

**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**FAKULTA  
STROJNÍ**



**DIPLOMOVÁ  
PRÁCE**

**2021**

**JIŘÍ  
HALAMKA**

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Halamka** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **467313**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Numerická implementace a integrace konstitutivních vztahů cyklické plasticity**

Název diplomové práce anglicky:

Pokyny pro vypracování:

- 1/ Proveďte rešerši konstitutivních vztahů cyklické plasticity
- 2/ Implementujte vybraný model cyklické plasticity v rámci MKP
- 3/ Proveďte validaci modelů na vybraných experimentálních datech
- 4/ Na základě výsledků validace navrhnete úpravy vybraného modelu

Seznam doporučené literatury:

- [1] DUNNE, Fionn; PETRINIC, Nik. Introduction to computational plasticity. Oxford University Press on Demand, 2005.
- [2] CHABOCHE, Jean-Louis. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International journal of plasticity, 2008, 24.10: 1642-1693.
- [3] HALAMA, Radim. Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity. 2009.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Michal Bartošák, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **12.04.2021**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

Ing. Michal Bartošák, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

## **Anotační list**

<b>Jméno autora:</b>	Bc. Jiří Halamka
<b>Název diplomové práce:</b>	Numerická implementace a integrace konstitutivních vztahů cyklické plasticity
<b>Anglický název:</b>	Numerical implementation and integration of constitutive equations for cyclic plasticity
<b>Akademický rok:</b>	2020/2021
<b>Studijní program:</b>	Aplikované vědy ve strojním inženýrství
<b>Obor studia:</b>	Aplikovaná mechanika
<b>Ústav/odbor:</b>	Ústav mechaniky, mechatroniky a biomechaniky Odbor pružnosti a pevnosti
<b>Vedoucí diplomové práce:</b>	Ing. Michal Bartošák, Ph.D.
<b>Bibliografické údaje:</b>	Počet stran: 64 Počet obrázků: 35 Počet příloh: 2

### **Klíčová slova:**

Kombinovaný Chabocheho model zpevnění, paměťová plocha, kalibrace parametrů modelu plasticity, implementace materiálového modelu do softwaru Abaqus, metoda radiálního návratu

### **Keywords:**

Combined Chaboche hardening model, plastic strain surface, calibration of model parameters, implementation of material model to Abaqus software, radial return method

### **Anotace:**

Tato diplomová práce se zabývá implementací dvou fenomenologických modelů plasticity do softwaru MKP. Použit je kombinovaný Chabocheho model zpevnění, u druhého modelu je rozšířeno izotropní zpevnění o závislost na paměťové ploše. Kalibrace parametrů modelů jsou prováděny multikriteriální optimalizací využitím softwaru Matlab. Materiálové modely jsou sestaveny do formy uživatelských procedur UMAT softwaru Abaqus. Při výpočtu přírůstků napětí je použita metoda radiálního návratu na plochu plasticity. Materiálová procedura zahrnuje i výpočet konzistentního tečného modulu.

### **Abstract:**

This thesis deals with implementation of two phenomenological plasticity models to FEM software. The Chaboche combined hardening model is used, for the second model the isotropic hardening is dependent on plastic strain surface. Calibration of model parameters is done by multicriteria optimization in Matlab software. Material models are compiled into the form of user subroutines UMAT of the Abaqus software. The radial return method is used for calculation of stress increments. Material subroutine includes the evaluation of consistent tangent modulus.

## **Poděkování**

Děkuji mému vedoucímu Ing. Michalu Bartošákovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, cenné rady, trpělivost a ochotu. V neposlední řadě děkuji přátelům a rodině za odbornou, finanční i psychickou podporu.

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a za použití odborné literatury uvedené na konci práce.

V Praze dne .....

Podpis .....

# Obsah

<b>1. Úvod.....</b>	<b>10</b>
<b>2. Cíle práce .....</b>	<b>11</b>
<b>3. Teoretická část práce .....</b>	<b>12</b>
3.1. Jevy a poznatky z experimentů nízkocyklické plasticity .....	12
3.1.1. Tahový diagram.....	12
3.1.2. Elastické odlehčování.....	13
3.1.3. Bauschingerův efekt.....	13
3.1.4. Masingovo chování .....	14
3.1.5. Cyklické zpevnění a změkčení.....	14
3.2. Základy inkrementální teorie plasticity .....	15
3.2.1. Aditivní zákon.....	15
3.2.2. Podmínka plasticity .....	16
3.2.3. Podmínka zatěžování.....	17
3.2.4. Pravidlo normality.....	17
3.2.5. Transformace plochy plasticity – zpevnění.....	18
3.3. Základní modely zpevnění .....	19
3.3.1. Ideálně plastický model.....	19
3.3.2. Pragerův model .....	20
3.3.3. Armstrong-Frederickův model.....	20
3.3.4. Chabocheho model kinematického zpevnění.....	21
3.3.5. Kombinovaný Chabocheho model zpevnění.....	21
3.3.6. Modely s paměťovou plochou.....	22
<b>4. Základní materiálový model .....</b>	<b>24</b>
4.1. Volba materiálového modelu .....	24
4.2. Kalibrace parametrů .....	25
4.2.1. Konstrukce charakteristik z naměřených dat.....	25
4.2.2. Stanovení Youngova modulu pružnosti a počáteční meze kluzu.....	28
4.2.3. Sestavení programu pro generaci charakteristik z obecných parametrů .....	31
4.2.4. Sestavení programu pro výpočet střední kvadratické chyby charakteristik.....	33
4.2.5. Definice cílové funkce .....	34
4.2.6. Určení počátečních odhadů parametrů.....	34

4.2.7.	Optimalizace parametrů modelu .....	35
4.3.	Implementace do programu Abaqus.....	36
4.3.1.	Odvození metody radiálního návratu pro obecné zpevnění .....	37
4.3.2.	Diskretizace rovnic zpevnění a výpočet parciálních derivací .....	38
4.3.3.	Odvození konzistentního tečného modulu .....	39
4.3.4.	Tvorba uživatelské procedury .....	41
4.4.	Verifikace konzistentního tečného modulu .....	43
4.5.	Vizuální verifikace podle grafů charakteristik .....	44
<b>5.</b>	<b>Rozšířený materiálový model.....</b>	<b>48</b>
5.1.	Volba materiálového modelu .....	48
5.2.	Kalibrace parametrů .....	48
5.2.1.	Konstrukce charakteristik z naměřených dat.....	49
5.2.2.	Stanovení Youngova modulu pružnosti a počáteční meze kluzu.....	50
5.2.3.	Sestavení programu pro generaci charakteristik z obecných parametrů .....	50
5.2.4.	Definice cílové funkce .....	54
5.2.5.	Určení počátečních odhadů parametrů .....	54
5.2.6.	Optimalizace parametrů modelu .....	55
5.3.	Implementace do programu Abaqus.....	56
5.3.1.	Diskretizace rovnic izotropního zpevnění a výpočet parciální derivace .....	56
5.3.2.	Odvození derivace v rovnici konzistentního tečného modulu .....	57
5.3.3.	Odvození přírůstků paměťové plochy .....	57
5.3.4.	Tvorba uživatelské procedury .....	58
5.4.	Verifikace konzistentního tečného modulu .....	58
5.5.	Vizuální verifikace podle grafů charakteristik .....	59
<b>6.</b>	<b>Závěr.....</b>	<b>62</b>
<b>7.</b>	<b>Použitá literatura.....</b>	<b>63</b>

## Seznam obrázků

Obr. 1 Tahový diagram s výraznou mezí kluzu (a) a s nevýraznou mezí kluzu (b) [1].....	12
Obr. 2 Elastické odlehčování [1].....	13
Obr. 3 Bauschingerův efekt [1].....	13
Obr. 4 Hysterezní smyčky materiálu vykazující Masingovo chování [2].....	14
Obr. 5 Cyklické změkčení (vlevo) a cyklické zpevnění (vpravo) [3].....	14
Obr. 6 Cyklická zkouška pro více po sobě jdoucích úrovní amplitud deformací (2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 2%, 3%) [2].....	15
Obr. 7 Zatížení do plastického stavu a odlehčení při jednoosém napětí [4].....	15
Obr. 8 Podmínka zatěžování [1].....	17
Obr. 9 Kinematické zpevnění [5].....	18
Obr. 10 Izotropní zpevnění [5].....	19
Obr. 11 Jednoosý tah ideálně plastického materiálu.....	19
Obr. 12 Jednoosý tah Pragerova modelu.....	20
Obr. 13 Jednoosý tah Armstrong-Frederickova modelu.....	21
Obr. 14 Paměťové plochy v prostoru hlavních deformací [3].....	22
Obr. 15 Určení středu životnosti z obecného průběhu amplitud napětí.....	26
Obr. 16 Naměřená hysterezní smyčka na středu životnosti.....	26
Obr. 17 Určení přírůstků akumul. plastické deformace a amplitudy napětí obecného cyklu.....	28
Obr. 18 Naměřená závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci.....	28
Obr. 19 Určení Youngova modulu pružnosti ze smyčky na středu životnosti.....	29
Obr. 20 Určení poloměru plochy plasticity na středu životnosti.....	30
Obr. 21 Určení meze kluzu.....	30
Obr. 22 Ukázka interpolačního programu.....	33
Obr. 23 Hodnoty cílové funkce v průběhu iterací.....	36
Obr. 24 Vývojový diagram uživatelské procedury.....	43
Obr. 25 Zatěžování axisymetrického modelu (vlevo) a jeho síťování (vpravo).....	44
Obr. 26 Okrajové podmínky a deformační zatížení elementu v Abaqusu.....	45
Obr. 27 Porovnání smyčky na středu životnosti.....	46
Obr. 28 Porovnání amplitud napětí.....	46
Obr. 29 Hysterezní smyčky na středu životnosti.....	49



Obr. 30 Naměřené závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci .....	50
Obr. 31 Algoritmus generace závislosti amplitud napětí na akumulované pl. deformaci .....	53
Obr. 32 Hodnoty cílové funkce v průběhu iterací .....	56
Obr. 33 Porovnání smyček na středu životnosti .....	59
Obr. 34 Porovnání závislosti amplitud napětí na akumulované pl. deformaci .....	60
Obr. 35 Porovnání závislosti amplitud napětí na počtu cyklů .....	61

## Seznam tabulek

Tab. 1: Počáteční odhad parametrů izotropního zpevnění .....	35
Tab. 2: Počáteční odhad parametrů kinematického zpevnění .....	35
Tab. 3: Optimalizované parametry .....	36
Tab. 4: Největší nevyrovnané uzlové síly v průběhu iterace .....	44
Tab. 5: Počáteční odhad parametrů izotropního zpevnění .....	55
Tab. 6: Počáteční odhad parametrů kinematického zpevnění .....	55
Tab. 7: Volba váhových koeficientů .....	55
Tab. 8: Optimalizované parametry .....	56
Tab. 9: Největší nevyrovnané uzlové síly v průběhu iterace .....	59

## Seznam souborů na přiloženém CD

PDF verze diplomové práce

Uživatelská procedura základního modelu

Uživatelská procedura upraveného modelu

## Seznam použitých symbolů

$A_Q$	[MPa]	parametr materiálového modelu
$B_Q$	[MPa]	parametr materiálového modelu
$b$	[1]	parametr materiálového modelu
$C$	[MPa]	parametr materiálového modelu
$C_Q$	[1]	parametr materiálového modelu
$D$	[MPa]	tenzor tuhosti
$[D]$	[MPa]	konzistentní tečný modul
$[D^e]$	[MPa]	elastická matice tuhosti
$d\lambda$	[1]	skalární součinitel
$E$	[MPa]	Youngův modul pružnosti
$F$	[N]	zátěžná síla
$f$	[MPa]	mezní funkce plochy plasticity
$f$	[MPa]	funkce efektivního napětí
$G$	[MPa]	modul pružnosti ve smyku
$g$	[1]	mezní funkce paměťové plochy
$g$	[1]	funkce ekvivalentní deformace
$H$	[1]	parametr materiálového modelu
$[H_i]$	[MPa]	operátor translace plochy plasticity
$[I_d]$	[1]	deviátorický operátor
$k$	[1]	váhový koeficient
$L$	[m]	délka vzorku
$[L]$	[MPa]	matice pro výpočet konzistentního tečného modulu
$MSE$	[1]	střední kvadratická chyba
$[M_1], [M_2]$	[1]	pomocné matice
$N$	[1]	číslo zátěžného cyklu
$N_{end}$	[1]	číslo cyklu na konci životnosti
$N_{half}$	[1]	číslo cyklu na střední životnosti
$\mathbf{n}$	[1]	normálový tenzor plochy plasticity
$\{n\}$	[1]	normálový vektor plochy plasticity
$\mathbf{n}'$	[1]	normálový tenzor paměťové plochy
$p$	[1]	akumulovaná plastická deformace
$Q$	[MPa]	parametr materiálového modelu
$q$	[1]	poloměr paměťové plochy

$R$	[MPa]	přírůstek poloměru plochy plasticity
$R_{p0,2}$	[MPa]	smluvní mez kluzu
$S$	[m <sup>2</sup> ]	průřez vzorku
$\mathbf{s}$	[MPa]	tenzor deviátoru napětí
$\{s\}$	[MPa]	vektor deviátoru napětí
$\{s^{tr}\}$	[MPa]	vektor deviátoru elastického prediktoru napětí
$Y$	[MPa]	aktuální poloměr plochy plasticity
$\mathbf{1}$	[1]	Kroneckerův tenzor 2. řádu
$\alpha$	[MPa]	tenzor translace plochy plasticity
$\{\alpha\}$	[MPa]	vektor translace plochy plasticity
$\alpha$	[MPa]	translace plochy plasticity při jednoosém zatěžování
$\gamma$	[1]	parametr materiálového modelu
$\epsilon$	[1]	tenzor deformace
$\epsilon_e$	[1]	tenzor elastické deformace
$\epsilon_p$	[1]	tenzor plastické deformace
$\{\epsilon\}$	[1]	vektor deformací
$\{\epsilon_p\}$	[1]	vektor plastických deformací
$\epsilon$	[1]	deformace při jednoosém zatěžování
$\epsilon_p$	[1]	plastická deformace při jednoosém zatěžování
$\epsilon_a$	[1]	amplituda deformací
$\bar{\epsilon}$	[1]	poměrná deformace
$\zeta$	[1]	tenzor translace paměťové plochy
$\{\zeta\}$	[1]	vektor translace paměťové plochy
$\eta$	[1]	parametr materiálového modelu
$\lambda$	[MPa]	Lamého koeficient
$\nu$	[1]	Poissonova konstanta
$\sigma$	[MPa]	tenzor napětí
$\{\sigma\}$	[MPa]	vektor napětí
$\{\sigma^{tr}\}$	[MPa]	vektor elastického prediktoru napětí
$\sigma$	[Mpa]	napětí při jednoosém zatěžování
$\sigma_a$	[MPa]	amplituda napětí
$\sigma_s$	[MPa]	smluvní napětí
$\sigma_Y$	[MPa]	mez kluzu
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	[MPa]	hlavní napětí
$\psi$	[1]	parametr určující směr zatěžování při tahu/tlaku

# 1. Úvod

Před masivním nástupem výpočetní techniky byly strojní součásti pevnostně posuzovány pomocí zjednodušených výpočtových postupů, často s využitím empirických vztahů. V složitějších případech byl prvně vyroben prototyp, který byl následně zkoušen a upravován. V této situaci nemohly být přirozeně nároky na optimalizaci součástí vysoké. Součásti se konstruovali předdimenzované ve snaze zůstat na bezpečné straně.

Kosmický průmysl, kde je jednou z hlavních priorit minimalizace hmotnosti součástí při zachování přijatelné bezpečnosti, stál u zrodu numerické metody zvané metoda konečných prvků. V 60. letech 20. století byl pro NASA vyvinut první software na principu MKP s názvem NASTRAN. Po úspěchu v kosmickém průmyslu se MKP začala rozšiřovat do celého strojního inženýrství, převážně pak do automobilového a leteckého průmyslu, kde se na řešení mnoha problémů používá dodnes.

S rozvojem potřeb současného světa směřujícího k neustálému snižování nákladů nabývají na významu pokročilé výpočtové metody. Již není dostatečné používat pouze elastický materiálový model a za mezní stav považovat mez kluzu či mez únavy použitého materiálu.

Situace si žádá připustit i lokální plastické deformace a využit schopností materiálu v plném rozsahu. To je samozřejmě možné, pokud se počty zátěžných cyklů pohybují do hodnoty řádově  $10^4$  cyklů. V této souvislosti vyvstává potřeba schopnosti simulovat procesy při nízkocyklické únavě neboli také cyklické plasticitě. Druhou motivací je potřeba pevnostní kontroly buď stávajících zařízení, které jsou z důvodů okolností nově provozovány s častějšími odstávkami, nebo zařízení, které jsou již pro přerušovaný provoz určena (např. plynové turbíny).

Princip MKP spočívá v diskretizaci spojitého kontinua na elementy, pomocí kterých lze deformační úlohu převést na soustavu rovnic. Pokud úloha vykazuje významnou nelinearitu, v našem případě materiálovou, používají se iterační postupy řešení, jakým je např. Newton-Raphsonova metoda. K tomuto účelu musí být materiálový model schopen generovat tečnou materiálovou matici při sestavování matice tuhosti a generovat přírůstek tenzoru napětí pro přírůstek tenzoru deformací při určování nevyrovnaných uzlových sil.

Materiálové modely jsou v současné době schopny začlenit závislost materiálové odezvy na teplotě, rychlosti deformace apod. Stěžejním parametrem v oblasti cyklické plasticity je však akumulovaná plastická deformace. Vedle tvaru materiálové křivky je rozhodující pro stanovení mezního stavu poškození. Jednou z možností popisu materiálového chování jsou tzv. fenomenologické modely, jejichž parametry nemají fyzikální význam a jsou nejčastěji kalibrovány podle jednoosých zkoušek.

Kalibrací a implementací do softwaru MKP dvou těchto materiálových modelů se zabývá tato práce.

## 2. Cíle práce

Cílem této práce je na základě studie konstitutivních vztahů používaných v oblasti cyklické plasticity nejprve vybrat vhodné fenomenologické materiálové modely pro zpracování dostupných naměřených dat z cyklických jednoosých deformačně řízených zkoušek. Následně tyto modely implementovat do softwaru Abaqus. Tyto modely musí být schopny simulovat naměřená data, ale také generovat napěťovou odezvu pro obecné deformační zatížení.

Vlastní implementaci modelů je v této práci možné charakterizovat následující posloupností:

- zredukovat vybraná experimentální data na charakteristiky vhodně vystihující průběh zkoušky
- vybrat vhodný fenomenologický model a optimalizovat jeho parametry vzhledem k vybraným charakteristikám
- vybraný model implementovat do programu Abaqus, validovat model replikováním naměřených dat a okomentovat případné odchylky

Rozsah práce je určen dostupností různých sad naměřených dat. V prvním kroku je cílem zpracovat vybranou reprezentativní sadu dat cyklické jednoosé zkoušky s vybraným materiálovým modelem. Na základě validace modelu pak v druhém kroku materiálový model rozšířit a ke kalibraci modelu použít celou sadu experimentálních dat.

### 3. Teoretická část práce

V teoretické části práce jsou nejdříve popsány rozhodující jevy sledované při jednoosých experimentech nízkocyklické plasticity a následně simulované materiálovými modely. Dále jsou popsány základy inkrementální teorie plasticity, které jsou nutné k implementaci materiálových modelů do softwaru MKP. Nakonec je krátce popsán vývoj modelů cyklické plasticity až k současným sofistikovaným modelům, které jsou využitelné pro praktickou část práce.

#### 3.1. Jevy a poznatky z experimentů nízkocyklické plasticity

V této kapitole je prvně popsán všeobecně známý tahový diagram, který ačkoliv přímo nepatří do experimentů cyklické plasticity, je důležitý pro definici základních pojmů, jakou je mez kluzu, Youngův modul pružnosti atd. Následně jsou popsány jevy, které tvoří základní východiska této práce, jako je elastické odlehčování, Bauschingerův efekt, Masingovo chování a cyklické zpevňování a změkčování.

##### 3.1.1. Tahový diagram

Tahový diagram popisuje závislost mezi napětím a poměrným prodloužením při zkoušce jednoosým tahem. První variantou je smluvní tahový diagram, který popisuje závislost mezi smluvním napětím  $\sigma_s$  a poměrným prodloužením  $\bar{\epsilon}$ . Tyto veličiny jsou definovány

$$\sigma_s = \frac{F}{S_0} \quad (3.1)$$

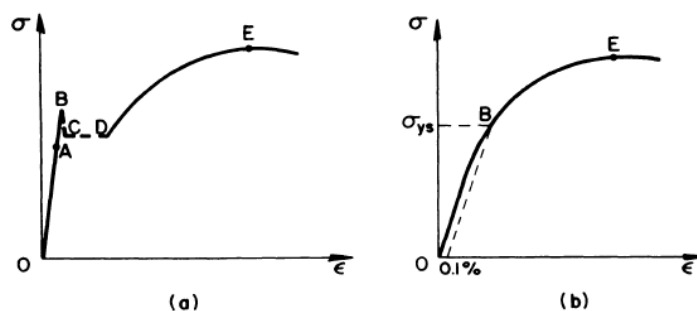
$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad , \quad (3.2)$$

kde  $F$  je zatěžující síla,  $S_0$  je původní průřez zatěžovaného vzorku,  $L$  je délka vzorku po zatížení silou  $F$  a  $L_0$  je původní délka vzorku.

Druhou variantou je skutečný tahový diagram, který uvažuje změnu průřezu při zatěžování. Popisuje závislost mezi skutečným napětím  $\sigma$  a logaritmickou (přirozenou) deformací  $\epsilon$ .

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) = \sigma_s \cdot (1 + \bar{\epsilon}) \quad (3.3)$$

$$\epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \frac{\Delta L + L_0}{L_0} = \ln(1 + \bar{\epsilon}) \quad (3.4)$$



Obr. 1 Tahový diagram s výraznou mezí kluzu (a) a s nevýraznou mezí kluzu (b) [1]

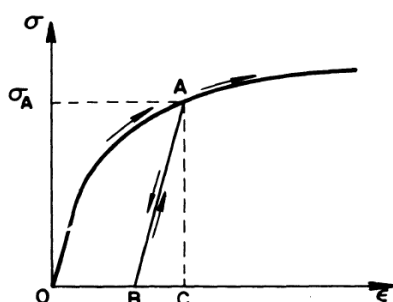
Bod B z Obr. 1 se označuje mez kluzu a jeho příslušející napětí se značí  $\sigma_Y$ . U materiálů s nevýraznou mezí kluzu se nejčastěji používá smluvní mez kluzu  $R_{p0,2}$ . To je napětí, které způsobí trvalou deformaci 0,2 %.

Druhou důležitou veličinou je Youngův modul pružnosti  $E$ , který odpovídá sklonu lineární části tahového diagramu. V Bodu A končí linearita tahového diagramu a nazývá se mez úměrnosti. Chování materiálu do meze úměrnosti popisuje tzv. Hookův zákon rovnicí

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.5)$$

### 3.1.2. Elastické odlehčování

Pokud by se při tahové zkoušce po překročení meze kluzu začal odlehčovat vzorek, nastal by jev zvaný elastické odlehčování.

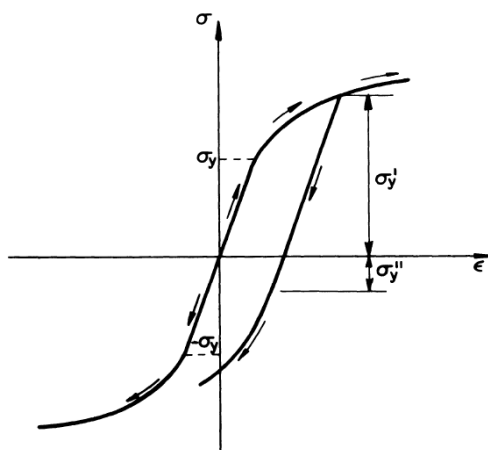


Obr. 2 Elastické odlehčování [1]

Tento jev je zobrazen na Obr. 2, kde byl materiál zatížen napětím  $\sigma_A$  a po odlehčování se do bodu B pohybuje lineárně paralelně k přímce počátečního zatížení. Pokud se materiál začne znovu zatěžovat, pohybuje se po stejné přímce BA a po dosažení napětí  $\sigma_A$  pokračuje po křivce tahového diagramu.

### 3.1.3. Bauschingerův efekt

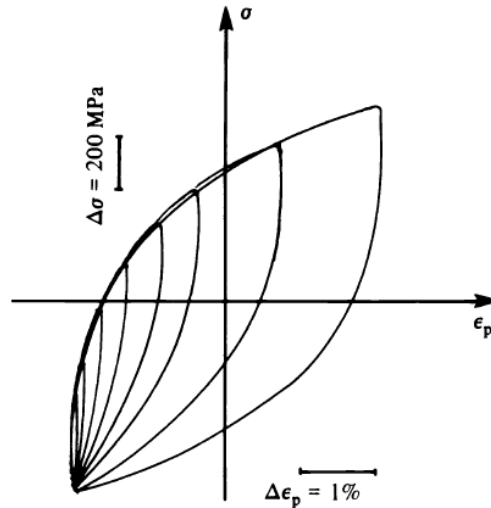
Mez kluzu v tahu a mez kluzu v tlaku má u většiny ocelí stejnou hodnotu. Při zatížení oceli nad mez kluzu a následným odlehčením tato rovnost mizí. Tento jev se nazývá Bauschingerův efekt viz Obr. 3, kde je zřejmé, že mez kluzu v tlaku po odlehčení  $\sigma_Y''$  je výrazně menší než původní mez kluzu v tahu  $\sigma_Y$ . Tento jev také dokazuje, že je odezva materiálu závislá na historii zatěžování.



Obr. 3 Bauschingerův efekt [1]

### 3.1.4. Masingovo chování

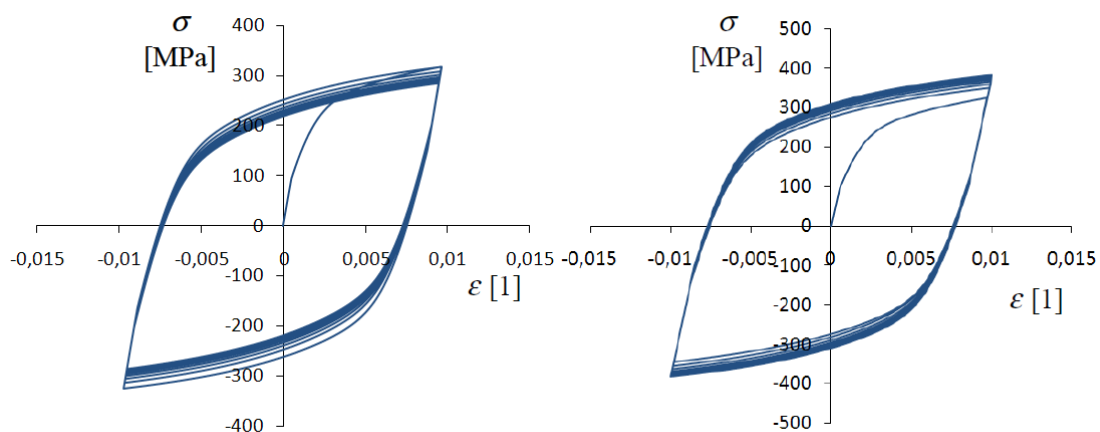
U některých materiálů se nemění tvary stabilizovaných hysterezních smyček v závislosti na velikosti amplitudy deformací. Tento jev se nazývá Masingovo chování a jeho platnost lze ověřit zarovnáním stabilizovaných smyček do jednoho z vrcholů, viz Obr. 4. Většina materiálů však toto chování nevykazuje.



Obr. 4 Hysterezní smyčky materiálu vykazující Masingovo chování [2]

### 3.1.5. Cyklické zpevnění a změkčení

U většiny materiálů, které jsou zatěžovány cyklicky s řízenou deformací, se mění velikost amplitud napětí v průběhu zkoušky. Pokud se amplitudy zvětšují s rostoucím počtem cyklů, jedná se o cyklické zpevnění, v případě opačném o cyklické změkčení (viz Obr. 5).

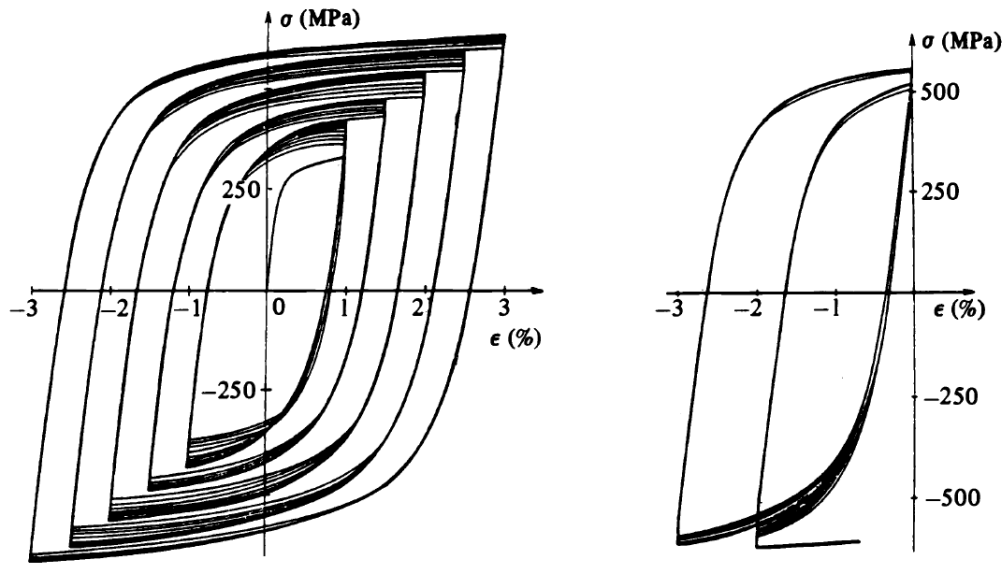


Obr. 5 Cyklické změkčení (vlevo) a cyklické zpevnění (vpravo) [3]

Na Obr. 6 je zobrazena zkouška materiálu s cyklickým zpevněním, který byl po sobě zatěžován zvyšující se úrovní amplitudy plastické deformace (vlevo), a poté byl opět zatížen menšími amplitudami deformací (vpravo). Z levého grafu lze pozorovat, že se pro každou úroveň materiál zpevňuje, zatímco v pravém grafu téměř k žádnému zpevnění nedochází. Dále mají stabilizované smyčky dříve nezatíženého materiálu (vlevo) menší amplitudy napětí než



smyčky po větším zatížení (vpravo). Materiál má tedy schopnost „pamatovat“ si největší dosažené zatížení, na kterém závisí další mechanická odezva.



Obr. 6 Cyklická zkouška pro více po sobě jdoucích úrovní amplitud deformací (2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 2%, 3%) [2]

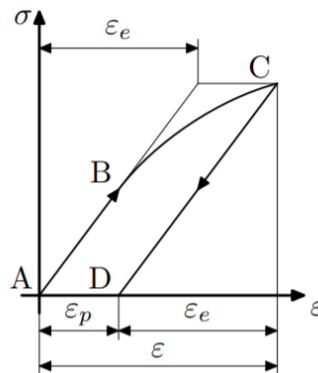
### 3.2. Základy inkrementální teorie plasticity

Pro některé materiálové modely lze závislost napětí na deformaci přímo vyjádřit rovnicí (např. Hookův zákon). Pro většinu modelů je však závislost napětí na deformaci ovlivněna historií zatěžování, rychlostí deformace, teplotou atd. a jednoznačná funkce spojující napětí a deformaci neexistuje. Z tohoto důvodu jsou nejčastěji popisovány závislosti přírůstků napětí na přírůstku deformací. Těmito závislostmi přírůstků se zabývá inkrementální teorie plasticity, jejíž základy jsou popsány v této kapitole.

#### 3.2.1. Aditivní zákon

Na základě Obr. 7 lze konstatovat, že se materiál při jednoosém tahu chová lineárně i při odlehčení po překročení meze kluzu. Tenzor deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  lze tedy rozdělit na elastický  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  a plastický tenzor deformací  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.6)$$



Obr. 7 Zatížení do plastického stavu a odlehčení při jednoosém napětí [4]

Pro elastickou složku přitom v jakémkoliv okamžiku platí Hookův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad , \quad (3.7)$$

kde  $\mathbf{D}$  je tenzor tuhosti 4. řádu a symbol  $:$  znamená úžení tenzorů, což je s Einsteinovou sumační konvencí zapsáno jako

$$\mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_e = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{e\,kl} \quad . \quad (3.8)$$

### 3.2.2. Podmínka plasticity

U tahového diagramu byla definovaná mez kluzu  $\sigma_Y$ , která rozdělila diagram na elastickou a plastickou oblast. Pro obecnou napjatost je nutné definovat obdobnou podmínku, při jejímž splnění se dalším zatěžováním mění plastická deformace. Tato podmínka je zvaná podmínkou plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y = 0 \quad , \quad (3.9)$$

kde  $f(\boldsymbol{\sigma})$  je tzv. mezní funkce plochy plasticity a  $f(\boldsymbol{\sigma})$  je funkce tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Funkce  $f(\boldsymbol{\sigma})$  je také známá jako efektivní či redukované napětí a nejpoužívanějšími funkcemi jsou Trescova (Tresca-Guest) hypotéza, které se také říká hypotéza maximálních smykových napětí

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.10)$$

a von Misesova (HMH) hypotéza, která je odvozena z hustoty deformační energie

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad , \quad (3.11)$$

kde  $\sigma_1, \sigma_2$  a  $\sigma_3$  jsou hlavní napětí.

Von Misesovu podmínku lze zkráceně zapsat pomocí deviátoru tenzoru napětí  $\mathbf{s}$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad , \quad (3.12)$$

kde  $\mathbf{s}$  je deviátor napětí popsáný rovnicí

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{1} \quad , \quad (3.13)$$

kde  $\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$  je stopa tenzoru napětí,  $\mathbf{1}$  je Kroneckerův tenzor 2. řádu a symbol  $:$  znamená úžení tenzorů, která lze s užitím Einsteinova sumační konvence zapsat rovnicí

$$\mathbf{s} : \mathbf{s} = s_{ij} \cdot s_{ij} \quad . \quad (3.14)$$

Tyto podmínky plasticity jsou často zobrazovány do prostoru hlavních napětí (Haighův prostor). Von Misesova hypotéza v tomto zobrazení tvoří válcovou plochu plasticity s osou  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  a poloměrem  $\sigma_Y$ .

### 3.2.3. Podmínka zatěžování

K plastické deformaci dochází pouze, pokud bod napětí leží na ploše plasticity (platí podmínka plasticity) a tenzor přírůstku napětí  $d\sigma$  směřuje vně plochy plasticity. K matematickému zápisu tohoto tvrzení je nutné definovat vnější normálový tenzor k ploše plasticity  $\mathbf{n}$ , který má pro von Misesovu hypotézu následující tvar:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathbf{s}}{f(\sigma)} \quad (3.15)$$

Obdobně jako u skalárního součinu vektorů je zkoumáno, zda je úhel mezi vektory ostrý nebo tupý, je úžním tenzorů  $\mathbf{n}:d\sigma$  zkoumáno, zda mají tenzory podobný „směr“.

Pokud míří tenzor  $d\sigma$  vně plochy plasticity, dochází k zatěžování a mění se plastická deformace. Podmínka zatěžování je tedy

$$\mathbf{f} = 0, \mathbf{n}:d\sigma > 0 \Rightarrow d\varepsilon_p \neq 0 \quad (3.16)$$

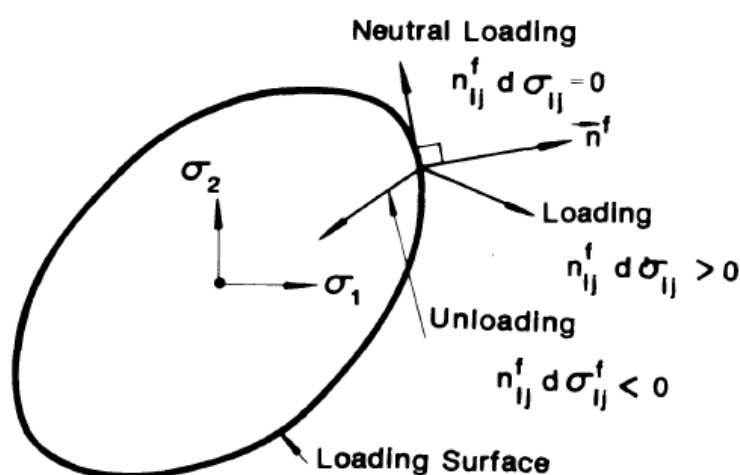
Pokud míří tenzor  $d\sigma$  dovnitř plochy plasticity, dochází k odlehčení.

$$\mathbf{f} = 0, \mathbf{n}:d\sigma < 0 \Rightarrow d\varepsilon_p = 0 \quad (3.17)$$

Pokud je tenzor  $d\sigma$  tečný k ploše plasticity, dochází k tzv. neutrálnímu zatěžování.

$$\mathbf{f} = 0, \mathbf{n}:d\sigma = 0 \Rightarrow d\varepsilon_p = 0 \quad (3.18)$$

Tyto 3 možné stavy zatěžování jsou zobrazeny na Obr. 8.



Obr. 8 Podmínka zatěžování [1]

### 3.2.4. Pravidlo normality

Při splnění podmínky zatěžování se mění plastická deformace, ale zatím nebylo definováno jak. Tomu se věnuje pravidlo normality, podle kterého se plastická deformace rozvíjí ve směru normály na plochu plasticity. To je zapsáno rovnicí

$$d\varepsilon_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.19)$$

kde  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  je zmiňovaná normála a  $d\lambda$  je kladný skalár určující velikost plastického tečení. Skalár  $d\lambda$  je pro von Misesovu hypotézu roven přírůstku akumulované plastické deformace  $dp$ , který je definován následovně:

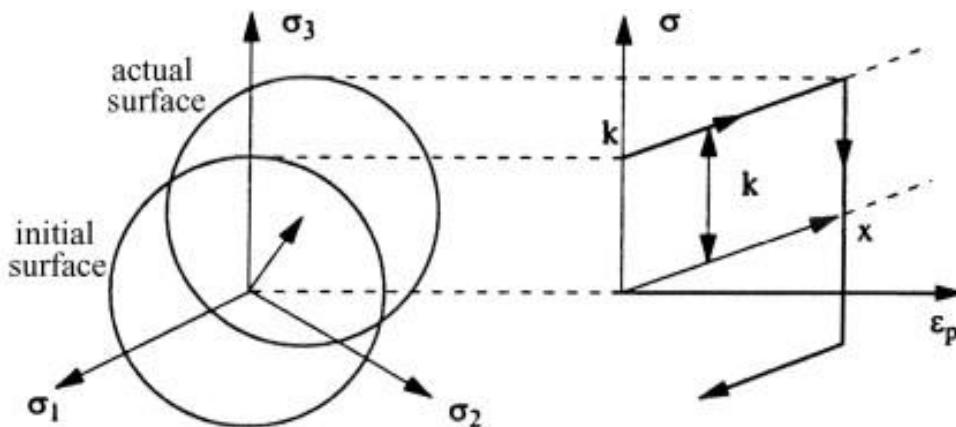
$$dp = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p : d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (3.20)$$

### 3.2.5. Transformace plochy plasticity – zpevnění

Důležitou vlastností mezní funkce  $f$  je, že její maximální hodnota je nulová. Pokud by měl bod reprezentující stav napjatosti ležet vně plochy plasticity, je kvůli dodržení této vlastnosti transformována plocha plasticity, aby bod ležel na ní. Těmito transformacím se říká zpevnění a v této práci budou použity pouze izotropní, kinematické zpevnění a jejich kombinace.

Kinematické zpevnění popisuje translaci plochy plasticity (viz Obr. 9) o kinematický tenzor napětí  $\boldsymbol{\alpha}$  (angl. backstress). Translaci plochy plasticity lze pro podmínku plasticity zapsat rovnicí

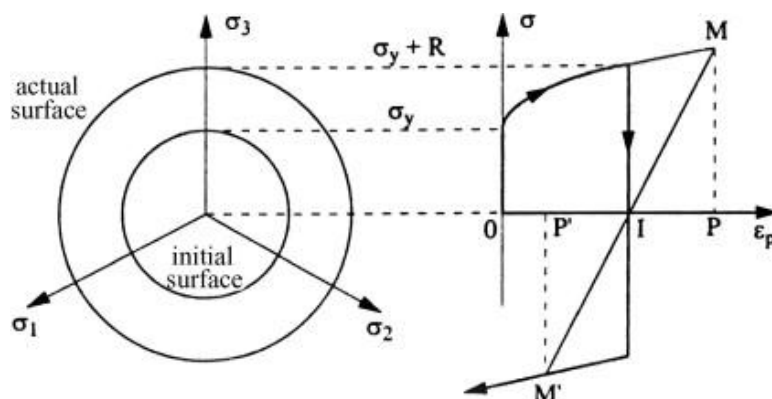
$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_Y = 0 \quad (3.21)$$



Obr. 9 Kinematické zpevnění [5]

Izotropní zpevnění popisuje rovnoměrné zvětšení plochy plasticity ve všech směrech, jak je ukázáno na Obr. 10. Matematicky lze toto zpevnění jednoduše popsat přičtením přírůstku poloměru plochy plasticity  $R$  k mezi kluzu

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y - R = 0 \quad (3.22)$$



Obr. 10 Izotropní zpevnění [5]

Spojením izotropního a kinematického zpevnění vzniká kombinovaný model zpevnění, který je popsán rovnicí

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_Y - R = 0 \quad (3.23)$$

Samostatné použití izotropního zpevnění má omezené použití, protože při monotónním zatěžování není schopné reprodukovat Bauschingerův efekt. V materiálových modelech se proto používá pouze kinematické nebo častěji kombinované zpevnění. V praktickém uspořádání modelu kombinovaného zpevnění kinematická část převážně rozhoduje o tvaru smyček a izotropní část dominantně předurčuje cyklické zpevnění či změkčení.

Pro jednoosé napětí lze z (3.23) vyjádřit rovnici pro napětí v plastické oblasti

$$\sigma = \alpha + \psi \cdot (\sigma_Y + R) \quad (3.24)$$

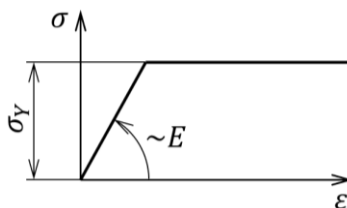
kde  $\psi$  je proměnná, která nabývá hodnoty  $\psi = 1$  pro kladné přírůstky plastické deformace a  $\psi = -1$  pro záporné přírůstky plastické deformace.

### 3.3. Základní modely zpevnění

Existují tzv. endochronní modely (např. [6]), u kterých je napětí funkcí celé historie zatěžování, pro většinu modelů se z důvodů výpočetní náročnosti raději zavádí veličiny shrnující historii zatěžování. K tomuto účelu lze použít vhodnou definici izotropního zpevnění  $R$  a kinematického zpevnění  $\boldsymbol{\alpha}$ , z kterých jsou vytvořeny následující modely.

#### 3.3.1. Ideálně plastický model

Volbou nulových zpevnění vzniká tzv. ideálně plastický model, jehož křivka jednoosého tahu je zobrazena na Obr. 11. Ten není pro simulaci cyklické plasticity obzvláště zajímavý, jeho uplatnění se však nachází v analytických výpočtech např. podle metodik ASME.



Obr. 11 Jednoosý tah ideálně plastického materiálu

### 3.3.2. Pragerův model

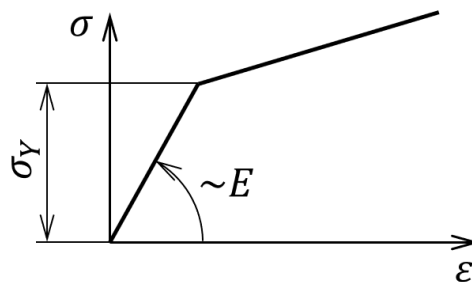
Volbou nulového izotropního a lineární závislosti kinematického zpevnění na plastické deformaci vzniká Pragerův model [7].

$$d\alpha = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon_p , \quad (3.25)$$

kde  $C$  je parametr modelu a určuje sklon přímky v plastické oblasti na Obr. 12.

Pro jednoosé napětí je integrací (3.25) a následným dosazením do (3.24) odvozen vztah pro napětí

$$\sigma = C \cdot \varepsilon_p + \psi \cdot \sigma_Y . \quad (3.26)$$



Obr. 12 Jednoosý tah Pragerova modelu

### 3.3.3. Armstrong-Frederickův model

Přidáním tzv. paměťové složky do Pragerova modelu vzniká Armstrong-Frederickův model [8]. Tento model je prvním modelem, který zavedl nelinearitu do kinematického zpevnění.

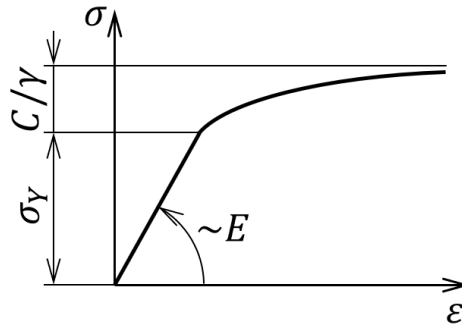
$$d\alpha = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon_p - \gamma \cdot \alpha \cdot dp , \quad (3.27)$$

kde  $C$  a  $\gamma$  jsou parametry modelu.

Pro jednoosé napětí je integrací (3.27) a následným dosazením do (3.24) odvozen vztah pro napětí. Postup integrace je popsán např. v [9].

$$\sigma = \psi \cdot \sigma_Y + \frac{C \cdot \psi}{\gamma} + \left( \alpha_0 - \frac{C \cdot \psi}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} , \quad (3.28)$$

kde  $\alpha_0$  je počáteční hodnota kinematického napětí a  $\varepsilon_{p0}$  je počáteční hodnota plastické deformace. V následujícím grafu je vyobrazena charakteristická závislost pro jednoosý tah.



Obr. 13 Jednoosý tah Armstrong-Frederickova modelu

### 3.3.4. Chabocheho model kinematického zpevnění

Chabocheho model [10] je tvořen součtem kinematických tenzorů, které mají stejný předpis jako Armstrong-Frederickův model.

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i, \quad (3.29)$$

kde  $M$  je počet kinematických tenzorů napětí a tenzory  $\alpha_i$  jsou popsány rovnicí

$$d\alpha_i = \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot d\epsilon_p - \gamma_i \cdot \alpha_i \cdot dp. \quad (3.30)$$

Nejčastěji se používá počet tenzorů  $M = 3$  a jeden parametr  $\gamma$  se volí nulový. Dva tenzory se tedy chovají jako v Armstrong-Frederickově modelu a jedna jako v Pragerově modelu.

$$\sigma = \psi \cdot \sigma_y + C_M \cdot \epsilon_p + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} + \left( \alpha_{0i} - \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} \right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi \cdot (\epsilon_p - \epsilon_{p0})} \quad (3.31)$$

Svou schopností dobře vystihnout tvary hysterezních smyček se Chabocheho model stal v současnosti nepoužívanějším typem modelů.

### 3.3.5. Kombinovaný Chabocheho model zpevnění

Pro využití celého potenciálu kombinovaného zpevnění byl v [10] pro popis cyklického zpevnění a změkčení navržen následující tvar izotropního zpevnění.

$$dR_i = b_i \cdot (Q_i - R_i) \cdot dp$$

$$R = \sum_i R_i \quad (3.32)$$

Rovnice pro napětí je velmi podobná rovnici (3.31).

$$\sigma = \psi \cdot (\sigma_y + R) + \sum_{i=1}^M \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} + \left( \alpha_{0i} - \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} \right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi \cdot (\epsilon_p - \epsilon_{p0})} \quad (3.33)$$

Takto navržený model je schopný popsat tvar hysterezních smyček i cyklické zpevnění či změkčení. Obecně lze použít pro libovolnou amplitudu deformací, tedy i náhodné zatěžování, ovšem pouze v případě, že materiál splňuje Masingovo chování.

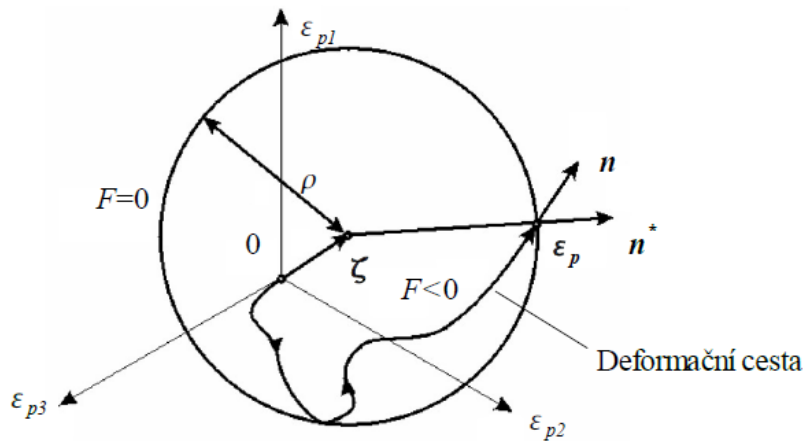
### 3.3.6. Modely s paměťovou plochou

Pro popis efektu na Obr. 6 Chaboche navrhl v [10] novou proměnnou, která by si „pamatovala“ největší dosaženou plastickou deformaci. To je provedeno zavedením tzv. paměťové plochy, která je obdobou plochy plasticity pro plastické deformace.

Jako u podmínky plasticity je zde navržena mezní funkce paměťové plochy  $g(\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ , funkce ekvivalentní plastické deformace  $g(\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ , translace paměťové plochy je popsáno tenzorem  $\boldsymbol{\zeta}$  a poloměr paměťové plochy je skalár  $q$  (viz Obr. 14, kde je poloměr označen  $\rho$ ).

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta}) = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta})} \quad (3.34)$$

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\zeta}, q) = g(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta}) - q = 0 \quad (3.35)$$



Obr. 14 Paměťové plochy v prostoru hlavních deformací [3]

Návrhy přírůstků  $\boldsymbol{\zeta}$  a  $q$  v [10] byly následně zobecněny v [11] a jsou definovány rovnicemi

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (1 - \eta) \cdot H(g) \cdot \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle \cdot \mathbf{n}' \cdot \dot{p} \quad (3.36)$$

$$\dot{q} = \eta \cdot H(g) \cdot \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle \cdot \dot{p} , \quad (3.37)$$

kde  $H(g)$  značí Heavysideův skok a  $\langle \rangle$  jsou MacCauleyho závorky:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \geq 0 \\ 0, & \text{pro } x < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{pro } x \geq 0 \\ 0, & \text{pro } x < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$



dále  $\mathbf{n}$  je normála k ploše plasticity,  $\mathbf{n}'$  je normála k paměťové ploše. Ty jsou definovány rovnicemi

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{n}' = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta}}{g(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\zeta})} \quad (3.41)$$

a  $\eta$  je parametr určující poměr mezi přírůstky. Volbou parametru  $\eta$  lze regulovat rychlost paměťového efektu. Při volbě  $\eta < 0,5$  se poloměr paměťové plochy navyšuje postupně. V případě volby  $\eta = 0,5$  se poloměr paměťové plochy okamžitě rozšíří na maximální dosaženou plastickou deformaci.

Ovlivnění vývoje cyklického zpevnění je možné provést zavedením závislosti některých z parametrů modelu na poloměru plochy plasticity. Např. v [10] byl použit parametr  $Q$ , v [12] byl použit parametr  $\gamma$ , ale teoreticky je možné i použít ostatní parametry nebo více parametrů najednou.

## 4. Základní materiálový model

Pro sestavení, implementaci a validaci základního materiálového modelu je vybrán kombinovaný Chabocheho model zpevnění. Cílem je vytvořit základní funkční model, který bude snadno rozšiřitelný a modifikovatelný.

Experimentální data dostupná pro potřeby výběru vhodného typu modelu a jeho validace zachycují napět'ovou odezvu cyklicky deformačně zatěžovaného materiálu o počtech cyklů v řádech  $10^3$  až  $10^4$ . Vzorkovací frekvence naměřených dat se přitom může pohybovat kolem  $5 \cdot 10^3$  bodů na jeden cyklus. Takto velký počet bodů u jedné zkoušky znamená, že by kalibrace pomocí metody nejmenších čtverců v plném rozsahu měřených dat byla příliš časově a hardwarově náročná. Je proto nutné vstupní hodnoty, podle kterých se budou kalibrovat parametry modelů, redukovat. Je však třeba zachovat rozhodující závislosti, vystihujících hlavní charakteristiky napět'ové odezvy.

Jako zástupné charakteristiky pro všechny sady dat jsou vybrány hysterezní smyčka na středu živostnosti a závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci. Tyto charakteristiky jsou také použity pro validaci modelu po kalibraci parametrů. Vlastní kalibrace je provedena s pomocí analytického řešení jednoosé zkoušky a validace je provedena simulací jednoosé zkoušky v softwaru Abaqus.

Pro tuto práci byly použity záznamy cyklických deformačně řízených zkoušek pro amplitudy poměrných deformací 0,005; 0,006; 0,007 a 0,008. Tato experimentální měření byla prováděna na trubkovém vzorku z materiálu 34CrNiMo6, který měl vnější průměr 22,8 mm a vnitřní průměr 19 mm při teplotě 250°C. Pro validaci kombinovaného Chabocheho modelu zpevnění byla vybrána sada dat pro amplitudu deformací  $\varepsilon_a = 0,007$  jako reprezentativní experimentální data.

### 4.1. Volba materiálového modelu

Z grafů charakteristik byl pro tuto sadu dat zvolen kombinovaný Chabocheho model zpevnění se 3 kinematickými zpevněními ( $\gamma_3 = 0$ ) a se 2 izotropními zpevněními, které jsou převzaty z [10] a jsou popsány následujícími diferenciálními rovnicemi

$$dR_i = b_i \cdot (Q_i - R_i) \cdot dp$$
$$dR = \sum_{i=1}^2 dR_i , \quad (4.1)$$

kde  $Q_1, b_1, Q_2, b_2$  jsou parametry modelu.

Takto definované izotropní zpevnění je na akumulované plastické deformaci exponenciálně závislé a analytické řešení pro nulové počáteční podmínky má následující tvar.

$$R_i = Q_i \cdot (1 - e^{-b_i \cdot p})$$
$$R = \sum_{i=1}^2 R_i \quad (4.2)$$

Dvě izotropní zpevnění byla zvolena, aby jedna exponenciála popsala rychlý pokles amplitud napětí na začátku zkoušky a druhá popsala pomalejší pokles v dalším průběhu zkoušky.

## 4.2. Kalibrace parametrů

Postup kalibrace byl sestaven tak, aby byla jeho struktura obecná a snadno rozšiřitelná. Níže jsou vyčteny jednotlivé kroky kalibrace:

1. Konstrukce charakteristik z naměřených dat
2. Stanovení Youngova modulu pružnosti a meze kluzu
3. Sestavení programu pro generaci charakteristik z obecných parametrů modelu
4. Sestavení programu pro výpočet střední kvadratické chyby charakteristik
5. Definice cílové funkce
6. Výpočet počátečních odhadů parametrů
7. Optimalizace parametrů modelu
8. Vizuální verifikace podle grafů charakteristik

Takto sestavený modulární přístup má mnoho výhod. Např. pokud by se do zvolených charakteristik přidal ratchetting, většina kódu by zůstala nedotčena. Bylo by pouze nutné přidat, popřípadě změnit, kód v krocích 1,3,5,6 a 8.

### 4.2.1. Konstrukce charakteristik z naměřených dat

Naměřená závislost napětí na deformaci je rozdělena podle cyklů do vektorů deformací  $\{\varepsilon_N\}$  a vektorů napětí  $\{\sigma_N\}$ , kde  $N$  značí číslo cyklu. Z těchto vektorů jsou vypočteny vybrané charakteristiky.

#### Hysterezní smyčka na středu životnosti

Hysterezní smyčka na středu životnosti je důležitou charakteristikou daného materiálu. Z tvaru hysterezní smyčky lze např. stanovit parametry kinematického zpevnění.

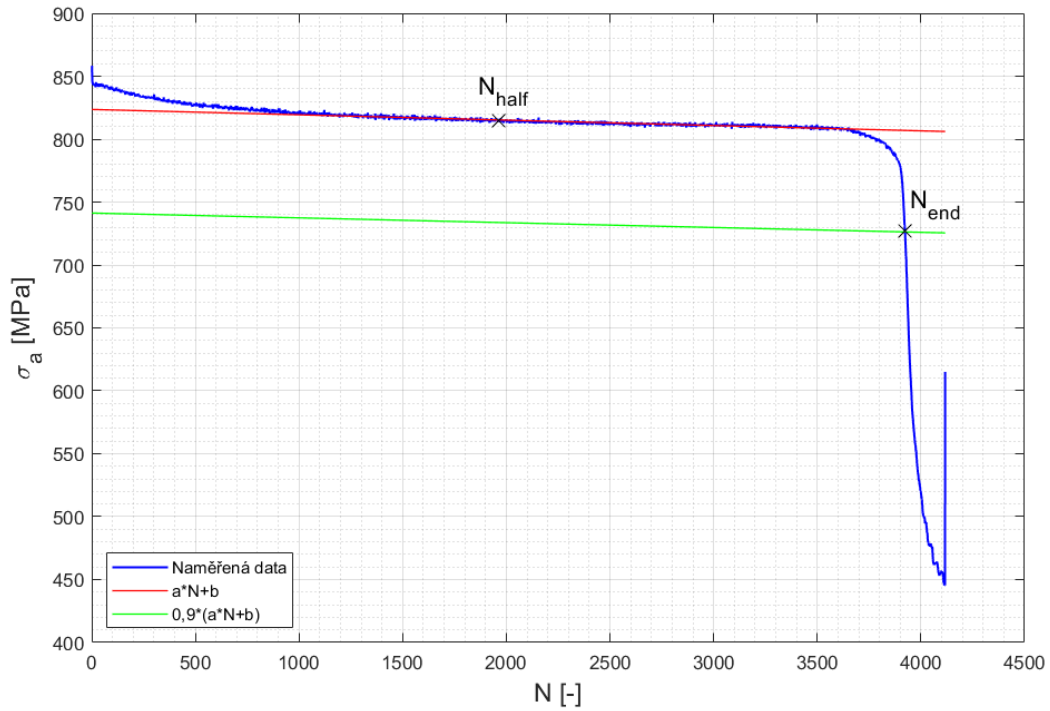
Střed životnosti se obvykle určuje ze závislosti amplitud napětí na počtu proběhlých cyklů, která se určí rovnicí

$$\sigma_a(N) = \frac{\max_i(\sigma_N(i)) - \min_i(\sigma_N(i))}{2} . \quad (4.3)$$

Lineární část grafu se proloží přímkou  $\sigma_a(N) = a \cdot N + b$ , jejíž parametry  $a, b$  se určí pomocí metody nejmenších čtverců. Konec životnosti  $N_{end}$  se definuje jako první cyklus, jehož bod v grafu se nachází pod přímkou  $\sigma_a = 0,9 \cdot (a \cdot N + b)$ , tedy

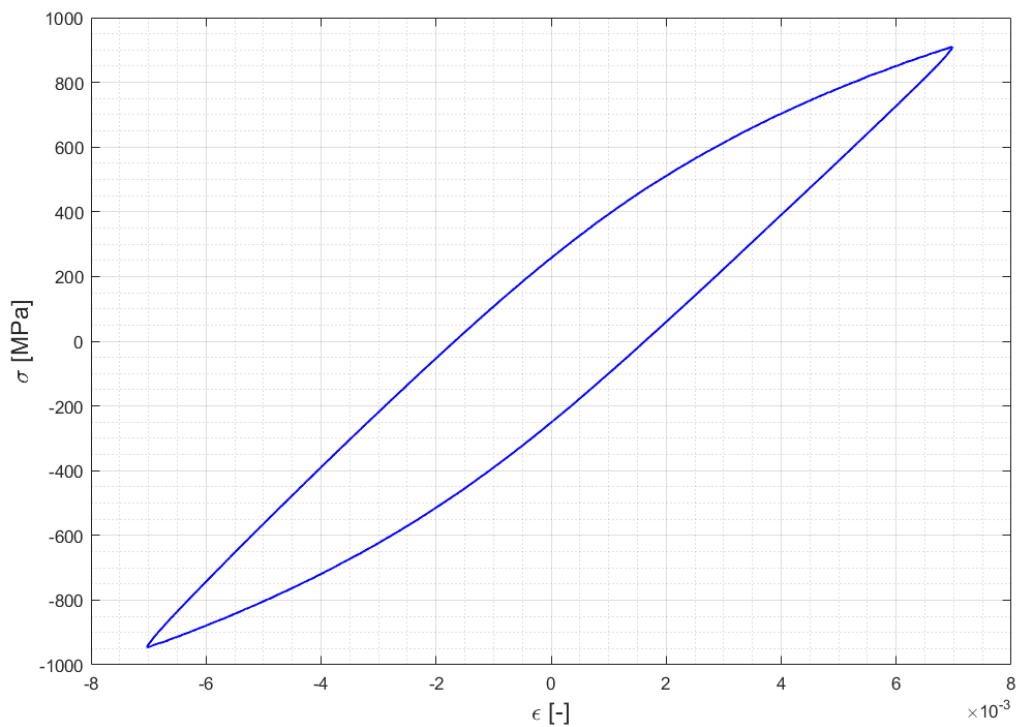
$$\sigma_a(N_{end}) < 0,9 \cdot (a \cdot N_{end} + b) . \quad (4.4)$$

Střed životnosti  $N_{half}$  je zaokrouhlenou polovinou hodnoty  $N_{end}$ . Tento postup je zobrazen pro obecnou křivku na Obr. 15.



Obr. 15 Určení středu životnosti z obecného průběhu amplitud napětí

Z výše uvedeného postupu byl z naměřených dat pro poměrnou deformaci 0,007 určen střed životnosti  $N_{half} = 423$  a z vektorů  $\{\varepsilon_{N_{half}}\}$ ,  $\{\sigma_{N_{half}}\}$  je vytvořen následující graf smyčky na středu životnosti.



Obr. 16 Naměřená hysterezní smyčka na středu životnosti

## Závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

Další důležitou charakteristikou je závislost amplitud napětí  $\sigma_a$  na akumulované plastické deformaci  $p$ , která ovlivňuje převážně parametry izotropního zpevnění.

Přírůstek akumulované plastické deformace je definován rovnicí

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot d\varepsilon_p : d\varepsilon_p} . \quad (4.5)$$

Pro plastické deformace platí zákon zachování objemu. V případě jednoosého tahu/tlaku se proto tenzor diferenciálů plastické deformace rovná

$$d\varepsilon_p = \begin{bmatrix} d\varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 \cdot d\varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \cdot d\varepsilon_p \end{bmatrix} . \quad (4.6)$$

Dosazením rovnice (4.6) do (4.5) se získá rovnice

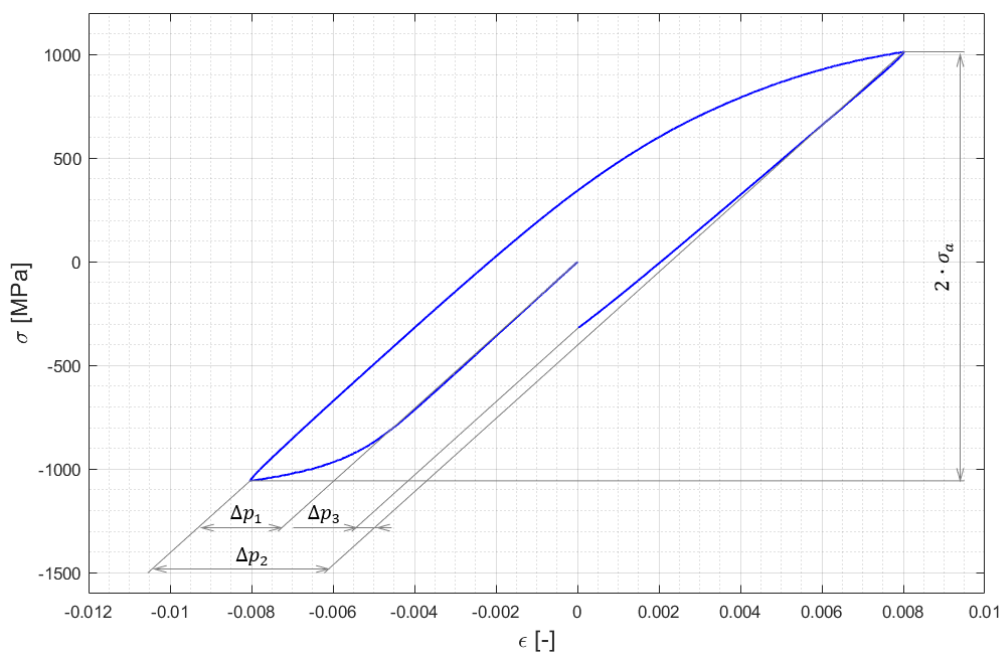
$$dp = |d\varepsilon_p| . \quad (4.7)$$

Pro jednotlivé úseky zatěžování, kde se vyskytuje pouze tah nebo pouze tlak, lze diferenciální rovnici převést na rovnici diferenční.

$$\Delta p = |\Delta\varepsilon_p| \quad (4.8)$$

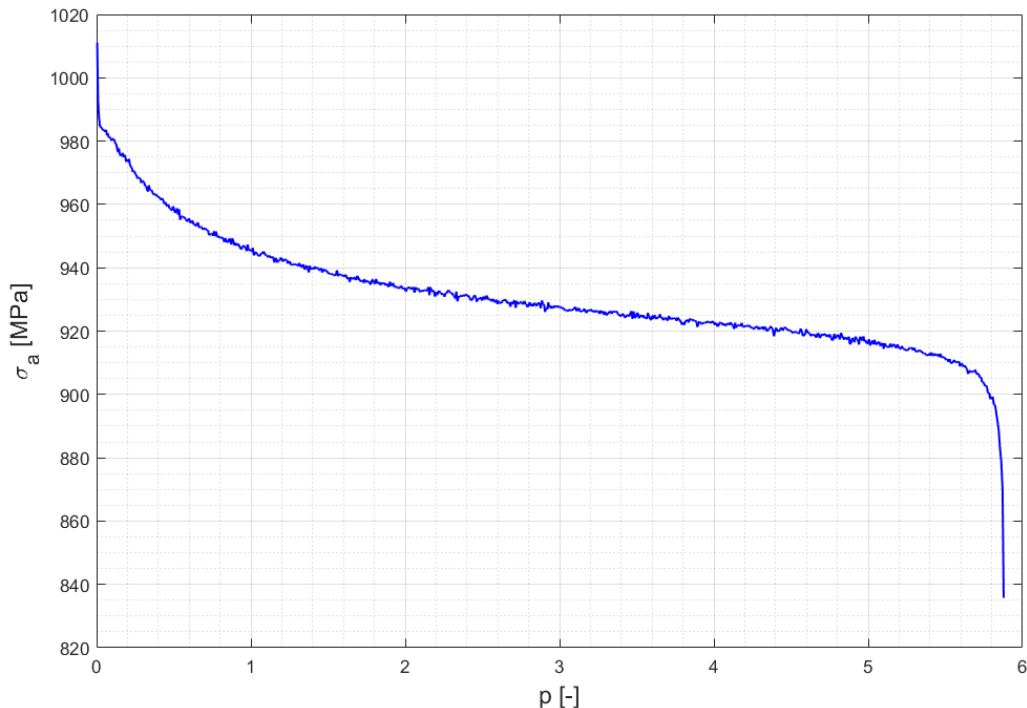
Získání amplitud napětí  $\sigma_a(N)$  a akumulované plastické deformace  $p(N)$  je znázorněno na Obr. 17. V případě dříve plasticky nedeformovaného materiálu je počáteční podmínka akumulované plastické deformace  $p(0) = 0$ .

$$p(N) = p(N - 1) + \Delta p_1(N) + \Delta p_2(N) + \Delta p_3(N) \quad (4.9)$$



Obr. 17 Určení přírůstků akumul. plastické deformace a amplitudy napětí obecného cyklu

Z výše uvedeného postupu byly z naměřených dat zkonstruovány vektory  $\{p\}$  a  $\{\sigma_a\}$  zobrazené v následujícím grafu.



Obr. 18 Naměřená závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

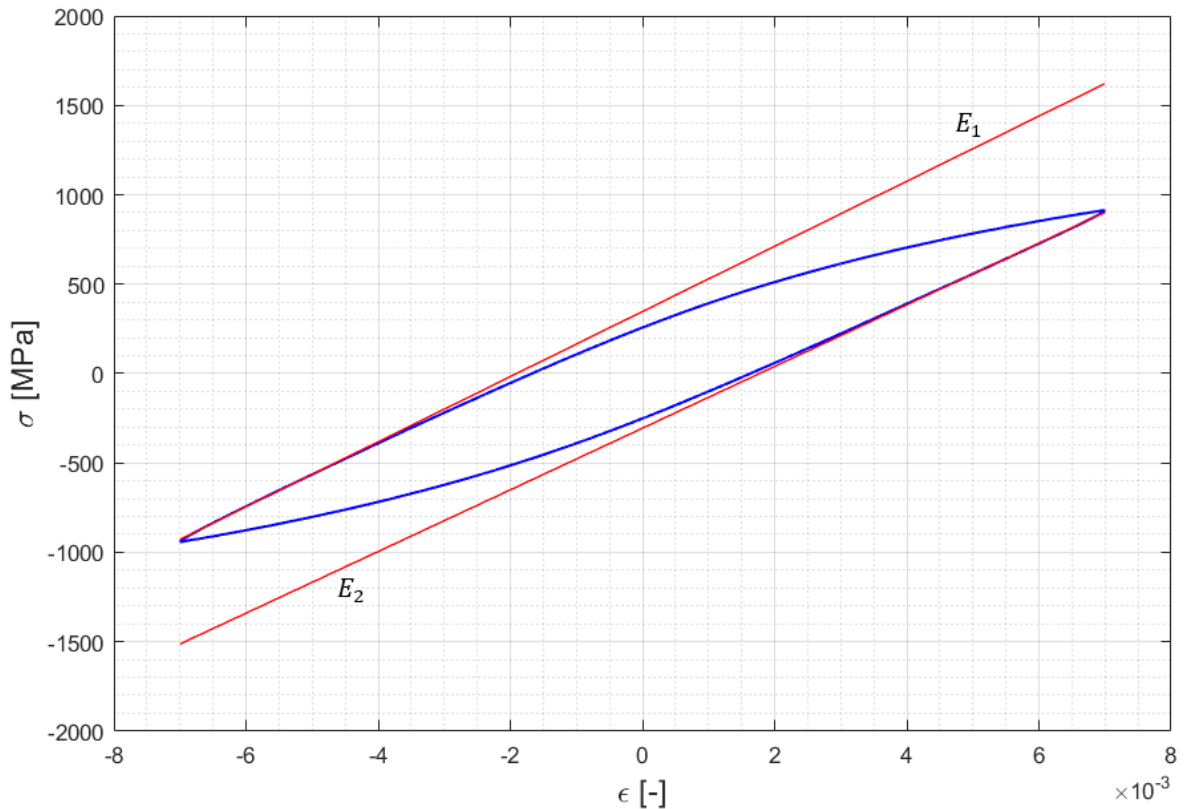
Rychlý pokles amplitudy napětí na konci zkoušky odpovídá rozvoji makroskopické trhliny, který vede k závěrečnému lomu. Ačkoliv by bylo možné tento jev popsat vhodným modelem poškození, pro naše účely tvorby materiálového modelu není vhodné tato data zahrnout do zpracování. Jmenovitě jsou pro další kalibraci použita data, pro které platí  $p \leq 4,6$ .

#### 4.2.2. Stanovení Youngova modulu pružnosti a počáteční meze kluzu

Youngův modul pružnosti i počáteční mez kluzu lze měřit samostatnou zkouškou, ale v tomto případě je nutné tyto parametry vypočítat z daných naměřených dat.

##### Youngův modul pružnosti

Youngův modul pružnosti se v průběhu zkoušky zásadně nemění. Pro tento model byl určen z lineárních částí hysterezní smyčky na středu životnosti. Youngův modul pružnosti je zjišťován metodou nejmenších čtverců pro horní větev ( $E_1$ ) i dolní větev ( $E_2$ ), jak je ukázáno v Obr. 19, výsledný Youngův modul pružnosti ( $E$ ) je průměr těchto hodnot.



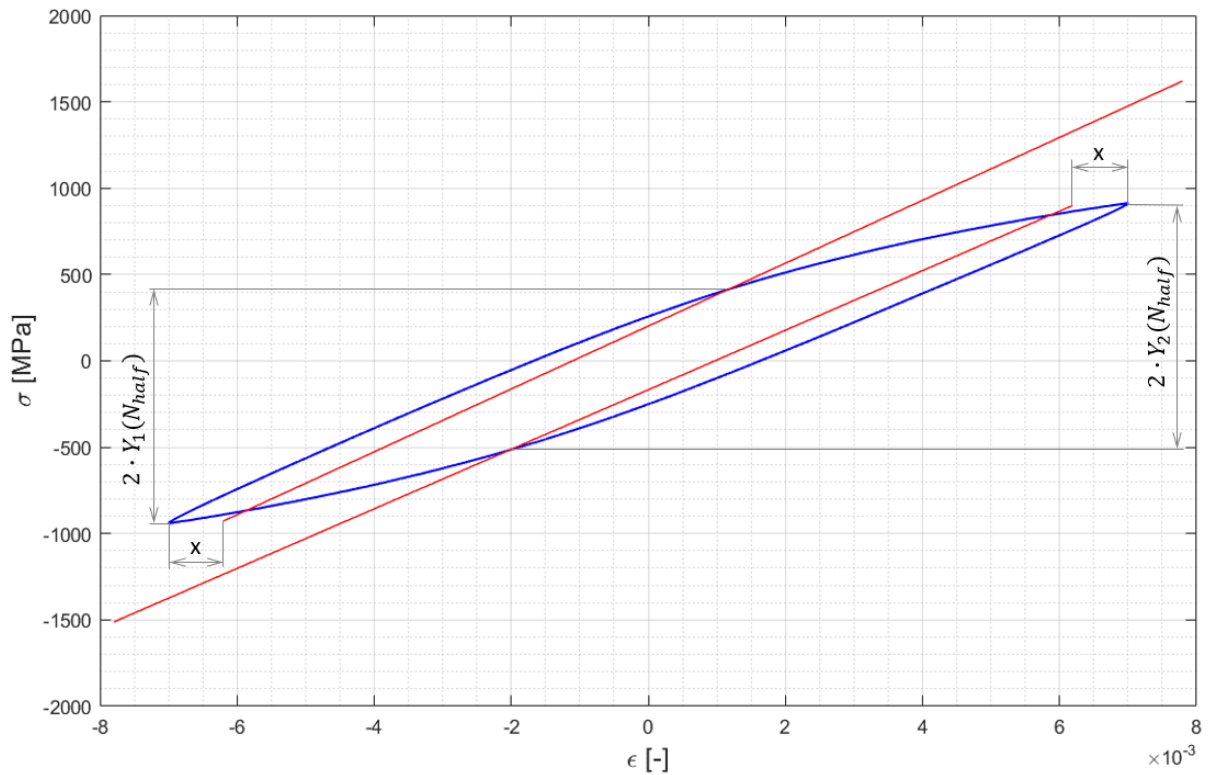
Obr. 19 Určení Youngova modulu pružnosti ze smyčky na středu životnosti

Tímto postupem byl pro dané hodnoty vypočten Youngův modul pružnosti

$$E = 1,773 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad . \quad (4.10)$$

### Mez kluzu

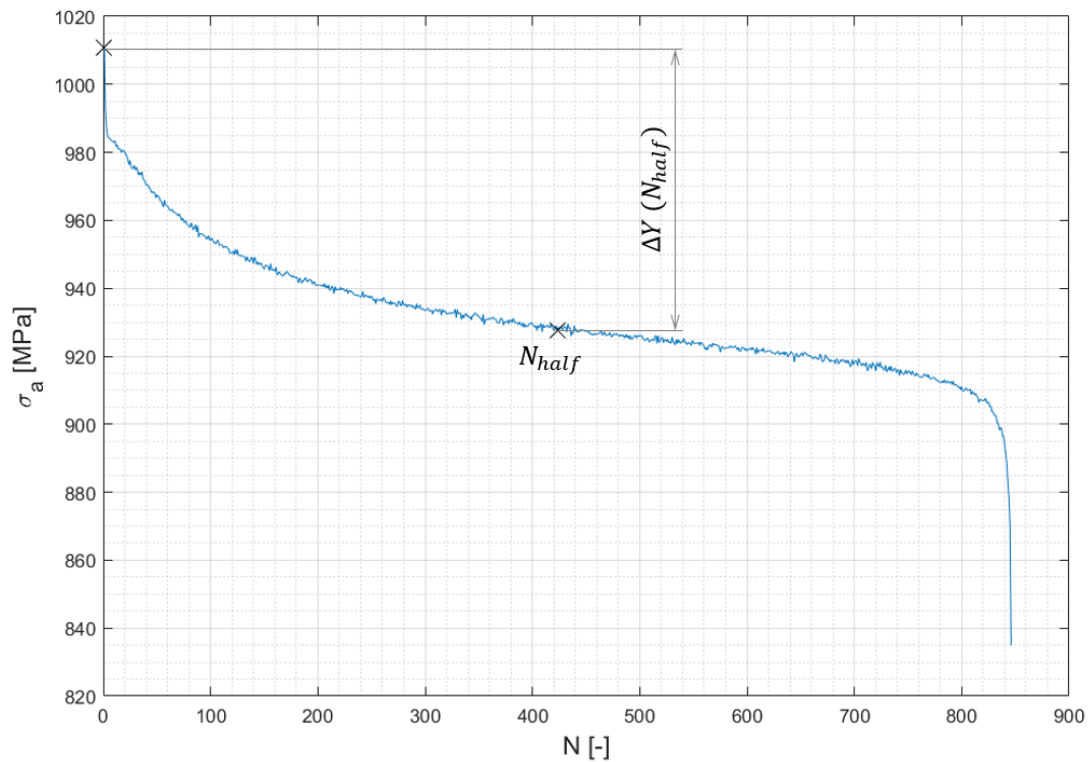
Nejdříve je vypočten poloměr plochy plasticity na středu životnosti pomocí podobného postupu, jako se určuje smluvní mez kluzu  $R_{p0,2}$ . Vrcholy smyčky jsou proloženy přímkami se směrnici  $E$ , které jsou následně posunuty ve směru osy deformací o hodnotu  $x$  směrem ke středu. Poté jsou z průsečíku těchto přímek a smyčky určen aktuální poloměr plochy plasticity pro dolní větev ( $Y_1(N_{half})$ ) a dolní větev ( $Y_2(N_{half})$ ), jak je naznačeno na Obr. 20. Poloměr plochy plasticity na středu životnosti ( $Y(N_{half})$ ) je průměrem těchto hodnot.



Obr. 20 Určení poloměru plochy plasticity na středu životnosti

Mez kluzu se určí z poloměru plochy plasticity na středu životnosti a z průběhu amplitud napětí, jak je naznačeno na Obr. 21.

$$\sigma_Y = Y(N_{half}) + \sigma_a(1) - \sigma_a(N_{half}) \quad (4.11)$$



Obr. 21 Určení meze kluzu



Pro účely tohoto modelu byla zvolena hodnota  $x = 0,00005$ . Na jejím základě vypočtená mez kluzu nabývá hodnoty

$$\sigma_Y = 471,9 \text{ MPa} . \quad (4.12)$$

#### 4.2.3. Sestavení programu pro generaci charakteristik z obecných parametrů

V následujícím seznamu jsou uvedeny všechny proměnné, z kterých budou charakteristiky generovány.

- Amplituda deformací  $\varepsilon_a$
- Youngův modul pružnosti  $E$
- Mez kluzu  $\sigma_Y$
- Parametry modelu  $C, \gamma, Q, b$
- Celkový počet cyklů  $N_{end}$
- Střed životnosti  $N_{half}$

#### Generování závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

Pro konstrukci této závislosti není nutné znát celý průběh napětí, stačí pouze vypočítat hodnoty napětí pro hodnoty extrémů deformací  $-\varepsilon_a$  a  $\varepsilon_a$ .

Následující rovnice jsou souhrnem rovnice modelu (3.33) a volbou izotropního zpevnění (4.2) pokud se počáteční stav označí dolním indexem  $k - 1$  a koncový stav  $k$

$$\sigma_k = \psi_k \cdot (\sigma_Y + R_k) + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i_k} \quad (4.13)$$

$$R_k = \sum_{i=1}^2 Q_i \cdot \left( 1 - e^{-b_i \cdot (p_{k-1} + |\Delta\varepsilon_{p_k}|)} \right) \quad (4.14)$$

$$\alpha_{i_k} = \frac{C_i \cdot \psi_k}{\gamma_i} + \left( \alpha_{i_{k-1}} - \frac{C_i \cdot \psi_k}{\gamma_i} \right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi_k \cdot \Delta\varepsilon_{p_k}} , \quad (4.15)$$

kde  $\Delta\varepsilon_p(k)$  je rozdíl plastické deformace, který je získán použitím aditivního zákona (3.6) společně s Hookovým zákonem (3.5).

$$\Delta\varepsilon_{p_k} = \varepsilon_k - \frac{\sigma_k}{E} - \left( \varepsilon_{k-1} - \frac{\sigma_{k-1}}{E} \right) \quad (4.16)$$

Spojením rovnic (4.13) až (4.16) vznikne implicitní rovnice pro výpočet napětí.

$$\sigma_k = f(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \psi_k, \alpha_{i_{k-1}}, p_{k-1}) \quad (4.17)$$

Je uvažován dříve nezatížený materiál, pro který platí nulové počáteční podmínky

$$\varepsilon_0 = 0, \sigma_0 = 0, \alpha_{i_0} = 0, p_0 = 0 . \quad (4.18)$$

Pro  $k = 1, 2 \dots 2 \cdot N_{end}$  je zvolena deformace  $\varepsilon_k$  a parametr  $\psi_k$ .

$$\varepsilon_k = \begin{cases} -\varepsilon_a, & k = 2 \cdot N - 1 \\ \varepsilon_a, & k = 2 \cdot N \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\psi_k = \begin{cases} -1, & k = 2 \cdot N - 1 \\ 1, & k = 2 \cdot N \end{cases}, \quad (4.20)$$

kde  $N = 1, 2, \dots, N_{end}$  a značí číslo cyklu.

Pro  $k = 1$  jsou provedeny následující kroky. Z rovnice (4.17) se vypočte napětí  $\sigma_k$  pomocí funkce v Matlabu „fsolve“. Z rovnice (4.16) se vypočte rozdíl plastické deformace  $\Delta\varepsilon_{p_k}$ , z kterého se vypočte akumulovaná plastická deformace.

$$p_k = p_{k-1} + \left| \Delta\varepsilon_{p_k} \right| \quad (4.21)$$

Z rovnice (4.15) se vypočtou kinematická zpevnění  $\alpha_{i_k}$  a postup je zopakován pro další inkrement, tedy  $k = k + 1$ .

Výstupy jsou vektor akumulované plastické deformace  $\{p^{amp.}\}$  a vektor amplitud napětí  $\{\sigma_a^{amp.}\}$  vypočtených rovnicemi

$$p^{amp.}(N) = p_{2 \cdot N} \quad (4.22)$$

$$\sigma_a^{amp.}(N) = \frac{\sigma_{2 \cdot N} - \sigma_{2 \cdot N - 1}}{2}. \quad (4.23)$$

### Generování hysterezní smyčky na středu životnosti

V průběhu generace závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci se uloží hodnoty  $\varepsilon_k, \sigma_k, \alpha_{i_k}, p_k$  pro  $k = 2 \cdot N_{half} - 2, k = 2 \cdot N_{half} - 1$  a  $k = 2 \cdot N_{half}$ , které se označí indexem 0, 1 a 2.

Z hodnot s indexem 0 a 1 lze vytvořit tlakovou část smyčky na středu životnosti. Z napětí a deformací je vytvořen vektor plastických deformací  $\{\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}\}$

$$\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} + (i - 2) \cdot \frac{\left( \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E} - \left( \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} \right) \right)}{(n - 2)}, \quad (4.24)$$

kde  $i = 2, 3, \dots, n$  a  $n$  je zvolený počet bodů, kolik bude generovaná větev obsahovat.

Z tohoto vektoru se jednoduše vyjádří vektor rozdílů plastické deformace  $\{\Delta\varepsilon_p^{cyk.}\}$

$$\Delta\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) = \Delta\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) - \left( \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} \right), \quad (4.25)$$

který se dosadí do rovnic (4.14) a (4.15), z kterých pak lze pomocí rovnice (4.13) vypočítat vektor napětí  $\{\sigma_{0-1}^{cyk.}\}$ .

Výstupy jsou vektor napětí  $\{\sigma_{0-1}^{cyk.}\}$  a vektor deformací  $\{\varepsilon_{0-1}^{cyk.}\}$  vypočtený rovnicí.

$$\varepsilon_{0-1}^{cyk.}(i) = \varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) + \frac{\sigma_{0-1}^{cyk.}(i)}{E} \quad (4.26)$$

Pro zahrnutí elastické části větve jsou do první složky vektorů vloženy hodnoty

$$\varepsilon_{0-1}^{cyk.}(1) = \varepsilon_0 \quad (4.27)$$

$$\sigma_{0-1}^{cyk.}(1) = \sigma_0 \quad (4.28)$$

Tahovou větev cyklu, tedy vektor napětí  $\{\sigma_{1-2}^{cyk.}\}$  a vektor deformací  $\{\varepsilon_{1-2}^{cyk.}\}$ , lze vyjádřit obdobně pouze se záměnou indexů  $0 \rightarrow 1$  a  $1 \rightarrow 2$ .

#### 4.2.4. Sestavení programu pro výpočet střední kvadratické chyby charakteristik

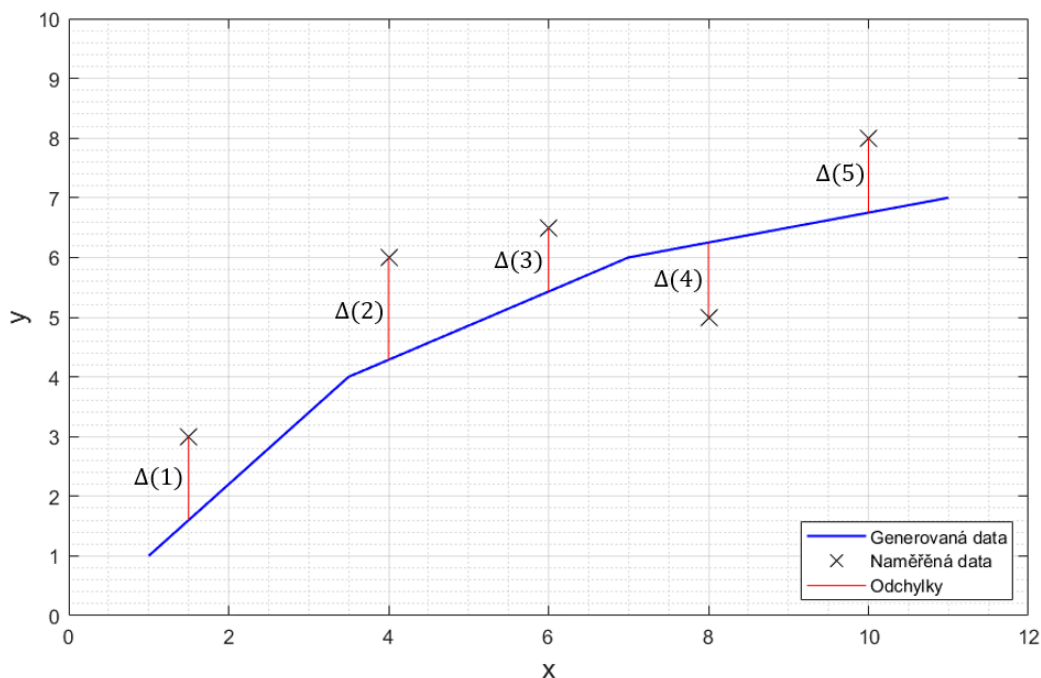
Střední kvadratická chyba (MSE) je definována rovnicí

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(i) - \hat{y}(i))^2, \quad (4.29)$$

kde  $\{y\}$  je vektor naměřených hodnot a  $\{\hat{y}\}$  je vektor generovaných hodnot a  $n$  je počet složek vektoru  $\{y\}$ .

Body generovaných a naměřených charakteristik obecně nemají stejné hodnoty na vodorovné ose. Použitím lineární interpolace generovaných dat je z vektorů  $\{x\}$ ,  $\{y\}$ ,  $\{\hat{x}\}$  a  $\{\hat{y}\}$  vytvořen vektor rozdílů  $\{\Delta\}$  jak je vysvětleno na Obr. 22. Směrodatná odchylka chyb z naměřených a generovaných dat je poté

$$MSE(\{x\}, \{y\}, \{\hat{x}\}, \{\hat{y}\}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta(i)^2. \quad (4.30)$$



Obr. 22 Ukázka interpolačního programu

#### 4.2.5. Definice cílové funkce

Celková cílová funkce ( $CF$ ) je vytvořena spojením cílové funkce ze smyčky na středu napětí ( $CF_1$ ) a z cílové funkce amplitud napětí na akumulované plastické deformaci ( $CF_2$ )

$$CF = k_1 \cdot CF_1 + k_2 CF_2 \quad , \quad (4.31)$$

kde  $k_1$  a  $k_2$  jsou váhové koeficienty cílové funkce.

#### Cílová funkce ze smyčky na středu napětí - $CF_1$

Naměřená smyčka na středu napětí je rozdělena na tahovou a tlakovou větev pomocí přímky procházející vrcholy smyčky

$$\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{min}) + \sigma_{min} \quad , \quad (4.32)$$

kde  $\sigma_{max} = \max_i (\sigma_{N_{half}}(i))$ ,  $\varepsilon_{max} = \max_i (\varepsilon_{N_{half}}(i))$  a obdobně pro minima. Vektory naměřené tlakové větve jsou označeny  $\{\sigma_{N_{half}}^{0-1}\}$  a  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{0-1}\}$ , vektory tahové větve jsou označeny  $\{\sigma_{N_{half}}^{1-2}\}$  a  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{1-2}\}$ .

Z obecných parametrů jsou pomocí programu popsáném v 4.2.3 vyjádřeny vektory  $\{\sigma_{0-1}^{cyk.}\}$ ,  $\{\varepsilon_{0-1}^{cyk.}\}$ ,  $\{\sigma_{1-2}^{cyk.}\}$  a  $\{\varepsilon_{1-2}^{cyk.}\}$ . Z těchto vektorů jsou pomocí rovnice (4.30) vypočteny MSE a cílová funkce je definovaná jejich průměrem.

$$MSE_{0-1} = MSE \left( \left\{ \varepsilon_{N_{half}}^{0-1} \right\}, \left\{ \sigma_{N_{half}}^{0-1} \right\}, \left\{ \varepsilon_{0-1}^{cyk.} \right\}, \left\{ \sigma_{0-1}^{cyk.} \right\} \right) \quad (4.33)$$

$$MSE_{1-2} = MSE \left( \left\{ \varepsilon_{N_{half}}^{1-2} \right\}, \left\{ \sigma_{N_{half}}^{1-2} \right\}, \left\{ \varepsilon_{1-2}^{cyk.} \right\}, \left\{ \sigma_{1-2}^{cyk.} \right\} \right) \quad (4.34)$$

$$CF_1 = \frac{MSE_{0-1} + MSE_{1-2}}{2} \quad (4.35)$$

#### Cílová funkce amplitud napětí na akumulované plastické deformaci - $CF_2$

Z naměřených vektorů  $\{p\}$ ,  $\{\sigma_a\}$  a generovaných vektorů  $\{p^{amp.}\}$ ,  $\{\sigma_a^{amp.}\}$  je vyjádřena MSE pomocí rovnice (4.30), která je cílovou funkcí amplitud napětí na akumulované plastické deformaci.

$$CF_2 = MSE \left( \{p\}, \{\sigma_a\}, \{p^{amp.}\}, \{\sigma_a^{amp.}\} \right) \quad (4.36)$$

#### 4.2.6. Určení počátečních odhadů parametrů

Počáteční odhad parametrů optimalizace lze vypočítat při zavedení zjednodušení, že parametry kinematického zpevnění ovlivňují pouze tvar smyčky na středu životnosti a parametry izotropního zpevnění ovlivňují pouze závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci.

## Odhad parametrů izotropního zpevnění

Při předpokladu, že amplituda prvního cyklu bude mít stejnou hodnotu pro naměřená a generovaná data, lze průběh amplitud popsat následující rovnicí.

$$\sigma_a^{amp.}(p) = \sigma_a^{amp.}(0) + R(p, Q, b) \quad (4.37)$$

Tento průběh amplitud je porovnáván s naměřeným průběhem pomocí rovnice MSE (4.29). Vektor  $\{y\}$  je zvolen jako vektor  $\{\sigma_a^{amp.}\}$  a vektor  $\{\hat{y}\}$  je vypočten dosazením vektoru  $\{p^{amp.}\}$  do rovnice (4.37).

Minimalizací MSE vektorů  $\{y\}$  a  $\{\hat{y}\}$  funkcí „fminsearch“ je získán počáteční odhad parametrů  $Q_{10}$ ,  $b_{10}$ ,  $Q_{20}$  a  $b_{20}$ . Tato optimalizace je poměrně časově nenáročná a není citlivá na počáteční parametry, proto jsou voleny metodou pokus-omyl.

Tab. 1: Počáteční odhad parametrů izotropního zpevnění

$Q_{10}$ [MPa]	$b_{10}$ [1]	$Q_{20}$ [MPa]	$b_{20}$ [1]
-33,869	3,137	-46,488	0,382

## Odhad parametrů kinematičkého zpevnění

Počáteční odhad parametrů kinematičkého zpevnění je vypočten minimalizací cílové funkce ze smyčky na středu napětí (4.35) při konstantních parametrech izotropního zpevnění  $Q_{10}$ ,  $b_{10}$ ,  $Q_{20}$  a  $b_{20}$ .

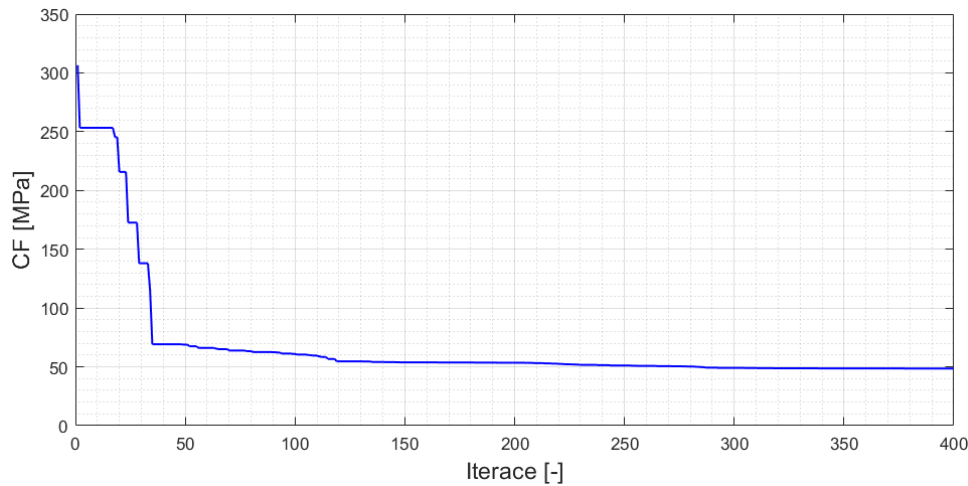
Je použita funkce „fminsearch“ a ze stejných důvodů jako u odhadu parametrů izotropního zpevnění jsou počáteční parametry této optimalizace voleny metodou pokus-omyl.

Tab. 2: Počáteční odhad parametrů kinematičkého zpevnění

$C_{10}$ [MPa]	$\gamma_{10}$ [1]	$C_{20}$ [MPa]	$\gamma_{20}$ [1]	$C_{30}$ [MPa]
$7,789 \cdot 10^5$	$2,905 \cdot 10^3$	$1,529 \cdot 10^5$	170,911	236,029

### 4.2.7. Optimalizace parametrů modelu

Minimalizace cílové funkce (4.31) s volbou váhových koeficientů  $k_1 = 1$  a  $k_2 = 5$  byla provedena funkcí „fminsearch“ s počátečními parametry uvedenými v Tab. 1 a Tab. 2. Cílová funkce měla v průběhu optimalizace následný průběh.



Obr. 23 Hodnoty cílové funkce v průběhu iterací

Optimalizované parametry společně s vypočtenou mezí kluzu a Youngovým modulem pružnosti jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 3: Optimalizované parametry

$C_1$ [MPa]	$\gamma_1$ [1]	$C_2$ [MPa]	$\gamma_2$ [1]	$C_3$ [MPa]	$\gamma_3$ [1]
$8,0688 \cdot 10^5$	$2,855 \cdot 10^3$	$1,716 \cdot 10^5$	287,482	8,692	0

$Q_1$ [MPa]	$b_1$ [1]	$Q_2$ [MPa]	$b_2$ [1]	$E$ [MPa]	$\sigma_Y$ [MPa]
-52,798	2,514	-78,253	0,412	$1,773 \cdot 10^3$	471,9

### 4.3. Implementace do programu Abaqus

Implementace nelineárního kinematického a izotropního zpevnění je prováděna použitím metody radiálního návratu, která je podrobně popsána v [13]. V této kapitole je pouze zkráceně popsáno odvození této metody. Dále je na základě [14] popsáno odvození konzistentního tečného modulu. Následně jsou odvozené rovnice implementovány do uživatelské procedury UMAT softwaru Abaqus v jazyce FORTRAN.

Řešič Abaqusu používá tzv. Voigtův vektorový zápis tenzorů napětí a deformací

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_3 \quad \tau_1 \quad \tau_2\}^T \quad (4.38)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_3 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2\}^T, \quad (4.39)$$

kde  $\gamma_1$  je zkoso, který je definován  $\gamma_1 = 2 \cdot \varepsilon_{23}$  a obdobně  $\gamma_2, \gamma_3$  cyklickou záměnou indexů.

Ve Voigtově zápisu je pro operaci úžení tenzorů a kvůli použití zkoso vhodně definovat pomocné diagonální matice  $[M_1]$  a  $[M_2]$ .

$$[M_1] = \text{diag}(\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2\}) \quad (4.40)$$

$$[M_2] = \text{diag}(\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,5\}) \quad (4.41)$$

Dále je vhodné definovat deviatorický operátor  $[I_d]$

$$[I_d] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

který slouží např. k výpočtu deviatoru napětí

$$\{s\} = [I_d] \cdot \{\sigma\} . \quad (4.43)$$

#### 4.3.1. Odvození metody radiálního návratu pro obecné zpevnění

Odvození vychází z rozšířeného Hookova zákona ve tvaru s Laméovy koeficienty  $G$  a  $\lambda$ , které jsou vyjádřeny z Youngova modulu pružnosti  $E$  a Poissonovy konstanty  $\nu$ .

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (4.44)$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (4.45)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2 \cdot \mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2 \cdot \mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\{\sigma\} = [D^e] \cdot \{\varepsilon\} \quad (4.47)$$

Elastická deformace v čase  $t + \Delta t$  je rozdělena na el. deformaci v čase  $t$  a na přírůstek celkové a plastické deformace.

$$\{\varepsilon_e\}(t + \Delta t) = \{\varepsilon_e\}(t) + \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.48)$$

Pro jedinou úpravu je Hookův zákon zapsán i v podobě tenzorového zápisu:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e + \lambda \cdot Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \cdot \mathbf{1} , \quad (4.49)$$

kde  $Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$  je stopa tenzoru elastických deformací a  $\mathbf{1}$  je Kroneckerův tenzor 2. řádu. Plastická deformace popisuje pouze tvarovou změnu, objemová plastická deformace je nulová, tedy

$$Tr(\Delta\varepsilon_p) = 0 . \quad (4.50)$$

Dosažením (4.48) a (4.50) do (4.47) vznikne rovnice elastického prediktoru a plastického korektoru.

$$\{\sigma\}(t + \Delta t) = \underbrace{\{\sigma\}(t) + [D^e] \cdot \{\Delta\varepsilon\}}_{\text{Elastický prediktor}} - \underbrace{2 \cdot G \cdot [M_2] \cdot \{\Delta\varepsilon_p\}}_{\text{Plastický korektor}} \quad (4.51)$$

Při označení elastického prediktoru  $\{\sigma^{tr}\}$  a při dosazení pravidla normality (3.19) lze (4.51) vyjádřit jako

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{tr}\} - 2 \cdot G \cdot \Delta p \cdot \{n\} , \quad (4.52)$$

kde  $\{n\}$  je normálový vektor k ploše plasticity a je definován rovnicí

$$\{n\} = \frac{\partial f(\{s\} - \{\alpha\})}{\partial \{\sigma\}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\{s\} - \{\alpha\}}{f(\{s\} - \{\alpha\})} , \quad (4.53)$$

kde  $f(\{s\} - \{\alpha\})$  lze Voigtovým zápisem vyjádřit jako

$$f(\{s\} - \{\alpha\}) = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\{s\} - \{\alpha\})^T \cdot [M_1] \cdot (\{s\} - \{\alpha\})} . \quad (4.54)$$

Z rovnice (4.52) je jednoduše použitím deviatorického operátoru získána rovnice pro deviator napětí

$$\{s\} = \{s^{tr}\} - 2 \cdot G \cdot \Delta p \cdot \{n\} . \quad (4.55)$$

Dosazením rovnice (4.55) do (4.53) lze odvodit rovnici

$$\{n\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\{s^{tr}\} - \{\alpha\}}{f(\{s\} - \{\alpha\}) + 3 \cdot G \cdot \Delta p} . \quad (4.56)$$

Protože  $\{n\}^T \cdot [M_1] \cdot \{n\} = \frac{3}{2}$ , lze dosazením (4.53) do (4.55) a následným vynásobením zleva maticí  $\{n\}^T \cdot [M_1]$  odvodit rovnici

$$f(\{s\} - \{\alpha\}) + 3 \cdot G \cdot \Delta p = \{n\}^T \cdot [M_1] \cdot (\{s\} - \{\alpha\}) . \quad (4.57)$$

Kombinací rovnic (4.56) a (4.57) již lze získat upravenou rovnici ekvivalentního napětí

$$f(\{s\} - \{\alpha\}) = f(\{s^{tr}\} - \{\alpha\}) - 3 \cdot G \cdot \Delta p . \quad (4.58)$$

Rovnice (4.58) je dosazena do rovnice podmínky plasticity pro kombinované zpevnění (3.23).

$$f(\{\sigma\}, R, \{\alpha\}) = f(\{s^{tr}\} - \{\alpha\}) - 3 \cdot G \cdot \Delta p - R - \sigma_Y = 0 \quad (4.59)$$

Kinematické a izotropní zpevnění i napětí jsou závislé na  $\Delta p$ , (4.59) je tedy nelineární rovnice pro  $\Delta p$ . Pro řešení je použita Newtonova metoda, kde jsou jednotlivé iterace označeny horním indexem  $k$ .

$$\Delta p^{(k+1)} = \Delta p^{(k)} + \frac{f(\{s^{tr}\} - \{\alpha^{(k)}\}) - 3 \cdot G \cdot \Delta p^{(k)} - R^{(k)} - \sigma_Y}{3 \cdot G + \frac{\partial R^{(k)}}{\partial \Delta p} - \frac{\partial f(\{s^{tr}\} - \{\alpha^{(k)}\})}{\partial \Delta p}} \quad (4.60)$$

#### 4.3.2. Diskretizace rovnic zpevnění a výpočet parciálních derivací

Diferenciální rovnice kinematického zpevnění (3.30) je diskretizována implicitní Eulerovou metodou dosazením  $\{\alpha_{i0}\} + \{\Delta \alpha_i\}$  za  $\{\alpha_i\}$



$$\{\Delta\alpha_i^{(k)}\} = \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot \Delta p^{(k)} \cdot \{n^{(k)}\} - \gamma_i \cdot (\{\alpha_{i0}\} + \{\Delta\alpha_i^{(k)}\}) \cdot \Delta p^{(k)} \quad (4.61)$$

$$\{\Delta\alpha_i^{(k)}\} = \frac{\frac{2}{3} \cdot C_i \cdot \Delta p \cdot \{n^{(k)}\} - \gamma_i \cdot \{\alpha_{i0}\} \cdot \Delta p^{(k)}}{1 + \gamma_i \cdot \Delta p^{(k)}} \quad (4.62)$$

V rovnici (4.60) lze za pomoci tohoto schématu vyjádřit parciální derivace  $\frac{\partial f(\{s^{tr}\} - \{\alpha^{(k)}\})}{\partial \Delta p}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\{s^{tr}\} - \{\alpha^{(k)}\})}{\partial \Delta p} &= \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\{s^{tr}\} - \{\alpha_0\} - \{\Delta\alpha^{(k)}\})^T \cdot [M_1] \cdot (\{s^{tr}\} - \{\alpha_0\} - \{\Delta\alpha^{(k)}\})}}{\partial \Delta p} = \\ &= \frac{3}{2 \cdot f(\{s^{tr}\} - \{\alpha_0\} - \{\Delta\alpha^{(k)}\})} \cdot (\{s^{tr}\} - \{\alpha_0\} - \{\Delta\alpha^{(k)}\}) : \left( - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \{\Delta\alpha_i^{(k)}\}}{\partial \Delta p} \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\Delta\alpha_i^{(k)}\}}{\partial \Delta p} &= \\ &= \frac{\left( \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot \{n^{(k)}\} - \gamma_i \cdot \{\alpha_{i0}\} \right) \cdot (1 + \gamma_i \cdot \Delta p^{(k)}) - \left( \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot \Delta p^{(k)} \cdot \{n^{(k)}\} - \gamma_i \cdot \{\alpha_{i0}\} \cdot \Delta p^{(k)} \right) \cdot \gamma_i}{(1 + \gamma_i \cdot \Delta p^{(k)})^2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Diferenciální rovnice izotropního zpevnění (4.1) je diskretizována implicitní Eulerovou metodou dosazením  $R_{i0} + \Delta R_i$  za  $R_i$ .

$$\Delta R_i^{(k)} = b_i \cdot (Q_i - R_{i0} - \Delta R_i^{(k)}) \cdot \Delta p^{(k)} \quad (4.65)$$

$$\Delta R_i^{(k)} = \frac{b_i \cdot (Q_i - R_{i0}) \cdot \Delta p^{(k)}}{1 + b_i \cdot \Delta p^{(k)}} \quad (4.66)$$

V rovnici (4.60) lze za pomoci tohoto schématu vyjádřit parciální derivace  $\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \Delta p}$ .

$$\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \Delta p} = \frac{\partial (R_0 + \Delta R^{(k)})}{\partial \Delta p} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i \cdot (Q_i - R_{i0})}{(1 + b_i \cdot \Delta p^{(k)})^2} \quad (4.67)$$

### 4.3.3. Odvození konzistentního tečného modulu

Odvození vychází z Hookova zákona, pravidla normality a definice normály na plochu plasticity.

$$\{\Delta\sigma\} = [D^e] \cdot (\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon_p\}) = [D^e] \cdot \{\Delta\varepsilon\} - 2 \cdot G \cdot [M_2] \cdot \{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.68)$$

$$\{\Delta\varepsilon_p\} = \Delta p \cdot [M_1] \cdot \{n\} \quad (4.69)$$

$$\{n\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\{s\} - \{\alpha\}}{\sigma_Y + R} \quad (4.70)$$

$$\{n\}^T \cdot [M_1] \cdot \{n\} = \frac{3}{2} \quad (4.71)$$

Dále je uvažováno, že diferenciál přírůstku backstressu  $d\{\Delta\alpha\}$  lze obecně vyjádřit pomocí operátoru  $[H_i]$ :

$$d\{\Delta\alpha\} = \sum_{i=1}^M [H_i] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.72)$$

Rovnice (4.68) až (4.72) lze diferencovat a tím lze získat následující rovnice:

$$d\{\Delta\sigma\} = [D^e] \cdot (d\{\Delta\varepsilon\} - d\{\Delta\varepsilon_p\}) = [D^e] \cdot d\{\Delta\varepsilon\} - 2 \cdot G \cdot [M_2] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.73)$$

$$d\{\Delta\varepsilon_p\} = [M_1] \cdot (d\Delta p \cdot \{n\} + \Delta p \cdot d\{n\}) \quad (4.74)$$

$$d\{n\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\{\Delta s\} - d\{\Delta\alpha\}}{\sigma_Y + R} - \frac{\{n\}}{\sigma_Y + R} \cdot \frac{dR}{dp} \cdot d\Delta p \quad (4.75)$$

$$\{n\}^T \cdot [M_1] \cdot d\{n\} = 0 \quad (4.76)$$

Z rovnice (4.73) je použitím operátoru  $[I_d]$  vyjádřen diferenciál přírůstku deviátoru napětí.

$$d\{\Delta s\} = 2 \cdot G \cdot ([I_d] \cdot [M_2] \cdot d\{\Delta\varepsilon\} - [M_2] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\}) \quad (4.77)$$

Rovnice (4.74) je zleva násobena  $\{n\}^T$  a po dosazení rovnic (4.71) a (4.76) vznikne rovnice

$$d\Delta p = \frac{2}{3} \cdot \{n\}^T \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.78)$$

Dosazením rovnic (4.75) a (4.78) do (4.74) lze odvodit rovnici

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot (\sigma_Y + R)}{3 \cdot \Delta p} \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} &= \\ &= \frac{4}{9} \cdot [M_1] \cdot (\{n\} \cdot \{n\}^T) \cdot \left( \frac{\sigma_Y + R}{\Delta p} - \frac{dR}{dp} \right) \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} + [M_1] \cdot (d\{\Delta s\} - d\{\Delta\alpha\}) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Dosazením (4.72) a (4.77) do (4.79) vzniká rovnice mezi diferenciálem přírůstku plastické a celkové deformace.

$$[L] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} = 2 \cdot G \cdot [I_d] \cdot d\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.80)$$

$$[L] = \left( \frac{2 \cdot (\sigma_Y + R)}{3 \cdot \Delta p} + 2 \cdot G \right) \cdot [I] + [M_1] \cdot \sum_{i=1}^M [H_i] - \frac{4}{9} \cdot \left( \frac{\sigma_Y + R}{\Delta p} - \frac{dR}{dp} \right) \cdot [M_1] \cdot (\{n\} \cdot \{n\}^T) \quad (4.81)$$

kde  $[I]$  je jednotková matice. Nakonec dosazením rovnice (4.80) do (4.73) vzniká rovnice konzistentního tečného modulu  $[D]$ :

$$[D] = \frac{d\{\Delta\sigma\}}{d\{\Delta\varepsilon\}} = [D^e] - 4 \cdot G^2 \cdot [M_2] \cdot [L]^{-1} \cdot [I_d] \quad (4.82)$$

### Odvození operátoru $[H_i]$ pro Chabocheho model kinematického zpevnění

Implicitní rovnice kinematického zpevnění (4.62) je diferencována:

$$d\{\Delta\alpha_i\} \cdot (1 + \gamma_i \cdot \Delta p) + \{\Delta\alpha_i\} \cdot \gamma_i \cdot d\Delta p = \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot [M_2] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} - \gamma_i \cdot \{\alpha_{i0}\} \cdot d\Delta p \quad (4.83)$$

$$d\{\Delta\alpha_i\} = \frac{\frac{2}{3} \cdot C_i \cdot [M_2] \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} - \gamma_i \cdot (\{\alpha_{i0}\} + \{\Delta\alpha_i\}) \cdot d\Delta p}{1 + \gamma_i \cdot \Delta p} \quad (4.84)$$

Do (4.84) je použita rovnice (4.78) a vzniká rovnice mezi diferenciálem přírůstku backstresu a plastické deformace:

$$d\{\Delta\alpha_i\} = \frac{\frac{2}{3} \cdot C_i \cdot [M_2] - \frac{2}{3} \cdot \gamma_i \cdot \{\alpha_i\} \cdot \{n\}^T}{1 + \gamma_i \cdot \Delta p} \cdot d\{\Delta\varepsilon_p\} \quad (4.85)$$

Porovnáním rovnic (4.85) a (4.72) je nakonec získán operátor  $[H_i]$ .

$$[H_i] = \frac{\frac{2}{3} \cdot (C_i \cdot [M_2] - \gamma_i \cdot \{\alpha_i\} \cdot \{n\}^T)}{1 + \gamma_i \cdot \Delta p} \quad (4.86)$$

### Odvození derivace izotropního zpevnění

V rovnici (4.81) je nutné vyjádřit člen  $\frac{dR}{dp}$ . Ten lze vyjádřit diferencováním implicitní rovnice (4.65). Přitom je nutné použít fakt, že  $\Delta x = x - x_0$ , a proto  $d\Delta x = dx$ .

$$dR_i = b_i \cdot (-dR_i) \cdot \Delta p + b_i \cdot (Q_i - R_{i0} - \Delta R_i) \cdot dp \quad (4.87)$$

$$\frac{dR}{dp} = \sum \frac{dR_i}{dp} = \sum \frac{b_i \cdot (Q_i - R_{i0} - \Delta R_i)}{1 + b_i \cdot \Delta p} \quad (4.88)$$

#### 4.3.4. Tvorba uživatelské procedury

V uživatelské proceduře softwaru Abaqus je pro časový inkrement nutné vypočítat přírůstek tenzoru napětí pro obecný přírůstek tenzoru deformací, definovat tečnou materiálovou matici tuhosti a aktualizovat všechny stavové veličiny materiálového modelu.

Princip funkce procedury lze popsat v následujících krocích, které jsou také ukázány ve vývojovém diagramu na Obr. 24.

##### 1) Výpočet elastického prediktoru napětí a mezní funkce

Elastická matice tuhosti  $[D^e]$  a elastický prediktor  $\{\sigma_{n+1}^{tr}\}$  se vyjádří z rovnic (4.46) a (4.47). Deviátor prediktoru napětí  $\{s_{n+1}^{tr}\}$ , ekvivalentní napětí  $f(\{\sigma_{n+1}^{tr}\} - \{\alpha_n\})$  a mezní funkce  $f(\{\sigma_{n+1}^{tr}\}, R_n, \{\alpha_n\})$  se vypočte z rovnic (4.43), (4.54) a (4.59).

##### 2) Kontrola podmínky plasticity, zatěžování a případná Newtonova iterace

Pokud platí  $f(\{\sigma_{n+1}^{tr}\}, R_n, \{\alpha_n\}) \leq 0$ , nachází se elastický prediktor uvnitř plochy plasticity. Všechny veličiny kromě napětí zůstávají nezměněny a ukončí se výpočet inkrementu.

$$\Delta p_{n+1} = 0 \quad (4.89)$$

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^{tr}\} \quad (4.90)$$

Pokud platí  $f(\{\sigma_{n+1}^{tr}\}, R_n, \{\alpha_n\}) > 0$ , je vypočtena normála  $\{n_{n+1}\}$  podle (4.53) a zkontrolována podmínka zatěžování.

$$\{n_{n+1}\} \cdot (\{\sigma_{n+1}^{tr}\} - \{\sigma_n\}) > 0 \quad (4.91)$$

Pokud platí podmínka plasticity i podmínka zatěžování, je Newtonovou metodou zjištěn  $\Delta p$ . Iterace se provádí aktualizací všech proměnných v následujícím pořadí.

$$1. \Delta R_{i_{n+1}}^{(k)} \quad (4.66)$$

$$2. \frac{\partial R_{i_{n+1}}^{(k)}}{\partial \Delta p} \quad (4.67)$$

$$3. \frac{\partial \{\Delta \alpha_{i_{n+1}}^{(k)}\}}{\partial \Delta p} \quad (4.64)$$

$$4. \frac{\partial f(\{s^{tr}\} - \{\alpha_{i_{n+1}}^{(k)}\})}{\partial \Delta p} \quad (4.63)$$

$$5. \Delta p_{n+1}^{(k+1)} \quad (4.60)$$

$$6. \{\Delta \alpha_{i_{n+1}}^{(k+1)}\} \quad (4.62)$$

$$7. f(\{s^{tr}\} - \{\alpha_n\} - \{\Delta \alpha_{i_{n+1}}^{(k+1)}\}) \quad (4.54)$$

$$8. \{n_{n+1}^{(k+1)}\} \quad (4.53)$$

Konvergence je kontrolována kritériem TOLER relativní změny  $\Delta p$

$$\frac{\Delta p_{n+1}^{(k+1)} - \Delta p_{n+1}^{(k)}}{\Delta p_{n+1}^{(k+1)}} < \text{TOLER} \quad (4.92)$$

která byla jako v [14] stanovena na hodnotě  $10^{-4}$ . Kritérium lze uživatelsky měnit změnou hodnoty TOLER v definicích konstant ve zdrojovém kódu procedury. Pokud je toto kritérium relativní změny  $\Delta p$  splněno, je pokračováno krokem 4).

### 3) Aktualizování stavových veličin materiálového modelu

Dle následujících vztahů jsou vypočteny přírůstky vektorů plastické deformace a napětí

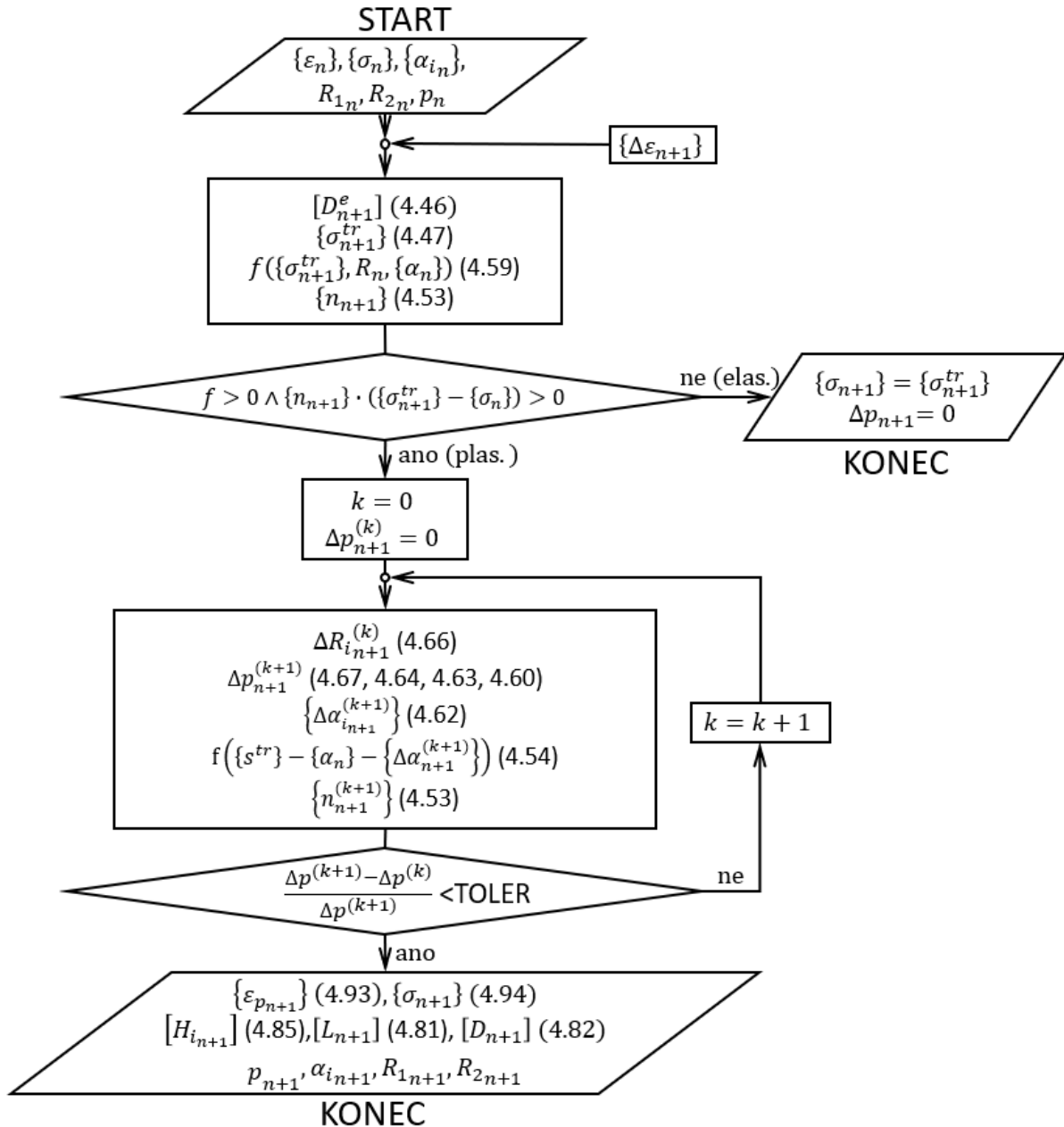
$$\{\Delta \varepsilon_{p_{n+1}}\} = \Delta p_{n+1} \cdot [M_1] \cdot \{n_{n+1}\} \quad (4.93)$$

$$\{\Delta \sigma_{n+1}\} = [D^e] \cdot (\{\Delta \varepsilon_{n+1}\} - \{\Delta \varepsilon_{p_{n+1}}\}) \quad (4.94)$$

přírůstky  $\{\Delta \alpha_{i_{n+1}}\}$ ,  $\Delta R_{i_{n+1}}$ ,  $\Delta p_{n+1}$  jsou převzaty z poslední iterace v bodě 3). Ke všem stavovým veličinám je přičten jejich přírůstek.

### 4) Výpočet konzistentního tečného modulu

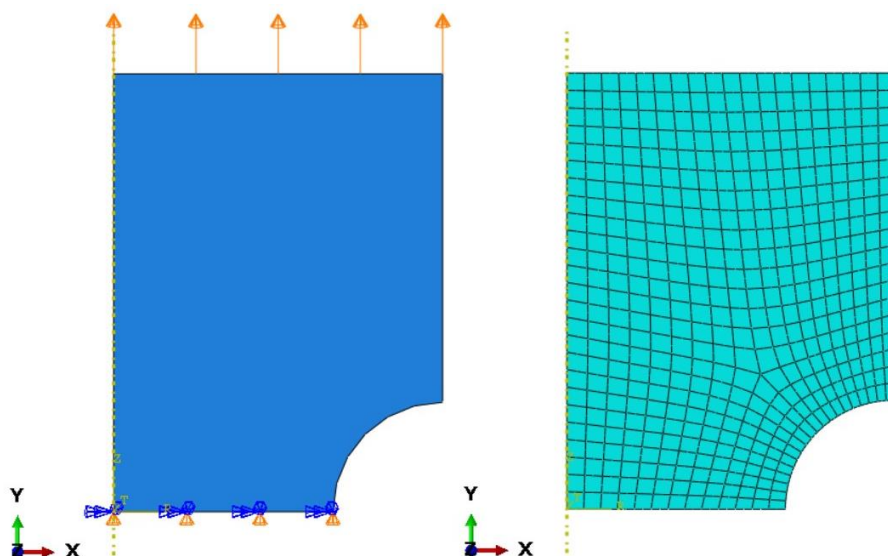
Maticy  $[H_{i_{n+1}}]$  jsou vypočteny z rovnice (4.85), matice  $[L_{n+1}]$  z rovnice (4.81). Matici  $[L_{n+1}]$  je nutné invertovat, k tomu byl převzat program pro inverzi z [15]. Nakonec je podle (4.82) vypočtena matice konzistentního tečného modulu  $[D_{n+1}]$ .



Obr. 24 Vývojový diagram uživatelské procedury

#### 4.4. Verifikace konzistentního tečného modulu

Správná funkce konzistentního tečného modulu je kontrolována rychlostí konvergence Newton-Raphsonovy metody a počtem iterací oproti výpočtu s elastickou tuhostí. Ve validačním postupu, který je převzat z [16], je použit axisymetrický model výšky 5 mm, průměru 7,5 mm a s vrubem o poloměru 1,25 mm. Použito je 455 kvadratických čtyřúhelníkových elementů (typu CAX8). Na spodní ploše je předepsána symetrická okrajová podmínka a na horní ploše je vynucen posuv 0,02 mm ve směru osy rotace (viz Obr. 25).



Obr. 25 Zatěžování axisymetrického modelu (vlevo) a jeho síťování (vpravo)

Při rozdělení zatížení na 5 inkrementů je celkový počet iterací roven 9 pro výpočet s konzistentním tečným modulem, zatímco použití elastického modulu vyžaduje 22 iterací. Určení rychlosti konvergence je provedeno rozdělením zatížení na 3 inkrementy a vypisováním největších nevyrovnaných sil  $F$  v posledním inkrementu (viz Tab. 4).

Tab. 4: Největší nevyrovnané uzlové síly v průběhu iterace

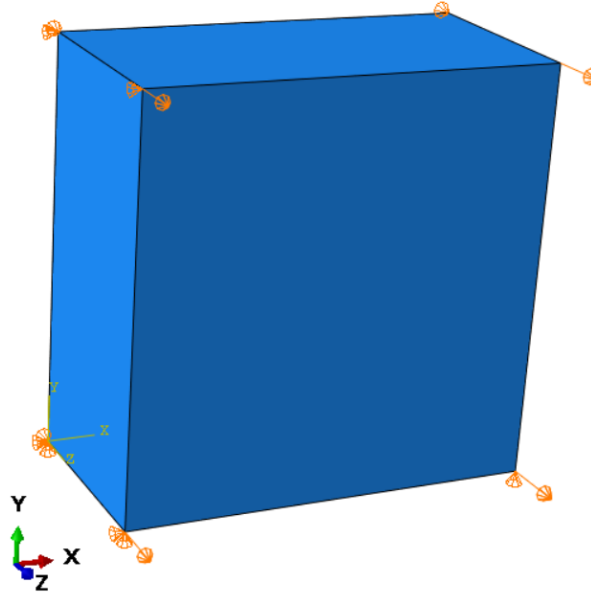
Číslo iterace	1	2	3	4
$F$ [N]	2,99	$4,98 \cdot 10^{-2}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$	$4,55 \cdot 10^{-8}$

Tento průběh nevyrovnaných sil odpovídá kvadratické konvergenci Newtonovy metody. Vzhledem k zmenšení počtu iterací a kvadratické konvergenci je možné považovat konzistentní tečný modul základního modelu za verifikovaný.

#### 4.5. Vizuální verifikace podle grafů charakteristik

Postupy a výsledky této práce umožňují provést verifikaci s experimentálními daty prostřednictvím dvou možných výstupů z optimalizovaných parametrů v Tab. 3. Na základě postupu v kapitole 4.2.3 je možné generovat charakteristiky na základě analytického řešení. S použitím simulačního modelu cyklické jednoosé zkoušky v Abaqusu, využívající uživatelskou proceduru dle postupů kapitoly 4.3.4, je možné generovat charakteristiky jako napěťovou odezvu na cyklickou vynucenou deformaci.

Použit je pouze jeden kvádrový lineární element (typu C3D8). Homogenní okrajové podmínky jsou předepsány na uzly tří vzájemně kolmých stěn tak, aby byl omezen posun pouze v normálové směru. V uzlech další strany je vynucen posun opět v normálovém směru. Tyto okrajové podmínky a zatěžování jsou ukázány na následujícím obrázku.

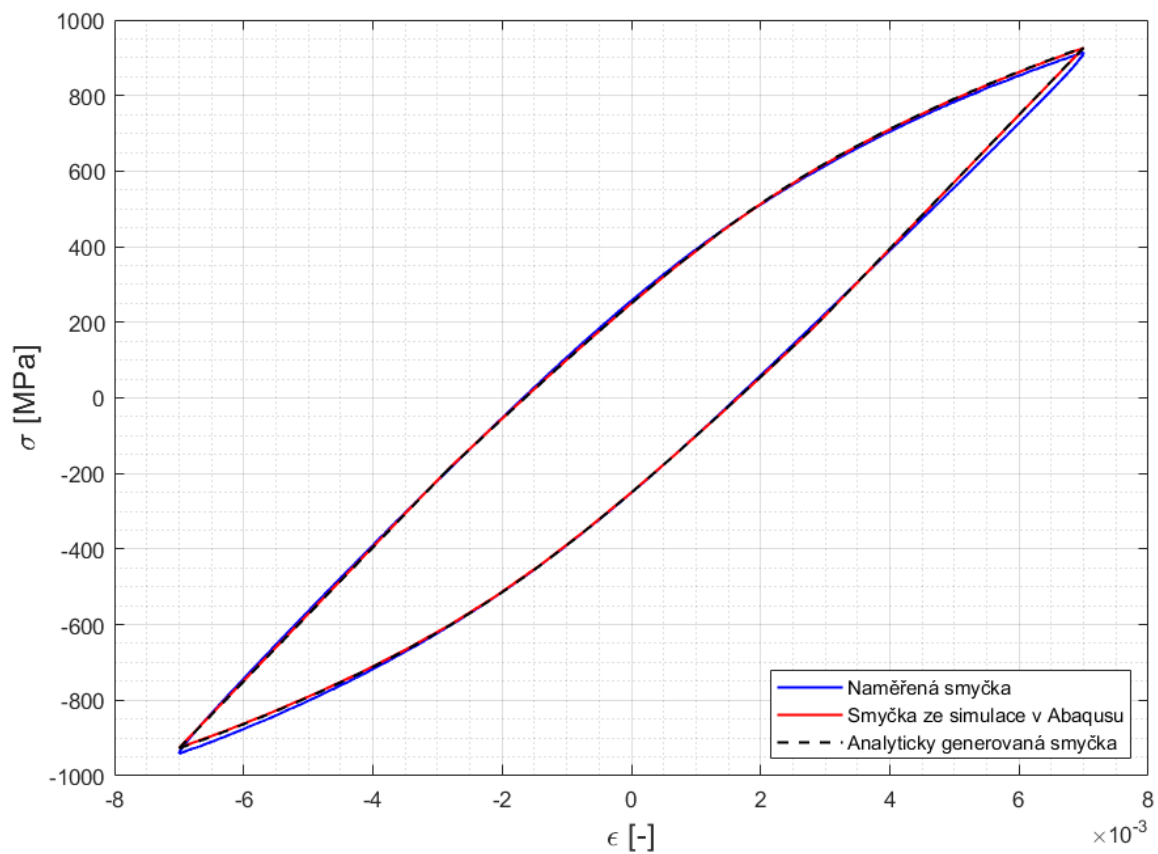


*Obr. 26 Okrajové podmínky a deformační zatížení elementu v Abaqusu*

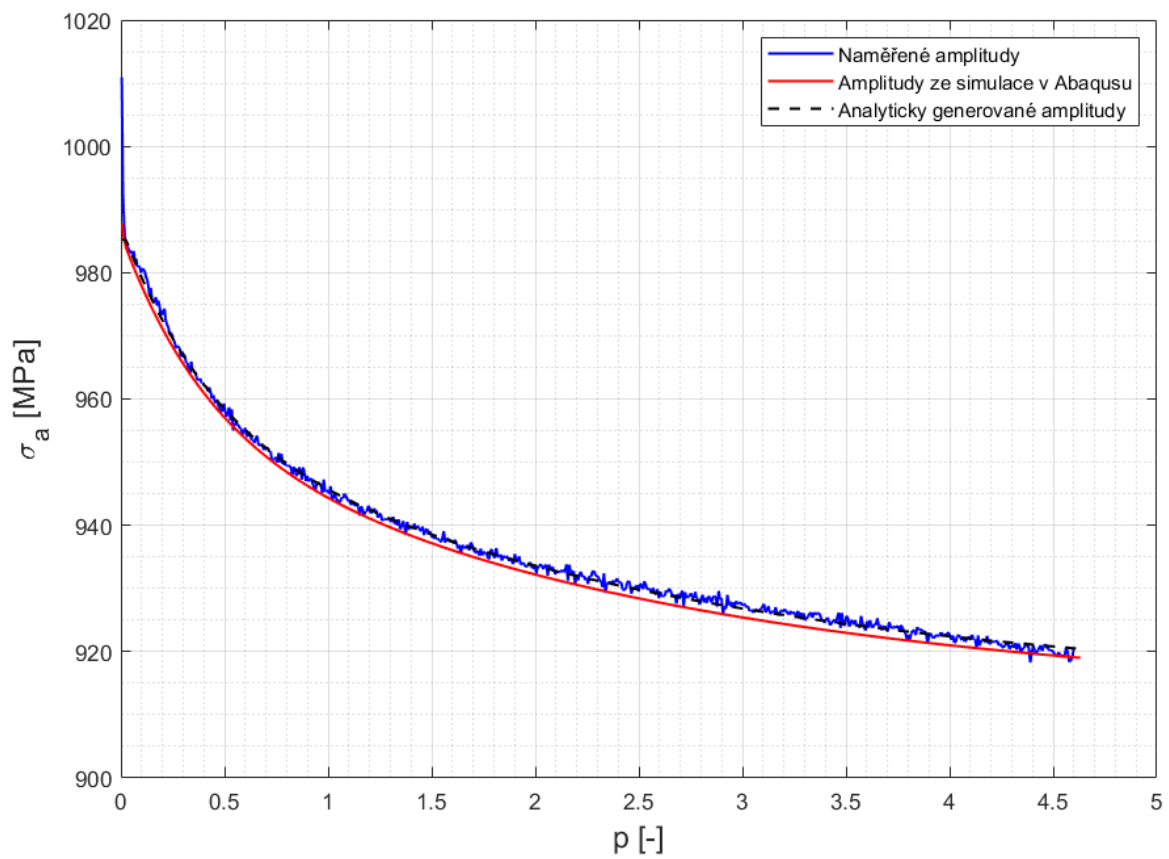
Tímto postupem je na elementu vyvozen stav jednoosé napjatosti s tím, že je umožněna volná kontrakce ve směru kolmém na vynucenou deformaci. Vlastní zatěžování je řízeno časovou funkcí pilového tvaru v rozsahu  $\pm 0,007$  mm. To vede na číselně stejnou hodnotu poměrného přetvoření díky rozměru elementu 1 mm ve směru vynuceného posuvu. Jeden cyklus zatížení  $+0,007$ ;  $-0,007$ ;  $+0,007$  vyvozující jednu smyčku, je dělen na 200 kroků. Při počtu 741 simulovaných smyček byla úloha řešena v celkovém počtu 148200 kroků.

Statická analýza v Abaqusu byla řešena jako nelineární úloha s full Newton-Raphsonovou iterační metodou. Výsledky byly zpracovány v postprocesoru a exportovány jako vektory průběhu osového napětí (S33), osové deformace (E33) a akumulované plastické deformace (SDV27).

Naměřené, simulované v Abaqusu a analyticky řešené charakteristiky jsou porovnány v následujících 2 grafech.



Obr. 27 Porovnání smyčky na středu životnosti



Obr. 28 Porovnání amplitud napětí



Shoda grafů je velmi dobrá. Přítomné rozdíly zřejmě vyplývají z faktu, že procedura UMAT používá diskretizační postupy ve velkém počtu kroků, kdežto analytické řešení bylo získáno přímou integrací. Za samostatnou úvahu stojí skoková změna průběhu amplitud napětí po první zátěžné smyčce. Zčásti může tento jev způsobovat „usednutí“ vzorku v upnutí, ale přirozenějším vysvětlením se jeví rozdílné chování materiálu při prvním zatížení oproti všem následných. Z hlediska cyklické plasticity je to pouze jakýsi přechodový děj a není ani záměrem, aby ho navrhovaný materiálový model uměl simulovat.

Na základě těchto pozorování je možné považovat validaci za úspěšnou. I implementace materiálového modelu je tedy funkční a je možno přistoupit k tvorbě postupu pro rozšířený model.

## 5. Rozšířený materiálový model

Základní model sestavený v předchozí kapitole byl použit převážně k validaci základních postupů a nástrojů materiálového modelu. Ze své podstaty je tento materiálový model schopen korektně simulovat odezvu na různě velké amplitudy deformace pouze v případě Masingova chování materiálu. Protože toto chování není u experimentálních dat sledováno, je v následující části této práce provedeno rozšíření spočívající v zahrnutí paměťové plochy. Konkrétně je zavedena závislost parametru  $Q$  izotropního zpevnění na dosažené velikosti plastické deformace.

Pro validaci jsou k dispozici již zmíněné záznamy pro amplitudy deformací 0,005; 0,006; 0,007 a 0,008. Vektory a veličiny používané v dalším zápisu jsou ve vztahu k těmto amplitudám označeny horními indexy 5,6,7 a 8.

### 5.1. Volba materiálového modelu

Na základě předchozích úvah byl pro tuto sadu dat zvolen kombinovaný Chabocheho model zpevnění se 3 kinematickými zpevněními ( $\gamma_3 = 0$ ) a se 2 izotropními zpevněními. Tvar izotropního zpevnění je převzat z [17], kde je člen  $dR_1$  stejný jako v (4.1), ale parametr  $Q$  je závislý na poloměru paměťové plochy  $q$ . Je popsán následujícími rovnicemi:

$$\begin{aligned}Q(q) &= A_Q + B_Q \cdot (1 - e^{-C_Q \cdot q}) \\dR_1 &= b \cdot (Q(q) - R_1) \cdot dp \\dR_2 &= H \cdot (1 + b \cdot p) \cdot dp \\dR &= dR_1 + dR_2 \quad ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

kde  $A_Q, B_Q, C_Q, b, H$  jsou parametry modelu a  $q$  je poloměr paměťové plochy.

Takto definované izotropní zpevnění má analytické řešení pouze, pokud se netransformuje paměťová plocha, tedy pro konstantní  $q$ . Pro počáteční podmínky označené dolním indexem 0 lze vyjádřit funkce izotropního zpevnění v uzavřeném tvaru:

$$\begin{aligned}Q(q) &= A_Q + B_Q \cdot (1 - e^{-C_Q \cdot q}) \\R_1 &= Q(q) - (Q(q) - R_{10}) \cdot e^{-b \cdot (p - p_0)} \\R_2 &= R_{20} + H \cdot \left( p - p_0 + \frac{b}{2} \cdot (p^2 - p_0^2) \right)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Z důvodů nedostupnosti experimentálních podkladů ke kalibraci parametru paměťové plochy  $\eta$  byla zvolena hodnota pro okamžitou stabilizaci  $\eta = 0,5$ .

### 5.2. Kalibrace parametrů

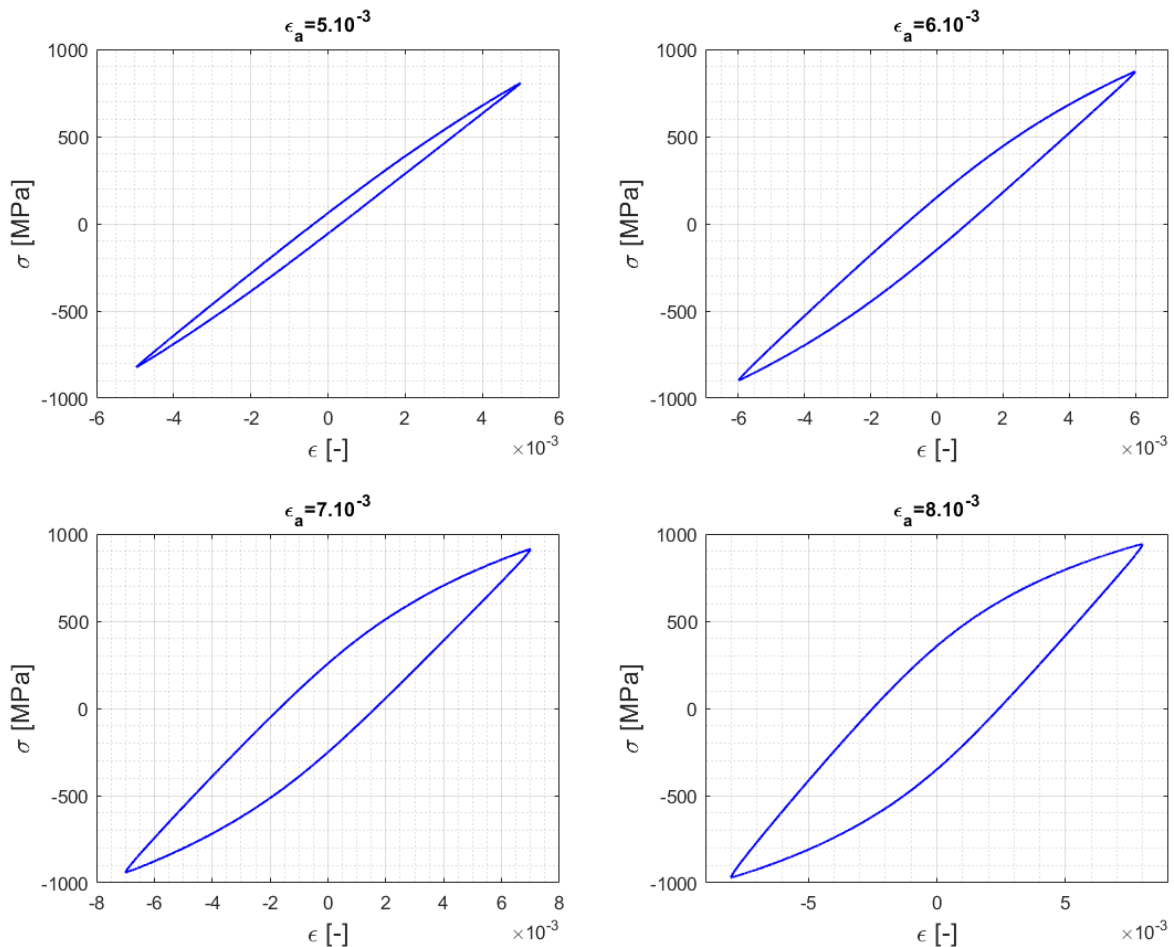
Postup kalibrace a všechny programy jsou převzaty z kapitoly 4.1, v dalších kapitolách jsou popsány pouze změny v jednotlivých krocích.

### 5.2.1. Konstrukce charakteristik z naměřených dat

Postup je stejný jako v kapitole 4.2.1, je pouze opakován pro všechny amplitudy deformací.

#### Hysterezní smyčky na středě životnosti

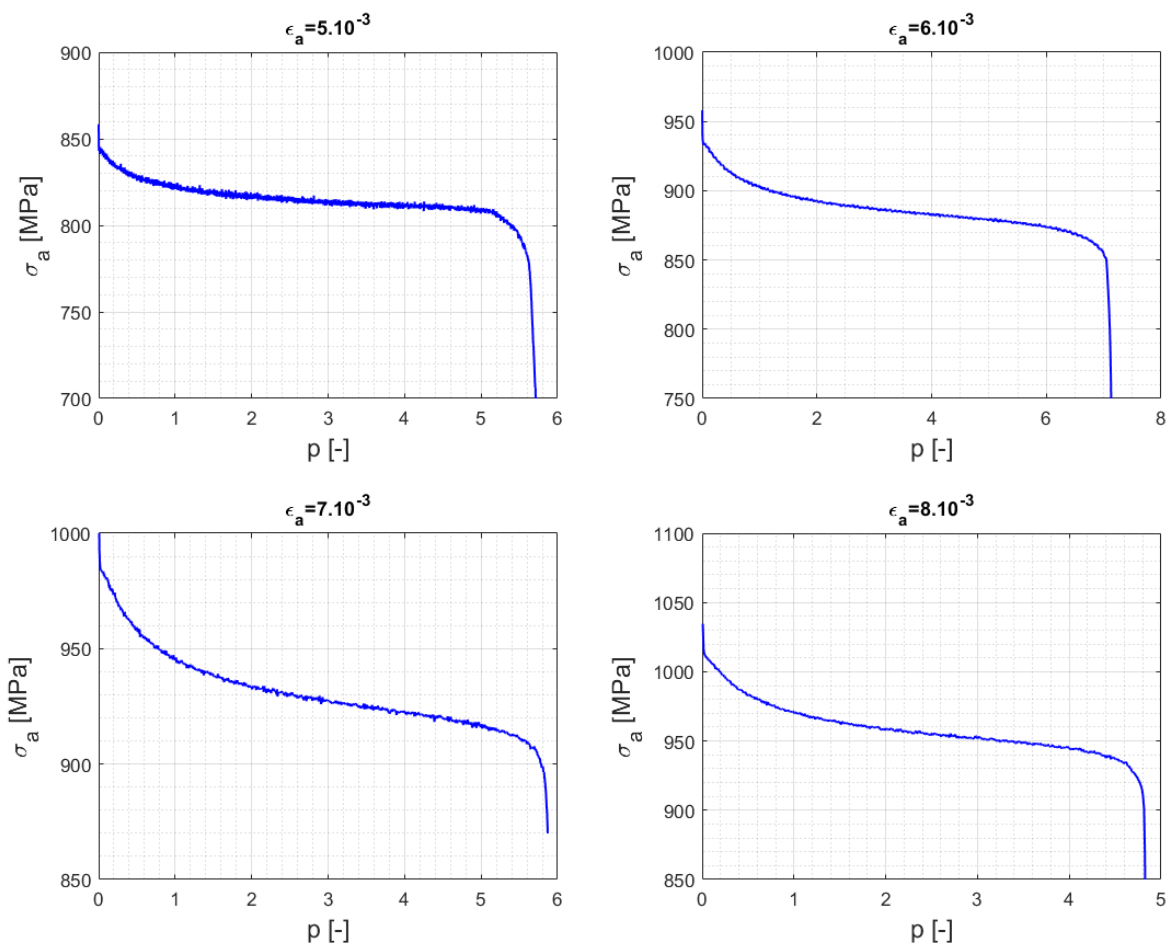
Střed životnosti jsou určeny  $N_{half}^{(5)} = 1962$ ,  $N_{half}^{(6)} = 913$ ,  $N_{half}^{(7)} = 423$ ,  $N_{half}^{(8)} = 234$  a z vektorů  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{(5)}\}$ ,  $\{\sigma_{N_{half}}^{(5)}\}$ ,  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{(6)}\}$ ,  $\{\sigma_{N_{half}}^{(6)}\}$ ,  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{(7)}\}$ ,  $\{\sigma_{N_{half}}^{(7)}\}$ ,  $\{\varepsilon_{N_{half}}^{(8)}\}$ ,  $\{\sigma_{N_{half}}^{(8)}\}$  jsou vytvořeny následující grafy.



Obr. 29 Hysterezní smyčky na středě životnosti

#### Závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

Z naměřených dat byly zkonstruovány vektory  $\{p^{(5)}\}$ ,  $\{\sigma_a^{(5)}\}$ ,  $\{p^{(6)}\}$ ,  $\{\sigma_a^{(6)}\}$ ,  $\{p^{(7)}\}$ ,  $\{\sigma_a^{(7)}\}$ ,  $\{p^{(8)}\}$  a  $\{\sigma_a^{(8)}\}$ , které jsou zobrazené v následujících grafech.



Obr. 30 Naměřené závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

Obdobně jako u kalibrace předchozího modelu není vhodné zahrnout do zpracování konce závislostí amplitud. Pro další kalibraci použita data, pro které platí  $p \leq p_{max}^{(i)}$ , kde pro  $p_{max}^{(i)}$  jsou zvoleny hodnoty  $p_{max}^{(5)} = 5,1$ ;  $p_{max}^{(6)} = 5,6$ ;  $p_{max}^{(7)} = 5,1$  a  $p_{max}^{(8)} = 4$ .

### 5.2.2. Stanovení Youngova modulu pružnosti a počáteční meze kluzu

Postup je stejný jako v 4.2.2, je pouze opakován pro všechny amplitudy deformací a výsledná hodnota je průměrem hodnot pro jednotlivé amplitudy deformací. Výsledným Youngovým modulem pružnosti je

$$E = 1,772 \cdot 10^5 \text{ MPa} . \quad (5.3)$$

Pro účely tohoto modelu byla zvolena hodnota  $x = 0,00004$ . Na jejím základě vypočtená mez kluzu nabývá hodnoty

$$\sigma_Y = 450 \text{ MPa} . \quad (5.4)$$

### 5.2.3. Sestavení programu pro generaci charakteristik z obecných parametrů

V následujícím seznamu jsou uvedeny všechny proměnné, z kterých budou charakteristiky generovány.

- Amplituda deformací  $\epsilon_a$

- Youngův modul pružnosti  $E$
- Mez kluzu  $\sigma_Y$
- Parametr paměťové plochy  $\eta$
- Parametry modelu  $C, \gamma, A_Q, B_Q, C_Q, b, H$
- Celkový počet cyklů  $N_{end}$
- Střed životnosti  $N_{half}$

### Generování závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci

Pro konstrukci této závislosti není nutné znát celý průběh napětí, stačí pouze vypočítat hodnoty napětí pro hodnoty extrémů deformací  $-\varepsilon_a$  a  $\varepsilon_a$ .

Následující rovnice jsou souhrnem rovnice modelu (3.33) a volbou izotropního zpevnění (5.2) pro konstantní poloměr paměťové plochy, pokud se počáteční stav označí dolním indexem  $k-1$  a koncový stav  $k$ .

$$\sigma_k = \psi_k \cdot (\sigma_Y + R_{1k} + R_{2k}) + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i_k} \quad (5.5)$$

$$Q = A_Q + B_Q \cdot (1 - e^{-C_Q \cdot q_k}) \quad (5.6)$$

$$R_{1k} = Q - (Q - R_{1_{k-1}}) \cdot e^{-b \cdot (p_k - p_{k-1})} \quad (5.7)$$

$$R_{2k} = R_{2_{k-1}} + H \cdot \left( p_k - p_{k-1} + \frac{b}{2} \cdot (p_k^2 - p_{k-1}^2) \right) \quad (5.8)$$

$$\alpha_{i_k} = \frac{C_i \cdot \psi_k}{\gamma_i} + \left( \alpha_{i_{k-1}} - \frac{C_i \cdot \psi_k}{\gamma_i} \right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi_k \cdot \Delta \varepsilon_{p_k}} \quad (5.9)$$

Rozdíl plastické deformace  $\Delta \varepsilon_p(k)$  lze vyjádřit použitím aditivního zákona (3.6) společně s Hookovým zákonem (3.5).

$$\Delta \varepsilon_{p_k} = \varepsilon_k - \frac{\sigma_k}{E} - \left( \varepsilon_{k-1} - \frac{\sigma_{k-1}}{E} \right) \quad (5.10)$$

Spojením rovnic (5.5) až (5.10) a rovnice pro přírůstek akumulované plastické deformace

$$p_k = p_{k-1} + \left| \Delta \varepsilon_{p_k} \right| \quad (5.11)$$

vznikne implicitní rovnice pro napětí  $\sigma_k$ .

$$\sigma_k = f(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \psi_k, \alpha_{i_{k-1}}, p_{k-1}, R_{1_{k-1}}, R_{2_{k-1}}) \quad (5.12)$$

Pro  $k = 1, 2 \dots 2 \cdot N_{end}$  je zvolena deformace  $\varepsilon_k$  a parametr  $\psi_k$ .

$$\varepsilon_k = \begin{cases} -\varepsilon_a, & \text{pro } k = 2 \cdot N - 1 \\ \varepsilon_a, & \text{pro } k = 2 \cdot N \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\psi_k = \begin{cases} -1, & \text{pro } k = 2 \cdot N - 1 \\ 1, & \text{pro } k = 2 \cdot N \end{cases}, \quad (5.14)$$

kde  $N = 1, 2, \dots, N_{end}$  a značí číslo cyklu.

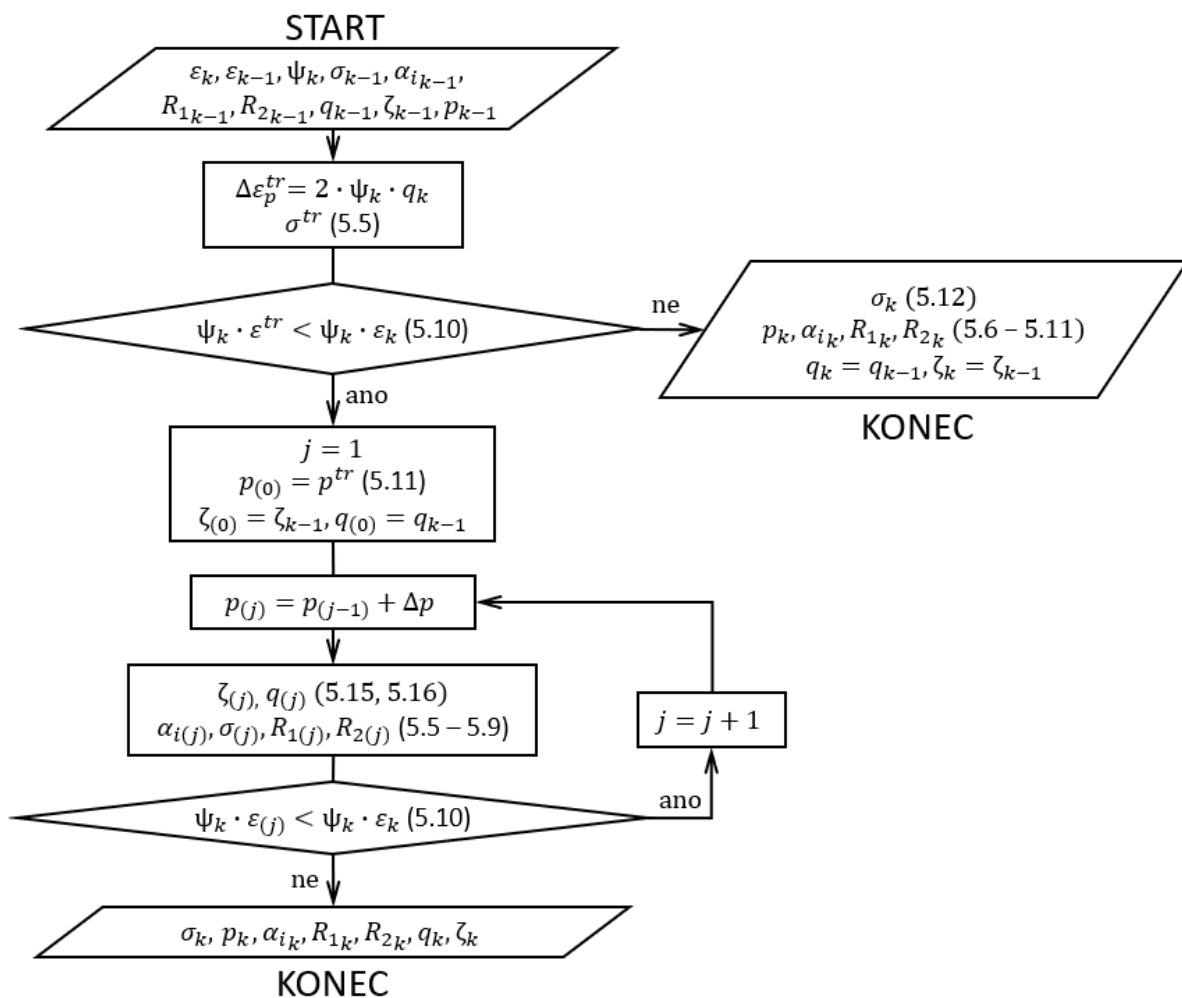
Charakteristiku již nelze generovat jednoduchým řešením implicitní rovnice, a proto byl vytvořen následující algoritmus, jehož vývojový diagram je Obr. 31.

- 1) Zvolením  $\Delta \varepsilon_p^{tr} = 2 \cdot \psi_k \cdot q_k$  je z rovnice (5.5) vypočten prediktor napětí na protější hraně paměťové plochy  $\sigma^{tr}$ .
- 2) Dosazením  $\sigma_k = \sigma^{tr}$  do rovnice (5.10) je vypočten prediktor deformace  $\varepsilon^{tr}$ , která je porovnána s koncovou deformací  $\varepsilon_k$ . Pokud je  $\psi_k \cdot \varepsilon^{tr} < \psi_k \cdot \varepsilon_k$ , je koncový bod uvnitř paměťové plochy je pokračováno krokem 3a). V opačném případě je pokračováno 3b).
- 3a) Napětí  $\sigma_k$  je implicitně vypočteno funkcí Matlabu „fsolve“ za použití rovnice (5.12). Z rovnic (5.6) až (5.11) jsou vypočteny  $p_k, R_{1k}, R_{2k}$  a  $\alpha_{ik}$ . Rozměr a poloha paměťové plochy je nezměněna.
- 3b) Koncový bod se nachází vně paměťové plochy, tedy není známé analytické řešení modelu. Z prediktoru je numericky iterováno do koncového bodu zvyšováním akumulované plastické deformace o zvolený krok  $\Delta p$ . Z rovnic (3.36) a (3.37) jsou vyjádřeny rovnice změny paměťové plochy pro jednoosé napětí.

$$\zeta_{(j)} = \zeta_{(j-1)} + \psi_k \cdot (1 - \eta) \cdot \Delta p \quad (5.15)$$

$$q_{(j)} = q_{(j-1)} + \eta \cdot \Delta p \quad (5.16)$$

Z rovnic (5.5) až (5.9) jsou počítány  $\sigma, R_1, R_2$  a  $\alpha_i$ .



Obr. 31 Algoritmus generace závislosti amplitud napětí na akumulované pl. deformaci

Výstupy jsou vektory akumulované plastické deformace  $\{p^{amp.}\}$  a vektory amplitud napětí  $\{\sigma_a^{amp.}\}$  vypočtených rovnicemi

$$p^{amp.}(N) = p_{2 \cdot N} \quad (5.17)$$

$$\sigma_a^{amp.}(N) = \frac{\sigma_{2 \cdot N} - \sigma_{2 \cdot N - 1}}{2} \quad (5.18)$$

### Generování smyčky na středu životnosti

V průběhu generace závislosti amplitud napětí na akumulované plastické deformaci se uloží hodnoty  $\varepsilon_k, \sigma_k, \alpha_{i_k}, p_k, R_{1k}, R_{2k}$  a  $q_k$  pro  $k = 2 \cdot N_{half} - 2, k = 2 \cdot N_{half} - 1$  a  $k = 2 \cdot N_{half}$ , které se označí indexem 0, 1 a 2.

Z hodnot s indexem 0 a 1 lze vytvořit tlakovou část smyčky na středu životnosti. Z napětí a deformací je vytvořen vektor rozdílů plastických deformací  $\{\Delta\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}\}$

$$\Delta\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) = (i - 2) \cdot \frac{\left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E} - \left(\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E}\right)\right)}{(n - 2)}, \quad (5.19)$$

kde  $i = 2, 3, \dots, n$  a  $n$  je zvolený počet bodů, kolik bude generovaná větev obsahovat.

Výstupy jsou vektor napětí  $\{\sigma_{0-1}^{cyk.}\}$ , získaný dosazením  $\{\Delta\varepsilon_{p0-1}^{cyk.}\}$  do rovnic (5.5) až (5.11) a vektor deformací  $\{\varepsilon_{0-1}^{cyk.}\}$  vypočtený rovnicí.

$$\varepsilon_{0-1}^{cyk.}(i) = \varepsilon_{p0-1}^{cyk.}(i) + \frac{\sigma_{0-1}^{cyk.}(i)}{E} \quad (5.20)$$

Změna poloměru paměťové plochy na konci větve má velmi malý vliv na celkový tvar větve, proto je změna poloměru zanedbána.

Pro zahrnutí elastické části větve jsou do první složky vektorů vloženy hodnoty

$$\varepsilon_{0-1}^{cyk.}(1) = \varepsilon_0 \quad (5.21)$$

$$\sigma_{0-1}^{cyk.}(1) = \sigma_0 .$$

Tahovou větev cyklu, tedy vektor napětí  $\{\sigma_{1-2}^{cyk.}\}$  a vektor deformací  $\{\varepsilon_{1-2}^{cyk.}\}$ , lze vyjádřit obdobně pouze se záměnou indexů  $0 \rightarrow 1$  a  $1 \rightarrow 2$ .

#### 5.2.4. Definice cílové funkce

Celková cílová funkce ( $CF$ ) je vytvořena spojením cílových funkcí ze smyčky na středu napětí ( $CF_1, CF_2, CF_3, CF_4$ ) a z cílových funkcí amplitud napětí na akumulované plastické deformaci ( $CF_5, CF_6, CF_7, CF_8$ ), které odpovídají amplitudám deformací (0,005; 0,006; 0,007; 0,008)

$$CF = \sum_{i=1}^8 k_i \cdot CF_i , \quad (5.22)$$

kde  $k_i$  jsou váhové koeficienty cílových funkcí.

Definice cílové funkce ze smyčky na středu napětí a cílové funkce amplitud napětí na akumulované plastické deformaci jsou stejné jako u předchozího modelu.

#### 5.2.5. Určení počátečních odhadů parametrů

Jako v 4.2.6 je zavedeno zjednodušení, že parametry kinematického zpevnění ovlivňují pouze tvar smyčky na středu životnosti a parametry izotropního zpevnění ovlivňují pouze závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci.

#### Odhad parametrů izotropního zpevnění

Pro jednotlivé amplitudy deformací je pro zjednodušení uvažován konstantní poloměr paměťové plochy, který je roven maximální amplitudě plastických deformací.

$$q = \frac{\max_N \left( \max_k \left( \varepsilon_N(k) - \frac{\sigma_N(k)}{E} \right) - \min_k \left( \varepsilon_N(k) - \frac{\sigma_N(k)}{E} \right) \right)}{2} \quad (5.23)$$

Při předpokladu, že amplituda prvního cyklu bude mít stejnou hodnotu pro naměřená a generovaná data, lze průběh amplitud popsat následující rovnicí.



$$\sigma_a^{amp.}(p) = \sigma_a^{amp.}(0) + R(p, q, A_q, B_q, C_q, b, H) \quad (5.24)$$

Tento průběh amplitud je pro všechny amplitudy deformací porovnáván s naměřeným průběhem pomocí rovnice MSE (4.29).

Minimalizací součtů MSE funkcí „fminsearch“ je získán počáteční odhad parametrů  $A_{q0}$ ,  $B_{q0}$ ,  $C_{q0}$ ,  $b_0$  a  $H_0$ . Tato optimalizace je poměrně časově nenáročná a není citlivá na počáteční parametry, proto jsou voleny metodou pokus-omyl.

Tab. 5: Počáteční odhad parametrů izotropního zpevnění

$A_{q0}$ [MPa]	$B_{q0}$ [MPa]	$C_{q0}$ [1]	$b_0$ [1]	$H_0$ [MPa]
12,4	-74,334	$2,032 \cdot 10^3$	1,564	0,829

### Odhad parametrů kinematického zpevnění

Počáteční odhad parametrů kinematického zpevnění je vypočten minimalizací součtu cílových funkcí ze smyčky na středu napětí ( $CF_1 + CF_2 + CF_3 + CF_4$ ) při konstantních parametrech izotropního zpevnění  $A_{q0}$ ,  $B_{q0}$ ,  $C_{q0}$ ,  $b_0$  a  $H_0$ .

Je použita funkce „fminsearch“ a ze stejných důvodů jako u odhadu parametrů izotropního zpevnění jsou počáteční parametry této optimalizace voleny metodou pokus-omyl.

Tab. 6: Počáteční odhad parametrů kinematického zpevnění

$C_{10}$ [MPa]	$\gamma_{10}$ [1]	$C_{20}$ [MPa]	$\gamma_{20}$ [1]	$C_{30}$ [MPa]
$6,794 \cdot 10^5$	$3,043 \cdot 10^3$	$1,384 \cdot 10^5$	489,675	$3,857 \cdot 10^4$

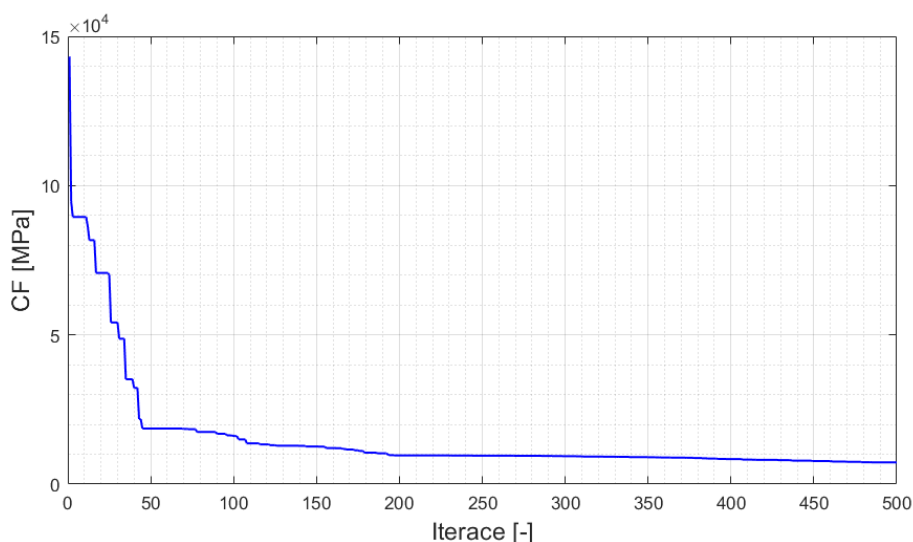
### 5.2.6. Optimalizace parametrů modelu

Při minimalizaci cílové funkce (5.22) funkcí „fminsearch“ vycházel jeden z parametrů  $C_i$  záporný, proto byla použita funkce „fminseachbnd“ [18] s nulovou dolní hranicí pro parametry  $C_i$ , s počátečními parametry uvedenými v Tab. 5 a Tab. 6 a s volbou váhových koeficientů uvedených v následující tabulce.

Tab. 7: Volba váhových koeficientů

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$
1	1	1	1	40	30	20	20

Cílová funkce měla v průběhu optimalizace následný průběh.



Obr. 32 Hodnoty cílové funkce v průběhu iterací

Optimální parametry společně s vypočtenou mezí kluzu a Youngovým modulem pružnosti jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 8: Optimalizované parametry

$C_1$ [MPa]	$\gamma_1$ [1]	$C_2$ [MPa]	$\gamma_2$ [1]	$C_3$ [MPa]	$\gamma_3$ [1]
$1,973 \cdot 10^6$	$6,466 \cdot 10^3$	$2,157 \cdot 10^5$	$1,278 \cdot 10^3$	$6,714 \cdot 10^4$	0

$A_q$ [MPa]	$B_q$ [MPa]	$C_q$ [1]	$b$ [1]	$H$ [MPa]	$E$ [MPa]	$\sigma_Y$ [MPa]
5,002	-258,837	292,9	3,407	-0,674	$1,772 \cdot 10^5$	450

### 5.3. Implementace do programu Abaqus

Metoda radiálního návratu a konzistentní tečný modul byly v 4.3.1 a 4.3.3 odvozeny pro obecné kinematické a izotropní zpevnění. Kinematické zpevnění je stejné jako v základním modelu, proto jsou použity stejné rovnice, jen je v nich nutné změnit členy obsahující izotropní zpevnění. Změna se týká výpočtu členů izotropního zpevnění v rovnicích (4.60) a (4.81). Dále je nutné doimplementovat vývoj paměťové plochy.

#### 5.3.1. Diskretizace rovnic izotropního zpevnění a výpočet parciální derivace

Z diferenciální rovnice izotropního zpevnění (5.1) je vytvořeno následující implicitní schéma dosazením  $R_{i0} + \Delta R_i$  za  $R_i$ .

$$Q = A_Q + B_Q \cdot \left(1 - e^{-C_Q \cdot q^{(k)}}\right) \quad (5.25)$$

$$\Delta R_1^{(k)} = \frac{b \cdot (Q - R_{i0}) \cdot \Delta p^{(k)}}{1 + b \cdot \Delta p^{(k)}} \quad (5.26)$$

$$\Delta R_2^{(k)} = H \cdot \left(1 + b \cdot (p_0 + \Delta p^{(k)})\right) \cdot \Delta p^{(k)} \quad (5.27)$$

V rovnici (4.60) lze za pomoci tohoto schématu vyjádřit parciální derivace  $\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \Delta p}$ .

$$\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \Delta p} = \frac{b \cdot (Q - R_{1_0})}{(1 + b \cdot \Delta p^{(k)})^2} + H \cdot (1 + b \cdot p_0 + 2 \cdot b \cdot \Delta p^{(k)}) \quad (5.28)$$

### 5.3.2. Odvození derivace v rovnici konzistentního tečného modulu

V rovnici (4.81) je nutné vyjádřit člen  $\frac{dR}{dp}$ . Ten lze vyjádřit diferencováním implicitních rovnic (5.26) a (5.27). Přitom je nutné použít fakt, že  $\Delta x = x - x_0$ , a proto  $d\Delta x = dx$ .

$$dR_1 = b_1 \cdot (-dR_1) \cdot \Delta p + b \cdot (Q - R_{1_0} - \Delta R_1) \cdot dp \quad (5.29)$$

$$dR_2 = H \cdot dp + H \cdot b \cdot p_0 \cdot dp + H \cdot b \cdot 2 \cdot \Delta p \cdot dp \quad (5.30)$$

$$\frac{dR}{dp} = \frac{b \cdot (Q - R_{1_0} - \Delta R_1)}{1 + b \cdot \Delta p} + H \cdot (1 + b \cdot p_0 + 2 \cdot b \cdot \Delta p) \quad (5.31)$$

### 5.3.3. Odvození přírůstků paměťové plochy

Pro implicitní diskretizaci přírůstků paměťové plochy je zvolen postup implementace podrobně popsany v [19], kde je použit upravený vývoj paměťové plochy popsany následujícími rovnicemi.

$$d\zeta = \frac{2}{3} \cdot (1 - \eta) \cdot H(g) \cdot \langle d\varepsilon_p : \frac{\varepsilon_p - \zeta}{q} \rangle \cdot \frac{\varepsilon_p - \zeta}{q} \quad (5.32)$$

$$dq = \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot H(g) \cdot \langle d\varepsilon_p : \frac{\varepsilon_p - \zeta}{q} \rangle \quad (5.33)$$

Odvození začíná zavedením následující substituce:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \langle d\varepsilon_p : \frac{\varepsilon_p - \zeta}{q} \rangle \quad (5.34)$$

Pro další odvozování je použit Voigtův zápis a je uvažován pouze stav, kdy dochází k transformaci paměťové plochy, tj.  $g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}, \{\zeta_n\}, q_n) \geq 0$ .

$$g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}, \{\zeta_n\}, q_n) = g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\}) - q_n \geq 0 \quad (5.35)$$

V inkrementu n+1 tedy bod leží na paměťové ploše, což je zapsáno rovnicí

$$\sqrt{\frac{2}{3} \cdot ([M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_{n+1}\})^T \cdot ([M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_{n+1}\}) - q_{n+1}} = 0 \quad (5.36)$$

Rovnice (5.32) a (5.33) jsou implicitně diskretizovány a tím vznikají rovnice

$$\{\Delta \zeta_{n+1}\} = (1 - \eta) \cdot A_{n+1} \cdot \frac{[M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_{n+1}\}}{q_{n+1}} \quad (5.37)$$

$$\Delta q_{n+1} = \eta \cdot A_{n+1} \quad (5.38)$$

Při porovnání definice přírůstku  $\{\Delta\zeta_{n+1}\} = \{\zeta_{n+1}\} - \{\zeta_n\}$  s rovnicí (5.37) lze vypožorovat, že  $\{\zeta_{n+1}\}$ ,  $\{\zeta_n\}$  a  $\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}$  jsou kolineární. Rovnici (5.37) tedy lze přepsat jako

$$\{\Delta\zeta_{n+1}\} = (1 - \eta) \cdot A_{n+1} \cdot \frac{[M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\}}{g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\})} \quad (5.39)$$

Dosazením rovnice (5.39) do rovnice

$$[M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_{n+1}\} = [M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - (\{\zeta_n\} + \{\Delta\zeta_{n+1}\}) \quad (5.40)$$

vzniká následující rovnice:

$$[M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_{n+1}\} = \left(1 - \frac{(1 - \eta) \cdot A_{n+1}}{g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\})}\right) \cdot ([M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\}) \quad (5.41)$$

Ta je dosazena do (5.36) společně s (5.38) a s rovnicí  $q_{n+1} = q_n + \Delta q_{n+1}$  a tím je získána rovnice pro  $A_{n+1}$ :

$$A_{n+1} = g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\}) - q_n = g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}, \{\zeta_n\}, q_n) \quad (5.42)$$

Dosazením (5.42) do (5.39) a (5.38) jsou získány konečné rovnice přírůstků, které jsou závislé pouze na minulém inkrementu a známém  $\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}$ .

$$\{\Delta\zeta_{n+1}\} = (1 - \eta) \cdot g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}, \{\zeta_n\}, q_n) \cdot \frac{[M_2] \cdot \{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\}}{g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\} - \{\zeta_n\})} \quad (5.43)$$

$$\Delta q_{n+1} = \eta \cdot g(\{\varepsilon_{p_{n+1}}\}, \{\zeta_n\}, q_n) \quad (5.44)$$

### 5.3.4. Tvorba uživatelské procedury

V uživatelské proceduře jsou změněny již zmíněné izotropní zpevnění a její parciální derivace v metodě radiálního návratu (viz kapitola 5.3.1). Ve výpočtu konzistentního tečného modulu je také změněn člen izotropního zpevnění (viz kapitola 5.3.2). Nakonec je nutné vypočítat přírůstky a aktualizovat polohu a poloměr paměťové plochy.

To je provedeno nejprve výpočtem mezní funkce  $g$  z rovnice (5.35). Pokud platí  $g(\{\varepsilon_p\}, q, \{\zeta\}) \leq 0$ , nachází se plastická deformace uvnitř paměťové plochy. Poloha i poloměr paměťové plochy zůstávají nezměněny.

Pokud platí  $g(\{\varepsilon_p\}, q, \{\zeta\}) > 0$ , jsou vypočteny změny paměťové plochy podle rovnic (5.43) a (5.44).

## 5.4. Verifikace konzistentního tečného modulu

Na stejné úloze jako v kapitole 4.4 je verifikován i rozšířený model. Při výpočtu s konzistentním tečným modulem je celkový počet iterací roven 8, zatímco použití elastického

modulu vyžaduje 19 iterací. Pro výpočet se 3 inkreментy je průběh největších nevyrovnaných sil  $F$  v posledním inkreментu vypsán v následující tabulce.

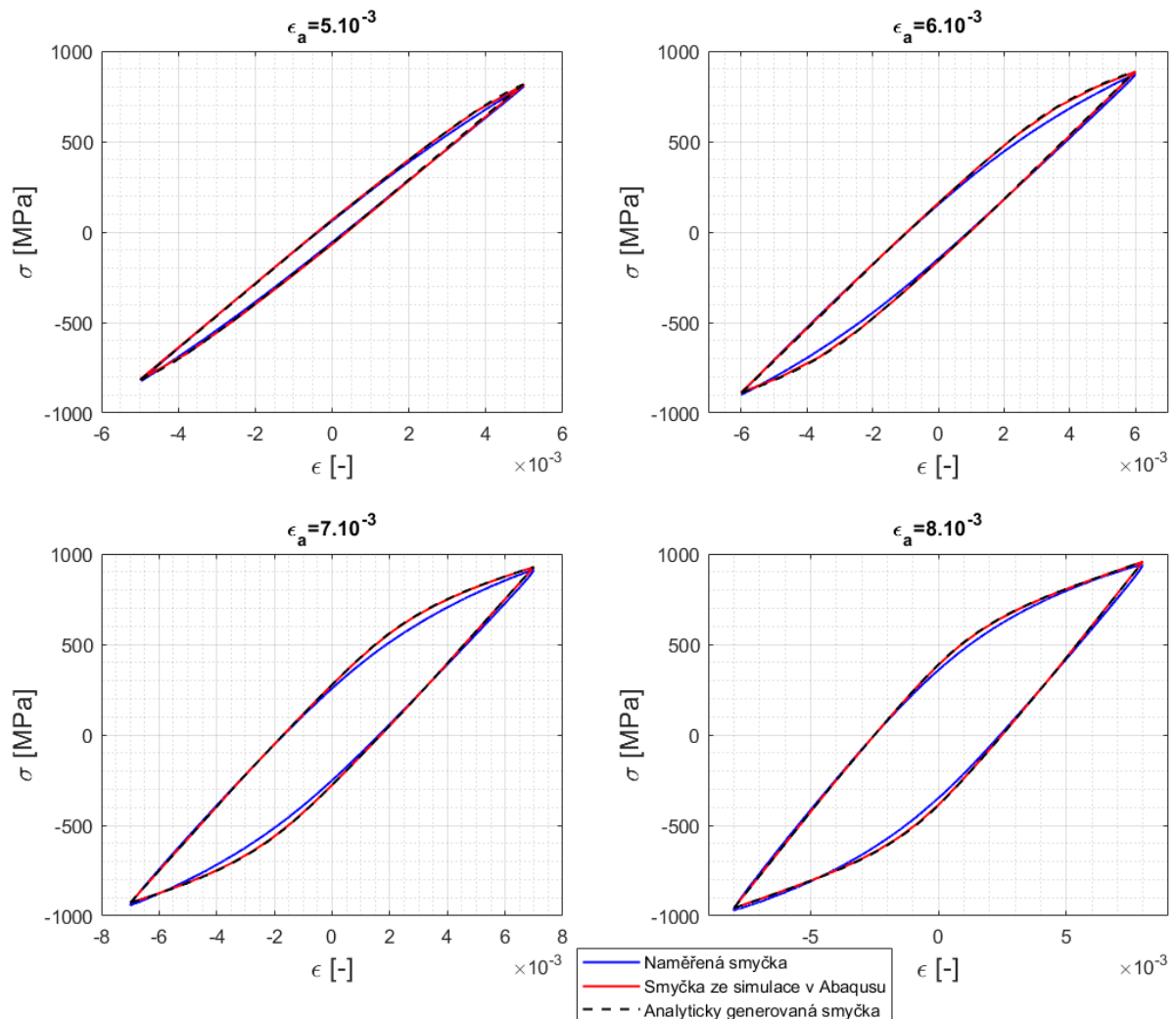
Tab. 9: Největší nevyrovnané uzlové síly v průběhu iterace

Iterace	1	2	3	4	5	6	7	8
$F$ [N]	2,21	0,43	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$5,9 \cdot 10^{-6}$

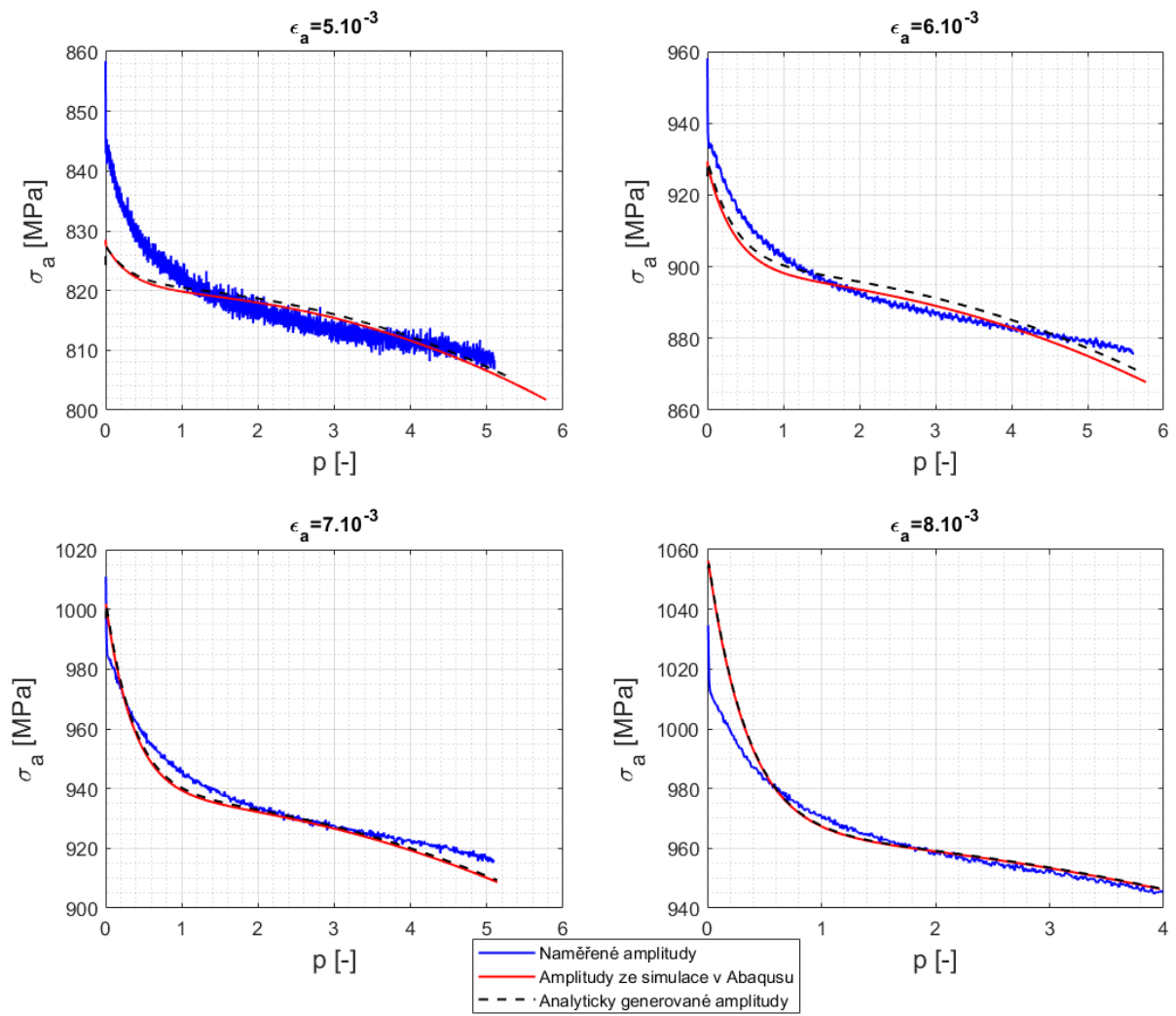
Tento průběh nevyrovnaných sil odpovídá lineární konvergenci Newtonovy metody, což je nejspíše způsobeno velkou změnou poloměru paměťové plochy při zatěžování z nulových počátečních podmínek. Vzhledem k zmenšení počtu iterací a lineární konvergenci je možné považovat konzistentní tečný modul upraveného modelu za verifikovaný.

### 5.5. Vizuální verifikace podle grafů charakteristik

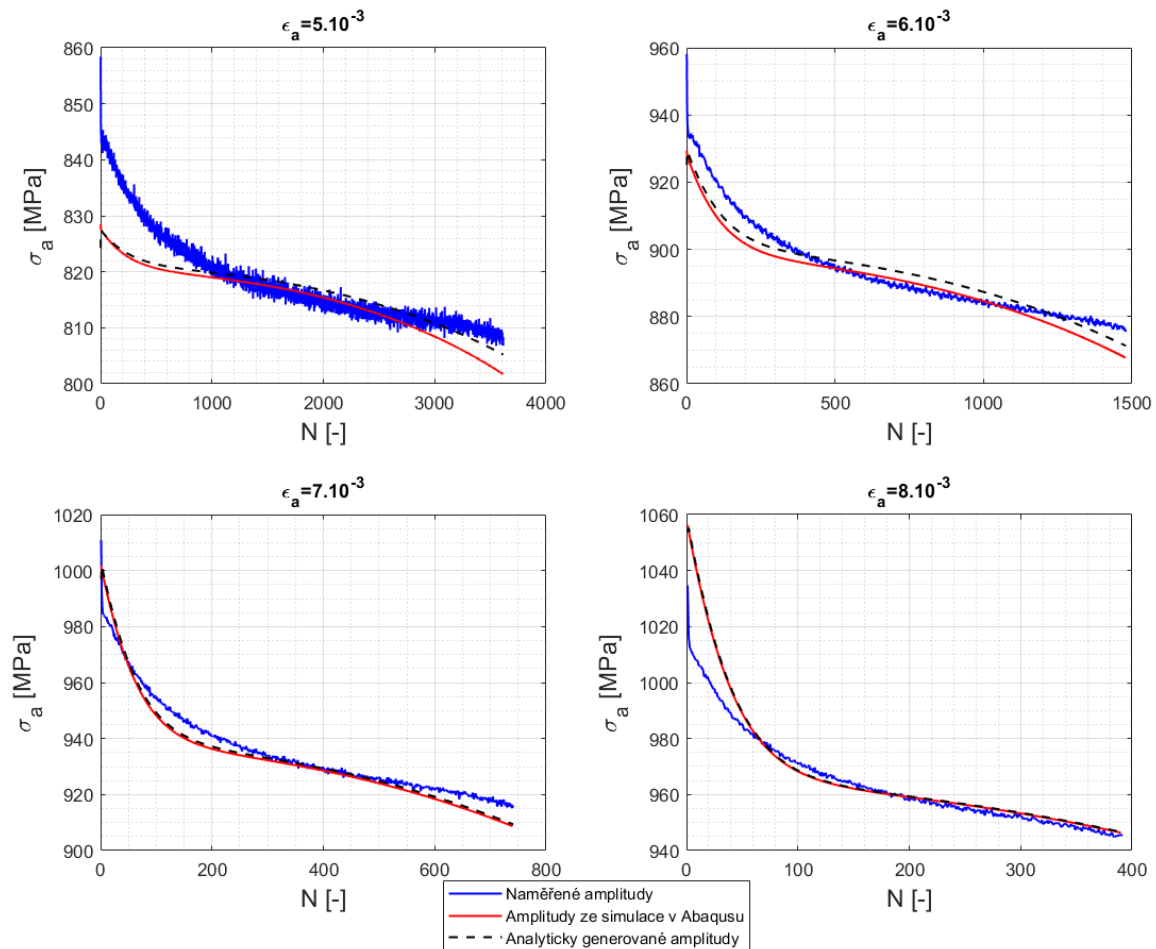
Obdobně jako u předchozího modelu jsou výsledky získané na základě analytického řešení v programu Matlab a výsledky získané simulací v programu Abaqus porovnány s naměřenými charakteristikami v následujících 3 obrázcích.



Obr. 33 Porovnání smyček na středě životnosti



Obr. 34 Porovnání závislosti amplitud napětí na akumulované pl. deformaci



Obr. 35 Porovnání závislosti amplitud napětí na počtu cyklů

Shoda hysterezních smyček je velmi dobrá, což je ve shodě se všeobecně známou schopností Chabocheho modelu kinematického zpevnění dobře popisovat tvary hysterezních smyček.

Funkční závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci u analytických výstupů z modelu se taktéž dobře shoduje s experimentálními daty. Sledované odchylky v počátcích průběhů u grafů pro amplitudy poměrných deformací 0,005 a 0,008 jsou z části důsledek lokální optimalizace. Příznivější výsledky by mohly být očekávány, kdyby se použily časově náročné globální metody optimalizace. Dalším příčinou může být, že vybraný model není schopný všechny křivky dokonale vystihnout. Možnou úpravou je např. volba lineárního členu  $R_2$  izotropního zpevnění nebo zavedení závislosti parametru  $\gamma$  kinematického zpevnění na poloměru paměťové plochy.

V porovnání funkčních závislostí amplitud simulovaných v Abaqusu s analytickým výstupem modelu je možné sledovat úplnou shodu. Velké odchylky nenastávají ani při zvětšujícím se počtu cyklů, kdy se teoreticky mohou akumulovat numerické nepřesnosti. Dobrou shodu simulace v Abaqus s výsledky získanými na základě analytického řešení lze pozorovat i u grafů hysterezních smyček.

Na základě těchto pozorování lze považovat validaci implementace modelu do systému MKP za úspěšnou.

## 6. Závěr

V teoretické části práce byla provedena rešerše problematiky sestavování konstitutivních vztahů pro popis cyklické plasticity. Zejména byly studovány charakteristické jevy pozorované při experimentech nízkocyklické únavy a možnosti jejich modelování s použitím kinematického, izotropního a kombinovaného modelu zpevnění.

Na základě provedené rešerše byl zvolen kombinovaný Chabocheho model zpevnění jako vhodný základní model. Pro kalibraci parametrů materiálových modelů byl navržen skript v programu Matlab, využívající multikriteriální optimalizaci. Materiálový model byl implementován do MKP řešiče Abaqus ve formě uživatelské procedury UMAT v jazyce FORTRAN. Kalibrace, implementace a validace byla provedena pro dva různé modely, základní a rozšířený.

V základním modelu byla s použitím jedné vybrané reprezentativní sady experimentálních dat zkoumaná schopnost modelu korektně popsat hysterezní smyčku na středu životnosti a závislost amplitud napětí na akumulované plastické deformaci (cyklické změkčení). Velmi dobrá shoda experimentálních dat a napěťové odezvy generované numerickým modelem jednoosé cyklické zkoušky prokázala použitelnost navrženého modelu a validitu postupu kalibrace a implementace.

V rozšířeném modelu byla doplněna schopnost základního materiálového modelu o začlenění závislosti izotropního zpevnění na paměťové ploše. Prakticky tak bylo směřováno ke schopnosti simulovat materiály bez Masingova chování. Kalibrace parametrů modelů byla provedena na dostupných experimentálních datech pro 4 úrovně amplitudy deformace. Opět dobrou shodou experimentálních a materiálovým modelem simulovaných dat byla validována implementace materiálového modelu.

Implementace prezentovaných modelů do systému Abaqus, která představovala stěžejní rozsah této práce, významně rozšiřuje stávající sadu interních materiálových modelů, které jsou implementovány pouze v nejjednodušší podobě. Potenciální uživatel tímto získává nástroj pro řešení komplexních inženýrských úloh, podpořený pokročilými funkcionalitami komerčního softwaru doplněný o uživatelsky definovaný specializovaný a rozšiřitelný materiálový model.

V této práci předkládaný kombinovaný Chabocheho model zpevnění s paměťovou plochou prokazuje vhodnost použití pro modelování napěťové odezvy sledovaného materiálu při cyklickém zatěžování, a to i při více úrovních amplitudy deformací. Protože byl validován na experimentálních datech pouze pro vybrané amplitudy jednoosého zatěžování, bylo by vhodné validaci rozšířit o blokové zatěžování nebo zatěžování s proměnnou amplitudou s cílem určení v této práci volené rychlosti paměťového efektu (parametr  $\eta$ ).

Ověření modelu pro víceosé zatěžování, proporcionální a neproporcionální, je další možnou oblastí budoucího výzkumu. Obecná implementace materiálového modelu pro 3D úlohy toto přímo umožňuje, bylo by pouze nutné uskutečnit příslušné experimentální měření.



## 7. Použitá literatura

- [1] W. Chen and D. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, New York: Springer, 1988.
- [2] J. L. Chaboche and J. Lemaitre, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [3] R. Halama, *Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů*, Ostrava: Technická univerzita Ostrava, 2009.
- [4] T. Mareš, „Tom Mares's webpage: Základy teorie plasticity,“ [Online]. Available: <http://drone.fsic.cvut.cz/pp2/Plasticita.pdf>. [Přístup získán 30. 7. 2019].
- [5] J. L. Chaboche, „A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories,“ *International journal of plasticity*, Vol. 24, pp. 1642-1693, October 2008.
- [6] W. Yeh a H. Lin, „An endochronic model of yield surface accounting for deformation,“ *International Journal of Plasticity*, Vol. 22, pp. 16-38, 2006.
- [7] W. Prager, “Recent developments in the mathematical theory of plasticity,” *Journal of Applied Physics*, Vol. 20 (No. 3), pp. 235-241, 1949.
- [8] P. J. Armstrong and C. O. Frederick, A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. Report RD/B/N731, Berkeley, UK.: CEGB, Central Electricity Generating Board, 1966.
- [9] J. Halamka, „Kalibrace parametrů modelu cyklické plasticity: Bakalářská práce,“ Praha, Fakulta strojní, ČVUT, 2019, p. 33.
- [10] J. L. Chaboche, K. Dang-Van and G. Cordier, *Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel*, Berlin: SMIRT 5, 1979.
- [11] D. Nouailhas, J. Chaboche, S. Savalle and G. Cailletaud, “On the constitutive equations for cyclic plasticity under nonproportional loading,” *International Journal of Plasticity*, Vol. 4, pp. 317-330, 1985.
- [12] A. Raasheduddin, P. R. Barrett a H. Tasnim, „Unified viscoplasticity modeling for isothermal low-cycle fatigue and fatigue-creep stress–strain responses of Haynes 230,“ *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 88-89, pp. 131-145, 2016.
- [13] F. Dunne and N. Petrinic, *Introduction to computational plasticity*, Oxford University Press on Demand, 2005.

- [14] K. Mineo and O. Nobutada, "Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, p. 2217–2238, 2002.
- [15] P. Syeilendra, „FORTRAN77 Subroutine For Matrix Inversion,“ 2011. [Online]. Available: <https://www.scribd.com/doc/46100453/FORTRAN77-Subroutine-for-matrix-inversion>. [Přístup získán 2021].
- [16] M. Bartošák, "Validation of consistent tangent stiffness," in *Phenomenological models for lifetime prediction under low-cycle fatigue and thermo-mechanical fatigue loading conditions*, Prague, Czech Technical University in Prague, 2019, pp. 61-62.
- [17] S.-L. Zhang a F.-Z. Xuan, „Interaction of cyclic softening and stress relaxation of 9–12% Cr steel under strain-controlled fatigue-creep condition: Experimental and modeling,“ *International Journal of Plasticity*, Vol. 98, pp. 45-64, 2017.
- [18] J. D'Errico, "fminsearchbnd, fminsearchcon," 2021. [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8277-fminsearchbnd-fminsearchcon>, MATLAB Central File Exchange. [Accessed 25. 6. 2021].
- [19] N. Ohno, R. Yamamoto, T. Sasaki and D. Okumura, "Resetting scheme for plastic strain surface in constitutive modeling of cyclic plasticity," *International Journal of Plasticity*, Vol. 123, pp. 56-69, December 2019.