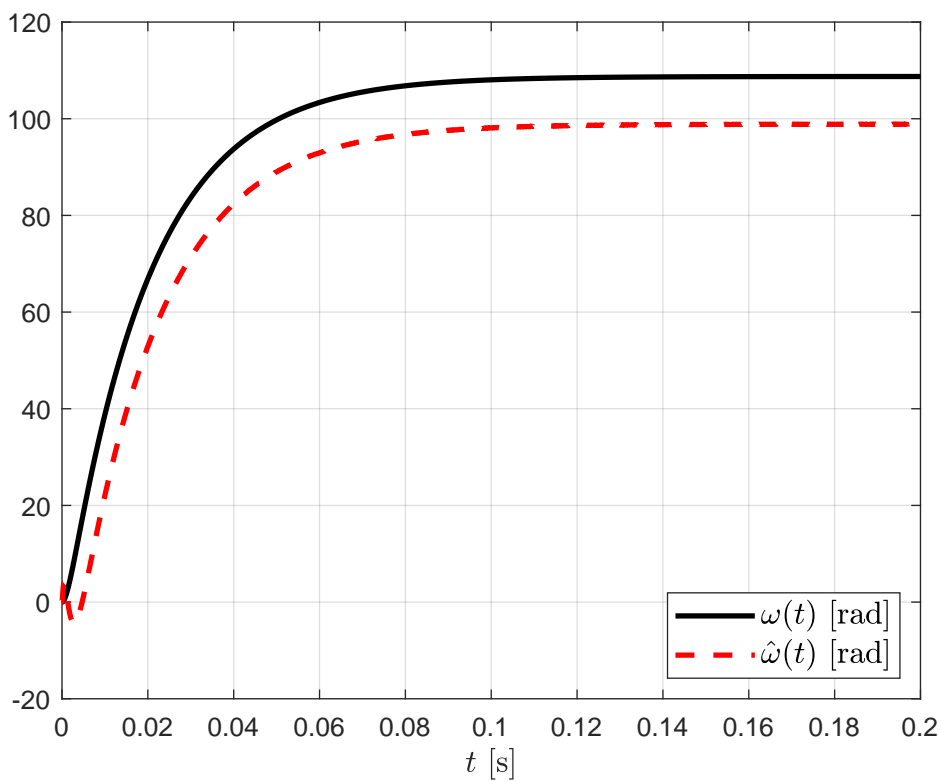
Obr. 5.6: **Model**

Úhel natočení hřídele pro servo znázorněné na obr. 4.15 pro $K_\xi \in \langle 200, 10\,000 \rangle$.



Obr. 5.7: Model

Úhlová rychlost hřídele motoru a její rekonstrukce LDR pro rozdílné parametry s relativní chybou max $\pm 10\%$.



Obr. 5.8: Model

Úhlová rychlost hřídele motoru a její rekonstrukce LDR pro rozdílné parametry s relativní chybou max $\pm 20\%$.

Závěr

Práce se zabývá problematikou návrhu řídicího systému pro polohovací mechanismy, kde je potřeba zajistit, aby se úhel hřídele stejnosměrného motoru nastavil na požadovanou hodnotu, která nemusí být nutně v intervalu jedné otáčky. V aplikacích, kde se rotační pohyb hřídele převádí na translační pohyb polohovacího mechanismu, překonání určité vzdálenosti odpovídá určitému násobku jedné otáčky hřídele.

Použitím elementárních přírodních zákonů jsou pro motor odvozeny tři modely se vzrůstající složitostí. V návaznosti na tyto tři modely je možno navrhnout další tři modely, tentokrát na základě identifikace parametrů jevu, který má jistě příčiny v elementárních přírodních zákonech, ale kde návrh těchto dalších tří modelů vychází z důsledků, ne z příčin. Identifikace parametrů však vyžaduje přístup ke konkrétnímu motoru.

Navrhované řešení polohovacího řízení se opírá o klasické úlohy teorie řízení: úloha o regulátoru, úloha o servu. Řešení je vypracováno ve stavovém prostoru a vede na stavovou zpětnou vazbu. Protože hodnota stavové proměnné odpovídající úhlové rychlosti otáčení hřídele motoru není na motoru k dispozici, je k rekonstrukci této stavové proměnné použit Luenbergerův pozorovatel – Luenbergerova dynamická rekonstrukce (LDR).

Funkčnost navrhovaného řešení je ověřena simulací, která je také použita k nastavení váhových matic, které slouží k zajištění hladkého průběhu přechodového děje, minimalizaci velikosti okamžitých hodnot napájecího napětí motoru a minimalizaci energie potřebné k přechodu na novou požadovanou hodnotu nastavení polohovacího mechanismu. K návrhu zákona řízení je použita zavedená metoda lineárního řízení s kvadratickým kritériem kvality řízení, která je známá především z aplikací v astronautickém, aeronautickém a obranném průmyslu.

Implementace návrhu řídicího systému (serva) pro nastavení úhlu natočení hřídele i simulace tohoto systému jsou provedeny v profesionálním prostředí od korporace The MathWorks, Inc., U.S.A.

Seznam použitých zdrojů

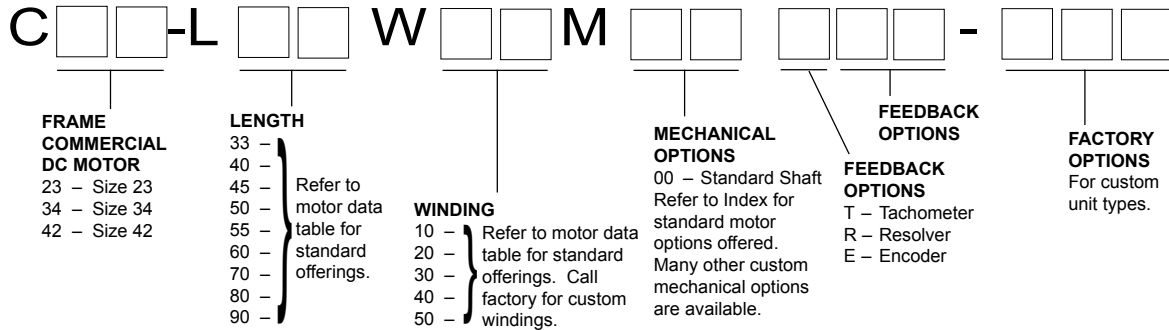
- [1] LUENBERGER, David G. (1964) “Observing the State of a Linear System.“ *IEEE Transactions of Military Electronics* ME-8 (April), pp. 74–80.
- [2] Stanford University [online]. Stanford, California 94305. Stanford Report, March 5, 2008: Honors & Awards [cit. 2. 5. 2021]. Dostupné z: <https://news.stanford.edu/news/2008/march5/pp1-030508.html>
- [3] PONTRYAGIN, L. S., V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, E. F. MISHCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, Inc. New York, 1962.
- [4] LIAPUNOV, A. M. ”Probleme General de la Stabilite du Mouvement,” *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. 9 (1907), pp. 203–474.
- [5] KALMAN, R. E. ”Contributions to the Theory of Optimal Control,” *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1960.
- [6] KNOBLOCH, Hans W. a KWAKERNAAK, Huibert. *Lineare Kontrolltheorie*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 1985.
- [7] HOZNAUER, Miloš. *Cesta do hlubin kantorovy duše*. Praha 5: Dokořán, 2016. (Poznámky na obálce: Ludvík Vaculík)
- [8] АТАНС, Майкл, ФАЛБ, Питер Л. Оптимальное управление. Москва: Машиностроение, 1968. (Cena v ČSSR: Kčs –57,–)
- [9] Moog, Inc. [online]. *Permanent Magnet DC Brush Motors Technical Data Sheet*. [cit. 20. 5. 2021] Dostupné z: <https://www.moog.com/content/dam/moog/literature/MCG/moc23series.pdf>
- [10] The MathWorks, Inc. [online]. *Control System Toolbox™ Reference*. MATLAB. [cit. 12. 5. 2021] Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/releases/R2020b/pdf_doc/control/control_ref.pdf

Příloha

C23 Series Specifications

SPECIFICATION AND NUMBERING SYSTEM

Part Numbering System



C23 SERIES SPECIFICATIONS – Continuous Stall Torque 16.5 - 27 oz-in (0.117 - 0.191 Nm) Peak Torque 125 - 250 oz-in (0.883 - 1.765 Nm)

Brush Motors

Part Number*		C23-L33					C23-L40				
Winding Code**		10	20	30	40	50	10	20	30	40	50
L = Length	inches	3.33					4				
	millimeters	84.6					101.6				
Peak Torque	oz-in	125.0	125.0	125.0	125.0	125.0	250.0	250.0	250.0	250.0	250.0
	Nm	0.883	0.883	0.883	0.883	0.883	1.765	1.765	1.765	1.765	1.765
Continuous Stall Torque	oz-in	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0
	Nm	0.117	0.117	0.117	0.117	0.117	0.191	0.191	0.191	0.191	0.191
Rated Terminal Voltage	volts DC	12 - 24	12 - 24	12 - 36	12 - 60	12 - 60	12 - 24	12 - 48	12 - 60	12 - 60	12 - 60
Terminal Voltage	volts DC	12	12	24	36	48	12	24	36	48	60
Rated Speed	RPM	4700	2150	4200	3750	3000	2300	3600	3500	2850	2250
	rad/sec	492	225	440	393	314	241	377	367	298	236
Rated Torque	oz-in	7.5	12.6	12.7	14.4	15.8	17.3	25.5	25.3	25.6	24.2
	Nm	0.05	0.09	0.09	0.10	0.11	0.12	0.18	0.18	0.18	0.17
Rated Current	Amps	4.75	4.3	3	2	1.4	4.9	4.3	2.75	1.8	1.1
Rated Power	Watts	26.1	20.0	39.5	40.0	35.1	29.4	67.9	65.5	54.0	40.3
	Horsepower	0.03	0.03	0.05	0.05	0.05	0.04	0.09	0.09	0.07	0.05
Torque Sensivity	oz-in/amp	2.65	4.25	6.2	10.25	15.75	4.84	7.74	12	18.5	28.75
	Nm/amp	0.0187	0.0300	0.0438	0.0724	0.1112	0.0342	0.0547	0.0847	0.1306	0.2030
Back EMF	volts/KRPM	2	3.15	4.6	7.6	11.5	3.58	5.72	8.82	13.82	21.22
	volts/rad/sec	0.0191	0.0301	0.0439	0.0726	0.1098	0.0342	0.0546	0.0842	0.1320	0.2026
Terminal Resistance	ohms	0.60	1.00	1.70	4.00	9.00	0.70	0.96	2.30	5.50	12.00
Terminal Inductance	mH	0.35	0.94	2.00	5.50	13.00	0.50	1.30	3.10	7.36	18.00
Motor Constant	oz-in/watt ^{1/2}	3.4	4.3	4.8	5.1	5.3	5.8	7.9	7.9	7.9	8.3
	Nm/watt	0.024	0.030	0.034	0.036	0.037	0.041	0.056	0.056	0.056	0.059
Rotor Inertia	oz-in-sec ²	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
	g-cm ²	155.4	155.4	155.4	155.4	155.4	282.5	282.5	282.5	282.5	282.5
Friction Torque	oz-in	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
	Nm	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
Thermal Resistance	°C/watt	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4
Damping Factor	oz-in/KRPM	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	Nm/KRPM	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
Weight	oz	27	27	27	27	27	38	38	38	38	38
	g	765	765	765	765	765	1077	1077	1077	1077	1077
Electrical Time Constant	millisecond	0.5833	0.9400	1.1765	1.3750	1.4444	0.7143	1.3584	1.3478	1.3382	1.5000
Mech. Time Constant	millisecond	26.07623	17.2056	13.72994	11.82747	11.44547	16.91906	9.052773	9.100907	9.00927	8.237676
Speed/Torque Gradient	rpm/oz-in	-113.2075	-74.69655	-59.60729	-51.34788	-49.68944	-40.39891	-21.61598	-21.73091	-21.51211	-19.66971

Notes:

- For MS (military style) connector, please specify connector housing and terminal.
- Data for informational purposes only. Should not be considered a binding performance agreement. For specific applications, please contact the factory.

(continued on next page)

*Many other custom mechanical options are available – consult factory.
 **Many other winding options are available – consult factory.

konce abecedy: Co Čech, to žvanil. Milá M. K., obávám se, že jsem tu účtyhodnou práci v době jejího vzniku patřičně neocenil, tak to činem ted. Nebo J. K., jazykový eskamotér se svou Reportáží psanou z poslední lavice. Vystáčila by na několik ka-pitol...

Těšilo mne, že studenti se nebáli žádného tématu – převzali názor, že originálním způsobem se dá psát o všem. Hodilo se jim to například v případě, kdy byla na škole vyhlášena literární soutěž a všichni češtináři museli téma zadat v každé třídě, aby se v hlášení o činnosti školy (za totality) mohl uvést ohromující počet účastníků. Bylo to například při prvním startu člověka (sovětského) do vesmíru (s podtitulkem Jak Ilové bijem o mříže...).

Radost mi udělal student, který zadany úkol zpracoval opravdu originálně. Mottem mu byla Gagarinova slova, jež jako pokřítel vesmíru pronesl při své návštěvě Československa: „Vaše země je první, kterou jsem navštívil...“ Zde je ona soutěžní práce:

Jeho jméno vyslovovali s úctou lidé na celém světě, jeho tvář se na ně dívala z prvních stránek novin, znali ho v nejluxusnějších čtvrtích i v těch nejzapadlejších koutech.

Psali mu lidé ze všech končin světa, jaký to musí být nádherný pocit řídit se ke hvězdám, když člověk překoná zemskou pří-tažlivost.

Dopisovatelé všech světových agentur ho žádali, aby jim po-drobně lčil své počty z vesmírné cesty.

A on jim trochu unaveně odpovídal – co prožíval nad Tichým oceánem, New Yorkem, Tibetem, jak vypadala Sahara či Japonsko. Snažil se vyklíčit ty nádherné západy slunce a bouře nad oceány a nikdy nezapomněl vyzvednout nepřemožitelnost lidského ducha a sílu touhy po poznání.

Prati se také na jeho nejuvětší přání během vesmírného letu. Aby zavládl mír na celém světě, odpovídal bez váhání a připojil další přání – aby mohl být co nejuvíce platný vláde a lidu své země.

Když pak později seděl v laboratoři a čekal na další prověrku svého zdravotního stavu, přepadlo ho zas to jeho opravdu nejuvětší a nejtajnější přání, které měl nad Tibetem i nad Saharou, i tu chvíli předtím, než byl dán povol k návratu na Zem. Kdyby tak počítáče v řídicím středisku měly malou poruchu a on nepřistál ve stepi, na místech, která tak důvěrně znal, ale někde na takovém místě, o kterém zatím jen četl nebo snil... Projde se vůbec někdy dobytval vesmíru po Paříži či po Římě? Pak mu jeho sen přerušili, musel jít k přístrojům, jakási mladá lékařka mu dala injekci a nesměle zašepkala: To musí být krásné, dobytvat vesmír...

Stručně, ale pěkně, že? Autor soutěž nevyhrál, vlastně jsem ho dost dobře nemohl do školní soutěže přihlásit. Ale vyhrál to u mne...

Vyhrát se podařilo studentce v soutěži ke čtyřicátému výročí vyhlazení Lidic (probíhala stejným způsobem, masovou účástí).

Zítva

Vesnice se pomalu ukládala ke spánku, jedno okno za druhým se ztrácelo ve tmě. Snad nejdřív zhasli v domku u Hájků. Oba staří lidé si chtěli přispat, protože brzo ráno je čekala dlouhá cesta za dcerou na Moravu, za prvním unoučkem. Už se nemohli dočkat. Byly mu dva měsíce a dcera nadšeně psala, jaký je to cvalk.

Dlouho nezhasnali u Vepodů. Měli velké malování, ve všech třech místnostech, a chtěli se zítva probudit do úplného pořádku. Těšili se hlavně z toho, že teď už zas budou mít na pár let pokoj.

U Havránků bliklo světylko. Rodiče se šli s baterkou podívat na svého pětiletého synka, který pro velký žal nemohl dlouho usnout. Teď už spal, ale stopy slz měl ještě na tvářích. Měl dnes narozentiny a hrozně se těšil na své první kolo. Jenže hned po obědě rozbil okno, a tak mu rodiče oznámili, že takový uličník kolo nedostane. Schovali ho na půdě a rozhodli, že ho dostane až zítva – to ovšem on nevěděl, a proto tak velký žal. Rodiče se