



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ

RADIM DVOŘÁK

POKROČILÉ NUMERICKÉ METODY PRO  
MODELOVÁNÍ EXPERIMENTŮ  
REALIZOVANÝCH POMOCÍ DĚLENÉ  
HOPKINSONOVY TYČE A JEJICH  
IMPLEMENTACE A VERIFIKACE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2021

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Dvořák** Jméno: **Radim** Osobní číslo: **460262**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Pokročilé numerické metody pro modelování experimentů realizovaných pomocí dělené Hopkinsonovy tyče a jejich implementace a verifikace.**

Název diplomové práce anglicky:

**Advanced numerical methods for modeling split Hopkinson pressure bar experiments and their implementation and verification.**

Pokyny pro vypracování:

Navrhněte a implementujte vhodné numerické metody pro modelování experimentů realizovaných pomocí dělené Hopkinsonovy tyče. Při tom se řiďte podle následujících bodů:

- 1) Rešerše aktuálního stavu numerických metod v problematice šíření elastických vln
- 2) Implementace řešiče s globálním časovým krokem
- 3) Vývoj a implementace heterogenního řešiče s uvažováním doménové dekompozice
- 4) Vývoj a implementace asynchronního řešiče s uvažováním doménové dekompozice
- 5) Verifikace výsledků dostupnými numerickými testy a experimentálními daty.

Seznam doporučené literatury:

- [1] CHO, S.S., R. KOLMAN, J.A. GONZÁLEZ a K.C. PARK. Explicit multistep time integration for discontinuous elastic stress wave propagation in heterogeneous solids. *Int J Numer Methods Eng.* 2019, **118**, 276-302.
- [2] SUBBER, W. a K. MATOUŠ. Asynchronous space-time algorithm based on a domain decomposition method for structural dynamics problems on non-matching meshes. *Comput Mech.* 2016, **57**, 211-235.
- [3] GRAFF, Karl F. *Wave motion in elastic solids.* Oxford: Clarendon Press, 1975. ISBN 01-985-6118-0.
- [4] HUGHES, Thomas J.R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* I. New Jersey 07632: Prentice Hall, 1987. ISBN 0-13-317025-X.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

**Ing. Radek Kolman, Ph.D., Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.**

Datum zadání diplomové práce: **13.04.2021** Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

# Poděkování

Práce byla vypracována částečně na pracovišti Ústavu termomechaniky AV ČR pod vedením Ing. Radka Kolmana, Ph.D., kterému patří nemalé díky za ochotu průběžně konzultovat dosažené výsledky a též za mnoho podnětů, které určily směr této práce. Děkuji i vedoucímu práce doc. Ing. Miroslavu Španielovi, CSc. za vedení, vstřícnost a za organizační nápomoc při jejím vypracování, dále za podnětné připomínky k tématu práce, postupu řešení, použitým metodikám a za kritickou diskuzi nad získanými výsledky a závěry práce.

Během vypracování práce autor využíval spolupráce s Laboratoří rychlých dějů, Ústavu mechaniky a materiálů, Fakulty dopravní, ČVUT v Praze, kde v letech 2015-2020 studoval bakalářský a magisterský program. Na základě této spolupráce byly získány experimentální výsledky šíření vln SHPB (tlaková dělená Hopkinsonova tyč), které následně posloužily k validaci navržených numerických metod pro řešení šíření elastických vln. Experimenty SHPB proběhly za podpory grantu SGS20/141/OHK2/2T/16. Jmenovitě děkuji Ing. Janu Faltovi za naměření a Ing. Tomáši Fílovi, Ph.D. za předzpracování experimentálních dat.

Výsledky jsou dedikovány projektu GA19-04956S Grantové agentury ČR s názvem „Dynamika a nelineární chování pokročilých kompozitních struktur; modelování a optimalizace“.

Děkuji svým nejbližším za trpělivost a podporu.

# Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě strojní, ČVUT v Praze.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 4. června 2021

.....  
podpis

# Anotační list

Jméno autora	Ing. Radim Dvořák
Název DP	Pokročilé numerické metody pro modelování experimentů realizovaných pomocí dělené Hopkinsonovy tyče a jejich implementace a verifikace
Název DP anglicky	Advanced numerical methods for modeling split Hopkinson pressure bar experiments and their implementation and verification
Rok	2021
Studijní program	Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Specializace	Aplikovaná mechanika
Ústav / odbor	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí práce	doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
Konzultant	Ing. Radek Kolman, Ph.D.
Bibliografické údaje	počet stran 108 počet obrázků 96 počet tabulek 8 počet příloh 1 (CD)

## Klíčová slova

Šíření elastický vln, Metoda konečných prvků v dynamice, Explicitní a implicitní metody přímé časové integrace, Metoda Lagrangeových multiplikátorů, Doménová dekompozice, Heterogenní a asynchronní časová integrace, Dělená Hopkinsonova tyč

## Keywords

Elastic wave propagation, Finite element method in dynamics, Explicit and implicit time integration, Lagrange multipliers method, Domain decomposition, Heterogeneous and asynchronous time integration, Split Hopkinson pressure bar

# Abstrakt

Práce se zabývá implementací pokročilých numerických metod řešení jednorozměrných problémů šíření elastických vln v heterogenních tyčích s využitím metody konečných prvků. V teoretické části práce je shrnuta základní teorie jednorozměrné vlnové rovnice včetně jejího analytického řešení pro speciální případy počátečních a okrajových podmínek. Dále je definována slabá formulace problému a jsou odvozeny základní rovnice metody konečných prvků pro 1D případy. Je představena doménová dekompozice s využitím Lagrangeových multiplikátorů v základním a lokalizovaném tvaru. Jsou vysvětleny principy a odlišnosti pokročilých časových schémat ve spojení s metodami doménových dekompozic. Jsou představeny metody globální, heterogenní a asynchronní časové integrace včetně algoritmů a grafických schémat výpočtu. Je popsán princip a účel metody založené na lokálním časovém krokování. Uvedené metody jsou v rámci praktické části práce implementovány do uceleného programu v prostředí MATLAB, který umožňuje řešit úlohy 1D lineární elastodynamiky s libovolným počtem domén, heterogenním charakterem a nestrukturovanými sítěmi. Výsledky získané vytvořeným programem jsou verifikovány analytickým řešením, dostupnými numerickými testy a experimentálními daty získanými z měření pomocí dělené Hopkinsonovy tyče.

# Abstract

The thesis concerns the implementation of advanced numerical methods for solving single-dimension issues of elastic wave propagation in heterogeneous rods using FEM. The Theory section of the thesis summarizes the basic theory of the one dimensional wave equation including its analytical solution for special cases of initial and boundary conditions. A weak formulation of the problem is defined and the basic FEM equations for 1D cases are derived. Domain decomposition using Lagrange multipliers in their classical as well as localized form is used. The principles and differentiating aspects of advanced time schemes in connection with domain decomposition methods is introduced. Global, heterogeneous and asynchronous methods including algorithms and graphic charts showing the calculation are presented. The principle and purpose of the method based on local stepping is described. The methods stated here are implemented within the Practical section of the thesis into a self-contained MATLAB program which allows the solution of 1D linear elastodynamics tasks, which are heterogeneous in nature and contain unstructured mesh, regardless of the number of domains. The results obtained using the abovementioned program are verified by the means of an analytical solution, available numerical tests and experimental data gained from the measurements performed using a split Hopkinson pressure bar.

# Obsah

Obsah	5
Seznam použitých zkratk a veličin	7
1 Úvod	10
<b>TEORETICKÁ ČÁST</b>	<b>13</b>
<b>2 Základy teorie šíření vln a metody konečných prvků</b>	<b>14</b>
2.1 Vlnová rovnice . . . . .	16
2.1.1 D'Alembertovo řešení . . . . .	16
2.1.2 Počáteční úloha . . . . .	17
2.1.3 Smíšená úloha . . . . .	19
2.1.4 Odraz vln na nespojitém rozhraní pro tenké tyče . . . . .	19
2.2 Metoda konečných prvků . . . . .	23
2.2.1 Slabá formulace . . . . .	23
2.2.2 Prostorová diskretizace . . . . .	24
2.2.3 Časová diskretizace a metody přímé časové integrace . . . . .	25
<b>3 Doménová dekompozice pomocí Lagrangeových multiplikátorů</b>	<b>30</b>
3.1 Motivace . . . . .	31
3.1.1 Rychlost výpočtu - omezený takt CPU . . . . .	31
3.1.2 Optimalizace algoritmů . . . . .	32
3.2 Metody . . . . .	34
3.2.1 Klasická $\lambda$ metoda . . . . .	34
3.2.2 Lokalizovaná $\lambda$ metoda . . . . .	36
3.3 Praktické využití . . . . .	38
<b>4 Pokročilé metody časové integrace</b>	<b>39</b>
4.1 Heterogenní časový integrátor . . . . .	40
4.1.1 Schéma výpočtu . . . . .	40
4.1.2 Grafické znázornění schématu . . . . .	44

4.2	Asynchronní časový integrátor . . . . .	48
4.2.1	Asynchronní časová integrace na úrovni domén . . . . .	48
4.2.2	Schéma výpočtu . . . . .	50
4.2.3	Grafické znázornění schématu . . . . .	52
<b>PRAKTICKÁ ČÁST</b>		<b>55</b>
<b>5</b>	<b>Implementační aspekty</b>	<b>56</b>
5.1	Definice úlohy . . . . .	57
5.2	Proces řešení problému . . . . .	58
5.2.1	Charakteristické vlastnosti integrátorů . . . . .	59
5.3	Prohlížení výsledků . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Verifikace</b>	<b>62</b>
6.1	Šíření elastických vln v homogenní tyči . . . . .	64
6.1.1	Pravidelná síť . . . . .	65
6.1.2	Náhodně nepravidelná síť . . . . .	66
6.1.3	Skokově nepravidelná síť . . . . .	67
6.1.4	Porovnání dosažených výsledků s výstupem heterogenního a asyn- chronního integrátoru . . . . .	70
6.1.5	Shrnutí výsledků . . . . .	74
6.2	Problém nespojitého rozhraní . . . . .	77
6.2.1	Analytické řešení . . . . .	78
6.2.2	Numerické řešení . . . . .	78
6.2.3	Porovnání s výstupy komerčního SW . . . . .	81
6.3	Šíření elastické vlny gradovaným prostředím . . . . .	87
6.3.1	Analytické řešení . . . . .	87
6.3.2	Heterogenní časový integrátor . . . . .	88
6.3.3	Asynchronní časový integrátor . . . . .	89
6.4	Porovnání numerického řešení s experimentem . . . . .	90
6.4.1	Konfigurace měření . . . . .	91
6.4.2	Výstupy měření . . . . .	92
6.4.3	Časové okno měření . . . . .	92
6.4.4	Ověření správnosti měření tenzometry . . . . .	93
6.4.5	Verifikace kódu experimentálními daty . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>101</b>
<b>8</b>	<b>Použité zdroje</b>	<b>104</b>

# Seznam použitých zkratek a veličin

$\alpha, \beta_1, \beta_2$	Pushforward-pullback parametry
$\beta, \gamma, \theta$	Newmarkovy parametry
$\varepsilon$	Deformace
$\varepsilon^h$	Aproximace pole deformace
$\varepsilon_i$	Incidentní deformační vlna
$\varepsilon_r$	Odražená deformační vlna
$\varepsilon_t$	Přenesená deformační vlna
$\zeta(x_0, t)$	Neumannova okrajová podmínka
$\theta(x_0, t)$	Dirichletova okrajová podmínka
$\lambda$	Lagrangeův multiplikátor
$\nu$	Poissonovo číslo
$\rho$	Hustota
$\xi$	Normalizovaná souřadnice $x$
$\xi(x, t), \eta(x, t)$	Časoprostorové souřadnice
$\sigma$	Napětí
$\sigma_i$	Incidentní napěťová vlna
$\sigma_r$	Odražená napěťová vlna
$\sigma_t$	Přenesená napěťová vlna
$\bar{\sigma}$	Normalizované napětí
$\tau$	Normalizovaný čas $t$
$\tau_e$	Charakteristická doba elementu $e$
$\phi(x, 0)$	Počáteční posuv
$\psi(x, 0)$	Počáteční rychlost
$\omega$	Úhlová frekvence
$\Gamma$	Hranice oblasti $\Omega$
$\Gamma_D$	Hranice oblasti $\Omega$ s definovanou Dirichletovou podmínkou
$\Gamma_N$	Hranice oblasti $\Omega$ s definovanou Neumannovou podmínkou
$\Pi$	Energie systému
$\Omega$	Oblast
$\chi'$	Prostorová derivace $\chi$
$\dot{\chi}$	Časová derivace $\chi$
$\chi_x$	První parciální derivace $\chi$ podle $x$
$\chi_{xx}$	Druhá parciální derivace $\chi$ podle $x$
$\delta\chi$	Variace $\chi$
$d\chi$	Diferenciál $\chi$



$a$	Zrychlení
$a_1, b_1$	Parametry interpolace při asynchronní časové integraci
$b$	Velikost objemové síly
$c$	Fázová rychlost vlny
$f(x, t)$	funkce $f$ s argumenty $x, t$
$k$	Tuhost
$m$	Hmotnost
$t$	Čas
$t^n$	$n$ -tá časová hladina řešení
$\hat{t}$	Napětí působící na $\Gamma_N$
$u$	Posuv
$u^h$	Aproximace pole posuvů
$v$	Rychlost
$A$	Obsah plochy
$C_0$	Courantovo číslo úlohy
$C_0^{dom_i}$	Courantovo číslo domény $i$
$C_0^e$	Courantovo číslo elementu $e$
$C_r$	Koeficient odrazu
$C_t$	Koeficient přenosu
$E$	Youngův modul pružnosti
$E$	Energie
$E_k$	Kinetická energie
$E_p$	Potenciální energie
$F$	Síla
$H, B$	Operátory rozhraní asynchronního integrátoru
$L$	Délka
$S$	Plocha
$T$	Perioda
$Z$	Akustická impedance
$\mathbf{q}$	Vektor uzlových posuvů
$\ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free}$	Složka uzlových zrychlení uvolněné domény 2 v časové hladině $t^5$
$\ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ link}$	Složka uzlových zrychlení od rozhraní domény 2 v časové hl. $t^5$
$\ddot{\mathbf{u}}_2^5$	Zrychlení domény 2 v časové hladině $t^5$
$\mathbf{u}_0$	Vektor počátečních uzlových posuvů
$\mathbf{v}_0$	Vektor počátečních uzlových rychlostí
$\mathbf{B}$	Operátor zobrazující uzlové posuvy na pole deformace
$\mathbf{C}_{cl}, \mathbf{C}_{cl}, \mathbf{L}_b$	Matice konektivity

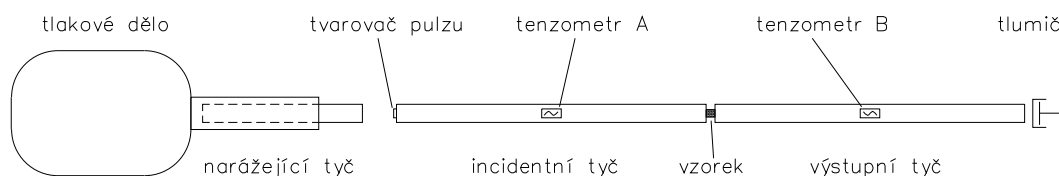
D	Diferenciální operátor
I	Jednotková matice
N	Operátor zobrazující uzlové posuvy na pole posuvů
$U^n$	Matice lokálních vektorů uzlových posuvů
$\Delta t$	Časový krok výpočtu
$\Delta t_C$	Kritický časový krok
$\Delta t_C^e$	Kritický časový krok elementu $e$
$\Delta t_L$	Časový krok výpočtu domény L
$\Delta t_C^L$	Kritický časový krok výpočtu domény L
$f, g$	Vlnové funkce
A	Asynchronní integrátor
AVG	Metoda průměrného zrychlení
C	Globální integrátor s jedním časovým krokem
CPU	Procesor
DIC	Digitální korelace obrazu
DOM	Doména
H	Heterogenní integrátor
HW	Hardware
LS	Local stepping
MCD	Metoda centrálních diferencí
MKP	Metoda konečných prvků
OHPB	Tlaková otevřená Hopkinsonova tyč ( <i>Open Hopkinson Pressure Bar</i> )
PC	Počítač
PFP	Pushforward-pullback metoda
SHPB	Tlaková dělená Hopkinsonova tyč ( <i>Split Hopkinson Pressure Bar</i> )
SW	Software
1D, 2D, 3D	Jedno-, dvou-, třídimenzionální

# Kapitola 1

## Úvod

První úspěšné pokusy pozorování elastických vln pocházejí teprve z druhé poloviny 19. století. Téměř o 100 let později při rozvoji technologie použitelné pro záznam rychlých dějů v poddajných tělesech bylo možné tyto jevy kvantitativně popsat. Zakladatelem oboru lze pravděpodobně označit Johna Hopkinsona (1849 - 1898) a jeho syna Bertrama Hopkinsona (1874 - 1918). Bertram dokázal v roce 1914 sestrojít rázový stroj, který umožňoval pomocí kyvadel měřit hybnosti jednotlivých tyčí při nárazu. Po přepočtech byla získána hledaná časová závislost napětí. V roce 1948 R.M. Davis (1903 - 1958) techniku zdokonalil a konečně v roce 1949 Herbert Kolsky sestrojil první tlakovou dělenou Hopkinsonovu tyč (SHPB) na počest pojmenovanou právě po Johnovi Hopkinsonovi.

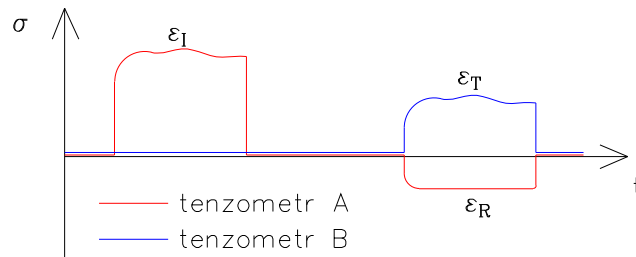
Sestava SHPB je využívána dodnes. Schéma na obr. 1.1 odpovídá zařízení v Laboratoři rychlých dějů Fakulty dopravní, ČVUT v Praze. Instrumentace a podrobný popis lze nalézt v [1,2,3,4,5].



Obrázek 1.1: Schema sestavy SHPB

Narážející tyč je urychlena stlačeným vzduchem ve výměníku na požadovanou rychlost. Při nárazu na incidentní tyč je generována napěťová, resp. deformační, vlna (obr. 1.2), která je zaznamenána na prvním tenzometru A. Část incidentní vlny projde testovaným

vzorkem do transmisní tyče, část incidentní vlny se odrazí [6]. Transmisní vlna je zaznamenána na druhém tenzometru  $B$ , odražená na prvním  $A$ . Z těchto dvou vln spolu s vlnou incidentní lze sestavit materiálovou charakteristiku vzorku v podobě závislosti napětí na deformaci s parametrem rychlosti deformace. Experiment vychází z teorie 1D šíření vlny a je podmíněn dosažením dynamické rovnováhy ve vzorku a udržením konstantní rychlosti deformace po celou dobu experimentu. [7]



Obrázek 1.2: Schema sestavy SHPB

Vedle značného vývoje experimentálních technik v průběhu posledních 150 let došlo též k nezanedbatelnému technologickému skoku ve výpočetní technice. V roce 1957 představil R. Skalak [8] porovnání řešení 1D vlnové rovnice a její modifikace s členem radiální setrvačnosti. V těchto letech bylo též představeno jedno z prvních 1D MKP řešení [9]. Ve druhé polovině 20. století začaly vznikat první 3D řešiče, které se do dnešní doby vyvinuly v nenahraditelný nástroj pro průmyslové (ale i akademické) použití. Běžně rozšířenými jsou platformy Ansys, Abaqus, či LS-Dyna. Nicméně robustnost je v těchto případech vykoupena cenou licence, kterou si pro komerční účely mohou dovolit jen vybrané společnosti a univerzity.

Kromě pořizovací ceny je nevýhodou zvláště v akademickém prostředí uzavřenost těchto softwarů. Výpočet šíření napěťových vln pomocí MKP představuje jistá úskalí, která komerční software zpravidla umí „obejít“, ale často za cenu disperze v důsledku zavedení numerického tlumení a stabilizace. Tyto nekorektní zásahy do řešení můžou zapříčinit nejednu nepříjemnost v hi-tech aplikacích jako je vesmírný průmysl apod. Díky pokročilým znalostem v akademické sféře vzniká v dnešní době otevřený software, který má potenciál ten komerční nahradit. Za zmínku stojí práce prof. K.C. Parka, z jehož publikací [10,11,12,13] vychází podstatná část této práce. Ve spolupráci s Ústavem termomechaniky AV ČR vzniklo mnoho algoritmů, které v budoucnosti mohou být uceleny do jednoho univerzálního řešiče založeného na metodě konečných prvků.

Aktuálním tématem je ve výpočetní technice paralelizace. Tato problematika je ve výpočtové dynamice klíčová, jelikož úlohy mohou vykazovat značný počet stupňů volnosti. V takových případech je nutné model dělit na oblasti (domény) a provést řešení na každé doméně zvlášť se specifickými pravidly pro výměnu informací na rozhraních. Pokud je tato metoda implementována správně s efektivním přenosem dat pomocí distribuovaných a paralelizovaných výpočtů, je možné provádět výpočty modelů omezených pouze počtem výpočetních jednotek. Dnes v době cloudových nástrojů a služeb je tedy kapacita teoreticky „neomezená“.

A právě tímto směrem je vedena předkládaná práce. Heterogenní a asynchronní časové integrátory jsou svou definicí předurčeny pro paralelní formulaci dynamických úloh. Vzniklé řídicí programy časové integrace na jednotlivých doménách mohou přispět k aktuálnímu vývoji a ke vzniku nástroje pro numerickou podporu SHPB testů.

## TEORETICKÁ ČÁST

## Kapitola 2

# Základy teorie šíření vln a metody konečných prvků

Systém rovnic popisující elastické vlnění v lineárně elastickém kontinuu představují rovnice pro časovou změnu hybnosti, zobecněný Hookeův zákon a Cauchyho kinematické vztahy. Celý systém rovnic je nutné doplnit předpisem počátečních a okrajových podmínek. Jelikož se v problematice SHPB používá výhradně teorie 1D šíření vln, budou tyto rovnice rekapitulovány pro 1D úlohy pro lineární elastické medium a pro teorii malých deformací [6]:

$$\begin{aligned}\sigma' + \rho b &= \rho \ddot{u} \\ \sigma &= E \varepsilon \\ \varepsilon &= u'\end{aligned}\tag{2.0.1}$$

kde  $\sigma$  je napětí,  $\varepsilon$  značí poměrnou deformaci,  $\rho$  je hustota materiálu,  $b$  označuje intenzitu objemových sil vztáženou na jednotku délky,  $u(x, t)$  je posuv,  $E$  je Youngův modul pružnosti,  $x \in \Omega$  je poloha materiálového bodu a  $t$  je čas. Symbol  $\Omega$  představuje oblast zájmu, v tomto případě se jedná o jednorozměrnou oblast. Pro přehlednost je zavedeno značení prostorové a časové derivace diferencovatelné funkce  $\chi(x, t)$

$$\chi'(x, t) = \chi' = \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad , \quad \dot{\chi}(x, t) = \dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad .\tag{2.0.2}$$

Definičním oborem rovnic (2.0.1) je časoprostorová oblast

$$\Omega \times \Upsilon = [0; L] \times [0; T]\tag{2.0.3}$$

s počátečními podmínkami pro posuv a rychlost na oblasti  $\Omega$

$$\begin{aligned}u(x, t = 0) &= \phi(x) \\ \dot{u}(x, t = 0) &= \psi(x)\end{aligned}\tag{2.0.4}$$

a s okrajovými podmínkami:

1. *Dirichletova typu*, kde je předepsána hodnota posuvu  $u(x, t)$  bodů na hranici  $\Gamma_D$ . Nechť je pro jednoduchost dán případ předepsaného posuvu  $u(x = L, t) = \theta(t)$ , tím jsou také předepsány hodnoty rychlosti a zrychlení bodů na  $\Gamma_D$ .
2. *Neumannova typu*, kde jsou předepsány hodnoty prostorové derivace  $u'(t)$  bodů na hranici  $\Gamma_N$ . Opět pro jednoduchost nechť je předepsána derivace  $u'(x = 0, t) = \zeta(t)$ . V uvažovaném 1D případě se jedná přímo o předpis poměrné deformace  $\varepsilon(0, t)$ . Má-li být předepsáno napětí na hranici  $\Gamma_N$ , lze využít Hookeův vztah  $\sigma = E\varepsilon$ . Ve vícerozměrných úlohách se pro předpis trakčního zatížení na  $\Gamma_N$  využije Cauchyho vztah  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ , kde  $\boldsymbol{\sigma}$  je tenzor napětí a  $\mathbf{n}$  je vektor vnější normály.

Obecně je nutné s ohledem na řešitelnost úlohy, aby hranice  $\Gamma_N$  a  $\Gamma_D$  byly disjunktní, tj.  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma = \partial\Omega$  a  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , kde  $\Gamma$  má význam hranice oblasti zájmu  $\Omega$ .



## 2.1 Vlnová rovnice

Rovnice (2.0.1) lze za předpokladu konstantního Youngova modulu, tedy když

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sigma' = (E\varepsilon)' = E\varepsilon' \quad , \quad (2.1.1)$$

sloučit na tvar pohybové rovnice vyjádřené pouze v posuvech

$$Eu'' + \rho b = \rho \ddot{u} \quad . \quad (2.1.2)$$

Přeskupením členů rovnice (2.1.2), zanedbáním objemových sil a zavedením konstanty  $c$ , se získá známý tvar vlnové rovnice

$$\ddot{u} = c^2 u'' \quad ; \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad , \quad (2.1.3)$$

kde konstanta  $c$  má význam rychlosti šíření vlny. [6]

### 2.1.1 D'Alembertovo řešení

Řešení je převzato z literatury [6]. Pro jednoduchost nechť  $c = 1 \text{ m s}^{-1}$ . Je hledáno řešení vlnové rovnice

$$\ddot{u} = u'' \quad (2.1.4)$$

na oblasti  $\Omega = (-\infty; \infty)$ .

Vhodnou transformací souřadnic

$$\begin{aligned} \xi &= x - t \\ \eta &= x + t \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

bude možné rovnici (2.1.4) převést na kanonický tvar. Vyjádří se 1. a 2. derivace v novém souřadném systému ve tvaru

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta \\ u_t &= u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -u_\xi + u_\eta \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (u_x)_\xi \xi_x + (u_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= (u_t)_t = (u_t)_\xi \xi_t + (u_t)_\eta \eta_t = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \quad . \end{aligned}$$

Dosazením (2.1.6) do (2.1.4) se získá kanonický tvar vlnové rovnice

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad , \quad (2.1.7)$$

který lze řešit přímou integrací

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= \int u_{\xi\eta} d\eta = \int 0 d\eta = p(\xi) \\ u &= \int u_{\xi} d\xi = \int p(\xi) d\xi = \mathbf{f}(\xi) + \mathbf{g}(\eta) \quad . \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Zpětnou transformací vznikne předpis řešení v původním souřadném systému ve tvaru

$$u = \mathbf{g}(x - t) + \mathbf{f}(x + t) \quad . \quad (2.1.9)$$

Funkce  $\mathbf{g}$  a  $\mathbf{f}$  představují dopřednou a zpětnou vlnu. V případě obecné konstanty  $c$  má řešení tvar

$$u = \mathbf{g}(x - ct) + \mathbf{f}(x + ct) \quad , \quad (2.1.10)$$

kde  $c$  odpovídá rychlosti šíření vlny.

## 2.1.2 Počáteční úloha

V této úloze jsou definovány počáteční podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

kde  $\phi(x)$  je počáteční posuv,  $\psi(x)$  počáteční rychlost a je hledáno řešení  $u(x, t)$  na celém definičním oboru  $x \in \Omega = (-\infty; \infty)$ ,  $t \in \Upsilon = (0; T)$ .

Cílem je najít takové funkce  $\mathbf{g}(x - ct)$  a  $\mathbf{f}(x + ct)$  (2.1.10), které vyhoví počátečním podmínkám. Postup je převzat z dostupné literatury [14]. Přímým dosazením tvaru řešení (2.1.10) do počátečních podmínek (2.1.11) se speciálně pro  $t = 0$  a pro časovou derivaci první počáteční podmínky získá soustava rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(x) + \dot{\mathbf{f}}(x) &= \dot{\phi}(x) \\ -\dot{\mathbf{g}}(x) + \dot{\mathbf{f}}(x) &= \psi(x) \quad . \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Integrací soustavy (2.1.12)

$$\begin{aligned} \int_0^{x+ct} \dot{\mathbf{f}}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{x+ct} (\dot{\phi}(x) + \psi(x)) d(x + ct) \\ \int_0^{x-ct} \dot{\mathbf{g}}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{x-ct} (\dot{\phi}(x) - \psi(x)) d(x - ct) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

se vyjádří funkce  $\mathbf{g}(x - ct)$  a  $\mathbf{f}(x + ct)$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x + ct) &= \mathbf{f}(0) + \frac{1}{2} \left( \phi(x + ct) - \phi(0) + \int_0^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) \\ \mathbf{g}(x - ct) &= \mathbf{g}(0) + \frac{1}{2} \left( \phi(x - ct) - \phi(0) - \int_0^{x-ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) . \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Dosazením (2.1.14) do (2.1.10)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{g}(x - ct) + \mathbf{f}(x + ct) = \\ &= \mathbf{g}(0) + \frac{1}{2} \left( \phi(x - ct) - \phi(0) - \int_0^{x-ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) + \\ &+ \mathbf{f}(0) + \frac{1}{2} \left( \phi(x + ct) - \phi(0) + \int_0^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) = \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \mathbf{g}(0) + \mathbf{f}(0) - \phi(0) \right) + \frac{1}{2} \left( \phi(x - ct) + \right. \\ &\left. + \phi(x + ct) + \int_{x-ct}^0 \psi(\zeta) d\zeta + \int_0^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) = \end{aligned}$$

je vyjádřeno řešení vlnové rovnice v závislosti na počátečních podmínkách pro počáteční úlohu v uzavřeném tvaru

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \phi(x - ct) + \phi(x + ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta \right) . \quad (2.1.16)$$

Podrobnější rozbor lze nalézt v [14].

### 2.1.2.1 Partikulární řešení

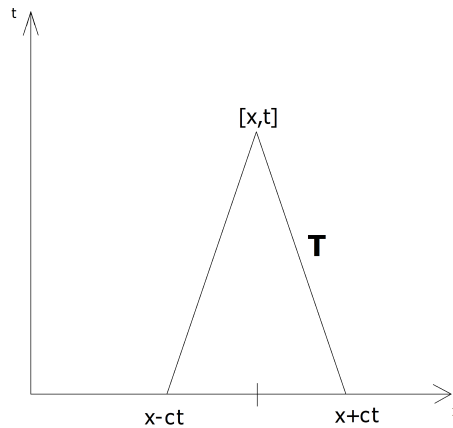
V případě, že se nejedná o homogenní rovnici, lze pro úlohu

$$\begin{aligned} \ddot{u} - c^2 u'' &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

dokázat, že řešení má tvar

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \phi(x - ct) + \phi(x + ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta + \int \int_T f(x, t) dx dt \right) , \quad (2.1.18)$$

kde  $T$  je oblast závislosti bodu  $[x; t]$  (obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Oblast závislosti bodu  $[x, t]$

### 2.1.3 Smíšená úloha

Cílem je najít řešení na intervalu  $x \in \Omega = [0; L]$  pro úlohu

$$\begin{aligned} \ddot{u} - c^2 u'' &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$u(0, t) = \theta_1(t) \quad \text{nebo} \quad u'(0, t) = \zeta_1(t)$$

$$u(L, t) = \theta_2(t) \quad \text{nebo} \quad u'(L, t) = \zeta_2(t),$$

kde  $\phi(x)$  a  $\psi(x)$  je počáteční posuv a rychlost,  $\theta(t)$  okrajová podmínka Dirichletova předepisující posuv a  $\zeta(t)$  okrajová podmínka Neumannova předepisující deformaci, resp. po přepočtu sílu.

Pro smíšenou úlohu nelze v obecném případě vyjádřit řešení úlohy  $u(x, t)$ . Formálně lze řešení vyjádřit ve tvaru funkční řady, která se získá např. Fourierovou metodou [14].

### 2.1.4 Odraz vln na nespojitém rozhraní pro tenké tyče

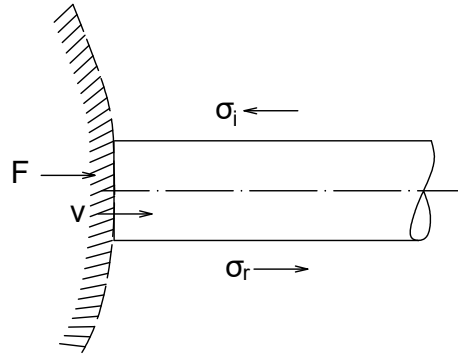
Rozhraní mezi tyčemi rozdílných materiálů je středem zájmu této práce. Je vhodné tento děj podrobněji popsat.

#### 2.1.4.1 Odraz vln od rozhraní

Budiž polonekonečná tyč, kterou se šíří elastická vlna ve tvaru

$$u = \mathbf{g}(x - ct) + \mathbf{f}(x + ct) \quad . \quad (2.1.20)$$

Nechť je tato tyč na svém volném konci zatížena silou  $F(t)$ . Rychlost konce tyče je  $v(t)$  (obr. 2.2).



Obrázek 2.2: Síla  $F$  představující určitý odpor myšleného tělesa při nárazu a rychlost rozhraní  $v(t)$  [6]

Potom napětí je dáno vztahem

$$\sigma(x, t) = E(\mathbf{g}'(x - ct) + \mathbf{f}'(x + ct)) = \sigma_r(x - ct) + \sigma_i(x + ct) \quad , \quad (2.1.21)$$

kde  $E$  je Youngův modul,  $\sigma_r(x - ct)$  napěťová vlna odražená a  $\sigma_i(x + ct)$  napěťová vlna incidentní. Obdobným způsobem lze získat rychlost

$$v(x, t) = c(-\mathbf{g}'(x - ct) + \mathbf{f}'(x + ct)) = \frac{c}{E}(\sigma_r(x - ct) + \sigma_i(x + ct)) \quad . \quad (2.1.22)$$

Na rozhraní musí být zachována silová rovnováha

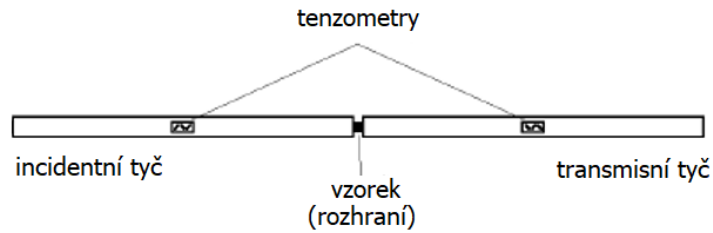
$$F(t) = -A(\sigma_r(0, t) + \sigma_i(0, t)) \quad , \quad (2.1.23)$$

kde  $A$  je plocha průřezu tyče. A konečně pro rychlost rozhraní platí vztah

$$v(t) = \frac{c}{E}(-\sigma_r(0, t) + \sigma_i(0, t)) \quad . \quad (2.1.24)$$

Uvedené předpisy se využijí pro určení charakteru zatížení rázem při experimentálním SHPB či OHPB měření. Běžnou praxí je měření deformačních pulzů tenzometry na určité souřadnici incidentní a transmisní tyče (obr. 2.3). Tyto deformace lze potom přepočíst na souřadnici rozhraní z místa měření na incidentní i transmisní tyči a průběhy porovnat.

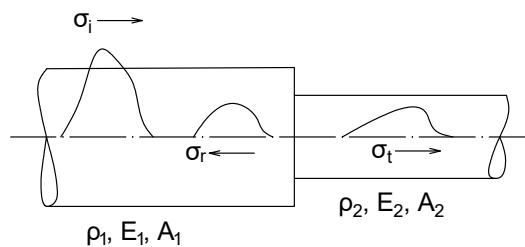
Stěžejní je porovnání kontaktních sil, jelikož vzorek musí být v dynamické rovnováze, má-li být experiment validní.



Obrázek 2.3: Schéma části sestavy dělené Hopkinsonovy tyče (SHPB)

### 2.1.4.2 Přenos vln přes rozhraní

Budiž případ rozhraní dvou tyčí, které mají odlišný průřez a materiálové charakteristiky (obr. 2.4).



Obrázek 2.4: Rozhraní dvou geometricky a materiálově odlišných tyčí [6]

Vychází se z rovnováhy sil na rozhraní

$$A_1(\sigma_i + \sigma_r) = A_2\sigma_t \quad (2.1.25)$$

a spojitosti rychlosti

$$v_i + v_r = v_t \quad (2.1.26)$$

Indexy v rovnicích (2.1.25) a (2.1.26) představují složku vstupní (incidentní)  $i$ , odraženou (reflektovanou)  $r$  a přenesenou (transmisní)  $t$ . Rovnici (2.1.26) lze přeformulovat pro napětí (2.1.22). Rovnice (2.1.25) a (2.1.26) potom tvoří soustavu s neznámými  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  s parametrem  $\sigma_i$ . Řešení této soustavy popisuje, jaká část incidentní vlny se odrazí a jaká část prostoupí rozhraním

$$\sigma_t = \frac{2A_2\rho_2c_2}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2}\sigma_i = C_t\sigma_i \tag{2.1.27}$$

$$\sigma_r = \frac{A_2\rho_2c_2 - A_1\rho_1c_1}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2}\sigma_i = C_r\sigma_i,$$

kde  $C_t$  a  $C_r$  jsou koeficienty přenosu a odrazu.

## 2.2 Metoda konečných prvků

Pro obecné nelineární případy a komplexní konstitutivní modely materiálu je nemožné získat řešení popsané parciální diferenciální rovnicí v uzavřeném tvaru. Proto je řešení hledáno ve slabém smyslu. Při dostatečně jemné diskretizaci řešení obsahuje přijatelnou chybu. Řešení je hledáno ve tvaru součtu určitého počtu bázových funkcí  $N_i$  splňujících Dirichletovy okrajové podmínky. Specifikem MKP je volba bázových funkcí taková, že funkce  $N_i$  má v  $i$ -tém vrcholu hodnotu 1, ve zbylých vrcholech 0 (tj. vlastnost funkce Kroneckerovo  $\delta_{ij}$ ). Mezi uzly je hodnota funkce interpolována polynomem řádu  $n$ . Na rozdíl od Ritzovy metody, kde je nosičem tvarové funkce celý definiční obor, je řešená oblast diskretizována po částech, tedy průnik nosičů je vyjma sousedních uzlů nulový.

### 2.2.1 Slabá formulace

Metoda konečných prvků pro případ dynamiky se odvodí přímo z rovnice popisující časovou změnu hybnosti (2.0.1). Variací výrazu (tj. vynásobením testovací funkcí  $\delta u$ , splňující homogenní Dirichletovy okrajové podmínky), integrací této rovnice přes celou oblast řešení  $\Omega$  a součtem s variací integrálního tvaru okrajových Neumannových podmínek se získá rovnice (2.2.1). Tato rovnice platí, pokud je splněna pohybová rovnice a okrajové podmínky.

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot (-\sigma' - b + \rho \ddot{u}) \, dV + \int_{\Gamma_N} \delta u \cdot (\sigma - \hat{t}) \, dS = 0 \quad (2.2.1)$$

Ačkoli rovnice (2.2.1) vznikla obecným postupem převodu na slabou formulaci a je formálně správně, je nutné dořešit její tvar. Jelikož platí  $dV = A \, dx$ , formulace se převede na integraci po ose  $x$

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot (-\sigma' - b + \rho \ddot{u}) \, A \, dx + \int_{\Gamma_N} \delta u \cdot (\sigma - \hat{t}) \, A \, dx = 0 \quad . \quad (2.2.2)$$

Nicméně nyní (2.2.2) je Neumannova podmínka integrována na množině míry 0 (hranice spojitě 1D oblasti jsou 2 body) a zápis je nutné formálně upravit na tvar

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot (-\sigma' - b + \rho \ddot{u}) \, A \, dx + \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot (\sigma - \hat{t}) \, A = 0 \quad . \quad (2.2.3)$$

Využitím linearitu integrálu a uvážením vztahu  $\sigma' = E\varepsilon' = Eu''$

$$- \int_{\Omega} \delta u \cdot Eu'' \, A \, dx - \int_{\Omega} \delta u \cdot b \, A \, dx + \int_{\Omega} \delta u \cdot \rho \ddot{u} \, A \, dx + \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma \, A - \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \hat{t} \, A = 0 \quad , \quad (2.2.4)$$



uspořádáním členů

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot \rho \ddot{u} A \, dx + \left( \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma A - \int_{\Omega} \delta u \cdot E u'' A \, dx \right) = \int_{\Omega} \delta u \cdot b A \, dx + \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \hat{t} A \quad , \quad (2.2.5)$$

s využitím faktu, že část rovnice (2.2.5) vyznačená závorkou je výsledkem příhodně použité integrace per partes s uvažováním „vhodných“ homogenních okrajových podmínek  $\delta u = 0$  na  $\Gamma_D$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma A - \int_{\Omega} \delta u \cdot E u'' A \, dx \right) = \\ & = \left( \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma A - \left( \sum_{\Gamma} \delta u \cdot E u' A - \int_{\Omega} \delta u' \cdot E u' A \, dx \right) \right) = \\ & = \left( \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma A - \left( \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \sigma A - \int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma A \, dx \right) \right) = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma A \, dx \quad , \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

se konečným dosazením výsledku (2.2.6) do (2.2.5) získá výsledný hledaný vztah

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot \rho \ddot{u} A \, dx + \int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma A \, dx = \int_{\Omega} \delta u \cdot b A \, dx + \sum_{\Gamma_N} \delta u \cdot \hat{t} A \quad , \quad (2.2.7)$$

který odpovídá principu virtuálních prací v dynamice.

## 2.2.2 Prostorová diskretizace

Nyní při zavedení diskretizace

$$\begin{aligned} u^h &= \mathbf{N} \mathbf{q} \\ \delta u^h &= \mathbf{N} \delta \mathbf{q} \\ \varepsilon^h &= \mathbf{D} u^h = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad , \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

kde  $u^h$  je aproximace pole posuvů,  $\mathbf{q}$  je vektor zobecněných uzlových posuvů,  $\mathbf{N}$  operátor zobrazující uzlové posuvy na pole posunutí nezávislý na čase ( $\dot{u}^h = \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{u}^h = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}}$ ),  $\mathbf{D}$  diferenciální operátor a  $\mathbf{B}$  operátor zobrazující uzlové posuvy na pole deformace, dojde po dosazení (2.2.8) do (2.2.7)

$$\delta \mathbf{q}^T \left[ \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b \, d\Omega - \sum_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \hat{t} A \right] = 0 \quad (2.2.9)$$

k transformaci problému na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (rovnost (2.2.9) musí být splněna pro libovolné  $\delta \mathbf{q}$ )

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.2.10)$$

kde  $\mathbf{M}$  je matice hmotnosti,  $\mathbf{f}_{int}$  vektor vnitřních sil,  $\mathbf{f}_{ext}$  vektor vnějších sil

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{f}_{int} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \\ \mathbf{f}_{ext} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b \, d\Omega + \sum_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \hat{t} A \quad . \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Speciálně pro lineární elasticitu ( $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon} = E\mathbf{B}\mathbf{q}$ ) se definuje matice tuhosti  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{f}_{int} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \, d\Omega \right) \mathbf{q} = \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (2.2.12)$$

Podrobný rozbor lze nalézt v [15].

### 2.2.3 Časová diskretizace a metody přímé časové integrace

Řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic se provede numerickou integrací v časové oblasti. K tomu se v MKP běžně využívá rodina Newmarkových metod [15]. Rodina metod Pushforward-pullback [13] byla odvozena teprve v nedávné době - tyto metody úspěšně předcházejí numerickým oscilacím napětí za cenu malé disperze.

Rovnice (2.2.10) spolu s počátečními podmínkami lze pro lineární případ s uvažováním tlumení psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{f}_{ext}(t) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad , \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

kde  $\mathbf{u}_0$  a  $\mathbf{v}_0$  je vektor počátečních uzlových posuvů a rychlostí. Matice tlumení  $\mathbf{C}$  je ve zbytku textu uvažována nulová  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ .

#### 2.2.3.1 Newmarkova rodina metod

Pohybová rovnice se použije v čase  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}_{ext}^{n+1} \quad (2.2.14)$$

Spolu s kinematickými vztahy (2.2.15) vzniká soustava 3 rovnic o 3 neznámých, kde  $\gamma$  a  $\beta$  jsou Newmarkovy parametry.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}^n + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}^{n+1}) \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t ((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}^{n+1})\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

Hodnota Newmarkových parametrů určuje stabilitu metody a také to, zda schéma je implicitní nebo explicitní. Speciální případy jsou uvedeny v tabulce 2.1.

Metoda	$\beta$	$\gamma$
průměrných zrychlení	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
lineárních zrychlení	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Fox-Goodwin	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
centrálních diferencí	0	$\frac{1}{2}$

Tabulka 2.1: Speciální případy metod Newmarkovy rodiny [15]

### 2.2.3.2 Metoda centrálních diferencí

Tato metoda je sice speciálním případem Newmarkovy metody (tab. 2.1), ale historicky vznikla odděleně, jakožto explicitní schéma s využitím diagonalizované matice hmotnosti  $\mathbf{M}$ . Původní formulace využívá pohybovou rovnici v čase  $t = t^n$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{K}\mathbf{u}^n = \mathbf{f}_{ext}^n \quad .\tag{2.2.16}$$

Rychlost a zrychlení v čase  $t$  se získá aproximací centrálními diferencemi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^n &\approx \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}^n &\approx \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) \quad .\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

Posuv a rychlost se pro nový čas  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  získá z části Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}^n \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}^n + \ddot{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad .\end{aligned}\tag{2.2.18}$$

Výsledný předpis pro posuvy v čase  $t = t^n$  lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{M}_{\text{eff}}^{-1} \mathbf{f}_{\text{eff}}^n \quad ,\tag{2.2.19}$$

kde  $\mathbf{M}_{\text{eff}}$  je efektivní matice hmotnosti a  $\mathbf{f}_{\text{eff}}^n$  efektivní vektor zatížení

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{eff}} &= \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \\ \mathbf{f}_{\text{eff}}^n &= \mathbf{f}_{\text{ext}}^n \left[ \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}^n - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}^{n-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

V úvodu odstavce o Metodě centrálních diferencí je zmíněno použití výhradně diagonalizované matice hmotnosti  $\mathbf{M}$ . V případě netlumeného systému ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) a nebo v případě diagonální matice  $\mathbf{C}$  je inverze (2.2.19) triviální.

Metoda centrálních diferencí je podmíněně stabilní s kritickým časovým krokem, který má pro netlumený systém hodnotu

$$\Delta t_C = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad , \quad (2.2.21)$$

kde  $\omega_{\max}$  je maximální vlastní frekvence řešeného systému. [15]

### 2.2.3.3 Pushforward-pullback metoda

Tato metoda je založena na výpočtu zrychlení pro kritický časový krok (*pushforward*) a následném vážení se zrychlením ve výpočtovém kroku (*pullback*). Podrobně rozepsané schéma lze nalézt v [13]. O Pushforward-pullback metodu se jedná pouze v případě hodnot Newmarkových parametrů  $\beta, \gamma$  odpovídajících metodě průměrného zrychlení (viz tab. 2.1).

Nejprve se tedy řeší soustava rovnic v kritickém času  $t^{n+C} = t^n + \Delta t_C$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+C} &= \mathbf{u}^n + \Delta t_C \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t_C^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}^n \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+C} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t_C \ddot{\mathbf{u}}^n \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^{n+C} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^{n+C} + \mathbf{K} \mathbf{u}^{n+C} &= \mathbf{f}^{n+C} \quad . \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Dále se určí váhové koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta t / \Delta t_C \\ \beta_1 &= \frac{\alpha}{6} (3\alpha + \theta - \theta\alpha^2) \\ \beta_2 &= \theta \frac{\alpha}{6} (\alpha^2 - 1) \quad , \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

kde  $\theta$  je přepočtený Newmarkův parametr  $\theta = 2\beta$  (viz tab. 2.1). Koeficienty (2.2.23) se využijí v druhé soustavě rovnic pro výpočtový čas  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \beta_1(\Delta t_C)^2 \ddot{\mathbf{u}}^n + \beta_2(\Delta t_C)^2 \ddot{\mathbf{u}}^{n+C} \\
\dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t ((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}^n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{f}^{n+1} \quad .
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

### 2.2.3.4 Metoda Local stepping

Tato metoda je zobecněním Pushforward-pullback integrátoru. Odhad posuvu a rychlosti se provede na lokální úrovni (na uvolněných elementech) dle kritického časového kroku každého elementu. Matice lokálních vektorů  $\{\mathbf{U}^n; \dot{\mathbf{U}}^n; \ddot{\mathbf{U}}^n\}$  se získají transformací  $\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ , kde  $\mathbf{L}$  je operátor transformace, tedy zobrazení  $\mathbf{u}^n \rightarrow [\mathbf{u}_1^n \ \mathbf{u}_2^n \ \dots \ \mathbf{u}_{nEle}^n]$ , kde  $\mathbf{u}^n$  je globální vektor,  $\mathbf{u}_e^n$  lokální vektor a  $nEle$  odpovídá počtu elementů. Z pohybové rovnice elementu se potom získá zrychlení pro kritický časový krok, které vstupuje do rovnice pro výpočet posuvů a rychlostí v novém výpočtovém čase. Dále dojde ke složení lokálních řešení posuvů a rychlostí do globálních vektorů, které jsou vstupy do pohybových rovnic již složeného systému. Algoritmus je podrobně popsán v [12]. V této práci je metoda Local stepping implementována mj. i pro heterogenní integrátor, čímž je umožněno modelovat přesněji i problémy heterogenních materiálů.

Algoritmus:

1. Výpočet kritických časových kroků každého elementu  $\Delta t_C^e$
2. Výpočet v kritických časech  $t_{n+C}^e$

#### 2.1 Dekompozice globálních vektorů na lokální

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^n &\rightarrow [\mathbf{u}_1^n \ \mathbf{u}_2^n \ \dots \ \mathbf{u}_{nEle}^n] \\
\dot{\mathbf{u}}^n &\rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_1^n \ \dot{\mathbf{u}}_2^n \ \dots \ \dot{\mathbf{u}}_{nEle}^n] \\
\ddot{\mathbf{u}}^n &\rightarrow [\ddot{\mathbf{u}}_1^n \ \ddot{\mathbf{u}}_2^n \ \dots \ \ddot{\mathbf{u}}_{nEle}^n]
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

#### 2.2 Lokální prediktor

##### 2.2.1 Taylorův rozvoj - predikce posuvů pro čas $t + \Delta t_C^e$

$$\mathbf{u}_e^{n+C} = \mathbf{u}_e^n + \Delta t_C^e \dot{\mathbf{u}}_e^n + \frac{(\Delta t_C^e)^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_e^n \tag{2.2.26}$$

##### 2.2.2 Aplikace Dirichletových okrajových podmínek pro každý prvek (jsou-li definovány)

### 2.3 Lokální pohybové rovnice pro oddělené prvky

$$\ddot{\mathbf{u}}_e^{n+C} = \mathbf{M}_e^{-1} (\mathbf{f}_e^{n+C} - \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e^{n+C}) \quad (2.2.27)$$

## 3. Výpočet v čase zájmu $t_{n+1}$

### 3.1 Lokální prediktor

#### 3.1.1 Váhové koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \Delta t / \Delta t_C^e \\ \beta_{1e} &= \frac{\alpha_e}{6} (3\alpha_e + \theta - \theta\alpha_e^2) \\ \beta_{2e} &= \theta \frac{\alpha_e}{6} (\alpha_e^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

#### 3.1.2 Taylorův rozvoj s uvažováním kritického kroku

$$\mathbf{u}_e^{n+1} = \mathbf{u}_e^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_e^n + \beta_{1e} (\Delta t_C^e)^2 \ddot{\mathbf{u}}_e^n + \beta_{2e} (\Delta t_C^e)^2 \ddot{\mathbf{u}}_e^{n+C} \quad (2.2.29)$$

#### 3.1.3 Aplikace Dirichletových okrajových podmínek (jsou-li definovány).

### 3.2 Spojení lokálních vektorů do globálních

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_1^{n+1} \quad \mathbf{u}_2^{n+1} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{nEle}^{n+1}] &\rightarrow \mathbf{u}^{n+1} \\ [\dot{\mathbf{u}}_1^{n+1} \quad \dot{\mathbf{u}}_2^{n+1} \quad \dots \quad \dot{\mathbf{u}}_{nEle}^{n+1}] &\rightarrow \dot{\mathbf{u}}^{n+1} \\ [\ddot{\mathbf{u}}_1^{n+1} \quad \ddot{\mathbf{u}}_2^{n+1} \quad \dots \quad \ddot{\mathbf{u}}_{nEle}^{n+1}] &\rightarrow \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

- Hodnoty v globálních uzlech se získají zpětnou transformací

$$\mathbf{u} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{U}$$

### 3.3 Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{K} \mathbf{u}^{n+1}) \quad (2.2.31)$$

### 3.4 Globální korektor

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t ((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}^n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (2.2.32)$$

## Kapitola 3

# Doménová dekompozice pomocí Lagrangeových multiplikátorů

Výpočet dynamického děje je náročný jednak na paměť, jednak na časovou délku výpočtu v důsledku malého časového kroku  $\Delta t$ . Doba výpočtu je přímo úměrná počtu výpočetních kroků, ale závisí i na počtu stupňů volnosti úlohy, jelikož jednotlivé operace se s rostoucími maticemi zpomalují. Alespoň částečnou představu o potřebné paměti pro popis systému lze odhadnout z předpokladu, že použitá paměť je přímo úměrná počtu členů v maticích soustavy a matice jsou reprezentovány standardní způsobem. Potom přibližně platí úvaha, že potřebná kapacita paměti pro uložení matic je *minimálně* přímo úměrná druhé mocnině počtu uzlů (tj. počet členů každé matice) krát počet matic ( $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \rightarrow 3n^2$ ). Tento odhad však neodpovídá kapacitě paměti potřebné pro jednotlivé operace s maticemi a lze tak předpokládat, že skutečné nároky jsou *vyšší*.

Nástroji, které zlepšují efektivnost výpočtu, jsou metody doménové dekompozice. Jedny z metod jsou metody založené na výpočtu s Lagrangeovými multiplikátory, a to metoda klasická a lokalizovaná.

## 3.1 Motivace

Doba výpočtu závisí na počtu časových kroků (resp. velikosti časového kroku  $\Delta t$ ) a složitosti každého kroku ve smyslu počtu elementárních operací. Velikost časového kroku při explicitním výpočtu je daná kritickým krokem systému, který je určen elementem s nejvyšší vlastní frekvencí [15]. Pro homogenní materiál je tedy časový krok úlohy určen nejmenším elementem.

Základní zásady tvorby numerického modelu pro úlohu šíření vln s ohledem na dobu simulace lze formulovat takto:

- použití „rozumně“ jemné sítě, tj. síť dostatečně aproximující budící pulz
- použití pravidelné sítě - zamezení vzniku ojedinělých elementů s vysokou vlastní frekvencí a numerických odrazů vln na rozhraní sousedních prvků

V praxi je otázka jemnosti sítě komplikovaná, zpravidla je nutné danou úlohu spočítat pro několik případů jemnosti sítě a tím určit konvergenci metody a její přesnost. Pravidelnost nelze zaručit u složitých 3D modelů. Pro ojedinělé prvky lze využít metody *mass scaling* [15], čímž však dojde k přeladění maximální frekvence systému  $\omega_{max}$ .

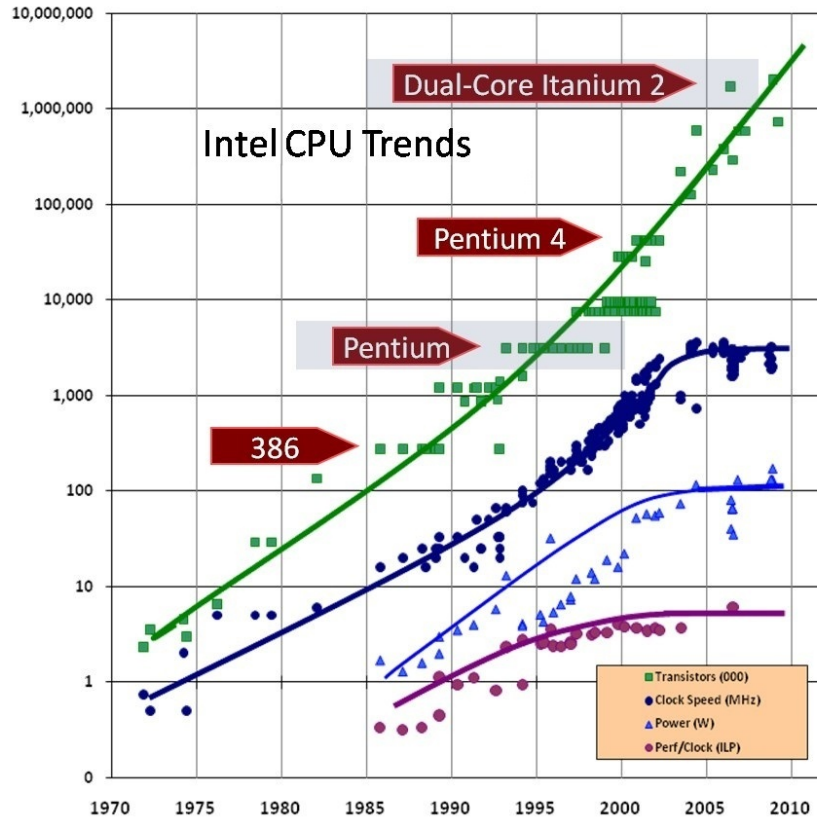
Uvedené postupy mají v každém případě určitý vliv na numerické výsledky, jejich možnost použití je tedy do značné míry omezená. Vedle toho existují postupy urychlující simulaci, které numerické výsledky neovlivní:

- zvýšení výkonu HW
- optimalizace algoritmů a jejich implementace

### 3.1.1 Rychlost výpočtu - omezený takt CPU

Na obr. 3.1 je zobrazena historie výkonu procesorů do roku 2010. V poslední dekádě se frekvence CPU ve srovnání s vývojem před rokem 2000 zvýšily zanedbatelně. Aktuální procesory dosahují zpravidla maximálně frekvence 5 GHz. K radikálnímu vzrůstu dojde pravděpodobně až s případným nástupem a rozšířením nové technologie kvantových počítačů.





Obrázek 3.1: Historie výkonu CPU (tmavě modře frekvence [MHz]) [16]

### 3.1.2 Optimalizace algoritmů

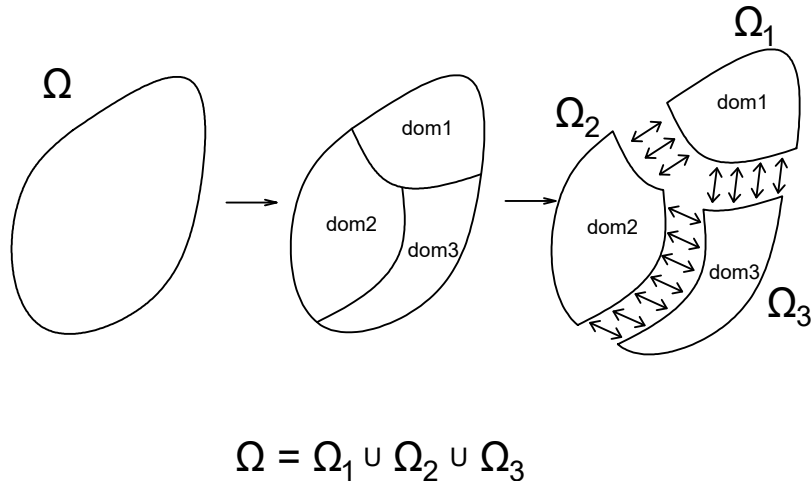
Optimalizace algoritmů je v současné době nejefektivnějším nástrojem. Optimalizovat lze na různých úrovních kódu. Příkladem z nízké úrovně mohou být různé formáty pro ukládání řídkých matic apod. Tato práce se však věnuje optimalizaci na vyšší úrovni návrhu algoritmu.

Jak již bylo řečeno, standardně je minimální možný časový krok  $\Delta t$  v explicitním výpočtu určen nejkratším kritickým krokem elementu  $\Delta t_C^e$ . Tímto krokem  $\Delta t$  je pak počítána celá soustava jednotlivých členů. Tento přístup je velmi neefektivní - Courantova čísla elementů  $e$

$$C_0^e = \frac{\Delta t}{\Delta t_C^e} \quad (3.1.1)$$

se v obecném případě pro každý element liší. Toto je navíc zdrojem numerických oscilací [17,18]. Nabízí se otázka, jak formulovat výpočet takovým způsobem, aby ideálně každý element byl v čase integrován s  $C_0^e = 1$ .

Řešením je rozdělení velké soustavy konečných prvků na jednotlivé podoblasti (domény), které seskupují elementy s podobným  $C_0^e \doteq C_0^{dom}$ , tj. doménová dekompozice (obr. 3.1). Bude-li pak každá doména integrovaná odděleně vlastním časovým krokem, dojde ke značné časové úspoře.



Obrázek 3.2: Znáznornění doménové dekompozice

Tento postup vede na 2 úlohy:

1. Rozdělení soustavy na oblasti (domény) - k tomu je v této práci využita metoda Lagrangeových multiplikátorů lokalizované formě [10].
2. Výpočet časové odezvy s různým časovým krokem pro každou doménu - tomu se věnuje stěžejní kapitola 4 o pokročilé časové integraci.

Navíc bod 1. je pro numerické výpočty „zlomový“, pokud je algoritmus formulován paralelně. Počet elementů byl doposud omezen pamětí použitého PC. V dnešní době paralelních výpočtů s využitím cloudových služeb a nástrojů je při použití doménové dekompozice toto omezení eliminováno, jelikož kapacita paměti je teoreticky „neomezená“.

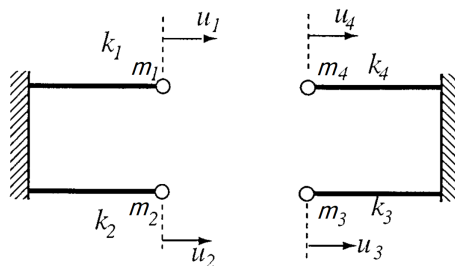
## 3.2 Metody

Rozhraní je interakce dvou entit s jednoznačným statusem aktivní (dochází k vzájemnému ovlivnění entit a k výměně informací), nebo neaktivní (k interakci nedochází). Může se mj. jednat o interakci mechanického systému s magnetickým či elektrickým polem a o mnoho dalších úloh fyziky. Pro formulaci rozhraní se používá metoda Lagrangeových multiplikátorů ( $\lambda$  metoda). Tato metoda přesně popisuje kinematickou vazbu (na rozdíl např. od penaltové formulace ve speciálním případě rozhraní - kontaktu, kde ke vzniku kontaktních sil dochází pouze při penetraci domén, jejíž velikost závisí hodnotách penaltových parametrů). Na druhou stranu je náročnější pro implementaci (zvláště při modelování dynamického systému) a soustava obsahuje více rovnic odlišného typu.

### 3.2.1 Klasická $\lambda$ metoda

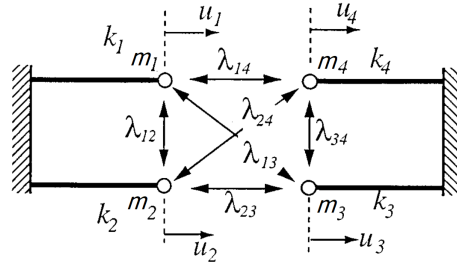
Metoda spočívá ve spojení jednotlivých stupňů volnosti (posuvů uzlů v místě kontaktu) vazbovými rovnicemi, dodržáním 3. Newtonova zákona (zákon akce a reakce) a splněním pohybových rovnic. Volba vazbových rovnic není jednoznačná, existuje několik možností, jak stupně volnosti propojit.

Nechť jsou dány 4 vetknuté 1D pruty se závažím  $m_i$  na volném konci a s kinematickou vazbou stejných posuvů  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$  jejich volných konců (obr. 3.3).



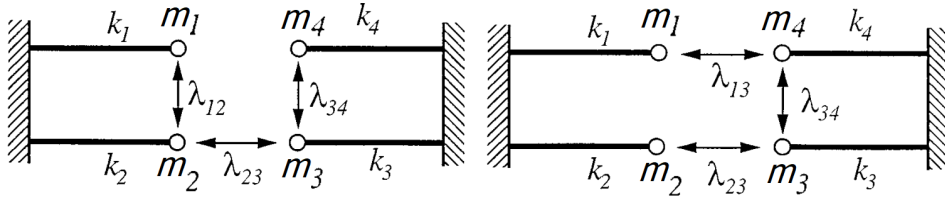
Obrázek 3.3: Modelový příklad 4 vetknutých prutů [10]

Potencionální možnosti předepsání kinematické podmínky jsou uvedeny na obrázku 3.4. Pokud by byla aplikována každá z naznačených vazeb, vznikla by neurčitá soustava.



Obrázek 3.4: Modelový příklad 4 vetknutých prutů - neurčitá soustava [10]

Má-li být soustava řešitelná, je nutné definovat 3 nezávislé vazby. Volba těchto vazeb však není jednoznačná (obr. 3.5).



Obrázek 3.5: Modelový příklad 4 vetknutých prutů - příklady určitých soustav [10]

Speciálně pro soustavu na obrázku 3.5 vlevo lze celková energie systému vyjádřit jako

$$\Pi(\mathbf{u}, \lambda_{cl}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^T \left( \frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) + \lambda_{cl}^T \mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{u} \quad , \quad (3.2.1)$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \lambda_{cl} = \begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{34} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

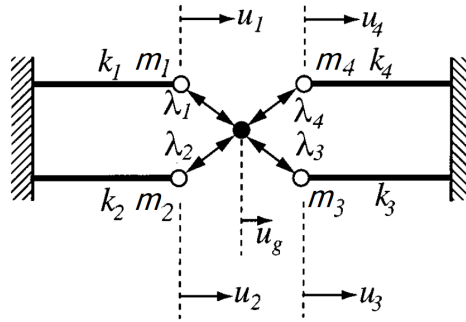
Minimalizace funkcionálu (3.2.1) je ekvivalentní řešení soustavy (3.2.3). Problém spočívá v matici  $\mathbf{C}_{cl}$ , která není jednoznačně určena. Její tvar závisí na konkrétní volbě vazeb.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{C}_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad (3.2.3)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{M}D^2 + \mathbf{K} \quad , \quad D = \frac{d}{dt}$$

### 3.2.2 Lokalizovaná $\lambda$ metoda

Tuto metodu vyvinul K.C. Park [10]. Do rozhraní je přidán další „mezičlen (*frame*)“, na který se okolní stupně volnosti vážou (obr. 3.6). Volba vazbových rovnic je tedy jednoznačná. Navíc je řešení na jednotlivých doménách přirozeně odděleno vloženým „mezičlenem“, což je velmi výhodná výchozí pozice pro implementaci heterogenního, resp. asynchronního integrátoru.



Obrázek 3.6: Modelový příklad s využitím mezičlenu [10]

Energii takto definovaného systému vyjadřuje funkcionál (3.2.4).

$$\Pi(\mathbf{u}, \lambda_l, \mathbf{u}_g) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^T \left( \frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) + \lambda_l^T \mathbf{B} (\mathbf{u} - \mathbf{L}_b \mathbf{u}_g)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \lambda_l = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_{(4 \times 4)}, \quad \mathbf{L}_b^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Minimalizace funkcionálu (3.2.4) je ekvivalentní řešení soustavy (3.2.5). Tvar soustavy je jednoznačně určen.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_b \\ 0 & -\mathbf{L}_b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda_l \\ \mathbf{u}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad (3.2.5)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{M}D^2 + \mathbf{K} \quad , \quad D = \frac{d}{dt}$$

## 3.3 Praktické využití

Použití doménové dekompozice v kombinaci s pokročilými metodami časové integrace přináší řadu výhod, ale i některé nevýhody.

Výhody:

- dekompozice přirozeně vede na paralelní formulaci
- každá doména má vlastní časový krok
- každá doména může být integrována vlastním časovým integrátorem - kombinace explicitních a implicitních integrátorů s různými časovými kroky  $\Delta t$  (úlohy multi-fyziky)

Nevýhody:

- náročnost zaručení stability rozhraní
- náročnost zamezení disipace energie na rozhraní v případě aproximace Lagrangeových multiplikátorů
- složitost dekompozičních algoritmů

V konečném důsledku je doménová dekompozice nástroj na odstranění požadavku velké kapacity paměti. Celkové zkrácení doby výpočtu zaručené není. Při pomalé komunikaci mezi jednotlivými výpočetními jednotkami může výpočet trvat ve skutečnosti déle. Pro integraci domén s rozdílnými časovými kroky je doba výpočtu stále daná počtem kroků  $\Delta t_{min}$  na doméně s nejvyšší vlastní frekvencí. Na druhou stranu, odezva na zbylých doménách je počítána pouze v časech určených jejich vlastní frekvencí, čímž dochází k úspoře energie a nevyužité příslušné výpočetní jednotky lze využít jiným způsobem.

# Kapitola 4

## Pokročilé metody časové integrace

V kapitole 2.2.3 byla popsána Newmarova rodina implicitních metod, explicitní metoda centrálních diferencí a Pushforward-pullback metoda. Tyto metody se vyznačují použitím jednoho globálně určeného časového kroku, který se odvíjí od nejvyšší vlastní frekvence celého systému domén. Formulace rozhraní uvedená v kapitole 3.2.2 však systém přirozeně rozděluje na jednotlivé domény. Nabízí se možnost počítat odezvu každé domény vlastním časovým krokem  $\Delta t^{dom}$ . Výhodou je potom možnost zachování stejného Courantova čísla pro celý systém, na kterém závisí četnost a amplituda umělých oscilací napětí, které se jako chyba objevují v řešení. Tato myšlenka vede na definici heterogenních a asynchronních integrátorů. A v konečném důsledku se nabízí možnost speciálních postupů při časové integraci heterogenních materiálů, kdy každý element může mít svůj vlastní časový krok pro odhad některých kinematických veličin.



## 4.1 Heterogenní časový integrátor

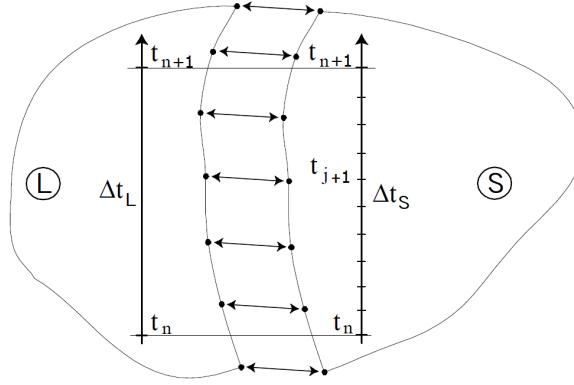
Heterogenní integrátor dovoluje integrovat každou z domén odděleně. K výměně informací (posuvů, rychlostí, zrychlení) mezi doménami dochází pouze ve specifických časech (časových hladinách) prostřednictvím Lagrangeových multiplikátorů. Na metodu je kladeno omezení, že poměr výpočtových kroků každých dvou domén musí být celočíselným násobkem [11]. Univerzální řešení je např. použití pouze kroků s hodnotou  $a^n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $a = konst.$

Přínosem tohoto schématu je částečná homogenizace Courantova čísla na celém systému, což přináší řadu výhod. Příkladem může být závislost frekvence a amplitudy numerických oscilací řešení (napětí) právě na Courantově čísle. Heterogenní integrátor parametry těchto oscilací sjednotí na celé oblasti řešení a je možné je případně filtrovat. Další výhodou je přirozená paralelní implementace, která umožňuje používat časový integrátor s využitím cloudových služeb apod.

Implementace v rámci praktické části práce vychází ze schématu pro případ dvou domén s poměrem časových kroků  $\Delta t_1/\Delta t_2 = 2$  [11]. Tato základní verze byla rozšířena pro libovolný počet domén s libovolným poměrem kritických kroků dvou sousedních domén. Podrobné odvození a analýza základního schématu lze nalézt v [11]. Výpočet je naznačen v následující podkapitole.

### 4.1.1 Schéma výpočtu

Základní verze [11], z které implementace této práce vychází, využívá na jednotlivých doménách pro časovou integraci Pushforward-pullback metodu. Jak bylo již uvedeno v kapitole 2.2.3.3, metoda se vyznačuje složitějším výpočtem odhadu posuvu a rychlosti, pro který je mj. nutná znalost zrychlení v čase  $t^n + \Delta t_c$ , tedy  $\ddot{u}^{n+C}$ . Jelikož toto zrychlení závisí na Lagrangeových multiplikátorech  $\lambda^{n+C}$ , výpočet se značně komplikuje. Níže je popsán výpočet na doméně (S - „small“) s menším časovým krokem v čase  $t^{j+1}$  pro případ 2 domén s poměrem časových kroků  $\Delta t_L/\Delta t_S = m$  (obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Znázornění časové diskretizace pro případ dvou domén při heterogenní časové integraci (doména S - „small“, doména L - „large“) [24]

Značení:

$\{\beta; \gamma\}$  - Newmarkovy parametry

$$\theta = 2\beta$$

$$m = \Delta t_L / \Delta t_S \quad (4.1.1)$$

$$j = [0 \ 2 \ 3 \ \dots \ m - 1]$$

$$k = j + 1$$

Algoritmus:

1. Výpočet pro kritický časový krok  $\Delta t_C^S$  domény S

1.1 Prediktor heterogenního integrátoru

1.1.1 Počítaná doména S

$$\mathbf{u}_S^{j+CS} = \mathbf{u}_S^j + \Delta t_C^S \dot{\mathbf{u}}_S^j + \frac{(\Delta t_C^S)^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_S^j \quad (4.1.2)$$

1.1.2 Okolí L

$$\mathbf{u}_L^{j+CS} = \mathbf{u}_L^j + \Delta t_C^S \dot{\mathbf{u}}_L^j + \frac{(\Delta t_C^S)^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_L^j \quad (4.1.3)$$

1.2 Pohybová rovnice

1.2.1 Počítaná doména S

$$\tilde{\mathbf{u}}_S^{j+CS} = \mathbf{M}_S^{-1} (\mathbf{f}_S^{j+CS} - \mathbf{K}_S \mathbf{u}_S^{j+CS}) \quad (4.1.4)$$

1.2.2 Okolí L

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{j+CS} = \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{f}_L^{j+CS} - \mathbf{K}_L \mathbf{u}_L^{j+CS}) \quad (4.1.5)$$

### 1.3 Problém rozhraní

#### 1.3.1 Zrychlení rozhraní

$$\ddot{\mathbf{u}}_f^{j+CS} = (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} + \mathbf{M}_{S(1,1)})^{-1} \cdot (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{L(\text{end, end})}^{j+CS} + \mathbf{M}_{S(1,1)} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{S(1,1)}^{j+CS}) \quad (4.1.6)$$

#### 1.3.2 Lagrangeův multiplikátor

$$\lambda_S^{j+CS} = \mathbf{M}_{S(1,1)} (\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{S(1,1)}^{j+CS} - \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+CS}) \quad (4.1.7)$$

### 1.4 Korektor heterogenního integrátoru

$$\ddot{\mathbf{u}}_S^{j+CS} = \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_S^{j+CS} - \mathbf{M}_S^{-1} \cdot [\lambda_S^{j+CS} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (4.1.8)$$

## 2. Výpočet pro kritický čas okolí L

### 2.1 Prediktor heterogenního integrátoru

#### 2.1.1 Počítaná doména S

$$\mathbf{u}_S^{n+CL} \approx \mathbf{u}_S^j \quad (4.1.9)$$

- Nelze počítat s krokem  $\Delta t_C^L > \Delta t_C^S$ , je nutné použít aproximaci.

#### 2.1.2 Okolí L

$$\mathbf{u}_L^{n+CL} = \mathbf{u}_L^n + \Delta t_C^L \dot{\mathbf{u}}_L^n + \frac{(\Delta t_C^L)^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_L^n \quad (4.1.10)$$

### 2.2 Pohybová rovnice

#### 2.2.1 Počítaná doména S

$$\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_S^{n+CL} = \mathbf{M}_S^{-1} (\mathbf{f}_S^{n+CL} - \mathbf{K}_S \mathbf{u}_S^{n+CL}) \quad (4.1.11)$$

#### 2.2.2 Okolí L

$$\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_L^{n+CL} = \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{f}_L^{n+CL} - \mathbf{K}_L \mathbf{u}_L^{n+CL}) \quad (4.1.12)$$

### 2.3 Problém rozhraní

#### 2.3.1 Zrychlení rozhraní

$$\ddot{\mathbf{u}}_f^{n+CL} = (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} + \mathbf{M}_{S(1,1)})^{-1} \cdot (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{L(\text{end, end})}^{n+CL} + \mathbf{M}_{S(1,1)} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{S(1,1)}^{n+CL}) \quad (4.1.13)$$

#### 2.3.2 Lagrangeův multiplikátor

$$\lambda_L^{n+CL} = \mathbf{M}_{L(\text{end, end})} (\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{L(\text{end, end})}^{n+CL} - \ddot{\mathbf{u}}_f^{n+CL}) \quad (4.1.14)$$

### 2.4 Korektor heterogenního integrátoru

$$\ddot{\mathbf{u}}_L^{n+CL} = \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_L^{n+CL} - \mathbf{M}_L^{-1} \cdot [0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \lambda_L^{n+CL}]^T \quad (4.1.15)$$

### 3. Výpočet domény S v čase zájmu $t_{j+1}$

#### 3.1 Váhové koeficienty

$$\begin{aligned}
 \alpha_S &= \Delta t_S / \Delta t_C^S \\
 \alpha_L &= k \Delta t_S / \Delta t_C^L \\
 \beta_{1S} &= \frac{\alpha_S}{6} (3\alpha_S + \theta - \theta\alpha_S^2) \\
 \beta_{2S} &= \theta \frac{\alpha_S}{6} (\alpha_S^2 - 1) \\
 \beta_{1L} &= \frac{\alpha_L}{6} (3\alpha_L + \theta - \theta\alpha_L^2) \\
 \beta_{2L} &= \theta \frac{\alpha_L}{6} (\alpha_L^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

#### 3.2 Prediktor heterogenního integrátoru

##### 3.2.1 Počítaná doména S

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_S^{j+1} &= \mathbf{u}_S^j + \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}_S^j + \beta_{1S} (\Delta t_C^S)^2 \ddot{\mathbf{u}}_S^j + \beta_{2S} (\Delta t_C^S)^2 \ddot{\mathbf{u}}_S^{j+CS} \\
 {}^p \dot{\mathbf{u}}_S^{j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_S^j + \Delta t_S (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_S^j
 \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

##### 3.2.2 Okolí L

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_L^{j+1} &= \mathbf{u}_L^n + k \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}_L^n + \beta_{1L} (\Delta t_C^L)^2 \ddot{\mathbf{u}}_L^n + \beta_{2L} (\Delta t_C^L)^2 \ddot{\mathbf{u}}_L^{n+CL} \\
 {}^p \dot{\mathbf{u}}_L^{j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_L^j + \Delta t_L (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_L^j
 \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

#### 3.3 Pohybová rovnice

##### 3.3.1 Počítaná doména S

$$\tilde{\mathbf{u}}_S^{j+1} = \mathbf{M}_S^{-1} (\mathbf{f}_S^{j+1} - \mathbf{K}_S \mathbf{u}_S^{j+1}) \tag{4.1.19}$$

##### 3.3.2 Okolí L

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{j+1} = \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{f}_L^{j+1} - \mathbf{K}_L \mathbf{u}_L^{j+1}) \tag{4.1.20}$$

#### 3.4 Problém rozhraní

##### 3.4.1 Zrychlení rozhraní

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+1} &= (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} + \mathbf{M}_{S(1,1)})^{-1} \cdot \\
 &\cdot (\mathbf{M}_{L(\text{end, end})} \tilde{\mathbf{u}}_{L(\text{end, end})}^{j+1} + \mathbf{M}_{S(1,1)} \tilde{\mathbf{u}}_{S(1,1)}^{j+1})
 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

##### 3.4.2 Posuv a rychlost rozhraní

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_f^{j+1} &= \mathbf{u}_f^j + \Delta t_S ((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_f^j + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+1}) \\
 \dot{\mathbf{u}}_f^{j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_f^j + \Delta t_S \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+1}
 \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

- V případě, že by se namísto výpočtu domény S v čase  $t_{j+1}$  jednalo o výpočet domény L v čase  $t_{n+1}$  (obr. 4.1), nebylo by rozhraní počítáno a

došlo by k pouhému převzetí a k aplikaci jakožto okrajových podmínek již spočtených hodnot  $\mathbf{u}_f^{n+1}$  a  $\dot{\mathbf{u}}_f^{n+1}$  z poslední ho výpočtu na doméně  $S$ . V takovém případě (doména  $L$ , okolí  $S$ ) jsou všechny předchozí výpočty na *okolí*  $S$  redundantní.

### 3.4.3 Lagrangeův multiplikátor

#### 3.4.3.1. Počítaná doména $S$

$$\lambda_S^{j+1} = \mathbf{M}_{S(1,1)} (\tilde{\mathbf{u}}_{S(1,1)}^{j+1} - \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+1}) \quad (4.1.23)$$

#### 3.4.3.2. Okolí $L$

$$\lambda_L^{j+1} = \mathbf{M}_{L(\text{end},\text{end})} (\tilde{\mathbf{u}}_{L(\text{end},\text{end})}^{j+1} - \ddot{\mathbf{u}}_f^{j+1}) \quad (4.1.24)$$

## 3.5 Korektor heterogenního integrátoru

### 3.5.1 Počítaná doména $S$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_S^{j+1} &= \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_S^{j+1} - \mathbf{M}_S^{-1} \cdot [\lambda_S^{j+1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \\ \dot{\mathbf{u}}_S^{j+1} &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_S^{j+1} + \Delta t_S \ \gamma \ \ddot{\mathbf{u}}_S^{j+1} \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

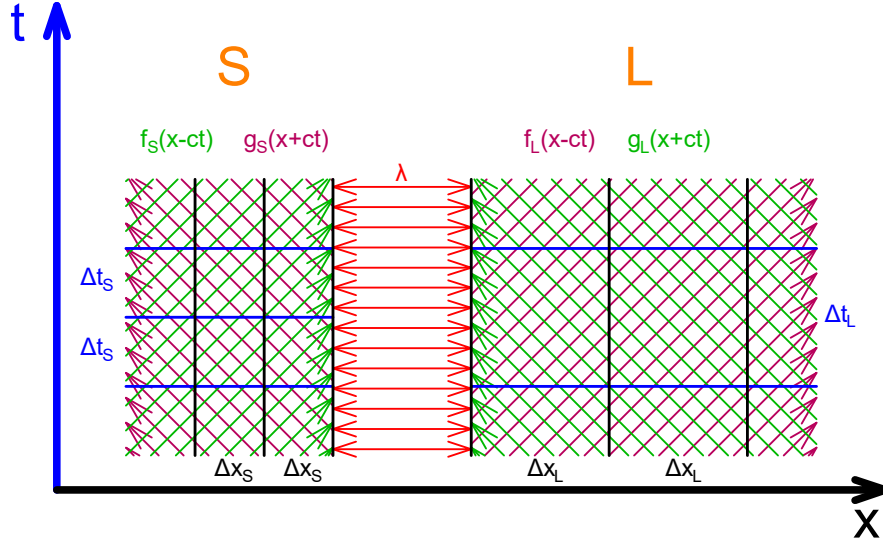
### 3.5.2 Okolí $L$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_L^{j+1} &= \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_L^{j+1} - \mathbf{M}_L^{-1} \cdot [0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \lambda_L^{j+1}]^T \\ \dot{\mathbf{u}}_L^{j+1} &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_L^{j+1} + k \ \Delta t_S \ \gamma \ \ddot{\mathbf{u}}_L^{j+1} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

## 4.1.2 Grafické znázornění schématu

Předchozí schéma je pro názornost překresleno do časoprostorových grafů. Pro zachování přehlednosti a vysvětlení principu heterogenní integrace postačí grafy sestavit pro integraci metodou centrálních diferencí ( $\beta = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ) namísto metody Pushforward-pullback.

Definice úlohy je uvedena v úvodu schématu. Zelené a fialové šipky (obr. 4.2) jsou de facto charakteristiky příslušné vlnové rovnice, jejíž řešení se skládá z dopředné  $\mathbf{f}(x - ct)$  a zpětné vlny  $\mathbf{g}(x + ct)$ . Charakteristiky nejsou „izolované“ přímky, jedná se o spojitý tok informací a to jak z právě vyřešených uzlů, tak z prostoru mezi nimi (viz rovnice prostorové diskretizace (2.2.8)). V grafech následujících (obr. 4.3-4.5) jsou pro přehlednost vykresleny pouze charakteristiky s počátkem v uzlech. Doména  $S$  je tvořena elementy o velikosti  $\Delta x_S$ , která je poloviční oproti elementům  $\Delta x_L$  domény  $L$ . Materiálové charakteristiky obou domén jsou identické. Na jeden výpočetní krok domény  $L$  jsou nutné 2 výpočetní kroky domény  $S$ . Výpočtové kroky  $\Delta t$  jsou uvažovány pro obě domény jako kritické  $\Delta t_L = \Delta t_C^L$  a  $\Delta t_S = \Delta t_C^S$ .



Obrázek 4.2: Znázornění časové diskretizace 2 domén při heterogenním výpočtu

Jak bylo již uvedeno, metoda centrálních při samotném výpočtu neuvažuje kritické kroky. Výchozími rovnicemi jsou zjednodušené vztahy 4.1.17 a 4.1.18 pro predikci posuvů a rychlostí

1. Počítaná doména S

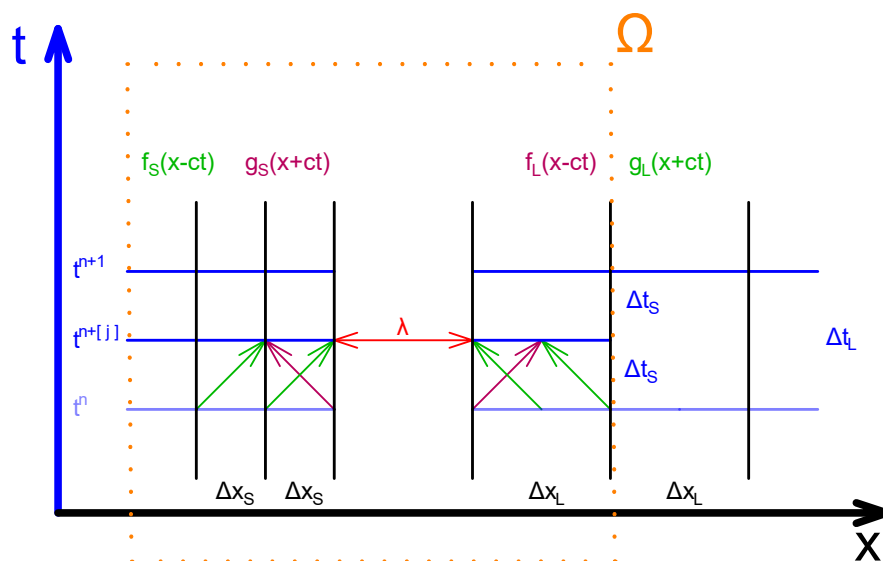
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S^{j+1} &= \mathbf{u}_S^j + \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}_S^j + \frac{\Delta t_S^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_S^j, \\ {}^p \dot{\mathbf{u}}_S^{j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_S^j + \Delta t_S (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_S^j \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

2. Okolí L

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L^{j+1} &= \mathbf{u}_L^j + \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}_L^j + \frac{\Delta t_S^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_L^j, \\ {}^p \dot{\mathbf{u}}_L^{j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_L^j + \Delta t_S (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_L^j \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

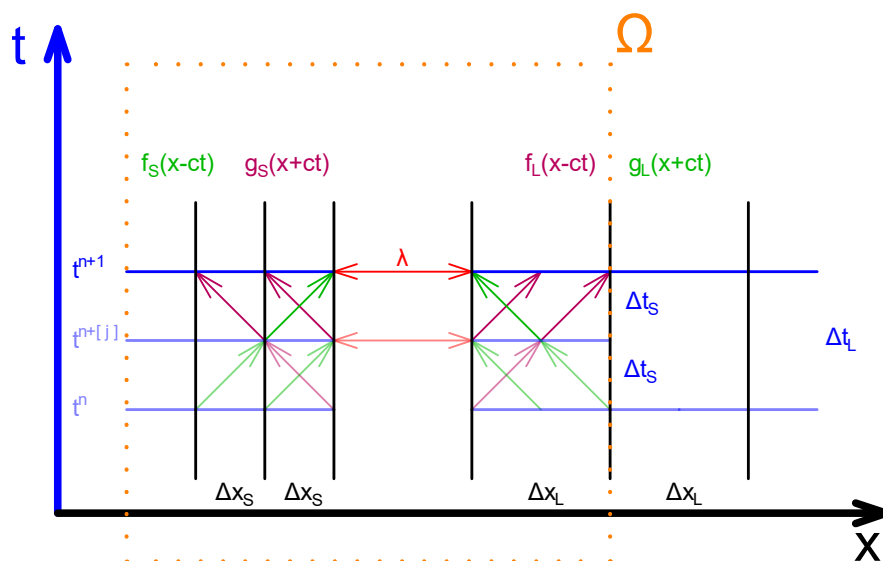
Úloha je vyřešena v okamžiku, kdy je propočítán celý cyklus domény  $S$  během jednoho kroku domény  $L$  a dořešena i doména  $L$ . Ve výchozí situaci je poslední známé řešení v čase  $t^n$  (obr. 4.3). Nyní proběhne výpočet na oblasti  $\Omega$  s časovým krokem  $\Delta t_S$ , která zahrnuje doménu  $S$  a *nejbližší* okolí. Jako *nejbližší* okolí je v grafu (obr. 4.3) pro jednoduchost zakreslena pouze jedna krajní vrstva elementů, v reálném výpočtu se uvažují vrstvy 2. Tento výpočet zahrnuje:

1. predikci posuvů a rychlostí nespojitě oblasti  $\Omega$  (4.1.27 a 4.1.28)
2. řešení pohybové rovnice nespojitě oblasti  $\Omega$  (4.1.19 a 4.1.20)
3. určení Lagr. multipl.  $\lambda$  (4.1.21 - 4.1.24) a korekce hranice domény  $S$  (4.1.25 a 4.1.26)



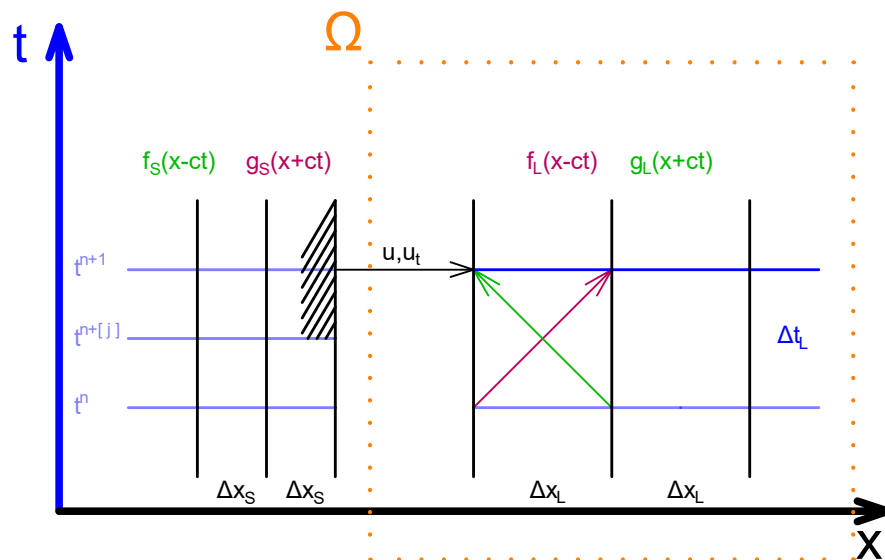
Obrázek 4.3: Řešení prvního sub-kroku

Následuje identický výpočet (obr. 4.4) pro další časovou hladinu (resp cyklus přes hladiny v případě, že  $\Delta t_L/\Delta t_S > 2$ ).



Obrázek 4.4: Řešení druhého sub-kroku

Nyní je známé řešení na doméně  $S$  pro časové hladiny  $t^n$  až  $t^{n+1}$  a proběhne dopočet domény  $L$  (obr. 4.5). Výpočet situace na rozhraní je zjednodušen, jelikož posuv a rychlost hranice jsou již pevně dané z předchozího výpočtu a aplikují se jako okrajové podmínky (viz poznámka pod (4.1.22)).



Obrázek 4.5: Dopočet domény L s již vyřešeným rozhraním z předchozího sub-kroku

Cyklus je uzavřen, jsou známy všechny veličiny v čase  $t^{n+1}$ .



## 4.2 Asynchronní časový integrátor

Oproti heterogennímu integrátoru je zde odstraněno omezení na celočíselný poměr výpočtových kroků jednotlivých domén. V literatuře je jako asynchronní integrace ve většině případů označen proces, kdy jednotlivé části modelu jsou integrovány vlastními časovými kroky bez jakéhokoli omezení. Avšak rozdělení modelu na části jednotliví autoři provádějí na různých úrovních:

1. rozdělení na jednotlivé elementy
2. rozdělení na jednotlivé domény

První případ (rozdělení na elementy) lze nalézt v materiálech [19,20,21,22]. K časové integraci zde dochází odděleně na jednotlivých elementech. Některé z metod však vykazují nestabilní chování, případně jsou stabilní, ale nepřesné z pohledu splnění podmínek vazeb na rozhraní. V práci tyto postupy implementovány nejsou.

Druhá skupina jsou metody, které model rozdělují na domény a k výměně informací mezi nimi dochází pouze na rozhraní (případně kontaktu). K této výměně dochází jako v případě heterogenního integrátoru prostřednictvím Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$ . V práci je využit právě tento přístup.

### 4.2.1 Asynchronní časová integrace na úrovni domén

V principu se jedná o problém přenosu informací na rozhraní domény v čase, který není časem známého řešení domény.

#### 4.2.1.1 Nedisipativní metoda

V případě, že existuje v řešení takový okamžik, kdy je známo řešení na všech doménách, lze postupovat podle [23]. Metoda vede na rozsáhlou soustavu rovnic, která lze však do určité míry řešit paralelně. Soustava obsahuje řešení všech domén ve všech časových krocích jednotlivých domén a to od posledního společného okamžiku řešení všech domén do následujícího takového okamžiku  $t_{spol}$ . V průběhu tohoto časového úseku se předpokládá lineární změna Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$ . Toto řešení je přesné ve smyslu splnění vazeb a nedochází k disipaci energie. Avšak praktické použití je problematické. Necht' jsou dvě domény s poměrem kroků  $\Delta t_1/\Delta t_2 = 0.9$  (tedy kroky jsou si velmi blízké). V čase  $t = 0$  je řešení známo na obou doménách. Další takový čas  $t_{spol}$  nastane až po 10 krocích domény 1 a 9 krocích domény 2, tedy  $t_{spol} = 10 \cdot \Delta t_1 = 9 \cdot \Delta t_2$ . Soustava tedy bude obsahovat 19 neznámých řešení kinematiky (posuvy, rychlosti a zrychlení) a navíc 19

neznámých sad Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$ . Z uvedeného je zřejmý paradox (4.2.1). Rozměr soustavy poroste do nekonečna pro  $\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_2$ , přitom „intuitivně“ je pro případ  $\Delta t_1 \doteq \Delta t_2$  očekáváno řešení složitostí odpovídající standardním metodám s globálním krokem. Druhým extrémem je případ pevně daného nenulového  $\Delta t_2 > 0$  a zároveň limitně se blížícího  $\Delta t_1 \rightarrow 0$  (4.2.2).

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_2} \implies t_{spol} \rightarrow \infty \quad (4.2.1)$$

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \implies t_{spol} \rightarrow \infty \quad (4.2.2)$$

Použitelnost metody je tedy značně omezená. Navíc vyžaduje apriorní znalost časových hladin, v kterých bude počítáno řešení, což může být v nelineárních úlohách, kdy se délka časového kroku mění v průběhu výpočtu, problematické.

### 4.2.1.2 Disipativní metoda

V aplikaci výpočtu šíření vln pomocí MKP se jako vhodný postup jeví skupina metod, která je založena na lineární interpolaci veličin na rozhraní. Zjednodušeně lze metodu formulovat v těchto bodech:

1. pro  $t = 0$  integruj všechny domény bez vzájemné interakce (uvolněný systém) - tj. prediktor
2. aplikuj korekci pomocí Lagrangeových multiplikátorů na doménu  $i$  s aktuálně nejnižším časem známého řešení, multiplikátory jsou získány interpolací vybraných veličin okolí - tj. korektor
3. integruj doménu  $i$  bez vlivu okolí - tj. prediktor
4. pokud existuje doména, která stále nedosáhla konečného času výpočtu, vrať se na krok 2.
5. konec

Jádro asynchronního schématu spočívá v bodu 2, je nutné získat Lagrangeovy multiplikátory v časech jakožto reakční síly na rozhraních, kdy na sousedních doménách není řešení k dispozici. K tomu se využije interpolace  $\mathfrak{J}$  multiplikátorů  $\lambda$  v čase  $t^{n+j}$

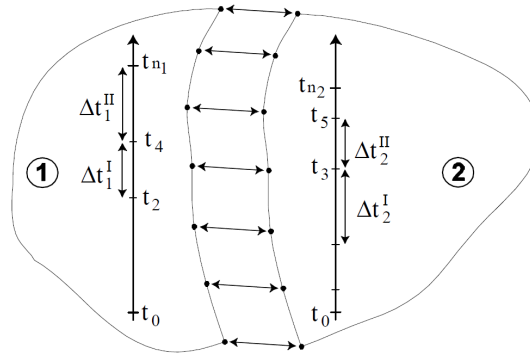
$$\lambda^{n+j} = \mathfrak{J}(\lambda^n, \lambda^{n+1}) \quad . \quad (4.2.3)$$

Toto řešení není přesné a dochází k porušení vazebních podmínek v rozhraní, což není fyzikálně korektní a to způsobí numerickou disipaci energie na rozhraní. Na druhou stranu

tato metoda je poměrně robustní - apriorní znalost časů řešení není nutná, časový krok se může v průběhu libovolně měnit a rozsáhlost soustav rovnic je předem známá, na rozdíl od nedisipativní metody (kap. 4.2.1.1).

## 4.2.2 Schéma výpočtu

Pro implementaci byla využita metoda použitá v softwaru EUROPLEXUS [24,25]. Je založena na apriorním požadavku rovnováhy na rozhraní (prediktor) a aposteriorní opravou spojitosti kinematických veličin na rozhraní pomocí Lagrangeových multiplikátorů (korektor). Postup je popsán na konkrétním případě dvou domén (obr. 4.6) - výpočet domény 2 v čase  $t_5$ .



Obrázek 4.6: Znázornění časové diskretizace 2 domén při asynchronní časové integraci [24]

Značení:

$_{free}$  - řešení na uvolněných doménách bez vzájemné interakce

$_{link}$  - řešení na rozhraní

Algoritmus:

1. Poslední známé řešení:

- Doména 1 (okolí):  $\{\mathbf{u}_1^4; \dot{\mathbf{u}}_1^4; \ddot{\mathbf{u}}_1^4\}$  a navíc v paměti  $\{\dot{\mathbf{u}}_1^4_{free}; \dot{\mathbf{u}}_1^4_{link}; \ddot{\mathbf{u}}_1^4_{link}\}$
- Doména 2 (řešená):  $\{\mathbf{u}_2^3; \dot{\mathbf{u}}_2^3; \ddot{\mathbf{u}}_2^3\}$

2. Prediktor asynchronního integrátoru (uvolněný systém)

2.1 Počítaná doména - Newmarkova metoda

2.1.1 Prediktor

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{u}_2^5 &= \mathbf{u}_2^3 + \Delta t_2^{II} \dot{\mathbf{u}}_2^3 + \frac{(\Delta t_2^{II})^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_2^3 \\ {}^p\dot{\mathbf{u}}_2^5 &= \dot{\mathbf{u}}_2^3 + \Delta t_2^{II} (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_2^3 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

### 2.1.2 Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} = (\mathbf{M}_2 + \beta(\Delta t_2^{\text{II}})^2 \mathbf{K}_2)^{-1} (\mathbf{F}_2^5 - \mathbf{K}_2 {}^p \mathbf{u}_2^5) \quad (4.2.5)$$

### 2.1.3 Korektor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^5 \text{ free} &= {}^p \mathbf{u}_2^5 + \beta(\Delta t_2^{\text{II}})^2 \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} \\ \dot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_2^5 + \gamma \Delta t_2^{\text{II}} \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

## 2.2 Okolí - Newmarkova metoda

### 2.2.1 Prediktor

$${}^p \dot{\mathbf{u}}_1^{n1} = \dot{\mathbf{u}}_1^4 + \Delta t_1^{\text{II}} (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_1^4 \quad (4.2.7)$$

### 2.2.2 Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{u}}_1^{n1} \text{ free} = (\mathbf{M}_1 + \beta(\Delta t_1^{\text{II}})^2 \mathbf{K}_1)^{-1} (\mathbf{F}_1^{n1} - \mathbf{K}_1 {}^p \mathbf{u}_1^{n1}) \quad (4.2.8)$$

### 2.2.3 Korektor

$$\dot{\mathbf{u}}_1^{n1} \text{ free} = {}^p \dot{\mathbf{u}}_1^{n1} + \gamma \Delta t_1^{\text{II}} \ddot{\mathbf{u}}_1^{n1} \text{ free} \quad (4.2.9)$$

## 3. Problém rozhraní

### 3.1 Konstanty interpolace

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t^5 - t^4}{t^{n1} - t^4} \\ b_1 &= \frac{\Delta t_1^{\text{I}}}{\Delta t_1^{\text{II}}} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

### 3.2 Interpolace rychlosti okolí do řešeného času $t^5$

$$\dot{\mathbf{u}}_1^5 \text{ free} = \frac{t^{n1} - t^5}{t^{n1} - t^4} \dot{\mathbf{u}}_1^4 \text{ free} + \frac{t^5 - t^4}{t^{n1} - t^4} \dot{\mathbf{u}}_1^{n1} \text{ free} \quad (4.2.11)$$

### 3.3 Operátory rozhraní

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} (\Delta t_1^{\text{II}} \mathbf{M}_{1(\text{end}, \text{end})} + \Delta t_2^{\text{II}} \mathbf{M}_{2(1,1)}) \\ \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{u}}_1^5 \text{ free}(\text{end}) + \frac{1}{2} \Delta t_1^{\text{II}} (1 - a_1)(b_1 - 1) \dot{\mathbf{u}}_1^4 \text{ link}(\text{end}) - \dot{\mathbf{u}}_1^5 \text{ free}(1) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

### 3.4 Lagrangeův multiplikátor

$$\lambda = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}} \quad (4.2.13)$$

### 3.5 Zrychlení rozhraní

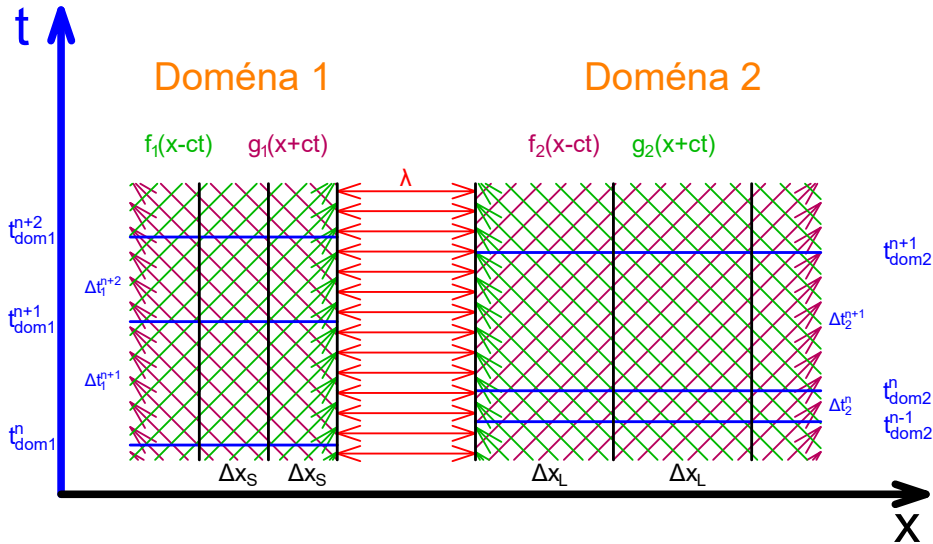
$$\ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ link} = \mathbf{M}_2^{-1} \cdot [\lambda \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (4.2.14)$$

## 4. Korektor asynchronního integrátoru (spojený systém)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^5 &= \mathbf{u}_2^5 \text{ free} + \beta(\Delta t_2^{\text{II}})^2 \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ link} \\ \dot{\mathbf{u}}_2^5 &= \dot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} + \gamma \Delta t_2^{\text{II}} \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ link} \\ \ddot{\mathbf{u}}_2^5 &= \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ free} + \ddot{\mathbf{u}}_2^5 \text{ link} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

### 4.2.3 Grafické znázornění schématu

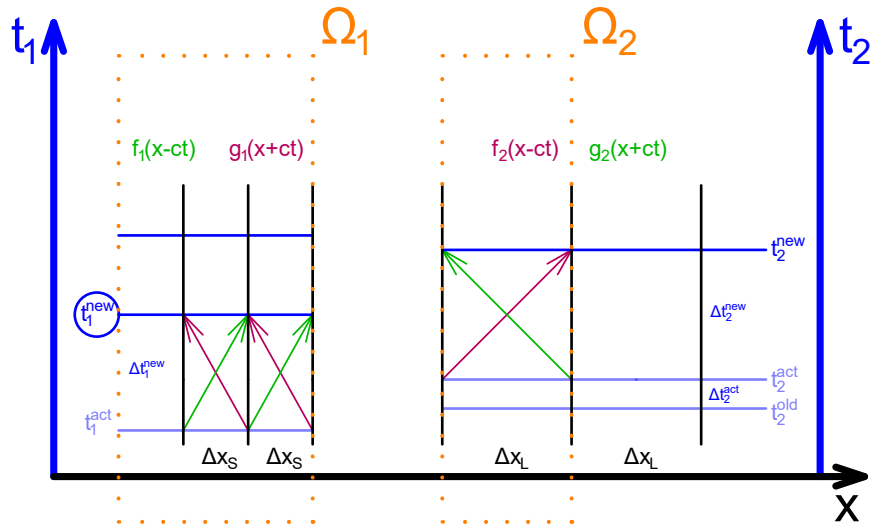
Asynchronní integrátor nemá požadavky na vzájemný poměr kroků a jeho implementace přirozeně uvažuje i proměnný časový krok na každé doméně (obr. 4.7). Necht' je na každé doméně poslední známé řešení v čase  $t_{dom_i}^n$



Obrázek 4.7: Řešení prvního sub-kroku pro asynchronní časový integrátor

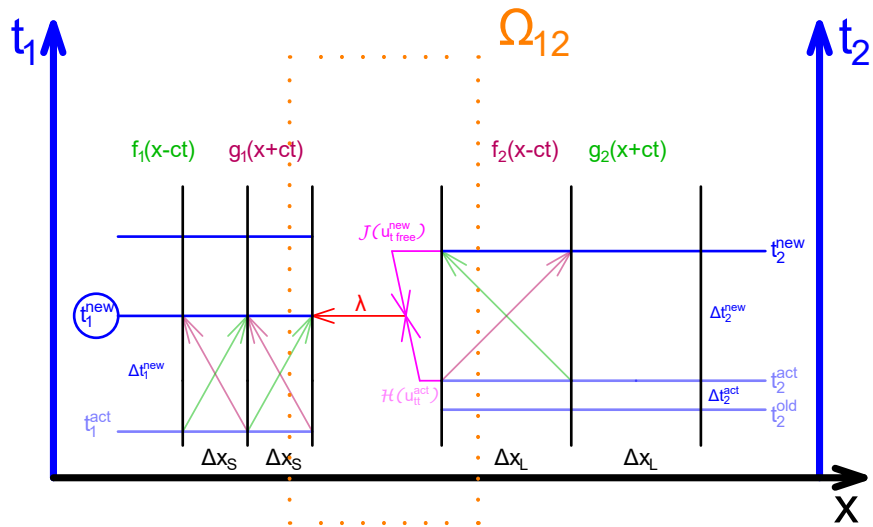
Pro každou doménu je zavedeno vlastní měření času  $t_i$ , které ukládá do paměti čas odpovídající poslednímu známému řešení  $t_i^{act}$  a čas nového neznámého řešení  $t_i^{new} = t_i^{act} + \Delta t_i^{new}$  (obr. 4.8). Řešení vždy proběhne pro doménu  $i = \arg\{\min(t_i^{new})\}$  v čase  $t_i^{new}$ . Na obr. 4.8 tato podmínka odpovídá doméně 1 a čas  $t_1^{new}$ .

V prvním časovém kroku dojde k výpočtu „uvolněného“ (bez vlivu rozhraní) systému pro časy  $t_i^{new}$ . Výpočet probíhá pro doménu 1 (4.2.4 - 4.2.6) a pro blízké okolí (4.2.7 - 4.2.9) (první dvě vrstvy elementů domény 2), nebo pro obě domény jako celky a výsledky domény 2 mohou být uloženy do paměti pro budoucí (obr. 4.10) výpočet domény 2.



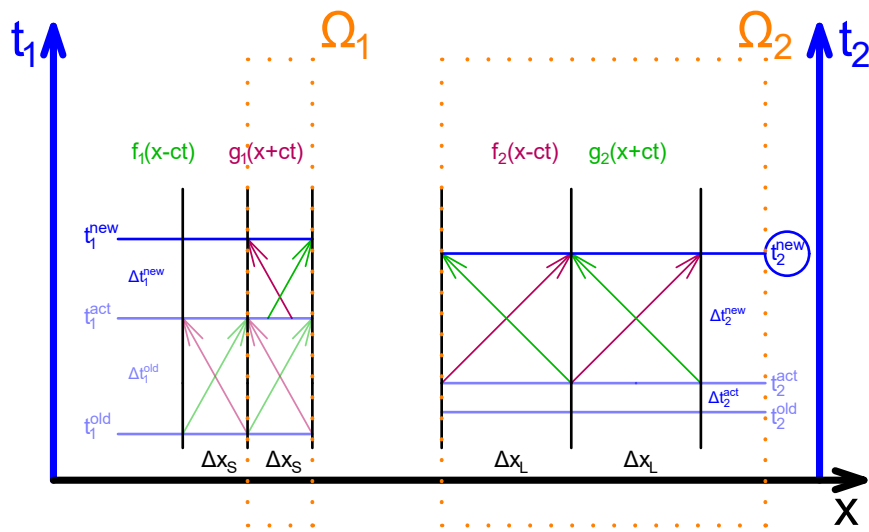
Obrázek 4.8: Řešení prvního sub-kroku

Nyní je nutné přenést Lagrangeovým multiplikátorem informaci o okolí v čase  $t_i^{new}$ . V tomto čase však není na doméně 2 řešení k dispozici a proto je nutné multiplikátor lineárně interpolovat přepočtem veličin z časů  $t_2^{new}$  a  $t_2^{act}$  (obr. 4.9).



Obrázek 4.9: Řešení prvního sub-kroku

Tím je doména 1 v čase  $t_1^{new}$  vyřešena a dochází k posunu hodin domény 1  $t_1$ . Situace na obrázku 4.10 je analogická stavu na obrázku 4.7, cyklus se opakuje.



Obrázek 4.10: Řešení prvního sub-kroku

## PRAKTICKÁ ČÁST



# Kapitola 5

## Implementační aspekty

Kód je psaný v jazyku Matlab. Jsou vytvořeny 3 oddělené moduly - preprocesor, řešič a postprocesor. Tyto moduly jsou dále zběžně popsány. Kód je určen k řešení 1D problému lineární elasto-dynamiky s uvažováním doménové dekompozice. Navíc je implementován i zcela funkční kontakt na bázi penaltové metody [37,38,39,40], který ale není v práci dále využit.

## 5.1 Definice úlohy

Detaily lze nalézt ve skriptu *PREPROCESSOR.m*. Je umožněno definovat libovolný počet domén. Vstupy pro každou doménu jsou:

1. Funkce a konstanty:

- Youngův modul pružnosti  $E(x)$
- Hustota  $\rho(x)$
- Poissonovo číslo  $\nu(x)$
- Plocha průřezu  $A(x)$
- Velikost elementů  $\Delta x(x)$
- Délka tyče  $L$

2. Okrajové podmínky:

- Dirichletovy - předepsané posuvy (konstanta)
- Neumannovy - zatížení pro každý konec tyče  $F(t)$  (funkce)

3. Počáteční podmínky:

- Počáteční posuv
- Počáteční rychlost

Dále jsou pro potřeby kontaktu definovány číselné hodnoty mezer mezi jednotlivými tyčemi.

## 5.2 Proces řešení problému

Ve skriptu *SOLVER.m* se zadá sestava k řešení (názvy definovaných tyčí a mezer v preprocesoru) a název úlohy, pod kterým budou výsledky uloženy. Dále je možné definovat cestu k souboru nastavení simulace *solver\_settings.m* a cestu, kam se výsledky uloží.

V souboru *solver\_settings.m* se nastaví příslušné parametry pro použití:

- časové integrace na celé oblasti bez doménové dekompozice (dále „konvenční integrace“), nebo
- heterogenní časová integrace, nebo
- asynchronní časová integrace.

Pokud je v úloze definován kontakt, je nutné zadat jeho parametry (tuhostní a hmotnostní penaltový parametr). Dále se určí metoda integrace (metoda centrálních diferencí, průměrného zrychlení aj., doba řešení, faktor časového kroku, řád MKP prvků, parametry diagonalizace matice hmotnosti a další parametry, který slouží k optimalizaci výpočtu.

Dle nastavení v souboru *solver\_settings.m* se spuštěním souboru *SOLVER.m* spustí příslušný integrátor (konvenční C / heterogenní H / asynchronní A). Pro jednotlivé integrátory jsou implementovány některé z metod integrace (tab. 5.1): metoda průměrného zrychlení (AVG), lineárního zrychlení (LIN), Fox-Goodwin (FOX), centrálních diferencí (MCD), metoda Pushforward-pullback pro všechny zmíněné případy (PFP-AVG, PFP-LIN, PFP-FOX, PFP-MCD). Metoda PFP je navíc doplněna možností zapnutí funkce Local stepping (PFP-AVG-LS, PFP-LIN-LS, PFP-FOX-LS, PFP-MCD-LS).

Pro konvenční integrátor jsou nad rámec zadání definovány různé formulace kontaktu na bázi penaltové metody (penaltová, bipenaltová a stabilizované varianty [37,38,39,40]), ale nejsou v této práci využity.

	AVG	LIN	FOX	MCD	PFP	PFP-LS
Konvenční	I	I	I	I	I	I
Heterogenní	I	I	I	I	I	I
Asynchronní	I	I	I	I		

Tabulka 5.1: Implementované metody integrace

## 5.2.1 Charakteristické vlastnosti integrátorů

### 5.2.1.1 Konvenční integrátor

Matematické modely jednotlivých tyčí jsou souhrnně zahrnuty v maticích hmotnosti  $\mathbf{M}$ , tlumení  $\mathbf{C}$  a tuhosti  $\mathbf{K}$ . V případě definovaného kontaktu jsou matice v průběhu výpočtu doplňovány o penaltové členy. Rozměr matic odpovídá hodnotě  $n \times n$ , kde  $n$  je počet stupňů volnosti úlohy.

### 5.2.1.2 Heterogenní integrátor

Matice jednotlivých domén  $\mathbf{M}_{dom_i}$ ,  $\mathbf{C}_{dom_i}$ ,  $\mathbf{K}_{dom_i}$  jsou uloženy v paměti odděleně. Rozměr matic odpovídá hodnotě  $n_i \times n_i$ , kde  $n_i$  je počet stupňů volnosti domény  $i$ .

Před započítáním přímé časové integrace jsou identifikovány kritické časové kroky každé domény a jsou zaokrouhleny výpočtové časové kroky tak, aby se minimalizoval rozdíl

$$\beta - \beta_{dom_i} = \beta - \frac{\Delta t^{dom_i}}{\Delta t_C} \quad , \quad (5.2.1)$$

kde  $\beta \in (0; 1)$  je zadaná globální hodnota (faktor výpočtového kroku) a zároveň aby byly poměry výpočtových kroků každé z dvojic domén celá čísla.

Dále jsou pro dané výpočtové časové kroky sestaveny řídicí tabulky, které obsahují informace o pořadí integrace, počtu operací aj.

Na základě řídicích tabulek proběhne přímá časová integrace. Heterogenní integrátor je implementován zcela paralelně. Dle pokynů v tabulkách se postupně aktivují jednotlivá vlákna procesoru a probíhá výpočet.

### 5.2.1.3 Asynchronní integrátor

Počet a rozměry matic  $\mathbf{M}_{dom_i}$ ,  $\mathbf{C}_{dom_i}$ ,  $\mathbf{K}_{dom_i}$ , je stejný jako v případě asynchronního integrátoru.

#### *Inicializace*

1. Pro každou  $i$ -tou doménu je definováno měření času  $t_i$ .
2. Určení výpočtových kroků domén  $\Delta t_{act}^{dom_i} = \beta \Delta t_C^{dom_i}$ , kde faktor  $\beta$  je zadaný globální parametr.

3. Každé měření  $t_i$  uloží do paměti výpočtové hladiny  $t_i^{act} = \Delta t_{new}^{dom_i}$  a  $t_i^{old} = 0$ .
4. Výpočet uvolněných domén (<sub>free</sub> - viz. kapitola 4.2.2).
5. Každé měření  $t_i$  uloží do paměti nové výpočtové hladiny  $t_i^{new} = t_i^{act} + \Delta t_{new}^{dom_i}$ .
6. Uložení hodnot  $\Delta t_{act}^{dom_i} = \Delta t_{new}^{dom_i}$ .

**Výpočet** Pro potřeby interpolace Lagrangeových multiplikátorů je nutná znalost posledního a nového časové kroku a příslušné časové hladiny.

1. Výpočet na doméně  $j = arg(\min\{t_j^{new}\})$  s vlivem rozhraní (<sub>link</sub> - viz. kapitola 4.2.2).
2. Přepsání staré hodnoty  $\Delta t_{act}^{dom_j} = \Delta t_{new}^{dom_j}$
3. Výpočet nové hodnoty  $\Delta t_{new}^{dom_j}$ .
4. Měření  $t_j$  uloží nové hodnoty  $t_j^{old} = t_j^{act}$ ;  $t_j^{act} = t_j^{new}$ ;  $t_j^{new} = t_j^{act} + \Delta t_{new}^{dom_j}$
5. Výpočet uvolněné domény v čase  $t_j^{new}$  (<sub>free</sub> - viz. kapitola 4.2.2).
6. Návrat na krok 1)

Dle zadané frekvence výstupu jsou výsledky získané interpolací mezi časovými hladinami se známým řešením průběžně ukládány.

## 5.3 Prohlížení výsledků

Skript *POSTPROCESSOR.m* je koncipován jako soubor odstavců, které spouští interaktivní formuláře a seznamy, v kterých uživatel vybírá úkoly k provedení nebo zadává parametry. Jednotlivé odstavce kódu umožňují v interaktivním prostředí:

- načtení výsledků (libovolný počet simulací)
- animaci libovolné veličiny na vybrané části modelu v čase
- vykreslení libovolné veličiny na vybrané části modelu v konkrétním čase
- vykreslení libovolné veličiny na konkrétní souřadnici v závislosti na čase
- vykreslení deformační a kinetické energie celého modelu v závislosti na čase
- export grafů do souboru .pdf a .png

Bylo maximální snahou implementovat postprocesor co nejrobustněji, aby prohlížení výsledků bylo uživatelsky přívětivé.

# Kapitola 6

## Verifikace

Vytvořený kód je verifikován dostupnými numerickými testy a experimentálními daty.

Výsledky jsou získány třemi typy *integrátorů*:

1. **konvenční (C)** - metoda s globálním časovým krokem, bez doménové dekompozice, celý model představuje jednu doména
2. **heterogenní (H)** - s doménovou dekompozicí
3. **asynchronní (A)** - s doménovou dekompozicí

Pro každý integrátor jsou implementovány různé *metody integrace*:

- Newmarkova rodina implicitních metod - zpravidla **Metoda průměrného zrychlení (AVG)**
- **Metoda centrálních diferencí (MCD)** - tj. explicitní
- **Pushforward-pullback metoda (PFP)** s případně aktivovaným rozšířením **Local stepping (LS)**

Pro zachování přehlednosti je pro každou úlohu uvedeno pouze nastavení, které se liší od *výchozího* v tabulce 6.1.

<b>Parametr</b>	<b>Hodnota</b>
Řád MKP prvků	1 (lineární)
Faktor časové kroku $\frac{\Delta t}{\Delta t_C}$	0,5
Prostorová numerická integrace	Gaussova
Integračních bodů pro matici <b>K</b>	2
Integračních bodů pro matici <b>M</b>	2
Diagonalizace matice <b>M</b>	úplná ( <b>M</b> diagonální)

Tabulka 6.1: Výchozí nastavení řešiče

Navíc jsou definovány i výchozí parametry materiálového modelu a geometrických dat (tab. 6.2).

<b>Parametr</b>	<b>Hodnota</b>
Youngův modul $E$ [Pa]	1
Hustota $\rho$ [ $\text{kg m}^{-3}$ ]	1
Plocha průřezu $A$ [ $\text{m}^2$ ]	1
Dirichletovy okrajové podmínky	homogenní
Délka hrany elementu $\Delta x$ [m]	0,01

Tabulka 6.2: Výchozí nastavení řešiče

Dále jsou zavedeny normalizované souřadnice  $\xi = \frac{x}{L_1}$  a  $\tau = \frac{t}{T_1}$ , kde  $L_1$  odpovídá zpravidla délce první domény, nebo tyče a  $T_1$  době, která je potřeba pro šíření vlny přes celou délku této domény, nebo tyče (charakteristická doba). Konkrétní význam  $\tau$  je uveden v každé kapitole.

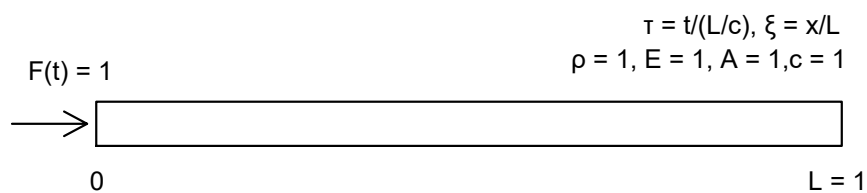
Pro potřeby vykreslení je definováno normalizované napětí  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma(\xi=0)}{\sigma_{ext}}$ , kde  $\sigma_{ext}$  odpovídá zatěžovacímu napětí na kraji tyče v  $\xi = 0$ .



## 6.1 Šíření elastických vln v homogenní tyči

Je řešena základní úloha šíření elastické vlny ve tvaru obdélníku homogenní tyčí. Je aplikováno buzení silou na levém konci tyče po dobu  $\tau \in \langle 0; 0,5 \rangle$  (obr. 6.1). Pro výpočet byly použity zástupci explicitního i implicitního schématu. Pro případ nepravidelných sítí je v porovnání zahrnut i výpočet s aktivní metodou Local stepping.

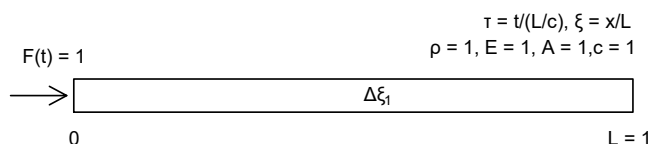
1. Explicitní - Metoda centrálních diferencí (MCD)
2. Implicitní - Metoda průměrného zrychlení (AVG)
3. Metoda Pushforward-pullback (PFP)
  - 3.1 bez aktivní metody Local stepping (-)
  - 3.2 s aktivní metodou Local stepping (LS)



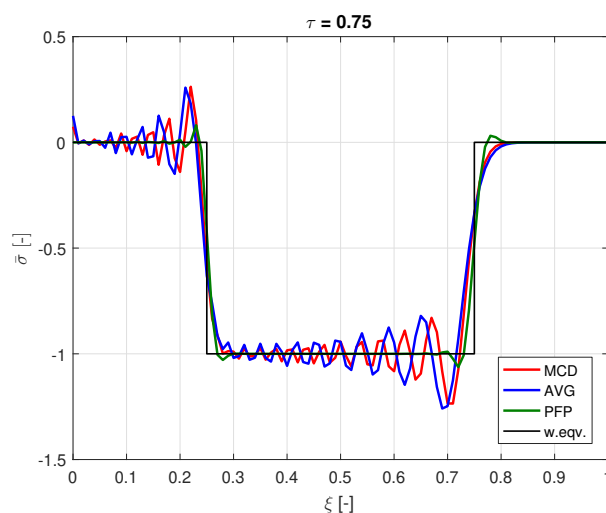
Obrázek 6.1: Schéma úlohy

## 6.1.1 Pravidelná síť

Úloha je počítána na homogenní síti s velikostí elementů  $\Delta\xi = 0,01$  (obr. 6.2). Výsledné napěťové pulzy jsou prezentovány na obr. 6.3.



Obrázek 6.2: Schéma úlohy (počet prvků = 100)



Obrázek 6.3: Napěťový pulz v homogenní tyči s pravidelnou sítí - metoda centrálních diferencí (červeně), průměrného zrychlení (modře), pushforward-pullback (zeleně) a řešení vlnové rovnice (černě)

Metoda centrálních diferencí (červeně) a metoda průměrného zrychlení (modře) vede na kvalitativně srovnatelný výsledek. Na pulzech jsou zřetelně pozorovatelné falešné oscilace, které mají největší amplitudu přímo za čelem vlny a vlnou samotnou. Tyto oscilace jsou numerickou chybou a jejich frekvence s amplitudou závisí především na Courantově čísle úlohy (resp. jednotlivých elementů)  $C_0$ . Tyto oscilace jsou pozorovatelné i v řešení pomocí komerčních SW [18]. Ve speciálním případě, kdy je matice hmotnosti diagonální a  $C_0 = 1$ , oscilace zcela vymizí [17].

Metoda pushforward-pullback (zeleně) tyto oscilace velmi rychle tlumí, úhel náběhu vlny je shodný s předchozími metodami a tudíž rozdílný od přesného řešení (černě), kdy

je změna skoková. Metoda PFP je na rozdíl od zbylých prezentovaných metod disipativní [13], to ale v tomto případě není pozorovatelné (doba šíření je přiměřeně dlouhá) a řešení lze považovat za dostatečně přesné. Pulz řešený touto metodou (zeleně) vykazuje nejlepší shodu s přesným řešením (černě).

## 6.1.2 Náhodně nepravidelná síť

Velikost elementů je předepsaná nespojitou funkcí (6.1.1), kde  $rand = \mathbb{R} \in (0, 0005; 0, 0105)$  (obr. 6.4).

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= 0,01(\xi^2 + 1); & \xi &\in \langle 0; 0,45 \rangle \\ \Delta\xi &= rand; & \xi &\in \langle 0,45; 0,55 \rangle \\ \Delta\xi &= 0,01(\xi^2 + 1); & \xi &\in \langle 0,55; 1 \rangle \end{aligned} \tag{6.1.1}$$



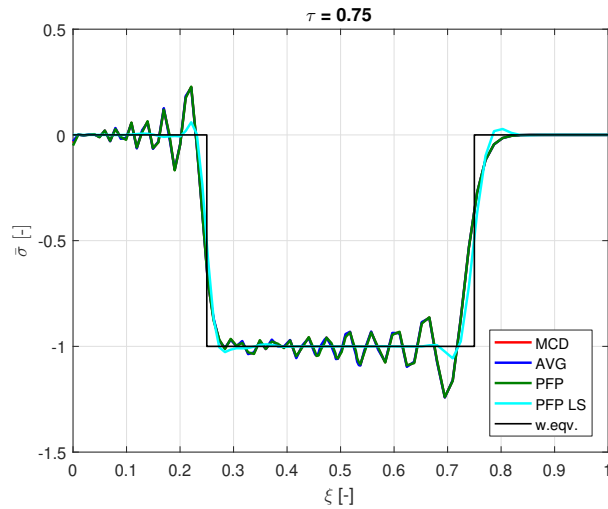
Obrázek 6.4: Schéma úlohy

Výsledné napěťové pulzy jsou na obrázku 6.5. Jelikož je škála charakteristických dob elementů  $\tau_e$  značně rozsáhlá ( $\tau_{max}^e/\tau_{min}^e = 40$ ) a tedy vybrané elementy jsou počítány s  $C_0^e = 0,5 \cdot \frac{1}{40} = 0,0125$  (0,5 je globální parametr, viz úvod kapitoly 6) dochází k jevu, kdy metoda centrálních diferencí (červeně), průměrného zrychlení (modře) i pushforward-pullback (zeleně) vede na téměř shodný výsledek s intenzivními numerickými oscilacemi. Odlišnosti těchto metod jsou při dostatečně malých hodnotách jednotlivých  $C_0^e$  zanedbatelné.

Použití metody pushforward-pullback v tomto případě zcela ztrácí na významu, jelikož je pro výpočty uvažován kritický krok celé úlohy a ten je určen pouze elementem s Courantovým číslem  $\min\{C_0^e\}$ . Odpovídající kritický krok se uvažuje i pro zbylé elementy, což v případě nepravidelné sítě naprosto znehodnocuje přednosti metody PFP.

Pokud se však pro metodu PFP aktivuje modul Local stepping (obr. 6.5 tyrkysově), kdy se ve výpočtu zohledňují vlastní frekvence každého elementu zvlášť (kap. 2.2.3.4), je výsledek stejný, jako při použití samotné metody PFP na pravidelné síti (obr. 6.3 zeleně).

Metoda integrace Pushforward-pullback je v kombinaci s aktivní funkcí Local stepping velmi efektivním nástrojem pro výpočty na geometricky silně heterogenních sítích.

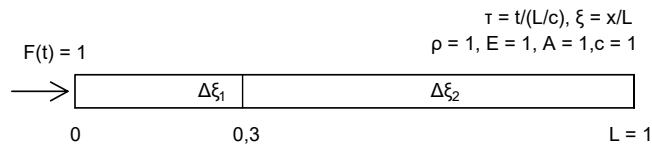


Obrázek 6.5: Napěťový pulz v homogenní tyči s náhodně nepravidelnou sítí - metoda centrálních diferencí (červeně), průměrného zrychlení (modře), pushforward-pullback (zeleně), pushforward-pullback s aktivní funkcí Local stepping (tyrkysově) a řešení vlnové rovnice (černě)

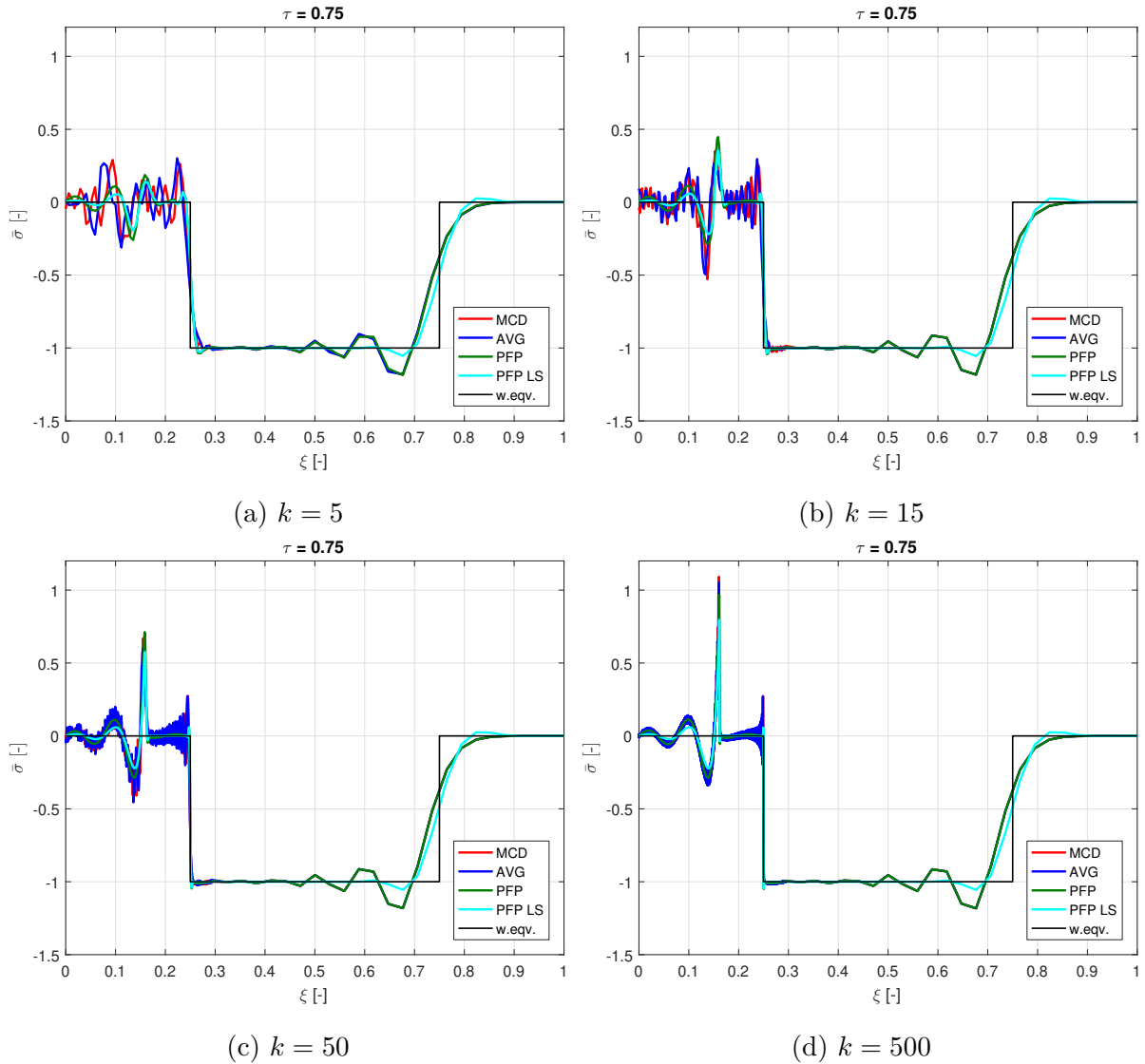
### 6.1.3 Skokově nepravidelná síť

Tyč je rozdělená na dva regiony (6.1.2) s konstantní velikostí elementů ( $k > 1$ ) (obr. 6.6). Je testováno několik případů  $k$  (resp. několik případů poměru  $C_0$  regionů). Výsledné pulzy jsou na sadě obrázků 6.7.

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{1}{k} \cdot 0,03; & \xi \in \langle 0; 0,3 \rangle \\ \Delta\xi &= 0,03; & \xi \in \langle 0,3; 1 \rangle \end{aligned} \tag{6.1.2}$$



Obrázek 6.6: Schéma úlohy

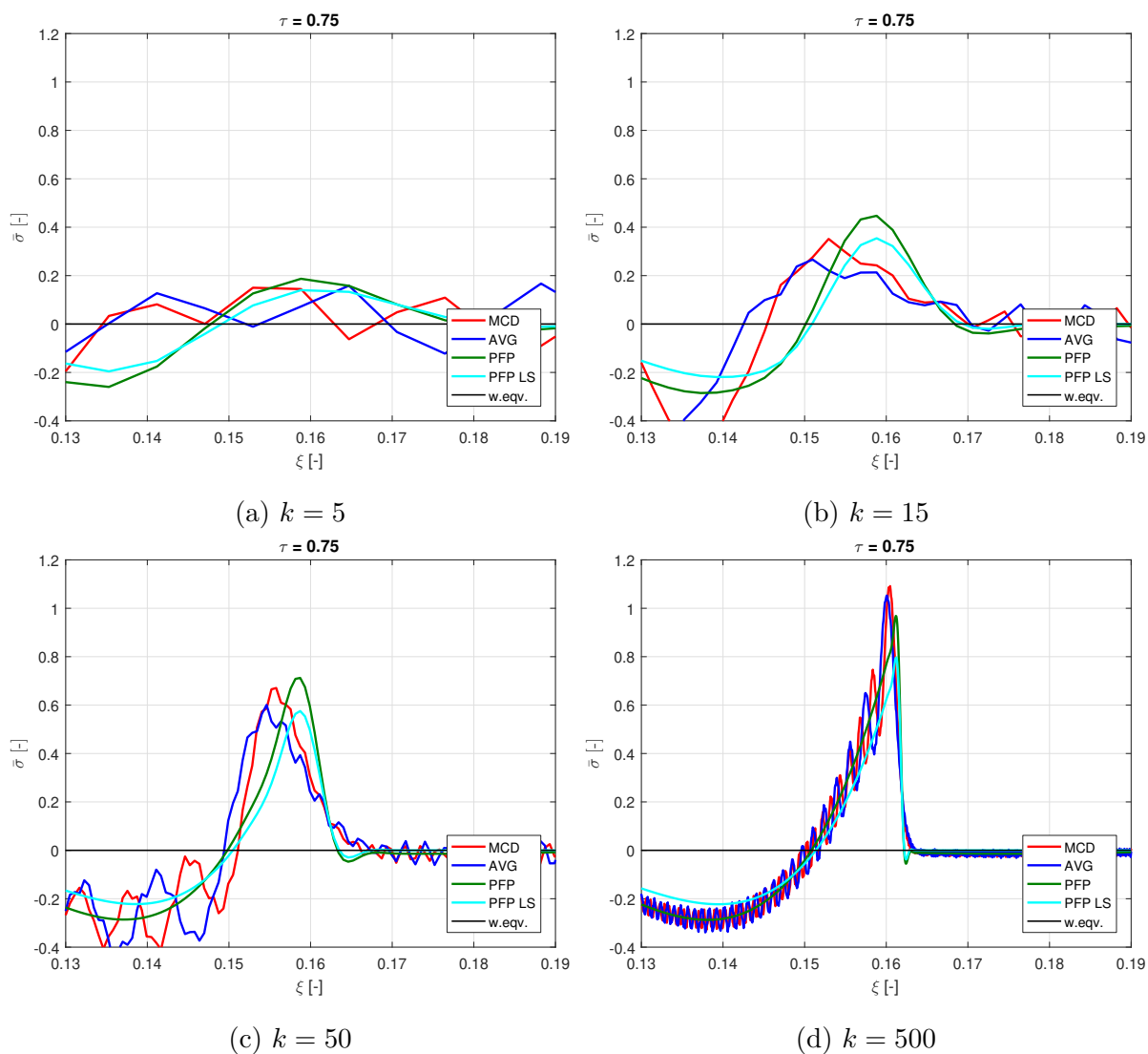


Obrázek 6.7: Napěťový pulz v homogenní tyči se skokově nepravidelnou sítí pro různé hodnoty  $k$  - metoda centrálních diferencí (červeně), průměrného zrychlení (modře), pushforward-pullback (zeleně), pushforward-pullback s aktivní funkcí Local stepping (tyrkysově) a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = 0, 3$

Již pro případ poměru Courantových čísel  $k = 5$  (obr. 6.7a) je v zobrazeném čase  $\tau = 0, 75$  pozorovatelný vliv rozhraní regionů v okolí souřadnice  $\xi = 0, 15$ . S postupným zvyšováním poměru  $k$  (obr. 6.7b - 6.7d) roste i vzniklý lokální extrém. Zároveň se tím zvyšuje i shoda výsledků jednotlivých metod integrace.

Metoda pushforward-pullback s aktivním rozšířením Local stepping opět vykazuje výsledky s nejmenší intenzitou oscilací. Značný přínos lze např. oproti metodě centrálních diferencí pozorovat na případech „přiměřeného“ poměru  $k$  (obr. 6.7a - 6.7b). Výsledky zbylých metod (tj. vyjma PFP LS) se na pravém regionu tyče shodují pro všechny případy poměru  $k$ .

Detail průběhu chyby způsobené odrazem od rozhraní regionů je na sadě obrázků 6.8.



Obrázek 6.8: Detail napěťového pulzu ze sady obrázků 6.7 - metoda centrálních diferencí (červeně), průměrného zrychlení, pushforward-pullback (zeleně), pushforward-pullback s aktivní funkcí Local stepping (tyrkysově) a řešení vlnové rovnice (černě)

Z detailu je patrné, že zvyšováním poměru  $k$  řešení konverguje pravděpodobně k určité nespojitosti v průběhu napětí. Zatímco dolní lokální extrém se pro metodu PFP LS nemění, horní úměrně roste. U zbylých metod dochází ke značným změnám i v případě lokálního minima, které nelze objektivně popsat.

## 6.1.4 Porovnání dosažených výsledků s výstupem heterogenního a asynchronního integrátoru

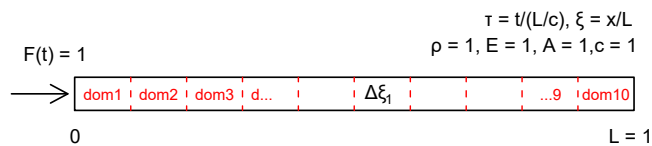
Předchozí tři scénáře jsou řešeny heterogenním a asynchronním integrátorem.

**Heterogenní integrátor** využívá v originální verzi [11] k integraci metodu pushforward-pullback. Proto jsou jeho výsledky porovnány s konvenčním integrátorem pouze pro metodu pushforward-pullback. V rámci práce bylo navíc implementováno i rozšíření local stepping, které se aktivně využije pro výpočty na nepravidelných sítích.

**Asynchronní integrátor** využívá v originální verzi [24,25] k integraci libovolnou metodu z Newmarkovy rodiny metod, resp. i metodu centrálních diferencí. Pro porovnání s výsledky konvenčního integrátoru je vybrána metoda centrálních diferencí.

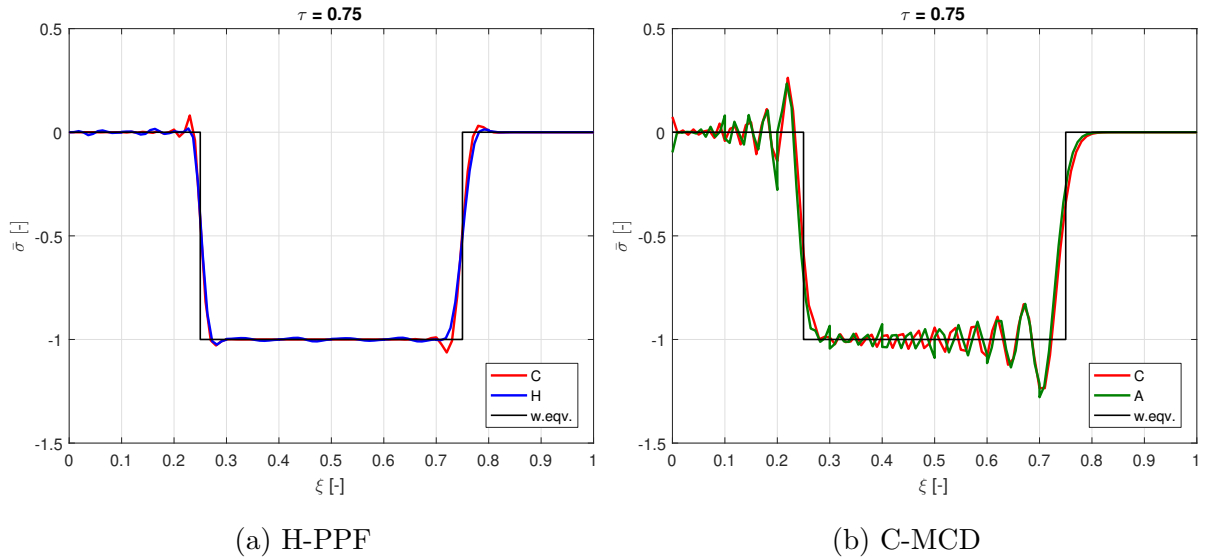
### 6.1.4.1 Pravidelná síť

Pro výpočet asynchronním a heterogenním integrátorem byla tyč rovnoměrně rozdělena na 10 regionů o délce  $\Delta\xi_{region} = 0,1$  (obr. 6.9). Velikost elementů je konstantní ( $\Delta\xi = 0,01$ ).



Obrázek 6.9: Schéma úlohy (na každé doméně 10 prvků)

Porovnání s případem řešení pomocí metody s globálním krokem na nedekomponovaném modelu je na obrázku 6.10.



Obrázek 6.10: Napěťový pulz v homogenní tyči s pravidelnou sítí - konvenční (červeně), heterogenní (modře) a asynchronní (zeleně) integrátor a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = \{0, 1; 0, 2; 0, 3 \dots 0, 9\}$

Heterogenní integrátor (obr. 6.10a modře) vede oproti konvenčnímu (červeně) na jemně oscilující výsledky. Na druhou stranu dochází k filtraci lokálního extrému na čele a na konci vlny.

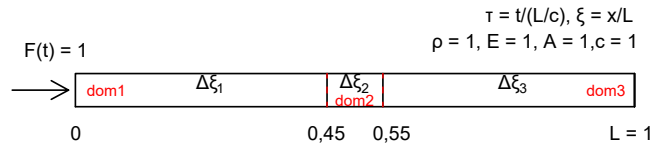
U asynchronního integrátoru (obr. 6.10b zeleně) je pozorovatelný vliv rozhraní jednotlivých regionů. Dochází k antisymetrické odchylce od teoretické amplitudy (černě). Celkový charakter oscilací se však ve srovnání s konvenčním integrátorem nemění.

Lze obecně prohlásit, že výsledky dekomponovaného modelu (modře a zeleně) se dostatečně shodují s výsledky integrace na jedné doméně bez přítomných rozhraní (červeně) a doménová dekompozice probíhá v tomto případě úspěšně.

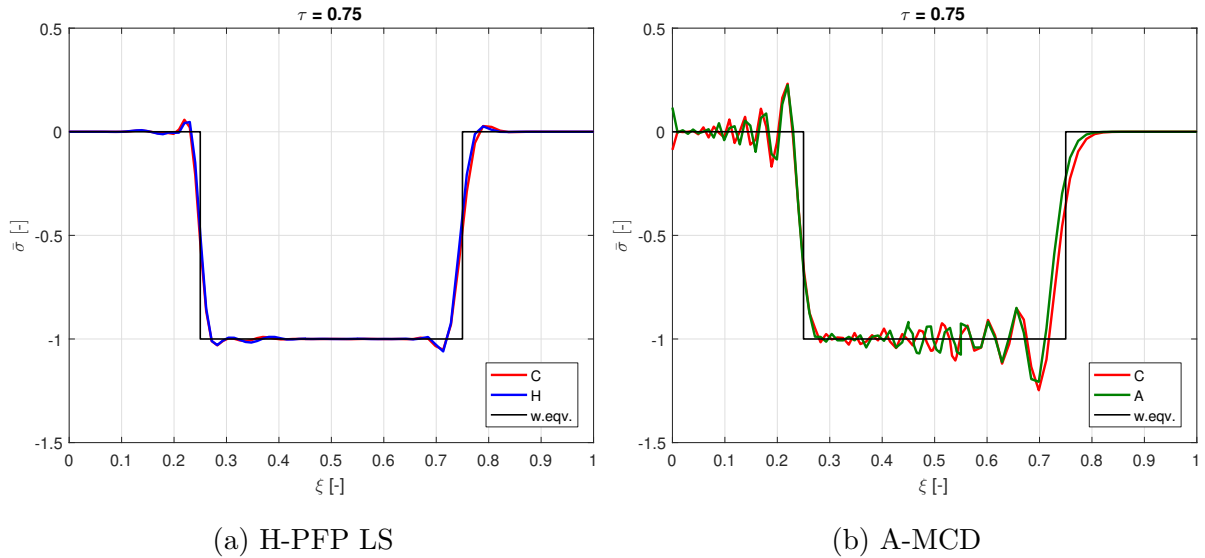
#### 6.1.4.2 Náhodně nepravidelná síť

Předpis pro velikost elementů (6.1.1) zůstává v platnosti i pro případ porovnání s heterogenním a asynchronním integrátorem (obr. 6.12). Tyč je rozdělena na tři regiony, které svojí délkou odpovídají regionům již definovaným (6.1.1), viz obr. 6.11. Výsledky jsou na obrázku 6.12.





Obrázek 6.11: Schéma úlohy



Obrázek 6.12: Napěťový pulz v homogenní tyči s náhodně nepravidelnou sítí - konvenční (červeně), heterogenní (modře) a asynchronní (zeleně) integrátor a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = \{0, 45; 0, 55\}$

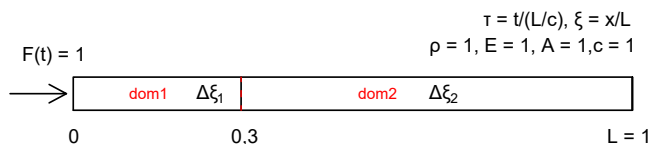
Výstup heterogenního integrátoru (obr. 6.12a modře) se s konvenčním (červeně) téměř shoduje. Řešení obsahuje pouze mírné oscilace na souřadnici  $\xi = 0, 15$  a  $\xi = 0, 35$ . Tato chyba se šíří od rozhraní domén směrem doleva k počátku tyče.

Asynchronní integrátor (obr. 6.12b zeleně) je na rozhraní též stabilní, dochází pouze k antisymetrické oscilaci napětí okolo teoretické amplitudy (černě). Celkový charakter oscilací se oproti konvenční integraci (červeně) nemění.

Opět lze obecně prohlásit, že výsledky dekomponovaného modelu (modře a zeleně) se dostatečně shodují s výsledky integrace na jedné doméně bez přítomných rozhraní (červeně) a doménová dekompozice probíhá i v tomto případě úspěšně.

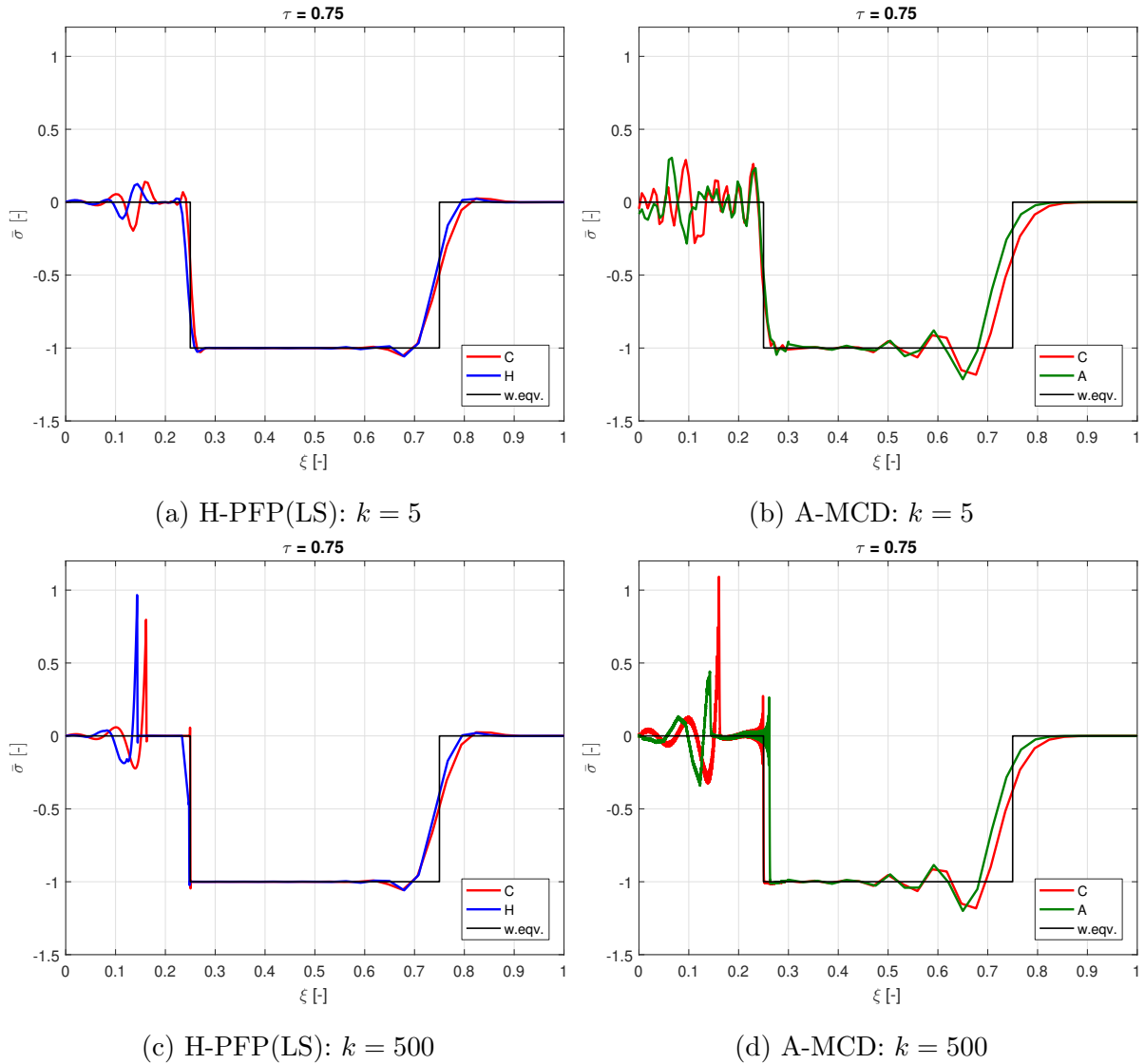
### 6.1.4.3 Skokově nepravidelná síť

Předpis pro velikost elementů (6.1.2) zůstává v platnosti i pro případ porovnání s heterogenním a asynchronním integrátorem (obr. 6.14), viz obr. 6.13.



Obrázek 6.13: Schéma úlohy

V případě integrátorů, které využívají doménové dekompozice (H a A) by případná aktivace Local stepping neměla na výsledné pulzy vliv, jelikož v rámci domény je Courantovo číslo elementů  $C_0^e$  stejné pro každý element. V případě konvenčního integrátoru (C (LS)) byla funkce LS aktivována, aby byla metoda řešení co nejpodobnější a aby tak bylo možné porovnat především vliv dekompozice modelu (resp. vliv rozhraní na souřadnici  $\xi = 0, 3$ ). Jsou porovnány pouze dva krajní případy poměru  $C_0^e$ :  $k = 5$  (obr. 6.14a-6.14b) a  $k = 500$  (obr. 6.14c-6.14d).



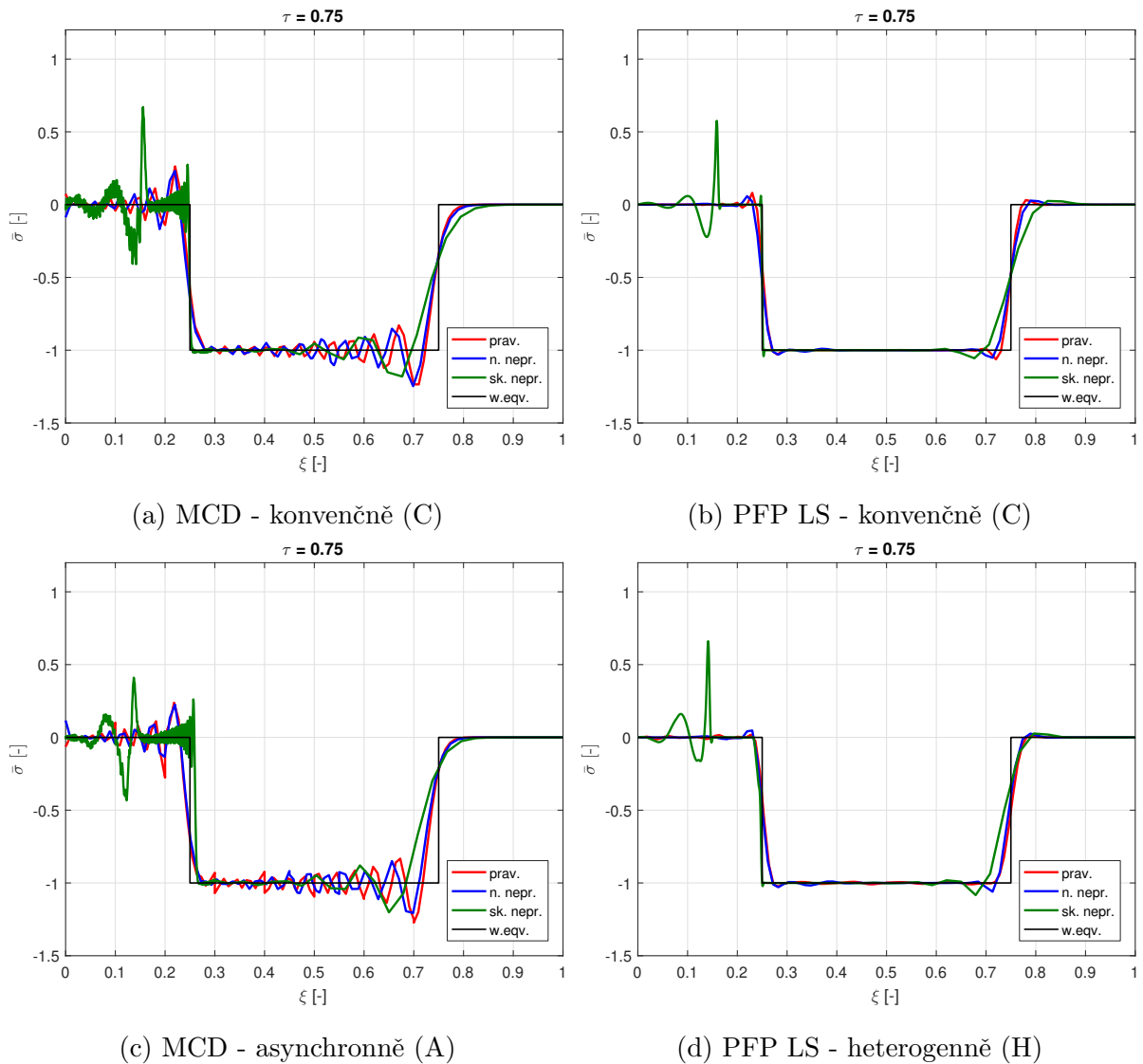
Obrázek 6.14: Napěťový pulz v homogenní tyči se skokově nepravidelnou sítí - konvenční (červeně), heterogenní (modře) a asynchronní (zeleně) integrátor a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = 0, 3$

Z výsledků plyne, že dekompozice a výpočet heterogenním a asynchronním nemá na průběhy žádný negativní vliv. V případě heterogenního integrátoru (obr. 6.14 vlevo) je kvalitativní rozdíl zanedbatelný a to i v případě vysokého poměru Courantových čísel. Vedle toho u asynchronní integrace došlo v tomto případě k utlumení lokálního extrému na souřadnici  $\xi = 0, 15$ , což je svým způsobem vliv pozitivní.

### 6.1.5 Shrnutí výsledků

V tomto odstavci jsou porovnány výsledné pulzy z úlohy s pravidelnou i nepravidelnou sítí jednotlivě pro každý integrátor. To umožňuje sledovat míru závislosti výsledků na pravidelnosti sítě pro každý integrátor zvlášť. V ideálním případě by se výsledky v rámci

každého z grafů (obr. 6.15) neměly lišit - to by znamenalo, že výsledky nezávisí na typu sítě. Opět jsou prezentovány výsledky pro Metodu centrálních diferencí (vlevo) i metodu Pushforward-pullback (vpravo).



Obrázek 6.15: Napěťový pulz v homogenní tyči pro všechny typy sítě - pravidelná (červeně), náhodně nepravidelná (modře) a skokově nepravidelná  $k = 50$  (zeleně) a řešení vlnové rovnice (černě) - konvenční integrátor (nahore), heterogenní (uprostřed) a asynchronní (dole)

Výsledky jsou pro všechny simulace velmi podobné (obr. 6.15). Při detailnějším rozboru však lze pozorovat aspekty typické pro jednotlivé integrátory a metody integrace. Řešení metodou centrálních diferencí (obr. 6.15 vlevo) obsahuje na rozdíl od metody pushforward-pullback (obr. 6.15 vpravo) značné oscilace. Toto typické chování platí obecně a nebude nadále komentováno.

**Konvenční integrátor** (obr. 6.15 nahoře) počítá úlohu na jedné doméně, fyzická rozhraní v tomto případě neexistují. Tato jedna doména je stále rozdělena na daný počet regionů dle typu použité sítě (1 region - pravidelná síť červeně, 3 regiony - náhodně nepravidelná síť modře, 2 regiony - skokově nepravidelná síť zeleně). V případě skokově nepravidelné sítě (zeleně) je pozorovatelná chyba na souřadnici  $\xi = 0, 15$ , která má původ vzniku právě v místě hranice regionů ( $\xi = 0, 3$ ), odkud se šíří. Příklad pravidelné (červeně) a náhodně nepravidelné (modře) sítě vede na uspokojivé výsledky.

**Heterogenní integrátor** (obr. 6.15d) počítá úlohu na doménách, které délkou odpovídají jednotlivým regionům s výjimkou pravidelné sítě (červeně), kdy je tyč záměrně rovnoměrně rozdělena na 10 na sebe navazujících domén. Právě na pravidelné síti není vliv rozhraní pozorovatelný, což je vlastnost velmi žádoucí. V případě náhodně nepravidelné sítě (modře) lze vliv rozhraní pozorovat jako mírné oscilace napětí. U skokově nepravidelné sítě (zeleně) je pozorovatelná chyba ( $\xi = 0, 15$ ), která se šíří tyčí od místa rozhraní.

**Asynchronní integrátor** (obr. 6.15c) počítá úlohu na identické konfiguraci domén, jako je tomu v případě heterogenního integrátoru. Na rozhraních domén je pozorovatelná antisymetrická odchylka napětí od teoretické hodnoty (černě). V případě skokově nepravidelné sítě (zeleně) je na souřadnici  $\xi = 0, 15$  pozorovatelná chyba, která se šíří od rozhraní ( $\xi = 0, 15$ ). Oproti konvenčnímu integrátoru (obr. 6.15a) je tato chyba méně patrná.

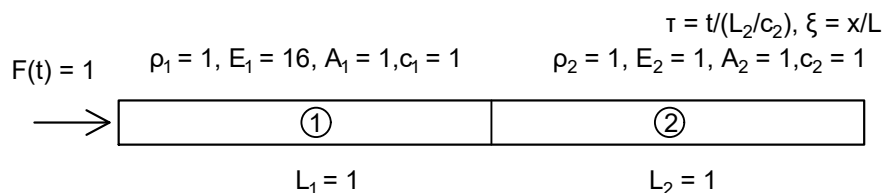
Výsledky se na dekompovaném modelu (obr. 6.15 dole) liší pouze nepatrně. Navíc se jedná o mezní případy. Na pravidelné síti (červeně) je pouhých 10 elementů na každé doméně. Domény reálných úloh mají zpravidla stovky či tisíce elementů a chyba rozhraní tak se v prostoru „rozprostře“. Celkovým pohledem na průběhy (obr. 6.15) lze odvodit, že doménová dekompozice nemá znatelný negativní vliv na výsledky, a to jak v případě heterogenního, tak ani v případě asynchronního integrátoru.

## 6.2 Problém nespojitého rozhraní

Je testován případ šířeny vlny bimateriálovou tyčí (tab. 6.3). Zadání je převzato z [29]. Počáteční podmínky jsou homogenní, tyč je vpravo vetknuta (obr. 6.16).

Parametr	Region ① (vlevo)	Region ② (vpravo)
Délka $L_i$ [m]	1	1
Youngův modul $E_i$ [Pa]	16	1
Hustota $\rho_i$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1	1
Fázová rychlost $c_i$ [m/s]	4	1
Akustická impedance $Z_i$ [kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	4	1
Zatížení (levý konec) $\sigma_i$ [Pa]	-1	-
Doba zatížení $T_0$ [s]	0,5 $L_1/c_1 = 0.125$	
Doba simulace $T$ [s]	1,8 $L_1/c_1 = 0.45$	

Tabulka 6.3: Zadání úlohy šíření vlny bimateriálovou tyčí



Obrázek 6.16: Schéma úlohy

## 6.2.1 Analytické řešení

Analytické řešení vlnové rovnice lze získat přímo z koeficientů odrazu ( $C_r$ ) a přenosu ( $C_t$ ). Jejich odvození je uvedeno v kapitole 2.1.4.2. Tyto koeficienty vyjadřují amplitudu vlny odražené od rozhraní a vlny prošířené rozhraním. Rychlost vlny je na každém z regionů tyče konstantní, analytické řešení lze tedy sestavit pomocí vzorců koeficientů (6.2.1), kde  $E_i$  a  $\rho_i$  jsou Youngův modul pružnosti a hustota materiálu regionu  $i$  a  $s$  dráha pohybu čela vlny (6.2.2), kde  $c_i$  je rychlost vlny na regionu  $i$  (6.2.3), .

$$\begin{aligned}C_r &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -0,6 \\C_t &= \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = 0,4\end{aligned}\tag{6.2.1}$$

kde  $Z_i = \sqrt{E_i \rho_i}$  je akustická impedance

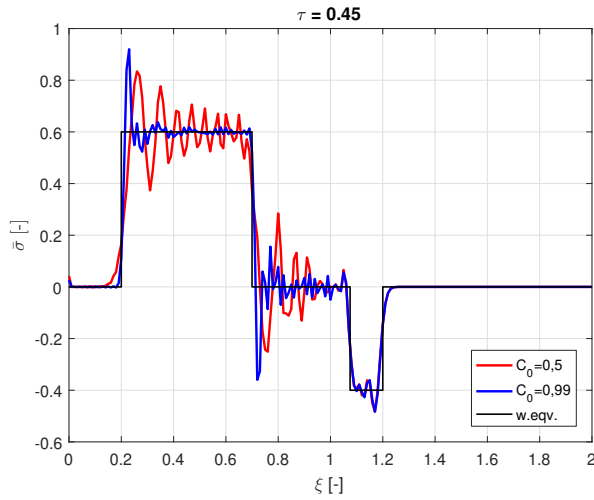
$$s = c_i \cdot t\tag{6.2.2}$$

$$c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}\tag{6.2.3}$$

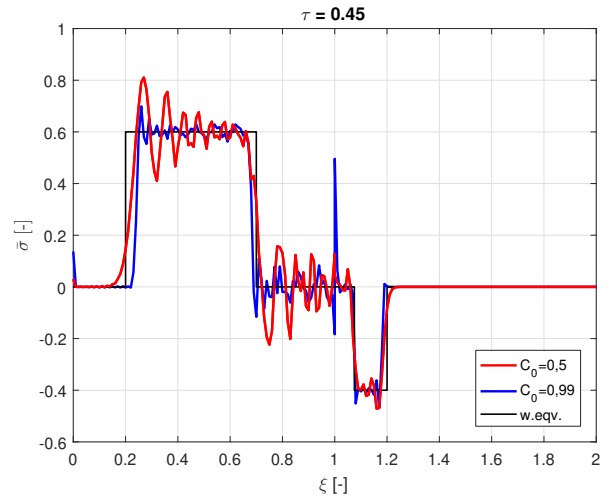
## 6.2.2 Numerické řešení

Výsledky jsou prezentovány ve formě, která dovoluje popsat vliv Courantova čísla  $C_0$  a zároveň vliv doménové dekompozice (obr. 6.17). Vedle výchozího nastavení (viz úvod kap. 6), kdy  $C_0 = 0,5$ , je testován i případ téměř kritického výpočtového kroku  $C_0 = 0,99$  \*.

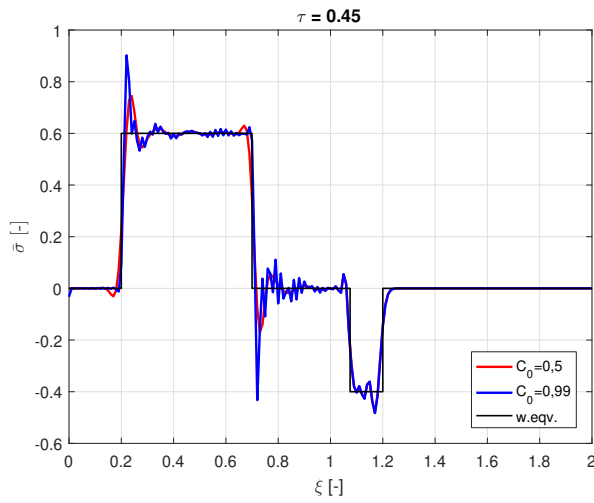
\* V případě heterogenního integrátoru bylo nutné pro zaručení stability snížit původní hodnotu  $C_0 = 0,99$  na  $C_0 = 0,8$



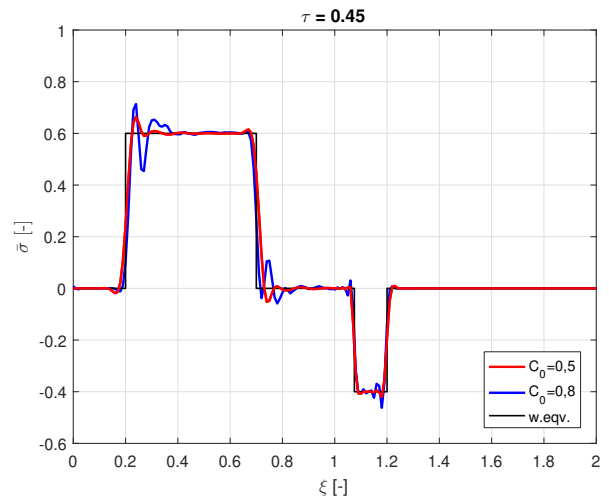
(a) C-MCD



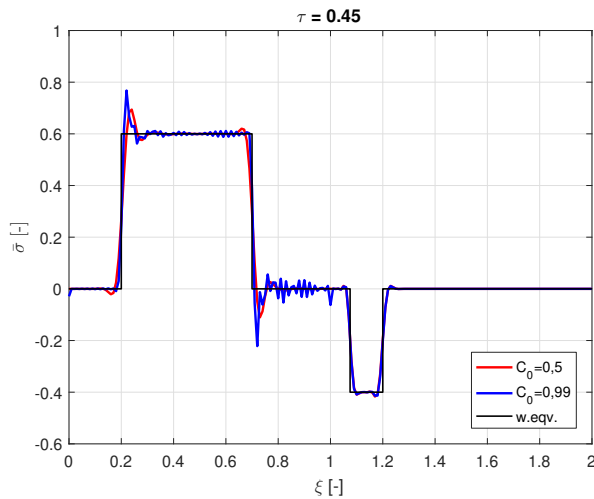
(b) A-MCD



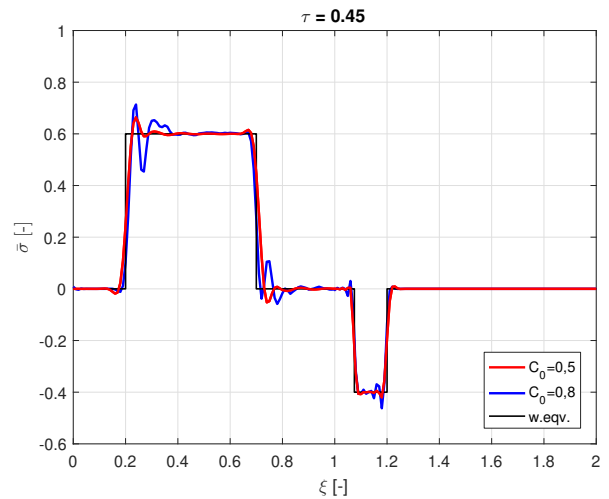
(c) C-PFP



(d) H-PFP



(e) C-PFP LS



(f) H-PFP LS

Obrázek 6.17: Napěťový pulz v heterogenní tyči -  $C_0 = 0,5$  (červeně),  $C_0 = 0,99$  \* (modře) a řešení vlnové rovnice (černě) - Metoda centrálních diferencí (nahore), Pushforward-pullback metoda (uprostřed), s aktivním Local stepping (dole), rozhraní  $\xi = 1$



**Obecně** lze z uvedených průběhů vyvodit, že metoda Pushforward-pullback (obr. 6.17a-b) vede oproti Metodě centrálních diferencí (obr. 6.17c-f) na výsledky s méně intenzivními oscilacemi.

**V případě nedekomponovaného modelu (obr. 6.17a,c,e)** se jedná o výpočet s jedním globálním krokem (konvenční integrátor). Na výstupech Metody centrálních diferencí (obr. 6.17a) lze zřetelně pozorovat vliv hodnoty Courantova čísla úlohy  $C_0$ . Jelikož se dva definované regiony na tyči liší pouze v hodnotě Youngova modulu  $E$  (tab. 6.3), má každý region své vlastní Courantovo číslo  $C_0^{reg_i}$ . Hodnoty Courantova čísla úlohy  $C_0$  uvedené v legendě grafu odpovídají Courantově číslu na prvním regionu ① ( $E_1 = 16$ )  $C_0^{reg_1}$ . Pro druhý region ② ( $E_2 = 1$ ) je  $C_0^{reg_2}$  reálně 4x nižší. Průběhy napětí pro  $C_0 = 0,5$  (červeně) a  $C_0 = 0,99$  (modře) se liší pouze na prvním regionu. Na druhém regionu jsou průběhy shodné. To je dáno faktem, že významný vliv na rozdílnost výsledků má především absolutní rozdíl  $C_0$  jednotlivých případů. Jestliže se pro první region jedná o případy  $C_0^{reg_1} = \{0,5; 0,99\}$ , čemuž odpovídá absolutní rozdíl  $\Delta C_0^{reg_1} = 0,49$ , pak pro druhý region a odpovídající hodnoty  $C_0^{reg_1} = \{0,125; 0,2475\}$  je rozdíl pouze  $\Delta C_0^{reg_2} = 0,1225$ , což je změna zanedbatelná.

**Výhody doménové dekompozice (obr. 6.17b,d,f)** lze odvodit z porovnání výsledků obrázcích 6.17c (konvenčně) a 6.17d (heterogenně). Bez ohledu na fakt, že se jedná o výpočet metodou Pushforward-pullback, platí stejné závěry, jako o výsledcích Metody centrálních diferencí popsanych v předchozím odstavci. V konvenčním případě (obr. 6.17c) se jedná o jednu tyč se dvěma regiony. Každý region má vlastní hodnotu  $C_0^{reg_i}$  a závislost na  $C_0$  se pro každý region liší. Při doménové dekompozici je situace zcela odlišná (obr. 6.17d). Tyč je dle regionů rozdělena na dvě domény a každá doména je počítána svým vlastním časovým krokem. Doménovou dekompozicí *dochází k homogenizaci*  $C_0^{reg_i}$  na celém modelu a tudíž k *homogenizaci závislosti průběhů na*  $C_0$ . Reálný dopad na výsledky je tedy pozorovatelný na druhém regionu (doméně), kde změna  $C_0$  (červená vs. modrá) má na pulz stejný vliv jako na prvním regionu (doméně).

**Local stepping (obr. 6.17e,f)** je velmi speciální případ. Tato funkce zohledňuje při predikci posuvů a rychlosti vlastní frekvence jednotlivých elementů. Ačkoli se v případě nedekomponovaného modelu (obr. 6.17e) jedná o výpočet jedním globálním krokem, vykazuje celý model *homogenizovanou závislost na*  $C_0$  a výsledky se v případě  $C_0 = 0,5$  neliší od výstupu heterogenního integrátoru na dekomponovaném modelu (obr. 6.17f).

**Heterogenní a asynchronní integrátor (obr. 6.17d,f)** vykazují komentáře hodné vlastnosti. V případě asynchronní integrace (obr. 6.17b)  $C_0 = 0,99$  (modře) vzniká na rozhraní nespojitost v napětí. Tato chyba antisymetricky osciluje okolo teoretické hodnoty 0 a rozhraní je stabilní. Heterogenní integrátor (obr. 6.17d,f) produkuje nejpřesnější výsledky pro  $C_0 = 0,5$  (červeně). Pro  $C_0 = 0,99$  jsou rozhraní nestabilní a proto jsou prezentovány výsledky pro  $C_0 = 0,8$  (modře), kdy je řešení ještě stabilní, ale již je pozorovatelná chyba na čelech a koncích vln.

Na závěr je vhodné okomentovat shodnost grafů (obr. 6.17d,f). Z principu výše popsaného způsobu výpočtu heterogenního integrátoru a z podstaty funkce Local stepping plyne, že tyto 2 grafy musí být naprosto shodné, což odpovídá a výsledky jsou se všemi uvedenými komentáři konzistentní.

### 6.2.3 Porovnání s výstupy komerčního SW

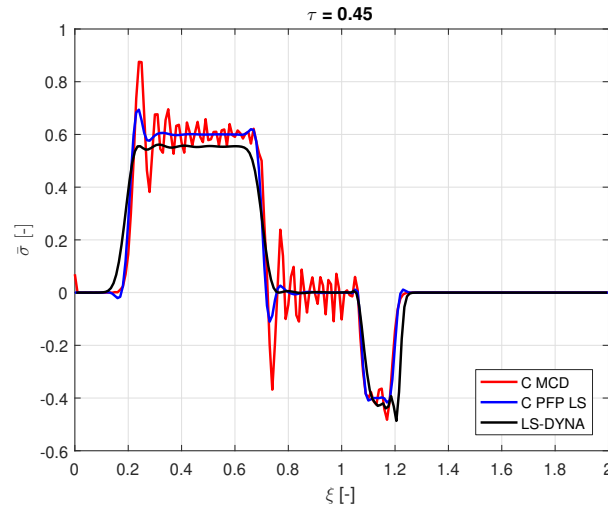
Jsou porovnány výstupy vlastního řešiče a komerčního software LS-DYNA a ABAQUS. Tyto celosvětově používané programy vynikají svojí univerzalitou, efektivitou a robustností. Tyto vlastnosti jsou však „vykoupeny“ jejich fyzikální nekonzistentností zapříčiněnou přidáním stabilizačních členů ve formulaci a přímým numerickým tlumením. V řešení se sice obvykle neobjevují numerické oscilace, ale dochází k disipaci energie, proto je nutné sledovat průběh celkové energie pro každou řešenou úlohu.

#### 6.2.3.1 LS-DYNA

Podrobnou citlivostní studii řešiče LS-DYNA lze nalézt v předchozích pracích [18,26]. Tento program je určen pro řešení nelineárních problémů (kontaktní úloha, komplexní materiály, velké deformace). Explicitní řešič využívá metodu centrálních diferencí [27]. Z toho důvodu jsou výsledky softwaru LS-DYNA porovnány právě s Metodou centrálních diferencí. Navíc je porovnáno i řešení Metody pushforward-pullback s aktivním Local stepping. Výpočet probíhá na jedné heterogenní doméně.

Na obrázku 6.18 jsou znázorněny průběhy napětí v konečném čase simulace. Řešič LS-DYNA neumožňuje vypnutí uvažování nelineární geometrie (na rozdíl od programu ABAQUS - parametr  $NLgeom$ ) pro element typu *truss* (2 uzly, pouze translace, 3D - 6 stupňů volnosti), pravděpodobně z tohoto důvodu jsou amplitudy odlišné od ostatních řešení. Metoda centrálních diferencí implementovaná v této práci (červeně) a softwaru LS-DYNA (černě) má souhlasně nastavený faktor kritického kroku na hodnotu 0,9, tudíž by numerické oscilace měly mít stejný charakter. Ukazuje se, že Metoda centrálních diferencí v

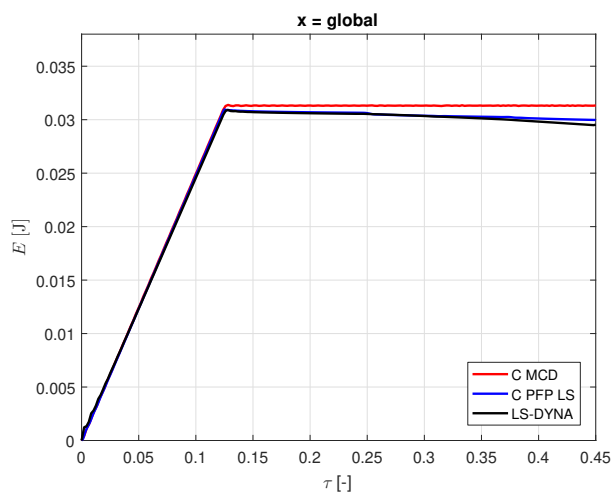
řešiči LS-DYNA je implementovaná v určité modifikaci, jelikož oscilace jsou evidentně na prvním regionu tlumeny obdobným způsobem, jako u Metody pushforward-pullback (modře), dokonce ještě efektivněji.



Obrázek 6.18: Napěťový pulz v heterogenní tyči - nedekompaný model - Metoda centrálních diferencí (červeně), Metoda Pushforward-pullback s aktivním Local stepping (modře), řešení LS-DYNA (černě)

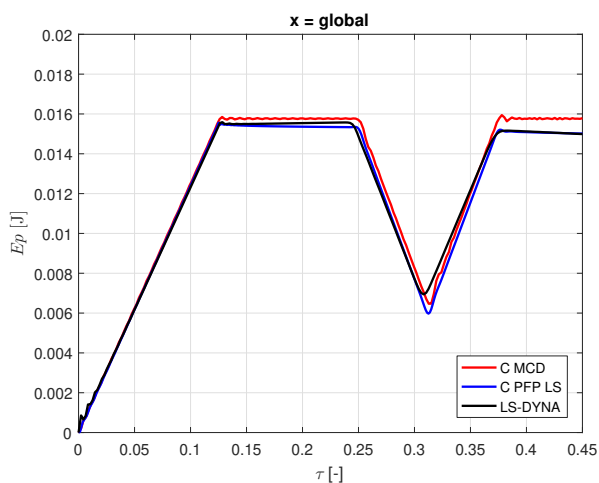
Při bližším zkoumání transmisní vlny (přenesené tlakové) si lze všimnout, že Metoda pushforward-pullback s aktivním Local stepping (modře) určitým způsobem vyniká. Jak bylo zmíněno, jedná se o výpočet na jedné heterogenní doméně a časový krok je určen kritickým krokem na regionu 1 ( $\xi < 1$ ). Region 2 ( $\xi > 1$ ) je počítán s násobně nižším Courantovým číslem (tab. 6.3), což evidentně negativně ovlivňuje řešič LS-DYNA (černě) a vznikají na přenesené vlně oscilace stejného charakteru, jako u Metody centrálních diferencí implementované v této práci (červeně). Vedle toho právě Local stepping (modře) zajišťuje zohlednění Courantova čísla každého regionu (každého elementu) odděleně a oscilace jsou tlumeny stejně efektivně, jako na vlně odražené.

Porovnání průběhů celkové energie modelu je na obrázku 6.19. Výsledky odpovídají předpokladům. Metoda centrálních diferencí implementovaná v této práci (červeně) nedisipuje. Metoda pushforward-pullback i Metoda centrálních diferencí řešiče LS-DYNA disipují, a to srovnatelně. Je tedy zřejmé, že v programu LS-DYNA není Metoda centrálních diferencí implementována v základním tvaru, ale je určitým způsobem modifikovaná tak, aby se tlumily numerické oscilace za cenu disipace energie.

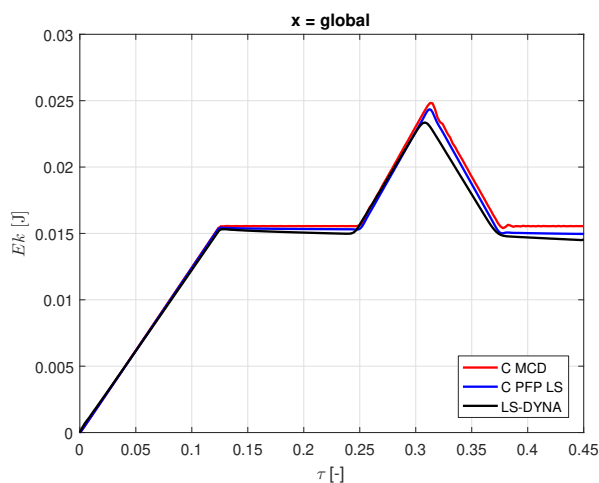


Obrázek 6.19: Celková energie modelu - nedekomponovaný model - Metoda centrálních diferencí (červeně), Metoda Pushforward-pullback s aktivním Local stepping (modře), řešení LS-DYNA (černě)

Pro úplnost jsou uvedeny průběhy jednotlivých složek energie, a to vnitřní (obr. 6.20a) a kinetické (obr. 6.20b).



(a) Kinetická energie



(b) Potenciální energie

Obrázek 6.20: Časové průběhy energií modelu - nedekomponovaný model - Metoda centrálních diferencí (červeně), Metoda Pushforward-pullback s aktivním Local stepping (modře), řešení LS-DYNA (černě)

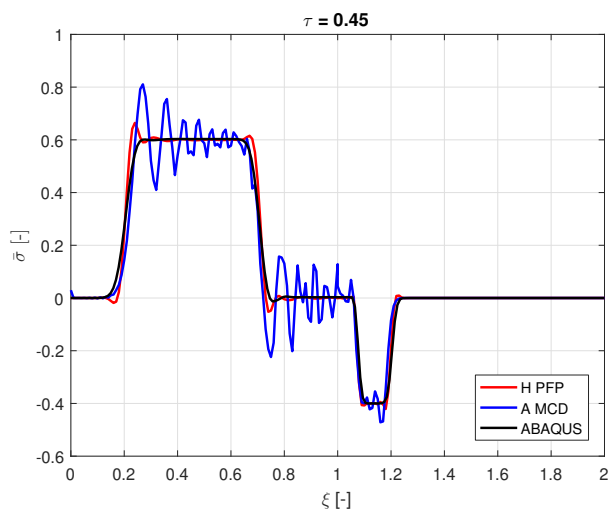
### 6.2.3.2 ABAQUS

Tento program obsahuje několik modulů, z nichž jeden je explicitní řešič. Tento řešič umožňuje jednoduché zavedení doménové dekompozice (*subcycling*), čehož je využito a výsledky jsou porovnány s heterogenním a asynchronním integrátorem. Navíc ABAQUS

umožňuje jednoduché vypnutí efektu nelineární geometrie (parametr  $NLgeom$ ), čehož bylo využito též.

Z popisu metody *subcycling* v manuálu [28] vyplývá, že se jedná o heterogenní integraci. Poměr výpočtových kroků musí být tedy celočíselný a existuje časová hladina, kde je známo řešení na obou doménách. Během „sub-cyklování“ na doméně 1 je uvažována konstantní rychlost rozhraní na doméně 2 a tudíž posuvy se mění lineárně. Jak bylo uvedeno v teoretické části práce (kap. 4.2.1), metody založené na lineární interpolaci veličin na rozhraní disipují a lze očekávat ztrátu energie na rozhraní. Bylo ověřeno, že program ABAQUS využil pro každou doménu vlastní časový krok s vzájemným poměrem  $\Delta t_{dom1}/\Delta t_{dom2} = 4$  (tab. 6.3).

Na obrázku 6.21 je porovnán průběh napětí na dekomponovaném modelu v konečném čase simulace. Amplitudy si odpovídají pro odraženou i přenesenou vlnu. Na řešení softwaru ABAQUS (černě) nejsou pozorovatelné žádné oscilace, tudíž lze očekávat vysokou disipaci energie. Průběh je velmi podobný řešení heterogenního integrátoru implementovaného v této práci (červeně).

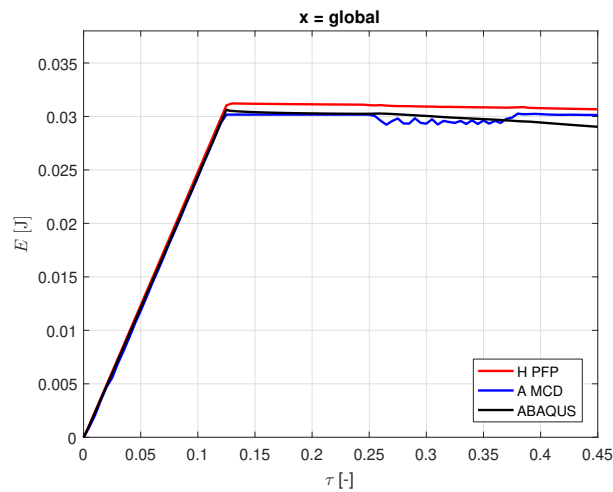


Obrázek 6.21: Napěťový pulz v heterogenní tyči - dekomponovaný model - Heterogenní integrátor s metodou PFP (červeně), Asynchronní integrátor s metodou MCD (modře), řešení ABAQUS (černě)

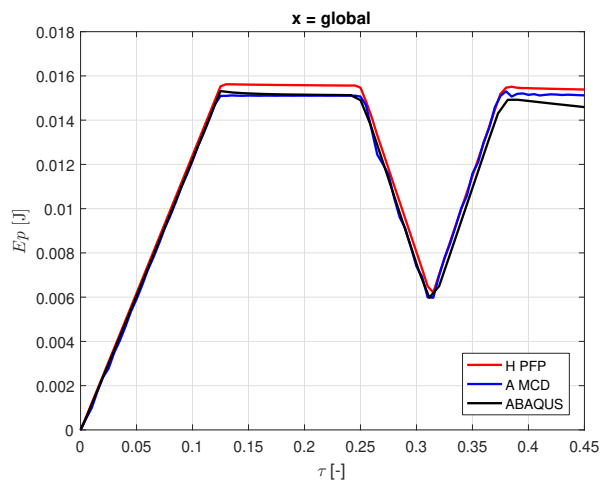
Na obrázku 6.22 jsou vykresleny časové průběhy energie a na obrázku 6.23 potom jednotlivé složky. Každá z metod disipuje již ze své podstaty. Na řešení s nejméně disipovanou energií vede heterogenní integrátor implementovaný v této práci (červeně). Jeho disipace je však způsobena samotným použitím Metody pushforward-pullback, nikoliv formulací na rozhraní, která je fyzikálně konzistentní. Vedle toho implementovaný asyn-

chronní integrátor s Metodou centrálních diferencí (modře) vykazuje neobvyklé chování pouze na rozhraní (viz obr. 6.22  $\tau = (0, 25; 0, 375)$ ), kde dochází k dočasné „ztrátě“ energie, která se však po interakci vlny s rozhraním vrátí zpět do systému. To může být způsobeno složitým předáváním výsledků mezi doménami při asynchronní integraci, kdy k výstupu dochází v určité časy, do kterých musí být řešení jednotlivých domén lineárně interpolováno.

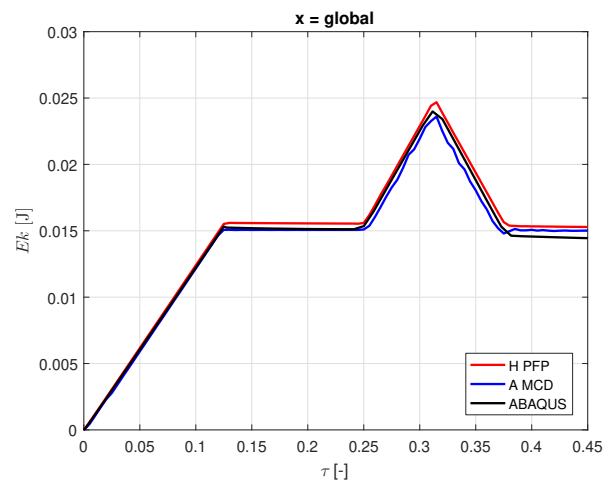
V případě řešení programu ABAQUS (černě) je disipace vysoká dle očekávání a od času  $\tau = 0, 25$  dochází k rychlému poklesu jednotlivých složek energie a tudíž energie celkové.



Obrázek 6.22: Celková energie modelu - dekomponovaný model - Heterogenní integrátor s metodou PFP (červeně), Asynchronní integrátor s metodou MCD (modře), řešení ABAQUS (černě)



(a) Kinetická energie



(b) Potenciální energie

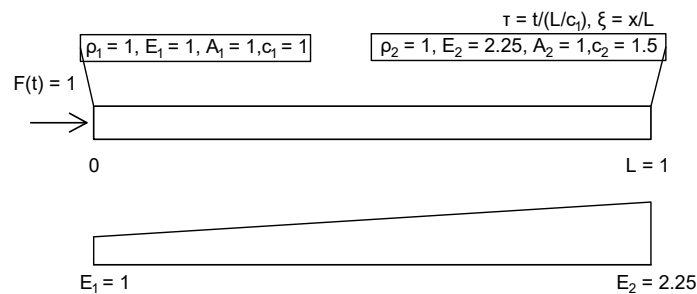
Obrázek 6.23: Časové průběhy energií modelu - dekomponovaný model - Heterogenní integrátor s metodou PFP (červeně), Asynchronní integrátor s metodou MCD, řešení ABAQUS (černě)

## 6.3 Šíření elastické vlny gradovaným prostředím

Doposud byly testovány pouze případy materiálů homogenního, případně z regionů s rozdílným (ale konstantním) Youngovým modulem  $E$  složeného, modelu. Nyní je počítán případ gradovaného materiálu, tedy tyče s lineárně proměnným Youngovým modulem  $E_{(x)}$  (obr. 6.24). Přesné krajní parametry úlohy jsou uvedeny v tabulce 6.4.

Parametr	Levý konec	Pravý konec
Youngův modul $E_i$ [Pa]	1	2,25
Hustota $\rho_i$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1	1
Fázová rychlost $c_i$ [m/s]	1	1,5
Akustická impedance $Z_i$ [kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	1	0,5
Zatížení $\sigma_i$ [Pa]	1	-
Doba zatížení $T_0$ [s]	0,75L/c <sub>1</sub> = 0,75	
Doba simulace $T$ [s]	0,75L <sub>1</sub> /c <sub>1</sub> = 0,75	
Délka tyče $L$ [m]	1	

Tabulka 6.4: Zadání úlohy šíření vlny gradovanou tyčí



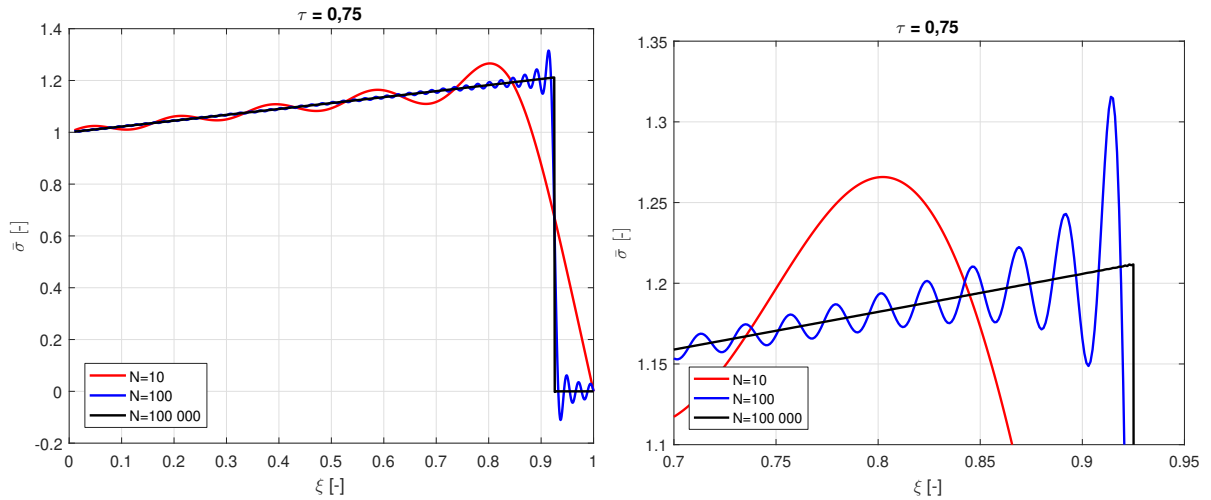
Obrázek 6.24: Schéma úlohy

### 6.3.1 Analytické řešení

Pro získání analytického řešení byl použit program autora Hory, založený na Breptově výzkumné zprávě [30]. Řešení je získáno částečným součtem nekonečné řady. Příklady



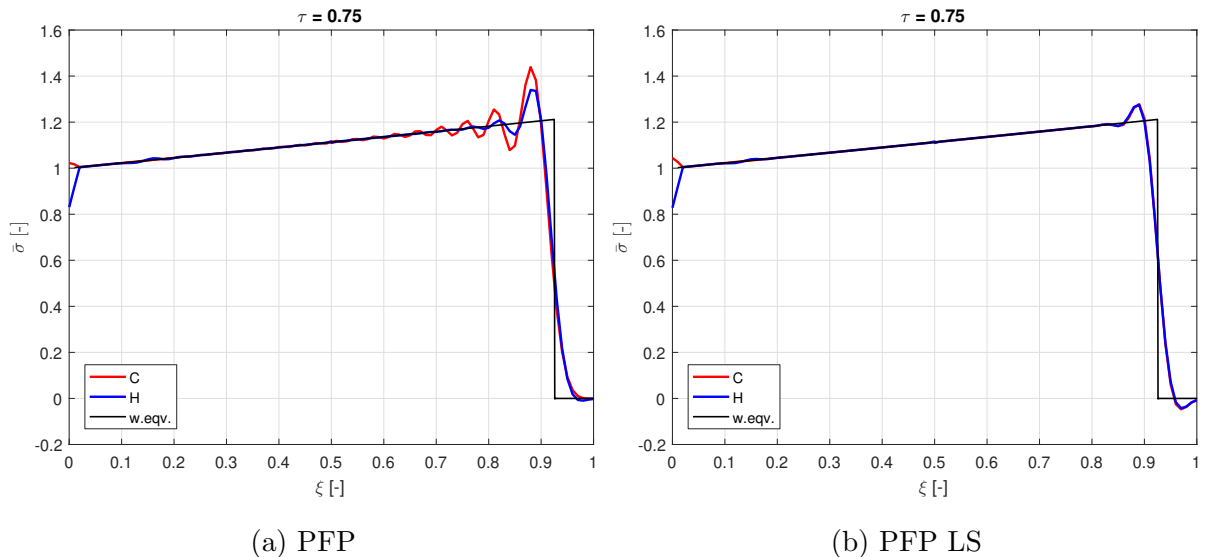
průběhů pro různý počet sčítanců  $N$  jsou na obrázku 6.25. V případě  $N = 100000$  (černě) se v řešení nevyskytují pozorovatelné oscilace a toto řešení je dále bráno jako analytické.



Obrázek 6.25: Napěťový pulz v lineárně heterogenní tyči - 10 sčítanců sumy analytického řešení programem [30] (červeně), 100 sčítanců (modře) a 100 000 sčítanců (černě)

### 6.3.2 Heterogenní časový integrátor

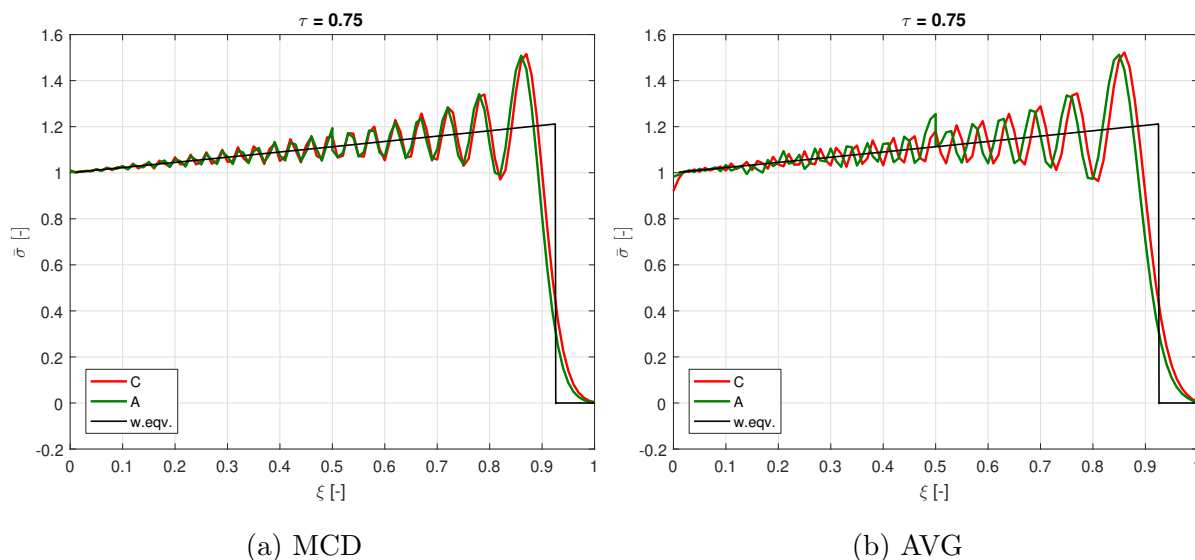
Je zřejmé, že doménová dekompozice (obr. 6.26 modře) nemá na výsledky oproti integraci na jedné doméně téměř žádný vliv. V případě použití Local stepping (obr. 6.26 vpravo) jsou výstupy obou integrátorů nerozlišitelné.



Obrázek 6.26: Napěťový pulz v lineárně heterogenní tyči - konvenční (červeně), heterogenní (modře) a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = \{0, 45; 0, 55\}$

### 6.3.3 Asynchronní časový integrátor

V případě asynchronního integrátoru (obr. 6.27) je pozorovatelná chyba na rozhraní domén ( $\xi = 0,5$ ). U metody průměrného zrychlení (obr. 6.27 vpravo), což je implicitní metoda, je chyba ztelnější, než v případě explicitní metody centrálních diferencí (obr. 6.27 vlevo). Chyba má kmitavý charakter v okolí teoretické amplitudy.



Obrázek 6.27: Napěťový pulz v lineárně heterogenní tyči - konvenční (červeně), asynchronní (zeleně) a řešení vlnové rovnice (černě) - rozhraní regionů  $\xi = \{0,45; 0,55\}$

V případě asynchronní integrace je oproti heterogenní vliv rozhraní pozorovatelný. Nicméně to je pravděpodobně důsledek rozdílné metody integrace obou integrátorů (heterogenní integrátor - metoda Pushforward-pullback, asynchronní integrátor - Newmarkova metoda). Metoda PFP je pro přenos informací přes rozhraní obecně vhodnější, než Newmarkovy metody, jak výsledky této práce doposud ukazují.

## 6.4 Porovnání numerického řešení s experimentem

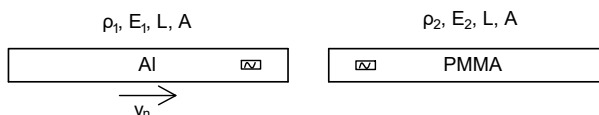
Pro porovnání s experimentem byla využita modifikovaná část sestavy OHPB (otevřená tlaková Hopkinsonova tyč) v Laboratoři rychlých dějů Ústavu mechaniky a materiálů, Fakulty dopravní, ČVUT V Praze. Podrobnosti o zařízení a způsobu měření lze nalézt v [1,2,3,4,5].

Pro potřeby srovnání experimentálních dat s výstupy kódu vytvořeného v rámci této práce byl proměřen případ rázu dvou tyčí z odlišných materiálů. Incidentní tyč je vyrobena z hliníkové slitiny EN-AW-7075-T6, transmisní z Polymethylmethakrylátu (tab. 6.5), viz obr. 6.28.

Parametr	Incidentní tyč (Al)	Transmisní tyč (PMMA)
Délka $L_i$ [m]	1,598	1,600
Youngův modul $E_i$ [GPa]	72	5*
Hustota $\rho_i$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2803	1180
Fázová rychlost $c_i$ [m/s]	5096	2100*
Počáteční rychlost $v_0$ [m/s]	$v_0 \in (2; 11)$	0

Tabulka 6.5: Parametry modifikované části sestavy OHPB

\* Udávaná hodnota Youngova modulu a fázové rychlosti tyče PMMA platí přibližně pro vlny o frekvenci 1 – 5 kHz. Materiál PMMA je viskoelastický, což se projevuje zvláště při vyšších rychlostech deformace. Hodnotu Youngova modulu  $E_{PMMA}$  je však nutné explicitně zadat do stávajícího řešiče jako jedinou hodnotu, což vnáší určitou chybu do řešení.



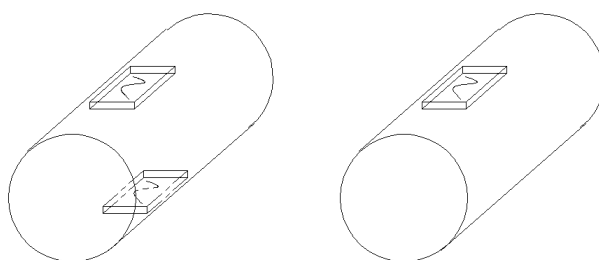
Obrázek 6.28: Schéma úlohy

## 6.4.1 Konfigurace měření

Pro získání časových průběhů veličin k porovnání jsou použity dva typy snímačů

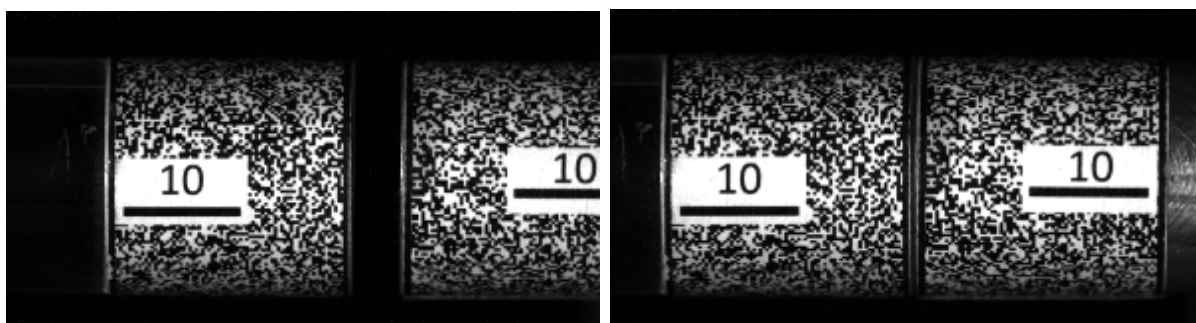
- tenzometrické měřiče na obou tyčích 200 mm místa kontaktu pro získání deformace [3]
- rychlokamera *Photron SA-Z 2100K 210 000 FPS* pro snímání rozhraní tyčí pro určení rychlosti pomocí digitální korelace obrazu (DIC) [31]

Tenzometrické měřiče jsou uspořádány v konfiguraci půl-mostu (obr. 6.29 vlevo). Tím je teoreticky eliminován ohyb, který vzniká reálně nerovnoměrným dopadem tyče Al na tyč PMMA. Rozhraní těchto dvou odlišných materiálů je velmi komplexní kontaktní úlohou. Malé odchylky od přímého dopadu incidentní tyče na tyč transmisní mohou vést na zkreslení výsledků, jehož charakter nelze bez podrobnější analýzy predikovat. Konfigurace půl-mostu by na rozdíl od čtvrt-mostu (obr. 6.29 vpravo) měla toto zkreslení do určité míry omezit. Na incidentní tyči byly instalovány dvě konfigurace typu půl-most vzájemně pootočené o 90°. Výstup byl definován jakožto aritmetický průměr signálů z obou půl-mostových konfigurací.



Obrázek 6.29: Tenzometrický měřič v konfiguraci půl-most (vlevo - použitá) a čtvrt-most (vpravo)

Pro potřeby digitální korelace byly konce tyčí v kontaktu zvýrazněny speciální texturou (obr. 6.30), která umožňuje přesné trasování pohybu.



Obrázek 6.30: Detail místa kontaktu před okamžikem nárazu (vlevo) a po něm (vpravo)

## 6.4.2 Výstupy měření

Pomocí uvedených snímačů jsou měřeny časové průběhy těchto veličin:

- rychlosti rozhraní tyčí v kontaktu (měřeno metodou DIC)
- deformace v místě vzdáleném 200 mm od místa kontaktu na obou tyčích (tenzometry) - tato veličina lze na základě znalosti materiálu a geometrie tyčí přepočítat na:
  - rychlost v místě tenzometrických měřičů
  - rychlost čel tyčí v kontaktu
  - kontaktní sílu působící mezi incidentní (Al) i transmisní (PMMA) tyčí

Z uvedeného plyne, že rychlost čel tyčí v kontaktu je měřena jak metodou DIC, tak nepřímo i tenzometry. Tyto, dvěma způsoby získané rychlosti, se nabízí porovnat a tím ověřit správnost měření tenzometrických měřičů. Avšak porovnání musí být obezřetné, jelikož metoda DIC není naprosto spolehlivá resp. přesná. Vzorkovací frekvence DIC je 200 kHz, tenzometry pracují na frekvenci 10 MHz. Navíc rychlost je získána numerickou derivací posuvu a do řešení je tak zaveden intenzivní šum. Ten se odstraní filtrací, čímž se ale zkreslí i hledané průběhy rychlosti. Obecně lze u měření pomocí DIC očekávat hladší průběhy rychlosti proti teoreticky nespojitým změnám, které jsou při rázu dvou tyčí předpokládány. Dalším ukazatelem spolehlivosti a správnosti měření tenzometrů je shoda kontaktních sil na čelech tyčí v kontaktu (platí princip akce a reakce).

Pro samotné porovnání s výsledky řešiče implementovaného v rámci této práce je nejpřirozenější porovnat přímo měřené veličiny, tedy:

1. rychlost rozhraní (DIC)
2. deformace v místě umístění tenzometrů

## 6.4.3 Časové okno měření

Pro porovnání experimentu s numerickým výpočtem je nutné uvažovat pouze takové časové okno, kdy jsou tyče v kontaktu. Pak dochází ke splnutí významu *kontakt* a *rozhraní*. Toto okno lze určit bez obtíží z měření pomocí DIC, jelikož jsou snímány rychlosti obou čel v kontaktu. Časová okna jsou dále určena speciálně pro každý experiment.

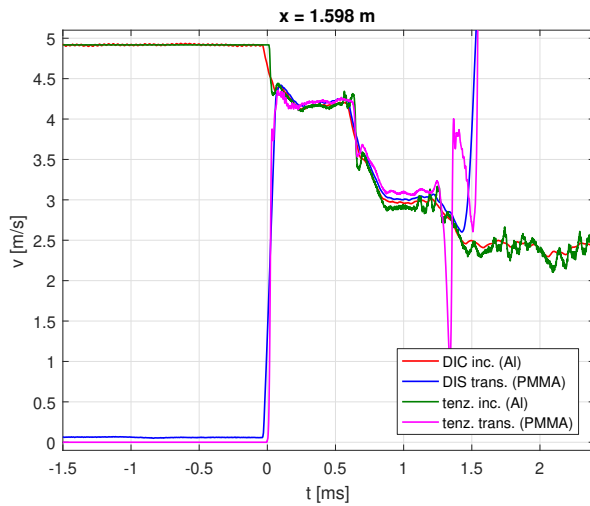
#### 6.4.4 Ověření správnosti měření tenzometry

Celkem bylo provedeno 18 měření (tab. 6.6). Uvedený tlak je přetlak ve vzdušníku, který při rázovém vypuštění urychluje incidentní tyč na odpovídající rychlost. Přesná hodnota nárazové rychlosti je měřena jednak optickými branami, jednak přímo pomocí DIC.

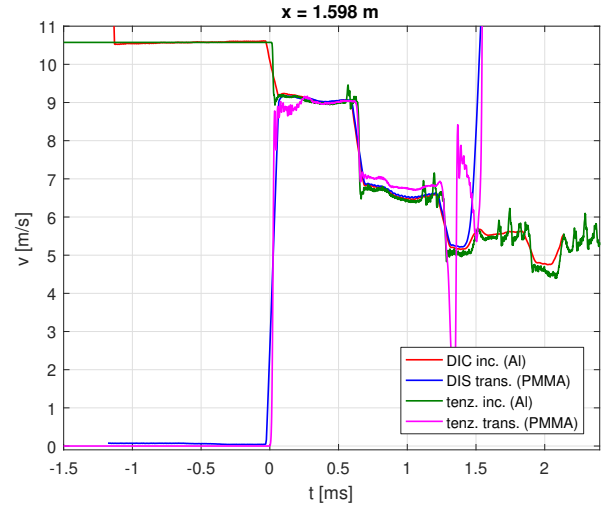
<b>Tlak [bar]</b>	<b>Nárazová rychlost (Al) [m/s]</b>	<b>počet experimentů</b>
0,5	~3,0	3
1,0	~4,8	3
1,5	~6,6	3
2,0	~8,0	3
2,5	~9,3	3
3,0	~10,4	3

Tabulka 6.6: Seznam provedených experimentů

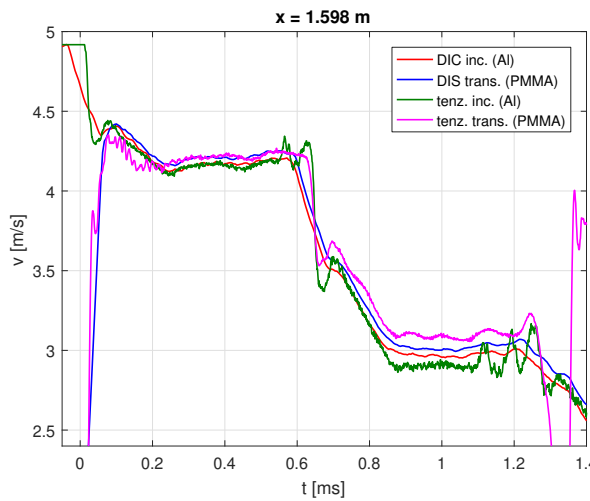
Pro ověření správnosti měření tenzometrů jsou vybrány první a poslední experiment z měřícího dne v laboratoři. Jako první jsou porovnány rychlosti získané z měření pomocí DIC a rychlosti přepočtené do místa kontaktu z deformace měřené pomocí tenzometrů 20 cm od místa kontaktu (obr. 6.31).



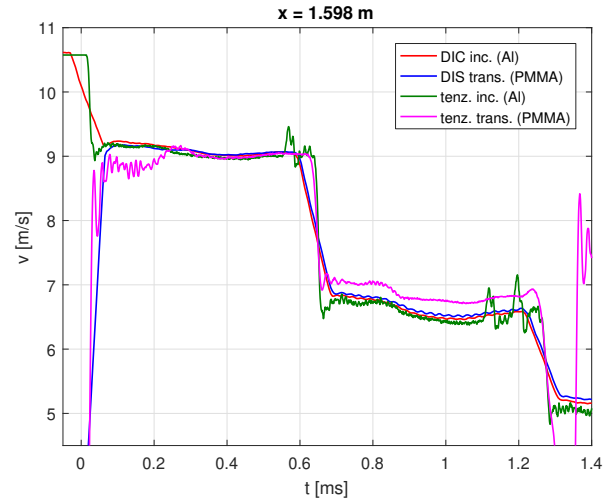
(a) experiment 1



(b) experiment 18



(c) experiment 1 - detail časového okna



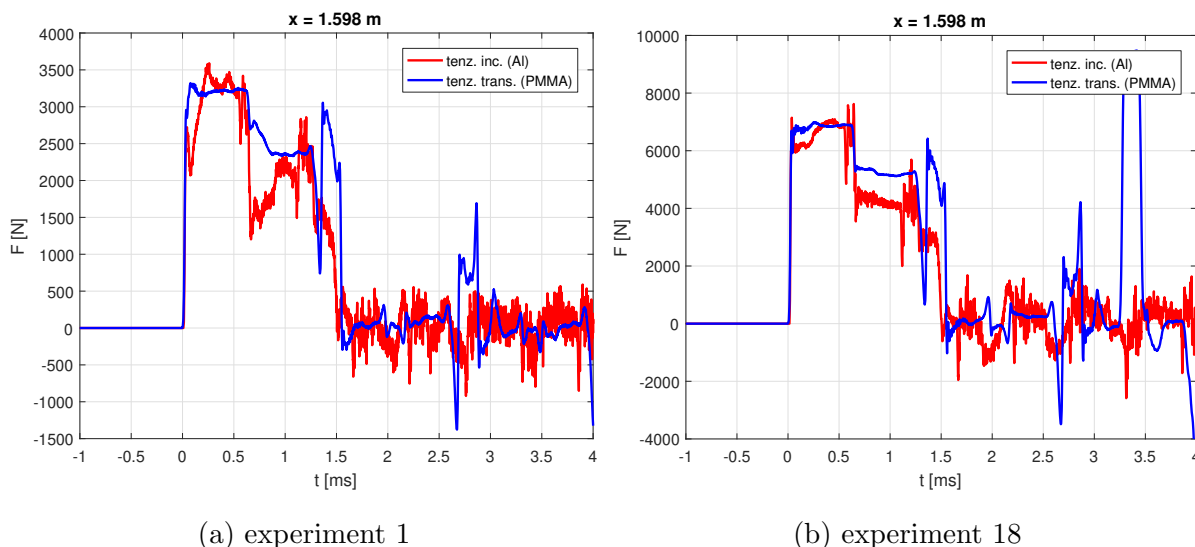
(d) experiment 18 - detail časového okna

Obrázek 6.31: Porovnání přímého měření rychlosti pomocí DIC (červeně a modře) a nepřímého měření tenzometry (zeleně a růžově)

Z grafů (obr.6.31) je zřejmé, že časové okno, kdy jsou v tyče kontaktu je široké přibližně 1,2 ms. Červená a zelená křivka mají počáteční hodnotu odpovídající nárazové rychlosti incidentní tyče (Al). Počáteční hodnota růžové a modré křivky je 0, což odpovídá stavu pohybového klidu transmisní tyče (PMMA) před nárazem.

Detail časového okna je na obrázcích 6.31c-d. Je zřejmé, že měření DIC (červeně čelo incidentní tyče, modře čelo tyče transmisní) je poměrně přesné. Křivky se v časovém okně téměř překrývají. Vedle toho rychlost určená přepočtem z lokací tenzometrů (zeleně incidentní tyč a růžově transmisní tyč) je zatížena určitou chybou. Dochází k oscilaci a v místech s velkým gradientem ( $t = \{0; 0,6; 1,2\}$  ms) se na průbězích objevují zákmity. Přesto je možné prohlásit shodu tenzometrického měření s DIC za velmi uspokojivou.

Druhým kontrolním mechanismem je porovnání průběhů kontaktních sil na čelech tyčí v kontaktu, které lze po vzoru předchozího případu získat přepočtem deformace z lokace umístění tenzometrů. To je opět provedeno pro první a poslední experiment (obr.6.32).



Obrázek 6.32: Porovnání nepřímo měřených kontaktních sil zleva (červeně - tyč incidentní) a zprava (modře - tyč transmisní)

Zatímco pro transmisní PMMA tyč je závislost průběhu kontaktní síly na narážející rychlosti lineární (do času  $t = 3$  ms), což odpovídá teorii, u incidentní tyče je průběh zatížen chybou. Průběhy sil by se měly v časovém okně 0 - 1,2 ms shodovat a mít schodovitý charakter. To pro oba experimenty platí pouze pro PMMA tyč (modře). Lze tedy očekávat, že průběhy deformace budou na incidentní tyči zkresleny. Přesto lze průběhy označit za přiměřeně shodné a s určitou obezřetností verifikovat numerický řešič získanými experimentálními daty.

### 6.4.5 Verifikace kódu experimentálními daty

V předchozích kapitolách vyšlo najevo, že každý z implementovaných integrátorů a metod integrací vede na srovnatelné výsledky, které se liší pouze v míře oscilací. Z toho důvodu je pro porovnání vybrán pouze heterogenní integrátor s metodou integrace Pushforward-pullback. Tento integrátor v kombinaci s danou metodou integrace vede na nejméně oscilující výsledky a porovnání tak získá na přehlednosti.

Z celkových 18 experimentů je vybráno 6 - pro každou nárazovou rychlost 1 zástupce (tab. 6.6). Nejprve jsou ověřena časová okna, kdy jsou tyče v kontaktu a je zároveň porovnána rychlost rozhraní během experimentu a pro numerický výpočet (obr. 6.33). Dále



jsou v těchto časových oknech porovnány průběhy deformací měřených na tenzometrech a průběhy získané numerickým výpočtem (obr. 6.34-6.35).

Souhrnný pohledem na porovnání šesti experimentů (obr. 6.33 resp. 6.34-6.35) lze prohlásit, že si výsledky jednotlivých experimentů kvalitativně odpovídají a grafy lze tak dohromady popisovat jako jeden konkrétní experiment. Je nutné si uvědomit, že experiment proběhl v reálném 3D světě, kdežto numerické výsledky jsou pro 1D model. Teorie SHPB vychází z 1D teorie šíření vlny, a to je v případě použití štíhlých tyčí správná úvaha. Nicméně zbylé dimenze se ve výsledcích v určité míře přesto musí projevit. Reálná 3D sestava má oproti 1D modelu navíc tyto vlastnosti:

- dochází k prostorové disperzi vlny (zvláště v materiálu PMMA)
- čelo tyčí v kontaktu není dokonalé rovné, kontakt není dokonale rovinný
- radiální setrvačnost průřezu

Podrobně je problematika porovnatelnosti 1D a 3D výsledků rozebrána v předchozích pracích [26,18], které čerpají převážně od uznávaných autorů [8,6,32,33,34,35,36,9]. Obecně lze u experimentálních dat z 3D sestavy oproti 1D modelu očekávat:

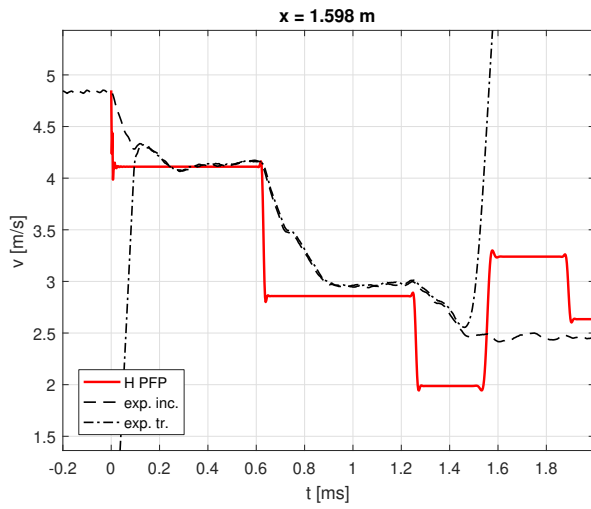
- hladké změny veličiny v čase (vyhlazení obdélníkového pulzu)
- oscilace

Naopak by se měly shodovat:

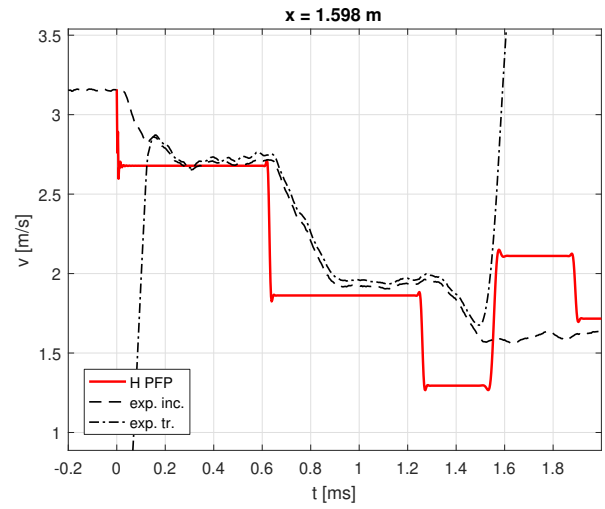
- maximální amplitudy
- okamžiky počátku změny hladiny veličiny (veličiny mají v případě rázu dvou elastických homogenních tyčí schodovitý průběh)

#### 6.4.5.1 Porovnání rychlosti rozhraní

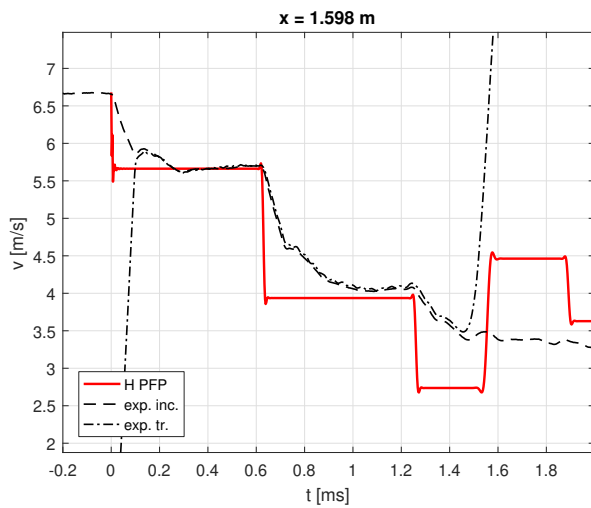
Pohledem na porovnání rychlosti rozhraní během experimentu (obr. 6.33 po dobu souběhu černých křivek) s výstupy numerického modelu lze konstatovat, že výsledky naprosto přesně odpovídají výše zmíněným předpokladům. Po dobu, co jsou tyče v kontaktu (časové okno odpovídá přibližně době  $t = 1, 2$  ms), jsou jednotlivé hladiny schodovitého průběhu shodné a okamžiky změny si na časové ose též odpovídají.



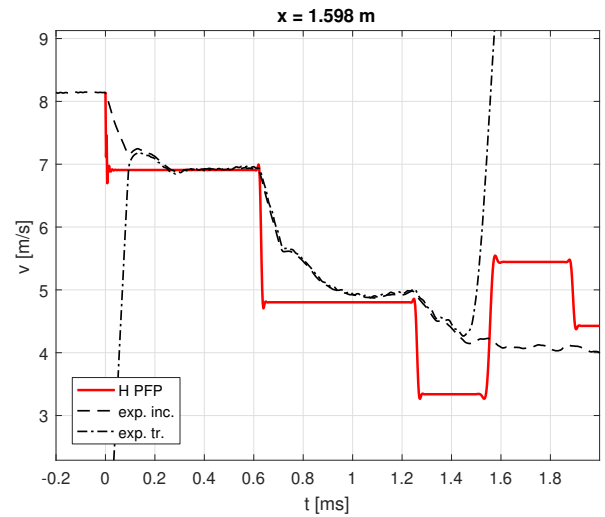
(a) exp. 2



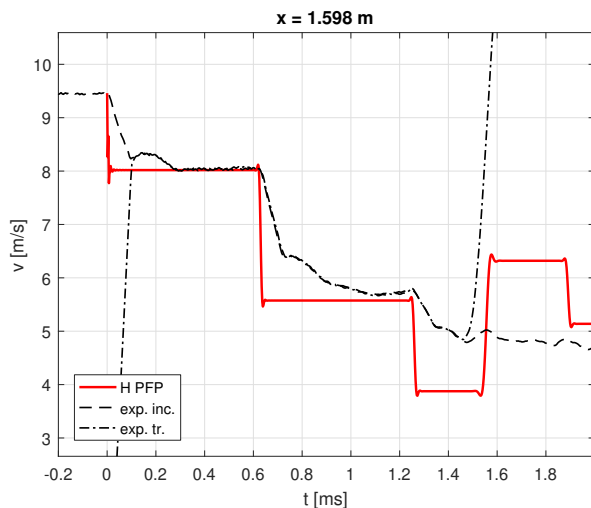
(b) exp. 5



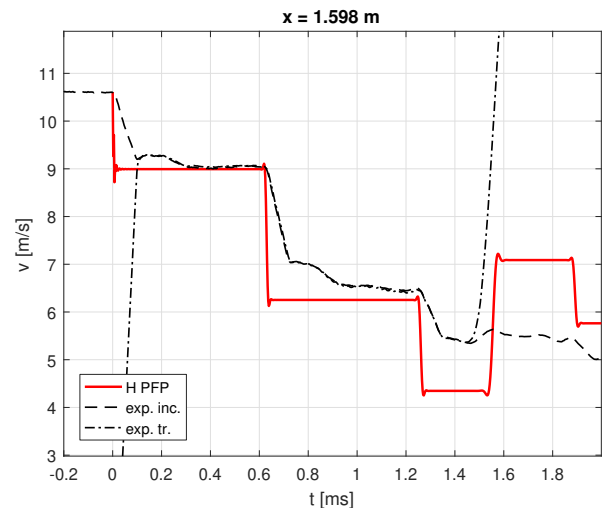
(c) exp. 7



(d) exp. 11



(e) exp. 15



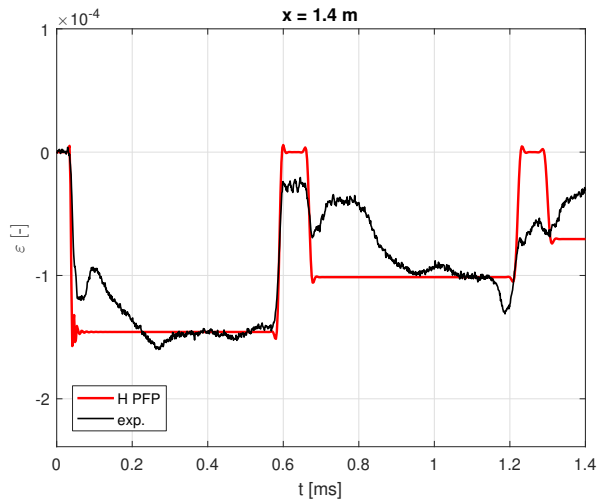
(f) exp. 16

Obrázek 6.33: Rychlost čela incidentní Al tyče v kontaktu (černě přerušovaně), čela transmisní PMMA tyče v kontaktu (černě čerchovaně) měřená pomocí DIC a rychlost rozhraní domén určená heterogenním integrátorem s metodou Pushforward-pullback (červeně)

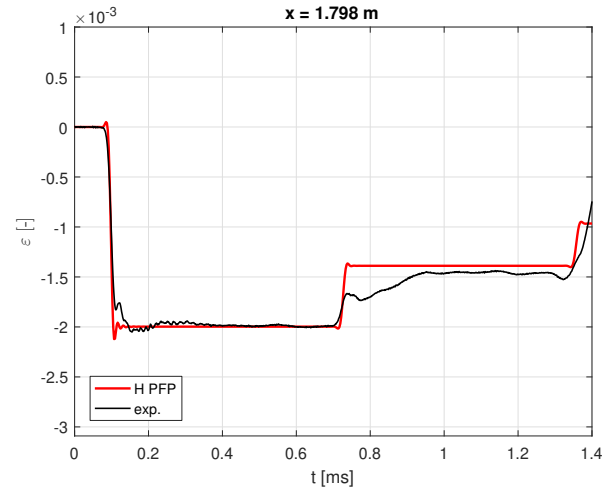
### 6.4.5.2 Porovnání deformačních pulzů

V případě porovnání deformací jsou průběhy vykresleny již pouze pro časové okno, kdy jsou tyče během experimentu v kontaktu. Pro transmisní PMMA tyč (obr. 6.34-6.35 vpravo) jsou výsledky velmi uspokojivé. Hladiny deformace si odpovídají a okamžiky změny též.

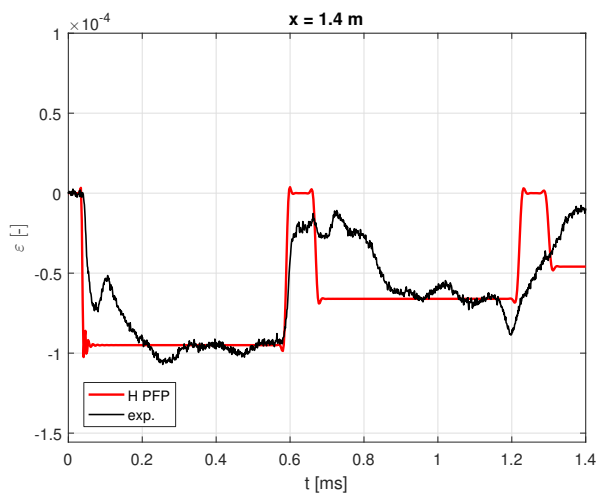
U incidentní Al tyče (obr. 6.34-6.35 vlevo) je situace komplikovaná faktem, že měření tenzometru umístěného na incidentní tyči nelze prohlásit za naprosto správné (kap. 6.4.4). Amplituda první poloviny pulzu měřeného experimentálně (černě) je podhodnocena, což neodpovídá numerickým výsledkům, ale ani teoretickým předpokladům. Na druhou stranu opět dochází téměř k přesné shodě maximálních amplitud a okamžiků změn. Podhodnocení amplitudy pulzu na incidentní Al tyči může být způsobeno složitým mechanismem kontaktu Al-PMMA. To by ale mělo být příčinnou chyby i na tyči PMMA, kde jsou průběhy nezkresleny. Pravděpodobně se tedy jedná pouze o systematickou chybu měření. Situace je komplikovaná faktem, že tento signál byl měřen celkem 4 tenzometry (2 × půl-most), potenciální selhání jediného ze 4 měřičů mohlo zkreslení zapříčinit. Navíc je nutné uvážit fakt, že vzhledem k Youngovu modulu jsou na incidentní Al tyči hodnoty signálu 14 × nižší, než na PMMA tyči transmisní.



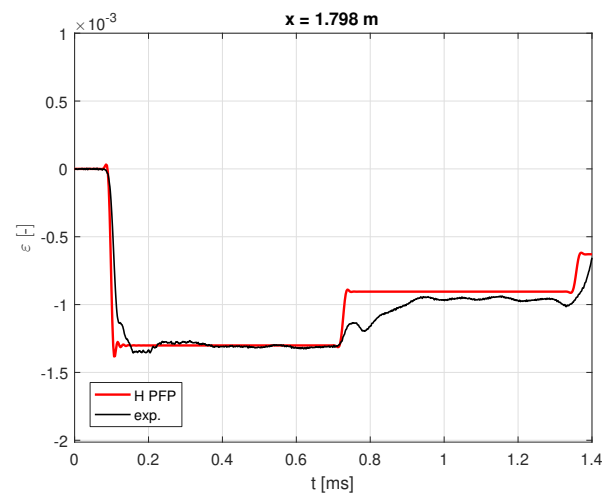
(a) exp. 2 - inc. Al



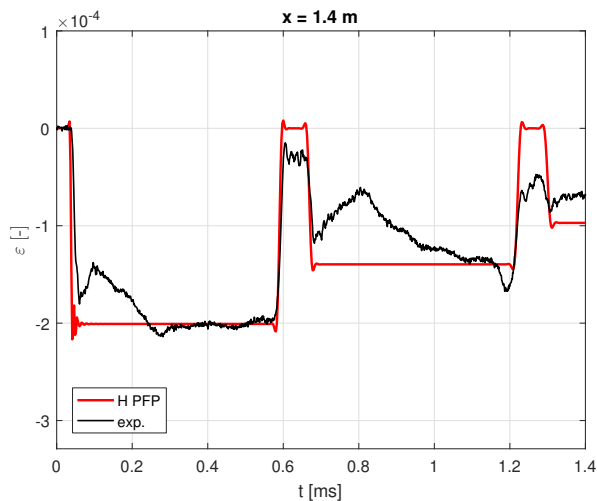
(b) exp. 2 - trans. PMMA



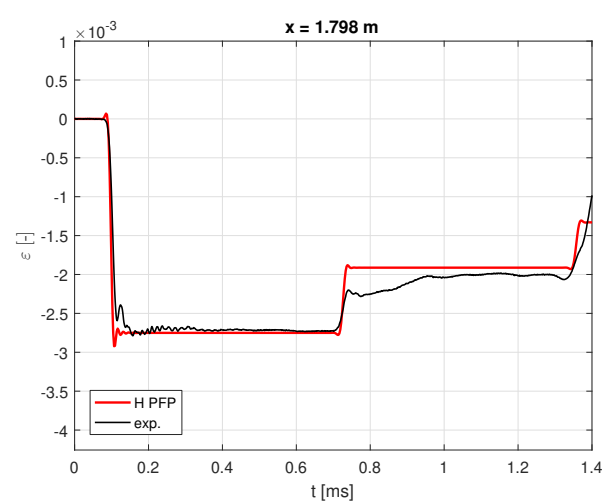
(c) exp. 5 - inc. Al



(d) exp. 5 - trans. PMMA

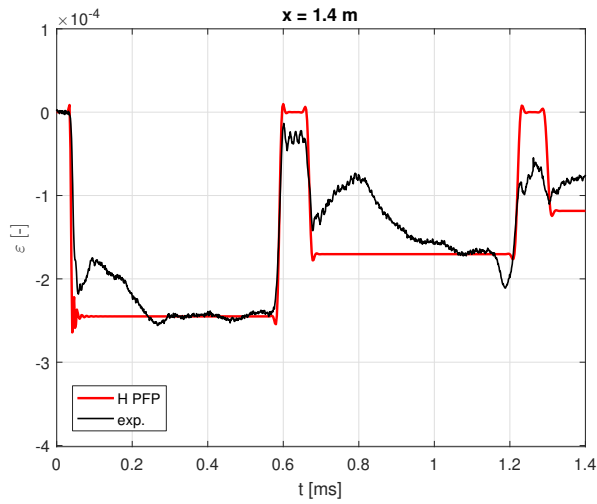


(e) exp. 7 - inc. Al

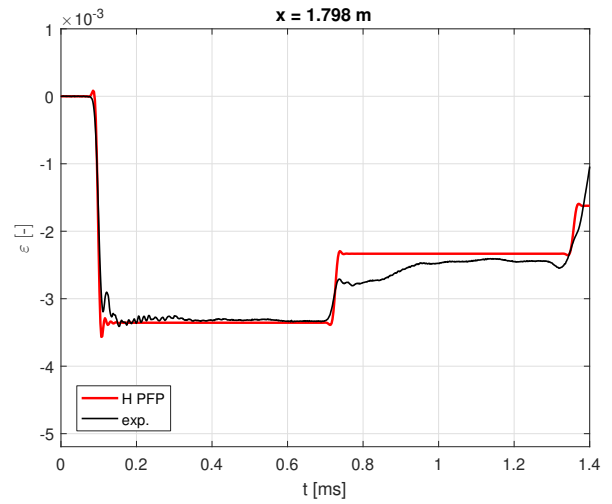


(f) exp. 7 - trans. PMMA

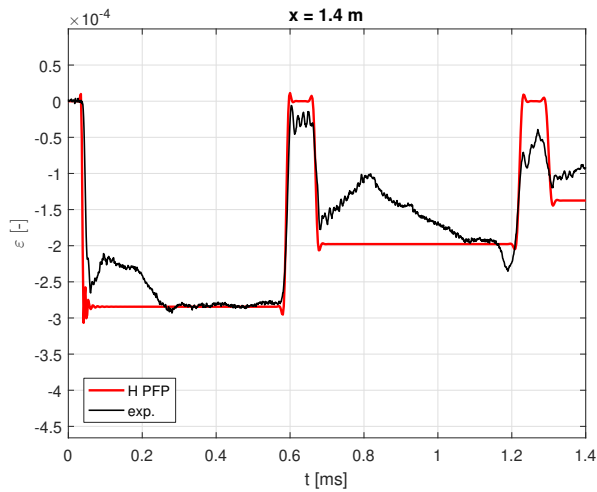
Obrázek 6.34: Elastická deformační vlna měřená tenzometrem 20 cm od místa kontaktu na incidentní Al tyči (vlevo černě) a transmisní PMMA tyči (vpravo černě) a porovnání s numerickým řešením heterogenním integrátorem s metodou Pushforward-pullback (červeně)



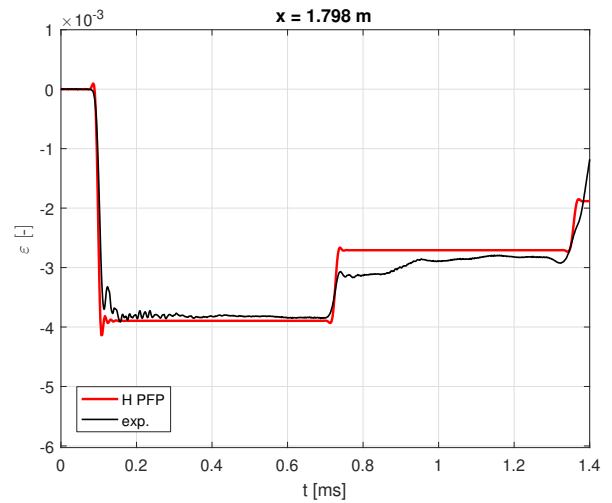
(a) exp. 11 - inc. Al



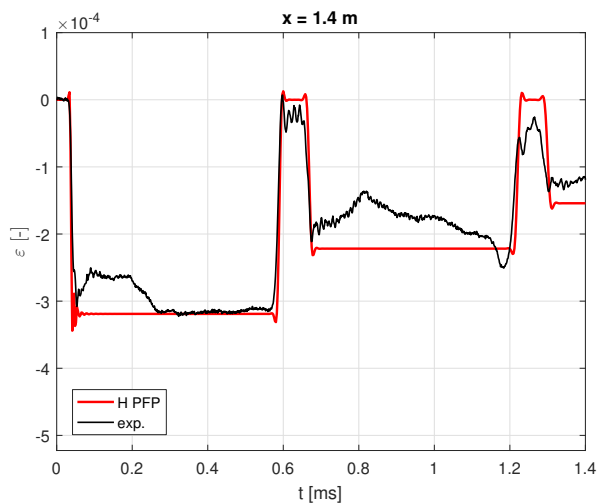
(b) exp. 11 - trans. PMMA



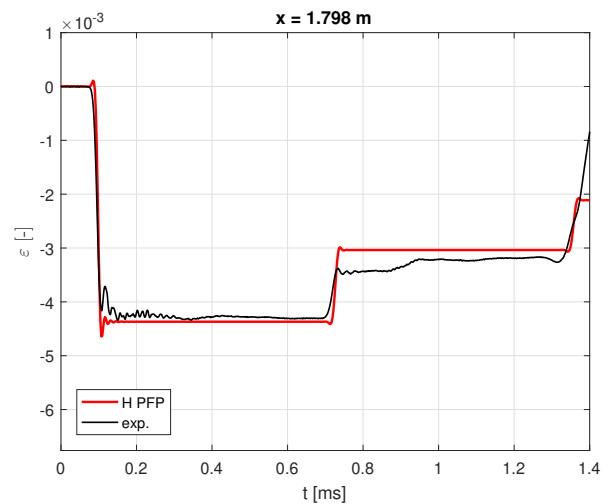
(c) exp. 15 - inc. Al



(d) exp. 15 - trans. PMMA



(e) exp. 16 - inc. Al



(f) exp. 16 - trans. PMMA

Obrázek 6.35: Elastická deformační vlna měřená tenzometrem 20 cm od místa kontaktu na incidentní Al tyči (vlevo černě) a transmisní PMMA tyči (vpravo černě) a porovnání s numerickým řešením heterogenním integrátorem s metodou Pushforward-pullback (červeně)

# Kapitola 7

## Závěr

Práce si kladla za cíl shrnout aktuální stav numerických metod v problematice šíření elastických vln. Dále bylo cílem implementovat jednak globální integrátor, který využívá pro výpočet jeden časový krok pro celou úlohu, jednak heterogenní a asynchronní integrátor pro výpočet na dekomponovaném modelu s užitím rozlišných časových kroků pro jednotlivé oblasti. Požadavkem byla verifikace implementovaných metod dostupnými numerickými testy a experimentálními daty.

V teoretické části práce byly definovány základní pojmy a metody využití v části praktické práce. Bylo představeno řešení jednorozměrné lineární vlnové rovnice v uzavřeném tvaru pro počáteční úlohu a taktéž byla formulována smíšená úloha. Pro případ nespojitého rozhraní byl analyzován problém odrazu a přenosu vlny napětí a byly odvozeny vztahy pro příslušné koeficienty popisující rozdělení incidentní vlny napětí na odraženou a incidentní vlnu. V druhé polovině kapitoly byly odvozeny základní vztahy metody konečných prvků pro případ elastodynamiky. V rámci popisu metod přímé časové integrace byly představeny iterační algoritmy pro metodu centrálních diferencí, implicitní Newmarkovy metody a pro metodu Pushforward-pullback [13]. Taktéž byly zmíněny základní vlastnosti uvedených metod přímé časové integrace. Nakonec byla popsána metoda Local stepping, která přináší nemalé zpřesnění při výpočtu pro úlohy se silně heterogenním rozložením Courantova čísla  $C_0^e$  jednotlivých elementů.

V kapitole 3 byly představeny základní principy doménové dekompozice problému elastodynamiky založené na Lagrangeových multiplikátorech, a to jak v klasické formě, tak i v lokalizovaném tvaru. Zde jsou jednotlivé domény spojeny pomocí rozhraní splňující podmínky vazeb a princip akce a reakce.

V kapitole 4 o pokročilé časové integraci byly shrnuty aktuální poznatky v problematice šíření elastických vln z pohledu časové integrace a doménové dekompozice. Byly uvedeny algoritmy pro globální časové integrátory s jedním globálním časovým krokem a také pro heterogenní a asynchronní integrátory s rozdílnými časovými kroky pro jednotlivé domény. Byly popsány aspekty, výhody a nedostatky jednotlivých časových integrátorů, včetně jejich základních vztahů a grafického znázornění postupu výpočtu na dvou doménách s odlišným časovým krokem.

V rámci praktické části práce byly metody definované v teoretické části implementovány do prostředí programu MATLAB. Byly vytvořeny nezávislé moduly preprocesoru, MKP řešiče a postprocesoru. Řešič umožňuje řešení 1D lineární elastodynamiky s využitím doménové dekompozice. Základní verze heterogenního a asynchronního časového integrátoru dostupné v literatuře (případ pouze dvou domén) byly rozšířeny pro obecnou úlohu s více doménami. V případě heterogenního časového integrátoru byla navíc implementována metoda Local stepping. Tím je model rozdělen jednak na domény, které se integrují vlastním časovým krokem, ale dokonce i na jednotlivé elementy s uvažováním jejich kritického časového kroku  $\Delta t_c^e$ . Tak vznikla robustní metoda pro řešení problémů s heterogenními materiály a s nepravidelnými výpočetními sítěmi pro metodu konečných prvků. Vedle toho je implementovaná verze asynchronního časového integrátoru připravena díky své formulaci pro řešení nelineárních úloh s proměnným časovým krokem. Navíc neexistují žádné omezující požadavky na poměr časových kroků jednotlivých domén, jako je tomu v případě heterogenního časového integrátoru. Řešič disponuje volitelným nastavením parametrů časové a prostorové diskretizace, ale i parametry alespoň částečně optimalizující výpočet. Nad rámec zadání práce byla implementována kontaktní okrajová podmínka založená na bi-penaltové metodě.

V kapitole 6 byl numerický řešič verifikován dostupnými numerickými testy se známými analytickými řešeními, výsledky komerčních softwarů LS-DYNA a ABAQUS a experimentálními daty naměřenými na modifikované sestavě SHBP (OHPB) v Laboratoři rychlých dějů Ústavu mechaniky a materiálů, Fakulty dopravní, ČVUT v Praze.

Byly řešeny případy homogenní, náhodně a skokově heterogenní výpočetní sítě a rozložení modulu pružnosti a popř. hustoty. Výsledky řešiče dostatečně přesně aproximují analytické řešení. Ukázalo se, že doménová dekompozice pomocí Lagrangeových multiplikátorů je velmi efektivním nástrojem pro homogenizaci Courantova čísla úlohy a pro distribuci úlohy na jednotlivé výpočetní jednotky. Bylo ukázáno, že samotné rozhraní při použití metod doménové dekompozice téměř neovlivní výsledky šíření vln. Mnohem více záleží

na metodě integrace – implicitní Newmarkova metoda, metoda centrálních diferencí, popř. Pushforward-pullback metoda.

Metoda Pushforward-pullback je sice disipativní, ale v kombinaci s heterogenní časovou integrací a rozšířeným přístupem Local stepping velmi efektivně filtruje numerické oscilace na rozdíl od Newmarkovy metody a metody centrálních diferencí. Výsledné napěťové pulzy získané touto metodou jsou téměř shodné s výstupy programu ABAQUS s aktivovanou funkcí *subcycling*. Navíc oproti softwaru ABAQUS dochází ke zdatelně menší disipaci energie na rozhraní.

Program LS-DYNA využívá metodu centrálních diferencí, která je dle výsledků modifikována tak, aby tlumila oscilace za cenu disipace energie. Metoda centrálních diferencí implementovaná v rámci praktické části práce nedisipuje, což je v souladu s teoretickými předpoklady.

Porovnání s experimentálními daty, s uvažováním rozdílů 3D a 1D řešení a uvažováním chyby měření na jednom z tenzometrických měřičů, proběhlo též úspěšně. Chybnost měření byla řádně dokázána a diskutována. Konfrontace s měřením rychlosti rozhraní pomocí metody DIC potvrdila správnost řešení programu vytvořeného v této práci.

Vzniklý numerický nástroj pro řešení jednorozměrných problémů elastodynamiky s libovolným počtem tyčí/domén a s libovolnou časoprostorovou distribucí/modulací materiálových parametrů lze využít pro podporu experimentálních SHPB testů ale i jako studijní podporu v oblasti numerického řešení elastodynamických úloh pomocí MKP. V budoucnu bude kód/program rozšířen pro 2D a 3D případy se snahou vytvořit optimální kombinaci jednotlivých numerických metod pro prostorovou a časovou diskretizaci, která vyústí v kompromis mezi útlumem falešných oscilací, numerickou disipací algoritmů a efektivním přenosem dat pro metody doménové dekompozice.



# Kapitola 8

## Použité zdroje

- [1] FALTA, J., T. FÍLA, P. ZLÁMAL a M. ADORNA. Instrumentation of split hopkinson pressure bar for testing of cellular metallic materials. *In 16th Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics*. 2018, 10-14.
- [2] FALTA, J., T. FÍLA, M. ADORNA a P. ZLÁMAL. Optimization of hopkinson bar instrumentation for testing of cellular and low impedance materials. *In 25th International Conference Engineering Mechanics*. 2019, 97-100.
- [3] FALTA, J. *Instrumentace sestavy dělené hopkinsonovy tyče pro dynamická měření*. Praha, 2017. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, Ústav mechaniky a materiálů.
- [4] ADORNA, M. *Vyhodnocování dynamických experimentů prováděných dělenou hopkinsonovou tyčí*. Praha, 2017. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, Ústav mechaniky a materiálů.
- [5] HUDÁK, M. *Úprava SHPB pro pokročilé měření materiálů v dopravě*. Praha, 2018. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, Ústav mechaniky a materiálů.
- [6] GRAFF, Karl F. *Wave motion in elastic solids*. Oxford: Clarendon Press, 1975. ISBN 01-985-6118-0.
- [7] CHEN, Weinong W. a Bo SONG. *Split Hopkinson (Kolsky) bar: design, testing and applications*. New York: Springer, c2011. Mechanical engineering series. ISBN 978-1-4419-7981-0.

- [8] SKALAK, R. Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*. 1957, **24**, 59-63.
- [9] ZUKAS, Jonas. A., Theodore NICHOLAS, Hallock F. SWIFT, Longin B. GRE-SZCZUK a Donald R. CURRAN. *Impact dynamics*. New York: John Wiley, 1982. ISBN 0-471-08677-0.
- [10] PARK, K.C., C.A. FELIPPA a U.A. GUMASTE. A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications. *Comput Mech*. 2000, **24**, 476-490.
- [11] CHO, S.S., R. KOLMAN, J.A. GONZÁLEZ a K.C. PARK. Explicit multistep time integration for discontinuous elastic stress wave propagation in heterogeneous solids. *Int J Numer Methods Eng*. 2019, **118**, 276-302.
- [12] KOLMAN, R., S.S. CHO, K.C. PARK a J.G. GONZALEZ. An explicit time scheme with local time stepping for one-dimensional wave and impact problems in layered and functionally graded materials. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. Rhodes Island, Greece, 2017, **6**, 7.
- [13] PARK, K.C., S.J. LIM a H. HUH. A method for computation of discontinuous wave propagation in heterogeneous solids: basic algorithm description and application to one-dimensional problems. *Int J Numer Methods*. 2012, **91**, 622-643.
- [14] FOŘT, Jaroslav. *Parciální diferenciální rovnice*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000. ISBN 80-010-2268-4.
- [15] HUGHES, Thomas J.R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. I. New Jersey 07632: Prentice Hall, 1987. ISBN 0-13-317025-X.
- [16] SUTTER, H. *Intel CPU trends* [online]. 2009 [cit. 2021-5-31]. Dostupné z: <http://www.gotw.ca/images/CPU.png>
- [17] KOLMAN, Radek. Disperzní analýza rovinných kvadratických konečných prvku v úlohách elastodynamiky. Praha, 2009. Disertace. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní.

- [18] DVOŘÁK, Radim. *Numerická analýza tvarování incidentních napěťových vln pro SHPB měření*. Praha, 2020. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, Ústav mechaniky a materiálů.
- [19] NEAL, M.O. a T. BELYTSCHKO. Explicit-explicit subcycling with non-integer time step ratios for structural dynamics systems. *Computers & Structures*. 1989, **31**(6), 871-880.
- [20] DANIEL, W.J.T. A study of subcycling algorithms in structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1998, **156**, 1-13.
- [21] SMOLINSKI, P. Subcycling integration with non-integer time steps for structural dynamics problems. *Computers & Structures*. 1996, **59**(2), 273-281.
- [22] SMOLINSKI, P., S. SLEITH a T. BELYTSCHKO. Stability of an explicit multi-time step integration algorithm for linear structural dynamics equations. *Comp Mech*. 1996, **18**, 236-244.
- [23] SUBBER, W. a K. MATOUŠ. Asynchronous space–time algorithm based on a domain decomposition method for structural dynamics problems on non-matching meshes. *Comput Mech*. 2016, **57**, 211-235.
- [24] COMBESCURE, A. a A. GRAVOUIL. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Comput. Methods Appl. Engrg*. 2002, **191**, 1129-1157.
- [25] FAUCHER, V., H. BUNG a A. COMBESCURE. A domain decomposition method in explicit dynamics. EUROPLEXUS. European Commission, Joint Research Centre, Directorate for Space, Security and Migration, Safety and Security of Buildings.
- [26] DVOŘÁK, Radim. *Numerické modelování tvaru napěťových pulzů při SHPB měření*. Praha, 2018. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, Ústav mechaniky a materiálů.
- [27] HALLQUIST, John O. *LS-DYNA® Theory manual*. Livermore, California 94551: Livermore Software Technology Corporation, 2006. ISBN 0-9778540-0-0.
- [28] SIMULIA *Abaqus Theory manual* Simulia, Rising Sun Mills, 166 Valley Street, Providence, 2011, RI 02909–2499.

- [29] KOLMAN, R., S.S. CHO, K.C. PARK, J. GONZALES, A. BEREZOVSKI, P. HORA a V. ADÁMEK. A local time stepping for discontinuous wave propagation in a heterogeneous bar. *The 2nd International Conference on Advanced Modelling of Wave Propagation in Solids*. Praha, 2018, **2**, 1129-1157.
- [30] BREPTA, Rudolf a Ivo HUNĚK. *Pohyb pulzu v tenké tyči s proměnlivým modulem pružnosti*. Výzkumná zpráva Z 1032/87. ČSAV Ústav termomechaniky, 1987.
- [31] KOUDELKA, P., O. JIROUŠEK, T. FÍLA a T. DOKTOR. *Compressive properties of auxetic structures produced with direct 3d printing*. *Materiali in Tehnologije*. 2016, **50**(3), 311-317.
- [32] KOLSKY, Herbert. *Stress waves in solids*. New York: Dover Publications, [1963].
- [33] POCHHAMMER, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. 1876, **81**, 324-336.
- [34] CHREE, C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications. *Camb. phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 1889, **14**, 250.
- [35] KOLSKY, H. The propagation of longitudinal elastic waves along cylindrical bars. *Phil. Mag.* 1954, **45**, 712-726.
- [36] CHEN, Weinong W. a Bo SONG. *Split Hopkinson (Kolsky) bar: design, testing and applications*. New York: Springer, c2011. Mechanical engineering series. ISBN 978-1-4419-7981-0.
- [37] KOPAČKA, J., A. TKACHUK, D. GABRIEL, R. KOLMAN, M. BISCHOFF a J. PLEŠEK. On stability and reflection-transmission analysis of the bipenalty method in contact-impact problems: A one-dimensional, homogeneous case study. *Int J Numer Meth Engng.* 2018, **113**, 1607–1629.
- [38] ASKES, H., M. CARAMÉS-SADDLER a A. RODRÍGUEZ-FERRAN. Bipenalty method for time domain computational dynamics. *Proc. R. Soc. A.* 2010, **466**, 1389–1408.

- [39] HETHERINGTON, J., A. RODRÍGUEZ-FERRAN a H. ASKES. A new bipenalty formulation for ensuring time step stability in time domain computational dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2012, **90**, 269–286.
- [40] GONZÁLEZ, J.A., J. KOPAČKA, R. KOLMAN a K.C. PARK. Partitioned formulation of contact-impact problems with stabilized contact constraints and reciprocal mass matrices. *Int J Numer Methods Eng.* 2021, 1-28.