

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ



Diplomová práce

Stabilita dlouhých štíhlých kompozitových táhel

Praha, 2021

Autor: Lukáš Zaslavskij

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Zaslavskij** Jméno: **Lukáš** Osobní číslo: **466631**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Stabilita dlouhých štíhlých kompozitových táhel

Název diplomové práce anglicky:

Stability of long composite rods

Pokyny pro vypracování:

1. Seznámení s problematikou kompozitových táhel řízení malého sportovního letounu
2. Sestavení výpočetního modelu kompozitového táhla daných rozměrů a skladby
3. Porovnání výsledků výpočetního modelu s experimentálně získanými daty
4. Zhodnocení výsledků, závěry

Seznam doporučené literatury:

Laš V., 2004, Mechanika kompozitních materiálů, ZČU, Plzeň
Valenta F. a kol., Pružnost a pevnost III., skriptum, ČVUT, Praha

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

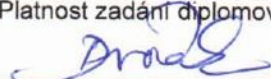
Ing. Milan Dvořák, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


Datum zadání diplomové práce: **12.04.2021**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____


Ing. Milan Dvořák, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

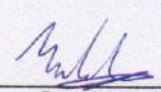

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

17.5.2021
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat všem, kteří mi při vytváření této práce pomáhali. Především děkuji svému vedoucímu diplomové práce, Ing. Milanovi Dvořákovi, Ph.D. za věnovaný čas a připomínky a mé rodině za podporu během studií.

Název práce: Stabilita dlouhých štíhlých kompozitových táhel

Autor: Lukáš Zaslavskij

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá vytvořením výpočtového modelu kompozitového táhla namáhaného na vzpěr, vyhodnocením experimentálního měření táhla a porovnáním výsledků experimentu s analytickým výpočtem modelu.

Klíčová slova: táhlo, kompozitní materiál, stabilita, vzpěr

Seznam použité symboliky

Označení	Jednotka	Název
C_L	1	<i>součinitel vztlaku</i>
α	$^\circ$	<i>úhel náběhu</i>
V_A	m/s	<i>manévrovací rychlost</i>
V_{S1}	m/s	<i>stanovená návrhová pádová rychlost při maximální návrhové hmotnosti, zasunutých vztlakových klapkách a s motorem ve volnoběhu</i>
V_F	m/s	<i>Návrhová rychlost letu s vysunutými vztlakovými klapkami</i>
V_D	m/s	<i>Maximální návrhová rychlost</i>
V_B	m/s	<i>Návrhová rychlost při silném poryvu</i>
n	1	<i>provozní násobek obrátů</i>
σ	N/mm ²	<i>tenzor napětí</i>
$\boldsymbol{\sigma}$	-	<i>matice tenzoru napětí</i>
F	N	<i>síla působící na plochu elementu</i>
A	mm ²	<i>plocha elementu</i>
ε	1	<i>tenzor deformace</i>
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	<i>matice tenzoru deformace</i>
E	N/mm ²	<i>Youngův modul pružnosti</i>
ν	1	<i>Poissonovo číslo</i>
S	-	<i>matice poddajnosti</i>
C	-	<i>matice tuhosti</i>
E_L	N/mm ²	<i>modul pružnosti v tahu v příčném směru laminy</i>
E_T	N/mm ²	<i>modul pružnosti v tahu v podélném směru laminy</i>
ν_{LT}	1	<i>Poissonovo číslo laminy</i>
G_{LT}	N/mm ²	<i>modul pružnosti ve smyku laminy</i>
σ_L	N/mm ²	<i>napětí v příčném směru</i>
σ_T	N/mm ²	<i>napětí v podélném směru</i>
σ_{LT}	N/mm ²	<i>napětí ve smyku</i>
ε_L	1	<i>deformace v příčném směru</i>
ε_T	1	<i>deformace v podélném směru</i>
ε_{LT}	1	<i>deformace ve smyku</i>
σ_m	N/mm ²	<i>napětí v matici</i>
A_m	mm ²	<i>plocha matrice</i>
σ_f	N/mm ²	<i>napětí ve vlákne</i>
A_f	mm ²	<i>plocha vlákna</i>
E_m	N/mm ²	<i>Youngův modul pružnosti matrice</i>
V_m	1	<i>objemový podíl matrice</i>
E_f	N/mm ²	<i>Youngův modul pružnosti vlákna</i>
V_f	1	<i>objemový podíl vlákna</i>
H	mm	<i>výška kompozitu</i>

H_m	mm	výška matrice
H_f	mm	výška vlákna
U_m	mm	Poissonovo číslo matrice
U_f	mm	Poissonovo číslo vlákna
τ_{LT}	N/mm ²	smyk laminy
γ_{LT}	°	zkos laminy
u	mm	celkové posunutí způsobené smykem
u_m	mm	posunutí matrice způsobené smykem
u_f	mm	posunutí vlákna způsobené smykem
τ_m	N/mm ²	smykové napětí matrice
τ_f	N/mm ²	smykové napětí vlákna
G_m	N/mm ²	modul pružnosti matrice ve smyku
G_f	N/mm ²	modul pružnosti vláken ve smyku
R	-	korelační matice
T	-	transformační matice
θ	°	úhel natočení vláken
E_{Lx}	N/mm ²	Youngův modul pružnosti ve směru zatížení
J	mm ⁴	kvadratický moment průřezu
M	Nmm	ohybový moment
l	mm	délka
F_{krit}	N	kritická síla
E_i	N/mm ²	Youngův modul pružnosti i-té vrstvy
J_i	mm ⁴	Kvadratický modul průřezu i-té vrstvy
d, d_{in}	mm	vnitřní průměr
t	mm	tloušťka vrstvy
ρ_m	kg/mm ³	hustota matrice
ρ_f	kg/mm ³	hustota vlákna
ρ	kg/mm ³	hustota
m	kg	hmotnost
d_{out}	mm	vnější průměr
t_{celk}	mm	celková tloušťka stěny táhla
t_{in}	mm	tloušťka vnitřní vrstvy
t_{out}	mm	tloušťka vnější vrstvy
F_g	N	tíha závaží zatěžující spoj táhla
F_h	N	zatěžující síla od hydromotoru
F_t	N	zatěžující síla do táhla

Obsah

1. Úvod	11
2. Táhla řízení letounu	13
2.1. Předpisy	13
2.1.1. UL2-VI § 305 Pevnost a deformace	13
2.1.2. UL 2 § 333 Všeobecně	14
2.1.2.1. Obálka obrátů	14
2.1.2.2. Poryvová obálka	15
2.1.2.3. Letová obálka	15
2.1.3. UL 2 § 335 Návrhové rychlosti letu	16
2.1.4. UL 2 § 337 Provozní násobky obrátů	16
2.1.5. UL2-VI § 303 Součinitel bezpečnosti	16
2.2. Síly působící na táhlo	17
3. Ztráta vzpěrné stability	18
3.1. Teorie vzpěru	19
3.1.1. Druhý případ vzpěru podle Eulera	20
4. Mechanika kompozitních materiálů	22
4.1. Ortotropní materiál	22
4.2. Laminační teorie	25
4.3. Konstanty vláknových kompozitů	27
4.3.1. Modul pružnosti ve směru vlákna E_L	27
4.3.2. Modul pružnosti v příčném směru E_T	28
4.3.3. Poissonovo číslo ν_{LT}	28
4.3.4. Modul pružnosti ve smyku G_{LT}	28
4.4. Navíjené kompozity	30
4.5. Transformace souřadnic	31
4.6. Vzpěr táhel z kompozitních materiálů	33
4.6.1. Kritická síla	33
4.6.2. Kvadratický moment průřezu vrstvy	34
5. Výpočetní model táhla	35

5.1. Výpočetní model pro dlouhé táhlo výškovky	36
5.2. Výpočetní model pro krátké táhlo výškovky	38
5.3. Výpočetní model pro táhlo křídélka	40
5.4. Shrnutí výsledků	42
6. Experimentální ověření výpočetního modelu táhla	43
6.1. Průběh zkoušky	43
6.2. Měřená data	44
6.2.1. Měření vzorku 1	44
6.2.2. Výsledky měření vzorku 1	44
6.2.3. Měření vzorku 2	45
6.2.4. Výsledky měření vzorku 2	45
6.3. Shrnutí výsledků experimentu	46
7. Optimalizace táhla	47
7.1. Vstupy	47
7.1.1. Vnitřní průměr táhla	47
7.1.2. Tloušťka vrstvy a počet vrstev	48
7.1.3. Úhel navíjení	48
7.2. Vývojový diagram	49
7.3. Optimalizace pro dlouhé táhlo výškovky	51
7.3.1. Zadání optimalizace	51
7.3.2. Výsledky optimalizace	52
7.4. Optimalizace pro krátké táhlo výškovky	53
7.4.1. Zadání optimalizace	53
7.4.2. Výsledky optimalizace	54
7.5. Optimalizace pro táhlo křídélka	54
7.5.1. Zadání optimalizace	54
7.5.2. Výsledky optimalizace	55
7.6. Závěr optimalizace	56
8. Závěr	57
9. Zdroje	59

Seznam obrázků

Obr. 1 Letadlo VL3 – Evolution [13]	11
Obr. 2 Kompozitové táhlo s vlepovanou koncovkou	11
Obr. 3 Schématické zobrazení navíjení kompozitů [6].....	12
Obr. 4 Použití táhla v konstrukci letadla[12]	13
Obr. 5 Obálka obrátů [3]	14
Obr. 6 Poryvová obálka [3]	15
Obr. 7 Letová obálka [3]	15
Obr. 8 Fáze rovnováhy [2]	18
Obr. 9 Případy vzpěru [10]	19
Obr. 10 Druhý případ vzpěru podle Eulera [10]	20
Obr. 11 Ortotropní materiál [16].....	22
Obr. 12 Složení kompozitu s různými úhly [4].....	30
Obr. 13 Trn pro axiální návin [6].....	31
Obr. 14 Transformace souřadnic.....	32
Obr. 15 Schéma zkoušky [15]	43
Obr. 16 Průběh zatěžující síly	44
Obr. 17 Průběh průhybu táhla.....	44
Obr. 18 Průběh zatěžující síly	45
Obr. 19 Průběh průhybu táhla.....	45
Obr. 20 Porovnání výsledků experimentu.....	46
Obr. 21 Vnitřní průměr táhla	47
Obr. 22 Vývojový diagram optimalizace.....	49
Obr. 23 Uživatelské rozhraní optimalizačního programu	50

Seznam tabulek

Tab. 1 Provozní násobky obrátů	16
Tab. 2 Početní zatížení analyzovaných táhel	17
Tab. 3 Vlastnosti výztuhy kompozitu.....	35
Tab. 4 Vlastnosti matrice kompozitu.....	35
Tab. 5 Vlastnosti hotového kompozitního materiálu.....	35
Tab. 6 Skladba kompozitu	36
Tab. 7 Charakteristické rozměry táhla	36
Tab. 8 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení.....	37
Tab. 9 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev	37
Tab. 10 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy.....	38
Tab. 11 Skladba kompozitu	38
Tab. 12 Charakteristické rozměry táhla	39
Tab. 13 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení.....	39
Tab. 14 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev	39
Tab. 15 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy.....	40
Tab. 16 Skladba kompozitu	40
Tab. 17 Charakteristické rozměry táhla	41
Tab. 18 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení.....	41
Tab. 19 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev	41
Tab. 20 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy.....	42
Tab. 21 Shrnutí výsledků	42
Tab. 22 Výsledky experimentu	46
Tab. 23 Výsledky optimalizace pro táhlo výškovky dlouhé	52
Tab. 24 Výsledky optimalizace pro táhlo výškovky krátké	54
Tab. 25 Výsledky optimalizace pro táhlo křídélka	55
Tab. 26 Shrnutí výsledků	57
Tab. 27 Výsledky experimentu	57

1. Úvod

Od prvního letu letadla Flyer bratří Wrightových již uběhlo spousta let. Letadla se časem vyvíjela v mnoha ohledech. V dnešní době je letadel na trhu mnoho. Liší se velikostí, hmotností, materiálem, rychlostí a mnoha dalšími parametry. V této práci budou zkoumány konstrukční prvky celokompozitového letadla VL3 – Evolution vyvinutého a vyráběného v České republice. Jedná se o ultralehký aerodynamicky řízený jednomotorový dolnoplošník klasické koncepce a je certifikován v kategorii ELSA pro max. vzletovou hmotnost 600 kg [13].



Obr. 1 Letadlo VL3 – Evolution [13]

V celém rozsahu provozních parametrů je nezbytně nutné zajistit, aby při používání nedošlo k žádné poruše. Jakákoliv porucha by mohla mít fatální následky. Veškeré konstrukční prvky je třeba dimenzovat s dostatečnou bezpečností, znát, jak se materiál chová v provozních podmínkách a vše důkladně ověřit.

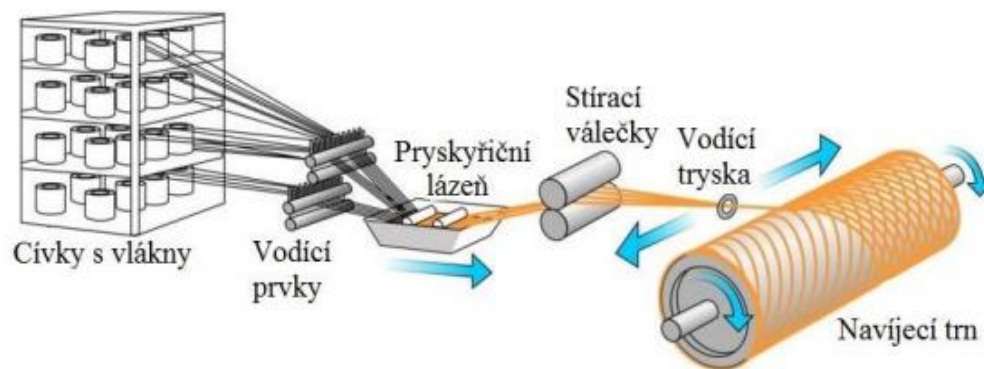
Práce se zabývá systémem řízení výše zmíněného letounu pomocí táhel, které je možné představit si jako prut přenášející tah a tlak. Táhla jsou spojena s kloubovými spoji systému řízení pomocí vlepaných koncovek se závitovým otvorem.



Obr. 2 Kompozitové táhlo s vlepanou koncovkou

Mezi materiály používanými pro výrobu táhel patří dural, ocel, ale i kompozitní materiály, které jsou použity v případě uvedeného letadla. Kompozit je materiál složený ze dvou či více složek, který je oproti jiným materiálům lehčí, ale složitější pro výpočet. Kompozitní materiály jsou anizotropní a jeho vlastnosti jsou dány nejen použitými složkami, ale také technologií výroby.

Pro výrobu táhel letadla VL-3 je použita metoda navíjení kompozitů (Obr. 3). Při výrobě je vlákno prosycené v pryskyřičné lázni (u analyzovaných táhel je uhlíkové vlákno prosyceno epoxidovou pryskyřicí) navíjeno na rotující trn pod určitým úhlem. Úhel navíjení a předpětí velmi ovlivňují výsledné vlastnosti produktu, proto je nutné je správně definovat.



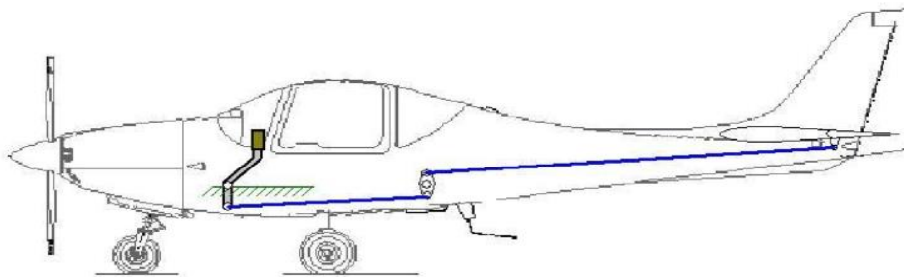
Obr. 3 Schématické zobrazení navíjení kompozitů [6]

Cíle této práce jsou:

- Seznámení se s problematikou kompozitových táhel řízení malého sportovního letounu, kde budou uvedeny předpisy související s návrhem táhla, a to především ty, ve kterých jsou kladeny nároky na zatížení táhla
- Sestavení výpočetního modelu kompozitového táhla daných rozměrů a skladby, pro který je nutné seznámit se s problematikou stability a mechaniky kompozitních materiálů
- Porovnání výsledku výpočetního modelu s experimentálně získanými daty a optimalizace rozměrů táhla
- Zhodnocení výsledků a závěr

2. Táhla řízení letounu

Jak již bylo zmíněno, táhla si je možné představit jako pruty, které slouží k přenosu tahových a tlakových sil mezi ovládacími prvky v kokpitu a řídicími plochami letounu (Obr. 4). V současné době patří k nejpoužívanějším materiálům pro výrobu táhel kompozitní materiály. Táhla letadla VL-3 jsou vyráběna z uhlíkového vláknového kompozitu a jsou na koncích opatřena dvěma kloubovými ložisky. Pro zajištění funkčnosti a bezpečnosti všech letounů a jejich konstrukčních prvků existuje řada leteckých předpisů, které musí letouny splňovat. [1]



Obr. 4 Použití táhla v konstrukci letadla[12]

2.1. Předpisy

Předpisy definují požadavky např. na stabilitu letu, pevnosti nebo pohonné jednotky. V případě letadla VL-3 se jedná o předpisy pro ultralehké letouny UL 2 část I. – ULL, znění 2019, max. MTOM 600 kg. Předpis definuje provozní požadavky na letoun a jeho konstrukci.

2.1.1. UL2-VI § 305 Pevnost a deformace

První předpis, který je potřeba vzít v úvahu, je předpis o pevnosti a deformaci, ve kterém je uvedeno, jaké deformace táhla jsou ještě přípustné a jaké již ne. Jeho znění je:

Konstrukce musí být schopna přenést provozní zatížení (maximální zatížení, které lze očekávat v provozu) bez trvalých deformací. Při všech zatíženích až do zatížení provozního nesmí vzniklé deformace ovlivnit bezpečný provoz. To platí zejména pro systémy řízení.

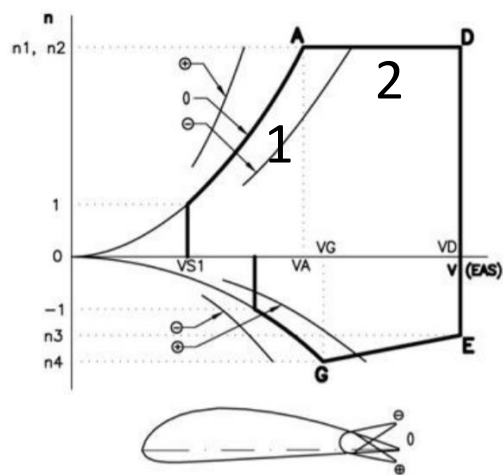
Konstrukce musí být schopna přenést početní zatížení (provozní zatížení násobené příslušným součinitelem bezpečnosti, běžně 1,5) nejméně po dobu 3 sekund, aniž by došlo k jejímu porušení. Pokud je pevnostní průkaz prováděn dynamickou zkouškou simulující reálné podmínky zatížení, potom tento časový limit neplatí. [3]

2.1.2. UL 2 § 333 Všeobecně

Dalším požadavkem je určení letové obálky, která definuje maximální povolené provozní limity násobku a rychlosti letounu. Pro všechny tyto kombinace musí letoun splnit požadavky uvedené v předchozí kapitole UL2-VI § 305 Pevnost a deformace.

2.1.2.1. Obálka obrátů

Obálka obrátů udává, povolené násobky pro letovou rychlost při manévrech letounu. Předpis pro obálku obrátů udává maximální násobky zatížení, které na letadlo při provozu můžou působit.



Obr. 5 Obálka obrátů [3]

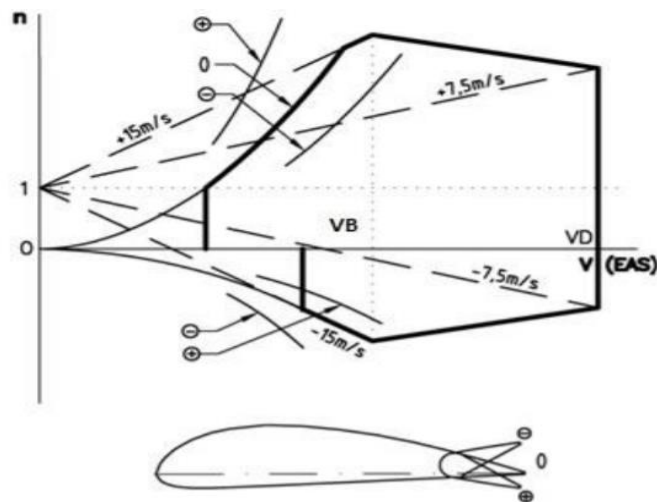
Část křivky označená číslem 1 ukazuje, že při nízkých rychlostech a maximálním úhlu náběhu, které je na letadle možno dosáhnout, letadlo nepřekročí maximální násobek, který je definován v předpise. Tato část definuje aerodynamické možnosti letounu.

Část křivky označená číslem 2 ukazuje, že se zvyšující se rychlostí musíme zmenšit úhel náběhu, aby se násobek nedostal nad povolenou provozní hodnotu definovanou v předpise n_1, n_2 .

Ostatní části křivky ukazují násobky při záporném úhlu náběhu.

2.1.2.2. Poryvová obálka

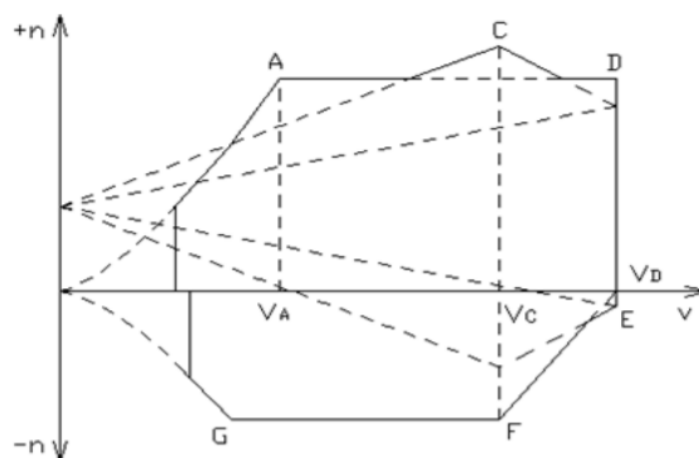
Poryv je náhlé zvýšení rychlosti vzduchu. Nastává, když se letadlo dostane do místa, kde je rozdílná rychlost proudění vzduchu než proudění vzduchu okolo letadla ve směru kolmém na směr pohybu letadla. Poryvová obálka udává, jaké násobky zatížení vzniknou, když letadlo prolétne poryvem. Tyto rychlosti se sečtou a změní úhel náběhu. Z Obr. 6 vidíme, že změnou úhlu náběhu změníme i součinitel vzlaku. Proto je třeba uvést, jak tyto poryvy ovlivní násobky zatížení působící na letadlo.



Obr. 6 Poryvová obálka [3]

2.1.2.3. Letová obálka

Při návrhu je nutné brát v úvahu násobky způsobené obraty, stejně tak jako násobky způsobené poryvy. Proto se obě obálky sloučí do jedné, které se říká letová obálka. Z letové obálky se určí maximální násobek, který při letu může nastat. Tento násobek je potom dále používán k výpočtům. [3]



Obr. 7 Letová obálka [3]

2.1.3. UL 2 § 335 Návrhové rychlosti letu

Význam jednotlivých rychlostí objevujících se v letové obálce je:

V_A – manévrovací rychlost

$$V_A = V_{S1} \cdot \sqrt{(n1)} \quad (1)$$

V_{S1} – stanovená návrhová pádová rychlost při maximální návrhové hmotnosti, zasunutých vztlakových klapkách a s motorem ve volnoběhu

V_F – Návrhová rychlost letu s vysunutými vztlakovými klapkami

V_D – Maximální návrhová rychlost

V_B – Návrhová rychlost při silném poryvu

2.1.4. UL 2 § 337 Provozní násobky obrátů

Provozní násobky obrátů podle obálky obrátů (viz Obr. 5) musí mít nejméně tyto hodnoty:

n1	+4,0
n2	+4,0
n3	-1,5
n4	-2,0

Tab. 1 Provozní násobky obrátů

Z Tab. 1 lze vidět, že maximální násobek, který je dle předpisu u letadla povolen, je +4,0.

Z letové obálky a ní plynoucích násobků je určeno provozní zatížení konstrukce.

2.1.5. UL2-VI § 303 Součinitel bezpečnosti

Předpis o součiniteli bezpečnosti udává, kolikrát je potřeba zvýšit provozní zatížení, aby bylo jisté, že bude táhlo schopno bezpečně plnit funkci. Takto zvýšené provozní zatížení se nazývá početní zatížení. Znění předpisu je:

Součinitel bezpečnosti f je 1,5 a zvyšující součinitel bezpečnosti pro kompozitní materiály je v rozmezí 1-1,5.

- Použití zvyšujícího součinitele závisí na:
- a. součásti či dílu, na který bude vztahován,
 - b. přesnosti výpočtů a jejich spolehlivosti,
 - c. předložených zkouškách vzorků kompozitového materiálu a jejich výsledcích,
 - d. ověření výroby, kontrolních postupech a zkušenostech výrobce.

2.2. Síly působící na táhlo

Jak už bylo zmíněno, dominantní síly působící na táhlo jsou tahové a tlakové. Táhlo je dlouhé a štíhlé. Tahové napětí je v porovnání s mezí pevnosti v tahu malé. Problematické jsou však tlakové síly, které mohou způsobit ztrátu vzpěrné stability táhla. Dle předpisu UL2-VI § 305 Pevnost a deformace, uvedeném v seznamu předpisů, by v případě ztráty stability táhla nebylo možné letadlo bezpečně používat.

Mimo tahové a tlakové zatížení působí na táhlo ještě nežádoucí ohybové zatížení způsobené vlastní hmotností táhla a prohnutím vznikajícím při výrobě. Technologicky je táhlo možné vyrábět přímější, ale s rostoucími technologickými požadavky roste také výsledná cena táhla. Proto je určeno maximální prohnutí z výroby do 1 mm. V případě analyzovaných táhel se bude počítat pouze se stabilitou táhla ovlivňovanou tlakovou silou.

Analyzována budou tři táhla letadla VL-3 Evolution.

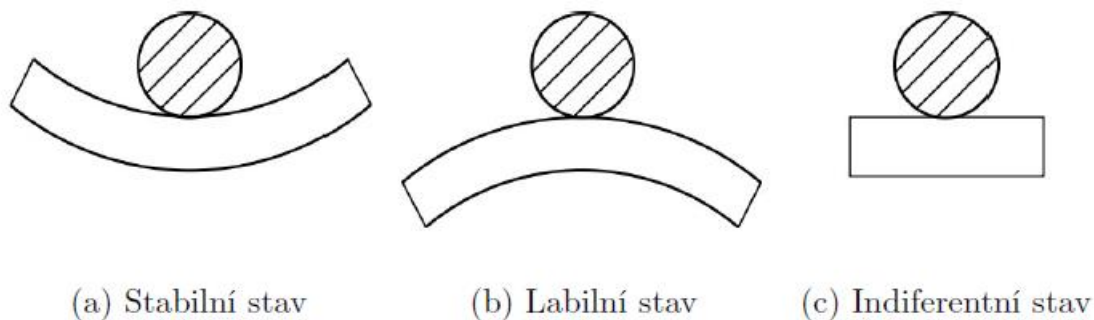
typ táhla	početní zatížení [N]
Dlouhé táhlo výškovky	1 536
Krátké táhlo výškovky	744
Táhlo křídélka	1 623

Tab. 2 Početní zatížení analyzovaných táhel

3. Ztráta vzpěrné stability

Vzpěrná stabilita je fyzikální jev, při kterém rovný, dostatečně štíhlý prvek (prut) vybočuje vlivem tlakového osového zatížení. Existují dva typy vzpěru: první bifurkační a druhý u kterého dochází k vybočení prutu. První typ je pouze teoretický, jelikož pro jeho uskutečnění je nutné, aby byl prut dokonale rovný, vyrobený z homogenního materiálu a tlaková síla působící na něj byla přesně v ose prutu. Tohoto typu vzpěru není možné dosáhnout ani v laboratorních podmínkách. Dochází u něj k rozštěpení prutu místo jeho prohnutí. V této práci se jedná o reálný příklad, proto je nutné ho považovat za druhý typ vzpěru, při kterém v případě ztráty stability dojde k vybočení.

Stabilita stlačeného prutu je často vysvětlována pomocí rovnováhy tuhé koule v pozicích, zobrazených na Obr. 8.



Obr. 8 Fáze rovnováhy [2]

Koule ve stabilním stavu (a) se po vychýlení a odstranění zatížení vrátí zpět do původního stavu. Při vychýlení dojde ke zvýšení pozice těžiště, což má za následek vzrůst potenciální energie systému, kterou je potřeba systému pro vychýlení koule dodat.

Koule v labilním stavu (b) se po vychýlení do původní pozice nevrátí. Těžiště bude neustále klesat a potenciální energie systému se sníží.

Z těchto poznatků vyplývá, že ve stabilním stavu je systém v lokálním či globálním minimu potenciální energie. V labilním stavu je naopak v lokálním či globálním maximu.

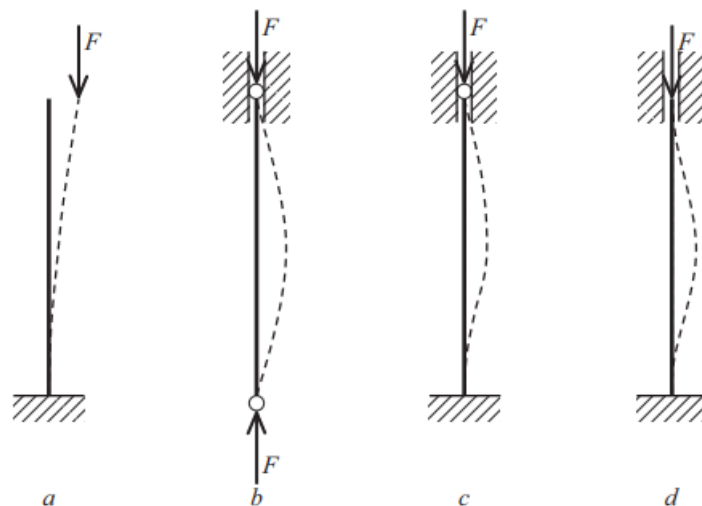
Koule v indiferentním stavu (c) zůstane po odstranění zatížení na místě a potenciální energie zůstává stejná.

Převedením tohoto příkladu na prut lze určit stav, kdy dojde ke ztrátě stability prutu. Ve stabilním stavu (a) je prut přímý. Osově síly působící na prut nejsou dostatečně veliké, deformace jsou vůči původnímu stavu zanedbatelné. Pokud by byl prut mírně vybočen příčnou

silou a poté uvolněn, vrátí se zpět do své původní polohy. Se zvyšující se osovou silou se prut dostává do indiferentního stavu (c). V tomto stavu na prut působí kritická síla, která tvoří hranici mezi stabilním a labilním stavem. Mírným vybočením prutu se prut nevrátí do původního stavu, ale zůstává ve stejném stavu, do kterého byl vybočen. S rostoucí silou se tedy prut dostává do labilní polohy (b), ve které se po působení příčné síly prut zhroutí. [2] Z výše zmíněného textu vyplývá, že aby bylo možné zjistit, kdy prut přechází ze stabilní polohy do polohy nestabilní, je nutné stanovit kritickou sílu ve vzpěru.

3.1. Teorie vzpěru

Působením tlakové osové síly na přímý, štíhlý a dlouhý prut u něj dochází ke vzpěru. Případy vzpěru se liší uložením konců prutů. Na Obr. 9 lze vidět čtyři případy vzpěru.



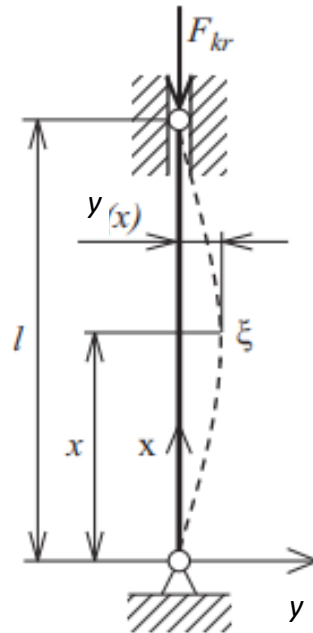
Obr. 9 Případy vzpěru [10]

- První případ vzpěru, kde je jeden konec vetknutý a druhý konec je volný.
- Druhý případ vzpěru, kde jsou oba konce uloženy kloubově s možností osového posuvu.
- Třetí případ vzpěru, kde je jeden konec vetknutý a druhý konec kloubově uložený s možností osového posuvu.
- Čtvrtý případ vzpěru, kde jsou oba konce vetknuté.

Problematika vzpěru je blíže popsána v kapitole Ztráta vzpěrné stability.[10]

3.1.1. Druhý případ vzpěru podle Eulera

V této práci se bude jednat o kloubové uchycení na obou stranách, z nichž na jedné straně bude umožněn osový posuv. Jedná se tedy o druhý případ vzpěru. [2]



Obr. 10 Druhý případ vzpěru podle Eulera [10]

Z obrázku vyplývá, že v bodě x bude průhyb roven $y(x)$.

Předpoklady pro použití druhého případu vzpěru podle Eulera:

- Prut je dokonale přímý a zatížení F je považováno za kladné, pokud způsobuje stlačování prutu a působí v ose prutu.
- Materiál se řídí Hookovými zákony.
- Deformace prutu jsou tak malé, že je hodnota $(y')^2$ v rovnici pro zakřivení $y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$ zanedbatelná. Po aproximaci je výsledné zakřivení rovno y'' .

Výpočet vychází z Bernoulliho rovnice průhybové čáry. Dle předpokladu, že jsou deformace nosníku malé, lze zapsat následující rovnici: [10]

$$-\frac{M}{EJ} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \approx y'' \quad (2)$$

Kde

- M je ohybový moment
J je kvadratický moment průřezu

Z Obr. 10 lze vidět, že platí:

$$EJy'' = -M(x) = -Fy \quad \text{nebo} \quad EIy'' + Fy = 0 \quad (3)$$

Rovnice (23) je diferenciální rovnice druhého řádu s okrajovými podmínkami:

$$y = 0 \quad \text{v bodech} \quad x = 0 \quad \text{a} \quad x = \ell \quad (4)$$

Použitím substituce $k^2 = F/EI$ vzniká rovnice:

$$y'' + k^2y = 0 \quad (5)$$

Nyní je určeno předpokládané řešení jako $y = \alpha e^{mx}$, pro jehož derivaci platí rovnice $y' = \alpha m e^{mx}$ a $y'' = \alpha m^2 e^{mx}$. Dosazení do rovnice (25) vypadá následovně:

$$(m^2 + k^2)\alpha e^{mx} = 0 \quad (6)$$

Za předpokladu, že se αe^{mx} nerovná nule, může být rovnice zapsána jako:

$$(m^2 + k^2) = 0 \quad (7)$$

Upravením vzniká rovnice:

$$m = \pm ki \quad (8)$$

Dosazením do předpokládaného řešení je rovnice pro průhyb:

$$y = C_1 \alpha e^{kix} + C_2 \alpha e^{-kix} = A \cos kx + B \sin kx \quad (9)$$

kde A a B jsou integrační konstanty, získané z okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ v } x = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ y = 0 \text{ v } x = \ell &\Rightarrow B \sin k\ell = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Jelikož se B nerovná nule platí, že:

$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi \quad (11)$$

Dosazením zpět do substituce získáváme rovnici pro kritickou sílu:

$$F_{krit} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{\ell^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Pro prostý vzpěr je $n=1$. Finální vztah pro kritickou sílu prutu zatěžovaného tlakovou osovou silou je:

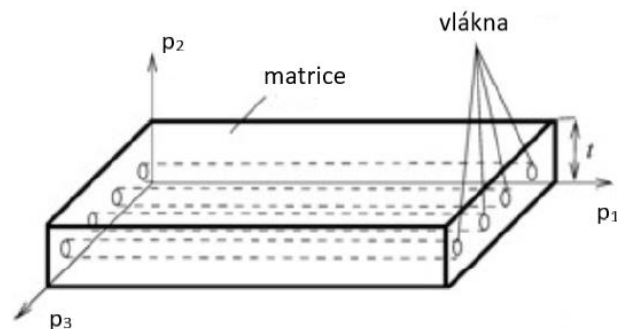
$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \quad (13)$$

4. Mechanika kompozitních materiálů

Kompozitní materiál je materiál složený ze dvou či více složek s rozdílnými vlastnostmi. Jednou z výhod je možnost tyto složky volit a určovat tak vlastnosti výsledného kompozitu. Jeho využití je velice široké, jako již bylo zmíněno nevyrábí se z něj pouze analyzovaná táhla, ale i celé letadlo. Táhla v něm jsou vyrobena z vláknového kompozitu. Proto budou v následující kapitole odvozeny materiálové charakteristiky, které jsou dále použity v laminační teorii. Z laminační teorie vzejdou potřebné hodnoty pro výpočet kritické síly při zatížení, které na táhlo bude působit.

4.1. Ortotropní materiál

Vláknový kompozit je možné v nekonečně malém prostoru popsat jako jednosměrný vláknový kompozit. V místech, kde se vlákna překrývají, je snaha dosáhnout jejich kolmosti. Pokud kolmé navzájem nejsou, je možné použít konformní zobrazení a pomocí tenzorového počtu převést úhly mezi vlákny na kolmé. Proto je dále počítáno s materiálem, který má 3 vzájemně kolmé roviny materiálové symetrie – ortotropní materiál. U kompozitních materiálů není možné považovat materiál za ortotropní, jelikož vlákna v jednotlivých laminách nejsou navzájem kolmé. Pokud je ovšem na materiál pohlíženo jako na jednotlivé laminy odděleně, je možné považovat každou z nich za ortotropní materiál. [5]



Obr. 11 Ortotropní materiál [16]

Ortotropní materiál má tedy tři hlavní směry ortotropie značené písmenem p – p_1 , p_2 a p_3 (z anglického názvu principal axis). Tyto souřadnice ovšem nemusí být shodné s globálními souřadnicemi, ve kterých se daný ortotropní materiál nachází.

Ortotropní materiál má 9 nezávislých charakteristik. Ke zjištění těchto charakteristik je zavedena tahová síla, působící na nekonečně malý element v hlavních směrech ortotropie. Na ploše elementu kolmé ke směru p_1 bude napětí rovno:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad (14)$$

Kde

F_1 je síla působící na plochu elementu
 A_1 je plocha elementu

V tomto směru vznikne deformace ε_1 .

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (15)$$

Kde

E_1 je Youngův modul pružnosti

Obě rovnice platí taktéž pro zbylé dva směry p_2 a p_3 .

Z těchto deformací se určí Poissonovo číslo ve dvou kolmých směrech na směr p_1

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^1}{\varepsilon_1^1} \quad (16)$$

$$\nu_{13} = -\frac{\varepsilon_3^1}{\varepsilon_1^1} \quad (17)$$

Stejně rovnice by platily i pro směry p_2 a p_3 , proto je z těchto rovnic získáno 9 nezávislých charakteristik.

U izotropního materiálu by byla Poissonova čísla stejná. U ortotropního materiálu jsou vlastnosti v příčném a podélném směru jiné, závislé na orientaci výtzuže, proto je nutné počítat s rozdílnými Poissonovými čísly.

Celková deformace ve směru p_1 je nyní rovna:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (18)$$

Obdobně by deformace vypadala i pro směry p_2 a p_3 .

Tyto deformace se přepisují do maticové formy ve tvaru:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (19)$$

Po dosazení:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Matice poddajnosti je symetrická, pozitivně semidefinitní a matice k ní inverzní se nazývá matice tuhosti.

V matici poddajnosti je 12 charakteristik. Celkově je zde 9 nezávislých charakteristik. Tři rovnice vychází ze symetrie matice poddajnosti a musí být splněny.

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (21)$$

$$\nu_{32}E_2 = \nu_{23}E_3 \quad (22)$$

$$\nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1 \quad (23)$$

Pokud by matice poddajnosti nebyla symetrická, znamenalo by to, že materiál není ortotropní nebo nejsou správně určeny hlavní směry ortotropie. [5]

Odvození matice poddajnosti je dále možno použít v laminační teorii, kde použitím níže uvedených předpokladů a upravením matice poddajnosti vzniká matice, ve které jsou obsaženy konstanty určující vlastnosti daných kompozitů.

4.2. Laminační teorie

Pro určení vlastností kompozitů složených z lamin jsou zavedeny následující předpoklady: [4]

- a) všechny laminy jsou ortotropní a kvazihomogenní
- b) tloušťka lamin je ve srovnání s délkou a šířkou velmi malá
- c) posuv jednotlivých bodů je malý ve všech třech směrech
- d) spojení mezi laminami je dokonalé, nekonečně tenké, a proto jsou posunutí spojitá
- e) v příčném směru (po tloušťce) se posunutí mění lineárně
- f) tloušťka laminátu je vůči ostatním rozměrům malá, je možné o problematice uvažovat jako o rovinném stavu napjatosti, a tudíž platí $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz}$
- g) platí Kirchhoffova hypotéza, která tvrdí, že kolmice ke středové ploše před deformací zůstanou kolmé i po deformaci a budou stále přímkové
- h) lze zanedbat přetvoření v příčném směru ε_{zz} z důvodu konstantní normálové vzdálenosti od středové roviny
- i) závislost mezi jednotlivými složkami napětí a deformací bude lineární

Pro zkoumaný kompozitní materiál lze dle předpokladu b) a f) počítat pouze s rovinnou napjatostí, kde první hlavní směr ortotropie p_1 je zvykem volit ve směru vláken a druhý hlavní směr ortotropie p_2 je zvykem volit kolmo na vlákna. Třetí hlavní směr ortotropie p_3 by byl kolmý na první a druhý hlavní směr ortotropie. V rovinné napjatosti s ním však není počítáno.

Pro rovinnou napjatost určíme deformaci pomocí matice poddajnosti ve tvaru:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (24)$$

Po rozepsání vypadá rovnice následovně:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Rovnici lze také zapsat pomocí matice tuhosti:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

Po rozepsání vypadá rovnice následovně:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (27)$$

V případě lamin je ovšem značení jiné.

První hlavní směr ortotropie p_1 se značí L (longitudinal) a druhý hlavní směr ortotropie p_2 se značí T (transversal).

Jednotlivé charakteristiky včetně deformací a napětí se značí následovně:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \quad (28)$$

4.3. Konstanty vláknových kompozitů

V rovnici (13) jsou obsaženy níže uvedené konstanty, jimiž jsou specifikovány výrobky z kompozitních materiálů. Tyto konstanty vychází z materiálových charakteristik matrice a vláken a jejich podílu na celkovém objemu výsledného kompozitu.

4.3.1. Modul pružnosti ve směru vlákna E_L

Vychází z rovnice rovnováhy mezi silou ve směru vláken působící na kompozit a silou ve směru vláken působící na vlákno a matrici.

$$\sigma_L A = \sigma_m A_m + \sigma_f A_f \quad (29)$$

Kde

σ_m je napětí v matrici
 A_m je plocha matrice
 σ_f je napětí ve vlákně
 A_f je plocha vlákna

Po dosažení deformační podmínky $\varepsilon_L = \varepsilon_m = \varepsilon_f$ a Hookova zákona je upravený tvar rovnice:

$$E_L = E_m V_m + E_f V_f \quad (30)$$

Kde

E_m je Youngův modul pružnosti matrice
 V_m je objemový podíl matrice
 E_f je Youngův modul pružnosti vlákna
 V_f je objemový podíl vlákna

4.3.2. Modul pružnosti v příčném směru E_T

Vychází z rovnice, která říká, že působením síly dojde ke změně výšky elementu kompozitu, která je rovna změně výšky matrice a vlákna.

$$\Delta H = \Delta H_f + \Delta H_m \quad (31)$$

Kde

H_m je výška matrice

H_f je výška vlákna

Po dosažení deformační podmínky $\sigma_L = \sigma_m = \sigma_f$ a Hookova zákona je upravený tvar rovnice:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (32)$$

4.3.3. Poissonovo číslo ν_{LT}

Definice Poissonova čísla zní:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (33)$$

Dosažením rovnice (16) do deformace ε_T vzniká po úpravě tvar rovnice:

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (34)$$

Kde

ν_m je Poissonovo číslo matrice

ν_f je Poissonovo číslo vlákna

4.3.4. Modul pružnosti ve smyku G_{LT}

Definice modulu pružnosti ve smyku zní:

$$G_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{\gamma_{LT}} \quad (35)$$

Kde

τ_{LT} je smykové napětí laminy

γ_{LT} je zkosení laminy

Dosažením deformační podmínky:

$$u = u_f + u_m \quad (36)$$

Kde

u celkové posunutí způsobené smykem
 u_m posunutí matrice způsobené smykem
 u_f posunutí vlákna způsobené smykem

a rovností smykových napětí:

$$\tau_{LT} = \tau_m = \tau_f \quad (37)$$

Kde

τ_{LT} celkové smykové napětí laminy
 τ_m smykové napětí matrice
 τ_f smykové napětí vlákna

je upravený tvar rovnice:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (38)$$

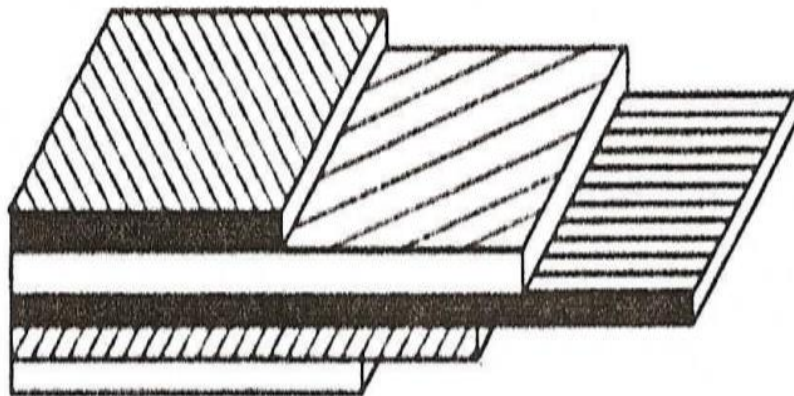
Kde

G_m je modul pružnosti matrice ve smyku
 G_f je modul pružnosti vláken ve smyku

4.4. Navíjené kompozity

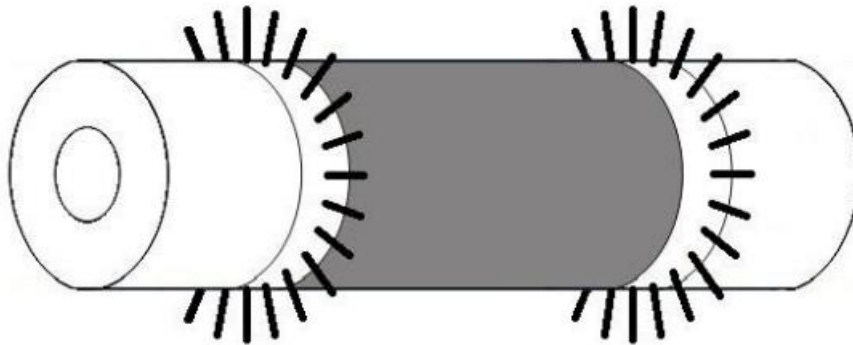
Při výrobě konstrukcí z kompozitů není důležitý pouze materiál, ze kterého jsou vyrobeny, ale také technologický postup jejich výroby. Táhla lze považovat za kompozitové trubky. Pro jejich výrobu se používá metoda navíjení kompozitů. Jedná se o jednu z nejefektivnějších a nejprogresivnějších metod pro výrobu dutých těles.

V případě analyzovaných táhel se jako výztuž používají pramence uhlíkových vláken. Tyto pramence jsou impregnovány epoxidovou pryskyřicí a následně navíjeny na rotující jádro (trn), jehož průměr odpovídá vnitřnímu průměru trubky. Ukládací neboli vodící část stroje se pohybuje podél osy rovnoběžné s osou trnu, přičemž navíjecí trn současně rotuje kolem své osy (Obr. 3). Úhel návinu je možné regulovat poměrem otáčení trnu a posuvem ukládací trysky, a to v rozmezí 0° - 90° [6]. Lamináty se většinou navrhují symetrické kolem střední roviny nebo střední vrstvy. Při namáhání tahovými silami působícími v rovině laminátu nedochází u symetrického laminátu k přidavným ohybovým nebo torzním deformacím a je zaručena tvarová stabilita laminátu při změnách okolní teploty.[7]



Obr. 12 Složení kompozitu s různými úhly [4]

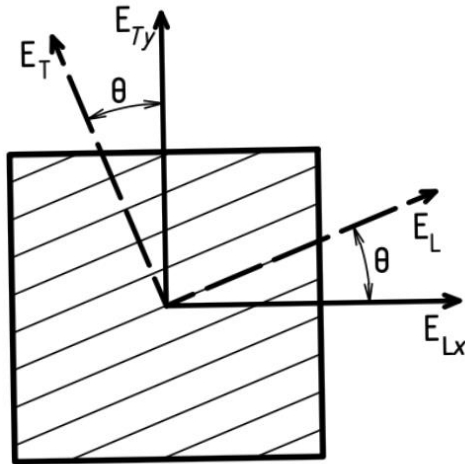
Metod navíjení existuje mnoho. Analyzované táhla jsou vyráběna metodou axiálního návinu, známé také jako PSW (pin supported winding). Metoda zaručuje vyrobenému kompozitu maximální možnou axiální pevnost. Technologie návinu vyžaduje přídavné prvky jádra, které umožní uchycení vláken na jeho koncích a dosažení úhlu návinu 0° . Tyto prvky jsou v podstatě radiální kolíky, rozmístěny na obou koncích jádra po jeho obvodu. Vláknem je vedeno podél osy a zachytáváno za jednotlivé kolíky. Množství a rozměry kolíků jsou dány velikostí samotného jádra. [6]



Obr. 13 Trn pro axiální návin [6]

4.5. Transformace souřadnic

Ke každému výrobku je výrobcem přiložen list s materiálovými charakteristikami. Jak již bylo zmíněno, kompozity jsou anizotropní materiály a materiálové charakteristiky přiložené výrobcem jsou uvedeny pro směr, ve kterém jsou navinuta vlákna. Vzorce v kapitole Teorie vzpěru se však odvozují pro materiálové charakteristiky pro směr zatížení. Proto je nutné materiálové charakteristiky transformovat ze směru vláken do směru zatížení. V případě táhla a testu stability je nutné přetransformovat Youngův modul pružnosti ze směru vláken E_L do směru zatížení, tzn. do osy táhla E_{Lx} o úhel, pod kterým jsou jednotlivá vlákna navíjena.



Obr. 14 Transformace souřadnic

V kapitole **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** je odvozena matice tuhosti **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Dále se zavádí korelační matice **R**, která je definována jako:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Pro matici **R** platí, že:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Pro transformaci souřadnic se zavádí transformační matice ve tvaru:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

Kde

θ je úhel, pod kterým jsou navinuta vlákna kompozitu

Výsledný vzorec pro transformaci matice tuhosti má tvar:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{-1} \quad (43)$$

Transformovaná matice poddajnosti je maticí inverzní k transformované matici tuhosti.

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad (44)$$

Youngův modul pružnosti ve směru zatížení E_{1x} neboli E_{Lx} je převrácená hodnota členu [1,1] v nově vzniklé matici $[\bar{\mathbf{S}}]$. [8]

4.6. Vzpěr táhel z kompozitních materiálů

V kapitole Teorie vzpěru byl odvozen vzorec pro kritickou sílu, který je možné použít pouze u táhel vyrobených z izotropních materiálů. V případě kompozitních materiálů je třeba zavést předpoklady, na základě kterých je možné vzpěr kompozitních materiálů nepočítat jako celek, ale úlohu rozdělit na jednotlivé vrstvy kompozitu – laminy.

4.6.1. Kritická síla

Pro každou laminu bude spočtena kritická síla. Suma těchto kritických sil pro každou laminu bude rovna celkové kritické síle působící na táhlo a průhybová čára jednotlivých vrstev je stejná. Zavedené předpoklady jsou:

- a) uvažuje se táhlo konstantního kruhového průřezu
- b) průhybová čára všech vrstev kompozitního táhla je stejná, to znamená, že celková síla přenášená táhlem rovna součtu sil působících na jednotlivé vrstvy kompozitu
- c) nedochází k delaminaci
- d) při výpočtu se neuvažuje vliv lokálního vyztužení v místě vlepění koncovek

V ideálním případě by každá vrstva přenášela sílu rovnou své kritické síle a celková přenášená síla by byla rovna kritické síle. Pokud by u některé z lamin síla přesáhla kritickou sílu, mohlo, ale nemuselo by dojít k větší únosnosti táhla, ale zároveň by mohlo dojít k porušení některé z lamin. Tento jev je nežádoucí, jelikož nelze nijak zaručit, že by se táhlo nadále chovalo tak, jako se chovalo před porušením zmiňované vrstvy.

Vzorec (33) tak podle výše uvedených předpokladů platí pro každou laminu. Pro táhlo s n laminami tedy platí rovnice:

$$F_{krit} = \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2 E_i J_i}{l^2} \quad (45)$$

Na vzorci pro kritickou sílu (34) je možné vidět, že je závislá na modulu pružnosti E a kvadratickém momentu průřezu J. Délku táhla lze považovat za konstantu. [14]

4.6.2. Kvadratický moment průřezu vrstvy

Jelikož je táhlo vyrobeno z několika různých materiálových vrstev, je nutné pro jednotlivé vrstvy spočítat kvadratický moment průřezu. Jako vstupní hodnoty do výpočtu vstupují tloušťka vrstvy t a vnitřní průměr d.

$$J = \frac{\pi(d + 2t)^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{d + 2t} \right)^4 \right] \quad (46)$$

S rostoucí tloušťkou vrstvy a vnitřním průměrem roste také maximální kritická síla. Nevýhodou je ale to, že roste i celková hmotnost. Proto je třeba tyto dvě hodnoty správně vyvážit optimalizačním algoritmem. V další kapitole bude příklad takového algoritmu popsán.

5. Výpočetní model táhla

Výpočetní model je sestaven pro 3 různá táhla. Při výrobě všech tří táhel byly použity pouze dva druhy materiálu kompozitu, které budou označeny jako materiál 1 a materiál 2 pro zachování firemního tajemství výrobce. Oba materiály jsou tvořeny matricí z epoxidové pryskyřice a výztuží z uhlíkových vláken. Vlastnosti materiálu byly dodány výrobcem a jsou uvedeny v Tab. 3 a Tab. 4.

Vlákn	ρ_f	E_{fL}	E_{fT}	G_f	ν_f
	[kg/m ³]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[1]
Materiál 1	2 120	632 000	5 000	20 000	0,35
Materiál 2	1 800	235 000	15 000	50 000	0,3

Tab. 3 Vlastnosti výztuhy kompozitu

Matrice	ρ_m	E_m	G_m	ν_m
	[kg/m ³]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[1]
epoxid	1 200	4 500	1 600	0,4

Tab. 4 Vlastnosti matrice kompozitu

Pro další výpočet je nutné znát hodnoty hotového kompozitního materiálu. K výpočtům je použit program LamiEx_V3.1 společnosti CompoTech, který po zadání parametrů výztuže a matrice spočítá směšovací pravidlem hodnoty jednotlivých lamin i z nich složeného kompozitního materiálu.

Vlákn	Matrice	V_f	ρ	E_L	E_T	G_{LT}	ν_{LT}
		[%]	[kg/m ³]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[1]
Materiál 1	epoxid	57	1 724	362 175	4 772	3 364	0,372
Materiál 2	epoxid	57	1 542	135 885	7 488	3 570	0,343

Tab. 5 Vlastnosti hotového kompozitního materiálu

Použité vztahy:

- Pro transformaci modulů pružnosti ze směru vláken do směru zatížení budou použity vztahy z kapitoly Transformace souřadnic
- Pro výpočet kvadratického momentu průřezu vrstvy bude použit vztah z kapitoly Kvadratický moment průřezu vrstvy
- Pro výpočet kritické síly bude použit vztah z kapitoly Kritická síla

5.1. Výpočetní model pro dlouhé táhlo výškovky

Pro dlouhé táhlo výškovky byla dána tloušťka vrstev a úhel návinu vláken:

Vlákn	Matrice	t	ϑ
		[mm]	[°]
Materiál 2	epoxid	0,210	87,46
Materiál 1	epoxid	0,802	0
Materiál 2	epoxid	0,149	44,14
Materiál 2	epoxid	0,299	-44,14
Materiál 2	epoxid	0,149	44,14

Tab. 6 Skladba kompozitu

Hodnoty délky táhla, vnitřního průměru a celkové tloušťky stěny jsou uvedeny ve specifikačním listu dodaném výrobcem:

l [mm]	2 200
d_{in} [mm]	28
t_{celk} [mm]	1,6

Tab. 7 Charakteristické rozměry táhla

Hodnoty modulů pružnosti je nutné na základě úhlů jednotlivých vrstev přepočítat ze směru vláken do směru zatížení uvedeném v kapitole Transformace souřadnic:

Vrstva	E_L	E_{Lx}
	[N/mm ²]	[N/mm ²]
1	135 885	7 487
2	362 175	362 175
3	135 885	9 797
4	135 885	9 797
5	135 885	9 797

Tab. 8 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení

Pro jednotlivé vrstvy je vypočten kvadratický moment průřezu z její tloušťky a jejího vnitřního průměru:

Vrstva	t	d	J
	[mm]	[mm]	[mm ⁴]
1	0,210	28	1 851,45
2	0,802	28,42	7 864,86
3	0,149	30,02	1 610,09
4	0,299	30,32	3 365,91
5	0,149	30,92	1 757,74

Tab. 9 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev

Nyní je již možné spočítat výslednou kritickou sílu pro jednotlivé vrstvy. Pro první vrstvu platí vzorec z kapitoly Kritická síla:

$$F_{1krit} = \frac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot J_1}{l^2} \quad (47)$$

Po dosazení:

$$F_{1krit} = \frac{\pi^2 \cdot 7487 \cdot 1851,45}{2200^2} \quad (48)$$

$$F_{1krit} \doteq 28 \text{ N}$$

Vrstva	l	t	d	E_{LX}	J	F_{krit}
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[mm ⁴]	[N]
1	2 200	0,210	28,00	7 487	1 851,45	28
2	2 200	0,802	28,42	362 175	7 864,86	5 808
3	2 200	0,149	30,02	9 797	1 610,09	32
4	2 200	0,299	30,32	9 797	3 365,91	67
5	2 200	0,149	30,92	9 797	1 757,74	35

Tab. 10 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy

Výsledná kritická síla je pak rovna součtu kritických sil, které přenáší jednotlivé vrstvy:

$$F_{krit} = 5\,971\, N$$

Hmotnost táhla je dodána výrobcem ve specifikačním listu a je:

$$m = 0,56\, kg$$

5.2. Výpočetní model pro krátké táhlo výškovky

Pro krátké táhlo výškovky byla dána tloušťka vrstev a úhel návinnu vláken:

Vláknó	Matrice	t	ϑ
		[mm]	[°]
Materiál 2	epoxid	0,209	85,57
Materiál 1	epoxid	1,563	0
Materiál 2	epoxid	0,176	22,95
Materiál 2	epoxid	0,352	-22,95
Materiál 2	epoxid	0,176	22,95

Tab. 11 Skladba kompozitu

Hodnoty délky táhla, vnitřního průměru a celkové tloušťky stěny jsou uvedeny ve specifikačním listu dodaném výrobcem:

l [mm]	1 320
d_{in} [mm]	16
t_{celk} [mm]	2,5

Tab. 12 Charakteristické rozměry táhla

Hodnoty modulů pružnosti je nutné na základě úhlů jednotlivých vrstev přepočítat ze směru vláken do směru zatížení:

Vrstva	E_L	E_{Lx}
	[N/mm ²]	[N/mm ²]
1	135 885	7 486
2	362 175	362 175
3	135 885	22 281
4	135 885	22 281
5	135 885	22 281

Tab. 13 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení

Pro jednotlivé vrstvy je vypočten kvadratický moment průřezu z její tloušťky a jejího vnitřního průměru:

Vrstva	t	d	J
	[mm]	[mm]	[mm ⁴]
1	0,209	16,00	349,58
2	1,563	16,42	3 595,25
3	0,176	19,54	530,06
4	0,352	19,89	1 147,84
5	0,176	20,60	619,85

Tab. 14 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev

Nyní je již možné spočítat výslednou kritickou sílu pro jednotlivé vrstvy:

Vrstva	l	t	d	E_{LX}	J	F_{krit}
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[mm ⁴]	[N]
1	1 320	0,209	16,00	7 486	349,58	15
2	1 320	1,563	16,42	362 175	3 595,25	7 376
3	1 320	0,176	19,54	22 281	530,06	67
4	1 320	0,352	19,89	22 281	1 147,84	145
5	1 320	0,176	20,60	22 281	619,85	78

Tab. 15 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy

Výsledná kritická síla je pak rovna součtu kritických sil, které přenáší jednotlivé vrstvy:

$$F_{krit} = 7\,680\,N$$

Hmotnost táhla je dodána výrobcem ve specifikačním listu a je:

$$m = 0,30\,kg$$

5.3. Výpočetní model pro táhlo křídélka

Pro táhlo křídélka byla dána tloušťka vrstev a úhel návinu vláken:

Vláknó	Matrice	t	ϑ
		[mm]	[°]
Materiál 2	epoxid	0,210	87,46
Materiál 1	epoxid	0,645	0
Materiál 2	epoxid	0,142	40,31
Materiál 2	epoxid	0,284	-40,31
Materiál 2	epoxid	0,142	40,31

Tab. 16 Skladba kompozitu

Hodnoty délky táhla, vnitřního průměru a celkové tloušťky stěny jsou uvedeny ve specifikačním listu dodaném výrobcem:

l [mm]	2 620
d_{in} [mm]	28
t_{celk} [mm]	1,4

Tab. 17 Charakteristické rozměry táhla

Hodnoty modulů pružnosti je nutné na základě úhlů jednotlivých vrstev přepočítat ze směru vláken do směru zatížení:

Vrstva	E_L	E_{Lx}
	[N/mm ²]	[N/mm ²]
1	135 885	7 487
2	362 175	362 175
3	135 885	10 774
4	135 885	10 774
5	135 885	10 774

Tab. 18 Transformace modulů pružnosti do směru zatížení

Pro jednotlivé vrstvy je vypočten kvadratický moment průřezu z její tloušťky a jejího vnitřního průměru:

Vrstva	t	d	J
	[mm]	[mm]	[mm ⁴]
1	0,210	28,00	1851,45
2	0,645	28,42	6222,20
3	0,142	29,71	1483,47
4	0,284	29,99	3095,97
5	0,142	30,56	1614,14

Tab. 19 Kvadratický moment průřezu jednotlivých vrstev

Nyní je již možné spočítat výslednou kritickou sílu pro jednotlivé vrstvy:

Vrstva	l	t	d	E_{LX}	J	F_{krit}
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[mm ⁴]	[N]
1	2 620	0,210	28,00	7 487	1851,45	20
2	2 620	0,645	28,42	362 175	6222,20	3 240
3	2 620	0,142	29,71	10 774	1483,47	23
4	2 620	0,284	29,99	10 774	3095,97	48
5	2 620	0,142	30,56	10 774	1614,14	25

Tab. 20 Kritická síla pro jednotlivé vrstvy

Výsledná kritická síla je pak rovna součtu kritických sil, které přenáší jednotlivé vrstvy:

$$F_{krit} = 3\,356\,N$$

Hmotnost táhla je dodána výrobcem ve specifikačním listu a je:

$$m = 0,54\,kg$$

5.4. Shrnutí výsledků

Výsledky výpočtu kritických sil pro analyzovaná táhla jsou uvedeny v Tab. 21:

typ táhla	F_{krit}	m
	[N]	[kg]
Dlouhé táhlo výškovky	5 609	0,56
Krátké táhlo výškovky	7 680	0,30
Táhlo křídélka	3 356	0,54

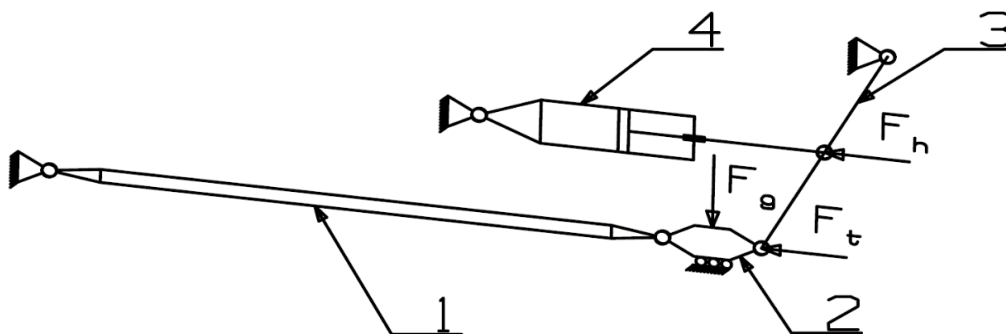
Tab. 21 Shrnutí výsledků

6. Experimentální ověření výpočetního modelu táhla

Pro ověření výpočtového modelu byla použita data z již provedeného experimentu [15], ze kterých byla zjištěna kritická síla dlouhého táhla výškovky. Pro experiment byly dodány dva kusy táhel, kde první táhlo bylo nové (vzorek 1) a druhé bylo již 500 hodin v provozu v letounu (vzorek 2).

6.1. Průběh zkoušky

Zkušební vzorek byl upnut do navrženého zkušebního přípravku umožňujícího simulovat zatížení táhla v letounu (Obr. 15). Ve zkušebním přípravku byl pomocí pákového mechanismu (3) převáděn pohyb hydromotoru (4) na zatížení zkušebního táhla (1). Pro zajištění bezztrátového pohybu a nižšího namáhání byla páka (3) v místě upnutí táhla podepřena lineárním vedením (2).



Obr. 15 Schéma zkoušky [15]

Z definice stability (kapitola Ztráta vzpěrné stability) vychází, že pokud by táhlo mělo být zkoušeno na tuto vzpěrnou stabilitu, muselo by být táhlo vždy v několik předem určených hodnotách osového zatížení mírně vybočeno příčnou silou. Pokud by bylo táhlo ve stabilní poloze, po uvolnění příčné síly se táhlo vrátí zpět do stavu před vybočením. Jelikož byly dodána pouze dvě táhla, není možné tento experiment provést, jelikož by výsledky experimentu ovlivňovala únava materiálu. Proto byl bod ztráty stability stanoven v místě, kde zatěžující síla dosáhla svého maxima.

6.2. Měřená data

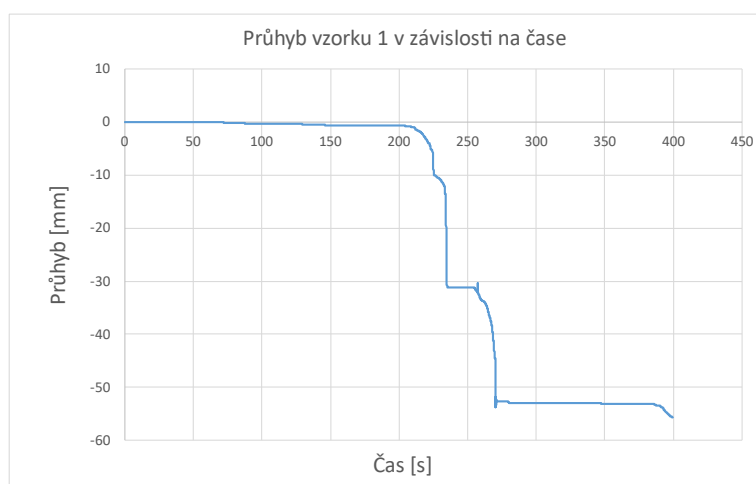
Během zkoušky byla měřena zatěžující síla siloměrem o rozsahu 50 kN a průhyb táhla ve dvou navzájem kolmých rovinách. Lankový snímač průhybu byl umístěn v polovině délky táhla.

6.2.1. Měření vzorku 1

Pro vzorek 1 byly naměřeny hodnoty zatěžující síly v čase a hodnoty průhybu v čase.



Obr. 16 Průběh zatěžující síly



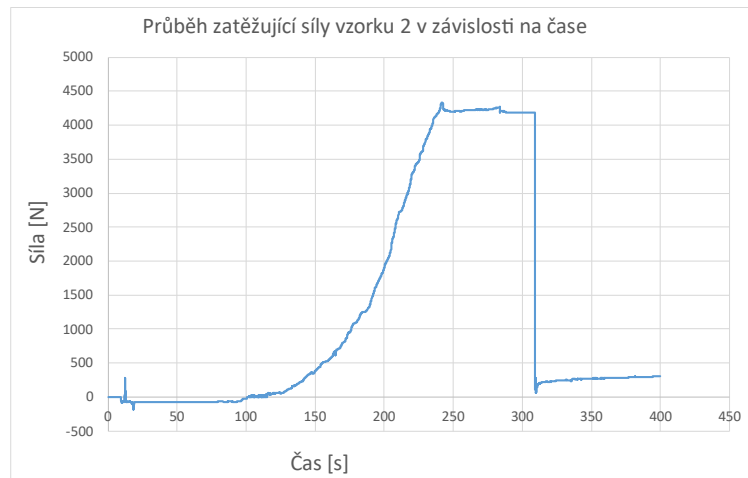
Obr. 17 Průběh průhybu táhla

6.2.2. Výsledky měření vzorku 1

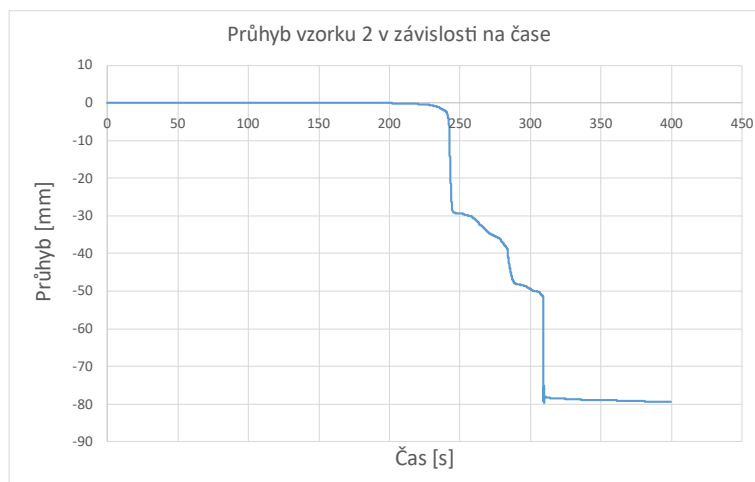
Ztráta stability nastala při síle $F_{krit} = 5\,081\text{ N}$ a průhybu 12,5 mm.

6.2.3. Měření vzorku 2

Pro vzorek 2 byly naměřeny hodnoty zatěžující síly v čase a hodnoty průhybu v čase.



Obr. 18 Průběh zatěžující síly



Obr. 19 Průběh průhybu táhla

6.2.4. Výsledky měření vzorku 2

Ztráta stability nastala při síle $F_{krit} = 4\,328\text{ N}$ a průhybu 4 mm.

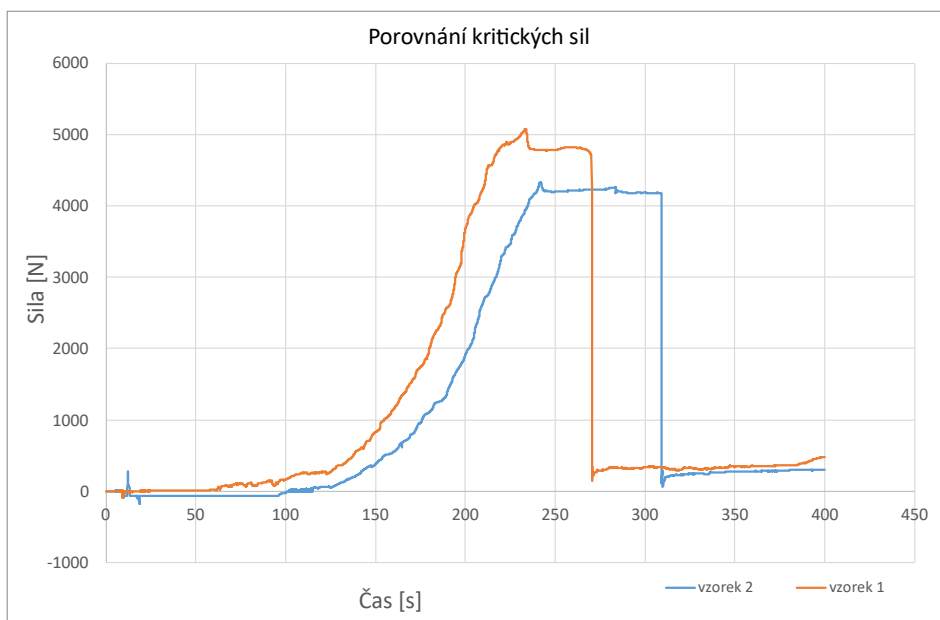
6.3. Shrnutí výsledků experimentu

Pro táhla byly naměřeny hodnoty uvedené v Tab. 22.

typ táhla	kritická síla [N]	Průhyb [mm]
Vzorek 1	5 081	12,5
Vzorek 2	4 328	4

Tab. 22 Výsledky experimentu

Z výsledku vyplývá, že vzorek 1 má vyšší kritickou sílu než vzorek 2. Důvodem může být výrobní rozptyl nebo ztráta své odolnosti vůči vzpěru v provozu. Při návrhu táhla je s touto skutečností potřeba počítat. Pro zjištění přesnějších výsledků týkajících se této problematiky by musel být proveden experiment na únavu materiálu v provozních podmínkách. Porovnání výsledků lze vidět na Obr. 20.



Obr. 20 Porovnání výsledků experimentu

7. Optimalizace táhla

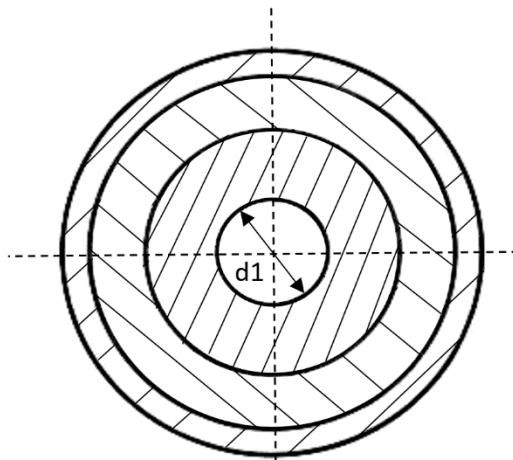
Cílem optimalizace je najít takové táhlo, které vyhovuje požadavku na kritickou sílu a zároveň požadavku na co nejmenší hmotnost. Před samotným vytvořením programu je třeba určit všechny proměnné vstupující do programu a kritéria, na základě kterých se vybírá optimální řešení.

7.1. Vstupy

Táhlo bude optimalizováno pouze z geometrického hlediska. Materiálové charakteristiky pro každou vrstvu a délka táhla budou v optimalizaci pouze konstanty. Optimalizací je snaha zachovat funkčnost, pouze snížit výslednou hmotnost táhla.

7.1.1. Vnitřní průměr táhla

Průměr táhla vstupuje do výpočtu ve vzorci pro kvadratický moment průřezu vrstvy. Do optimalizace vstupuje vnitřní průměr (Obr. 21), jeho minimální a maximální hodnota a v rozmezí těchto hodnot je kritická síla počítána.



Obr. 21 Vnitřní průměr táhla

Pro výpočet bude použit krok, který se v průběhu algoritmu bude zmenšovat, dokud nedosáhne zvolené hodnoty minima. Ta je dána:

- Sériovostí výroby táhla a sortimentu výrobce
- Výkonem výpočtového softwaru

Výrobce má několik rozměrů trubek, které má ve své nabídce. Pokud je výroba táhla kusová, je lepší volit minimální hodnotu kroku tak, aby jednotlivé rozměry vyhovovaly sortimentu výrobce a cena na jedno táhlo nebyla příliš veliká. V sériové výrobě může přesnější rozměr vnitřního průměru a s tím spojená i výroba nového trnu se specifickým rozměrem výslednou cenu snížit.

7.1.2. Tloušťka vrstvy a počet vrstev

Jak už bylo zmíněno v kapitole Navíjené kompozity, při výrobě obecně kompozitových trubek jsou impregnované pramence vláken postupně navíjeny na trn. Jedna vrstva pramenců je rovna tloušťce jedné vrstvy, z čehož vyplývá, že není možné ovlivnit tloušťku jedné vrstvy, ale pouze počet vrstev.

7.1.3. Úhel navíjení

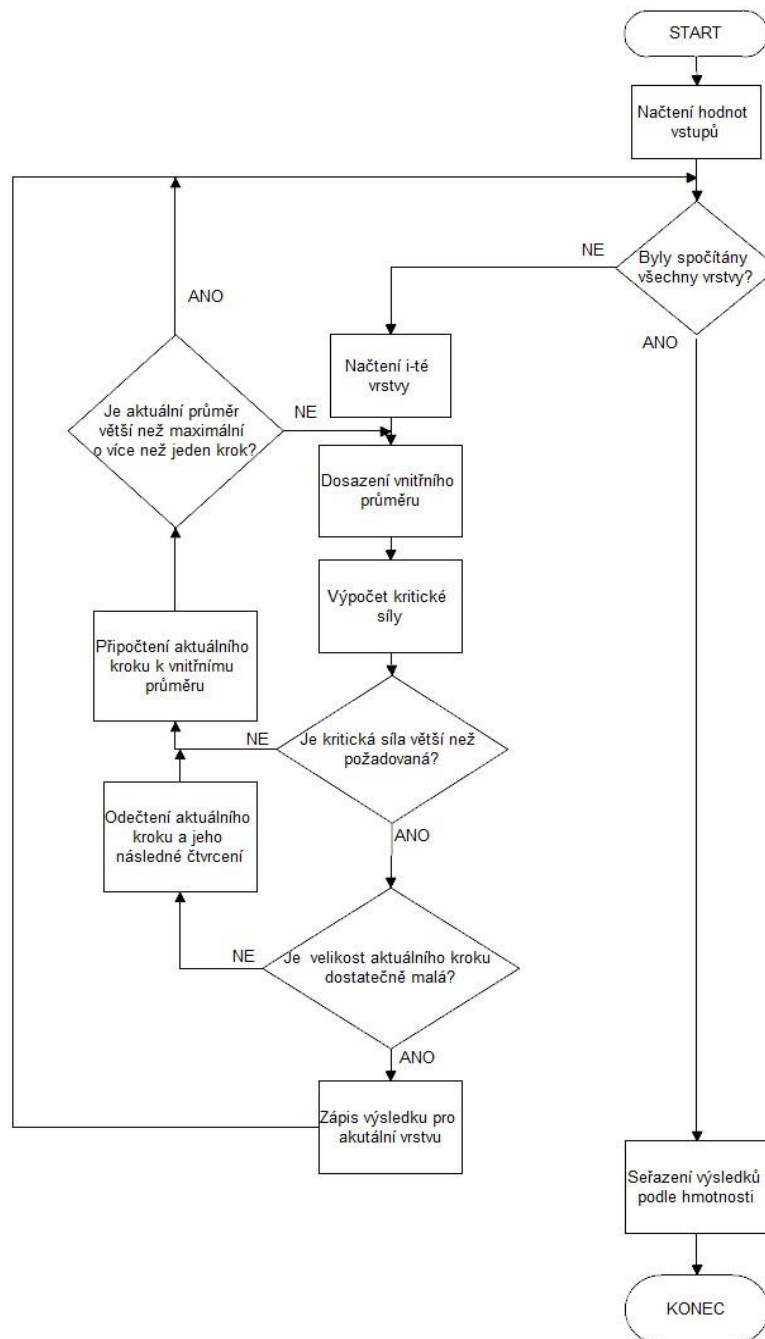
Úhel, pod kterým jsou vlákna navíjena, ovlivňuje výsledný modul pružnosti ve směru zatížení, jak bylo odvozeno v kapitole Transformace souřadnic. Z hlediska optimalizace táhel na vzpěr se úhel navíjení neoptimalizuje. Vzpěrná únosnost táhla je závislá na modulu pružnosti. Pro maximální pevnost ve vzpěru je nutný i maximální modul pružnosti, který je ve směru vlákna. Výpočet by pak zkonvergoval do vrstev s orientací ve směru osy táhla a nerespektoval by technologické možnosti.

Pro správnou funkčnost kompozitového táhla, se ale používají i vrstvy s jiným než nulovým úhlem navíjení. Vnitřní vrstva (s minimálním vnitřním průměrem) je navíjena pod úhlem blízkým k 90° . Tato vrstva se nazývá radiální a slouží k jednoduchému sejmutí z navíjecího trnu a ke zpevnění stěny vůči vnitřnímu přetlaku.

Dále je nutné si uvědomit, že na táhlo nepůsobí pouze osová síla, jelikož jej technologicky není možné vyrobít dokonalé přímé. Mírné vybočení táhla a jeho vlastní hmotnost způsobují, že na něj působí i ohybové zatížení. Proto se na vnější průměr táhla navíjí vrstvy pod úhlem v okolí $+45^\circ$ a -45° . Tyto vrstvy se nazývají křížové a slouží ke zpevnění táhla vůči ohybovému zatížení.

7.2. Vývojový diagram

Pro optimalizaci táhla byl vytvořen optimalizační algoritmus v grafickém programovacím prostředí softwaru LabVIEW. Algoritmus je popsán následujícím vývojovým diagramem:



Obr. 22 Vývojový diagram optimalizace

V uživatelském rozhraní je nejdříve nutné vyplnit všechny hodnoty vstupující do optimalizačního algoritmu a určit skladbu materiálu stejně jako je na Obr. 23.

Vyplnit vstupy

dmin [mm]
 dmax [mm]
 delka [mm]
 početni zatizeni tahla [N]
 Krok [mm]

Minimální krok [mm]

Skladba materiálu

Název materiálu	E v axialnim směru [MPa]	Tloustka vrstvy [mm]	Hustota [kg/m ³]
material 2	7485	0,21	1542
material 1	362175	0,4	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724
material 1	362175	0,2	1724

Vnější vrstvy

E v axialnim smeru [Mpa]
 Tloustka vrstvy [mm]
 Hustota [kg/m³]

Obr. 23 Uživatelské rozhraní optimalizačního programu

Program načte první vrstvu s minimálním průměrem a vypočte její kritickou sílu. Pokud je výsledná kritická síla menší než početní zatížení, k vnitřnímu průměru se připočte jeden krok. Program přičítá krok průměru dokud

- a) je vnitřní průměr menší než maximální vnitřní průměr zvětšený o jeden aktuální krok
- b) je kritická síla větší než početní zatížení
- c) je aktuální krok je větší než minimální krok

Poté co k těmto možnostem dojde program učiní následující akci:

a) Po překročení maximálního vnitřního průměru program načte další vrstvu a počítá znovu.

b) Pokud je kritická síla větší než početní zatížení, aktuální krok se od průměru odečte a vydělí se 4. Program spočítal, že optimální řešení je v rozmezí poslední hodnoty, pro kterou kritická síla nevyhovovala a stejné hodnoty zvětšené o jeden aktuální krok, pro kterou už byla hodnota kritické síly dostatečná. Program začíná přičítat aktuální krok roven čtvrtině původního kroku k minimálnímu průměru v tomto novém rozmezí optimálního řešení. Nyní už je jasné, že případ a) nastat nemůže, jelikož se optimální řešení nachází v rozmezí původního minimálního a maximálního vnitřního průměru. Opakuje se tedy případ b).

c) Krok se čtvrtí tak dlouho, dokud nedosáhne hodnoty menší než minimální krok (případ c), který je určen ve vstupech. Tento minimální krok určuje, s jakou přesností je optimalizován vnitřní průměr. Jakmile je optimální vnitřní průměr nalezen, program zapíše kritickou sílu, hmotnost, vnitřní průměr, počet vrstev, vnější průměr táhla s tímto průměrem a počtem vrstev. Program optimalizuje rozměry táhel pro všechny vrstvy, které jsou zadané ve vstupech. Všechny táhla, která v daném rozmezí minimálního a maximálního vnitřního průměru měla optimální řešení program seřadí dle hmotnosti do tabulky.

7.3. Optimalizace pro dlouhé táhlo výškovky

Pro dlouhé táhlo výškovky byla provedena optimalizace se snahou najít táhlo vyhovující požadavku kritické síly a s minimální hmotností.

7.3.1. Zadání optimalizace

Vnitřní průměr: Pro optimalizaci bude uvažována výroba nového trnu s požadovaným průměrem odpovídajícím minimálnímu vnitřnímu průměru táhla a bude volen jako $d_{\min} = 10$ mm. Maximální průměr je volen dle zástavbového prostoru pro dané táhlo tak, aby vnější průměr táhla nepřesáhl požadovaných $d_{\text{out}} = 31,2$ mm.

Krok vnitřního průměru: Dle možností výrobce je nejmenší možný krok roven 0,2 mm. Krok je dán minimální tloušťkou vrstvy, kterou je výrobce schopen navinout. Počáteční krok je volen 12,8 mm.

Počet vrstev: Materiál 1 je použit na axiální vrstvy. Materiál 2 je použit na radiální a křížové vrstvy. Maximální počet vrstev je volen tak, aby výsledná tloušťka materiálu 1 nepřesáhla 2 mm. Vzhledem k možnostem výrobce má první axiální vrstva tloušťku $t_1 = 0,4$ mm a ostatní mají tloušťku $t_i = 0,2$ mm.

Fixní vrstvy: Optimalizační program optimalizuje pouze charakteristiky axiální vrstvy. Tloušťka vnitřní radiální vrstvy je $t_{in} = 0,210$ mm a tloušťka vnější křížové vrstvy je $t_{out} = 0,597$ mm.

Úhel: Úhel je dán výrobcem. Pro vnitřní radiální vrstvu je úhel roven $87,46^\circ$. Axiální vrstva je navinuta pod úhlem 0° . Křížová vrstva je navinuta pod úhlem $+44,14^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}), poté pod úhlem $-44,14^\circ$ ($1/2$ z tloušťky t_{out}) a poslední pod úhlem opět $+44,14^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}).

Početní zatížení táhla: Dle kapitoly UL 2 § 337 Provozní násobky obrátů je $F = 1\,536$ N.

Délka táhla: Dle konstrukce letadla je délka rovna $l = 2\,200$ mm.

7.3.2. Výsledky optimalizace

Výsledkem optimalizace jsou táhla, kde je pro každý počet axiálních vrstev určena kritická síla, hmotnost, vnitřní a vnější průměr a napětí působící na axiální vrstvu.

kritická síla [F]	hmotnost [kg]	vnitřní průměr táhla [mm]	počet vrstev materiálu 1 s 0°	vnější průměr táhla [mm]	napětí vrstev materiálu 1 [N/mm ²]
1 614,4	0,321	22,8	1	25,2	51,5
1 585,4	0,331	19,6	2	22,4	39,3
1 698,9	0,355	18,0	3	21,2	34,2
1 686,4	0,373	16,4	4	20,0	29,4
1 581,6	0,384	14,8	5	18,8	25,0
1 650,3	0,409	14,0	6	18,4	23,3
1 681,9	0,431	13,2	7	18,0	21,6
1 681,7	0,450	12,4	8	17,6	20,0
1 654,6	0,466	11,6	9	17,2	18,5

Tab. 23 Výsledky optimalizace pro táhlo výškovky dlouhé

Výsledky z výpočtu dodaného táhla byly

$$F_{krit} = 5\,971\,N$$

$$m = 0,56\,kg$$

7.4. Optimalizace pro krátké táhlo výškovky

Pro krátké táhlo výškovky byla provedena optimalizace se snahou najít táhlo vyhovující požadavku kritické síly a s minimální hmotností.

7.4.1. Zadání optimalizace

Vnitřní průměr: Pro optimalizaci bude uvažována výroba nového trnu s požadovaným průměrem rovném minimálnímu vnitřnímu průměru táhla a bude volen jako $d_{\min} = 10$ mm. Maximální průměr je volen dle zástavbového prostoru pro dané táhlo tak, aby vnější průměr táhla nepřesáhl požadovaných $d_{\text{out}} = 21$ mm.

Krok vnitřního průměru: Dle možností výrobce je nejmenší možný krok roven 0,2 mm. Krok je dán minimální tloušťkou vrstvy, kterou je výrobce schopen navinout. Počáteční krok je volen 12,8 mm.

Počet vrstev: Materiál 1 je použit na axiální vrstvy. Materiál 2 je použit na radiální a křížové vrstvy. Maximální počet vrstev je volen tak, aby výsledná tloušťka materiálu 1 nepřesáhla 2 mm.

Fixní vrstvy: Optimalizační program optimalizuje pouze charakteristiky axiální vrstvy. Tloušťka vnitřní radiální vrstvy je $t_{\text{in}} = 0,209$ mm a tloušťka vnější křížové vrstvy je $t_{\text{out}} = 0,704$ mm.

Úhel: Úhel je dán výrobcem. Pro vnitřní radiální vrstvu je úhel roven $85,57^\circ$. Axiální vrstva je navinuta pod úhlem 0° . Křížová vrstva je navinuta pod úhlem $+22,95^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}), poté pod úhlem $-22,95^\circ$ ($1/2$ z tloušťky t_{out}) a poslední pod úhlem opět $+22,95^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}).

Početní zatížení táhla: Dle kapitoly UL 2 § 337 Provozní násobky obrátů je $F = 744$ N.

Délka táhla: Dle konstrukce letadla je délka rovna $l = 1\,320$ mm.

7.4.2. Výsledky optimalizace

Výsledkem optimalizace jsou táhla, kde je pro každý počet axiálních vrstev určena kritická síla, hmotnost, vnitřní a vnější průměr a napětí působící na axiální vrstvu.

kritická síla [F]	hmotnost [kg]	vnitřní průměr táhla [mm]	počet vrstev materiálu 1 s 0°	vnější průměr táhla [mm]	napětí vrstev materiálu1 [N/mm ²]
857,5	0,119	12,4	1	15,0	44,9
885,9	0,125	10,8	2	13,8	35,9
992,5	0,135	10	3	13,4	32,4
1293,8	0,154	10	4	13,8	33,7
1625,3	0,174	10	5	14,2	35,0
1989,1	0,195	10	6	14,6	36,3
2387,1	0,216	10	7	15,0	37,7
2821,6	0,237	10	8	15,4	39,1
3294,5	0,259	10	9	15,8	40,6

Tab. 24 Výsledky optimalizace pro táhlo výškovky krátké

Výsledky z výpočtu dodaného táhla byly

$$F_{krit} = 7\,680\,N$$

$$m = 0,30\,kg$$

7.5. Optimalizace pro táhlo křídélka

Pro táhlo křídélka byla provedena optimalizace se snahou najít táhlo vyhovující požadavku kritické síly a s minimální hmotností.

7.5.1. Zadání optimalizace

Vnitřní průměr: Pro optimalizaci bude uvažována výroba nového trnu s požadovaným průměrem rovném minimálnímu vnitřnímu průměru táhla a bude volen jako $d_{min} = 10\,mm$. Maximální průměr je volen dle zástavbového prostoru pro dané táhlo tak, aby vnější průměr táhla nepřesáhl požadovaných $d_{out} = 30,8\,mm$.

Krok vnitřního průměru: Dle možností výrobce je nejmenší možný krok roven $0,2\,mm$. Krok je dán minimální tloušťkou vrstvy, kterou je výrobce schopen navinout. Počáteční krok je volen $12,8\,mm$.

Počet vrstev: Materiál 1 je použit na axiální vrstvy. Materiál 2 je použit na radiální a křížové vrstvy. Maximální počet vrstev je volen tak, aby výsledná tloušťka materiálu 1 nepřesáhla 2 mm.

Fixní vrstvy: Optimalizační program optimalizuje pouze charakteristiky axiální vrstvy. Tloušťka vnitřní radiální vrstvy je $t_{in} = 0,210$ mm a tloušťka vnější křížové vrstvy je $t_{out} = 0,568$ mm.

Úhel: Úhel je dán výrobcem. Pro vnitřní radiální vrstvu je úhel roven $87,46^\circ$. Axiální vrstva je navinuta pod úhlem 0° . Křížová vrstva je navinuta pod úhlem $+40,31^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}), poté pod úhlem $-40,31^\circ$ ($1/2$ z tloušťky t_{out}) a poslední pod úhlem opět $+40,31^\circ$ ($1/4$ z tloušťky t_{out}).

Početní zatížení táhla: Dle kapitoly UL 2 § 337 Provozní násobky obrátů je $F = 1\,623$ N.

Délka táhla: Dle konstrukce letadla je délka rovna $l = 2\,620$ mm.

7.5.2. Výsledky optimalizace

Výsledkem optimalizace jsou táhla, kde je pro každý počet axiálních vrstev určena kritická síla, hmotnost, vnitřní a vnější průměr a napětí působící na axiální vrstvu.

kritická síla [F]	hmotnost [kg]	vnitřní průměr táhla [mm]	počet vrstev materiálu 1 s 0°	vnější průměr táhla [mm]	napětí vrstev materiálu 1 [N/mm ²]
1668,2	0,422	26,0	1	28,4	46,8
1723,9	0,444	22,8	2	25,6	37,0
1705,1	0,466	20,4	3	23,6	30,5
1736,4	0,495	18,8	4	22,4	26,7
1677,1	0,515	17,2	5	21,2	23,1
1774,2	0,552	16,4	6	20,8	21,7
1834,8	0,585	15,6	7	20,4	20,4
1863,2	0,615	14,8	8	20,0	19,1
1863,6	0,641	14,0	9	19,6	17,8

Tab. 25 Výsledky optimalizace pro táhlo křídélka

Výsledky z výpočtu dodaného táhla byly

$$F_{krit} = 3\,356\,N$$

$$m = 0,54\,kg$$

7.6. Závěr optimalizace

Z tabulek výsledků optimalizace je možné vybrat táhla, která vyhovují požadavkům přenesení početního zatížení a minimální hmotnosti. V kapitole Výpočetní model táhla jsou charakteristiky pro jednotlivá táhla, která byla vyrobena. Hmotnost optimalizovaných táhel v tabulkách je v porovnání s výsledky z výpočtů ve většině případů menší. Poté už je jenom třeba zvážit, jestli by se vzhledem k sériovosti vyráběných táhel vyplatil nákup nových navíjecích trnů se specifickým průměrem.

8. Závěr

V první části diplomové práce bylo nutné seznámit se s předpisy pro letouny, mechanikou kompozitních materiálu a s teorií vzpěrné stability. Dle předpisů konstruktér vypočítá početní zatížení, které táhlo musí přenést. Z mechaniky kompozitních materiálu byly odvozeny charakteristiky, jejichž hodnoty byly dodány výrobcem a následně transformovány, aby mohly být použity v odvozených vzorcích z teorie vzpěrné stability.

Pro tři dodaná táhla byly sestaveny výpočetní modely pro výpočet kritické síly. Výsledky jednotlivých táhel jsou:

typ táhla	F_{krit}	m
	[N]	[kg]
Dlouhé táhlo výškovky	5 609	0,56
Krátké táhlo výškovky	7 680	0,30
Táhlo křídélka	3 356	0,54

Tab. 26 Shrnutí výsledků

Výsledky ze sestavených výpočetních modelů byly porovnány s již provedeným experiment [15] pro dlouhé táhlo výškovky. Experiment byl proveden u nového táhla a u táhla provozovaného 500 hodin v ultralehkém letounu.

typ táhla	kritická síla [N]
Nové táhlo	5 081
Provozované táhlo	4 328

Tab. 27 Výsledky experimentu

Výsledná kritická síla získaná z experimentu je oproti vypočtené síle o 9,5 % menší. Důvodem nepřesnosti je určení bodu stability při experimentu, kterého bylo dosaženo, když hodnota kritické síly dosáhla maxima. Tento bod není shodný s bodem vycházejícím z teorie vzpěru, jelikož by pro tento teoretický bod (vysvětlen v kapitole Ztráta vzpěrné stability) nebylo možné provést experiment. Dalším důvodem můžou být předpoklady dokonalé geometrie ve výpočetním modelu. U vyrobených táhel je možné vybočení od osy menší než 1 mm, které negativně ovlivňuje výslednou experimentální kritickou sílu. Jelikož byla táhla během

experimentu orientována vodorovně, byla ovlivňována také svou hmotností, která způsobí další prohnutí táhla.

Vypočtené hodnoty kritických sil dodaných táhel byly několikanásobně větší než požadované početní zatížení. Proto byl sestaven optimalizační program pro výpočet geometrie táhla. Hodnoty kritických sil z optimalizace pro jednotlivá táhla byly téměř shodné s požadovanými početními zatíženími, které je u táhel nutné přenést, a táhla měla tudíž i podstatně menší hmotnost než táhla dodaná. Vzhledem k výsledkům experimentu je vidět, že oproti výpočetnímu modelu mají experimentálně zkoušená táhla menší kritickou sílu. Optimalizovaná táhla se svou kritickou silou velice blíží početnímu zatížení. Proto by vyrobená táhla mohla mít reálnou kritickou sílu menší než početní zatížení. Při optimalizaci je třeba s tím počítat a pokud by experimentálně zjištěná kritická síla optimalizovaných táhel měla nedostatečnou velikost, je nutné po minimalizaci všech nejistot technologie výroby a materiálových charakteristik daného kompozitu, při výpočtu početního zatížení dle předpisů použít další zvyšující součinitel, který by zohlednil rozptyl výroby.

9. Zdroje

- [1] Moir, I. and Seabridge, A., 2011. Aircraft Systems. John Wiley & Sons.
- [2] YOO, Chai H.; LEE, Sung C. Stability of Structures - Principles and Applications [online]. Elsevier, 2011 [cit. 2020-03-29]. isbn 978-0-12-385122-2.
- [3] [online]. Copyright ©U5 [cit. 26.05.2021]. Dostupné z: http://www.laacr.cz/SiteCollectionDocuments/predpisy/UL2%20%C4%8D%C3%A1st%20VI_26.3.2019.pdf
- [4] LAŠ, Vladislav: Mechanika kompozitních materiálů. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004, 156 s. ISBN 80-704-3273-X.
- [5] Zhao, Y., Jiang, X., Zhang, Q., & Qiang, X. (2019). Simplified Material Solution for Orthotropic Symmetrical GFRP Laminates for Structural Facades. Advances in Civil Engineering, 2019, 1–15. <https://doi.org/10.1155/2019/1407383>
- [6] Bc. Peter Bednár. Návrh upravené technologie navíjení kompozitních trubek. Brno, 2016
- [7] [online]. Copyright © [cit. 07.04.2021]. Dostupné z: http://umi.fs.cvut.cz/wp-content/uploads/2014/08/6_kompozitni-materialy.pdf
- [8] Lamina Coordinate Transformation for Arbitrary Orientation. [online]. Copyright © 1999 [cit. 07.04.2021]. Dostupné z: https://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/composites/comp_lamina_arbitrary.cfm
- [9] H.W.Wang, H.W.Zhou, L.L.Gui, H.W.Ji, X.C.Zhanga, Analysis of effect of fiber orientation on Young's modulus for unidirectional fiber reinforced composites. Composites Part B: Engineering. Volume 56, January 2014, Pages 733-739
- [10] [online]. Copyright ©k [cit. 20.05.2021]. Dostupné z: <http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Stabilita.pdf>
- [11] [online]. Copyright ©MA [cit. 26.05.2021]. Dostupné z: http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/prezentace/vzper_vzper_ohyb.pdf
- [12] SOKOL, Filip. Vývoj palubních soustav dopravních letadel. Brno, 2012
- [13] Parametry letadla – Letadlo VL3 Evolution. Letadlo VL3 Evolution – Nejmodernější UL letadlo současnosti [online]. Dostupné z: https://vl3.cz/parametry_letadla/

[14] JEŘÁBEK, Ivan. Composite Rod Optimization Calculation. Czech aerospace proceedings. 2008; **3** s. (35-36)

[15] JEŘÁBEK, Ivan. KOSTROUN, Tomáš. PEVNOSTNÍ ZKOUŠKA TÁHEL. TZP/CLKV/xx/yy. 18.12.2009.

[16] Notace napětí 2. Základní pojmy a vztahy Symetrie tenzoru, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav mechaniky. [cit.14.6.2020] Dostupné z: <https://slideplayer.cz/slide/2380372/>