



**FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

**Ústav mechaniky, biomechaniky a
mechatroniky**

Odbor mechaniky a mechatroniky

Analýza manipulovatelnosti delta robotů

Dexterity analysis of delta robots

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021

Jan KAŠPAR

Studijní program: B2342 TEORETICKÝ ZÁKLAD STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Studijní obor: 2301R000 Studijní program je bezoborový

Vedoucí práce Ing. Petr Beneš, Ph.D.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kašpar** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **486802**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analýza manipulovatelnosti delta robotů

Název bakalářské práce anglicky:

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s kinematikou robotů typu delta.
- 2) Připravte modely různých variant delta robotů.
- 3) Porovnejte jednotlivé varianty z hlediska manipulovatelnosti.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Brát, V.: Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vázaných mechanických systémů. Praha: Academia, 1981.
[2] Gosselin, C.: Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators. In: 1990 IEEE International Conference Robotics and Automation, vol. 1, pp. 650–655, 1990.
[3] Merlet, J.P.: Parallel Robots. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 128., Heidelberg, Springer, 2006.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Petr Beneš, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **20.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Petr Beneš, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem: „Analýza manipulovatelnosti delta robotů“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Beneše, Ph.D., s použitím literatury a zdrojů, které jsou uvedeny na konci mé bakalářské práce v seznamu použité literatury.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce Ing. Petru Benešovi, Ph.D. za cenné rady, odborné vedení a věnovaný čas, který vynaložil v průběhu tvorby mé bakalářské práce. Taká bych chtěl poděkovat rodičům, kteří mě neustále podporovali v průběhu studia na vysoké škole.

ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Jan Kašpar
Název BP:	Analýza manipulovatelnosti delta robotů
Anglický název:	Dexterity analysis of delta robots
Rok:	2021
Studijní program:	B2342 Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	2301R000 Studijní program bezoborový
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí BP:	Ing. Petr Beneš, Ph.D.
Konzultant:	
Bibliografické údaje:	počet stran: 43 počet obrázků: 30 počet tabulek: 1
Klíčová slova:	Paralelní kinematika, Delta roboti, analýza kinematiky
Keywords:	Parallel kinematics, Delta robots, analysis of kinematik
Abstract:	In this bachelor thesis I discuss with two different types of delta robots. I explore their kinematics abilities and apply the results of my research to the dexterity analysis in their workspace. The goal of this work is to compare both types of delta robots in terms of dexterity and application in 3D printing.
Anotace:	V této bakalářské práci se zabývám dvěma různými typy delta robotů. Zkoumám jejich kinematické vlastnosti a poznatky posléze aplikuji na analýzu manipulovatelnosti v jejich pracovním poli. Cílem práce je porovnat oba typy delta robotů z hlediska manipulovatelnosti a aplikace v 3D tisku.

OBSAH

1. Úvod	1
2. Paralelní kinematický systém	2
2.1. Definice	2
2.2. Struktura a komponenty	2
2.2.1. Rozdělení	2
2.2.2. Vzpěry	3
2.2.3. Klouby	3
2.2.3.1. Rotační 1 DOF	3
2.2.3.2. Rotační kloub 2-3 DOF	4
1. Kardanovy klouby	4
2. Kulové klouby	5
2.3. Využití	5
2.3.1. Obrábění	5
2.3.1.1. Automobilový průmysl	5
2.3.1.2. Letecký průmysl	6
2.3.2. Manipulace	7
2.3.2.1. Simulátory	7
2.3.2.2. Delta roboti	7
2.4. Historie	8
3. Analýza kinematiky delta robota	9
3.1. Paralelní kinematická struktura	9
3.2. Transformace souřadnic	10
3.2.1. Přímá a inverzní transformace souřadnic	10
3.3. Delta robot s otočnými rameny	10
3.3.1. Souřadnicové systémy robota	11
3.3.1.1. Absolutní souřadnicový systém	11
3.3.1.2. Lokální souřadnicový systém TCP	11
3.3.1.3. Souřadnice pohonů	12
3.3.2. Transformační rovnice robota	12
3.3.3. Inverzní úloha kinematiky (IPKS)	14
3.3.4. Řešení IPKS numericky	15
3.3.5. Řešení IPKS trigonometricky	16
3.3.6. Přímá úloha kinematiky (FPKS)	18
3.3.7. Řešení a problematika FPKS	18
3.3.8. Řešení FPKS numericky	19

3.3.9.	Rovnice rychlosti	21
3.4.	Delta robot s rameny proměnlivé délky	22
3.4.1.	Souřadnicové systémy robota	22
3.4.1.1.	Absolutní souřadnicový systém	22
3.4.1.2.	Lokální souřadnicový systém	22
3.4.1.3.	Souřadnice pohonů.....	22
3.4.2.	Transformační rovnice.....	23
3.4.3.	Nepřímá úloha kinematiky (IPKS).....	25
3.4.4.	Řešení IPKS numericky.....	25
3.4.5.	Dopředná úloha kinematiky (FPKS)	26
3.4.6.	Řešení FPK numericky	27
3.4.7.	Rovnice rychlosti	28
4.	Analýza manipulovatelnosti delta robotů	29
4.1.	Manipulovatelnost.....	29
4.2.	Vstupní parametry.....	30
4.3.	Postup analýzy	30
4.4.	Výsledek analýzy	31
4.4.1.	Delta robot s otočnými rameny	31
4.4.2.	Delta robot s rameny proměnlivé délky	32
4.4.	Závěr analýzy.....	33
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	34
	SEZNAM OBRÁZKŮ	35

SEZNAM SYMBOLŮ

A_i	[mm]	Pozice kloubů pojící základnu a jednotlivá ramena, kde $i = 1,2,3$
B_i	[mm]	Pozice kloubů pojící ramena a vzpěry, kde $i = 1,2,3$
b_g		počet stupňů volnosti (volného tělesa ve 2D $b_g=3$, ve 3D $b_g=6$)
C_i	[mm]	Pozice kloubů pojící pohyblivou platformu se vzpěrami, kde $i = 1,2,3$
f_i	[°]	stupeň volnosti i -tého kloubu
f_{id}	[°]	počet identických stupňů volnosti
$i_{1,2}$		Průsečíky kružnic k_1 a k_2
J		Jakobián manipulátoru
k		počet jointů
k_1		Kružnice opsaná ramenem a středem v bodě A
k_2		Kružnice opsaná vzpěrou a se středem v bodu C
0L_i		Vektor jednotlivých ramen spojené k základně, kde $i = 1,2,3$
\dot{L}_i		Derivace prodloužení jednotlivých ramen, kde $i = 1,2,3$
0l_i		Vektor jednotlivých vzpěr, kde $i = 1,2,3$
n		počet členů mechanismu včetně rámu
O		Střed základny
0R	[rad]	Matice rotace pohyblivé platformy
s_A	[mm]	Délka strany základny
s_C	[mm]	Délka strany platformy
T		Střed pohyblivé platformy
0T_T		Transformační matice souřadnicových systémů
u_A	[mm]	Vzdálenost od středu k vrcholu základny
u_C	[mm]	Vzdálenost od středu k vrcholu platformy
w_A	[mm]	Vzdálenost od středu k umístění kloubů
w_C	[mm]	Vzdálenost od středu ke středu strany platformy
x		Souřadnice v ose x
\dot{x}		Derivace x
y		Souřadnice v ose y
\dot{y}		Derivace y
z		Souřadnice v ose z
\dot{z}		Derivace z
θ_i	[rad]	Natočení ramen, kde $i = 1,2,3$
$\dot{\theta}_i$		Derivace jednotlivých úhlů, kde $i = 1,2,3$

SEZNAM ZKRATEK

FPKS	Přímá úloha kinematiky (Forward position kinematic solution)
IPKS	Nepřímá úloha kinematiky (Inverse position kinematic solution)
PK	Paralelní kinematika
PKS	Paralelní kinematický systém
SKS	Sériový kinematický systém
TCP	Střed nástroje (Tool center point)

1. Úvod a cíle práce

V dnešní době globalizace a rozrůstání trhu jsou výrobci nuceni svou masivní produkci navýšit a stále více zefektivnit. Jedním z východisek je stálý vývoj a zdokonalování technologií, který by jim zaručil určitou výhodu před konkurencí. Nezanedbatelnou stránkou, která se může stále zdokonalit, jsou výrobní stroje a roboti. Proto čím dál častěji se výrobci těchto strojů a robotů uchýlí vedle konvenčních řešení, především ke strojům a robotům se sériovou kinematikou, k odlišnému typu a to ke strukturám s paralelní kinematikou. Tato varianta se specifickou kinematikou má své odlišné klady a zápory. Především konstrukce tohoto typu jsou namáhány pouze na tah a tlak. U sériové kinematiky nelze zanedbat zbývající zatížení a to ohyb a krut. Díky tomu lze výrazně odlehčit jejich části struktury. Dále dosahují výrazně vyšší statické a dynamické tuhosti. Stroje a roboti s touto kinematikou pracují za vyšších rychlostí a větších ryvů nástroje, což vede k celkovému zvýšení produktivity výroby. Paralelní kinematické systémy se objevily již v padesátých letech minulého století, a však v těchto letech nebyly zapojeny do sériové výroby z důvodu nedostatku v oblasti softwaru a hardwaru. To se také v devadesátých letech také změnilo díky vývoji výpočetní techniky a začaly se postupně objevovat ve výrobních průmyslech. V průběhu let se čím dál tím více uplatňovali roboti a stroje s paralelní kinematickou strukturou neboli delta roboti. Po zdokonalení technologie se nacházelo jejich uplatnění i v dalších průmyslech. Delta roboti jsou využíváni v již zmíněném výrobním, ale také v leteckém nebo i zábavním průmyslu. Nejčastějším a nejnámějším použitím je v oblasti manipulace, kde roboti s touto strukturou dosahují nevídaných rychlostí. Dnes roboti a stroje s paralelní kinematickou strukturou jsou nenahraditelnou složkou napříč všemi průmysly. Toto konstrukční řešení nabývá ale také mnoho nevýhod a problémů. Mezi nimi nejvýraznější nevýhodou je poměr pracovního prostoru ku stavebnímu prostoru robota. Dále značný problém je velmi složitá kalibrace těchto systémů. Proto se stroje tohoto typu podílející na výrobním procesu objevili teprve nedávno.

Jak jsem již zmínil stroje a roboti získávají odlišné vlastnosti od struktur se sériovou konstrukcí právě díky své odlišné kinematice a dynamice systému. Paralelní kinematika je značně složitá, a tudíž je více náchylná k výskytu chyb i více náročná na software a hardware. Každé konstrukčně odlišné řešení paralelní kinematického systému značně mění své vlastnosti a uplatnění.

Hlavním cílem této práce je porovnání dvou konstrukčně odlišných typů Delta robotů na základě manipulovatelnosti. Abychom dosáhli výsledku, je nejprve důležité se seznámit s těmito strukturami s paralelní kinematikou a posléze vytvořit kinematickou analýzu obou typů. Z analýzy můžeme vytvořit kinematický model, u kterého můžeme zkoumat již zmíněnou manipulovatelnost. Na závěr tyto výsledky můžeme porovnat.

2. Paralelní kinematický systém

Tato kapitola se zabývá analýzou strojů a robotů, které jsou tvořeny paralelní kinematickou strukturou. Dále je zde uvedený historický vývoj paralelních kinematických systémů, jejich použití v praxi a uvádím zde základní stavební součásti, ze kterých jsou tyto systémy tvořeny.

2.1. Definice

Paralelní kinematický mechanismus je uzavřená kinematická soustava členů, z nichž koncová platforma je spojena se základnou několika vodícími řetězci. Vodící řetězce jsou tvořeny pohonem, vzpěrami a klouby. [1]

2.2. Struktura a komponenty

U robotů a strojů využívající paralelní kinematický systém jsou použity komponenty v závislosti na použití. Jednotlivé struktury těchto robotů a strojů se značně liší a mají své specifické vlastnosti.

2.2.1. Rozdělení

Tyto mechanismy se dělí do jednotlivých skupin podle typu pohonů a následně odlišného pohybu vzpěr. Následující rozdělení je převzato ze zdroje [1]

Na základě odlišných typů vzpěr rozlišujeme v zásadě na dvě rozdílné skupiny a to na PKS s proměnlivou délkou vzpěr, kde se mění vzdálenosti mezi klouby, a na PKS s neproměnlivou délkou vzpěr, u nichž se mění poloha kloubů. Obě dvě podskupiny mají odlišné výhody i nevýhody

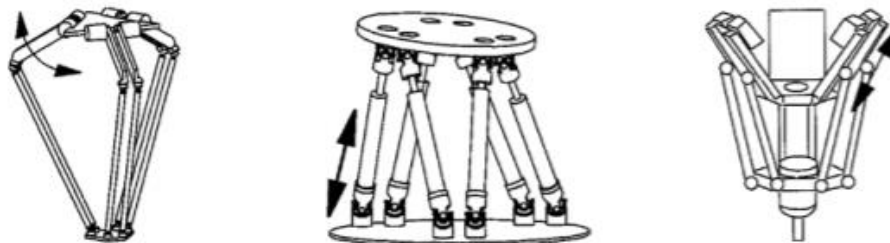
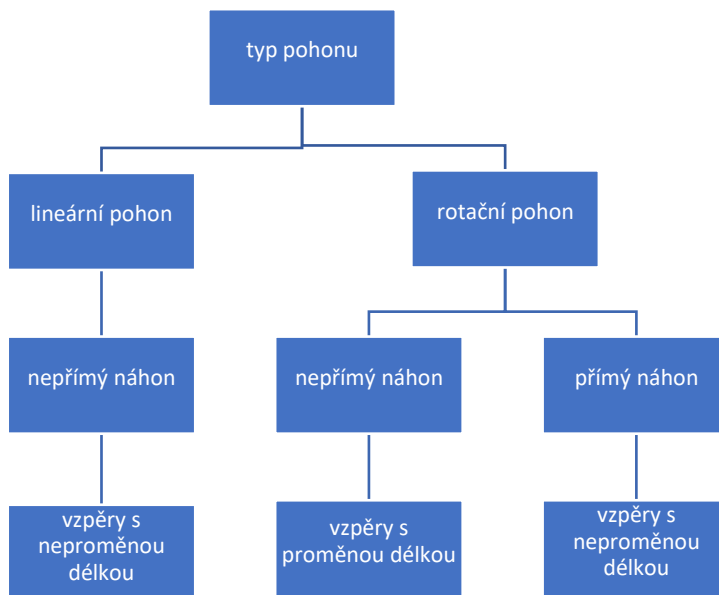
Skupina s proměnlivou délkou vzpěr má výhody:

- Vyšší přesnost
- Menší zatížení vzpěr a vedení
- Větší pracovní prostor
- Menší proměnlivost vlastností mechanismu v rámci pracovního prostoru
- Nižší počet parametrů a tudíž jednodušší kalibraci systému

Druhá skupina s neproměnlivou délkou vzpěr má výhody zejména:

- Kompaktnější konstrukce kloubů
- Pohony lze uložit mimo vzpěry
- Vyšší tuhost
- Menší požadovaný rozsah kloubů

Pohony, které se používají u výrobních strojů s PKS, jsou lineární i rotační. Často se převádí rotační pohyb na pohyb lineární, protože velkou výhodou rotačních pohonů naproti lineárním je, že nabývají výrazně větší účinnosti. Lineární pohyby vynikají zejména výbornými dynamickými vlastnostmi, ale mají nižší účinnost, která se pojí s velkým vznikem tepla.[1,2]



Obrázek 1: rozdělení paralelních struktur[4]

2.2.2. Vzpěry

Vzpěra je jednou z aktivních složek vodícího řetězce, která pohybuje s koncovou platformou. Tyto vzpěry za předpokladu ideálních podmínek, že lze považovat všechny prvky paralelního kinematického systému za dokonale tuhá tělesa a že všechny osy rotace se protínají v jediném bodě, jsou namáhány pouze tahem, tlakem a ohybem. Ve skutečných případech se zde ale nesmí zanedbat ani zatížení v krutu. Vzpěry také ovlivňují celkovou tuhost a přesnost mechanismu jako celku.[1,2]

2.2.3. Klouby

U paralelních kinematických systému se klouby nacházejí v silovém toku a tudíž zásadně ovlivňují vlastnosti a celkové chování soustavy. U robotů sloužících k rychlostní manipulaci předmětů s malou hmotností v poměru ku soustavě tento fakt nijak zásadně neovlivní vlastnosti soustavy, ale u výrobních strojů s touto kinematikou je situace jiná. U sériově vyráběných kloubů se nedosahuje takových vlastností (např. tuhost, nižší hmotnost, malé opotřebení, velká přesnost, únosnost, požadované úhlové rozsahy, ...) tak, aby byly v PKS použity. [2]

2.2.3.1. Rotační 1 DOF

Tyto rotační klouby s jedním stupněm volnosti umožňují spojit rotaci pouze v jedné ose a jsou použity pouze u rovinných PKS jako např. MECA 500 viz Obr. 2. Díky své jednoduché konstrukci jsou velmi tuhé, přesné a mají neomezený úhlový rozsah.[2]



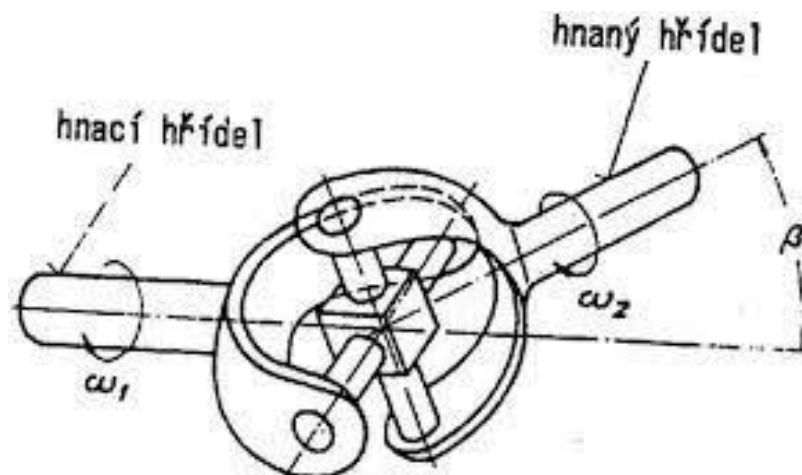
Obrázek 2: MECA 500[3]

2.2.3.2. Rotační kloub 2-3 DOF

U většiny případů PKS jsou zapotřebí použít rotační klouby s více stupni volnosti. V těchto případech se používají klouby s 2 či 3 stupni volnosti. Ty umožňují spojit rotaci kolem více os. U těchto spojů je konstrukce značně náročnější, což se projevuje na vlastnostech spoje a to na tuhosti, přesnosti a úhlovém rozsahu. V zásadě existují dva typy kloubů pro tuto aplikaci a to Kardanovy klouby a kulové klouby. Podle způsobu použití a získání prioritních vlastností se volí mezi těmito klouby. U manipulačních činnostech je cílem získat co největší pracovní prostor a je tedy zásadní úhlový rozsah kloubů. U obráběcích strojů s PKS se klade důraz na tuhost soustavy a tudíž tedy i na tuhost jednotlivých kloubů.[2]

1. Kardanovy klouby

Tento typ kloubů se vyrábí ve dvou variantách se dvěma či třemi stupni volnosti. Kardanovy klouby se skládají ze dvou za sebou jdoucích rotačních kloubů, které jsou navzájem kolmé. K dosažení třetího stupně volnosti se používá radiálně-axiální ložisko.[2]



Obrázek 3: Kardanův kloub[8]

2. Kulové klouby

Tyto klouby jsou velice konstrukčně složité, ale dosahují velice dobrých vlastností. Jsou zejména velice tuhé a mají velikou únosnost a tudíž jsou často využívány u obráběcích strojů. U těchto kloubů je nevýhodou malý úhlový rozsah. Na Obr. 4 je vyfocen jednoduchý kulový kloub. Vyrábí se také složitější kulové klouby, které se skládají z kulového čepu a dvojdílného pouzdra, mezi kterými je velké množství kuliček.[2]



Obrázek 4: kulový kloub WG22 [9]

2.3. Využití

Roboty a výrobní stroje s paralelní kinematikou můžeme nalézt napříč všemi průmysly. Díky svým vlastnostem je jejich uplatnění velice rozsáhlé. Lze jich využít pro jednoduché úkony jako manipulaci s předmětem tak i pro náročnější procesy jako například obrábění, svařování, atd..

2.3.1. Obrábění

U těchto výrobních procesů je cílem zkombinovat vlastnosti obráběcích center zejména rychlosti, variabilitu, přesnosti obrábění i možností víceosého obrábění.

2.3.1.1. Automobilový průmysl

Výrazným odvětvím průmyslu, kde se stroje s PK uplatňují je právě automobilový průmysl. Na tyto stroje jsou kladeny vysoké nároky zejména v oblasti variability. Stroje musí zvládnout obrábět polotovary velkých rozměrů, které se liší tvarem i materiálem. Vyšší produktivita se dosahuje díky vysokodynamickým pohonům, které na druhou stranu zvyšují cenu stroje a dále náklady na jeho údržbu. Právě tyto požadavky splňují stroje s PK. Příkladem takového stroje pro toto využití je TRICEPT T605 viz Obr. 5. [10]



Obrázek 5: Tricept T605 od firmy TRICEPT PKM [11]

2.3.1.2. Letecký průmysl

Stroje s PK jsou také velmi zastoupené v leteckém průmyslu, kde probíhá obrábění velkých monolitických polotovarů, které jsou vytvořeny z lehčích slitin. U obrábění takto velkých polotovarů ze slitin hliníku, titanu, či oceli musí všechny pohyby provádět obráběcí nástroj. K dosažení co největšího odlehčení jsou často geometrie výrobku velice složité a tak je použito 5-ti osé obrábění. Stroje s PK použity v tomto průmyslu jsou robustné a spolehlivé. Dosahují vyšší kvality výrobků za kratší výrobní časy díky svému rychlému naklápění a tuhosti soustavy. [10]

Pro hrubování velkých hliníkových polotovarů je zapotřebí, aby vřeteno mělo vysoký výkon. Jedno z variant řešení představuje firma Dörries Scharmann jako technologii tzv. GmbH na technickém řešením tripodu viz. Obr. 6. [12]



Obrázek 6: Parallel Sprint Z3 robot [12]

2.3.2. Manipulace

V oblasti přenosu a manipulaci s předměty mají roboti s PK velmi rozsáhlé zastoupení. V tomto odvětví se využívá zejména jejich výborné dynamické vlastnosti. Dosahují vysokých rychlostí i požadovaných přesností. V zásadě lze tyto roboty rozdělit na naklápací mechanismy, z nichž nejrozšířenější jsou simulátory, a na roboty, kteří přenášejí objekty z jednoho místa na druhé (delta roboti).

2.3.2.1. Simulátory

Společně s rozvojem virtuální reality lze nasimulovat různé podmínky a pohyby předmětů upevněné na pohyblivé platformě. V 21. století se uplatnění těchto robotů s PK rozrostlo i do civilní sféry. Dnes je můžeme vidět v zábavním, automobilovém i v leteckém průmyslu, kde složí k výcviku posádky. Má své zastoupení i ve vojenské i sféře i kosmonautice. Česká firma Pragolet nejvíce využívá plošin se šesti stupni volnosti, které dokáží velmi dobře reprodukovat pohybové vjemy, u těchto plošin se používá transformace rotačního pohybu na pohyb posuvný, který je vhodnější.



Obrázek 7: KLM selects L3 for Boeing 787 [13]

2.3.2.2. Delta roboti

Tento specifický robot má své hojné zastoupení napříč různými průmysly. Delta robot využívá výhody PK a proto je velmi efektivní a rychlý. Používá se při různých montážích i manipulacích s lehkými předměty. Roboti používají k přenosu pohyblivou platformu, která má většinou 3 stupně volnosti. Existují také delta roboti, kteří mají pohyblivou platformu s více než 3 stupni volnosti, ale už nedosahují takové rychlosti. Na příklad dosavadně nejrychlejší sériově vyráběným robotem je čtyřramenný robot Adept Quattro, který dosahuje zrychlení s předmětem do $1\text{kg } 100\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, což znamená, že je schopen dosáhnout 240 cyklů pick&place za minutu. Nosnost delta robotů dosahuje až 10kg. Nižší užitečné zatížení bývá zpravidla kompenzováno flexibilitou, dosahem nebo cenou.[2,14]



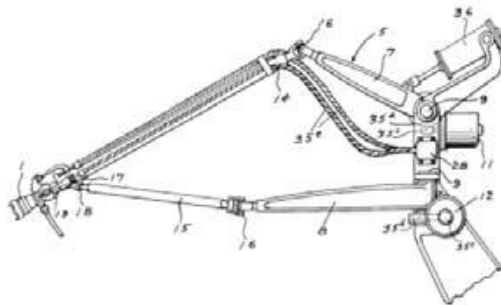
Obrázek 8: Adept Quattro [14]

2.4. Historie

Použití mechanismů a robotů v oblasti průmyslu je relativně nová záležitost, ale tomu předcházela značně rozsáhlý výzkum a vývoj.[2,4]

První zmínky řešení teoretických problémů paralelních mechanismů jsou již v roce 1645 Christopher Wren. Dále se jimi zabývali Augustin Louis Cauchy roku 1813, Henri Léon Lebesgue a Raoul Bricard. První patent zahrnující paralelní kinematiku podal James E. Gwinnett v roce 1928. Jeho paralelní plošina nazvaná oxymoronem „pohyblivá báze“ disponující třemi stupni volnosti byla vyvinuta k využití pro kinematografii. Dosud nejsou ale zmínky o úspěšném použití plošin. Můžeme ale s jistotou prohlásit, že Gwinnett byl ve svých myšlenkách velmi pokrokový, průmysl a omezená technologie ale nebyly schopny jeho invence prozatím využít. [5]

Největším rozkvětem bylo 20 st.. Roboti již mohli využívat elektrické řídicí systémy. První patent vytvořil Willard Pollard Jr. Roku 1942.[6] Jeho robot byl tvořen dvěma rameny a 5 motory viz Obr 9. Díky jim dosáhl k manipulaci plošiny v 5ti stupních volnosti. O pár let později představil Dr. Eric Cough svůj oktahedrální hexapod s proměnlivou délkou ramen. Zařízení bylo uvedeno do provozu roku 1954.

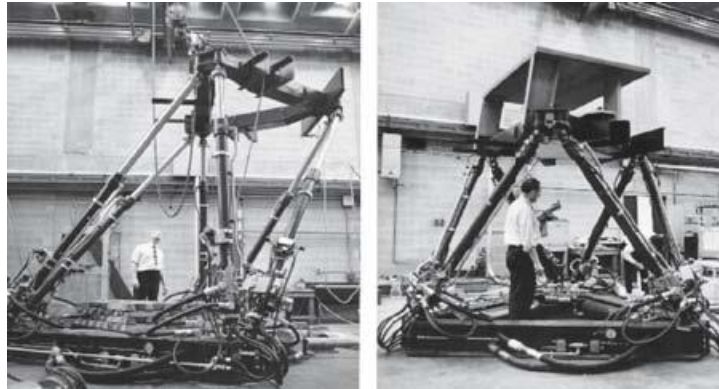


Obrázek 9: Spray painting machine Wilard L.V. Pollard [4]

V 60. letech došlo k význačnému rozvoji paralelních soustav. Zejména v roce 1962 si Menahem Suliteanu a William R. La Valley podali žádost o patentování jejich podstavce antén. Ten se skládal ze tří tripodů a měl 6 stupňů volnosti. Patent byl přijat až v roce 1966. Ve stejný rok byl přijat patent, o který si v roce 1965 zažádal Everett R. Peterson. Peterson navrhl oktahedrální hexapod s dvoukuličkovými klouby.

Ačkoliv přišlo schválení patentu Klause L. Cappela pár měsíců po Petersonovi, ten jeho byl pravděpodobně nejprůlomovější v oblasti paralelních kinematik. Vše začalo tak, že zaměstnavatel Klause L. Cappela - Franklinův institut vznesl požadavek na zdokonalení již existujícího vibračního systému MAST (MultiAxis Simulation Table) se 6 stupni volnosti. MAST byl hexapod se třemi vertikálními a třemi horizontálními zvedáky. Cappel se v

prvopočátku snažil nahradit tři vodorovné členy čtyřmi, které byly uspořádány do kruhu, ve snaze snížit horizontální reakce. Nicméně konfigurace se 7 podpěrami byla příliš složitá na řízení a protichůdné síly vedly k lomu plošiny. A tak Cappel použil Coughovo oktahedrální uspořádání. V roce 1964 Cappel zažádal o patentování svého pohybového simulátoru a o 3 roky později byl jeho patent schválen. Myšlenka Cappelova leteckého simulátoru byla ve skutečnosti důsledkem požadavku firemní kanceláře Sikorsky Aircraft Division na vrtulníkový letecký simulátor se 6 stupni volnosti. [7]



Obrázek 10: Simulátor vrtulníku Sikorsky [2]

Po dvě staletí poté se vývoj paralelních robotů nijak neposunul a nebyla jim přikládána přílišná pozornost, to se ale změnilo na počátku 80. let minulého století. V roce 1985 Donald C. Fyler s inovací použil dvouramenného robota s paralelním uspořádáním a tvrdil, že jeho robot bude lepší než sériový SCARA robot, který byl vyvinut v roce 1979, čehož posléze také dosáhl. Dále v 80. letech přišlo ještě mnoho nových paralelních struktur, žádná však neměla takový úspěch jako DELTA robot (viz obr.8), paralelní manipulátor pro vysokorychlostní přemísťování předmětů se 3 stupni volnosti. Autorem byl profesor Reymond Clavel, který si mechanismus nechal v roce 1990 patentovat a hned několik firem, jako například ABB, začalo DELTA roboty vyrábět a implementovat je do velkovýroby. Po dobu patentové ochrany bylo vyrobeno víc jak 10 000 kusů. Nyní již design DELTA robotů není dále chráněn patentem a mnoho firem jako je FANUC, Motoman a Kawasaki roboty vyrábějí. DELTA robot se tak stal nejvíce používaný robot s paralelní strukturou v průmyslu.

3. Analýza kinematiky delta robota

Tuto kapitolu jsem vypracoval na základě odborného článku uvedeného v citacích pod bodem [16]. Následné transformace souřadnic a postupy výpočtu jsou vypracovány v souladu s tímto článkem.

3.1. Paralelní kinematická struktura

Prvním prototyp konstrukce delta robota byl představen roku 1988 panem Reymondem Clavelem. Tento mechanismus byl tvořen tzv. trojúhelníkovou strukturou, ze které následně vznikly další variace prototypů delta robota, ale tento prototyp patří k nejrozšířenějším strojům s PK v průmyslu.[4]

Mechanismus tvoří dvě trojúhelníkové platformy a tři kinematické řetězce. Každý z těchto řetězců je tvořen otočným ramenem a nebo rameny proměnlivé délky, ke kterým jsou připojeny dvě vzpěry do paralelogramu. Právě toto konstrukční řešení umožňuje platformě se pohybovat se třemi stupni volnosti (posuvné pohyby v osách x, y a z). Nedochází k rotaci platformy kolem těchto

os. Rameno je na jedné straně připevněno rotační vazbou k nepohyblivé trojúhelníkové desce a na straně druhé je spojeno se vzpěrami kulovými klouby se třemi stupni volnosti.

K výpočtu DOF (stupňů volnosti) PKS lze využít Grublerovy rovnice [15], která má tvar:

$$DOF = b_g(n - k - 1) + \sum_{i=1}^k f_i - f_{id} + s' \quad (3.1)$$

- b_g počet stupňů volnosti (volného tělesa ve 2D $b_g=3$, ve 3D $b_g=6$)
- n počet členů mechanismu včetně rámu
- k počet joints
- f_i stupeň volnosti i -tého kloubu
- f_{id} počet identických stupňů volnosti
- s' počet pasivních spojení (pasivní spojení reprezentují polohy os kloubů, zvláštní rozměry kloubů nebo nadbytečné podmínky tuhosti- tyto spojení existují, ale pohyb nijak neomezují)

Podle tohoto vzorce by byl výpočet veden takto:

$$DOF = 6 * (11 - 15 - 1) + 39 - 6 + 0 = 3 \quad (3.2)$$

3.2. Transformace souřadnic

PKS se od systémů se sériovou kinematikou značně liší. U SKS není transformace souřadnic mezi absolutním souřadnicovým systémem a souřadnicovým systémem stroje zásadně složitá, protože tyto systémy si navzájem odpovídají. Na příklad pro otočení kolem jedné osy, nebo pro posuv ve směru jedné osy stačí, aby vykonal daný pohyb příslušný motor dané ose. To u strojů a robotů s PK nelze říct. U tohoto případu si souřadnicové systémy neodpovídají a jejich závislost je nelineární. Pohony u PKS musí při jakémkoli pohybu soustavy kooperovat.

3.2.1. Přímá a inverzní transformace souřadnic

Řídicí systém pro řízení soustavy s PK musí mít k dispozici funkce a rovnice k transformaci světových/absolutních souřadnic do souřadnic pohonů neboli informaci o natočení motorů.

Ve většině softwarů se uživatel setkává se zadáváním absolutních souřadnic v závislosti na čase, což pro řídicí systém představuje tzv. nepřímou (neboli inverzní) úlohu kinematiky IPKS. V porovnání s roboty se sériovou kinematikou je transformace tohoto typu složitější. Lze ji řešit numericky, ale také pomocí trigonometrie. Nepřímá kinematická úloha je řídicím systémem neustále řešena při jakémkoli pohybu soustavy. Uživatelem je zadán pohyb nástroje a řídicím systémem je dopočítán úhel natočení jednotlivých motorů. [16]

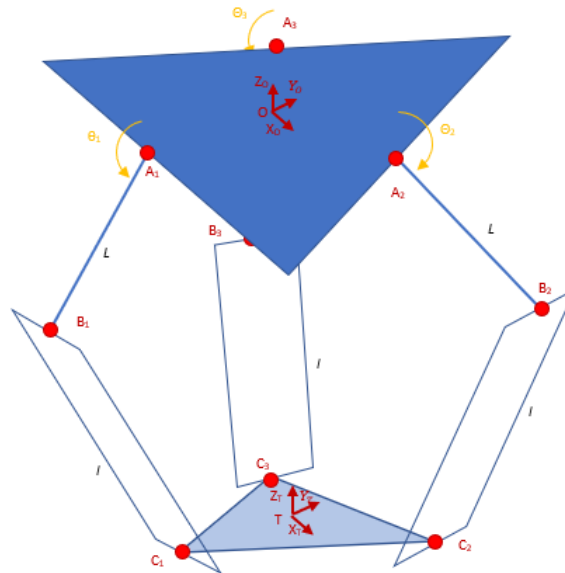
Druhá skupina úloh je transformace přímého charakteru FPKS, kde řídicí systém převádí úhlové natočení motorů na absolutní souřadnicový systém. Řešení těchto úloh v porovnání s roboty se sériovou kinematikou je jednodušší a ve všech případech řešitelná pouze numerické.

3.3. Delta robot s otočnými rameny

Delta robot s touto konstrukcí je tvořen třemi i více kinematickými řetězci. Tato specifická konstrukce využívá natočení třech či více ramen neproměnlivé délky ke změně pozice pohyblivé platformy.

3.3.1. Souřadnicové systémy robota

Před celkovou analýzou kinematiky delta robota je nutné stanovit tři souřadnicové systémy (absolutní, lokální a souřadnice pohonů).



Obrázek 11: Schéma delta robota s otočnými rameny

3.3.1.1. Absolutní souřadnicový systém

V tomto souřadnicovém systému uživatel jednoduše určí pohyb celé soustavy. Počátek absolutního souřadnicového systému je pevně spojen se základnou. Uživatel pracuje v uživatelském systému, který je vůči absolutnímu souřadnicovému systému posunutý do středu pevné základny. V absolutním souřadnicovém systému jsou dány:

- Střed základny O :

$$O = (X, Y, Z)^T \quad (3.3)$$

- Pozice kloubů/motorů na základně:

$$A_i = (A_{xi}, A_{yi}, A_{zi})^T; i = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

3.3.1.2. Lokální souřadnicový systém TCP

Lokální souřadnicový systém je pevně spojen s pohyblivou platformou a nachází se optimálně v jeho středu. V tomto souřadnicovém systému vyjádříme polohu kloubů, které pojí plošinu se vzpěrami. Za účelem zjednodušení transformace souřadnic stanovíme

podmínku, že pohyblivá platforma je rovnoběžná s pevnou základnou, a tudíž také lokální souřadnicový systém vůči absolutnímu má nulové natočení.

- Relativní souřadnice kloubů:

$${}^T C_i = (C_{xi}, C_{yi}, C_{zi})^T; i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

3.3.1.3. Souřadnice pohonů

Každá poloha TCP v prostoru pracovního pole delta robota odpovídá právě jedna konfigurace polohy motorů (úhlové natočení motorů). Pro stanovení výsledné polohy je každému motoru dán příkaz o jeho natočení.

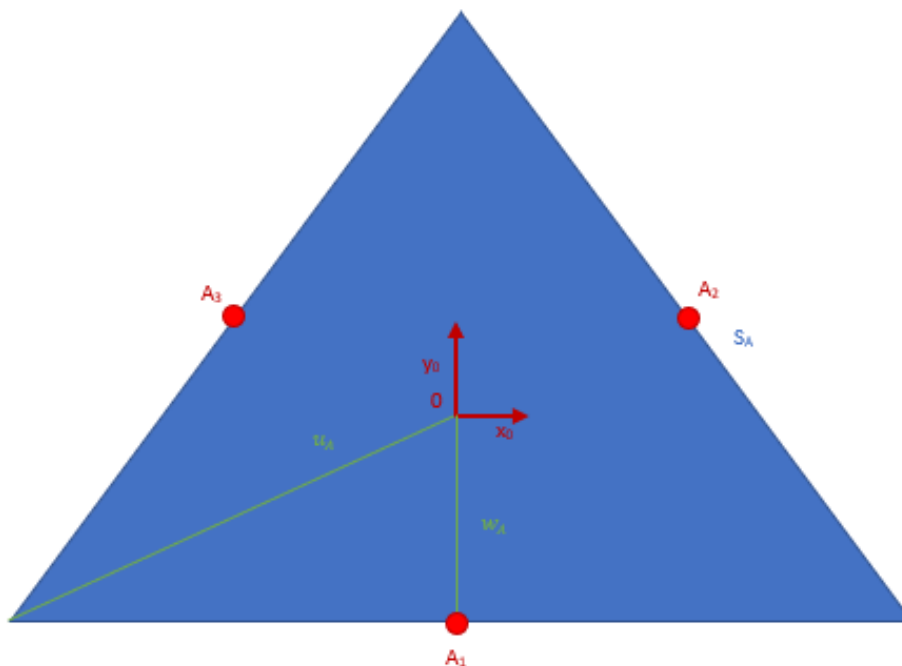
- Úhlová natočení motorů

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \quad (3.6)$$

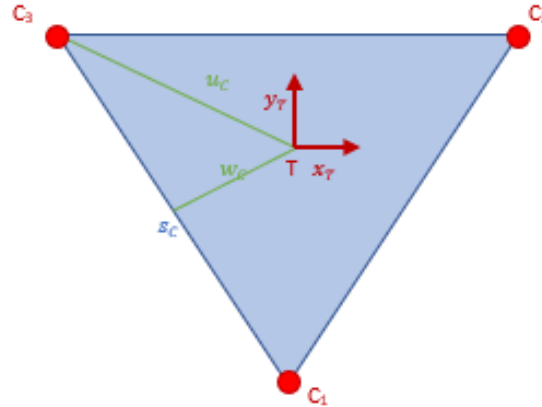
Dále je důležité si stanovit v jaké poloze ramen je nulový úhel $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = 0$. V dalším výpočtu používám jsem si zvolil nulovou polohu, kdy ramena jsou v jedné rovině a směřují jejich vektory od středu základny.

3.3.2. Transformační rovnice robota

Nejprve je důležité stanovit si základní vstupní parametry obou platforem, která nám ovlivňují transformaci do karteziánského systému. Tyto konstanty jsou určeny polohou upevnění pohonů vůči středu pevné základny a polohou upevnění vzpěr na pohyblivé platformě.



Obrázek 12: Schéma pevné platformy



Obrázek 13: Schéma pohyblivé platformy

Na základně jsou uchyceny rotační ramena v bodech A_i , kde $i=1,2,3$, tudíž v těchto bodech je rotační vazby. V takto zvoleném systému jsou pak souřadnice těchto spojů:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} w_A \\ \frac{1}{2} w_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} w_A \\ \frac{1}{2} w_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Na pohyblivé platformě jsou vzpěry uchyceny do pralelogramu v bodech C_i , kde $i=1,2,3$ a v bodech B_i , kde $i=1,2,3$ s otočnými rameny, a tudíž v těchto bodech jsou sférické vazby, které umožňují natočení kolem všech os x, y a z zároveň. Posléze lze vyjádřit souřadnice bodů C v lokálním souřadnicovém systému takto:

$${}^TC_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^TC_2 = \begin{bmatrix} \frac{s_c}{2} \\ w_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^TC_3 = \begin{bmatrix} -\frac{s_c}{2} \\ w_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Kde:

$$w_A = \frac{\sqrt{3}}{6} s_A \quad u_A = \frac{\sqrt{3}}{3} s_A \quad w_C = \frac{\sqrt{3}}{6} s_C \quad u_C = \frac{\sqrt{3}}{3} s_C$$

Z kinematického diagramu víme, že je tvořen třemi uzavřenými vektorovými řetězci, které splňují následující rovnici:

$$\{{}^0A_i\} + \{{}^0L_i\} + \{{}^0l_i\} = \{{}^0T_T\} + [{}^0R] \{{}^TC_i\} = \{{}^0T_T\} + \{{}^TC_i\}; \quad i = 1,2,3 \quad (3.9)$$

Kde $[{}^0R]$ představuje rotaci pohyblivé platformy, která je nulová a tudíž se jedná o jednotkovou matici.

Z předešlé rovnice lze stanovit podmínku pro délku spodních ramen, která je vyjádřena takto:

$$l_i = |{}^0l_i| = | \{{}^0T_T\} + \{{}^TC_i\} - \{{}^0A_i\} - \{{}^0L_i\} |; \quad i = 1,2,3 \quad (3.10)$$

Pro výpočet délek je vhodnější umocnit velikosti vektorů na druhou, abychom se vyhnuli druhé odmocnině.

$$l_i^2 = \|\mathbf{l}_i\|^2 = l_{xi}^2 + l_{yi}^2 + l_{zi}^2 \quad (3.11)$$

Díky těmto vztahům posléze můžeme určit proměnou polohu středu platformy TCP ${}^0T_T = \{X, Y, Z\}^T$. Po dosazení konstant pro polohy spojů A_i a C_i , které jsme si vyjádřili, dostáváme vektory $\{{}^0L_i\}$, které jsou závislé na natočení jednotlivých ramen $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ v této podobě:

$${}^0L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\cos\theta_1 \\ -L\sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad {}^0L_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_2 \\ \frac{1}{2}L\cos\theta_2 \\ -L\sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad {}^0L_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_3 \\ \frac{1}{2}L\cos\theta_3 \\ -L\sin\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Dosazením všech výše uvedených vektorů můžeme vyjádřit

$${}^0l_1 = \begin{bmatrix} x \\ y + L\cos\theta_1 + a \\ z + L\sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad {}^0l_2 = \begin{bmatrix} x - \frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_2 + b \\ y - \frac{1}{2}L\cos\theta_2 + c \\ z + L\sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad {}^0l_3 = \begin{bmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_3 - b \\ y - \frac{1}{2}L\cos\theta_3 + c \\ z + L\sin\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Kde:

$$a = w_A - u_C$$

$$b = \frac{s_C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}w_A$$

$$c = w_C - \frac{1}{2}w_A$$

Na závěr můžeme dosadit tyto hodnoty do podmínky pro délku spodního ramene a dostáváme tři rovnice:

$$2L(y + a)\cos\theta_1 + 2zL\sin\theta_1 + x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya - l^2 = 0 \quad (3.14)$$

$$-L(\sqrt{3}(x + b) + y + c)\cos\theta_2 + 2zL\sin\theta_2 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2xb + 2yc - l^2 = 0 \quad (3.15)$$

$$L(\sqrt{3}(x - b) - y - c)\cos\theta_3 + 2zL\sin\theta_3 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 - 2xb + 2yc - l^2 = 0 \quad (3.16)$$

3.3.3. Inverzní úloha kinematiky (IPKS)

Cílem je získat převod známých souřadnic TCP na natočení všech tří pohonů zároveň. Otočné rameno se může pohybovat pouze v jedné rovině a zároveň koncový kloub, který pojí otočné rameno se vzpěrou, může opisovat pouze kružnici. Konkrétní poloha TCP je dána polohou tří kulových kloubů, které pojí plošinu a vzpěru. Druhý konec vzpěry, který se pojí s otočným ramenem, se čistě teoreticky může pohybovat po kulové ploše. Kvůli konstrukčním omezením je tato plocha značně omezena. Průnikem této omezené kulové plochy a plochy, ve

které se pohybuje rameno vznikne kružnice. Poloměr této kružnice je dán kolmou vzdáleností k této rovině. Dále průnikem kružnice ramene a této kružnice vznikají dva body. Volí se průsečík, který je více vzdálený od osy o . Druhý průsečík představuje tzv. redundantní řešení. Pokud by průnik byl právě jeden bod, jsou ramena v jedné rovině a jsou rovnoběžná. Tento případ není za reálných podmínek vhodný, protože vytváří nepřiměřenou zátěž na motor ramene.

3.3.4. Řešení IPKS numericky

Díky vyjádřeným transformačním rovnicím v předešlé kapitole můžeme jednoduše převést polohu TCP ${}^0T_T = \{X, Y, Z\}^T$ na úhlovou polohu jednotlivých motorů

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ numerickým přepsáním těchto rovnic do tvaru:

$$E_i \cos \theta_i + F_i \sin \theta_i + G_i = 0 \quad (3.17)$$

Kde:

$$E_1 = 2L(y + a)$$

$$F_1 = 2zL$$

$$G_1 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya - l^2$$

$$E_2 = -L(\sqrt{3}(x + b) + y + c)$$

$$F_2 = 2zL$$

$$G_2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2xb + 2yc - l^2$$

$$E_3 = L(\sqrt{3}(x - b) - y - c)$$

$$F_3 = 2zL$$

$$G_3 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 - 2xb + 2yc - l^2$$

Tento tvar rovnice se často nepoživá. Většina robotů a mechanismů je řízena touto rovnicí, ale ve tvaru tzv. **Tangent Half-Angle Substitution**:
 Jestliže definujeme:

$$t_i = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad (3.18)$$

Pak vyplývá:

$$\cos \theta_i = \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2} \quad \sin \theta_i = \frac{2t_i}{1 + t_i^2}$$

Posléze po dosazení do rovnice získáváme tvar:

$$E_i \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2} + F_i \frac{2t_i}{1 + t_i^2} + G_i = 0 \quad (3.19)$$

$$E_i(1 - t_i^2) + F_i(2t_i) + G_i(1 + t_i^2) = 0$$

$$(G_i - E_i)t_i^2 + (2F_i)t_i + (G_i + E_i) = 0$$

Vyjádřením dostáváme tvar:

$$t_{i1,2} = \frac{-F_i \pm \sqrt{E_i^2 + F_i^2 - G_i^2}}{G_i - E_i} \quad (3.20)$$

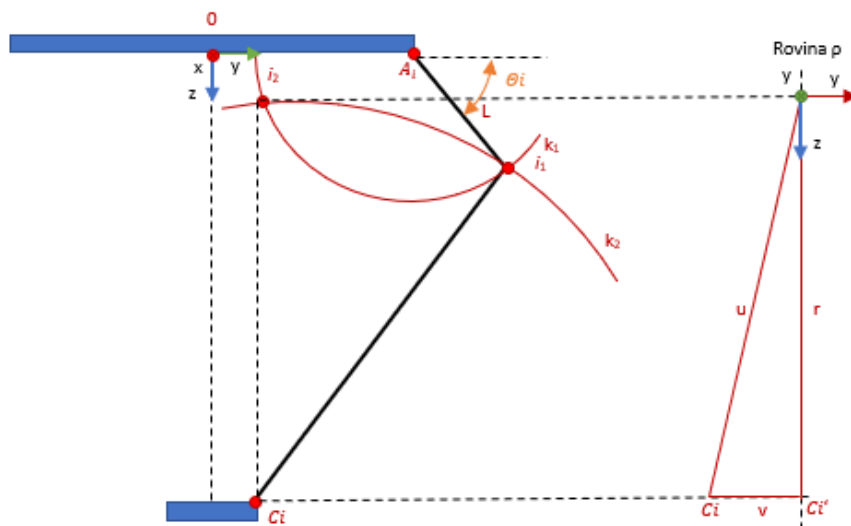
Poté můžeme výsledek dosadit do:

$$\theta_i = 2 \tan^{-1}(t_i) \quad (3.21)$$

Po částečném výpočtu z kvadratického tvaru získáme dva výsledky pro t_i , čímž dostáváme 8 možných úhlových poloh. Jak bylo v předešlé kapitole řečeno, volí se bod, který je dále od osy, tudíž volíme menší úhel θ_i , čímž dostáváme jednu možnou kombinaci natočení všech tří motorů.

3.3.5. Řešení IPKS trigonometricky

Jedním možným řešením pro přepočítání souřadnic TCP je použití trigonometrie. Algoritmus pro řešení inverzní úlohy je následující:



Obrázek 14: Schéma pro IPKS trigonometricky

1. Určení polohy kloubů platformy 0C_i v absolutním souřadnicovém systému při známé poloze TCP:

$${}^0C_i = {}^T C_i + {}^0 T_T = \begin{pmatrix} {}^T C_{Xi} \\ {}^T C_{Yi} \\ {}^T C_{Zi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

2. Určení roviny horního ramene v normálovém tvaru:

$$\begin{aligned} (OA_i) &= {}^0 A_i - O \\ (OC_i) &= {}^0 C_i - O \\ (OA_i) \times (OC_i) &= (o; p; q) \\ s &= -1(o \cdot {}^0 A_{Xi} + p \cdot {}^0 A_{Yi} + q \cdot {}^0 A_{Zi}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\rho: ox + py + qz + s = 0 \quad (3.24)$$

3. Určení vzdálenosti v kloubu platformy 0P_i od roviny ρ

$$\begin{aligned} x &= {}^0A_{Xi} - t \cdot o \\ y &= {}^0A_{Yi} - t \cdot p \\ z &= {}^0A_{Zi} - t \cdot q \end{aligned} \quad (3.25)$$

Po dosazení do rovnice roviny ρ :

$$t = \frac{-s - (o \cdot {}^0A_{Xi} + p \cdot {}^0A_{Yi} + q \cdot {}^0A_{Zi})}{(o^2 + p^2 + q^2)} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} {}^0C'_{Xi} &= {}^0C_{Xi} + t \cdot o \\ {}^0C'_{Yi} &= {}^0C_{Yi} + t \cdot p \\ {}^0C'_{Zi} &= {}^0C_{Zi} + t \cdot q \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$v = \|{}^0C'_i - {}^0C_i\| \quad (3.28)$$

4. Výpočet poloměru r kružnice k_2 :

$$r = \sqrt{u^2 - v^2} \quad (3.29)$$

5. Určení průsečíků $i_{1,2}$ kružnic $k_{1,2}$

$$k_1: z^2 + y^2 = L^2 \quad (3.30)$$

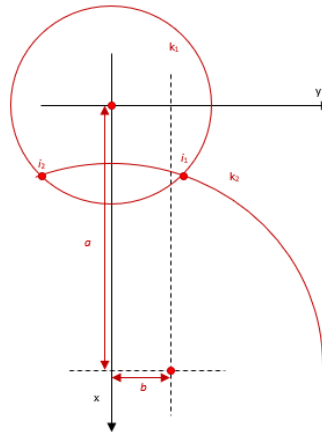
$$k_2: (z - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (3.31)$$

Kde:

$$a = {}^0C'_{Zi} - {}^0A_{Zi} \quad (3.32)$$

$$b = \pm \| [{}^0C'_{Yi}; {}^0C'_{Zi}] - [{}^0A_{Yi}; {}^0A_{Zi}] \| \quad (3.33)$$

Z průsečíků $i_{1,2}$ takový, který leží dále od osy z .



Obrázek 15: Zobrazení průsečíku kružnic

6. Výpočet úhlového natočení ramene θ_i

$$D = i_1 - O \quad (3.34)$$

$$E = [0; -1; 0] - O \quad (3.35)$$

$$\theta_i = \arccos\left(\frac{D \cdot E}{|D| \cdot |E|}\right) \quad (3.36)$$

3.3.6. Přímá úloha kinematiky (FPKS)

Dopředná, nebo častěji označována jako přímá paralelní kinematická úloha je spočívá ve výpočtu kartézských souřadnic $[x, y, z]^T$ TCP, který vychází ze známých úhlů natočení motorů $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$. Tento výpočet je využíván pro kalibraci mechanismů. Výpočet, který vychází z kinematického modelu, je značně složitý a vede většinou k více výsledným pozicím, z nichž některé můžeme vyloučit kvůli konstrukčním možnostem. Díky zamezení rotace pohyblivé platformy je možno výpočet značně zjednodušit.

3.3.7. Řešení a problematika FPKS

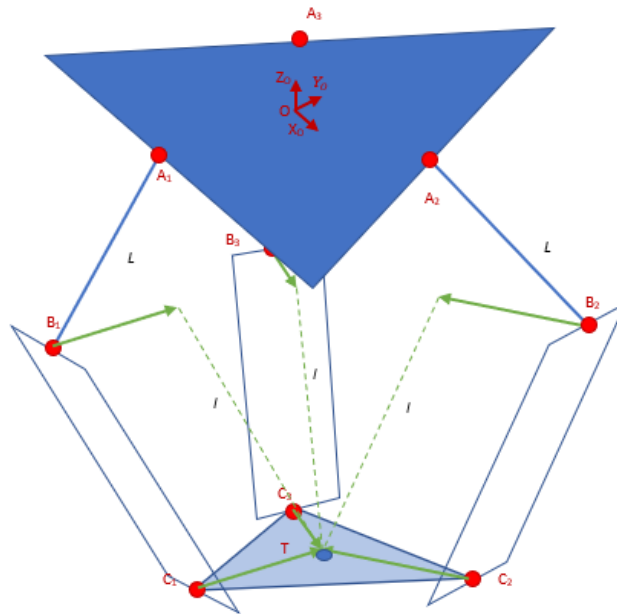
Pokud známe úhly natočení jednotlivých ramen $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$, můžeme spočítat vektory pro spojení jednotlivých ramen a vzpěr ${}^0B_i = {}^0A_i + {}^0L_i$, $i = 1, 2, 3$. Dále můžeme tyto body posunout ve vodorovné rovině o parametry pohyblivé platformy ke středu ${}^0B_{iv} = {}^0B_i - {}^0C_i$, $i = 1, 2, 3$, abychom tak dostali virtuální středy kulových ploch, pomocí kterých získáme přesnou TCP.

$${}^0B_{1v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_A - L\cos\theta_1 + u_p \\ -L\sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad {}^0B_{2v} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(w_A + L\cos\theta_2) - \frac{s_C}{2} \\ \frac{1}{2}(w_A + L\cos\theta_2) - w_C \\ -L\sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$${}^0B_{3v} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(w_A + L\cos\theta_3) + \frac{s_C}{2} \\ \frac{1}{2}(w_A + L\cos\theta_3) - w_C \\ -L\sin\theta_3 \end{bmatrix}$$

Řešením této úlohy je TCP neboli 0T_T , který vznikne průsečíkem tří kulových ploch o parametrech:

$$({}^0B_{iv}, l) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.38)$$



Obrázek 16: Středů virtuálních koulí

3.3.8. Řešení FPKS numericky

Jak už jsem v předešlé kapitole popsal. Řešením dopředné úlohy kinematiky je pomocí kružnic. Obecná rovnice pro kružnici je se středem v bodě $S = \{x_i, y_i, z_i\}$ a poloměrem r :

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r^2 \quad (3.39)$$

Dále tento výraz můžeme rozepsat na:

$$x^2 - 2x_ix + x_i^2 + y^2 - 2y_iy + y_i^2 + z^2 - 2z_iz + z_i^2 = r^2 \quad (3.40)$$

Aplikujeme jej na náš případ, kdy středem kružnice je ${}^0B_{iv}$ kde $i = 1, 2, 3$ s poloměrem l :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 + z^2 - 2z_1z + z_1^2 &= l^2 \\ x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 + z^2 - 2z_2z + z_2^2 &= l^2 \\ x^2 - 2x_3x + x_3^2 + y^2 - 2y_3y + y_3^2 + z^2 - 2z_3z + z_3^2 &= l^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Kde:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= -w_A - L\cos\theta_1 + u_p \\ z_1 &= -L\sin\theta_1 \\ x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(w_A + L\cos\theta_2) - \frac{s_C}{2} \\ y_2 &= \frac{1}{2}(w_A + L\cos\theta_2) - w_C \\ z_2 &= -L\sin\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(w_A + L\cos\theta_3) + \frac{s_C}{2} \\y_3 &= \frac{1}{2}(w_A + L\cos\theta_3) - w_C \\z_3 &= -L\sin\theta_3\end{aligned}$$

Získali jsme tak tři nelineární rovnice o třech neznámých x , y , z , které nám určují průsečík kulových ploch. Abychom získali řešení, musíme rovnice ze 3.41 sloučit do dvou, ze kterých získáme funkce $x = f(z)$ a $z = f(z)$, které posléze doplníme do původní třetí rovnice.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad (3.42)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad (3.43)$$

Kde:

$$a_{11} = 2(x_3 - x_1) \quad a_{21} = 2(x_3 - x_2) \quad b_1 = -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

$$a_{12} = 2(y_3 - y_1) \quad a_{22} = 2(y_3 - y_2) \quad b_2 = -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

$$a_{13} = 2(z_3 - z_1) \quad a_{23} = 2(z_3 - z_2)$$

Dále tyto rovnice lze zapsat:

$$y = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x - \frac{a_{13}}{a_{12}}z \quad (3.44)$$

$$y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x - \frac{a_{23}}{a_{22}}z \quad (3.45)$$

Po sloučení těchto dvou rovnic (z rovnice 3.45 odečteme 3.44) můžeme vyjádřit $x = f(z)$:

$$x = f(z) = a_4z + a_5 \quad (3.46)$$

Kde:

$$a_4 = -\frac{a_2}{a_1} \quad a_5 = -\frac{a_3}{a_1} \quad a_1 = \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad a_2 = \frac{a_{13}}{a_{12}} - \frac{a_{23}}{a_{22}} \quad a_3 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{b_1}{a_{12}}$$

Tento výraz pak vyjádříme zpět z rovnice 3.45, kde získáme $z = f(y)$:

$$z = f(y) = a_6y + a_7 \quad (3.47)$$

Kde:

$$a_6 = \frac{-a_{21}a_4 - a_{23}}{a_{22}} \quad a_7 = \frac{b_2 - a_{21}a_5}{a_{22}}$$

Poté můžeme dosadit $x = f(z)$ a $z = f(z)$ do první z rovnic 3.41 a vyjádřit jej ve tvaru:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (3.48)$$

Kde:

$$a = a_4^2 + 1 + a_6^2$$

$$b = 2a_4(a_5 - x_1) - 2z_1 + 2a_6(a_7 - y_1)$$

$$c = a_5(a_5 - 2x_1) + a_7(a_7 - 2y_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Posléze získáváme dvě různá řešení:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.49)$$

Poté, co získáme hodnotu pro souřadnici z , můžeme dopočítat zbylé dvě souřadnice. Konstrukční řešení delta robota nám z těchto bodů určí jeden. Náš typ delta robota, který má pohyblivou platformu pod jednotlivými rameny, umožňuje bod, který je dále od pevné desky a leží pod ní.

3.3.9. Rovnice rychlosti

Kinematické rovnice rychlosti vycházejí z transformačních rovnic a to z jejich prvních derivací, u kterých nesmíme zapomenout, že kartézské souřadnice jsou funkce proměnných úhlů θ_i ; $i = 1, 2, 3$, což výpočet značně zkomplikuje.

Po zderivování dosáhneme tvaru rovnic:

$$2Ly\dot{c}\cos\theta_1 - 2L(y+a)\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + 2Lz\dot{z}\sin\theta_1 + 2Lz\dot{\theta}\cos\theta_1 + 2x\dot{x} + 2(y+a)\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \quad (3.40)$$

$$-L(\sqrt{3}\dot{x} + \dot{y})\cos\theta_2 + L(\sqrt{3}(x+b) + y + c)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + 2Lz\dot{z}\sin\theta_2 + 2Lz\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + 2(x+b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \quad (3.41)$$

$$L(\sqrt{3}\dot{x} - \dot{y})\cos\theta_3 - L(\sqrt{3}(x-b) - y - c)\dot{\theta}_3\sin\theta_3 + 2Lz\dot{z}\sin\theta_3 + 2Lz\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + 2(x-b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \quad (3.42)$$

Tyto rovnice přepíšeme do tvaru:

$$Ly\dot{c}\cos\theta_1 + Lz\dot{z}\sin\theta_1 + x\dot{x} + (y+a)\dot{y} + z\dot{z} = L(y+a)\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - Lz\dot{\theta}\cos\theta_1$$

$$-L(\sqrt{3}\dot{x} + \dot{y})\cos\theta_2 + 2Lz\dot{z}\sin\theta_2 + 2(x+b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = -L(\sqrt{3}(x+b) + y + c)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - 2Lz\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$L(\sqrt{3}\dot{x} - \dot{y})\cos\theta_3 + 2Lz\dot{z}\sin\theta_3 + 2(x-b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = L(\sqrt{3}(x-b) - y - c)\dot{\theta}_3\sin\theta_3 - 2Lz\dot{\theta}_3\cos\theta_3$$

Posléze tyto rovnice můžeme vyjádřit v maticovém tvaru:

$$[A]\{\dot{X}\} = [B]\{\dot{\theta}\} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} x & y+a+L\cos\theta_1 & z+L\sin\theta_1 \\ 2(x+b)-\sqrt{3}L\cos\theta_2 & 2(y+c)-L\cos\theta_2 & 2(z+L\sin\theta_2) \\ 2(x-b)+\sqrt{3}L\cos\theta_3 & 2(y+c)-L\cos\theta_3 & 2(z+L\sin\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Kde:

$$b_{11} = L[(y+a)\sin\theta_1 - z\cos\theta_1]$$

$$b_{22} = -L[(\sqrt{3}(x+b) + y + c)\sin\theta_2 + 2z\cos\theta_2]$$

$$b_{33} = L[(\sqrt{3}(x-b) - y - c)\sin\theta_3 - 2z\cos\theta_3]$$

3.4. Delta robot s rameny proměnlivé délky

Delta robot s rameny proměnlivé délky je velmi podobný delta robotovi popsáném v předešlé kapitole. Hlavní rozdíl mezi těmito typy spočívá v tom, že ke změně pozice pohyblivé platformy využívá tři lineárně posuvná ramena místo třech otočných. Tato změna zásadně zjednodušuje kinematické rovnice a následně úlohy typu IPKS i FPKS. Tyto tři ramena proměnlivé délky jsou nejčastěji ve směru osy Z a mají jen jeden stupeň volnosti, tudíž v rovnicích se nenalézají žádné goniometrické funkce úhlů.

Jak je vidět na obr. 17 pohyblivá platforma je pojena se základnou šesti identickými neproměnlivými rameny $l_i; i = 1,2,3$ zapojené do paralelogramu, které jsou spojeny s rameny proměnlivé délky $L_i; i = 1,2,3$, které jsou posléze upevněny k základně. Jedinou kontrolovanými proměněnými jsou tedy délky ramen

3.4.1. Souřadnicové systémy robota

3.4.1.1. Absolutní souřadnicový systém

V tomto souřadnicovém systému uživatel jednoduše určí pohyb celé soustavy. Počátek absolutního souřadnicového systému je pevně spojen se základnou. Uživatel pracuje v uživatelském systému, který je vůči absolutnímu souřadnicovému systému posunutý do středu základny. V absolutním souřadnicovém systému jsou dány:

- TCP- střed nástroje platformy O :

$$O = (X, Y, Z)^T \quad (3.3)$$

- Pozice spojů základny s rameny proměnlivé délky, které jsou uchyceny v bodech:

$$A_i = (A_{xi}, A_{yi}, A_{zi})^T; i = 1,2,3 \quad (3.4)$$

3.4.1.2. Lokální souřadnicový systém

Lokální souřadnicový systém je pevně spojen s pohyblivou platformou a nachází se optimálně v jeho středu. Udává nám polohu kloubů, které pojí plošinu se vzpěrami. Za účelem zjednodušení transformace souřadnic stanovíme podmínku, že pohyblivá platforma je rovnoběžná s pevnou deskou, a tudíž také lokální souřadnicový systém vůči absolutnímu má nulové natočení.

- Lokální souřadnice kloubů:

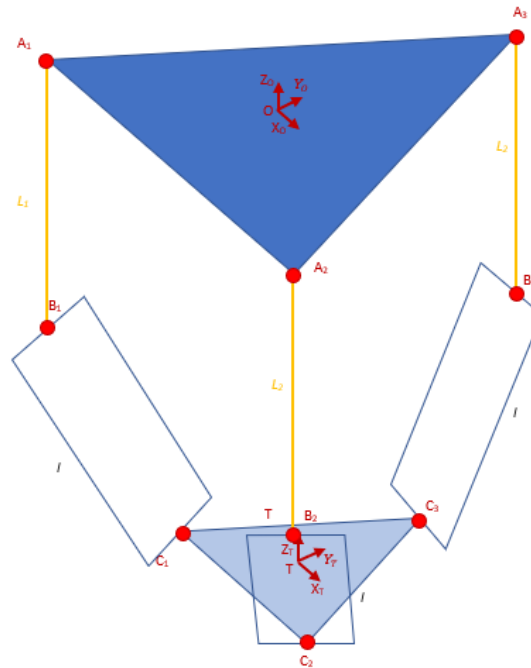
$$C_i = (C_{xi}, C_{yi}, C_{zi})^T; i = 1,2,3 \quad (3.5)$$

3.4.1.3. Souřadnice pohonů

Každá poloha TCP v prostoru pracovního pole delta robota odpovídá právě jedna konfigurace délek ramen. Pro stanovení výsledné polohy je každému ramenu dán příkaz o jeho poloze vůči základně.

- Délky proměnlivých ramen:

$$L = (L_1, L_2, L_3)^T \quad (3.44)$$

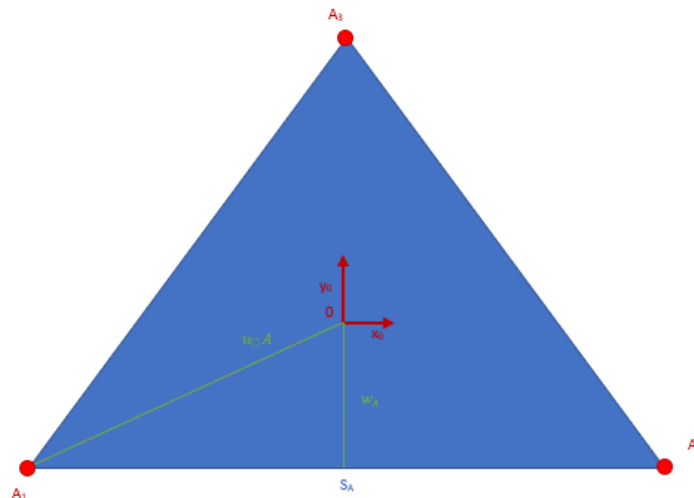


Obrázek 17: Schéma delta robota s rameny proměnlivé délky

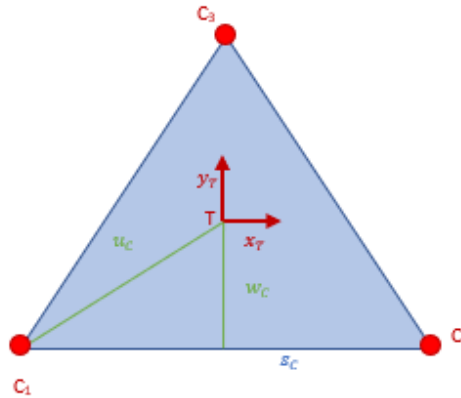
Tento typ robota je známý jako the Linear Delta Robot nebo také jako Linear-Rail Delta robot a byl představen dříve než Delta robot s otočnými rameny.

3.4.2. Transformační rovnice

Transformační rovnice u tohoto typu delta robota je zásadně jednodušší než u předchozího typu. U tohoto delta robota si také souřadnicové systémy neodpovídají a závislost u tohoto typu je nelineární. Každá poloha je určena specifickým prodloužením jednotlivých ramen, s proto pohony vzpěr musí kooperovat.



Obrázek 18: Schéma pevné platformy



Obrázek 19: Schéma pohyblivé platformy

Proměnlivá ramena jsou spojena v bodech A_i se základnou a neproměnlivá ramena jsou spojena v bodech C_i s pohyblivou platformou. Obě platformy jsou k sobě rovnoběžné a jejich strany jsou popsány konstantami S_A a s_C .

$${}^oA_1 = \begin{bmatrix} -\frac{S_A}{2} \\ -W_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^oA_2 = \begin{bmatrix} \frac{S_A}{2} \\ -W_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^oA_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ U_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$${}^TC_1 = \begin{bmatrix} -\frac{s_C}{2} \\ -W_C \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^TC_2 = \begin{bmatrix} \frac{s_C}{2} \\ -W_C \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^TC_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ U_C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Kde:

$$W_A = \frac{\sqrt{3}}{6} S_A \quad U_A = \frac{\sqrt{3}}{3} S_A \quad W_C = \frac{\sqrt{3}}{6} s_C \quad U_C = \frac{\sqrt{3}}{3} s_C$$

Z kinematického diagramu víme, že je tvořen třemi uzavřenými vektorovými řetězci, které splňují následující rovnici:

$$\{{}^oA_i\} + \{{}^oL_i\} + \{{}^oL_i\} = \{{}^oT_T\} + [{}^oR] \{{}^TC_i\} = \{{}^oT_T\} + \{{}^TC_i\}; \quad i = 1,2,3 \quad (3.9)$$

Kde $[{}^oR]$ představuje rotaci pohyblivé platformy, která je nulová a tudíž se jedná o jednotkovou matici.

Z předešlé rovnice lze stanovit podmínku pro délku spodních ramen, která je vyjádřena takto:

$$l_i = \|\{{}^oL_i\}\| = \|\{{}^oT_T\} + \{{}^TC_i\} - \{{}^oA_i\} - \{{}^oL_i\}\|; \quad i = 1,2,3 \quad (3.10)$$

Pro výpočet délek je vhodnější umocnit velikosti vektorů na druhou, abychom se vyhnuli druhé odmocnině.

$$l_i^2 = \|\{{}^TL_i\}\|^2 = l_{xi}^2 + l_{yi}^2 + l_{zi}^2 \quad (3.11)$$

Dále určíme proměnou kartesiánského systému ${}^oP_p = \{X, Y, Z\}^T$. Po dosazení konstant pro polohy spojů P a B, které jsme si vyjádřili, dostáváme vektory $\{{}^oL_i\}$, které jsou závislé na natočení jednotlivých ramen $L = (L_1, L_2, L_3)^T$ v této podobě:

$${}^oL_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_i \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.47)$$

Posléze dosazením tohoto jednoduchého vektoru získáme:

$${}^ol_1 = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + L_1 \end{bmatrix} \quad {}^ol_2 = \begin{bmatrix} x - a \\ y + b \\ z + L_2 \end{bmatrix} \quad {}^ol_3 = \begin{bmatrix} x \\ y + c \\ z + L_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Kde:

$$a = \frac{S_A}{2} - \frac{S_C}{2}$$

$$b = W_A - w_C$$

$$c = u_C - U_A$$

Dále tyto vektory můžeme dosadit do podmínky spodního ramene a dostáváme tři rovnice:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by + 2zL_1 + L_1^2 - l^2 = 0 \quad (3.49)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by + 2zL_2 + L_2^2 - l^2 = 0 \quad (3.50)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy + 2zL_3 + L_3^2 - l^2 = 0 \quad (3.51)$$

3.4.3. Nepřímá úloha kinematiky (IPKS)

Cílem inverzní kinematiky je získat převod souřadnic TCP na prodloužení všech tří ramen L_i ; $i = 1, 2, 3$. Ramena se pohybují pouze v ose Z a zároveň jsou uloženy pod pevnou platformou. Dále pohyblivá platforma je spojena třemi vzpěry, které se teoreticky mohou pohybovat po kulové ploše. Kvůli konstrukčním omezením je tato plocha značně omezená. U tohoto typu robota nelze IPKS řešit trigonometrií právě kvůli proměnlivým délkám ramene.

3.4.4. Řešení IPKS numericky

Díky vyjádřeným transformačním rovnicím v předešlé kapitole můžeme jednoduše převést polohu TCP ${}^oP_p = \{X, Y, Z\}^T$ na úhlovou polohu jednotlivých motorů $L = (L_1, L_2, L_3)^T$ numerickým přepsáním těchto rovnic do tvaru:

$$L_i^2 + 2zL_i + D_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.52)$$

Kde:

$$D_1 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by - l^2$$

$$D_2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by - l^2$$

$$D_3 = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy - l^2$$

Posléze můžeme díky těmto konstantám přepsat předešlou rovnici a vyjádřit tím tak neznámou L_i vztahem:

$$L_i = -z \pm \sqrt{z^2 - D_i} \quad i = 1,2,3 \quad (3.53)$$

Z kvadratické rovnice nám vychází dvě řešení pro každou dvojici ramen. Tyto výsledky jsou řešením pro odlišnou polohu, kdy rameno konstantní délky směřuje nahoru a nebo dolů. Pro náš typ úlohy je vhodné zvolit kladný výsledek, neboť tato kombinace méně narušuje pracovní pole. Dále je důležité, že část řešení, a to když $z^2 < D$, je imaginární a tudíž v praxi tyto případy nikdy nenastanou. Když nastane případ, že se $z^2 = D$, znamená to, že se jedná o stav, kdy ramena konstantní délky jsou v jedné vodorovné rovině.

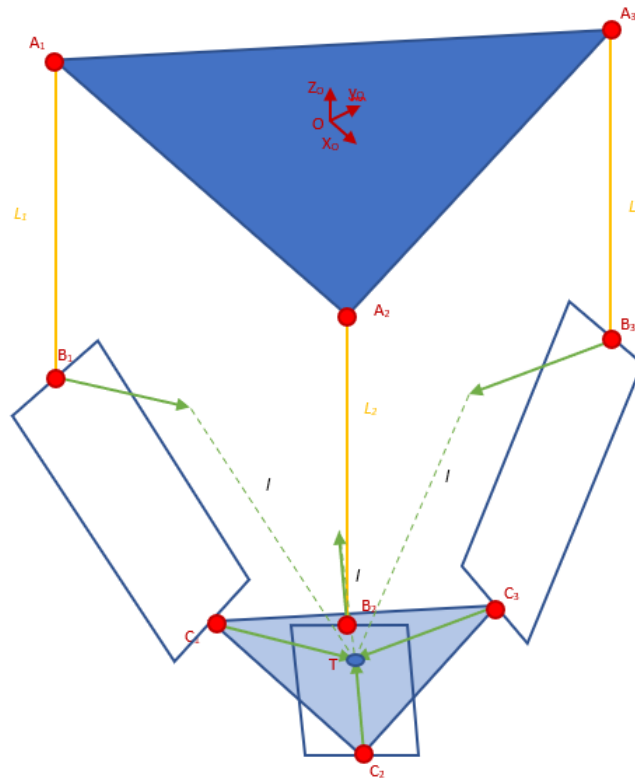
3.4.5. Dopředná úloha kinematiky (FPKS)

U tohoto typu delta robota je výpočet dopředné kinematické úlohy snazší než u předchozího typu. Pokud známe prodloužení jednotlivých ramen $\{L_1, L_2, L_3\}$, které jsou svislé, získáváme polohu jednotlivých spojení ramen a vzhledem k 0B_i . Dále posunutím těchto bodů ve vodorovné rovině o parametry pohyblivé platformy ke středu ${}^0B_{iv} = {}^0B_i - {}^TC_i$, $i = 1,2,3$, abychom tak dostali virtuální středy kulových ploch, pomocí kterých získáme přesnou TCP.

$${}^0A_{1v} = \begin{bmatrix} -\frac{S_A}{2} + \frac{S_C}{2} \\ -W_A + W_C \\ -L_1 \end{bmatrix} \quad {}^B A_{2v} = \begin{bmatrix} \frac{S_A}{2} - \frac{S_C}{2} \\ -W_A + W_C \\ -L_2 \end{bmatrix} \quad {}^B A_{3v} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_A - u_C \\ -L_3 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Řešením této úlohy je TCP neboli 0T_T , který vznikne průsečíkem tří kulových ploch o parametrech:

$$({}^0B_{iv}, l) \quad i = 1,2,3 \quad (3.55)$$



Obrázek 20: Středy virtuálních koulí

3.4.6. Řešení FPK numericky

Pomocí transformačních rovnic jsme schopni získat polohu nástroje, která je závislá na proměnném prodloužení všech tří ramen L_i $i = 1, 2, 3$. V tomto případě je výpočet numerického řešení také jednodušší než u robota s otočnými rameny.

Transformační rovnice jsou ve tvaru:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by + 2zL_1 + L_1^2 - l^2 = 0 \quad (3.66)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by + 2zL_2 + L_2^2 - l^2 = 0 \quad (3.67)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy + 2zL_3 + L_3^2 - l^2 = 0 \quad (3.68)$$

Odečtením druhé rovnice od první získáváme lineární závislost souřadnice x na souřadnici z :

$$x = f(z) = dz + e \quad (3.69)$$

Kde:

$$d = \frac{L_2 - L_1}{2a} \quad e = \frac{L_2^2 - L_1^2}{4a}$$

Po odečtení třetí rovnice od první a následné dosazení závislosti $x = f(z)$ získáme další lineární funkci pro závislou souřadnici y :

$$y = g(z) = Dz + E \quad (3.70)$$

Kde:

$$D = \frac{L_3 - L_1 - ad}{b - c} \quad E = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - 2ae + L_3^2 - L_1^2}{2(b - c)}$$

Substitucí dosadíme obě dvě závislosti do třetí rovnice, čímž získáme kvadratickou rovnici s proměnou souřadnicí z:

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (3.71)$$

Kde:

$$A = d^2 + D^2 + 1$$

$$B = 2(de + DE + cD + L_3)$$

$$C = e^2 + E^2 + c^2 + 2cE + L_3^2 - l^2$$

Výsledné vztahy lze vyjádřit:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.72)$$

$$x_{1,2} = f(z_{1,2}) = dz_{1,2} + e \quad (3.73)$$

$$y_{1,2} = g(z_{1,2}) = Dz_{1,2} + E \quad (3.74)$$

I v tomto případě z výsledných rovnic vycházejí dvě možnosti. Kvůli konstrukčním možnostem v našem případě můžeme uvažovat jen pro zápornou hodnotu z.

3.4.7. Rovnice rychlosti

Kinematické rovnice rychlosti vycházejí z transformačních rovnic mechanismu a to z jejich prvních derivací, u kterých nesmíme zapomenout, že kartézské souřadnice jsou v tomto případě funkce závislé na proměnném prodloužení jednotlivých ramen a tudíž i na proměnné souřadnici z. I v tomto jsou výsledné rovnice zásadně jednodušší než při předchozím případě.

Po zderivování dosáhneme tvaru rovnic:

$$(x + a)\dot{x} + (y + b)\dot{y} + (z + L_1)\dot{z} = -(z + L_1)\dot{L}_1 \quad (3.75)$$

$$(x - a)\dot{x} + (y + b)\dot{y} + (z + L_2)\dot{z} = -(z + L_2)\dot{L}_2 \quad (3.76)$$

$$x\dot{x} + (y + c)\dot{y} + (z + L_3)\dot{z} = -(z + L_3)\dot{L}_3 \quad (3.77)$$

Posléze tyto rovnice můžeme vyjádřit v maticovém tvaru:

$$[A]\{\dot{X}\} = [B]\{\dot{L}\} \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} x+a & y+b & z+L_1 \\ x-a & y+b & z+L_2 \\ x & y+c & z+L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z+L_1 & 0 & 0 \\ 0 & z+L_2 & 0 \\ 0 & 0 & z+L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix}$$

4. Analýza manipulovatelnosti delta robotů

Cílem této bakalářské práce je porovnání delta robotů, u kterých jsem v předešlé kapitole popsal kinematický model, z hlediska manipulovatelnosti v příslušném pracovním poli. K této analýze používám mnou zvolené programové prostředí MATLAB, ze kterého výsledky pro porovnání jednotlivých pracovních polí jsou dostačující.

Je důležité zmínit, že k plnohodnotné celkové analýze je zapotřebí se zabývat také optimálními délkami ramen, velikosti zástavbového prostoru, velikost pracovního prostoru a také ovlivnění pracovního prostoru konstrukčním provedením a omezeními, atd., kterými se tato bakalářská práce nezabývá.

4.1. Manipulovatelnost

Tento termín manipulovatelnost robota je definován jako schopnost robota přijmout změnu polohy a orientace jeho koncového efektoru pro danou konfiguraci kloubů a vzpěr.[17,18]

Je důležité zkoumat manipulovatelnost robotického manipulátoru, protože je to jeden z nezanedbatelných parametrů jeho funkčnosti. Tento faktor má velký vliv na celkový design a konstrukční řešení robota. Tato vlastnost nám určuje velikost a tvar pracovního prostoru, ve kterém robot může bezpečně operovat. Získáme také informaci, ve které pozici je manipulátor neovladatelný.

Z matematického hlediska se snažíme přiřadit číselnou hodnotu od 0 do 1, při čemž 0 vyjadřuje neovladatelnost, proto nabývá nejnižší možné hodnoty, a 1 naopak s nejvyšší manipulovatelností. Jednotlivým pozicím v pracovním poli robota přiřadíme hodnotu tak, že vysokou hodnotu bodu, ve kterém při stejném, malém pohybu individuálních kloubů a vzpěr dostáváme podobné pohyby výsledného efektoru a naopak. Jinými slovy chceme-li vygenerovat malé pohyby výsledného efektoru v různých směrech, musíme provést malé pohyby v systému pohonů.

Při matematickém rozboru zjistíme, že tato vlastnost je vyjádřena převrácenou hodnotou podmíněnosti jakobiánu manipulátoru. Zde uvádím jednotlivé tvary pro obě konstrukční řešení delta robotů:

$$[A]\{\dot{X}\} = [B]\{\dot{\theta}\} \quad (3.53)$$

$$[A]\{\dot{X}\} = [B]\{\dot{L}\} \quad (3.78)$$

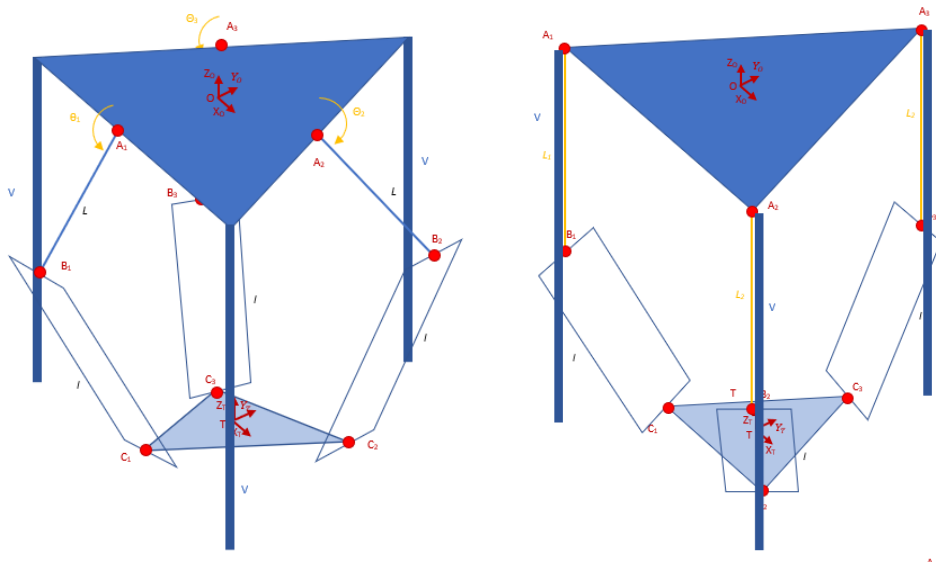
$$J = \text{inv}[B] * [A] \quad (4.1)$$

$$D = \frac{1}{\text{cond}(J)} \quad (4.2)$$

4.2. Vstupní parametry

K porovnání polí z hlediska manipulovatelnosti je důležité stanovit takové podmínky a vstupní parametry, abychom mohli z dané analýzy vyvodit jednoznačný závěr. Vzhledem k obvyklým požadavkům 3D tisku pro běžného spotřebitele jsem tedy zvolil stejný výchozí zástavbový prostor, který vycházíme tedy, že obě základové desky jsou stejných rozměrů a jsou umístěny nad pracovním prostorem robotů. S přihlédnutím na modely 3D tiskáren pro běžného spotřebitele, které se nachází na aktuálním trhu, jsem zvolil, že základní deska o tvaru stejnostranného trojúhelníku se stranou $S_A = 400 \text{ mm}$ je vynesena do výšky také 400 mm , ve které ji drží tři nehybná ramena ve vrcholech desky. Pro případ s proměnlivými rameny jsou v těchto vrcholech uchyceny také pohony a samotná ramena pro konstrukční řešení s proměnlivými rameny. Pro řešení s otočnými rameny jsou pohony ramen uchyceny uprostřed stran základní desky.

Jak už jsem zmínil, s touto analýzou je také úzce spjata se zkoumáním optimální délky jednotlivých neproměnlivých ramen. K odhadu optimálních délek neproměnlivých ramen při konstrukčním řešení s otočnými rameny jsem použil kalkulátor z webové stránky uvedený v použité literatuře pod bodem [19]. Po kalkulaci jsem dospěl k závěru, že optimální délka ramen je $L = 300 \text{ mm}$ a $l = 500 \text{ mm}$. U konstrukčního řešení s proměnlivými délkami ramen jsem použil dvě délky $l = 300 \text{ mm}$, a $l = 280 \text{ mm}$.



Obrázek 21: Konstrukční schéma Delta robotů

4.3. Postup analýzy

K vytvoření analýzy manipulovatelnosti pracovního prostoru je zapotřebí sestavení kódu, který využívá kinematický model a jeho vstupní parametry. Lze si zvolit jednotlivé typy úloh, které jsou popsány v předešlé kapitole. Různé postupy úloh se ve výsledku, tedy v hodnotě manipulovatelnosti, nijak neliší, avšak liší se ve způsobu programování. Zvolil jsem k vytvoření programu metodu IPKS, neboť tato metoda vychází ze známé polohy efektoru, což pro vytvoření souvislého pracovního pole je vhodnější a výsledný graf přehlednější.

Jelikož vycházíme ze znalosti polohy výsledného efektoru, musíme vytvořit program tak, aby k jednotlivým pozicím dopočítal neznámé parametry, nebo-li dopočítal hodnoty natočení jednotlivých otočných ramen $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$, nebo u druhého případu prodloužení ramen $L = (L_1, L_2, L_3)^T$. Dále je zapotřebí pracovní prostor omezit podmínkami příslušných

konstrukčních omezení. Posléze program může k jednotlivé pozici přiřadit příslušnou hodnotu manipulovatelnosti.

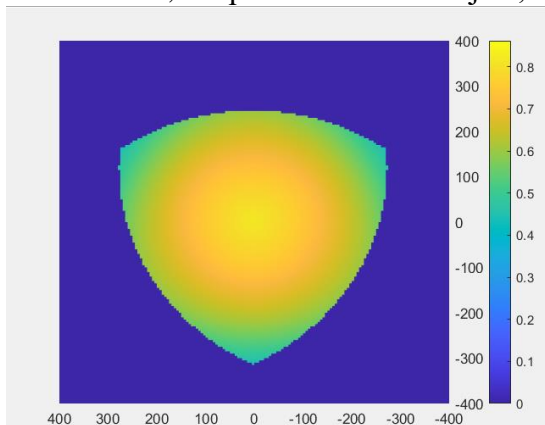
K vytvoření programu jsem použil funkci for cyklus, který zmapoval jednotlivé body v pracovním poli robota. Souřadnice analyzovaného pole, které jsou zapsány vůči počátku základní desky, jsou omezeny na množiny $O = (X, Y, Z)^T = [(-200, 200), (-200, 200), (-400, 0)]$. Následně jsem použil k vytvoření grafu funkci figure a slice, díky které lze zobrazit pole v jednotlivých řezech.

4.4. Výsledek analýzy

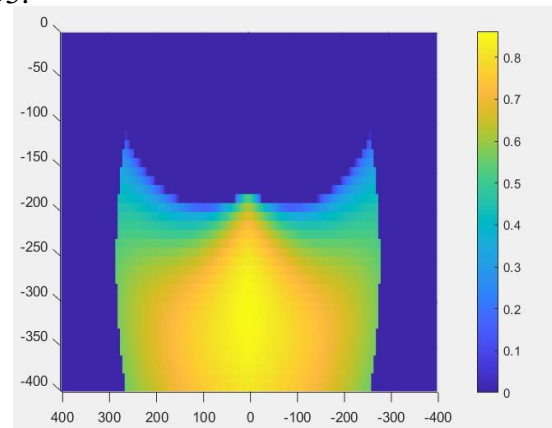
Výsledkem analýzy je zmapování celkového pracovního prostoru z hlediska manipulovatelnosti a vytvoření jeho 3D grafu, kterého lze vyčíst manipulovatelnosti příslušných bodů.

4.4.1. Delta robot s otočnými rameny

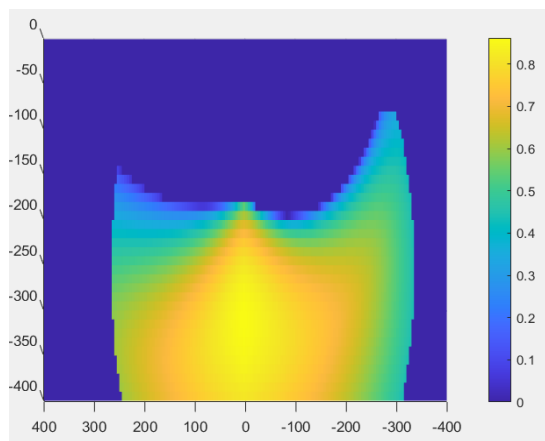
Z výsledného pole manipulovatelnosti u tohoto konstrukčního řešení je zjevné, že manipulátor může operovat i mimo zástavbový prostor celé konstrukce. Také lze usoudit, že plocha s vyšší manipulovatelností s rostoucí hodnotou z se zmenšuje. Dále z výsledného pole je zjevné, že by bylo vhodné celý systém upevnit shora nebo posunout upevňovací ramena dále od středu, neboť v tomto případě zasahují do využitelného prostoru. Maximální hodnota manipulovatelnosti se přibližuje k hodnotě $\approx 0,85$ a průměrná hodnota je $0,574 \pm 0,153$.



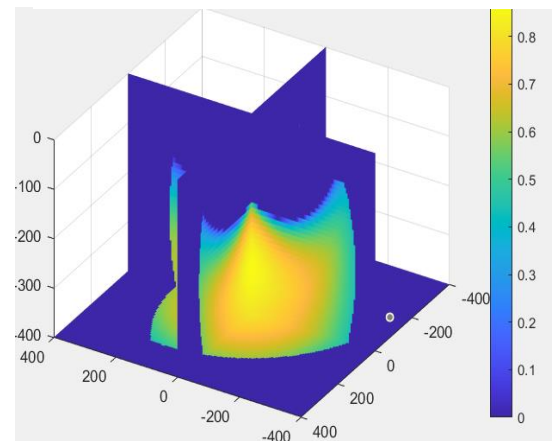
Obrázek 24: Pole manipulovatelnosti v řezu $Z=-400$



Obrázek 25: Pole manipulovatelnosti v řezu $Y=0$



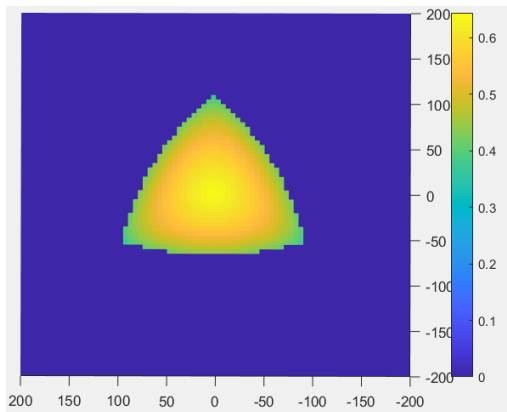
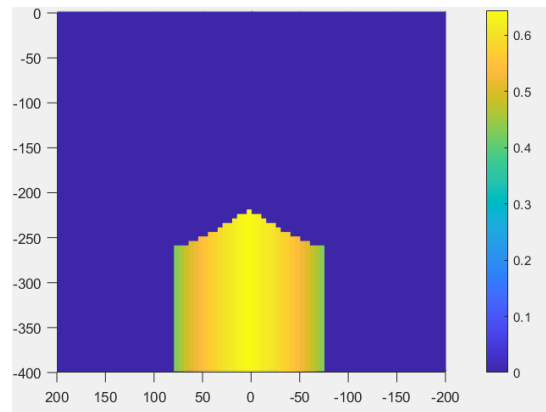
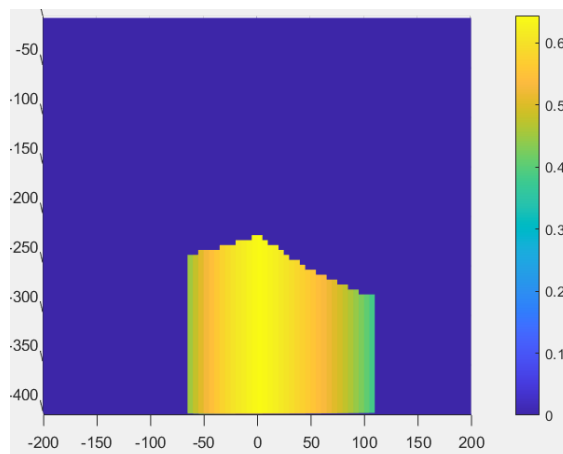
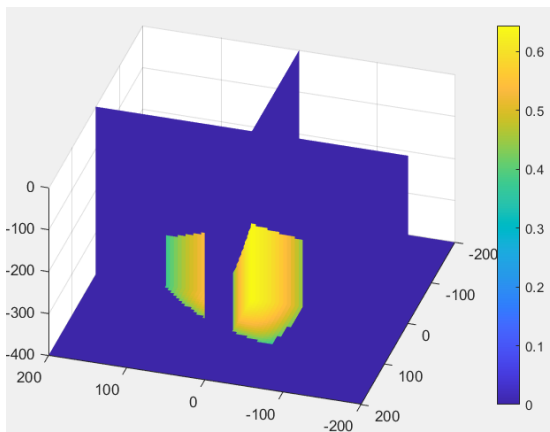
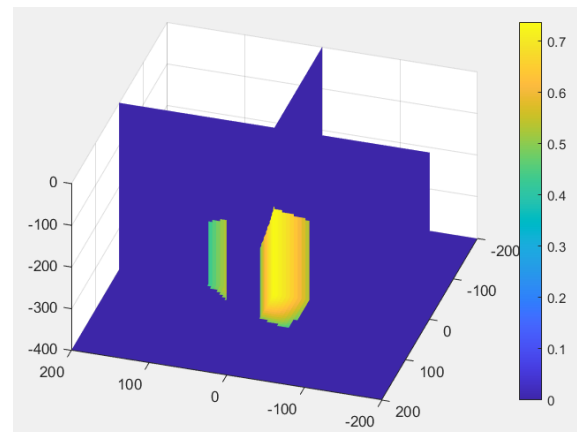
Obrázek 23: Pole manipulovatelnosti v řezu $X=0$



Obrázek 22: Pole manipulovatelnosti ve 3D

4.4.2. Delta robot s rameny proměnlivé délky

Z výsledného grafu můžeme usoudit, že v rámci pracovního pole se výsledná manipulovatelnost zásadně neliší. Z těchto grafů pro použité délky $l = 300 \text{ mm}$, a doplňující 3D graf pro $l = 280 \text{ mm}$ lze s jistotou říci, že se snižující se délkou se nám zmenšuje pracovní prostor v osách xy , v ose z se naopak prodlouží a zároveň zvyšuje maximální manipulovatelnost. Díky své konstrukci mimo svůj zástavbový prostor žádné rameno nevystupuje. Také lze uvést, že manipulovatelnost se s osou z nemění až na konstrukční omezení. Maximální hodnota manipulovatelnosti se přibližuje k hodnotě $\approx 0,63$ a průměrná hodnota je $0,595 \pm 0,068$.


 Obrázek 26: Pole manipulovatelnosti v řezu $Z=-400$

 Obrázek 27: Pole manipulovatelnosti v řezu $Y=0$

 Obrázek 28: Pole manipulovatelnosti v řezu $X=0$

 Obrázek 30: Pole manipulovatelnosti ve 3D, $l=300 \text{ mm}$

 Obrázek 29: Pole manipulovatelnosti ve 3D, $l=280 \text{ mm}$

4.4. Závěr analýzy

Z výsledných hodnot a grafů analýzy manipulovatelnosti můžeme porovnat jednotlivá konstrukční řešení delta robotů. Je zjevné, že delta robot s otočnými rameny dosahuje vyšších hodnot manipulovatelnosti a značně většího pracovního prostoru než delta robot s proměnlivými rameny. To však za předpokladu, že konstrukce na které je robot připevněn nijak nezasahuje do vyznačeného prostoru a zároveň kolem celé konstrukce je volný prostor, ve kterém se mohou pohybovat jednotlivá ramena. V rámci tohoto prostoru delta robota s otočnými rameny je manipulovatelnost více proměnná než je tomu tak u druhého řešení. U řešení s proměnlivými rameny je maximální manipulovatelnost menší než u prvního případu, ale na druhou stranu je méně proměnná a průměrná hodnota je vyšší. Také lze říci, že změnou délky neproměnlivého ramena u druhého případu zásadně zmenšíme pracovní prostor a zvýšíme manipulovatelnost. Pokud bychom ale základnu u tohoto řešení posunuli výše, tak bychom prodloužili v ose z pracovní prostor a nijak bychom neovlivnili manipulovatelnost v jednotlivých bodech již vypočítanou manipulovatelnost u řešení se základnou, která je položena níže.

Pro volbu jednoho z konstrukčních řešení je tedy důležité, jaké parametry jsou prioritní pro uživatele 3D tiskárny. Zde porovnávám jednotlivé parametry:

Tabulka 1: Porovnání Delta robotů

	S otočnými rameny	S proměnlivými rameny
Velikost prostoru	+	-
Maximální hodnota manipulovatelnosti:	$\approx 0,85$	$\approx 0,63$
Průměrná manipulovatelnost	$0,574 \pm 0,153$	$0,595 \pm 0,068$
Velikost výsledného zástavbového prostoru	-	+
Konzistentnost manipulovatelnosti v rámci pracovního prostoru	-	+

Dále je důležité podotknout, že tyto závěry stavíme pouze na základě kinematické analýzy a z ní vycházející analýzy manipulovatelnosti. K volbě konstrukčního řešení je zapotřebí více studia a analýzy systému, kterými se tato práce nezabývá.

Cíle této bakalářské práce jsou tímto splněny. Seznámil jsem se s roboty, kteří využívají paralelní kinematiku, a problematiku s nimiž spojenou. Vytvořil jsem kinematickou analýzu dvou základních nejvíce využívaných Delta robotů a z ní vyplývající analýzu manipulovatelnosti. Na konec jsem výsledky mezi sebou porovnal a vyvodil závěr.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] *Komponenty pro paralelní kinematické struktury* [online]. MM PRŮMYSLOVÉ SPEKTRUM, 2002 [cit. 2021-7-28]. Dostupné z: <https://www.mmspektrum.com/clanek/komponenty-pro-paralelni-kinematicke-struktury>
- [2] ParalleMIC. *ParalleMIC* [online]. [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: <http://www.parallemic.org/Reviews.html>
- [3] MERLET, J.-P. *Parallel Robots*. Sophia-Antipolis: Springer, 2006. 394 s. ISBN 1-4020-4132-2.
- [4] *Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Konstruktion, Anwendung*. 2006. Berlin: Springer, 2006. ISBN 103-540-20991-3.
- [5] Gwinnett, J.E., "Amusement devices," US Patent No. 1,789,680, January 20, 1931.
- [6] Pollard, W.L.V., "Position controlling apparatus," US Patent No. 2,286,571, June 16, 1942.
- [7] Cappel, K.L., "Motion simulator," US Patent No. 3,295,224, January 3, 1967.
- [8] *KOMPOZITNÍ HNACÍ HŘÍDELE FORMULE STUDENT*. Brno, 2018. Bakalářská práce. VUT. Vedoucí práce Ng. Michal Janoušek, Ph.D.
- [9] [online]. 2021 [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: <https://www.montako.cz/>
- [10] NEUGEBAUER, Reimund. *Parallelkinematische Maschinen : Entwurf, Konstruktion, Anwendung*. Berlin : Springer, 2006. 261 s. ISBN 103-540-20991-3.
- [11] PKM. *PKM tricept* [online]. [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: <http://www.pkmtricept.com/productos/index.php?id=en&Nproduct=1240238268>
- [12] *Europeana* [online]. [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: https://www.europeana.eu/en/item/2020801/dmglib_handler_image_13214023
- [13] *PILOT CAREER NEWS* [online]. [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: <https://www.pilotcareernews.com/klm-selects-13-for-boeing-787-full-flight-simulator/>
- [14] *Automatizace.hw.cz* [online]. 2016 [cit. 2021-8-3]. Dostupné z: <https://automatizace.hw.cz/prumyslovy-robot-omron-adept-quattro-pro-trideni-a-baleni-produktu.html>
- [15] M2794.002700 Introduction to Robotics. *The Northwestern University mechatronics* [online]. [cit. 2021-8-4]. Dostupné z: <http://hades.mech.northwestern.edu/images/2/28/SNU-2017-exams.pdf>
- [16] L. WILLIAMS II, PH.D., Robert. *The Delta Parallel Robot: Kinematics Solutions* [online]. 2016, 45 [cit. 2021-7-28]. Dostupné z: <https://www.ohio.edu/mechanical-faculty/williams/html/PDF/DeltaKin.pdf>
- [17] Kinematics Dexterity Analysis and Optimization of 4-UPS-UPU Parallel Robot Manipulato. *Springer*. 2014, , 618. ISSN 0302-9743.
- [18] SMUTNÝ, Vladimír. *Robotika: Diferenciální kinematika*. České vysoké učení technické v Praze, CIIRC, 2020. Dostupné také z: <http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/ROB/roblec/diffkin-notecz.pdf>
- [19] Rotary Delta Robot Forward/Inverse Kinematics Calculations. *Marginally Clever Robots* [online]. 2012 [cit. 2021-8-18]. Dostupné z: <https://www.marginallyclever.com/other/samples/fk-ik-test.html>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1:rozdělení paralelních struktur[4]	3
Obrázek 2: MECA 500[3].....	4
Obrázek 3: Kardanův kloub[8]	4
Obrázek 4: kulový kloub WG22 [9]	5
Obrázek 5: Tricept T605 od firmy TRICEPT PKM [11].....	6
Obrázek 6: Parallel Sprint Z3 robot [12]	6
Obrázek 7:KLM selects L3 for Boeing 787 [13]	7
Obrázek 8:Adept Quattro [14]	8
Obrázek 9: Spray painting machine Wilard L.V. Pollard [4]	8
Obrázek 10:Simulátor vrtulníku Sikorsky [2].....	9
Obrázek 11: Schéma delta robota s otočnými rameny	11
Obrázek 12: Schéma pevné platformy	12
Obrázek 13: Schéma pohyblivé platformy.....	13
Obrázek 14:Schéma pro IPKS trigonometricky.....	16
Obrázek 15:Zobrazení průsečíku kružnic	17
Obrázek 16:Středy virtuálních koulí	19
Obrázek 17: Schéma delta robota s rameny proměnlivé délky	23
Obrázek 18: Schéma pevné platformy	23
Obrázek 19: Schéma pohyblivé platformy.....	24
Obrázek 20:Středy virtuálních koulí	27
Obrázek 21:Konstrukční schéma Delta robotů	30
Obrázek 22:Pole manipulovatelnosti v řezu $Z=-400$	31
Obrázek 23:Pole manipulovatelnosti v řezu $Y=0$	31
Obrázek 24:Pole manipulovatelnosti v řezu $Z=-400$	31
Obrázek 25:Pole manipulovatelnosti ve 3D.....	31
Obrázek 26:Pole manipulovatelnosti v řezu $Z=-400$	32
Obrázek 27:Pole manipulovatelnosti v řezu $Y=0$	32
Obrázek 28:Pole manipulovatelnosti v řezu $X=0$	32
Obrázek 30:Pole manipulovatelnosti ve 3D, $l=280$ mm	32
Obrázek 29:Pole manipulovatelnosti ve 3D, $l=300$ mm	32