

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY

Odbor pružnosti a pevnosti



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Optimalizace kompozitních nosníků

Praha, 2021

Bc. Dominik Vondráček

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vondráček** Jméno: **Dominik** Osobní číslo: **466519**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Optimalizace kompozitních nosníků

Název diplomové práce anglicky:

Composite beam optimization

Pokyny pro vypracování:

1. Přehled možností optimalizace kompozitních nosníků
2. Analytické přístupy analýzy namáhání a deformací kompozitových nosníků
3. Volba optimalizačního kritéria
4. Řešení případových studií

Seznam doporučené literatury:

1. Vladislav Laš: Mechanika kompozitních materiálů. Plzeň 2008
2. Tomáš Mareš: Základy konstrukční optimalizace. Praha 2006

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **12.04.2021** Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, C.Sc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci s názvem: „Optimalizace kompozitních nosníků“ vypracoval samostatně a uvedl jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Praze dne

.....

Dominik Vondráček

Poděkování

Rád bych poděkoval doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. a Ing. Tereze Zámečnickové za jejich odborné vedení, věnovaný čas, ochotu a vstřícnost při konzultacích a též za jejich cenné rady, které mi při tvorbě práce velmi pomohly.

Anotační list

| | |
|-----------------------|--|
| Jméno autora: | Bc. Dominik Vondráček |
| Název práce: | Optimalizace kompozitních nosníků |
| Název anglicky: | Composite beam optimization |
| Rok: | 2021 |
| Studijní program: | Aplikované vědy ve strojním inženýrství |
| Obor studia: | Aplikovaná mechanika |
| Ústav: | Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky |
| Odbor: | Odbor pružnosti a pevnosti |
| Vedoucí práce: | doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D. |
| Bibliografické údaje: | Počet stran: 90 Počet obrázků: 34 Počet tabulek: 34 Počet příloh: 14 |
| Klíčová slova: | Nosník, kompozit, tuhost, kompozitní skladba, optimalizace, genetický algoritmus |
| Keywords: | Beam, composite, stiffness, composite layup, optimization, genetic algorithm |
| Anotace: | Tato práce pojednává o experimentálním stanovení tuhosti navíjených tenkostěnných kompozitních nosníků zatížených ohybem. Cílem práce bylo porovnání experimentálně získaných tuhostí s tuhostmi vypočtenými pomocí analytických metod. Dílčím cílem práce bylo v programu MATLAB vytvořit program pro optimalizaci kompozitní skladby vybraných nosníků. |
| Abstrakt: | This work deals with the experimental determination of stiffness of wound thin-walled composite beams loaded by bend. The aim of this work was to compare experimental stiffnesses with stiffnesses calculated using analytical methods. The partial goal of the work was to create a program in MATLAB for optimizing composite layups of selected beams. |

Obsah

| | |
|---|----|
| Seznam obrázků | 8 |
| Seznam tabulek | 10 |
| Seznam příloh..... | 12 |
| Seznam použitých symbolů..... | 13 |
| 1. Úvod | 16 |
| 2. Teoretická část | 17 |
| 2.1 Základní rovnice pro výpočet kompozitních materiálů | 17 |
| 2.2 Matice tuhosti a matice poddajnosti..... | 19 |
| 2.3 Transformace matice tuhosti a poddajnosti..... | 20 |
| 2.4 Analytické metody určení tuhosti..... | 22 |
| 2.4.1 Modelový nosník | 22 |
| 2.4.2 Použití matice tuhosti a poddajnosti k určení ohybové tuhosti | 23 |
| 2.4.3 Metoda ABD matic | 24 |
| 3. Experimentální část..... | 26 |
| 3.1 Materiálové vlastnosti zkoušených vzorků..... | 27 |
| 3.2 Geometrické parametry zkoušených vzorků | 29 |
| 3.3 Seznam vzorků | 31 |
| 3.4 Průběh měření | 32 |
| 3.5 Vyhodnocení experimentu | 33 |
| 3.5.1 Vyhodnocení dle Timošenkovy teorie..... | 34 |
| 3.5.2 Vyhodnocení dle Euler-Bernoulliho teorie..... | 34 |
| 3.6 Výsledky experimentální části | 36 |
| 3.7 Závěry z experimentální části | 41 |
| 4. Genetické algoritmy | 42 |
| 4.1 Základní princip genetických algoritmů..... | 42 |
| 4.2 Vytvoření nové populace | 44 |
| 4.3 Ohodnocení..... | 44 |
| 4.4 Selektce | 45 |
| 4.4.1 Metoda vážené rulety | 45 |
| 4.4.2 Turnajová metoda | 46 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.4.3 | Metoda dělení | 47 |
| 4.4.4 | Elitismus | 47 |
| 4.5 | Křížení | 47 |
| 4.5.1 | Jednobodové křížení | 48 |
| 4.5.2 | Dvou a více bodové křížení | 48 |
| 4.5.3 | Křížení metodou PMX..... | 48 |
| 4.6 | Mutace | 49 |
| 4.7 | Implementace genetických algoritmů v programu MATLAB..... | 50 |
| 4.7.1 | Vstupní argumenty | 50 |
| 4.7.2 | Výstupní argumenty | 50 |
| 5. | Optimalizační úlohy..... | 52 |
| 5.1 | Zatížení ohybem..... | 53 |
| 5.1.1 | Euler-Bernoulliho teorie | 53 |
| 5.1.2 | Timošenkova teorie..... | 54 |
| 5.2 | Zatížení krutem | 58 |
| 5.3 | Zatížení ohybem a krutem | 60 |
| 6. | Závěr..... | 73 |
| | Použitá literatura..... | 74 |
| | Přílohy | 75 |

Seznam obrázků

| | | |
|---------|---|----|
| Obr. 1 | Uspořádání vrstev laminátu s K vrstvami [2]..... | 18 |
| Obr. 2 | Souřadné systémy kompozitního materiálu [1] | 20 |
| Obr. 3 | Modelový příklad nosníku zatíženého tříbodovým ohybem..... | 22 |
| Obr. 4 | Průhyby modelového nosníku..... | 22 |
| Obr. 5 | Vzorky ze sady 50_UMS40_P_500 | 31 |
| Obr. 6 | Zatížení vzorku silou přes popruh..... | 32 |
| Obr. 7 | Uspořádání experimentu..... | 32 |
| Obr. 8 | Příklad vyhodnocení u vzorku 50_T700_N1_500_1..... | 33 |
| Obr. 9 | Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků ID50_500..... | 37 |
| Obr. 10 | Procentuální odchylky analytických metod od Timošenkovy metody pro vzorky ID50_500..... | 38 |
| Obr. 11 | Procentuální odchylky analytických metod od E-B metody pro vzorky ID50_500 | 38 |
| Obr. 12 | Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků ID50_780..... | 39 |
| Obr. 13 | Procentuální odchylky analytických metod od Timošenkovy metody pro vzorky ID50_780..... | 40 |
| Obr. 14 | Procentuální odchylky analytických metod od E-B metody pro vzorky ID50_780 | 40 |
| Obr. 15 | Vývojový diagram optimalizačního procesu na bázi genetického algoritmu [14] . | 43 |
| Obr. 16 | Schéma selekce pomocí metody vážené rulety | 45 |
| Obr. 17 | Jednobodové křížení..... | 48 |
| Obr. 18 | Dvoubodové křížení..... | 48 |
| Obr. 19 | Křížení s využitím metody PMX [12]..... | 49 |
| Obr. 20 | Jednobodová binární mutace | 49 |
| Obr. 21 | Schéma nosníku zatíženého ohybem | 53 |
| Obr. 22 | Závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu na úhlu návinu..... | 54 |
| Obr. 23 | Závislost úhlu návinu α na poměru L/D | 55 |
| Obr. 24 | Ekvivalentní moduly pružnosti v závislosti na L/D | 56 |
| Obr. 25 | Schéma nosníku zatíženého krutem..... | 58 |
| Obr. 26 | Závislost ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku na úhlu návinu..... | 59 |
| Obr. 27 | Schéma nosníku zatíženého kombinací ohybu a krutu | 60 |
| Obr. 28 | Závislost úhlu návinu na L/D pro $a=1$ | 62 |

| | |
|---|----|
| Obr. 29 Závislost úhlu náviny na L/D pro $a=10$ | 63 |
| Obr. 30 Závislost úhlu náviny na L/D pro $a=100$ | 64 |
| Obr. 31 Závislost úhlu náviny na L/D pro $a=1\ 000$ | 65 |
| Obr. 32 Závislost úhlu náviny na L/D pro $a=10\ 000$ | 66 |
| Obr. 33 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu na L/D | 67 |
| Obr. 34 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku na L/D | 67 |

Seznam tabulek

| | |
|---|----|
| Tab. 1 Materiálové parametry matrice | 27 |
| Tab. 2 Materiálové vlastnosti materiálu T700..... | 27 |
| Tab. 3 Materiálové vlastnosti materiálů UMS40..... | 27 |
| Tab. 4 Materiálové vlastnosti materiálu XN60 | 27 |
| Tab. 5 Materiálové vlastnosti kompozitu T700/epoxid | 28 |
| Tab. 6 Materiálové vlastnosti kompozitu UMS40/epoxid..... | 28 |
| Tab. 7 Materiálové vlastnosti kompozitu XN60/epoxid | 28 |
| Tab. 8 parametry kompozitní skladby T | 29 |
| Tab. 9 Parametry kompozitní skladby P | 29 |
| Tab. 10 Parametry kompozitní skladby N1..... | 30 |
| Tab. 11 Parametry kompozitní skladby N2..... | 30 |
| Tab. 12 Přehled experimentálně určených modulů pružnosti u vzorků ID50_500..... | 36 |
| Tab. 13 Přehled experimentálně určených modulů pružnosti u vzorků ID50_780..... | 36 |
| Tab. 14 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků ID50_500 | 37 |
| Tab. 15 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků ID50_780 | 39 |
| Tab. 16 Počáteční populace..... | 44 |
| Tab. 17 Ohodnocení jednotlivých jedinců | 44 |
| Tab. 18 Pravděpodobnosti u metody vážené rulety | 46 |
| Tab. 19 Selektce pomocí turnajové metody | 46 |
| Tab. 20 Selektce metodou dělení | 47 |
| Tab. 21 Materiálové vlastnosti optimalizovaných nosníků | 52 |
| Tab. 22 Geometrické parametry optimalizovaných nosníků | 52 |
| Tab. 23 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených ohybem..... | 55 |
| Tab. 24 Optimální úhel navinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených ohybem..... | 57 |
| Tab. 25 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1$ | 62 |
| Tab. 26 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10$ | 63 |

| | |
|--|----|
| Tab. 27 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=100$ | 64 |
| Tab. 28 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1\ 000$ | 65 |
| Tab. 29 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10\ 000$ | 66 |
| Tab. 30 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1$ | 68 |
| Tab. 31 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10$ | 69 |
| Tab. 32 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=100$ | 70 |
| Tab. 33 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1\ 000$ | 71 |
| Tab. 34 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10\ 000$ | 72 |

Seznam příloh

Příloha 1 Seznam vzorků z kompozitu T700/epoxid o délce 500 mm

Příloha 2 Seznam vzorků z kompozitu UMS40/epoxid o délce 500 mm

Příloha 3 Seznam vzorků z kompozitu XN60/epoxid o délce 500 mm

Příloha 4 Seznam vzorků z kompozitu T700/epoxid o délce 780 mm

Příloha 5 Seznam vzorků z kompozitu UMS40/epoxid o délce 780 mm

Příloha 6 Seznam vzorků z kompozitu XN60/epoxid o délce 780 mm

Příloha 7 Experimentální výsledky pro vzorky ID50_500

Příloha 8 Experimentální výsledky pro vzorky ID50_780

Příloha 9 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené ohybem

Příloha 10 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $a=1$

Příloha 11 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $a=10$

Příloha 12 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $a=100$

Příloha 13 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $a=1\ 000$

Příloha 14 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $a=10\ 000$

Seznam použitých symbolů

| Symbol | Jednotka | Název |
|------------------|----------------------|--|
| a | $[-]$ | Váhový koeficient |
| A | $[m^2]$ | Plocha průřezu |
| \mathbf{A} | $[N \cdot m^{-1}]$ | Matice tahové tuhosti |
| \mathbf{B} | $[N]$ | Matice vazební tuhosti |
| \mathbf{C} | $[N^{-1} \cdot m^2]$ | Matice poddajnosti |
| \mathbf{C}_k^L | $[N^{-1} \cdot m^2]$ | Matice poddajnosti k-té vrstvy v souřadném systému $O(L, T, T')$ |
| \mathbf{C}_k^x | $[N^{-1} \cdot m^2]$ | Matice poddajnosti k-té vrstvy v souřadném systému $O(x, y, z)$ |
| \mathbf{D} | $[N \cdot m]$ | Matice ohybové tuhosti |
| d_e | $[m]$ | Vnější průměr |
| d_i | $[m]$ | Vnitřní průměr |
| E | $[MPa]$ | Modul pružnosti v tahu |
| $E_{1/2}$ | $[MPa]$ | Modul pružnosti v tahu pro jednu polovinu délky |
| $E_{1/4}$ | $[MPa]$ | Modul pružnosti v tahu pro jednu čtvrtinu délky |
| \bar{E} | $[MPa]$ | Aritmetický průměr $E_{1/2}$ a $E_{1/4}$ |
| E_{eq} | $[MPa]$ | Ekvivalentní modul pružnosti v tahu |
| E_L | $[MPa]$ | Modul pružnosti v tahu pro podélný směr |
| E_T | $[MPa]$ | Modul pružnosti v tahu pro příčný směr |
| $(EJ)_{eq}$ | $[N \cdot m^2]$ | Ekvivalentní ohybová tuhost |
| F | $[N]$ | Zatěžující síla |
| $f(i)$ | $[-]$ | Hodnota fitness funkce konkrétního jedince |
| G | $[MPa]$ | Modul pružnosti ve smyku |
| G_{eq} | $[MPa]$ | Ekvivalentní modul pružnosti ve smyku |

| | | |
|-------------------------------|----------------------|---|
| G_{LT} | [MPa] | Modul pružnosti ve smyku ve směrech L a T |
| $(\kappa G A)_{eq}$ | [N] | Ekvivalentní smyková tuhost |
| h | [m] | Celková tloušťka kompozitního materiálu |
| h_b | [m] | Vzdálenost dolní vrstvy laminátu od střední roviny |
| h_t | [m] | Vzdálenost horní vrstvy laminátu od střední roviny |
| J_p | [m ⁴] | Polární moment průřezu |
| J_z, J | [m ⁴] | Kvadratický moment průřezu |
| \mathbf{K} | [m ⁻¹] | Vektor křivosti střední vrstvy laminátu |
| K | [–] | Počet vrstev laminátu |
| L | [m] | Vzdálenost podpor |
| L/D | [1] | Poměr délky a průměru nosníku |
| \mathbf{M} | [N] | Vektor momentů |
| M_k | [N.m] | Kroutící moment |
| M_o | [N.m] | Ohybový moment |
| \mathbf{N} | [N.m ⁻¹] | Vektor sil |
| N | [–] | Počet jedinců |
| p_i | [–] | Pravděpodobnost výběru konkrétního jedince |
| \mathbf{S}_{ij} | [N.m ⁻²] | Matice mimoosové tuhosti |
| \mathbf{S} | [N.m ⁻²] | Matice tuhosti |
| \mathbf{S}_k^L | [N.m ⁻²] | Matice tuhosti k -té vrstvy v souřadném systému $O(L, T, T')$ |
| \mathbf{S}_k^x | [N.m ⁻²] | Matice tuhosti k -té vrstvy v souřadném systému $O(x, y, z)$ |
| T | [N.m ⁻²] | Posouvající síla |
| $\mathbf{T}_\varepsilon^{Lx}$ | [–] | Transformační matice deformace z $O(L, T, T')$ do $O(x, y, z)$ |
| $\mathbf{T}_\varepsilon^{xL}$ | [–] | Transformační matice deformace z $O(x, y, z)$ do $O(L, T, T')$ |
| \mathbf{T}_σ^{Lx} | [–] | Transformační matice napětí z $O(L, T, T')$ do $O(x, y, z)$ |

| | | |
|--------------------------------|------------------------|---|
| \mathbf{T}_σ^{xL} | [–] | Transformační matice napětí z $O(x, y, z)$ do $O(L, T, T')$ |
| $v_{1/2}$ | [m] | Průhyb v jedné polovině vzdálenosti podpor |
| $v_{1/4}$ | [m] | Průhyb v jedné čtvrtině vzdálenosti podpor |
| V_f | [%] | Objemový podíl vláken |
| z_k | [m] | Souřadnice k -té laminy |
| β | [–] | Koeficient tvaru průřezu ve smyku |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | [–] | Vektor deformace |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ | [–] | Vektor poměrné deformace střední roviny laminátu |
| θ_k | [°] | Úhel vinutí v k -té vrstvě |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | [N · m ⁻²] | Vektor napětí |
| ν_{LT}, ν_{TL} | [–] | Poissonovy poměry v souřadném systému $O(L, T, T')$ |
| φ | [°] | Úhel zkroucení |

1. Úvod

Tato diplomová práce se zabývá problematikou navíjených tenkostěnných kompozitních nosníků. Hlavním cílem práce je porovnání experimentálně určených tuhostí kompozitních nosníků s tuhostmi, které je možné vypočítat pomocí analytických metod. Dílčím cílem práce pak bylo na tyto nosníky aplikovat optimalizační algoritmy a nalézt tak optimální kompozitní skladby pro jednotlivé nosníky.

Vzhledem k tomu, že analytických metod použitelných k určení tuhostí navíjených tenkostěnných nosníků je velké množství, bylo třeba se v prvním kroku rozhodnout, které metody budou nejvhodnější. Celkem byly vybrány tři metody. Jako první byla vybrána metoda určení tuhosti pomocí *ABD* matic. Následovaly metody, u kterých se tuhost určí přímo z matice tuhosti nebo z matice poddajnosti. Tyto dvě metody vymezují oblast, v níž by se mělo nacházet skutečné řešení, a proto byla při porovnání s experimentem použita ještě jejich střední hodnota.

Druhým krokem bylo vyhodnocení experimentálních dat. Experiment byl proveden v laboratořích ČVUT FS, přičemž samotné provedení experimentu nebylo součástí práce. Během experimentu byly zkoušeny trubky s vnitřním průměrem 50 mm o délce 500 mm nebo 780 mm . Trubky byly rozděleny do sad po šesti kusech, přičemž u jednotlivých sad byl použit jak rozdílný materiál vláken, tak i kompozitní skladba. Během měření se každý vzorek zatížil tříbodovým ohybem. Zaznamenávala se zatěžující síla a průhyb v polovině a čtvrtině vzdálenosti podpor. Samotné vyhodnocení pak bylo realizované pomocí dvou přístupů. Prvním přístupem byl Timošenkův přístup, který při vyhodnocení zohledňuje i účinky způsobené posouvající silou. Naproti tomu Euler-Bernoulliho přístup vliv posouvající síly zanedbává.

Posledním krokem mé diplomové práce bylo ve výpočtovém programu *MATLAB* vytvořit program, jehož úkolem bude optimalizovat kompozitní skladby navíjených tenkostěnných nosníků. Tento program byl následně použit k optimalizaci tří modelových úloh. První úloha spočívala v optimalizaci kompozitní skladby u nosníku zatíženého pouze ohybem, přičemž jako cílová funkce byla zvolena funkce popisující průhyb nosníku. V druhé úloze se optimalizovala kompozitní skladba téhož nosníku, jen s tím rozdílem, že nosník byl zatížen pouze krutem a jako cílová funkce byla zvolena funkce popisující úhel zkroucení nosníku. Poslední typ úlohy byl nosník zatížený kombinací ohybu a krutu. Cílová funkce byla zavedena jako součet funkce pro průhyb a funkce pro úhel natočení, přičemž u úhlu natočení byl zaveden váhový koeficient.

2. Teoretická část

V této kapitole budou uvedeny základní rovnice, pomocí nichž je možné řešit problémy týkající se kompozitních materiálů. Dále pak bude uveden stručný přehled analytických metod, které je možné použít k výpočtu tuhosti navíjeného kompozitního nosníku.

2.1 Základní rovnice pro výpočet kompozitních materiálů

Základním předpokladem pro výpočet tuhosti je kompozitní díl tvořený jednotlivými jednosměrovými laminami. Takovýto díl je ortotropní. Ortotropní materiál je takový, u kterého existují tři navzájem kolmé roviny symetrie elastických vlastností. Matice tuhosti \mathbf{S} respektive matice poddajnosti \mathbf{C} takového materiálu má devět nezávislých konstant. Jako další zjednodušení při výpočtech bude uvažována rovinná napjatost, čímž se počet nezávislých konstant sníží na pět.

Základní rovnice pro kompozitní materiály vycházejí z klasické laminátové teorie. Detailním odvozením klasické laminátové teorie se v této práci nebudu zabývat. Toto odvození je možné najít v některé z mnoha prací zabývajících se mechanikou kompozitních materiálů např. [1], [2], [3]. Klasickou laminátovou teorii je možné popsat následující maticovou rovnicí.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \dots \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^0 \\ \dots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Matice \mathbf{A} je matice tahové tuhosti, která váže složky sil vektoru \mathbf{N} s vektorem poměrných deformací v referenční rovině $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$. Matice \mathbf{B} je matice vazební tuhosti, která váže složky momentů vektoru \mathbf{M} s vektorem poměrných deformací v referenční rovině $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ a zároveň složky sil vektoru \mathbf{N} s vektorem křivostí v referenční rovině \mathbf{K} . Matice \mathbf{D} je matice ohybové tuhosti, která váže složky momentů vektoru \mathbf{M} s vektorem křivostí v referenční rovině \mathbf{K} .

Rozepíšeme-li jednotlivé matice z rovnice (2.1) do složek dostaneme následující vyjádření klasické laminátové teorie.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & | & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & | & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & | & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & | & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & | & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & | & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \hline K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

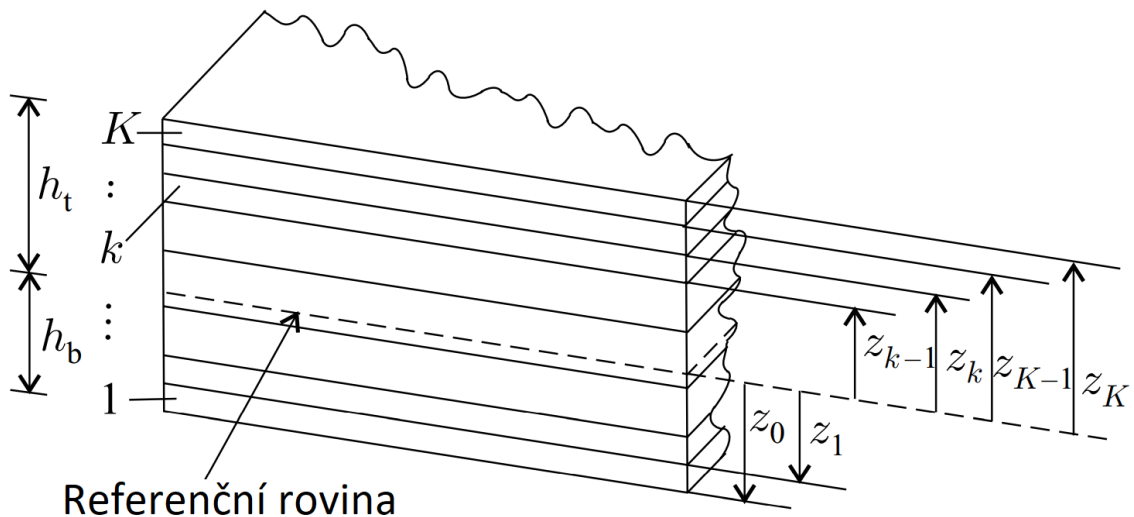
Jednotlivé složky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{D} určíme pomocí rovnic (2.3), (2.4) a (2.5).

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^K (\bar{\mathbf{S}}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\bar{\mathbf{S}}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (\bar{\mathbf{S}}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.5)$$

Kde $(\bar{\mathbf{S}}_{ij})_k$ je matice mimoosové tuhosti k -té vrstvy laminátu. Uspořádání jednotlivých vrstev laminátu je znázorněno na Obr. 1.



Obr. 1 Uspořádání vrstev laminátu s K vrstvami [2]

Kde h_b je vzdálenost dolní laminy od referenční roviny a h_t je vzdálenost horní laminy od referenční roviny. Souřadnice z_k je vzdálenost k -té vrstvy laminátu od referenční roviny.

2.2 Matice tuhosti a matice poddajnosti

Pro lineární elastický materiál je matice tuhosti obsažena v Hookově zákoně, který je možno zapsat ve tvaru (2.6).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

V inverzním tvaru Hookova zákona, který můžeme vyjádřit rovnicí (2.7) je pak obsažena matice poddajnosti.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.7)$$

Přičemž \mathbf{S} je matice tuhosti, \mathbf{C} je matice poddajnosti, $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor napjatosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor poměrné deformace. Z rovnic (2.6) a (2.7) je zřejmé, že matici poddajnosti získáme inverzí matice tuhosti.

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \quad (2.8)$$

Jelikož je matice tuhosti \mathbf{S} symetrická, tak z rovnice (2.8) vyplývá, že symetrická musí být i matice poddajnosti \mathbf{C} .

Uvažujme ortotropní materiál a rovinnou napjatost. Pak bude matice tuhosti k -té vrstvy v hlavním souřadném systému kompozitního materiálu $O(L, T, T')$ (viz Obr. 2) ve tvaru

$$\mathbf{S}_k^L = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{TL} E_L}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}_k \quad (2.9)$$

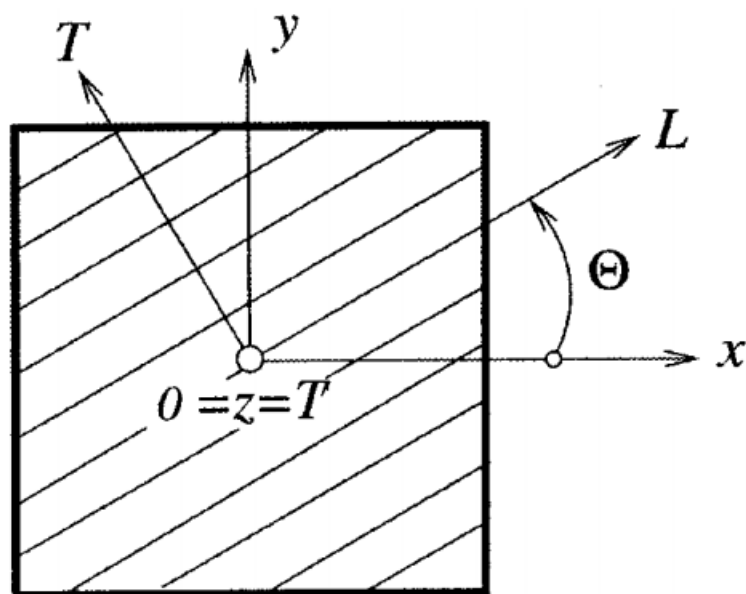
matice poddajnosti k -té vrstvy pak bude mít tvar

$$\mathbf{C}_k^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_T} & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix}_k \quad (2.10)$$

Kde E_L je modul pružnosti ve směru vláken L , E_T je modul pružnosti ve směru kolmém na vlákna T , G_{LT} je modul pružnosti ve smyku, ν_{LT} a ν_{TL} jsou Poissonovy poměry a k je index jednotlivých vrstev.

2.3 Transformace matice tuhosti a poddajnosti

Jelikož u kompozitních materiálů závisí tuhost, respektive poddajnost na orientaci vláken v jednotlivých vrstvách, je nezbytné pro další výpočty zavést transformační vztahy mezi souřadnými systémy. Chceme tedy získat transformační vztahy, tak abychom mohli matice tuhosti, respektive poddajnosti transformovat z hlavního systému kompozitního materiálu $O(L, T, T')$ do souřadného systému $O(x, y, z)$ a naopak. Používané souřadné systémy jsou znázorněny na Obr. 2.



Obr. 2 Souřadné systémy kompozitního materiálu [1]

Matici tuhosti transformuje z hlavního souřadného systému do souřadného systému $O(x, y, z)$ dle rovnice

$$S_k^x = T_{\sigma}^{xL} \cdot S_k^L \cdot T_{\varepsilon}^{Lx} \quad (2.11)$$

a pro matici poddajnosti platí rovnice

$$C_k^x = T_{\varepsilon}^{xL} \cdot C_k^L \cdot T_{\sigma}^{Lx} \quad (2.12)$$

Obdobné transformační vztahy dostaneme pro transformaci ze souřadného systému $O(x, y, z)$ do hlavního souřadného systému $O(L, T, T')$. Matici tuhosti transformujeme dle rovnice

$$S_k^L = T_{\sigma}^{Lx} \cdot S_k^x \cdot T_{\varepsilon}^{xL} \quad (2.13)$$

a pro matici poddajnosti platí rovnice

$$C_k^L = T_{\varepsilon}^{Lx} \cdot C_k^x \cdot T_{\sigma}^{xL} \quad (2.14)$$

Kde \mathbf{S}_k^x je matice tuhosti k -té vrstvy v souřadném systému $O(x, y, z)$, \mathbf{C}_k^x je matice poddajnosti v souřadném systému $O(x, y, z)$, \mathbf{S}_k^L je matice tuhosti k -té vrstvy v hlavním souřadném systému $O(L, T, T')$ a \mathbf{C}_k^L je matice poddajnosti v hlavním souřadném systému $O(L, T, T')$. \mathbf{T}_σ^{xL} , \mathbf{T}_σ^{Lx} , $\mathbf{T}_\varepsilon^{xL}$ a $\mathbf{T}_\varepsilon^{Lx}$ jsou transformační matice viz rovnice (2.15), (2.16), (2.17) a (2.18).

$$\mathbf{T}_\sigma^{xL} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & -2 \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \cos \theta_k \sin \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{T}_\sigma^{Lx} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \cos \theta_k \sin \theta_k \\ -\cos \theta_k \sin \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{xL} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k \\ 2 \cos \theta_k \sin \theta_k & -2 \cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{Lx} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k \\ -2 \cos \theta_k \sin \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že pro tyto transformační matice musí platit následující vztahy

$$\mathbf{T}_\sigma^{xL} = [\mathbf{T}_\varepsilon^{Lx}]^T \quad (2.19)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{xL} = [\mathbf{T}_\sigma^{Lx}]^T \quad (2.20)$$

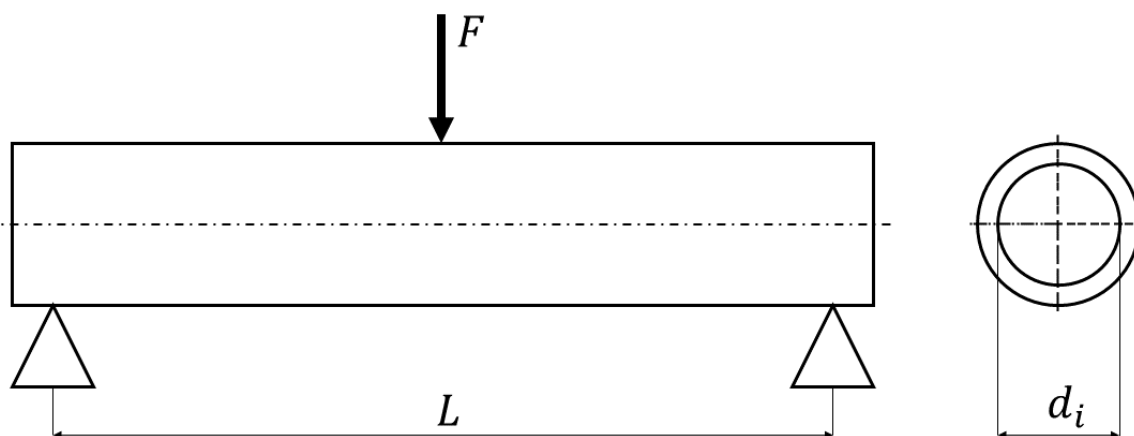
2.4 Analytické metody určení tuhosti

V této kapitole bude uveden stručný přehled analytických metod, které je možné použít k určení ohybové, popřípadě i smykové tuhosti. Analýza nosníků bude provedena pomocí těchto analytických metod:

- Určení ohybové tuhosti z matice tuhosti a poddajnosti
- Určení ohybové tuhosti metodou *ABD* matic

2.4.1 Modelový nosník

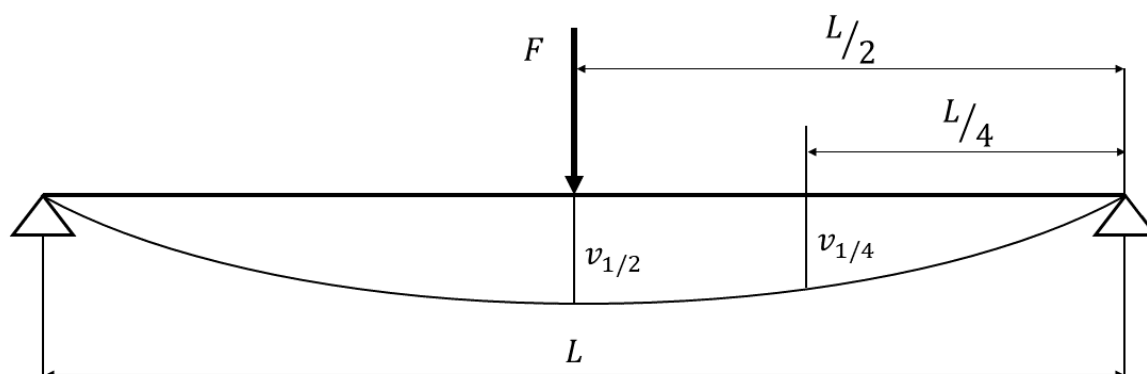
Teoretický popis jednotlivých analytických metod bude ukázán na modelovém příkladu navíjeného nosníku zatíženého tříbodovým ohybem. Jedná se o stejný typ nosníku, jenž byl pak následně použit v experimentální části.



Obr. 3 Modelový příklad nosníku zatíženého tříbodovým ohybem

Nosník je zobrazen na Obr. 3, kde F je zatěžující síla působící ve středu nosníku, d_i je vnitřní průměr a L je vzdálenost podpěr.

Na Obr. 4 jsou znázorněny průhyby v jedné polovině $v_{1/2}$ a jedné čtvrtině $v_{1/4}$ modelového nosníku. Tyto průhyby budou následně použity při vyhodnocování experimentu.



Obr. 4 Průhyby modelového nosníku

Výpočet jednotlivých průhybů byl proveden pomocí Mohrova integrálu (více informací k odvození Mohrova integrálu je možné najít například v [8]), který je popsán rovnicí (2.21). Jelikož se jedná o kompozitní nosník, tak je uvažován i příspěvek od posouvající síly.

$$v(x) = \int_0^L \frac{M_0(x)}{E J_z(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \int_0^L \frac{\beta T(x)}{G A(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx \quad (2.21)$$

Kde $M_0(x)$ je ohybový moment v daném poli, $T(x)$ je posouvající síla v daném poli, E je modul pružnosti v tahu, G je modul pružnosti ve smyku, $J_z(x)$ je kvadratický moment průřezu v daném poli, $A(x)$ je plocha průřezu nosníku v daném poli a β je koeficient tvaru průřezu ve smyku.

V tomto případě bude uvažován nosník s konstantním mezikruhovým průřezem. Průřez $A(x)$ a kvadratický moment $J_z(x)$ nezávisí na souřadnici x a jsou tedy po celé délce nosníku konstantní, lze je tedy popsat rovnicemi (2.22) a (2.23), přičemž d_e je vnější průměr.

$$A = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) \quad (2.22)$$

$$J = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \quad (2.23)$$

Po matematických úpravách rovnice (2.21) dostaneme vztah pro průhyb v jedné polovině nosníku, jenž má tvar

$$v_{1/2} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J} + \frac{\beta \cdot F \cdot L}{4 \cdot G \cdot A} \quad (2.24)$$

analogicky pak dostaneme průhyb v jedné čtvrtině nosníku.

$$v_{1/4} = \frac{11 \cdot F \cdot L^3}{768 \cdot E \cdot J} + \frac{\beta \cdot F \cdot L}{8 \cdot G \cdot A} \quad (2.25)$$

2.4.2 Použití matice tuhosti a poddajnosti k určení ohybové tuhosti

Pomocí transformačních vztahů (2.11) a (2.12) je možné získat matici tuhosti \mathbf{S}_k^x , respektive matici poddajnosti \mathbf{C}_k^x k -té vrstvy kompozitního materiálu v souřadném systému $O(x, y, z)$ (viz Obr. 2). Matice tuhosti bude ve tvaru

$$\mathbf{S}_k^x = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}_k \quad (2.26)$$

a matice poddajnosti bude ve tvaru

$$\mathbf{C}_k^x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_k \quad (2.27)$$

Použití matice tuhosti \mathbf{S} představuje horní odhad ekvivalentní ohybové tuhosti. V matici tuhosti člen S_{11}^k přímo reprezentuje modul pružnosti v tahu k -té vrstvy ve směru osy nosníku. Ohybovou tuhost k -té vrstvy získáme jako součin modulu pružnosti v tahu S_{11}^k a příslušného kvadratického momentu J_k . Celkovou ohybovou tuhost kompozitního materiálu pak získáme jako součet ohybových tuhostí v jednotlivých vrstvách.

$$E_x \cdot J = \sum_{k=1}^K S_{11}^k \cdot J_k \quad (2.28)$$

Analogicky lze použít matici poddajnosti \mathbf{C} , která naopak představuje dolní odhad ekvivalentní ohybové tuhosti. Člen C_{11} vyjádříme ve tvaru

$$C_{11} = \frac{1}{E_x} \quad (2.29)$$

Ohybovou tuhost k -té vrstvy získáme jako součin modulu pružnosti v tahu E_{x_k} a příslušného kvadratického momentu J_k . Celkovou ohybovou tuhost kompozitního materiálu pak získáme jako součet ohybových tuhostí v jednotlivých vrstvách.

$$E_x \cdot J = \sum_{k=1}^K E_{x_k} \cdot J_k \quad (2.30)$$

Z popsaných vztahů je zřejmé, že při výpočtu modulu pružnosti v tahu E_x je uvažováno zjednodušené tahové zatížení ve směru osy nosníku. Deformace ani napětí v ostatních směrech nejsou uvažovány.

2.4.3 Metoda ABD matic

Následující rovnice pro metodu *ABD* matic jsou převzaty z [5]. Základní rovnice pro výpočet ekvivalentního modulu pružnosti v tahu pomocí metody *ABD* matic je rovnice (2.1). Dále budou uvažovány nosníky kruhového průřezu, které jsou v každé vrstvě zatížené rovinnou napjatostí. Pro takovéto nosníky je k výpočtu ekvivalentního modulu pružnosti v tahu použita pouze matice \mathbf{A} , která v rovnici (2.1) představuje právě tahové napětí. Zatížení nosníku axiální silou je možné vyjádřit pomocí prvků matice \mathbf{A} . [4], [6]

$$N_1 = \left(A_{11} - [A_{12} \quad A_{16}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{26} \\ A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{61} \end{bmatrix} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (2.31)$$

Kde N_1 je lineární hustota vnitřních sil ve směru osy x a A_{ij} jsou prvky matice \mathbf{A} . Tento vztah nemá rozměr napětí, ale má rozměr $[N \cdot m^{-1}]$. Napětí v kompozitním materiálu vyjádříme pomocí Hookova zákona. Abychom získali vztah pro napětí, tak rovnici (2.31) vydělíme celkovou tloušťkou kompozitního materiálu h , čímž dostaneme

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{h} = \frac{1}{h} \left(A_{11} - [A_{12} \quad A_{16}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{26} \\ A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{61} \end{bmatrix} \right) \cdot \varepsilon_1^\circ \quad (2.32)$$

Z rovnice (2.32) je zřejmé, že ekvivalentnímu modulu pružnosti v tahu odpovídá výraz v závorce dělený celkovou tloušťkou kompozitního materiálu h . Ekvivalentní modul pružnosti v tahu je tedy možné vyjádřit následujícím vztahem

$$E_{eq} = \frac{1}{h} \left(A_{11} - [A_{12} \quad A_{16}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{26} \\ A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{61} \end{bmatrix} \right) \quad (2.33)$$

Ekvivalentní ohybovou tuhost dostaneme vynásobením ekvivalentní pružnosti v tahu E_{eq} s celkovým kvadratickým momentem průřezu. Ekvivalentní ohybovou tuhost můžeme tedy vyjádřit následujícím vztahem

$$(EJ)_{eq} = E_{eq} \cdot J \quad (2.34)$$

3. Experimentální část

Aby bylo možné validovat analytické výpočtové metody, které jsou popsány v předchozích kapitolách, byl v laboratořích ČVUT FS proveden experiment. Provedení experimentu nebylo součástí mé diplomové práce. Pro potřeby své diplomové práce jsem převzal již naměřená experimentální data, která jsem následně vyhodnotil.

Jako vzorky pro experiment byly vybrány navíjené tenkostěnné kompozitní trubky s vnitřním průměrem 50 *mm*. Pro zkoušené trubky byly použity čtyři kompozitní skladby, přičemž pro všechny tyto kompozitní skladby, byly použity tři různé materiály vláken. Zkoušené trubky byly namáhané tříbodovým ohybem, který byl aplikován na podpěry s rozpětím 400 *mm* a 750 *mm*. Pomocí kompaktních laserových snímačů polohy byly měřeny průhyby v jedné polovině a jedné čtvrtině tohoto rozpětí.

Cílem experimentu bylo experimentálně zjistit tuhosti měřených trubek a porovnat je s tuhostmi, které získáme pomocí analytických metod. Aby bylo možné z experimentálně získaných dat určit tuhost, byl zaveden modelový nosník (viz kapitola 2.4.1).

3.1 Materiálové vlastnosti zkoušených vzorků

Jak již bylo popsáno výše, tak pro všechny kompozitní skladby byly použity tři materiály vláken. Materiál matrice byl pro všechny tři varianty shodný, vždy se měnil pouze materiál vláken. Byla vybrána epoxidová matrice, jejíž materiálové vlastnosti jsou uvedeny v Tab. 1.

Tab. 1 Materiálové parametry matrice

| | |
|----------------------------------|------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 2\,800\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 2\,800\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti ve smyku | $G_{LT} = 1\,600\text{ MPa}$ |
| Poissonovo číslo | $\nu_{LT} = 0,4$ |

Byla použita uhlíková vlákna typu T700, UMS40 a XN60. Materiálové vlastnosti jednotlivých typů vláken jsou uvedeny v Tab. 2, Tab. 3 a Tab. 4.

Tab. 2 Materiálové vlastnosti materiálu T700

| | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 235\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 15\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti ve smyku | $G_{LT} = 50\,000\text{ MPa}$ |
| Poissonovo číslo | $\nu_{LT} = 0,3$ |

Tab. 3 Materiálové vlastnosti materiálů UMS40

| | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 395\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 15\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti ve smyku | $G_{LT} = 50\,000\text{ MPa}$ |
| Poissonovo číslo | $\nu_{LT} = 0,3$ |

Tab. 4 Materiálové vlastnosti materiálu XN60

| | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 632\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 5\,000\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti ve smyku | $G_{LT} = 20\,000\text{ MPa}$ |
| Poissonovo číslo | $\nu_{LT} = 0,35$ |

Materiálové vlastnosti výsledného kompozitního materiálu byly stanoveny pomocí směšovacíh pravidel. Objemový podíl V_f vláken byl ve všech případech 50 %.

Tab. 5 Materiálové vlastnosti kompozitu T700/epoxid

| | |
|----------------------------------|------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 164\,400\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 4\,719\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $G_{LT} = 3\,100\text{ MPa}$ |
| Poissonovy poměry | $\nu_{LT} = 0,35$ |
| | $\nu_{TL} = 0,01419$ |

Tab. 6 Materiálové vlastnosti kompozitu UMS40/epoxid

| | |
|----------------------------------|------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 198\,900\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 4\,719\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $G_{LT} = 3\,100\text{ MPa}$ |
| Poissonovy poměry | $\nu_{LT} = 0,35$ |
| | $\nu_{TL} = 0,008304$ |

Tab. 7 Materiálové vlastnosti kompozitu XN60/epoxid

| | |
|----------------------------------|------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 317\,400\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 3\,589\text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $G_{LT} = 2\,962\text{ MPa}$ |
| Poissonovy poměry | $\nu_{LT} = 0,375$ |
| | $\nu_{TL} = 0,004241$ |

3.2 Geometrické parametry zkoušených vzorků

Na zkoušené vzorky byly použity čtyři kompozitní skladby a sice typická skladba *T*, podélná skladba *P*, napříčová skladba *N1* a napříčová skladba *N2*. Geometrické parametry jednotlivých kompozitních skladeb jsou uvedeny v Tab. 8 až Tab. 11.

Tab. 8 parametry kompozitní skladby *T*

| Typická skladba <i>T</i> | | | | | |
|---------------------------------|--------------|---------|-----------------|--------------|-------|
| d_i | Vlákn | Skladba | Tloušťka vrstev | d_e vrstev | V_f |
| [mm] | [–] | [°] | [mm] | [mm] | [%] |
| 50 | <i>T700</i> | 88,6 | 0,24 | 50,48 | 50 |
| | | 0 | 0,59 | 51,66 | 50 |
| | | ±31,1 | 0,43 | 52,52 | 50 |
| 50 | <i>UMS40</i> | 88,8 | 0,27 | 50,54 | 50 |
| | | 0 | 0,55 | 51,64 | 50 |
| | | ±31,1 | 0,5 | 52,64 | 50 |
| 50 | <i>XN60</i> | 88,2 | 0,33 | 50,66 | 50 |
| | | 0 | 0,67 | 52 | 50 |
| | | ±31,3 | 0,59 | 53,18 | 50 |

Tab. 9 Parametry kompozitní skladby *P*

| Podélná skladba <i>P</i> | | | | | |
|---------------------------------|--------------|---------|-----------------|--------------|-------|
| d_i | Vlákn | Skladba | Tloušťka vrstev | d_e vrstev | V_f |
| [mm] | [–] | [°] | [mm] | [mm] | [%] |
| 50 | <i>T700</i> | 88,6 | 0,24 | 50,48 | 50 |
| | | 0 | 0,59 | 51,66 | 50 |
| 50 | <i>UMS40</i> | 88,8 | 0,27 | 50,54 | 50 |
| | | 0 | 0,55 | 51,64 | 50 |
| 50 | <i>XN60</i> | 88,2 | 0,33 | 50,66 | 50 |
| | | 0 | 0,67 | 52 | 50 |

Tab. 10 Parametry kompozitní skladby N1

| Napříčová skladba N1 | | | | | |
|-----------------------------|--------|---------|-----------------|--------------|-------|
| d_i | Vlákno | Skladba | Tloušťka vrstev | d_e vrstev | V_f |
| [mm] | [-] | [°] | [mm] | [mm] | [%] |
| 50 | T700 | 88,6 | 0,24 | 50,48 | 50 |
| | | ±44,5 | 0,41 | 51,3 | 50 |
| 50 | UMS40 | 88,8 | 0,27 | 50,54 | 50 |
| | | ±44,5 | 0,49 | 51,52 | 50 |
| 50 | XN60 | 88,2 | 0,33 | 50,66 | 50 |
| | | ±44,6 | 0,73 | 52,12 | 50 |

Tab. 11 Parametry kompozitní skladby N2

| Napříčová skladba N2 | | | | | |
|-----------------------------|--------|---------|-----------------|--------------|-------|
| d_i | Vlákno | Skladba | Tloušťka vrstev | d_e vrstev | V_f |
| [mm] | [-] | [°] | [mm] | [mm] | [%] |
| 50 | T700 | 88,6 | 0,24 | 50,48 | 50 |
| | | ±21,5 | 0,4 | 51,28 | 50 |
| 50 | UMS40 | 88,8 | 0,27 | 50,54 | 50 |
| | | ±21,5 | 0,47 | 51,48 | 50 |
| 50 | XN60 | 88,2 | 0,33 | 50,66 | 50 |
| | | ±21,5 | 0,72 | 52,1 | 50 |

3.3 Seznam vzorků

Vzorky byly měřeny v sadách po šesti stejných kusech. Pro lepší orientaci bylo každému vzorku přiřazeno označení, např. vzorek

50_UMS40_P_500_4.

Kde 50 označuje vnitřní průměr trubky, UMS40 označuje použitý materiál vláken, P označuje použitou kompozitní skladbu, 500 označuje celkovou délku vzorku a 4 označuje pořadové číslo vzorku v sadě. Ukázka jednotlivých vzorků ze sady 50_UMS40_P_500 je znázorněna na Obr. 5.



Obr. 5 Vzorky ze sady 50_UMS40_P_500

Přehled všech měřených vzorků je uveden v přílohách (Příloha 1 až Příloha 6). Jak již bylo napsáno výše, tak každému vzorku bylo přiřazeno označení. Rovněž jsou u jednotlivých vzorků uvedeny jejich skutečné geometrické parametry. Geometrickými parametry se rozumí vnitřní průměr d_i , vnější průměr d_e , plocha průřezu A a kvadratický moment průřezu J . U každého vzorku byl na dvou místech změřen vnitřní a vnější průměr. Pro výpočet plochy průřezu a kvadratického momentu byly použity střední hodnoty změřených průměrů.

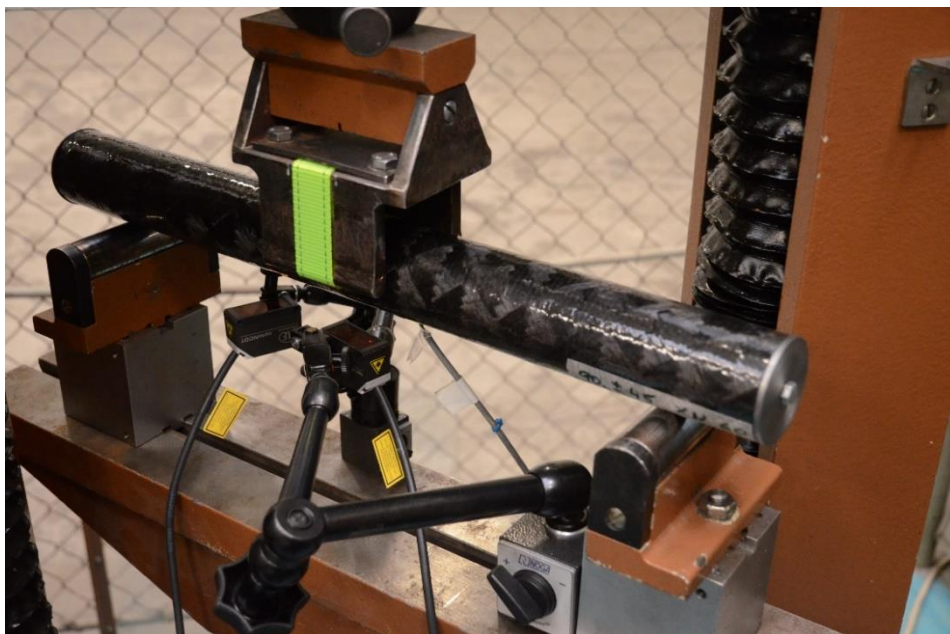
3.4 Průběh měření

Průhyby trubek byly měřeny na dvou různých roztečích podpor a sice 400 mm a 750 mm. Experiment byl proveden na stroji *Tira 2300*. Jednotlivé trubky byly zatíženy silou přes popruh viz Obr. 6



Obr. 6 Zatížení vzorku silou přes popruh

Během experimentu byl zaznamenáván průhyb v jedné polovině a jedné čtvrtině rozteče podpor. K měření jednotlivých průhybů byly použity kompaktní laserové snímače polohy *ILD 1320*. Detailní parametry tohoto snímače je možné nalézt v [7]. Celé uspořádání experimentu je znázorněno na Obr. 7.



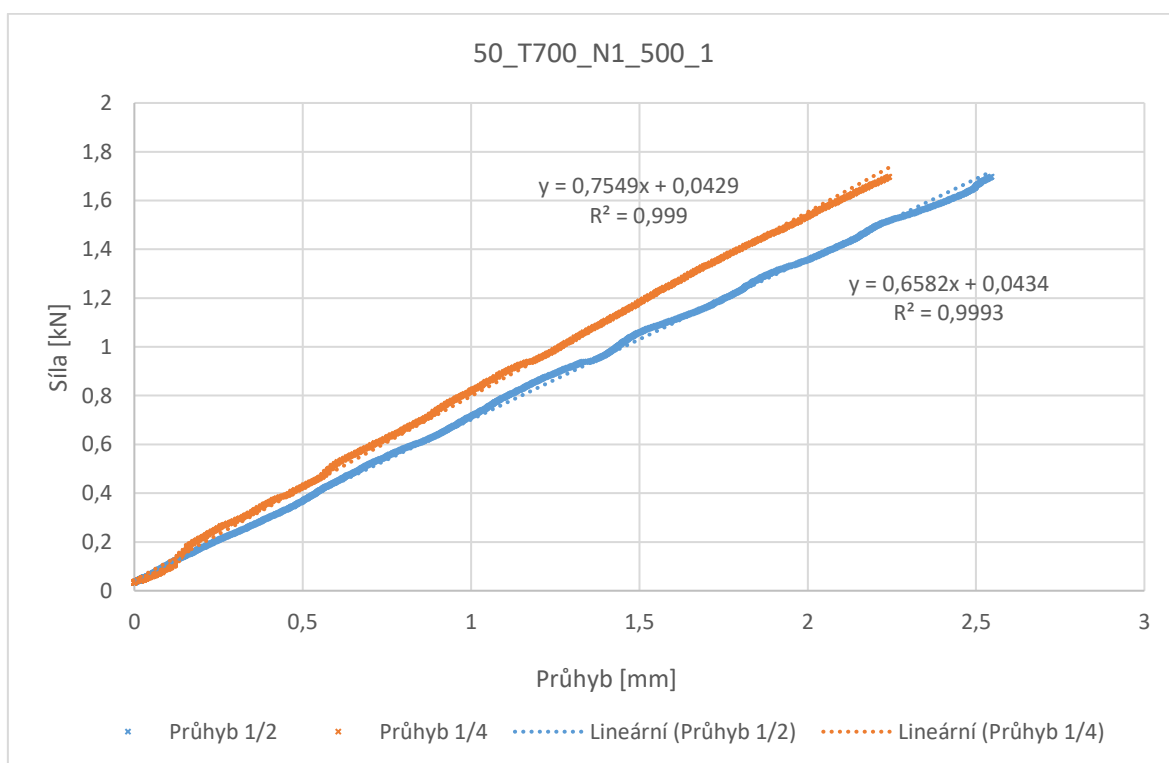
Obr. 7 Uspořádání experimentu

3.5 Vyhodnocení experimentu

Experimentální data jsem vyhodnocoval v programu *MS Excel*. Pro každý vzorek byly graficky zpracována závislost zatěžující síly na jednotlivých průhybech. Jak je znázorněno na Obr. 8, tak tyto závislosti byly proloženy přímkou ve tvaru

$$y = a x + b \quad (3.1)$$

Kde x představuje průhyb v polovině, respektive čtvrtině délky podpěr a y představuje zatěžující sílu. Pomocí rovnice této přímky pak bylo možné pro libovolně zvolenou sílu dopočítat velikosti jednotlivých průhybů.



Obr. 8 Příklad vyhodnocení u vzorku 50_T700_N1_500_1

Pro vzorek 50_T700_N1_500_1 (viz Obr. 8) byla zvolena zatěžující síla $F = 1,4 \text{ kN}$. Vyjádříme-li z rovnice (3.1) proměnou x a dosadíme $a = 0,6582$, $y = 1,4$ a $b = 0,0434$ dostaneme průhyb v polovině délky podpěr.

$$v_{1/2} = \frac{y - b}{a} = \frac{1,4 - 0,0434}{0,6582} = 2,0611 \text{ mm} \quad (3.2)$$

Analogický postup zopakujeme i pro výpočet průhybu v jedné čtvrtině délky podpěr, přičemž dosadíme $a = 0,7549$, $y = 1,4$ a $b = 0,0429$.

$$v_{1/4} = \frac{y - b}{a} = \frac{1,4 - 0,0429}{0,7549} = 1,7977 \text{ mm} \quad (3.3)$$

Máme-li určené průhyby $v_{1/2}$ a $v_{1/4}$, je možné přejít ke stanovení hledaných modulů pružnosti. Vyhodnocení bylo provedeno pomocí dvou postupů a to postupem, který uvažoval vliv posouvající síly a postupem, který naopak posouvající sílu zanedbával.

3.5.1 Vyhodnocení dle Timošenkovy teorie

Rovnice (2.24) a (2.25) tvoří soustavu lineárních rovnic, přičemž neznámými jsou hledané moduly pružnosti E a G . Modul pružnosti v tahu je tedy možné vyjádřit ve tvaru

$$E = \frac{F \cdot L^3}{256 \cdot J \cdot (v_{1/4} - 0,5 \cdot v_{1/2})} \quad (3.4)$$

a modul pružnosti ve smyku bude ve tvaru

$$G = \frac{3 \cdot F \cdot L}{64 \cdot A \cdot \left(\frac{11}{16} \cdot v_{1/2} - v_{1/4}\right)} \quad (3.5)$$

Dosadíme-li do rovnic (3.4) a (3.5) parametry vzorku 50_T700_N1_500_1 dostaneme, že modul pružnosti v tahu je

$$E = 12\,534 \text{ MPa} \quad (3.6)$$

a modul pružnosti ve smyku je

$$G = -612 \text{ MPa} \quad (3.7)$$

Vypočtené hodnoty E a G jsou pro všechny vzorky uvedené v přílohách (viz Příloha 7 a Příloha 8). Při použití tohoto postupu vychází modul pružnosti ve smyku záporný, což může být způsobeno použitím nosníku s mezikruhovým průřezem. Z tohoto důvodu bude pro další vyhodnocení použit jen modul pružnosti v tahu.

3.5.2 Vyhodnocení dle Euler-Bernoulliho teorie

Zanedbáme-li v rovnicích (2.24) a (2.25) průhyb způsobený posouvající silou dostaneme rovnice

$$v_{1/2} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J} \quad (3.8)$$

$$v_{1/4} = \frac{11 \cdot F \cdot L^3}{768 \cdot E \cdot J} \quad (3.9)$$

Jelikož rovnice (3.8) a (3.9) tvoří přeurčenou soustavu rovnic, určíme modul pružnosti v tahu jak v jedné polovině, tak i v jedné čtvrtině zvlášť.

Z rovnice (3.8) dostaneme vztah pro modul pružnosti v tahu v jedné polovině.

$$E_{1/2} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot v_{1/2} \cdot J} \quad (3.10)$$

Obdobně pak z rovnice (3.9) dostaneme vztah pro modul pružnosti v tahu v jedné čtvrtině.

$$E_{1/4} = \frac{11 \cdot F \cdot L^3}{768 \cdot v_{1/4} \cdot J} \quad (3.11)$$

Dosadíme-li do rovnic (3.10) a (3.11) parametry vzorku 50_T700_N1_500_1, dostaneme hledaný modul pružnosti v tahu v jedné polovině rozpětí podpor

$$E_{1/2} = 24\,883 \text{ MPa} \quad (3.12)$$

a v jedné čtvrtině rozpětí podpor

$$E_{1/4} = 19\,613 \text{ MPa} \quad (3.13)$$

Vypočtené hodnoty $E_{1/2}$ a $E_{1/4}$ jsou pro všechny vzorky uvedené v přílohách (viz Příloha 7 a Příloha 8). Teoreticky, by tyto moduly měly být shodné, nicméně při experimentálním zjištění dojde vždy k drobné odchylce. Aby bylo možné takto získaná data dále zpracovávat byl zaveden aritmetický průměr modulu pružnosti v jedné polovině a v jedné čtvrtině. Tento modul pružnosti v tahu bude považován za výsledný modul pružnosti vzorku 50_T700_N1_500_1.

$$\bar{E} = 22\,248 \text{ MPa} \quad (3.14)$$

Výše popsany postup aplikujeme na všech šest vzorků v sadě. Modul pružnosti v tahu celé sady 50_T700_N1_500 pak bude roven aritmetickému průměru jednotlivých vzorků.

$$E = 22\,615 \text{ MPa} \quad (3.15)$$

3.6 Výsledky experimentální části

Přehled experimentálně určených modulů pružnosti v tahu pro vzorky *ID50_500* je uveden v Tab. 12. Není-li u vzorku uvedena žádná hodnota, znamená to, že během experimentu došlo k poškození vzorku, nebo se nepodařilo správně zaznamenat měřené průhyby. U vzorků, u kterých je směrodatná odchylka nulová se z celé sady podařilo vyhodnotit jen jeden vzorek. Pro vzorky *ID50_780* je přehled experimentálně určených modulů pružnosti v tahu uveden v Tab. 13. Detailní hodnoty pro jednotlivé vzorky jsou uvedeny v přílohách (Příloha 7 a Příloha 8).

Tab. 12 Přehled experimentálně určených modulů pružnosti u vzorků *ID50_500*

| Sada | Euler-Bernoulliho metoda | | Timošenkova metoda | |
|-------------|--------------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| | E [MPa] | Směrodatná odchylka | E [MPa] | Směrodatná odchylka |
| 50_T700_N1 | 22615 | 971,399 | 11483 | 975,724 |
| 50_T700_N2 | - | - | - | - |
| 50_T700_P | - | - | - | - |
| 50_T700_T | 54366 | 2429,826 | 27551 | 774,161 |
| 50_UMS40_N1 | 23382 | 1441,564 | 14242 | 1075,892 |
| 50_UMS40_N2 | - | - | - | - |
| 50_UMS40_P | 62431 | 14321,999 | 40286 | 8136,696 |
| 50_UMS40_T | 85943 | 8187,703 | 46805 | 8448,741 |
| 50_XN60_N1 | 21518 | 1862,55 | 14430 | 2523,175 |
| 50_XN60_N2 | 62072 | 0 | 43043 | 0 |
| 50_XN60_P | 72879 | 0 | 37601 | 0 |
| 50_XN60_T | 74020 | 15837,717 | 45172 | 12466,788 |

Tab. 13 Přehled experimentálně určených modulů pružnosti u vzorků *ID50_780*

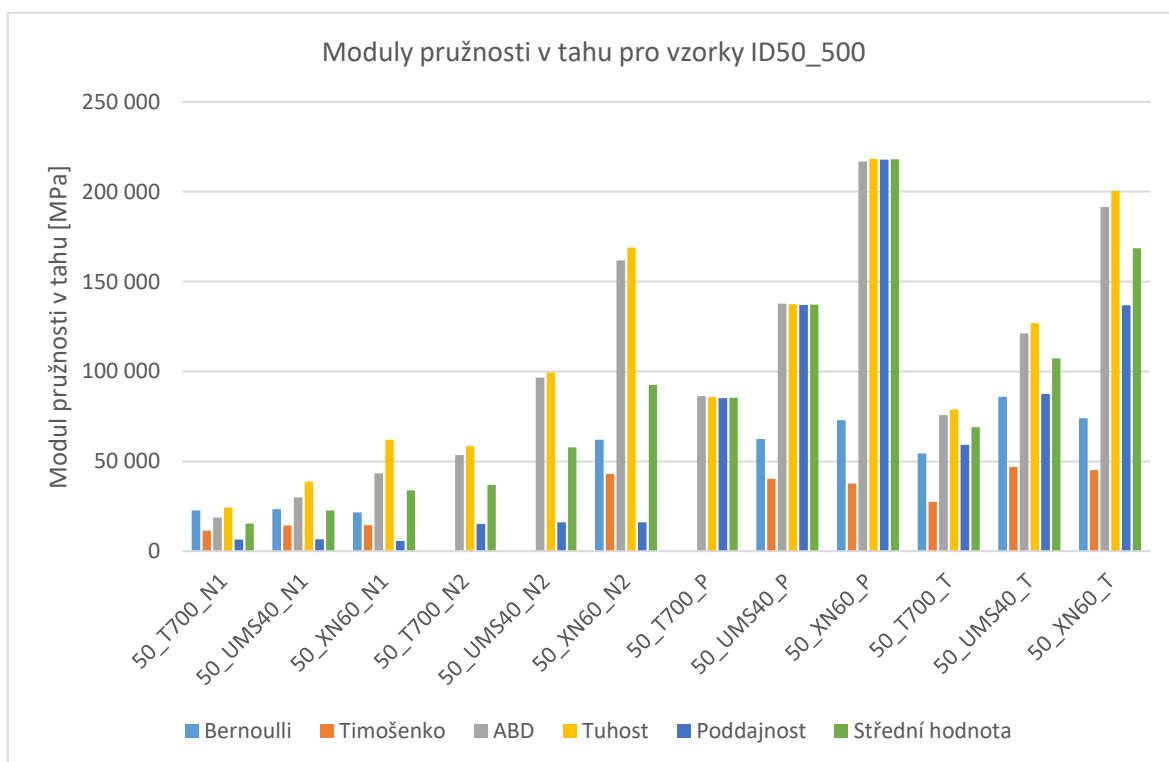
| Sada | Euler-Bernoulliho metoda | | Timošenkova metoda | |
|-------------|--------------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| | E [MPa] | Směrodatná odchylka | E [MPa] | Směrodatná odchylka |
| 50_T700_N1 | 21130 | 2773,713 | 18251 | 2270,427 |
| 50_T700_N2 | 52948 | 4658,742 | 36060 | 3695,247 |
| 50_T700_P | 109720 | 25464,396 | 66191 | 19098,736 |
| 50_T700_T | 55767 | 3993,021 | 44456 | 2981,289 |
| 50_UMS40_N1 | 21291 | 2477,624 | 19998 | 2640,296 |
| 50_UMS40_N2 | 81799 | 8870,561 | 60367 | 6692,668 |
| 50_UMS40_P | 70538 | 7121,863 | 47146 | 5185,958 |
| 50_UMS40_T | 101707 | 9360,193 | 80586 | 14138,253 |
| 50_XN60_N1 | 29479 | 4150,251 | 27343 | 3829,177 |
| 50_XN60_N2 | 89900 | 20040,379 | 53947 | 10092,106 |
| 50_XN60_P | 85075 | 13947,086 | 50966 | 6884,878 |
| 50_XN60_T | 102372 | 18356,292 | 65037 | 19074,566 |

Pro vzorky *ID50_500* je v Tab. 14 uveden přehled jak experimentálně získaných modulů pružnosti v tahu, tak i modulů pružnosti v tahu vypočtených výše uvedenými analytickými metodami.

Tab. 14 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků *ID50_500*

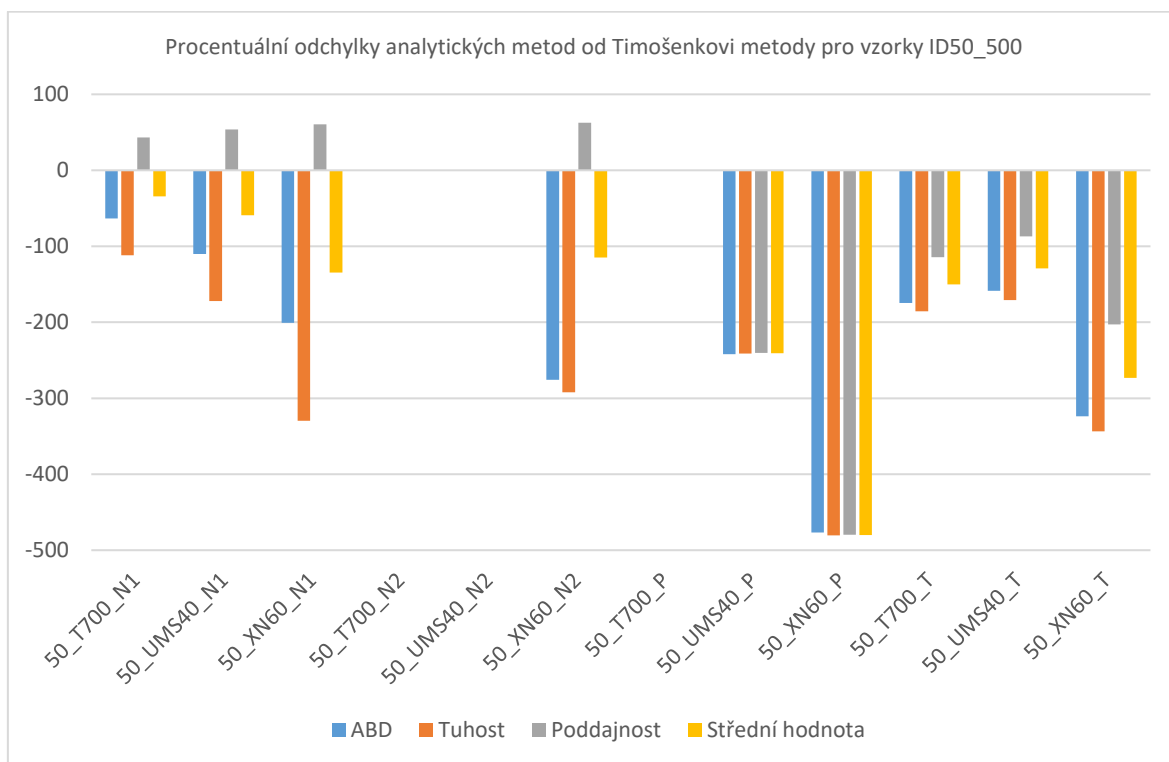
| Sada | Moduly pružnosti v tahu [MPa] | | | | | |
|-------------|-------------------------------|--------------------|------------|----------------|--------------------|-----------------|
| | Euler-Bernoulliho metoda | Timošenkova metoda | Metoda ABD | Matice tuhosti | Matice poddajnosti | Střední hodnota |
| 50_T700_N1 | 22615 | 11483 | 18777 | 24323 | 6530 | 15427 |
| 50_T700_N2 | - | - | 53398 | 58519 | 15197 | 36858 |
| 50_T700_P | - | - | 86304 | 85652 | 85226 | 85439 |
| 50_T700_T | 54366 | 27551 | 75687 | 78725 | 59107 | 68916 |
| 50_UMS40_N1 | 23383 | 14242 | 29951 | 38769 | 6584 | 22677 |
| 50_UMS40_N2 | - | - | 96638 | 99372 | 16115 | 57744 |
| 50_UMS40_P | 62431 | 40286 | 137731 | 137430 | 137030 | 137230 |
| 50_UMS40_T | 85944 | 46805 | 121122 | 126800 | 87579 | 107190 |
| 50_XN60_N1 | 21518 | 14430 | 43383 | 61981 | 5695 | 33838 |
| 50_XN60_N2 | 62072 | 43043 | 161792 | 168830 | 16159 | 92495 |
| 50_XN60_P | 72880 | 37601 | 216835 | 218250 | 217910 | 218080 |
| 50_XN60_T | 74021 | 45172 | 191415 | 200320 | 136790 | 168555 |

Grafické porovnání modulů pružnosti v tahu pro vzorky *ID50_500* je znázorněno na Obr. 9.

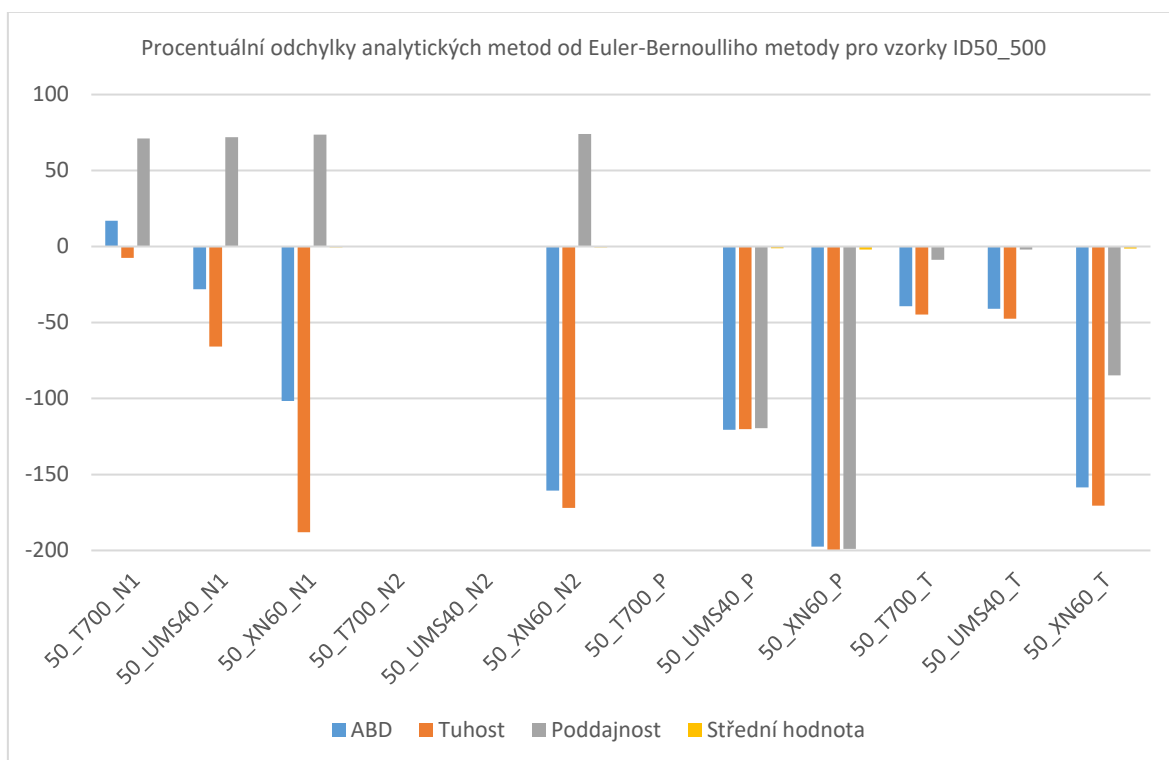


Obr. 9 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků *ID50_500*

Na Obr. 10 a Obr. 11 jsou pro tytéž vzorky znázorněny procentuální odchylky analytických metod od experimentální výsledků získaných dle Timošenkovi, respektive Euler-Bernoulliho metody.



Obr. 10 Procentuální odchylky analytických metod od Timošenkovi metody pro vzorky ID50_500



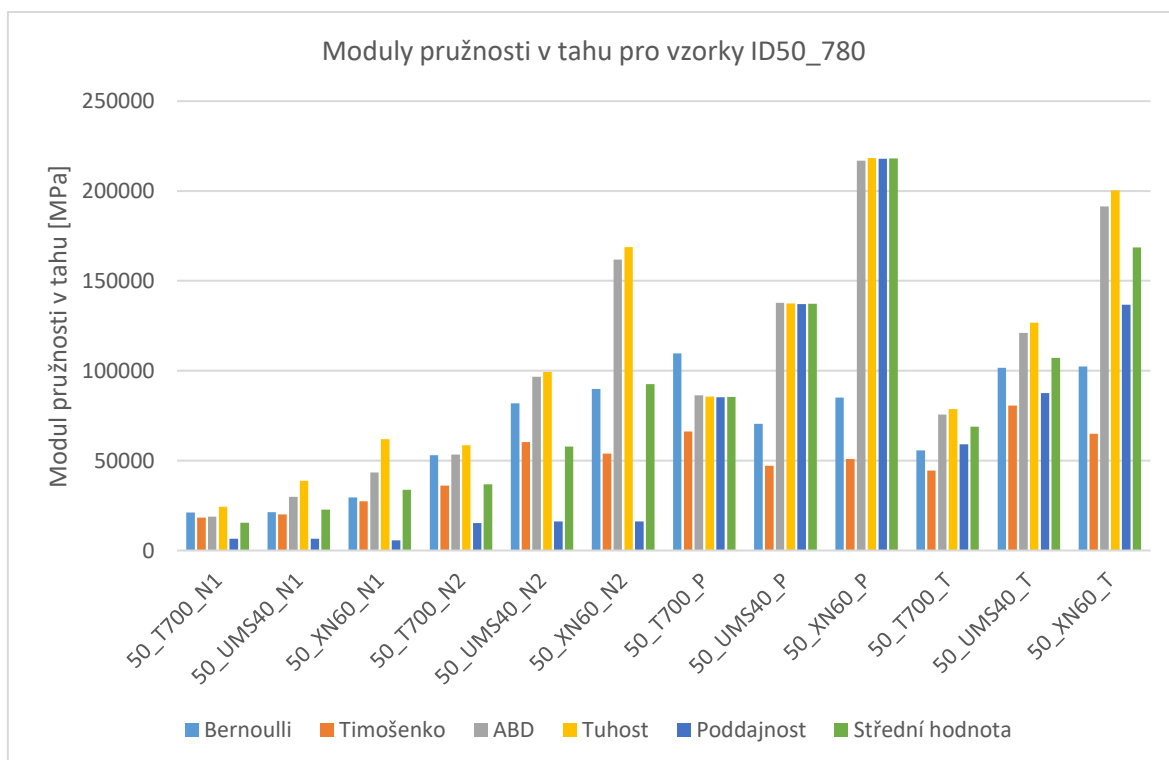
Obr. 11 Procentuální odchylky analytických metod od E-B metody pro vzorky ID50_500

Obdobné výsledky dostaneme i pro vzorky *ID50_780*. V Tab. 15 je uveden přehled modulů pružnosti v tahu pro tyto vzorky.

Tab. 15 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků *ID50_780*

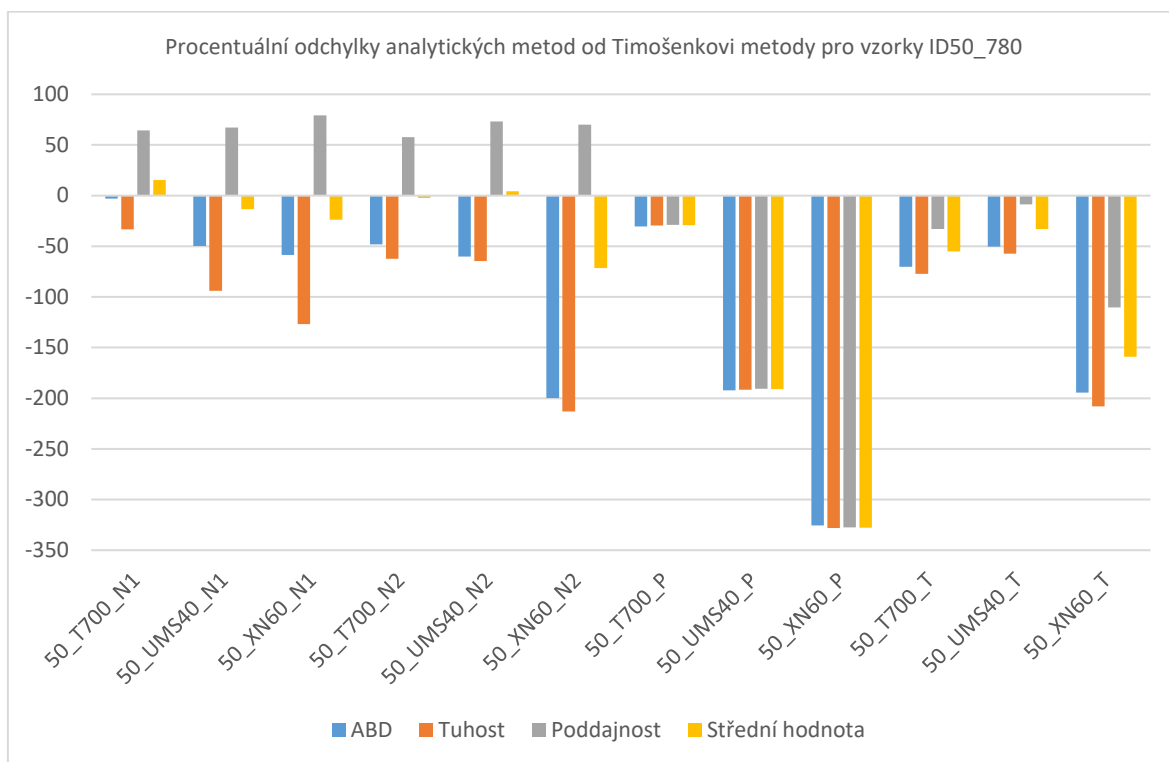
| Sada | Moduly pružnosti v tahu [MPa] | | | | | |
|-------------|-------------------------------|--------------------|------------|----------------|--------------------|-----------------|
| | Euler-Bernoulliho metoda | Timošenkova metoda | Metoda ABD | Matice tuhosti | Matice poddajnosti | Střední hodnota |
| 50_T700_N1 | 21130 | 18251 | 18777 | 24323 | 6530 | 15427 |
| 50_T700_N2 | 52948 | 36060 | 53398 | 58519 | 15197 | 36858 |
| 50_T700_P | 109720 | 66191 | 86304 | 85652 | 85226 | 85439 |
| 50_T700_T | 55767 | 44456 | 75687 | 78725 | 59107 | 68916 |
| 50_UMS40_N1 | 21291 | 19998 | 29951 | 38769 | 6584 | 22677 |
| 50_UMS40_N2 | 81799 | 60367 | 96638 | 99372 | 16115 | 57744 |
| 50_UMS40_P | 70538 | 47146 | 137731 | 137430 | 137030 | 137230 |
| 50_UMS40_T | 101707 | 80586 | 121122 | 126800 | 87579 | 107190 |
| 50_XN60_N1 | 29479 | 27343 | 43383 | 61981 | 5695 | 33838 |
| 50_XN60_N2 | 89900 | 53947 | 161792 | 168830 | 16159 | 92495 |
| 50_XN60_P | 85075 | 50966 | 216835 | 218250 | 217910 | 218080 |
| 50_XN60_T | 102372 | 65037 | 191415 | 200320 | 136790 | 168555 |

Grafické porovnání modulů pružnosti v tahu pro vzorky *ID50_780* je znázorněno na Obr. 12.

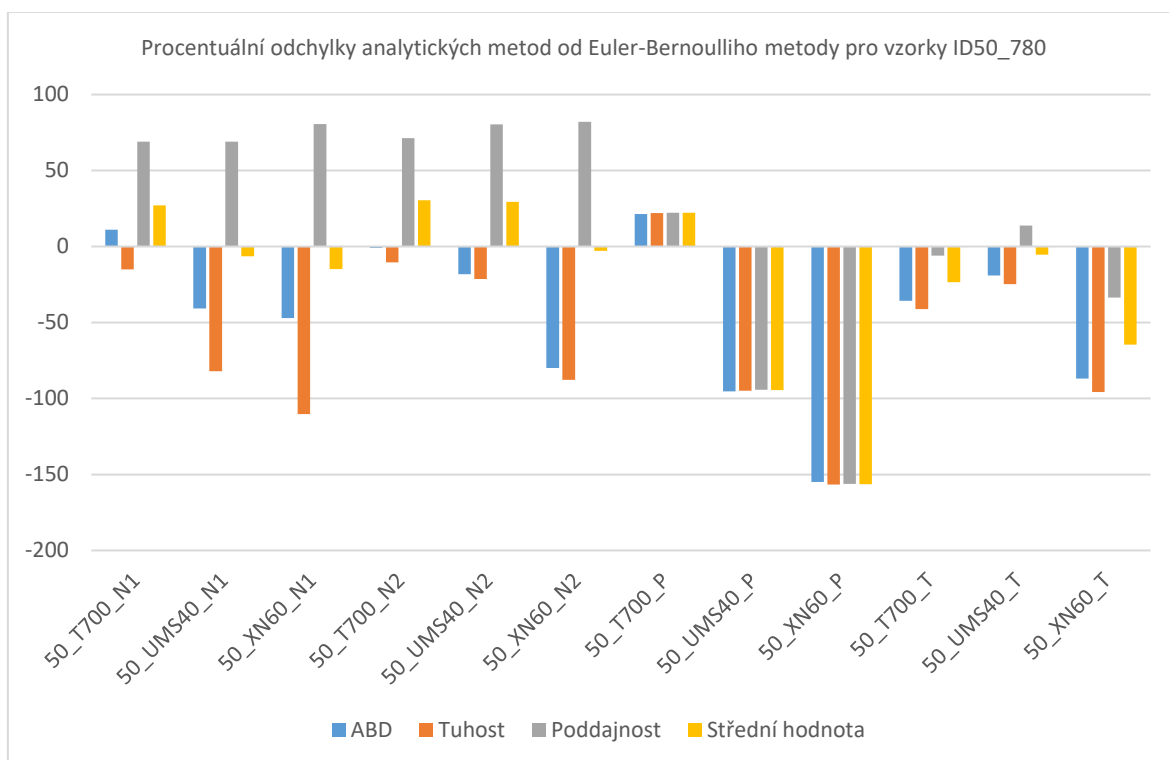


Obr. 12 Porovnání modulů pružnosti v tahu u vzorků *ID50_780*

Na Obr. 13 a Obr. 14 jsou pro tytéž vzorky znázorněny procentuální odchylky analytických metod od experimentální výsledků získaných dle Timošenkovi, respektive Euler-Bernoulliho metody.



Obr. 13 Procentuální odchylky analytických metod od Timošenkovi metody pro vzorky ID50_780



Obr. 14 Procentuální odchylky analytických metod od E-B metody pro vzorky ID50_780

3.7 Závěry z experimentální části

Byť se na první pohled může zdát, že výsledná data jsou dosti chaotická, tak bližším zkoumáním je možné z výsledků vyvodit závěry. Podíváme-li se blíže na grafy na nichž jsou znázorněné absolutní hodnoty modulů pružnosti v tahu (Obr. 9 a Obr. 12) zjistíme, že moduly pružnosti v tahu jsou primárně závislé na použité kompozitní skladbě. U konkrétní kompozitní skladby se změna materiálu vláken projeví pouze změnou velikosti modulu pružnosti v tahu, proporce však zůstanou téměř shodné. Dále je z těchto grafů patrné, že analytické metody se nejlépe shodují u vzorků, u nichž byla použita podélná kompozitní skladba. Je to způsobeno tím, že podélná kompozitní skladba je do jisté míry velmi speciální, neboť se skládá jen z vláken vinutých pod úhlem 0° a 90° . Na druhou stranu se však vzorky s touto kompozitní skladbou vykazují velmi odlišné výsledky analytických hodnot od hodnot získaných experimentálně.

Podíváme-li se blíže na grafy, na níž jsou znázorněné procentuální odchylky analytických metod od experimentu (Obr. 10, Obr. 11, Obr. 13 a Obr. 14) můžeme konstatovat, že vyhodnocení pomocí Euler-Bernoulliho metody je pro tento typ vzorků vhodnější než vyhodnocení pomocí Timošenkovy metody. Dále je z těchto grafů patrné, že pro oba způsoby vyhodnocení je nejlepší shoda s experimentem dosaženou při použití metody střední hodnoty, která byla získána z matice tuhosti a poddajnosti. Dobré shody je rovněž dosaženo při použití metody *ABD* matic. Obecně lze konstatovat, že samotná metoda přímého určení z matice tuhosti, respektive poddajnosti není příliš vhodná, byť pro některé skladby vykazuje velmi dobrou shodu. Hlavní výhodou těchto dvou metod je vymezení oblasti, ve které by se mělo nacházet skutečné řešení.

4. Genetické algoritmy

Dalším cílem mé diplomové práce bylo vytvořit program, který bude optimalizovat navíjený kompozitní díl. Optimalizací se rozumí především optimalizace kompozitní skladby. Pro tvorbu programu byl použit výpočtový program *MATLAB*, který nabízí dva moduly určené pro optimalizační výpočty. *Optimization Toolbox* určený pro hledání lokálních extrémů cílové funkce a *Global Optimization Toolbox*, který umožňuje nalézt i globální extrémy cílové funkce.[9]

Vzhledem k tomu, že při optimalizaci kompozitní skladby je cílová funkce poměrně komplikovaná a může mít několik lokálních extrémů, byla použita optimalizační metoda, která dokáže nalézt globální minimum cílové funkce. *Global Optimization Toolbox* nabízí hned několik takových funkcí, nicméně ne všechny funkce jsou ideální pro řešení daných optimalizačních úloh, jež jsou řešené v kapitole 5. K řešení optimalizačních úloh (viz kapitola 5) byla vybrána funkce *ga*, což je funkce na bázi genetických algoritmů.

V následujících kapitolách bude popsán princip genetických algoritmů. Dále bude podrobně rozebrána funkce genetických algoritmů, která je implementovaná ve výpočtovém programu *MATLAB*.

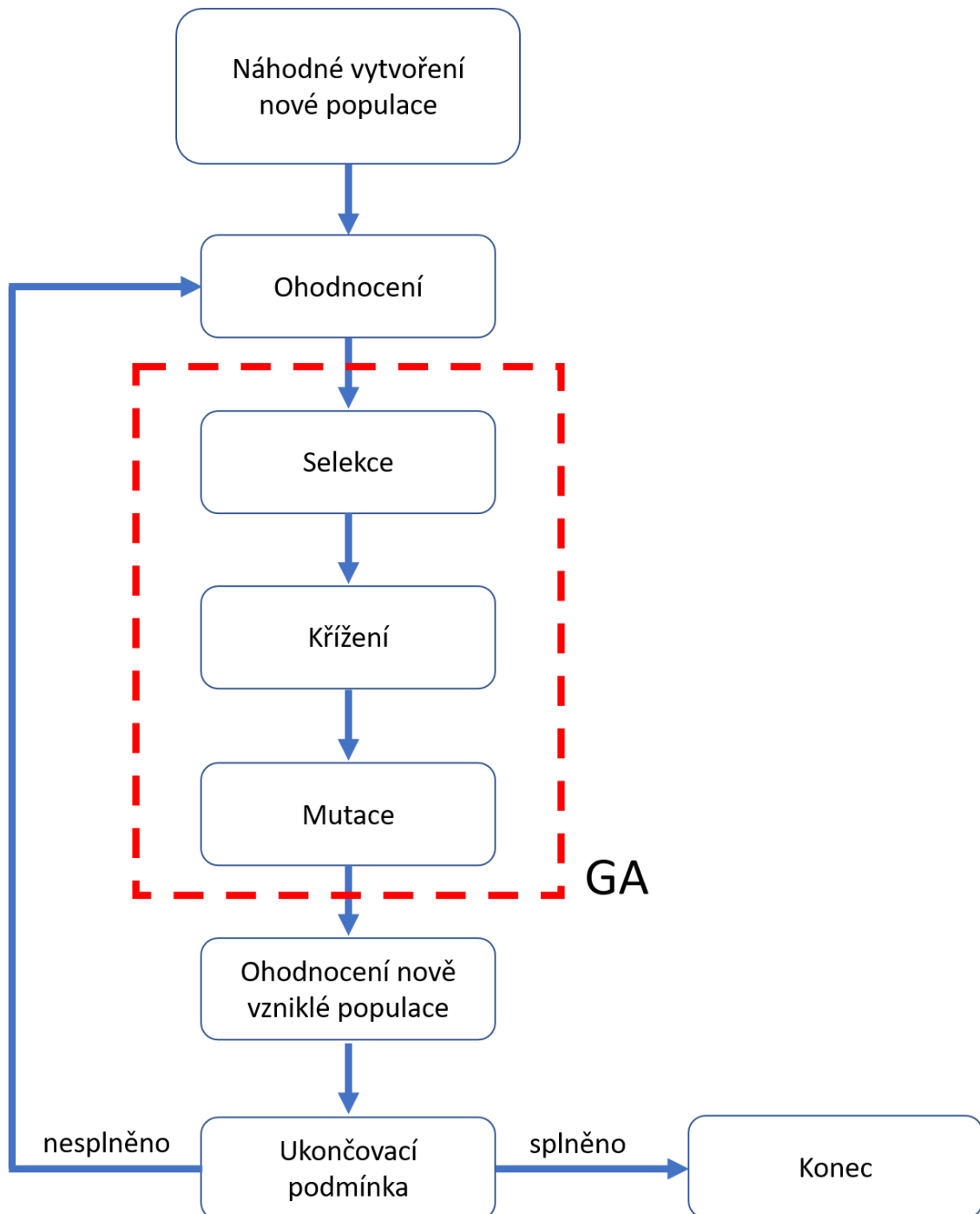
4.1 Základní princip genetických algoritmů

Genetické algoritmy jsou numerické optimalizační algoritmy, které se řadí mezi evoluční algoritmy. Evoluční algoritmy jsou algoritmy, které se snaží napodobovat proces přirozeného výběru, jenž běžně probíhá v přírodě. Největší výhodou genetických algoritmů je jejich obecnost, jednoduchost a možnost využít je k řešení téměř jakéhokoliv problému. Jejich další předností je velká odolnost vůči uvíznutí v lokálním extrému cílové funkce. [10] Naproti tomu jsou ale genetické algoritmy poměrně náročné na potřebný výpočtový čas.

Jak již bylo zmíněno výše, tak u genetických algoritmů panuje velká analogie s biologií, a proto je třeba definovat několik základních pojmů, jenž jsou v teorii genetických algoritmů běžně používány.

- **Jedinec** je nositel genetické informace, který se může stát řešením dané optimalizační úlohy
- **Chromozóm** je genetická informace vybraného jedince
- **Gen** je nejmenší část chromozómu, která je dále nedělitelná
- **Allela** je konkrétní hodnota genu v chromozómu
- **Populace** je skupina jedinců, jenž prochází vývojem
- **Rodič** je jedinec vybraný metodou selekce k vytvoření nové populace
- **Potomek** je jedinec nové populace vzniklý ze dvou nebo více rodičů

Obecné schéma celého optimalizačního procesu je znázorněno na Obr. 15. Samotné genetické algoritmy jsou selekce, křížení a mutace. V následujících kapitolách bude na modelovém příkladu uveden detailnější popis jednotlivých kroků optimalizačního procesu



Obr. 15 Vývojový diagram optimalizačního procesu na bázi genetického algoritmu [14]

4.2 Vytvoření nové populace

Prvním krokem optimalizačního procesu je vytvoření nové populace. Nová populace bývá zpravidla vytvořena zcela náhodně. Nicméně pokud máme o daném problému dostatek informací, je možné na vytvoření nové populace použít heuristiku. Takováto populace již nebude úplně náhodná, ale bude lépe vyhovovat řešenému problému.

Při vytváření nové populace je každý jedinec vyjádřen ve tvaru zakódovaného řetězce. Zde je patrná analogie s biologii. Zakódovaný řetězec odpovídá chromozómu, jednotlivé pozice v chromozómu odpovídají genům a konkrétní hodnoty na těchto pozicích odpovídají alelám. Ke kódování se nejčastěji používá binární kód, nicméně není to nutná podmínka. Řetězec je možné zakódovat pomocí Grayova kódu, reálného čísla, nebo pomocí matice.

Na modelovém případu budu demonstrovat náhodné vytvoření nové populace o šesti jedincích (viz Tab. 16). Jedinci budou zakódováni pomocí binárního kódu s osmi geny.

Tab. 16 Počáteční populace

| Jedinec | Chromozóm |
|---------|-----------------|
| 1 | 0 0 0 1 1 0 1 0 |
| 2 | 1 1 0 0 1 1 0 0 |
| 3 | 0 1 0 0 1 1 1 0 |
| 4 | 1 0 0 0 0 1 1 0 |
| 5 | 1 1 1 1 0 0 0 1 |
| 6 | 0 1 1 1 1 0 1 1 |

4.3 Ohodnocení

Máme-li vytvořenou počáteční populaci (viz Tab. 16) je třeba jednotlivé jedince ohodnotit. K tomuto účelu se používá tzv. *fitness funkce* [11], která daného jedince ohodnotí podle toho, jaká je jeho šance být řešením optimalizační úlohy. Samotná definice fitness funkce bude záležet především na typu řešené úlohy. V Tab. 17 je uveden příklad ohodnocení jednotlivých jedinců.

Tab. 17 Ohodnocení jednotlivých jedinců

| Jedinec | Chromozóm | Ohodnocení |
|---------|-----------------|------------|
| 1 | 0 0 0 1 1 0 1 0 | 148 |
| 2 | 1 1 0 0 1 1 0 0 | 53 |
| 3 | 0 1 0 0 1 1 1 0 | 203 |
| 4 | 1 0 0 0 0 1 1 0 | 198 |
| 5 | 1 1 1 1 0 0 0 1 | 97 |
| 6 | 0 1 1 1 1 0 1 1 | 161 |

4.4 Selekcce

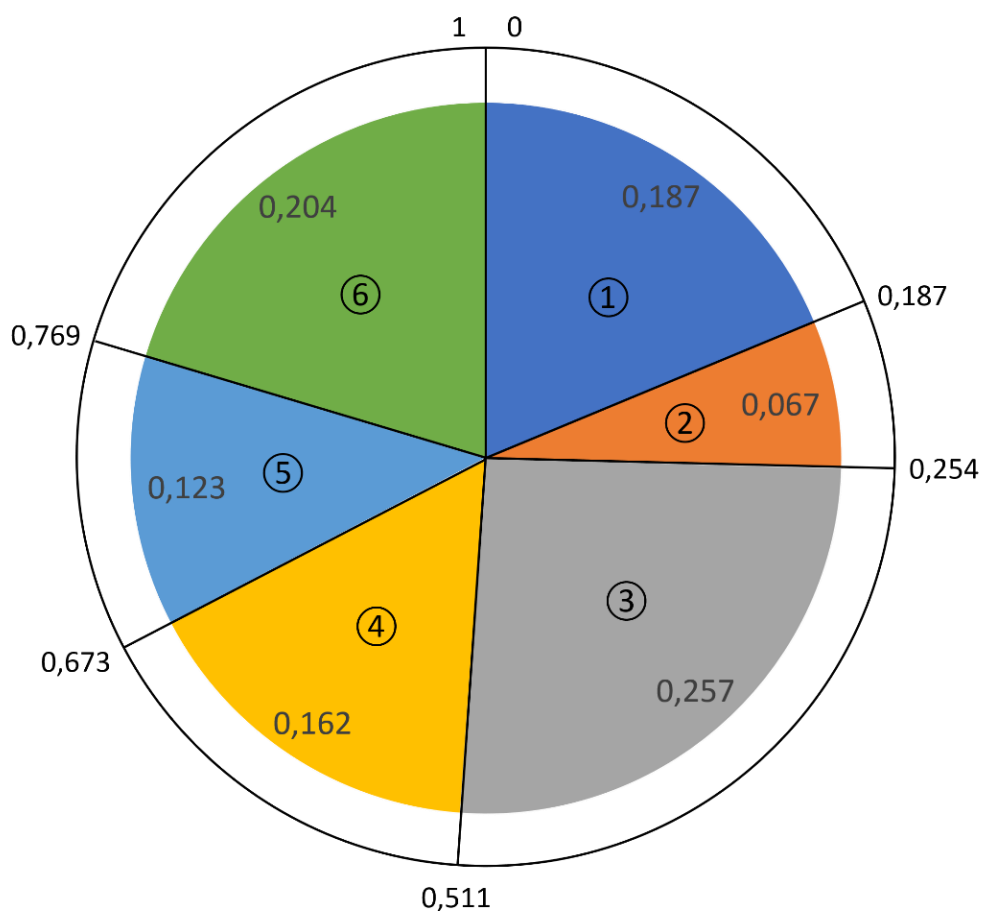
Selekcce je klíčový krok celého algoritmu. V tomto kroku je třeba vybrat takové jedince, kteří budou nejvhodnější pro vytvoření další populace. Metody, kterými je možné realizovat selekci je celá řada. V této práci budou popsány tyto metody selekce:

- Metoda vážené rulety
- Turnajová metoda
- Metoda dělení
- Elitismus

V následujících odstavcích bude pro modelový případ provedena selekcce pomocí výše popsaných metod.

4.4.1 Metoda vážené rulety

Metoda vážené rulety představuje náhodný výběr, tzn. že každý jedinec může být vybrán do role rodiče. Jak je znázorněno na Obr. 16, tak metodu je možné přirovnat k hodu kuličky na ruletové kolo.[12]



Obr. 16 Schéma selekce pomocí metody vážené rulety

Do role rodiče bude vybrán ten jedinec, u které se zastaví pomyslná kulička. Aby bylo možné určit délky úseků jednotlivých jedinců na ruletovém kole je třeba stanovit kumulovanou pravděpodobnost. Kumulovanou pravděpodobnost vypočteme jako postupný součet jednotlivých pravděpodobností. Pravděpodobnost, s jakou může být jedinec vybrán do role rodiče je dána vztahem

$$p_i = \frac{f(i)}{\sum_{i=1}^N f(i)} \quad (4.1)$$

Kde i je index daného jedince, N je celkový počet jedinců a $f(i)$ je hodnota fitness funkce i -tého jedince. Pro modelový případ jsou tyto pravděpodobnosti uvedeny v Tab. 18.

Tab. 18 Pravděpodobnosti u metody vážené rulety

| Jedinec | Chromozóm | Ohodnocení | Pravděpodobnost | Kumulovaná pravděpodobnost |
|---------|-----------------|------------|-----------------|----------------------------|
| 1 | 0 0 0 1 1 0 1 0 | 148 | 0,187 | 0,187 |
| 2 | 1 1 0 0 1 1 0 0 | 53 | 0,067 | 0,254 |
| 3 | 0 1 0 0 1 1 1 0 | 203 | 0,257 | 0,511 |
| 4 | 1 0 0 0 0 1 1 0 | 128 | 0,162 | 0,673 |
| 5 | 1 1 1 1 0 0 0 1 | 97 | 0,123 | 0,796 |
| 6 | 0 1 1 1 1 0 1 1 | 161 | 0,204 | 1 |

4.4.2 Turnajová metoda

Při selekci pomocí turnajové metody je rovněž zachován princip náhodného výběru. Z populace jsou náhodně vybrány skupiny jedinců a ty jsou následně podrobeni souboji. Vyhrává vždy ten jedinec, který má větší hodnotu fitness funkce. Takovýto jedinec se tedy stává rodičem.

Kdybychom aplikovali turnajovou metodu na modelový příklad, mohli bychom dostat například takovéto tři skupiny jedinců 1 – 4, 2 – 5 a 3 – 6. V každé skupině pak následně proběhne turnaj (viz Tab. 19).

Tab. 19 Selekcce pomocí turnajové metody

| Skupina | Jedinec | Chromozóm | Ohodnocení | Výsledek |
|---------|---------|-----------------|------------|----------|
| 1 | 1 | 0 0 0 1 1 0 1 0 | 148 | Vítěz |
| | 4 | 1 0 0 0 0 1 1 0 | 128 | Poražený |
| 2 | 2 | 1 1 0 0 1 1 0 0 | 53 | Poražený |
| | 5 | 1 1 1 1 0 0 0 1 | 97 | Vítěz |
| 3 | 3 | 0 1 0 0 1 1 1 0 | 203 | Vítěz |
| | 6 | 0 1 1 1 1 0 1 1 | 161 | Poražený |

4.4.3 Metoda dělení

Selekci metodou dělení již nelze považovat za náhodnou. Metodu dělení lze popsat ve dvou krocích. V prvním kroku se provede seřazení jedinců podle velikosti jejich fitness funkce. Druhým krokem je pomyslné rozdělení populace na dvě populace. Jedinci v populaci s malou hodnotou fitness funkce jsou předurčení k vymření. Naproti tomu jedinci v populaci s vysokou hodnotou fitness funkce se stanou rodiči. Z výše popsaného postupu je zřejmé, že tato metoda upřednostňuje „silné jedince“, tzn. jedince, kteří mají vysokou hodnotu fitness funkce. Aplikace metody dělení na modelový příklad je znázorněna v Tab. 20.

Tab. 20 Selektce metodou dělení

| Jedinec | Chromozóm | Ohodnocení | Poznámka |
|---------|-----------------|------------|-------------------|
| 3 | 0 1 0 0 1 1 1 0 | 203 | Stávají se rodiči |
| 6 | 0 1 1 1 1 0 1 1 | 161 | |
| 1 | 0 0 0 1 1 0 1 0 | 148 | |
| 4 | 1 0 0 0 0 1 1 0 | 128 | Vymírají |
| 5 | 1 1 1 1 0 0 0 1 | 97 | |
| 2 | 1 1 0 0 1 1 0 0 | 53 | |

4.4.4 Elitismus

Obdobně jako metoda dělení, tak ani elitismus nelze považovat za metodu, v níž by se uplatňovala náhoda. Naopak u elitismu se ještě více projevuje zvýhodnění „nejsilnějších jedinců“. Elitismus předpokládá, že křížením silných jedinců vzniknou zase silní jedinci, což ovšem nemusí být vždy pravda. Postup je tedy takový, že se z populace cíleně vybere jen malé procento elitních jedinců, kteří se stanou rodiči.

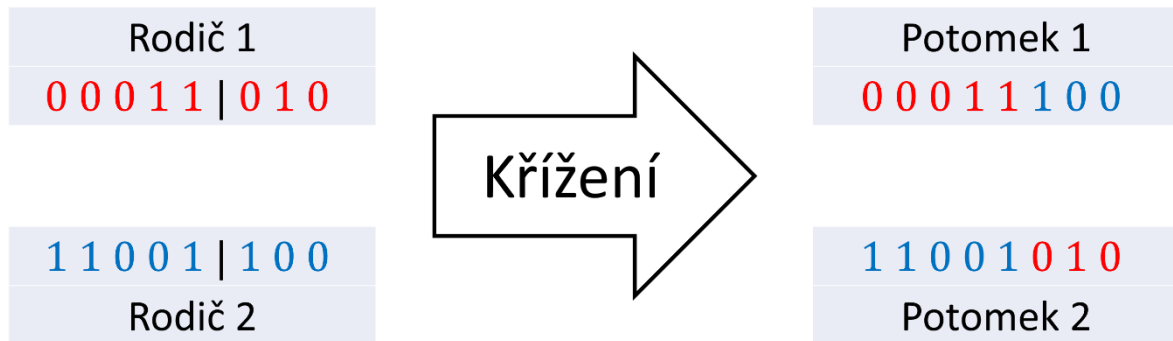
4.5 Křížení

Dalším krokem genetického algoritmu je křížení. Na rozdíl od selekce, kde nevznikají nové jedinci, tak hlavním úkolem křížení je právě vytvoření nových jedinců, jenž se stanou základem nové populace. Při křížení se nejprve spárují jedinci, kteří úspěšně prošli selekcí a následně dojde k výměně genetické informace, tzn. že dochází k výměně částí chromozómů mezi jednotlivými jedinci. Stejně jako u selekce, tak i možností, jak realizovat algoritmus křížení je celá řada. V této práci budou uvedeny tyto algoritmy křížení:

- Jednobodové křížení
- Dvou a více bodové křížení
- Křížení metodou PMX

4.5.1 Jednobodové křížení

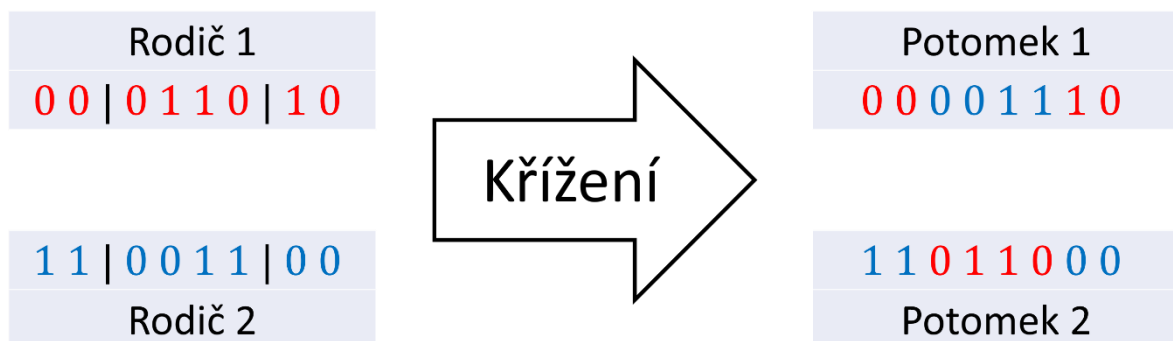
Nejednodušší algoritmus křížení je jednobodové křížení. Necht' jsou dáni jedinci s chromozómy o M genech. Vybereme náhodné přirozené číslo v rozmezí $\langle 0, M - 1 \rangle$. Takto vybrané číslo udává místo, kde dojde k pomyslnému rozříznutí chromozómů jednotlivých jedinců na dvě části. Oddělené části se pak následně mezi jedinci vymění, čím získáme nové jedince. Princip jednobodového křížení je znázorněn na Obr. 17.



Obr. 17 Jednobodové křížení

4.5.2 Dvou a více bodové křížení

Dvoubodové křížení je založené na obdobném principu jako jednobodové křížení, jen s tím rozdílem, že místo jednoho náhodně vybraného přirozeného čísla vybíráme čísla dvě. Chromozómy se tedy rozdělí na dvou místech, přičemž jednotlivé části se zase mezi jedinci vymění a vzniknou noví jedinci. Princip dvoubodového křížení je znázorněn na Obr. 18.

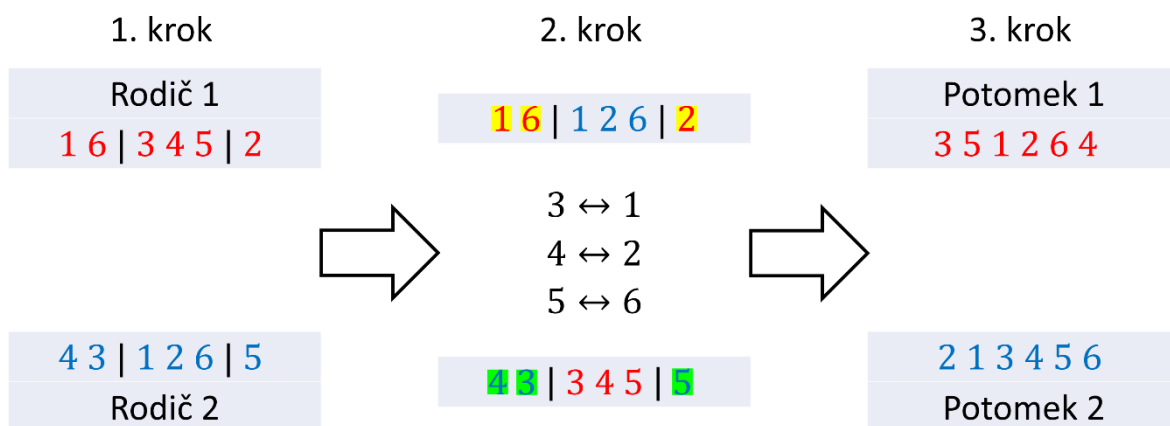


Obr. 18 Dvoubodové křížení

Z výše napsaného je zřejmé, že takovýto postup se dá rozšířit na n -bodové křížení, přičemž n udává počet míst, ve kterých dojde k rozdělení chromozómu.

4.5.3 Křížení metodou PMX

Dalším možností, jak provést křížení je využít metodu *PMX* (*partially mapped crossover*). Metoda *PMX* je permutační metoda, tzn. že v chromozómu daného jedince nesmějí být dva geny se shodnými alelami. Princip metody *PMX* pro chromozómy zakódované pomocí přirozených čísel je znázorněn na Obr. 19.



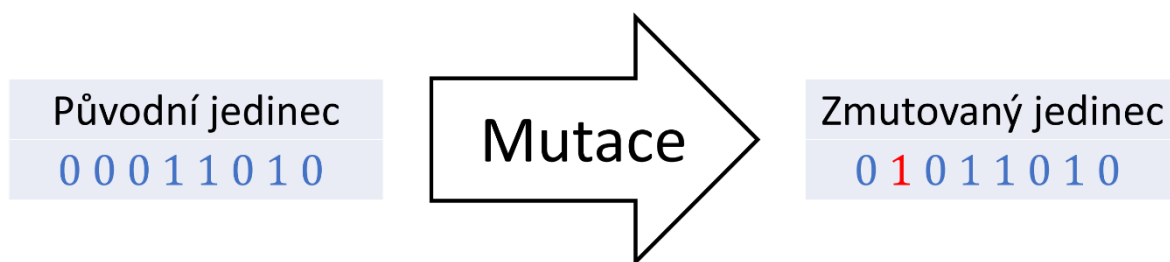
Obr. 19 Křížení s využitím metody PMX [12]

V prvním kroku se náhodně vyberou dva body dělení, přičemž vzniklé části se mezi jednotlivými jedinci promíchají stejně jako u dvoubodového křížení. Dostaneme chromozómy, které nesplňují podmínku pro permutační kódování. Aby byla tato podmínka splněna, je třeba v druhém kroku zavést substitute, pro něž mají alely shodnou hodnotu. Dle Obr. 19 byly zavedeny substitute (3 ↔ 1), (4 ↔ 2) a (5 ↔ 6). V posledním kroku už jen zbývá použít zvolené substitute, čímž dostaneme nové jedince.

4.6 Mutace

Posledním krokem genetického algoritmu je mutace. Proces mutace slouží k udržení genetické diverzity populace, což má za následek větší odolnost algoritmu k uvíznutí v lokálním extrému cílové funkce. Jelikož je proces mutace poměrně velký zásah do genetické informace jedince, je mutace aplikována s velmi malou pravděpodobností. Možností, jak realizovat mutaci je opět celá řada.

Na Obr. 20 je znázorněná jednobodová binární mutace. Během jednobodové binární mutace dochází ke změně alely (z 0 na 1, nebo z 1 na 0) u náhodného genu. Je zřejmé, že tento proces je možné rozšířit na dvou, nebo i více bodovou mutaci.



Obr. 20 Jednobodová binární mutace

4.7 Implementace genetických algoritmů v programu MATLAB

V této kapitole bude rozebrána funkce *ga.m*, což jen funkce na bázi genetických algoritmů, jenž je implementována v programu *MATLAB*. Tato funkce slouží k nalezení globálního minima dané cílové funkce. Detailní informace je možné nalézt v [9]. Obecně je možné funkci *ga.m* popsat následující syntaxí:

$$[\text{výstupní argumenty}] = \text{ga}(\text{vstupní argumenty})$$

4.7.1 Vstupní argumenty

Syntaxe vstupních argumentů je následující:

$$(\text{fun}, \text{nvars}, \text{A}, \text{b}, \text{Aeq}, \text{beq}, \text{lb}, \text{ub}, \text{nonlcon}, \text{IntCon}, \text{options})$$

Kde jednotlivé argumenty jsou

- **fun** je cílová funkce
- **nvars** je počet optimalizovaných parametrů
- **A** je matice lineárních nerovnostních podmínek řešení
- **b** je vektor pravé strany lineárních nerovnostních řešení
- **Aeq** je matice lineárních rovnostních podmínek řešení
- **beq** je vektor pravé strany lineárních rovnostních podmínek řešení
- **lb** je dolní mez vymezující oblast řešení
- **ub** je horní mez vymezující oblast řešení
- **nonlcon** umožňuje nastavit nelineární podmínky řešení
- **IntCon** je parametr celočíselné proměnné (nelze použít současně s lineárními rovnostními podmínkami **Aeq** a **beq**)
- **options** umožňuje nastavit parametry optimalizačního procesu
- **[]** je znak, který je nutno použít, pokud chceme vynechat některé vstupní parametry

4.7.2 Výstupní argumenty

Syntaxe výstupních parametrů je následující:

$$[X, \text{fval}, \text{exitflag}, \text{output}, \text{population}, \text{scores}]$$

Kde jednotlivé argumenty jsou

- **X** je vektor optimálního řešení

- ***fval*** vypíše hodnotu cílové funkce, při níž došlo k ukončení optimalizačního procesu
- ***exitflag*** vypíše důvod zastavení optimalizačního procesu
 - **1** průměrná hodnota kumulativní fitness funkce je menší než Function Tolerance
 - **3** hodnota fitness funkce se nemění
 - **4** značí dosažení velikosti kroku, jenž je menší než strojová přesnost
 - **5** značí dosažení minimálního fitness limitu
 - **0** značí překročení maximálního počtu generací
 - **-1** značí ukončení optimalizace výstupní funkcí
 - **-2** značí nenalezení vhodného bodu řešení
 - **-4** značí překročení nastaveného času výpočtu
 - **-5** značí překročení maximální možného času výpočtu
- ***output*** vypíše informace o optimalizačním procesu
- ***population*** vypíše konečnou populaci ve tvaru matice, přičemž řádky představují jednotlivé jedince
- ***scores*** vypíše konečné výsledky ve tvaru sloupcového vektoru

5. Optimalizační úlohy

V této kapitole budou řešeny celkem tři optimalizační úlohy. První úloha je nosník zatížený jen ohybem, dále následuje nosník zatížený jen krutem a poslední úloha je nosník zatížený kombinací ohybu a krutu. Jako nosníky budou uvažovány navíjené kompozitní trubky, přičemž byly použity dvě různé kompozitní skladby. U první kompozitní skladby byl optimalizován úhel návínů jen u jedné vrstvy viz rovnice (5.1).

$$[90; \pm\alpha] \quad (5.1)$$

U druhé kompozitní skladby pak byl optimalizován úhel návínů u osmy vrstev viz rovnice (5.2).

$$[90; \pm\alpha_1; \pm\alpha_2; \pm\alpha_3; \pm\alpha_4; \pm\alpha_5; \pm\alpha_6; \pm\alpha_7; \pm\alpha_8] \quad (5.2)$$

Tloušťka je zvolena pro všechny vrstvy stejná a to 1 mm. Materiálové vlastnosti optimalizovaných trubek jsou uvedeny v Tab. 21. Pro lepší porovnání jednotlivých optimalizačních metod byl zaveden poměr L/D viz Tab. 22.

Cílem všech úloh je pro různé poměry L/D nalézt optimální úhly návínů α , při nichž bude řešený nosník vykazovat největší tuhost. U nosníků s jedním optimalizovaným úhlem návínů bude následně dopočítána velikost průhybu, zkrutu, ekvivalentního modulu pružnosti v tahu E_{eq} a ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku G_{eq} .

Tab. 21 Materiálové vlastnosti optimalizovaných nosníků

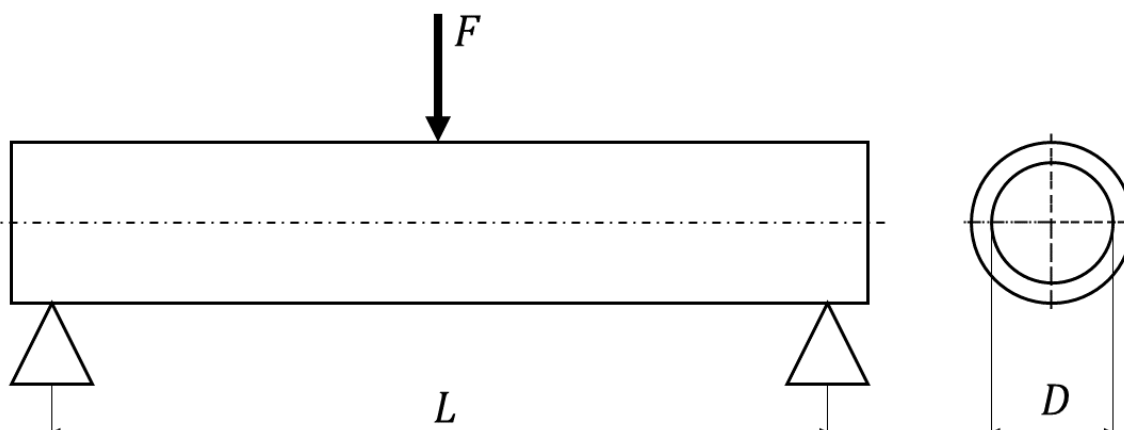
| | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| Modul pružnosti v podélném směru | $E_L = 143\,120 \text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $E_T = 6\,672 \text{ MPa}$ |
| Modul pružnosti v příčném směru | $G_{LT} = 3\,390 \text{ MPa}$ |
| Poissonovy poměry | $\nu_{LT} = 0,26$ |
| | $\nu_{TL} = 0,0121$ |

Tab. 22 Geometrické parametry optimalizovaných nosníků

| D [mm] | L/D [-] | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|-----|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 60 | 60 | 120 | 240 | 360 | 480 | 600 | 900 | 1200 | 1800 | 2400 | 3000 |
| 100 | 100 | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1500 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
| 150 | 150 | 300 | 600 | 900 | 1200 | 1500 | 2250 | 3000 | 4500 | 6000 | 7500 |
| 200 | 200 | 400 | 800 | 1200 | 1600 | 2000 | 3000 | 4000 | 6000 | 8000 | 10000 |
| 300 | 300 | 600 | 1200 | 1800 | 2400 | 3000 | 4500 | 6000 | 9000 | 12000 | 15000 |
| L [mm] | | | | | | | | | | | |

5.1 Zatížení ohybem

Jako model pro optimalizaci nosníku zatíženého jen ohybem byl zvolen nosník zatížený třibodovým ohybem. Schéma nosníku je na Obr. 21. Zatěžující síla F je 1000 N.



Obr. 21 Schéma nosníku zatíženého ohybem

5.1.1 Euler-Bernoulliho teorie

Euler-Bernoulliho teorie při ohybu nosníku neuvažuje vliv posouvající síly. Průhyb nosníku je možné popsat rovnicí

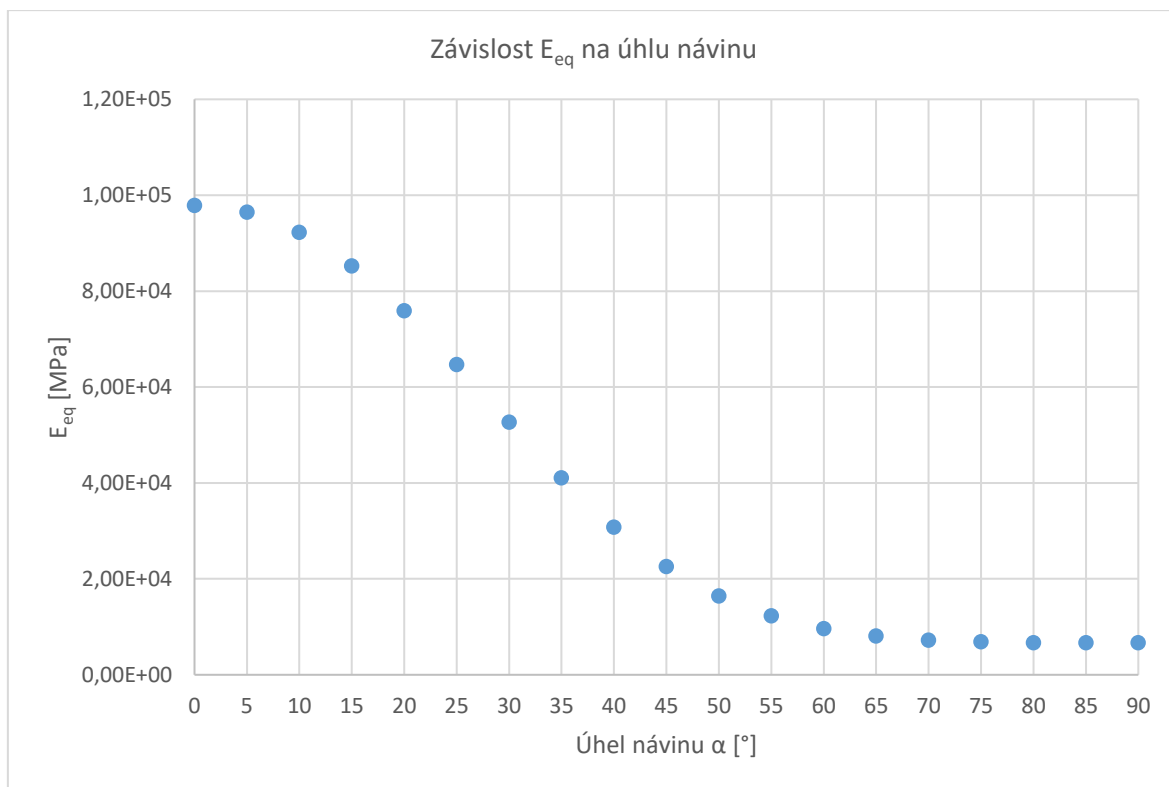
$$v = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot J \cdot E_{eq}} \quad (5.3)$$

Rovnice (5.3) je cílová funkce, kterou budeme minimalizovat. Vzhledem k tomu, že zatěžující síla F , délka L a kvadratický moment průřezu J jsou konstantní, tak jediné, na čem závisí velikost průhybu je ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} , který byl vypočtený metodou ABD matic. Aby byl průhyb minimální, musí být ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} na svém maximu.

Na Obr. 22 je pro nosník o vnitřním průměru 60 mm, délce 600 mm a materiálových vlastnostech z Tab. 21 znázorněna závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu E_{eq} na úhlu návinu $\pm\alpha$. Z Obr. 22 je zřejmé, že ekvivalentní modul pružnosti v tahu je maximální právě, když je úhel návinu roven nule.

Můžeme tedy konstatovat, že bude-li uvažována Euler-Bernoulliho teorie, tak pro libovolný nosník s libovolnou kompozitní skladbou zatížený jen ohybem dostaneme nejmenší možný průhyb právě tehdy, když platí

$$\pm\alpha = \pm 0^\circ \quad (5.4)$$



Obr. 22 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu na úhlu návinu

5.1.2 Timošenkova teorie

Timošenkova teorie na rozdíl od té Euler-Bernoulliho při ohybu nosníků nezanedbává vliv posouvající síly. Cílovou funkci, kterou budeme minimalizovat, vyjádříme opět jako průhyb nosníku.

$$v = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot J \cdot E_{eq}} + \frac{\beta \cdot F \cdot L}{4 \cdot A \cdot G_{eq}} \quad (5.5)$$

Kde koeficient tvaru průřezu ve smyku β je roven jedné. Ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} , respektive ve smyku G_{eq} byl stanoven metodou *ABD* matic. Řešíme tedy optimalizační úlohu

$$v(\alpha) = \min v(\alpha) \quad (5.6)$$

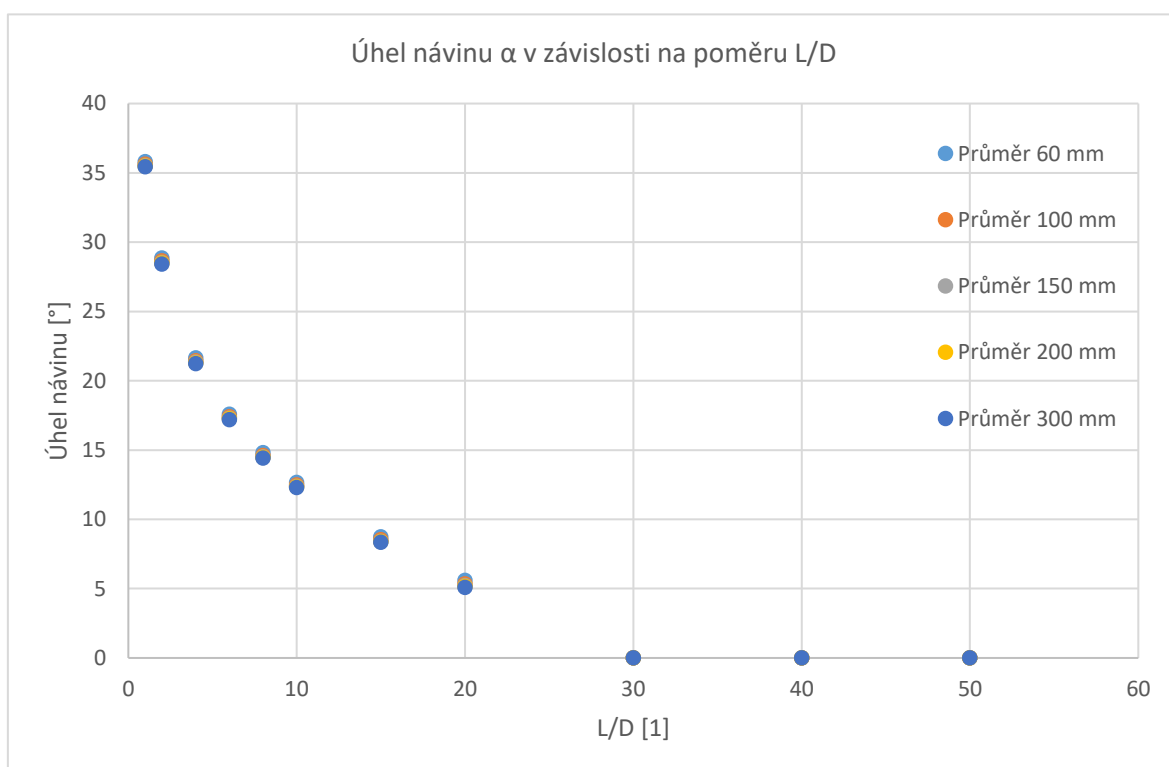
K řešení této úlohy byl pro oba typy kompozitní skladby použit výpočtový program *MATLAB*. Vzhledem k tomu, že úlohy mohou mít více lokálních minim byl použit globální optimalizační algoritmus. Konkrétně byla použita optimalizační metoda na bázi genetických algoritmů (viz kapitola 4.7).

Nosníky s jedním optimalizovaným parametrem

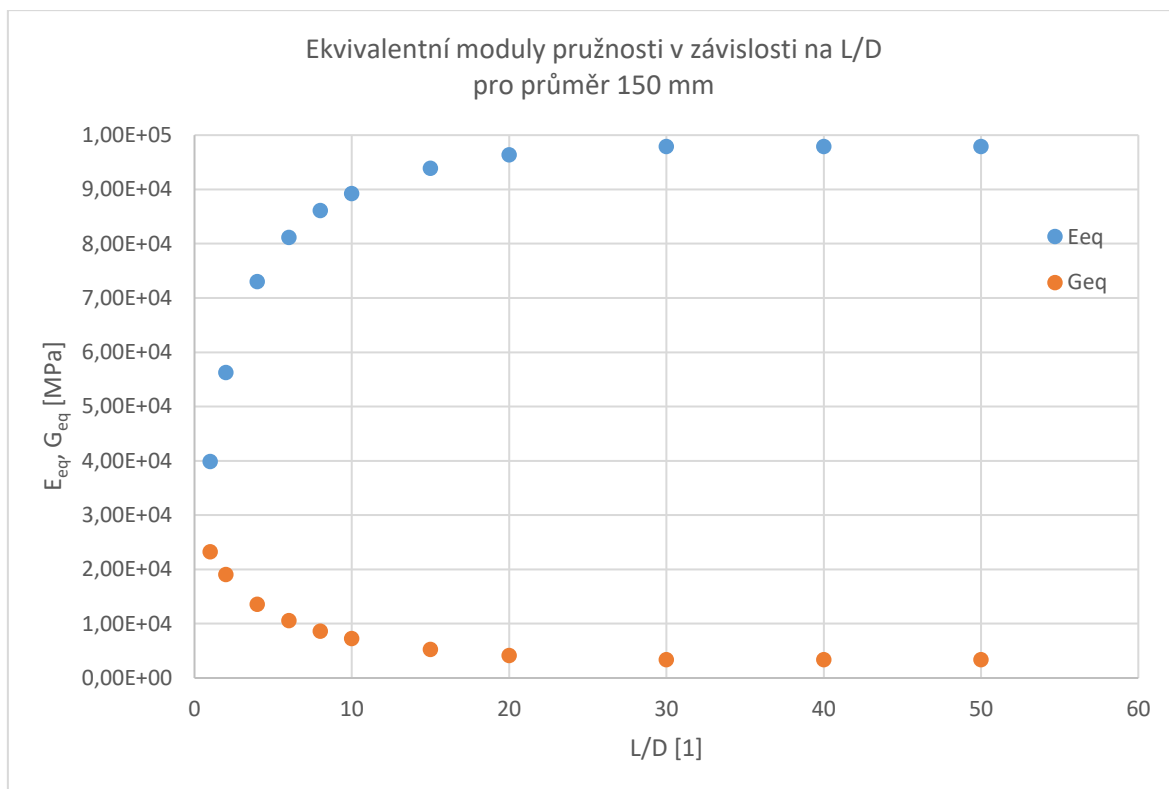
Optimalizované úhly návinu pro celou sadu vzorků jsou shrnuty v Tab. 23. Dopočítané hodnoty průhybů v a ekvivalentních modulů pružnosti E_{eq} a G_{eq} pro celou sadu vzorků jsou uvedeny v Příloha 9.

Tab. 23 Optimální úhel návínu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených ohybem

| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
|-------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 35,8067 | 90 | 35,6207 | 90 | 35,5269 | 90 | 35,4749 | 90 | 35,4327 |
| 2 | 90 | 28,8371 | 90 | 28,6286 | 90 | 28,5243 | 90 | 28,4719 | 90 | 28,4196 |
| 4 | 90 | 21,6385 | 90 | 21,4356 | 90 | 21,3341 | 90 | 21,2833 | 90 | 21,2326 |
| 6 | 90 | 17,5843 | 90 | 17,3889 | 90 | 17,2911 | 90 | 17,2422 | 90 | 17,1933 |
| 8 | 90 | 14,7952 | 90 | 14,6040 | 90 | 14,5083 | 90 | 14,4604 | 90 | 14,4126 |
| 10 | 90 | 12,6641 | 90 | 12,4740 | 90 | 12,3788 | 90 | 12,3317 | 90 | 12,2855 |
| 15 | 90 | 8,7346 | 90 | 8,5330 | 90 | 8,4160 | 90 | 8,3807 | 90 | 8,3296 |
| 20 | 90 | 5,5880 | 90 | 5,3374 | 90 | 5,2088 | 90 | 5,1437 | 90 | 5,0780 |
| 30 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 40 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 50 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |



Obr. 23 Závislost úhlu návínu α na poměru L/D



Obr. 24 Ekvivalentní moduly pružnosti v závislosti na L/D

Z grafu znázorněném na Obr. 23 je zřejmé, že úhel náviny α je pro různé vnitřní průměry trubek v podstatě stejný. Můžeme tedy konstatovat, že úhel náviny závisí především na délce nosníku. U krátkých nosníků je patrný výrazný vliv posouvající síly. Naproti tomu nosníky, u kterých je $L/D > 20$ je možné posouvající sílu zcela zanedbat. Stejný závěr je pak možné vyčíst z Obr. 24, na kterém je znázorněna závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu E_{eq} a ve smyku G_{eq} na poměru L/D . Zatímco ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} s rostoucím L/D roste, tak ekvivalentní modul pružnosti ve smyku G_{eq} klesá.

Nosníky s více optimalizovanými parametry

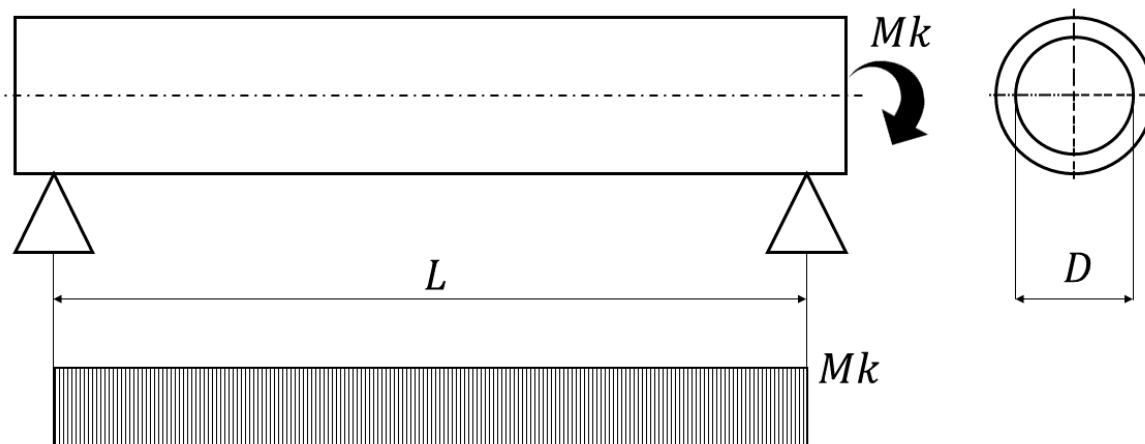
Optimalizované úhly náviny jednotlivých vrstev jsou pro celou sadu vzorků uvedeny v Tab. 24. Z výsledků je patrné, že na rozdíl od nosníků, u kterých byla optimalizována jen jedna vrstva, se u nosníků s více optimalizovanými vrstvami výrazněji projevuje závislost optimálního úhlu náviny na vnitřním průměru. Nicméně i u těchto nosníků můžeme prohlásit, že úhly náviny jednotlivých vrstev závisí především na délce nosníku, přičemž vliv posouvající síly se výrazněji projevuje jen u kratších nosníků.

Tab. 24 Optimální úhel navinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených ohybem

| | L/D | 90° | $\pm\alpha_1 [^\circ]$ | $\pm\alpha_2 [^\circ]$ | $\pm\alpha_3 [^\circ]$ | $\pm\alpha_4 [^\circ]$ | $\pm\alpha_5 [^\circ]$ | $\pm\alpha_6 [^\circ]$ | $\pm\alpha_7 [^\circ]$ | $\pm\alpha_8 [^\circ]$ |
|-----------------------|-------|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 37,79 | 36,61 | 35,3 | 34,38 | 34,12 | 33,53 | 33,03 | 31,22 |
| | 2 | 90 | 36,67 | 34,69 | 32,05 | 29,46 | 27,29 | 24,56 | 22,49 | 18,98 |
| | 4 | 90 | 22,92 | 22,38 | 22,25 | 21,84 | 21,57 | 21,06 | 20,59 | 19,25 |
| | 6 | 90 | 19,19 | 18,84 | 18,56 | 18,32 | 18,04 | 17,95 | 17,44 | 16,34 |
| | 8 | 90 | 17,2 | 16,16 | 15,95 | 15,84 | 15,65 | 15,44 | 15,26 | 14,81 |
| | 10 | 90 | 14,92 | 14,58 | 14,46 | 14,3 | 14,06 | 13,8 | 13,56 | 12,89 |
| | 15 | 90 | 12,34 | 11,77 | 11,46 | 10,92 | 10,78 | 10,54 | 10,22 | 9,8 |
| | 20 | 90 | 9,61 | 9,41 | 9,11 | 8,86 | 8,67 | 8,5 | 8,34 | 8,1 |
| | 30 | 90 | 6,04 | 5,87 | 5,74 | 5,55 | 5,4 | 5,32 | 5,25 | 5,15 |
| | 40 | 90 | 2,6 | 2,49 | 2,38 | 2,28 | 2,23 | 2,16 | 2,02 | 1,76 |
| 50 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 39,24 | 36,99 | 35,46 | 33,87 | 33,11 | 31,38 | 30,35 | 29,14 |
| | 2 | 90 | 35,32 | 32,91 | 30,56 | 27,92 | 26,89 | 25,41 | 21,52 | 16,41 |
| | 4 | 90 | 21,63 | 21,38 | 21 | 20,73 | 20,54 | 19,94 | 19,82 | 19,68 |
| | 6 | 90 | 18,2 | 17,77 | 17,54 | 17,39 | 17,11 | 16,91 | 16,66 | 16,39 |
| | 8 | 90 | 15,77 | 15,47 | 15,38 | 15 | 14,79 | 14,64 | 14,52 | 14,08 |
| | 10 | 90 | 14,74 | 14,04 | 13,67 | 13,52 | 13,2 | 12,75 | 12,44 | 11,43 |
| | 15 | 90 | 11,09 | 10,71 | 10,49 | 10,21 | 10,11 | 9,89 | 9,67 | 9,41 |
| | 20 | 90 | 8,5 | 8,36 | 8,21 | 8,1 | 7,97 | 7,88 | 7,79 | 7,33 |
| | 30 | 90 | 5,33 | 5,15 | 4,87 | 4,52 | 4,4 | 4,31 | 4,07 | 3,54 |
| | 40 | 90 | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 |
| 50 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | 0 | 0 | |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 39 | 36,54 | 35,78 | 34,4 | 33,45 | 30,52 | 28,69 | 27,6 |
| | 2 | 90 | 36,05 | 31,68 | 28,23 | 27,23 | 25,63 | 23,99 | 22,4 | 17,67 |
| | 4 | 90 | 21,5 | 21,1 | 20,77 | 20,34 | 19,93 | 19,63 | 19,24 | 18,54 |
| | 6 | 90 | 18,19 | 17,45 | 17,16 | 17,01 | 16,57 | 16,2 | 16,03 | 15,71 |
| | 8 | 90 | 15,45 | 15,1 | 14,87 | 14,66 | 14,36 | 14,18 | 13,96 | 13,67 |
| | 10 | 90 | 13,55 | 13,26 | 13,14 | 12,97 | 12,8 | 12,52 | 12,44 | 12,07 |
| | 15 | 90 | 10,45 | 10,18 | 9,98 | 9,86 | 9,81 | 9,62 | 9,47 | 9,08 |
| | 20 | 90 | 8,13 | 7,89 | 7,79 | 7,73 | 7,52 | 7,39 | 7,3 | 7,01 |
| | 30 | 90 | 4,83 | 4,39 | 4,23 | 4,07 | 3,73 | 3,62 | 3,53 | 3,09 |
| | 40 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 |
| 50 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | 0 | |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 39,22 | 36,75 | 35,21 | 33,35 | 32,72 | 31,57 | 29,55 | 25,72 |
| | 2 | 90 | 35,32 | 31,53 | 28,12 | 26,6 | 25,79 | 24,3 | 21,95 | 16,87 |
| | 4 | 90 | 20,59 | 20,38 | 20,17 | 20,05 | 19,98 | 19,55 | 19,31 | 19,11 |
| | 6 | 90 | 17,62 | 17,15 | 16,89 | 16,63 | 16,52 | 16,29 | 16,02 | 15,45 |
| | 8 | 90 | 15,15 | 14,66 | 14,62 | 14,29 | 14,2 | 14,12 | 13,99 | 13,55 |
| | 10 | 90 | 13,43 | 13,32 | 12,94 | 12,68 | 12,46 | 12,36 | 12,26 | 11,55 |
| | 15 | 90 | 10,41 | 10,28 | 9,95 | 9,62 | 9,41 | 9,28 | 9,01 | 8,65 |
| | 20 | 90 | 7,92 | 7,67 | 7,61 | 7,46 | 7,31 | 7,19 | 7,02 | 6,75 |
| | 30 | 90 | 4,2 | 3,9 | 3,77 | 3,68 | 3,54 | 3,41 | 3,35 | 3,21 |
| | 40 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0 |
| 50 | 90 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | 0 | |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 39,3 | 37,22 | 36 | 33,03 | 31,4 | 30,32 | 28,4 | 26,65 |
| | 2 | 90 | 34,35 | 31,15 | 29,01 | 26,5 | 24,86 | 23,12 | 21,05 | 18,2 |
| | 4 | 90 | 21,44 | 20,39 | 20,08 | 19,82 | 19,56 | 19,29 | 18,93 | 17,63 |
| | 6 | 90 | 17,41 | 16,93 | 16,62 | 16,49 | 16,4 | 16,09 | 15,85 | 15,1 |
| | 8 | 90 | 14,94 | 14,51 | 14,38 | 14,18 | 14,13 | 14,08 | 13,62 | 12,98 |
| | 10 | 90 | 13,11 | 12,78 | 12,73 | 12,52 | 12,46 | 12,36 | 12 | 11,38 |
| | 15 | 90 | 10,11 | 9,95 | 9,88 | 9,52 | 9,33 | 9,18 | 8,79 | 8,11 |
| | 20 | 90 | 7,99 | 7,65 | 7,42 | 7,27 | 6,98 | 6,79 | 6,68 | 6,28 |
| | 30 | 90 | 3,78 | 3,62 | 3,48 | 3,39 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,76 |
| | 40 | 90 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | 0 |
| 50 | 90 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0 | 0 | |

5.2 Zatížení krutem

Modelový nosník pro optimalizaci nosníků zatížených čistým krutem je znázorněn na Obr. 25. Kroutící momentu M_k je mezi podpěrami konstantní. Velikost kroutícího momentu byla stanovena na $M_k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$.



Obr. 25 Schéma nosníku zatíženého krutem

Ještě před samotnou optimalizací je třeba definovat cílovou funkci. Pro případ čistého krutu bude kritériální funkce definována jako úhel zkroucení nosníku. Úhel zkroucení φ vypočítáme pomocí vzorce

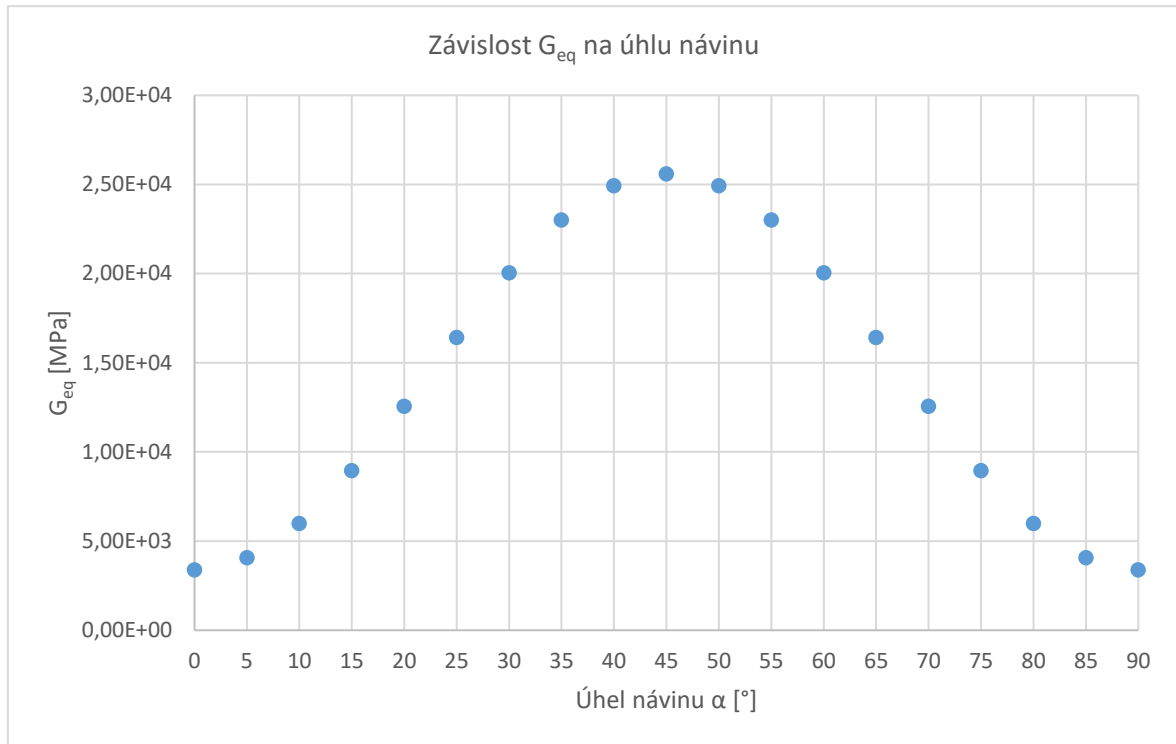
$$\varphi = \frac{M_k \cdot L}{J_p \cdot G_{eq}} \quad (5.7)$$

Kde G_{eq} je ekvivalentní modul pružnosti ve smyku vypočtený pomocí metody ABD matic a J_p je polární moment průřezu, který pro mezikruhový profil vypočteme pomocí vztahu

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4) \quad (5.8)$$

Z rovnice (5.7) je zřejmé, že kroutící moment M_k , délka nosníku L a polární moment průřezu J_p jsou konstantní, takže jedině, co může ovlivnit výsledný úhel zkroucení je ekvivalentní modul pružnosti ve smyku G_{eq} . Aby byl úhel zkroucení minimální, tak ekvivalentní modul pružnosti ve smyku musí být na svém maximu.

Na Obr. 26 je pro nosník o vnitřním průměru 60 mm , délce 600 mm a materiálových vlastnostech z Tab. 21 znázorněna závislost ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku na úhlu náviny. Z Obr. 26 je patrné, že ekvivalentní modul pružnosti ve smyku je na svém maximu právě když je úhel náviny roven 45° .



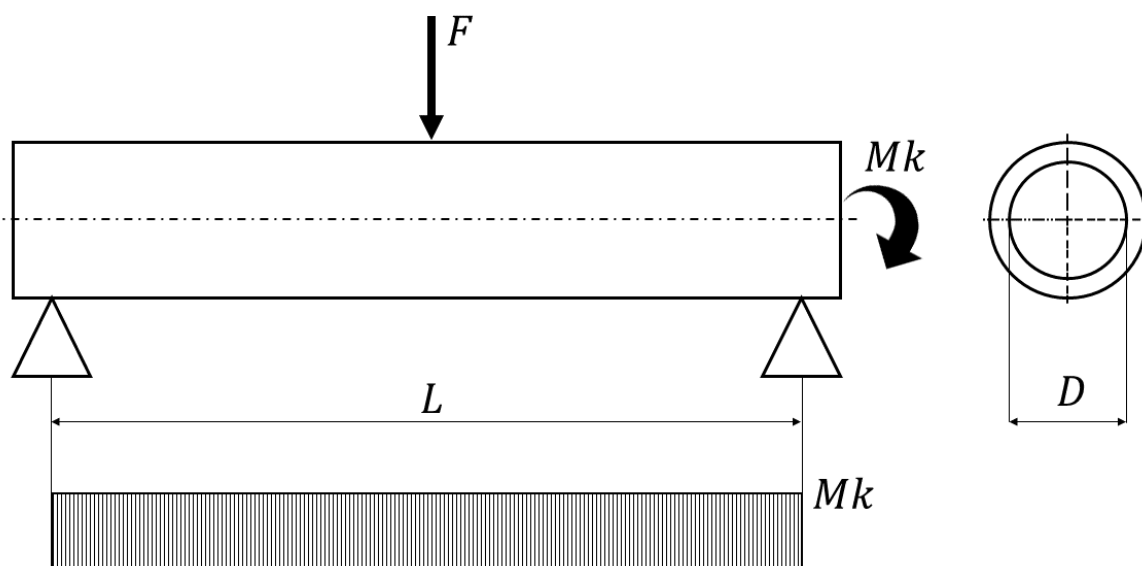
Obr. 26 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku na úhlu náviny

Máme-li nosník zatížený čistým krutem, tak bez ohledu na délku a průměr nosníku dostaneme pro libovolný nosník s libovolnou kompozitní skladbou vždy stejný optimální úhel náviny a to

$$\pm\alpha = \pm 45^\circ \quad (5.9)$$

5.3 Zatížení ohybem a krutem

Poslední řešená úloha je nosník zatížený kombinací ohybu a krutu. Pro výpočet byl opět zaveden modelový nosník, který je znázorněn na Obr. 27. Krouťící momentu M_k je mezi podpěrami konstantní. Jako velikost krouťícího momentu bylo zvoleno $M_k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$ a pro velikost zatěžující síly bylo zvoleno $F = 1000 \text{ N}$.



Obr. 27 Schéma nosníku zatíženého kombinací ohybu a krutu

Pro tento případ byla zvolena cílová funkce ve tvaru

$$f = v + a \cdot \varphi \quad (5.10)$$

Kde v představuje průhyb nosníku způsobený zatěžující silou F , φ představuje zkroucení nosníku od krouťícího momentu M_k a a je váhový koeficient. Jelikož může být průhyb nosníku i o několik řádů větší, než zkroucení byl zaveden váhový součinitel a , který zvyšuje důraz na torzní tuhost nosníku. Řešení takovéto úlohy bylo provedeno pro pět hodnot váhového koeficientu $a = 1; 10; 100; 1\ 000; 10\ 000$.

Dosadíme-li do rovnice (5.10) za v (rovnice (5.5)) a za φ (rovnice (5.7)) dostaneme cílovou funkci ve tvaru

$$f = \left(\frac{F \cdot L^3}{48 \cdot J \cdot E_{eq}} + \frac{\beta \cdot F \cdot L}{4 \cdot A \cdot G_{eq}} \right) + a \cdot \left(\frac{M_k \cdot L}{J_p \cdot G_{eq}} \right) \quad (5.11)$$

Příčemž ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} , respektive ve smyku G_{eq} byl vypočten metodou ABD matic. Budeme tedy řešit optimalizační úlohu ve tvaru

$$f(\alpha) = \min f(\alpha) \quad (5.12)$$

Obdobně jako u úloh řešených v kapitole 5.1.2 byl k řešení použit výpočtový program *MATLAB*. Pro samotný výpočet optimalizační úlohy byla opět použita funkce na bázi genetických algoritmů (viz kapitola 4.7).

Nosníky s jedním optimalizovaným parametrem

Optimální úhly návinu nosníků s jednou optimalizovanou vrstvou jsou pro různé hodnoty váhového koeficientu a uvedeny v tabulkách Tab. 25, Tab. 26, Tab. 27, Tab. 28 a Tab. 29. Pro lepší přehlednost byly z těchto dat ještě zkonstruovány grafické závislosti, které jsou znázorněny na Obr. 28, Obr. 29, Obr. 30, Obr. 31 a Obr. 32.

Z grafů je patrné, že pro váhový koeficient roven jedné dostáváme téměř stejné výsledky jako pro nosník zatížený jen ohybem. S rostoucí hodnotou váhového koeficientu je čím dál tím víc znatelný vliv krutu. Pro případ, kdy je váhový koeficient roven $a = 10\,000$ nemá až do $L/D = 10$ téměř žádný vliv ohybová složka, která se začne výrazněji projevovat až pro ty nejdelší nosníky. Rovněž je z výsledků patrné, že s rostoucím koeficientem a je patrná výraznější změna úhlu návinu pro různé průměry nosníků.

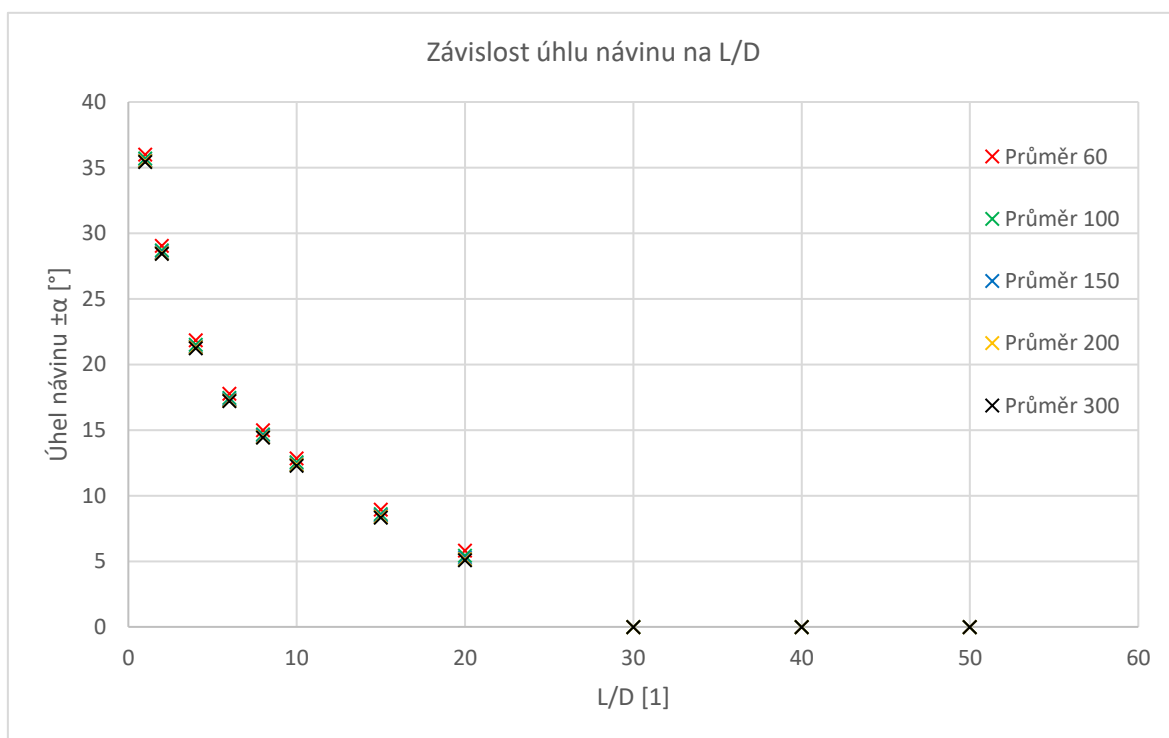
Pro takto získané optimální úhly návinu byly dopočítány velikosti průhybů, úhlů natočení a ekvivalentních modulů pružnosti v tahu a ve smyku. Tyto hodnoty jsou uvedeny v přílohách (Příloha 10 až Příloha 14).

Nosníky s více optimalizovanými parametry

Optimální úhly návinu nosníků, u kterých byla optimalizována více než jedna vrstva, jsou pro různé hodnoty váhového koeficientu a uvedeny v Tab. 30, Tab. 31, Tab. 32, Tab. 33 a Tab. 34. Z výsledků je patrné, že u těchto nosníků je možné vyvodit obdobné závěry jako u nosníků s jednou optimalizovanou vrstvou.

Tab. 25 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1$

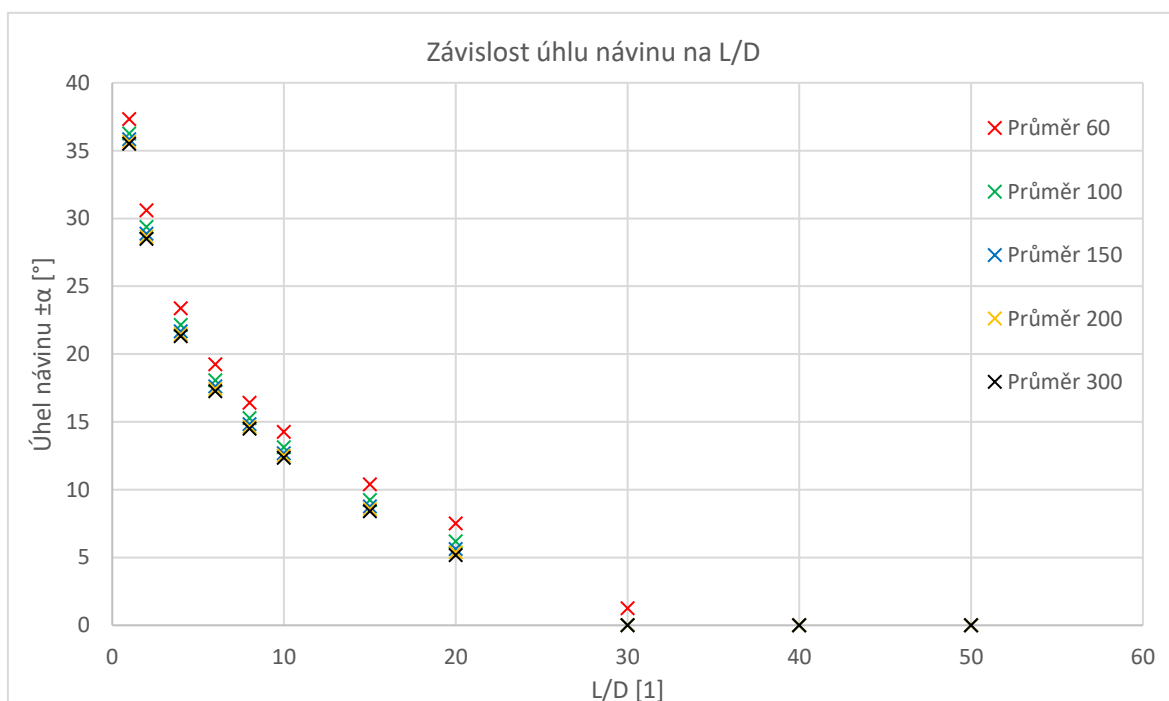
| $a = 1$ | | | | | | | | | | |
|---------|-------------------------|-----------------|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|-----------------|
| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 35,9897 | 90 | 35,6905 | 90 | 35,5588 | 90 | 35,4981 | 90 | 35,4409 |
| 2 | 90 | 29,0433 | 90 | 28,7069 | 90 | 28,5598 | 90 | 28,4921 | 90 | 28,4287 |
| 4 | 90 | 21,8394 | 90 | 21,5117 | 90 | 21,3687 | 90 | 21,3031 | 90 | 21,2415 |
| 6 | 90 | 17,7780 | 90 | 17,4622 | 90 | 17,3244 | 90 | 17,2612 | 90 | 17,2019 |
| 8 | 90 | 14,9845 | 90 | 14,6457 | 90 | 14,5409 | 90 | 14,4790 | 90 | 14,4210 |
| 10 | 90 | 12,8519 | 90 | 12,5453 | 90 | 12,4113 | 90 | 12,3497 | 90 | 12,2918 |
| 15 | 90 | 8,9326 | 90 | 8,6088 | 90 | 8,4662 | 90 | 8,4004 | 90 | 8,3358 |
| 20 | 90 | 5,8294 | 90 | 5,4220 | 90 | 5,2529 | 90 | 5,1690 | 90 | 5,0896 |
| 30 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 40 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 50 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |



Obr. 28 Závislost úhlu návinu na L/D pro $a=1$

Tab. 26 Optimální úhel návínu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $\alpha=10$

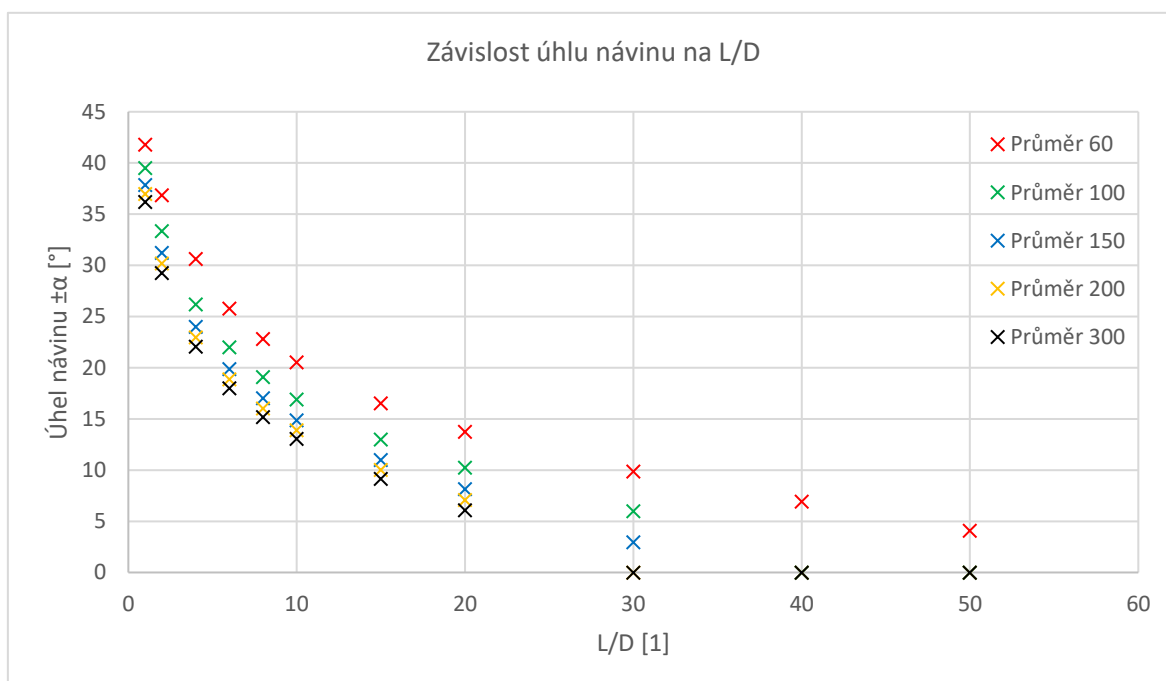
| $\alpha = 10$ | | | | | | | | | | |
|---------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 37,3275 | 90 | 36,2701 | 90 | 35,8359 | 90 | 35,6586 | 90 | 35,5141 |
| 2 | 90 | 30,5972 | 90 | 29,3691 | 90 | 28,8697 | 90 | 28,6711 | 90 | 28,5101 |
| 4 | 90 | 23,3712 | 90 | 22,1511 | 90 | 21,6702 | 90 | 21,4769 | 90 | 21,3203 |
| 6 | 90 | 19,2559 | 90 | 18,0785 | 90 | 17,6149 | 90 | 17,4286 | 90 | 17,2778 |
| 8 | 90 | 16,4262 | 90 | 15,2780 | 90 | 14,6149 | 90 | 14,6429 | 90 | 14,4953 |
| 10 | 90 | 14,2768 | 90 | 13,1428 | 90 | 12,6938 | 90 | 12,5127 | 90 | 12,3659 |
| 15 | 90 | 10,3992 | 90 | 9,2365 | 90 | 8,7662 | 90 | 8,5741 | 90 | 8,4178 |
| 20 | 90 | 7,5096 | 90 | 6,1917 | 90 | 5,6268 | 90 | 5,3890 | 90 | 5,1913 |
| 30 | 90 | 1,2521 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 40 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 50 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |



Obr. 29 Závislost úhlu návínu na L/D pro $\alpha=10$

Tab. 27 Optimální úhel náviny u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $\alpha=100$

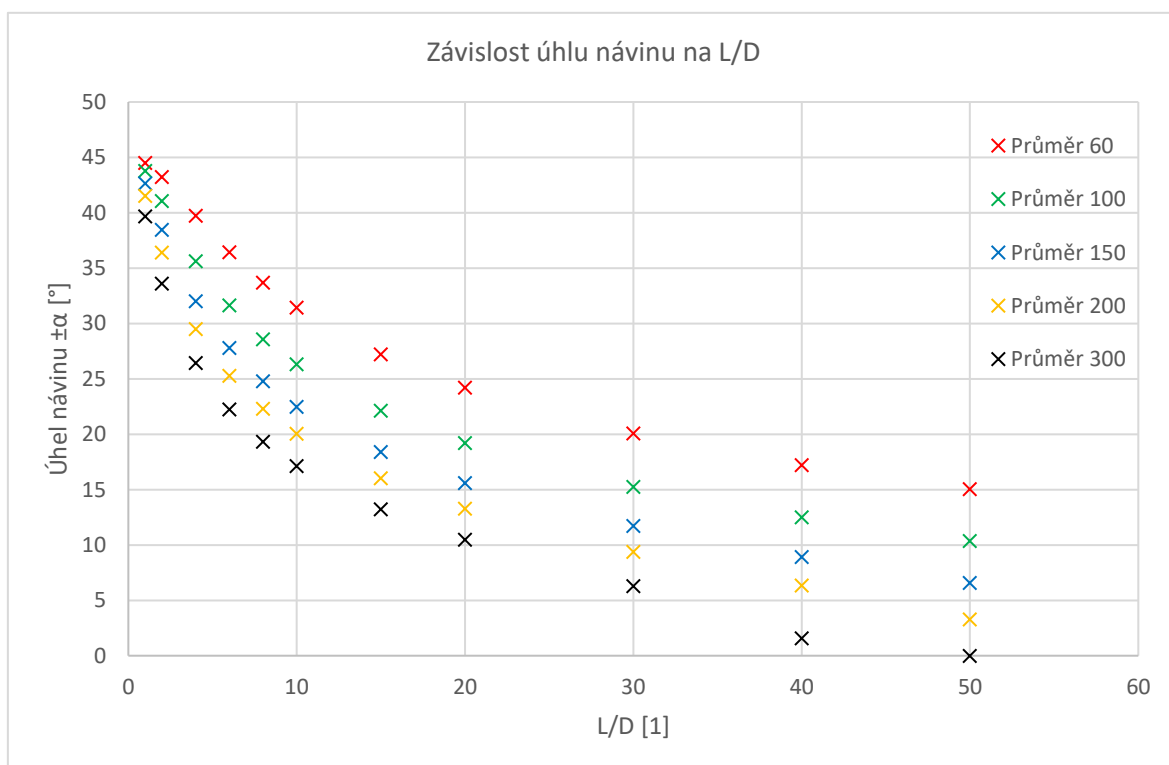
| $\alpha = 100$ | | | | | | | | | | |
|----------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 41,7764 | 90 | 39,4949 | 90 | 37,8508 | 90 | 36,9781 | 90 | 36,1799 |
| 2 | 90 | 36,8427 | 90 | 33,3548 | 90 | 31,2313 | 90 | 30,1828 | 90 | 29,2592 |
| 4 | 90 | 30,6238 | 90 | 26,1832 | 90 | 24,0059 | 90 | 22,9596 | 90 | 22,0505 |
| 6 | 90 | 25,7850 | 90 | 21,9863 | 90 | 19,8698 | 90 | 18,8584 | 90 | 17,9815 |
| 8 | 90 | 22,8024 | 90 | 19,0853 | 90 | 17,0241 | 90 | 16,0388 | 90 | 15,1833 |
| 10 | 90 | 20,5301 | 90 | 16,8875 | 90 | 14,8651 | 90 | 13,8949 | 90 | 13,0490 |
| 15 | 90 | 16,5165 | 90 | 12,9892 | 90 | 10,9914 | 90 | 10,0112 | 90 | 9,1388 |
| 20 | 90 | 13,7488 | 90 | 10,2331 | 90 | 8,1518 | 90 | 7,0797 | 90 | 6,0763 |
| 30 | 90 | 9,8618 | 90 | 6,0019 | 90 | 2,9493 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 40 | 90 | 6,9120 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |
| 50 | 90 | 4,0934 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 | 90 | 0 |



Obr. 30 Závislost úhlu náviny na L/D pro $\alpha=100$

Tab. 28 Optimální úhel náviny u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1\ 000$

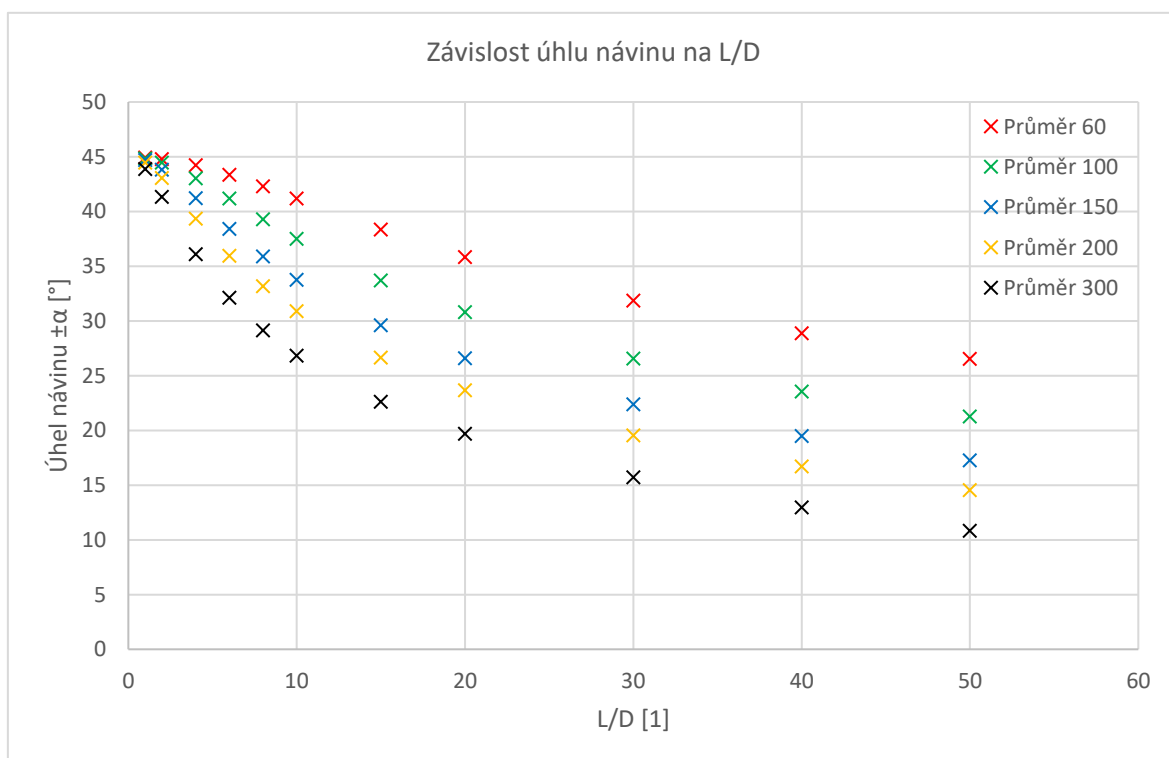
| $a = 1\ 000$ | | | | | | | | | | |
|--------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 44,5164 | 90 | 43,7752 | 90 | 42,6465 | 90 | 41,5190 | 90 | 39,6753 |
| 2 | 90 | 43,2368 | 90 | 41,0534 | 90 | 38,4712 | 90 | 36,4015 | 90 | 33,6031 |
| 4 | 90 | 39,7370 | 90 | 35,6407 | 90 | 32,0066 | 90 | 29,5126 | 90 | 26,4410 |
| 6 | 90 | 36,4291 | 90 | 31,6368 | 90 | 27,7969 | 90 | 25,2729 | 90 | 22,2413 |
| 8 | 90 | 33,6889 | 90 | 28,5611 | 90 | 24,7907 | 90 | 22,2989 | 90 | 19,3339 |
| 10 | 90 | 31,4331 | 90 | 26,3153 | 90 | 22,4857 | 90 | 20,0361 | 90 | 17,1310 |
| 15 | 90 | 27,2101 | 90 | 22,1154 | 90 | 18,4010 | 90 | 16,0403 | 90 | 13,2269 |
| 20 | 90 | 24,2091 | 90 | 19,2111 | 90 | 15,5927 | 90 | 13,2805 | 90 | 10,4748 |
| 30 | 90 | 20,0665 | 90 | 15,2443 | 90 | 11,7158 | 90 | 9,3796 | 90 | 6,2944 |
| 40 | 90 | 17,2156 | 90 | 12,4945 | 90 | 8,9191 | 90 | 6,3593 | 90 | 1,5669 |
| 50 | 90 | 15,0534 | 90 | 10,3556 | 90 | 6,5672 | 90 | 3,2695 | 90 | 0 |



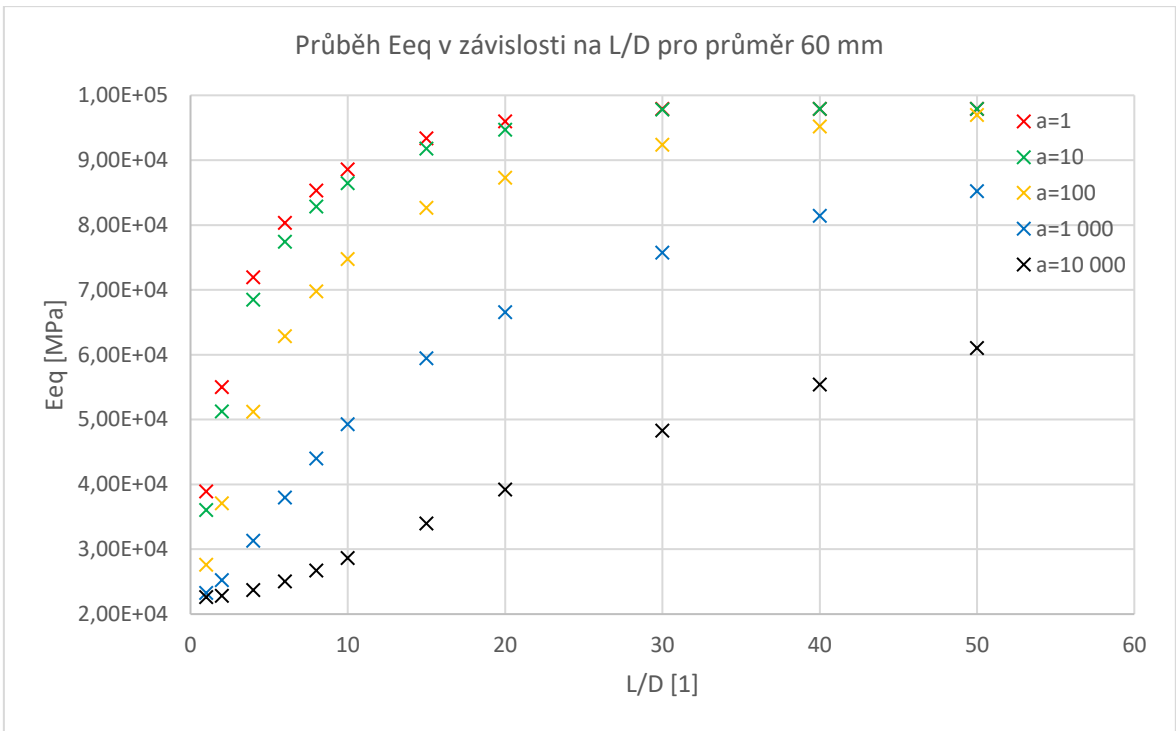
Obr. 31 Závislost úhlu náviny na L/D pro $a=1\ 000$

Tab. 29 Optimální úhel návinu u nosníků s jedním optimalizovaným parametrem zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10\ 000$

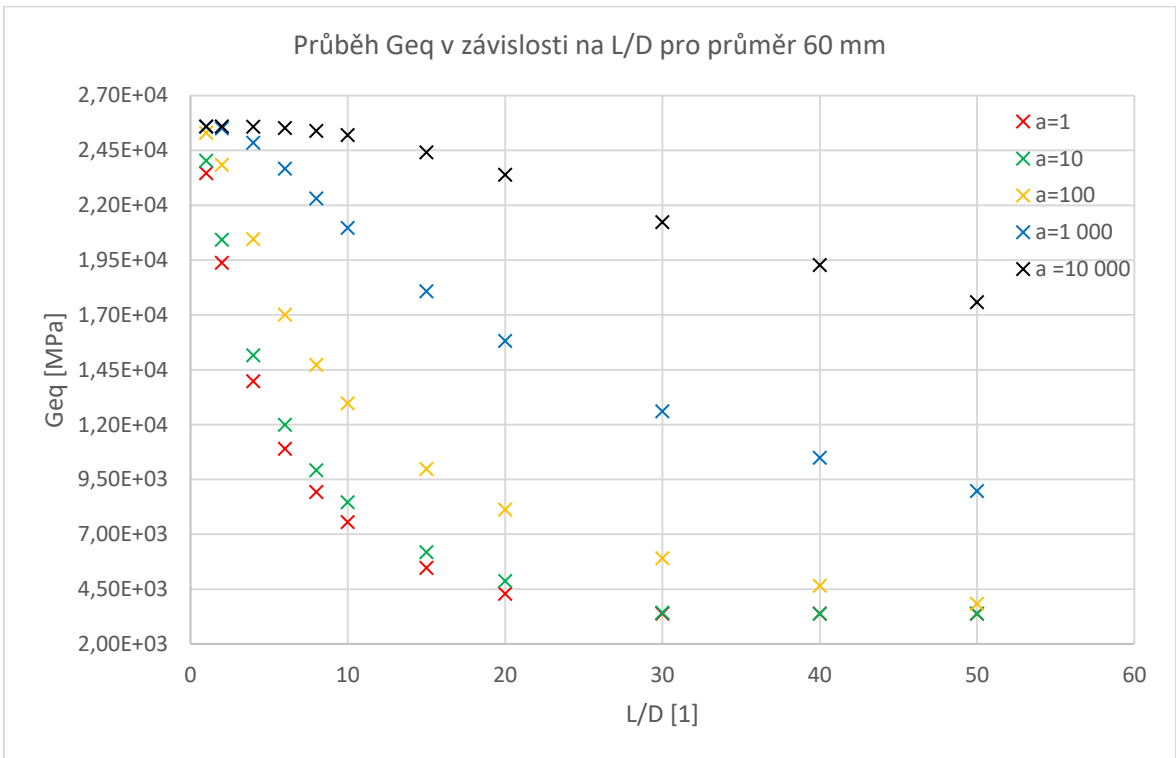
| $a = 10\ 000$ | | | | | | | | | | |
|---------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| L/D | Vnitřní průměr D [mm] | | | | | | | | | |
| | 60 | | 100 | | 150 | | 200 | | 300 | |
| | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] | 90° | $\pm\alpha$ [°] |
| 1 | 90 | 44,9491 | 90 | 44,8601 | 90 | 44,9610 | 90 | 44,4650 | 90 | 43,8798 |
| 2 | 90 | 44,7984 | 90 | 44,4553 | 90 | 43,8363 | 90 | 43,0675 | 90 | 41,3320 |
| 4 | 90 | 44,2249 | 90 | 43,0356 | 90 | 41,2151 | 90 | 39,3578 | 90 | 36,0905 |
| 6 | 90 | 43,3623 | 90 | 41,1924 | 90 | 38,4041 | 90 | 35,9504 | 90 | 32,1318 |
| 8 | 90 | 42,3153 | 90 | 39,2878 | 90 | 35,8999 | 90 | 33,1685 | 90 | 29,1575 |
| 10 | 90 | 41,1805 | 90 | 37,4943 | 90 | 33,7597 | 90 | 30,8948 | 90 | 26,8222 |
| 15 | 90 | 38,3554 | 90 | 33,7175 | 90 | 29,6155 | 90 | 26,6633 | 90 | 22,6116 |
| 20 | 90 | 35,8440 | 90 | 30,7975 | 90 | 26,6062 | 90 | 23,6682 | 90 | 19,6949 |
| 30 | 90 | 31,8598 | 90 | 26,5648 | 90 | 22,4001 | 90 | 19,5431 | 90 | 15,7113 |
| 40 | 90 | 28,8789 | 90 | 23,5711 | 90 | 19,4886 | 90 | 16,7059 | 90 | 12,9562 |
| 50 | 90 | 26,5432 | 90 | 21,2891 | 90 | 17,2826 | 90 | 14,5522 | 90 | 10,8235 |



Obr. 32 Závislost úhlu návinu na L/D pro $a=10\ 000$



Obr. 33 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti v tahu na L/D



Obr. 34 Závislost ekvivalentního modulu pružnosti ve smyku na L/D

Tab. 30 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1$

| 1 | L/D | 90° | $\pm\alpha_1 [^\circ]$ | $\pm\alpha_2 [^\circ]$ | $\pm\alpha_3 [^\circ]$ | $\pm\alpha_4 [^\circ]$ | $\pm\alpha_5 [^\circ]$ | $\pm\alpha_6 [^\circ]$ | $\pm\alpha_7 [^\circ]$ | $\pm\alpha_8 [^\circ]$ |
|-----------------------|-------|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 37,58 | 36,30 | 35,60 | 34,86 | 34,44 | 33,63 | 32,45 | 31,86 |
| | 2 | 90 | 36,78 | 34,57 | 31,75 | 29,84 | 27,62 | 25,63 | 21,71 | 19,35 |
| | 4 | 90 | 23,98 | 22,98 | 21,92 | 21,47 | 21,14 | 20,79 | 20,50 | 19,90 |
| | 6 | 90 | 19,31 | 18,81 | 18,71 | 18,38 | 18,24 | 17,97 | 17,43 | 16,74 |
| | 8 | 90 | 17,06 | 16,72 | 16,19 | 16,06 | 15,68 | 15,52 | 15,30 | 14,63 |
| | 10 | 90 | 14,92 | 14,66 | 14,45 | 14,18 | 14,10 | 14,01 | 13,71 | 13,28 |
| | 15 | 90 | 11,83 | 11,46 | 11,31 | 11,24 | 11,10 | 10,92 | 10,76 | 10,13 |
| | 20 | 90 | 9,87 | 9,61 | 9,33 | 8,87 | 8,74 | 8,63 | 8,33 | 7,90 |
| | 30 | 90 | 6,18 | 6,02 | 5,90 | 5,78 | 5,68 | 5,46 | 5,21 | 5,03 |
| | 40 | 90 | 2,70 | 2,62 | 2,55 | 2,51 | 2,47 | 2,40 | 2,37 | 2,14 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 38,78 | 36,50 | 35,88 | 34,78 | 33,14 | 32,16 | 29,96 | 28,65 |
| | 2 | 90 | 36,09 | 32,31 | 30,16 | 27,93 | 26,83 | 24,87 | 22,94 | 16,26 |
| | 4 | 90 | 21,99 | 21,76 | 21,10 | 20,95 | 20,72 | 20,04 | 19,93 | 18,55 |
| | 6 | 90 | 18,29 | 17,98 | 17,64 | 17,52 | 17,21 | 17,02 | 16,61 | 15,92 |
| | 8 | 90 | 15,99 | 15,58 | 15,41 | 15,25 | 14,93 | 14,74 | 14,50 | 13,64 |
| | 10 | 90 | 14,28 | 14,07 | 13,90 | 13,43 | 13,23 | 12,98 | 12,75 | 11,60 |
| | 15 | 90 | 10,78 | 10,64 | 10,53 | 10,40 | 10,26 | 9,99 | 9,82 | 9,55 |
| | 20 | 90 | 8,75 | 8,37 | 8,26 | 8,15 | 7,98 | 7,77 | 7,66 | 7,55 |
| | 30 | 90 | 5,35 | 5,16 | 4,92 | 4,65 | 4,50 | 4,27 | 4,08 | 3,62 |
| | 40 | 90 | 0,06 | 0,05 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 |
| | 50 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 38,72 | 37,14 | 35,54 | 34,68 | 32,34 | 31,27 | 30,05 | 26,38 |
| | 2 | 90 | 34,98 | 31,80 | 30,25 | 28,26 | 25,77 | 23,07 | 22,00 | 16,56 |
| | 4 | 90 | 20,97 | 20,71 | 20,57 | 20,46 | 20,14 | 19,89 | 19,51 | 19,01 |
| | 6 | 90 | 18,12 | 17,46 | 17,14 | 16,90 | 16,75 | 16,35 | 15,95 | 15,82 |
| | 8 | 90 | 15,82 | 15,52 | 15,17 | 14,82 | 14,49 | 14,25 | 13,67 | 12,43 |
| | 10 | 90 | 14,01 | 13,63 | 13,30 | 12,95 | 12,70 | 12,53 | 12,31 | 11,39 |
| | 15 | 90 | 10,57 | 10,18 | 10,03 | 9,84 | 9,74 | 9,65 | 9,47 | 8,97 |
| | 20 | 90 | 8,70 | 8,14 | 7,83 | 7,69 | 7,49 | 7,27 | 7,08 | 6,64 |
| | 30 | 90 | 4,67 | 4,44 | 4,20 | 4,13 | 3,88 | 3,84 | 3,47 | 3,17 |
| | 40 | 90 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 39,31 | 37,12 | 35,43 | 34,14 | 32,11 | 30,72 | 28,28 | 27,16 |
| | 2 | 90 | 34,81 | 30,44 | 29,69 | 27,82 | 25,98 | 23,64 | 21,18 | 16,79 |
| | 4 | 90 | 21,62 | 20,95 | 20,41 | 20,33 | 19,75 | 19,40 | 18,87 | 17,91 |
| | 6 | 90 | 17,45 | 17,31 | 17,14 | 16,75 | 16,43 | 16,12 | 15,95 | 15,50 |
| | 8 | 90 | 15,47 | 15,01 | 14,85 | 14,68 | 14,30 | 14,10 | 13,57 | 12,65 |
| | 10 | 90 | 12,96 | 12,88 | 12,74 | 12,72 | 12,66 | 12,48 | 12,41 | 12,33 |
| | 15 | 90 | 10,13 | 9,91 | 9,83 | 9,71 | 9,51 | 9,44 | 9,35 | 8,97 |
| | 20 | 90 | 8,09 | 7,88 | 7,75 | 7,50 | 7,41 | 7,07 | 6,78 | 6,44 |
| | 30 | 90 | 4,12 | 3,91 | 3,84 | 3,72 | 3,65 | 3,52 | 3,39 | 3,18 |
| | 40 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 38,11 | 36,74 | 36,02 | 34,61 | 32,43 | 30,79 | 29,17 | 24,32 |
| | 2 | 90 | 34,05 | 30,74 | 29,28 | 27,29 | 25,59 | 23,97 | 19,71 | 17,44 |
| | 4 | 90 | 20,49 | 20,16 | 19,99 | 19,81 | 19,63 | 19,43 | 19,20 | 18,57 |
| | 6 | 90 | 17,79 | 17,10 | 16,68 | 16,52 | 16,03 | 15,82 | 15,68 | 15,16 |
| | 8 | 90 | 15,23 | 14,74 | 14,66 | 14,24 | 13,93 | 13,65 | 13,49 | 12,92 |
| | 10 | 90 | 13,13 | 12,82 | 12,69 | 12,51 | 12,44 | 12,15 | 11,95 | 11,65 |
| | 15 | 90 | 10,01 | 9,71 | 9,58 | 9,41 | 9,33 | 9,14 | 9,01 | 8,86 |
| | 20 | 90 | 7,88 | 7,55 | 7,37 | 7,27 | 7,10 | 7,02 | 6,83 | 6,11 |
| | 30 | 90 | 3,96 | 3,66 | 3,54 | 3,40 | 3,25 | 3,00 | 2,82 | 2,61 |
| | 40 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Tab. 31 Optimální úhel návinu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10$

| 10 | L/D | 90° | $\pm\alpha_1$ [°] | $\pm\alpha_2$ [°] | $\pm\alpha_3$ [°] | $\pm\alpha_4$ [°] | $\pm\alpha_5$ [°] | $\pm\alpha_6$ [°] | $\pm\alpha_7$ [°] | $\pm\alpha_8$ [°] |
|-----------------------|-------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 35,99 | 35,82 | 35,71 | 35,61 | 35,49 | 35,30 | 34,93 | 34,67 |
| | 2 | 90 | 37,90 | 34,79 | 31,71 | 30,87 | 28,55 | 27,93 | 25,58 | 17,61 |
| | 4 | 90 | 24,32 | 23,73 | 23,38 | 22,83 | 22,58 | 22,23 | 21,23 | 19,62 |
| | 6 | 90 | 20,44 | 20,14 | 19,71 | 19,49 | 18,89 | 18,23 | 17,81 | 17,43 |
| | 8 | 90 | 18,26 | 17,36 | 17,16 | 16,94 | 16,69 | 16,35 | 16,11 | 14,79 |
| | 10 | 90 | 15,71 | 15,47 | 15,27 | 15,15 | 15,08 | 14,65 | 14,53 | 13,70 |
| | 15 | 90 | 12,74 | 12,36 | 12,08 | 11,93 | 11,80 | 11,48 | 11,32 | 11,14 |
| | 20 | 90 | 10,54 | 10,08 | 9,90 | 9,74 | 9,54 | 9,48 | 9,29 | 9,04 |
| | 30 | 90 | 7,10 | 6,95 | 6,86 | 6,78 | 6,52 | 6,22 | 6,04 | 5,72 |
| | 40 | 90 | 4,35 | 4,29 | 3,98 | 3,91 | 3,77 | 3,58 | 3,39 | 3,20 |
| | 50 | 90 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 38,31 | 36,87 | 35,59 | 34,56 | 33,88 | 32,86 | 31,56 | 29,24 |
| | 2 | 90 | 35,96 | 33,62 | 30,92 | 30,32 | 27,12 | 24,38 | 21,53 | 17,74 |
| | 4 | 90 | 22,18 | 22,06 | 21,72 | 21,12 | 20,87 | 20,73 | 20,23 | 19,64 |
| | 6 | 90 | 18,94 | 18,37 | 18,14 | 17,77 | 17,64 | 17,45 | 16,98 | 15,98 |
| | 8 | 90 | 16,49 | 16,13 | 15,77 | 15,40 | 15,28 | 14,86 | 14,69 | 14,53 |
| | 10 | 90 | 14,55 | 14,21 | 13,92 | 13,77 | 13,58 | 13,36 | 13,16 | 12,75 |
| | 15 | 90 | 11,71 | 11,13 | 10,95 | 10,82 | 10,49 | 10,20 | 9,95 | 9,55 |
| | 20 | 90 | 9,47 | 8,95 | 8,67 | 8,57 | 8,35 | 8,03 | 7,77 | 7,65 |
| | 30 | 90 | 5,70 | 5,45 | 5,27 | 5,13 | 4,98 | 4,84 | 4,74 | 4,39 |
| | 40 | 90 | 1,27 | 1,17 | 1,13 | 1,05 | 0,99 | 0,93 | 0,82 | 0,75 |
| | 50 | 90 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 39,32 | 37,37 | 34,76 | 34,01 | 32,39 | 31,26 | 30,72 | 27,98 |
| | 2 | 90 | 36,32 | 32,92 | 29,03 | 26,95 | 25,81 | 23,50 | 21,88 | 19,02 |
| | 4 | 90 | 21,59 | 21,32 | 20,89 | 20,41 | 20,22 | 20,12 | 19,82 | 18,41 |
| | 6 | 90 | 18,27 | 17,74 | 17,42 | 17,36 | 16,87 | 16,60 | 16,17 | 15,66 |
| | 8 | 90 | 15,75 | 15,24 | 15,00 | 14,90 | 14,51 | 14,40 | 14,20 | 13,95 |
| | 10 | 90 | 13,93 | 13,57 | 13,32 | 13,17 | 12,94 | 12,79 | 12,53 | 12,09 |
| | 15 | 90 | 10,63 | 10,49 | 10,23 | 10,08 | 9,98 | 9,79 | 9,68 | 9,24 |
| | 20 | 90 | 8,40 | 8,20 | 8,07 | 8,01 | 7,75 | 7,61 | 7,37 | 6,99 |
| | 30 | 90 | 4,75 | 4,53 | 4,39 | 4,29 | 4,25 | 4,20 | 4,03 | 3,62 |
| | 40 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 39,72 | 36,99 | 35,23 | 33,36 | 32,07 | 30,68 | 29,60 | 27,65 |
| | 2 | 90 | 34,35 | 31,98 | 29,65 | 27,21 | 25,97 | 24,63 | 22,40 | 15,04 |
| | 4 | 90 | 21,39 | 20,99 | 20,43 | 20,15 | 19,73 | 19,68 | 19,41 | 18,53 |
| | 6 | 90 | 17,38 | 17,14 | 17,03 | 16,83 | 16,71 | 16,52 | 16,39 | 15,63 |
| | 8 | 90 | 15,69 | 15,09 | 14,83 | 14,62 | 14,41 | 14,18 | 13,58 | 13,29 |
| | 10 | 90 | 13,70 | 13,56 | 13,07 | 12,96 | 12,70 | 12,53 | 12,04 | 11,51 |
| | 15 | 90 | 10,47 | 10,19 | 9,87 | 9,76 | 9,64 | 9,45 | 9,26 | 8,96 |
| | 20 | 90 | 7,98 | 7,85 | 7,72 | 7,61 | 7,52 | 7,40 | 7,23 | 6,71 |
| | 30 | 90 | 4,47 | 4,22 | 4,10 | 3,90 | 3,67 | 3,60 | 3,45 | 3,17 |
| | 40 | 90 | 0,08 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 38,15 | 36,62 | 36,12 | 34,88 | 33,04 | 30,01 | 28,70 | 25,18 |
| | 2 | 90 | 34,85 | 30,54 | 28,72 | 27,01 | 25,54 | 24,04 | 20,78 | 17,33 |
| | 4 | 90 | 21,32 | 20,70 | 20,33 | 20,11 | 19,86 | 19,39 | 18,70 | 17,54 |
| | 6 | 90 | 18,25 | 17,26 | 16,86 | 16,51 | 16,39 | 15,96 | 15,53 | 14,48 |
| | 8 | 90 | 15,65 | 14,96 | 14,47 | 14,23 | 13,94 | 13,72 | 13,27 | 13,02 |
| | 10 | 90 | 13,13 | 12,98 | 12,75 | 12,64 | 12,41 | 12,22 | 12,05 | 11,60 |
| | 15 | 90 | 10,35 | 10,08 | 9,71 | 9,50 | 9,24 | 9,07 | 8,87 | 8,62 |
| | 20 | 90 | 8,18 | 7,82 | 7,58 | 7,27 | 7,03 | 6,76 | 6,61 | 6,36 |
| | 30 | 90 | 3,78 | 3,64 | 3,57 | 3,49 | 3,37 | 3,25 | 3,12 | 2,92 |
| | 40 | 90 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 |
| | 50 | 90 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |

Tab. 32 Optimální úhel návinnu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $\alpha=100$

| 100 | L/D | 90° | $\pm\alpha_1$ [°] | $\pm\alpha_2$ [°] | $\pm\alpha_3$ [°] | $\pm\alpha_4$ [°] | $\pm\alpha_5$ [°] | $\pm\alpha_6$ [°] | $\pm\alpha_7$ [°] | $\pm\alpha_8$ [°] |
|-----------------------|-------|------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 40,14 | 40,04 | 39,93 | 39,87 | 39,84 | 39,76 | 39,64 | 39,58 |
| | 2 | 90 | 38,46 | 37,18 | 35,52 | 34,67 | 33,37 | 32,40 | 31,41 | 29,58 |
| | 4 | 90 | 36,31 | 33,74 | 30,35 | 28,62 | 27,27 | 24,92 | 23,08 | 16,78 |
| | 6 | 90 | 26,93 | 25,50 | 24,93 | 24,09 | 23,24 | 22,44 | 21,07 | 20,11 |
| | 8 | 90 | 22,02 | 21,78 | 21,67 | 21,18 | 21,06 | 20,48 | 20,35 | 19,54 |
| | 10 | 90 | 20,39 | 19,84 | 19,54 | 19,18 | 18,84 | 18,72 | 18,44 | 18,12 |
| | 15 | 90 | 16,60 | 16,31 | 16,07 | 15,96 | 15,78 | 15,60 | 15,37 | 15,26 |
| | 20 | 90 | 14,03 | 13,85 | 13,79 | 13,75 | 13,63 | 13,54 | 13,41 | 13,12 |
| | 30 | 90 | 11,08 | 10,82 | 10,72 | 10,61 | 10,56 | 10,46 | 10,40 | 10,04 |
| | 40 | 90 | 8,90 | 8,67 | 8,60 | 8,44 | 8,37 | 8,26 | 8,09 | 7,92 |
| 50 | 90 | 7,30 | 7,10 | 6,90 | 6,64 | 6,49 | 6,41 | 6,21 | 5,96 | |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 37,40 | 37,09 | 37,01 | 36,92 | 36,88 | 36,78 | 36,66 | 36,51 |
| | 2 | 90 | 39,02 | 35,90 | 33,25 | 32,64 | 30,52 | 28,49 | 25,36 | 22,82 |
| | 4 | 90 | 28,30 | 27,02 | 25,92 | 24,60 | 22,69 | 22,34 | 21,37 | 19,47 |
| | 6 | 90 | 21,45 | 21,07 | 20,88 | 20,60 | 20,43 | 20,19 | 19,62 | 18,82 |
| | 8 | 90 | 19,54 | 18,82 | 18,34 | 18,16 | 17,95 | 17,51 | 17,07 | 16,52 |
| | 10 | 90 | 17,13 | 16,64 | 16,46 | 16,25 | 16,18 | 16,01 | 15,72 | 15,21 |
| | 15 | 90 | 13,97 | 13,50 | 13,28 | 13,14 | 12,88 | 12,85 | 12,71 | 12,38 |
| | 20 | 90 | 11,83 | 11,47 | 11,20 | 11,01 | 10,71 | 10,49 | 10,44 | 10,06 |
| | 30 | 90 | 8,30 | 8,18 | 8,02 | 7,88 | 7,81 | 7,62 | 7,49 | 7,32 |
| | 40 | 90 | 6,00 | 5,86 | 5,67 | 5,47 | 5,35 | 5,28 | 5,12 | 4,66 |
| 50 | 90 | 3,73 | 3,34 | 3,13 | 3,02 | 2,93 | 2,82 | 2,75 | 2,64 | |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 36,02 | 35,51 | 35,37 | 35,20 | 35,11 | 34,89 | 34,16 | 33,59 |
| | 2 | 90 | 38,47 | 33,90 | 31,52 | 30,16 | 27,87 | 27,02 | 23,57 | 18,92 |
| | 4 | 90 | 23,96 | 23,31 | 22,97 | 22,65 | 22,37 | 21,16 | 20,37 | 19,56 |
| | 6 | 90 | 20,15 | 19,56 | 19,23 | 18,71 | 18,48 | 18,12 | 17,58 | 17,02 |
| | 8 | 90 | 17,67 | 17,12 | 16,81 | 16,53 | 16,25 | 15,81 | 15,42 | 14,76 |
| | 10 | 90 | 15,43 | 14,98 | 14,73 | 14,51 | 14,42 | 14,27 | 14,06 | 13,92 |
| | 15 | 90 | 12,52 | 12,16 | 11,74 | 11,43 | 11,33 | 11,24 | 10,86 | 10,49 |
| | 20 | 90 | 9,92 | 9,71 | 9,48 | 9,32 | 9,19 | 9,16 | 9,05 | 8,75 |
| | 30 | 90 | 6,90 | 6,56 | 6,45 | 6,23 | 6,08 | 5,93 | 5,71 | 4,89 |
| | 40 | 90 | 3,47 | 3,40 | 3,38 | 3,29 | 3,19 | 3,11 | 3,06 | 2,77 |
| 50 | 90 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 38,71 | 37,08 | 35,41 | 34,49 | 33,08 | 32,39 | 31,75 | 30,52 |
| | 2 | 90 | 36,99 | 33,71 | 30,73 | 28,53 | 26,80 | 25,47 | 22,29 | 18,07 |
| | 4 | 90 | 22,32 | 21,96 | 21,63 | 21,39 | 21,06 | 20,81 | 20,28 | 19,50 |
| | 6 | 90 | 18,94 | 18,41 | 18,01 | 17,80 | 17,48 | 17,24 | 17,08 | 16,94 |
| | 8 | 90 | 15,88 | 15,79 | 15,69 | 15,57 | 15,45 | 15,33 | 15,25 | 14,70 |
| | 10 | 90 | 14,45 | 14,18 | 14,08 | 14,00 | 13,79 | 13,37 | 13,17 | 12,78 |
| | 15 | 90 | 11,17 | 11,07 | 10,94 | 10,91 | 10,79 | 10,47 | 10,15 | 9,93 |
| | 20 | 90 | 8,93 | 8,87 | 8,77 | 8,59 | 8,44 | 8,34 | 8,14 | 7,94 |
| | 30 | 90 | 5,81 | 5,43 | 5,36 | 5,17 | 5,06 | 4,93 | 4,80 | 4,56 |
| | 40 | 90 | 1,58 | 1,44 | 1,42 | 1,31 | 1,26 | 1,17 | 1,12 | 1,04 |
| 50 | 90 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 39,21 | 36,83 | 35,65 | 33,88 | 32,66 | 31,73 | 29,63 | 27,54 |
| | 2 | 90 | 35,04 | 31,87 | 29,35 | 28,23 | 26,49 | 25,24 | 22,43 | 14,76 |
| | 4 | 90 | 21,32 | 21,12 | 20,83 | 20,68 | 20,33 | 20,03 | 19,68 | 18,21 |
| | 6 | 90 | 17,68 | 17,47 | 17,30 | 17,13 | 16,97 | 16,76 | 16,57 | 15,66 |
| | 8 | 90 | 15,60 | 15,29 | 15,16 | 14,93 | 14,55 | 14,27 | 13,97 | 13,61 |
| | 10 | 90 | 14,05 | 13,53 | 13,08 | 13,04 | 12,91 | 12,84 | 12,49 | 11,86 |
| | 15 | 90 | 10,85 | 10,42 | 10,14 | 10,04 | 9,81 | 9,52 | 9,44 | 9,25 |
| | 20 | 90 | 8,46 | 8,34 | 8,03 | 7,80 | 7,68 | 7,50 | 7,14 | 6,72 |
| | 30 | 90 | 4,96 | 4,61 | 4,31 | 4,25 | 4,07 | 3,85 | 3,62 | 3,38 |
| | 40 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| 50 | 90 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | |

Tab. 33 Optimální úhel návinnu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=1\ 000$

| 1000 | L/D | 90° | $\pm\alpha_1 [^\circ]$ | $\pm\alpha_2 [^\circ]$ | $\pm\alpha_3 [^\circ]$ | $\pm\alpha_4 [^\circ]$ | $\pm\alpha_5 [^\circ]$ | $\pm\alpha_6 [^\circ]$ | $\pm\alpha_7 [^\circ]$ | $\pm\alpha_8 [^\circ]$ |
|-----------------------|-------|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 44,32 | 44,22 | 44,15 | 44,11 | 44,05 | 44,01 | 43,97 | 43,89 |
| | 2 | 90 | 41,97 | 41,92 | 41,86 | 41,84 | 41,77 | 41,76 | 41,72 | 41,66 |
| | 4 | 90 | 37,63 | 36,97 | 36,83 | 36,72 | 36,60 | 36,50 | 36,39 | 36,11 |
| | 6 | 90 | 38,97 | 37,67 | 35,42 | 33,38 | 32,42 | 31,31 | 30,20 | 27,39 |
| | 8 | 90 | 37,58 | 36,30 | 34,89 | 32,53 | 30,74 | 27,98 | 26,04 | 20,23 |
| | 10 | 90 | 37,95 | 35,22 | 30,67 | 29,04 | 26,99 | 25,82 | 25,18 | 18,10 |
| | 15 | 90 | 30,09 | 28,51 | 26,37 | 24,33 | 23,71 | 23,08 | 21,65 | 17,51 |
| | 20 | 90 | 23,10 | 22,56 | 22,30 | 22,13 | 21,70 | 21,42 | 20,74 | 20,36 |
| | 30 | 90 | 18,62 | 18,54 | 18,47 | 18,45 | 18,40 | 18,30 | 18,20 | 18,01 |
| | 40 | 90 | 16,27 | 16,20 | 16,15 | 16,12 | 16,04 | 15,99 | 15,90 | 15,83 |
| | 50 | 90 | 14,65 | 14,63 | 14,45 | 14,28 | 14,23 | 14,18 | 14,15 | 14,09 |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 42,95 | 42,88 | 42,85 | 42,81 | 42,72 | 42,70 | 42,61 | 42,51 |
| | 2 | 90 | 38,81 | 38,69 | 38,62 | 38,56 | 38,45 | 38,39 | 38,33 | 38,16 |
| | 4 | 90 | 40,47 | 36,58 | 34,14 | 32,29 | 31,73 | 30,55 | 29,14 | 26,49 |
| | 6 | 90 | 38,69 | 33,58 | 31,89 | 29,33 | 28,25 | 25,34 | 24,50 | 19,24 |
| | 8 | 90 | 32,64 | 30,68 | 28,98 | 27,85 | 25,14 | 24,20 | 22,15 | 14,32 |
| | 10 | 90 | 26,96 | 25,58 | 24,60 | 23,93 | 23,64 | 23,01 | 21,96 | 19,15 |
| | 15 | 90 | 20,63 | 20,38 | 20,24 | 20,12 | 19,97 | 19,89 | 19,77 | 19,61 |
| | 20 | 90 | 18,12 | 17,92 | 17,85 | 17,76 | 17,63 | 17,57 | 17,46 | 17,31 |
| | 30 | 90 | 14,75 | 14,67 | 14,61 | 14,56 | 14,52 | 14,38 | 14,32 | 14,21 |
| | 40 | 90 | 12,67 | 12,49 | 12,39 | 12,31 | 12,29 | 12,19 | 12,15 | 12,02 |
| | 50 | 90 | 10,98 | 10,88 | 10,79 | 10,64 | 10,62 | 10,56 | 10,44 | 10,20 |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 41,17 | 41,04 | 41,00 | 40,90 | 40,83 | 40,77 | 40,74 | 40,67 |
| | 2 | 90 | 36,60 | 36,30 | 35,89 | 35,64 | 35,23 | 34,64 | 34,17 | 33,98 |
| | 4 | 90 | 37,55 | 35,26 | 31,71 | 31,12 | 29,43 | 26,53 | 22,62 | 19,66 |
| | 6 | 90 | 32,26 | 28,90 | 27,42 | 25,57 | 24,69 | 23,15 | 21,66 | 16,50 |
| | 8 | 90 | 24,36 | 23,15 | 22,94 | 22,46 | 22,19 | 21,70 | 21,10 | 20,81 |
| | 10 | 90 | 21,87 | 21,38 | 20,89 | 20,59 | 20,28 | 20,01 | 19,56 | 18,58 |
| | 15 | 90 | 17,70 | 17,53 | 17,37 | 17,30 | 17,09 | 16,77 | 16,48 | 16,28 |
| | 20 | 90 | 15,25 | 15,10 | 14,96 | 14,88 | 14,77 | 14,65 | 14,51 | 14,37 |
| | 30 | 90 | 12,10 | 11,90 | 11,84 | 11,80 | 11,69 | 11,60 | 11,54 | 11,32 |
| | 40 | 90 | 9,88 | 9,75 | 9,66 | 9,61 | 9,55 | 9,43 | 9,37 | 9,27 |
| | 50 | 90 | 8,20 | 8,04 | 7,96 | 7,92 | 7,84 | 7,75 | 7,68 | 7,49 |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 39,49 | 39,39 | 39,30 | 39,28 | 39,25 | 39,09 | 39,06 | 38,94 |
| | 2 | 90 | 39,31 | 36,69 | 35,23 | 34,22 | 33,25 | 30,80 | 29,71 | 27,90 |
| | 4 | 90 | 35,24 | 32,11 | 29,96 | 28,20 | 26,04 | 24,18 | 21,21 | 17,22 |
| | 6 | 90 | 24,68 | 24,26 | 23,62 | 22,83 | 22,33 | 21,95 | 21,43 | 20,96 |
| | 8 | 90 | 21,75 | 20,87 | 20,46 | 20,36 | 20,30 | 20,06 | 19,40 | 18,78 |
| | 10 | 90 | 19,39 | 19,07 | 18,79 | 18,48 | 18,39 | 18,13 | 17,92 | 17,16 |
| | 15 | 90 | 15,89 | 15,53 | 15,39 | 15,31 | 15,18 | 14,97 | 14,82 | 14,31 |
| | 20 | 90 | 13,56 | 13,32 | 13,24 | 13,10 | 12,96 | 12,72 | 12,58 | 12,27 |
| | 30 | 90 | 10,30 | 10,16 | 10,04 | 9,95 | 9,88 | 9,81 | 9,71 | 9,61 |
| | 40 | 90 | 8,38 | 7,99 | 7,89 | 7,77 | 7,61 | 7,53 | 7,41 | 7,22 |
| | 50 | 90 | 6,49 | 6,31 | 6,06 | 5,96 | 5,88 | 5,63 | 5,51 | 5,29 |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 37,30 | 37,02 | 36,88 | 36,82 | 36,75 | 36,63 | 36,50 | 36,18 |
| | 2 | 90 | 40,16 | 35,25 | 32,96 | 31,95 | 30,20 | 27,86 | 26,18 | 22,25 |
| | 4 | 90 | 27,17 | 26,50 | 25,84 | 24,27 | 23,55 | 22,69 | 21,23 | 19,08 |
| | 6 | 90 | 20,90 | 20,68 | 20,56 | 20,48 | 20,38 | 20,15 | 19,95 | 18,83 |
| | 8 | 90 | 19,12 | 18,81 | 18,26 | 17,98 | 17,57 | 17,38 | 17,04 | 16,71 |
| | 10 | 90 | 17,04 | 16,67 | 16,45 | 16,30 | 15,95 | 15,84 | 15,35 | 14,98 |
| | 15 | 90 | 13,76 | 13,32 | 13,21 | 13,03 | 12,76 | 12,66 | 12,49 | 12,24 |
| | 20 | 90 | 11,20 | 11,04 | 10,95 | 10,90 | 10,73 | 10,68 | 10,52 | 10,33 |
| | 30 | 90 | 8,21 | 8,02 | 7,92 | 7,85 | 7,72 | 7,55 | 7,36 | 6,96 |
| | 40 | 90 | 5,85 | 5,63 | 5,41 | 5,32 | 5,24 | 5,09 | 4,99 | 4,75 |
| | 50 | 90 | 3,18 | 3,04 | 2,97 | 2,89 | 2,76 | 2,58 | 2,57 | 2,54 |

Tab. 34 Optimální úhel návinnu u nosníků s více optimalizovanými parametry zatížených kombinací ohybu a krutu při $a=10\ 000$

| 10000 | L/D | 90° | $\pm\alpha_1 [^\circ]$ | $\pm\alpha_2 [^\circ]$ | $\pm\alpha_3 [^\circ]$ | $\pm\alpha_4 [^\circ]$ | $\pm\alpha_5 [^\circ]$ | $\pm\alpha_6 [^\circ]$ | $\pm\alpha_7 [^\circ]$ | $\pm\alpha_8 [^\circ]$ |
|-----------------------|-------|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Vnitřní průměr 60 mm | 1 | 90 | 44,97 | 44,93 | 44,93 | 44,91 | 44,89 | 44,86 | 44,86 | 44,84 |
| | 2 | 90 | 44,67 | 44,65 | 44,64 | 44,63 | 44,62 | 44,61 | 44,61 | 44,58 |
| | 4 | 90 | 43,58 | 43,57 | 43,56 | 43,55 | 43,54 | 43,54 | 43,53 | 43,49 |
| | 6 | 90 | 42,04 | 42,03 | 42,02 | 42,01 | 42,00 | 41,99 | 41,98 | 41,97 |
| | 8 | 90 | 40,34 | 40,31 | 40,31 | 40,29 | 40,27 | 40,26 | 40,25 | 40,24 |
| | 10 | 90 | 38,65 | 38,63 | 38,61 | 38,60 | 38,59 | 38,58 | 38,57 | 38,56 |
| | 15 | 90 | 36,01 | 35,73 | 35,34 | 35,14 | 35,01 | 34,90 | 34,62 | 33,49 |
| | 20 | 90 | 39,35 | 36,76 | 35,33 | 33,73 | 31,65 | 30,67 | 28,87 | 25,76 |
| | 30 | 90 | 36,59 | 34,95 | 33,14 | 30,89 | 28,98 | 25,49 | 22,08 | 19,54 |
| | 40 | 90 | 33,10 | 31,46 | 29,20 | 27,61 | 26,39 | 22,17 | 21,48 | 16,12 |
| 50 | 90 | 27,85 | 25,61 | 24,66 | 24,22 | 23,86 | 22,27 | 21,35 | 20,00 | |
| Vnitřní průměr 100 mm | 1 | 90 | 44,79 | 44,76 | 44,75 | 44,75 | 44,74 | 44,72 | 44,70 | 44,63 |
| | 2 | 90 | 44,06 | 44,03 | 44,01 | 43,98 | 43,96 | 43,95 | 43,93 | 43,90 |
| | 4 | 90 | 41,51 | 41,48 | 41,48 | 41,47 | 41,45 | 41,44 | 41,41 | 41,39 |
| | 6 | 90 | 38,75 | 38,72 | 38,65 | 38,63 | 38,62 | 38,59 | 38,51 | 38,45 |
| | 8 | 90 | 36,47 | 36,30 | 36,21 | 36,18 | 36,16 | 36,06 | 35,97 | 35,59 |
| | 10 | 90 | 38,34 | 37,09 | 35,19 | 34,54 | 33,84 | 32,78 | 31,87 | 30,32 |
| | 15 | 90 | 37,96 | 36,02 | 34,65 | 31,46 | 30,49 | 28,80 | 26,05 | 20,55 |
| | 20 | 90 | 36,17 | 33,03 | 30,83 | 29,69 | 28,71 | 26,22 | 21,61 | 16,72 |
| | 30 | 90 | 27,22 | 26,00 | 25,01 | 24,04 | 23,54 | 22,89 | 22,24 | 19,04 |
| | 40 | 90 | 21,70 | 21,47 | 21,39 | 21,32 | 21,26 | 21,03 | 20,95 | 20,52 |
| 50 | 90 | 19,74 | 19,60 | 19,47 | 19,38 | 19,30 | 19,22 | 19,08 | 18,80 | |
| Vnitřní průměr 150 mm | 1 | 90 | 44,50 | 44,46 | 44,43 | 44,41 | 44,38 | 44,37 | 44,33 | 44,25 |
| | 2 | 90 | 42,94 | 42,88 | 42,86 | 42,85 | 42,84 | 42,83 | 42,79 | 42,76 |
| | 4 | 90 | 38,80 | 38,74 | 38,70 | 38,67 | 38,64 | 38,61 | 38,56 | 38,52 |
| | 6 | 90 | 36,42 | 36,03 | 35,78 | 35,42 | 34,92 | 34,60 | 34,22 | 33,41 |
| | 8 | 90 | 38,85 | 37,02 | 35,43 | 34,35 | 32,13 | 30,94 | 27,72 | 26,13 |
| | 10 | 90 | 37,93 | 36,82 | 34,37 | 32,08 | 30,35 | 28,60 | 25,20 | 21,14 |
| | 15 | 90 | 34,86 | 32,91 | 29,36 | 27,83 | 26,65 | 24,55 | 21,10 | 16,42 |
| | 20 | 90 | 27,79 | 26,14 | 24,63 | 23,79 | 23,33 | 22,98 | 22,40 | 19,24 |
| | 30 | 90 | 20,56 | 20,52 | 20,46 | 20,37 | 20,33 | 20,15 | 19,93 | 19,61 |
| | 40 | 90 | 18,24 | 18,09 | 17,96 | 17,88 | 17,82 | 17,74 | 17,63 | 17,52 |
| 50 | 90 | 16,40 | 16,24 | 16,15 | 16,08 | 16,01 | 15,96 | 15,93 | 15,83 | |
| Vnitřní průměr 200 mm | 1 | 90 | 44,08 | 44,05 | 44,02 | 44,00 | 43,99 | 43,97 | 43,94 | 43,91 |
| | 2 | 90 | 41,64 | 41,60 | 41,57 | 41,53 | 41,51 | 41,47 | 41,42 | 41,39 |
| | 4 | 90 | 36,81 | 36,62 | 36,46 | 36,31 | 36,23 | 35,93 | 35,82 | 35,57 |
| | 6 | 90 | 39,90 | 36,44 | 35,19 | 33,84 | 31,48 | 30,69 | 29,14 | 26,35 |
| | 8 | 90 | 37,98 | 35,74 | 33,76 | 31,85 | 29,90 | 28,35 | 24,59 | 19,75 |
| | 10 | 90 | 34,58 | 33,32 | 32,20 | 30,89 | 29,56 | 24,94 | 22,31 | 15,56 |
| | 15 | 90 | 27,58 | 26,51 | 25,80 | 24,40 | 23,21 | 22,44 | 21,66 | 19,14 |
| | 20 | 90 | 22,15 | 21,89 | 21,69 | 21,44 | 21,28 | 20,98 | 20,61 | 20,34 |
| | 30 | 90 | 18,19 | 18,12 | 17,99 | 17,91 | 17,86 | 17,83 | 17,74 | 17,64 |
| | 40 | 90 | 15,81 | 15,77 | 15,72 | 15,67 | 15,58 | 15,53 | 15,50 | 15,35 |
| 50 | 90 | 14,21 | 14,00 | 13,96 | 13,91 | 13,87 | 13,82 | 13,77 | 13,59 | |
| Vnitřní průměr 300 mm | 1 | 90 | 43,18 | 43,07 | 42,99 | 42,94 | 42,86 | 42,80 | 42,76 | 42,67 |
| | 2 | 90 | 39,05 | 38,99 | 38,96 | 38,87 | 38,82 | 38,73 | 38,64 | 38,54 |
| | 4 | 90 | 39,43 | 36,97 | 35,23 | 33,90 | 31,89 | 30,93 | 29,01 | 26,71 |
| | 6 | 90 | 37,39 | 35,10 | 32,57 | 31,19 | 29,46 | 26,31 | 22,41 | 19,59 |
| | 8 | 90 | 33,75 | 32,02 | 30,20 | 27,37 | 25,18 | 23,84 | 20,97 | 16,80 |
| | 10 | 90 | 29,82 | 26,11 | 25,22 | 24,29 | 23,66 | 22,18 | 21,62 | 19,23 |
| | 15 | 90 | 21,36 | 20,94 | 20,80 | 20,60 | 20,40 | 20,25 | 20,11 | 18,93 |
| | 20 | 90 | 18,33 | 18,20 | 18,16 | 18,11 | 18,08 | 18,02 | 17,88 | 17,47 |
| | 30 | 90 | 15,08 | 14,93 | 14,90 | 14,83 | 14,80 | 14,75 | 14,66 | 14,63 |
| | 40 | 90 | 12,81 | 12,73 | 12,70 | 12,67 | 12,65 | 12,59 | 12,52 | 12,33 |
| 50 | 90 | 11,24 | 11,14 | 11,02 | 10,97 | 10,88 | 10,82 | 10,79 | 10,71 | |

6. Závěr

První část diplomové práce byla věnována analytickým metodám. Byl uveden přehled analytických metod, jenž je možné následně použít k výpočtu tuhosti navíjeného tenkostěnného kompozitního nosníku zatíženého tříbodovým ohybem. Celkem byly popsány tři analytické metody. Jako první byla popsána metoda určení tuhosti pomocí *ABD* matic. Následují metody, kdy se tuhost určí přímo z matice tuhosti nebo z matice poddajnosti.

Druhá část diplomové práce se zabývala experimentem a jeho následným vyhodnocením. Hlavním důvodem pro provedení experimentu byla potřeba validace analytických metod experimentálními daty. Touto validací bylo ukázáno, že moduly pružnosti v tahu jsou primárně závislé na použité kompozitní skladbě. U konkrétní kompozitní skladby se změna materiálu vláken projeví pouze změnou velikosti modulu pružnosti v tahu, proporce však zůstanou téměř shodné. Dále je z výsledků patrné, že analytické metody se nejlépe shodují u vzorků, u níž byla použita podélná kompozitní skladba. Je to způsobeno tím, že podélná kompozitní skladba je do jisté míry velmi speciální, neboť se skládá jen z vláken vinutých pod úhlem 0° a 90° . Nejlepší shodu s experimentálními daty vykazovala metoda střední hodnoty, která byla získána z matice tuhosti a z matice poddajnosti. Dobrou shodu s experimentem také vykazovala metoda *ABD* matic. Naproti tomu metody přímého určení z matice tuhosti, respektive poddajnosti tak dobré shody nedosahovaly. Z výsledků je také možné vyvodit, které přístupy vyhodnocení je pro použité vzorky lepší. V tomto případě se jako lepší jeví vyhodnocení experimentu dle Euler-Bernoulliho přístupu, který neuvažuje vliv posouvající síly.

Poslední část diplomové práce byla věnována optimalizaci. V programu MATLAB byl sestaven program, jenž byl následně použit k řešení tří modelových optimalizačních úloh. Pro tyto úlohy byly použity dvě různé kompozitní skladby. V první úloze byl optimalizován nosník zatížený jen ohybem, přičemž byly použity dva přístupy definice cílové funkce. V definici, která využívá Euler-Bernoulliho hypotézu vychází optimální kompozitní skladba vždy $[90^\circ; \pm 0^\circ]$ a to bez ohledu na délku nosníku. Při použití Timošenkovy hypotézy se již ve výsledcích projevuje vliv posouvající síly, a to především u kratších nosníků. Z výsledků je patrné, že vliv posouvající síly je primárně závislý na délce nosníku. Změna vnitřního průměru má na výsledky jen minimální vliv. Druhá úloha se zabývala optimalizací nosníku zatíženého čistým krutem. U této úlohy vychází optimální kompozitní skladba pro libovolně zvolený průměr i délku vždy $[90^\circ; \pm 45^\circ]$. V poslední úloze byl optimalizován nosník zatížený kombinací ohybu a krutu. Pro různé hodnoty váhového koeficientu a byly sestaveny závislosti úhlů návinu na poměru L/D . Z výsledků je patrné, že pro malé hodnoty $a = 1$ a $a = 10$ je vliv krutu minimální a dostáváme, téměř shodné výsledky jako kdyby byl nosník zatížen jen ohybem. Pro větší hodnoty váhového koeficientu už je vliv krutu markantnější. Obecně lze říct, že zatížení krutem má významný vliv především pro kratší nosníky. U nosníků s $L/D > 20$ je vliv krutu potlačen a převládá zatížení ohybem.

Použitá literatura

- [1] VLADISLAV, Laš. *Mechanika kompozitních materiálů*. Západočeská univerzita, 2008. ISSN 9788-0704.
- [2] KOLLÁR, László P. and George S. SPRINGER, 2003. *Mechanics of Composite Structures* [online]. Cambridge: Cambridge University Press. Retrieved z: doi:10.1017/CBO9780511547140
- [3] BARBERO, E. J. Introduction to composite materials design. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN 978-1-4200-7915-9.
- [4] MALÁ A. Analytické výpočtové metody pro návrh kompozitních elementů výrobních strojů. Praha. Bakalářská práce, 2015.
- [5] Zavřelová, Tereza. Analysis of composite beam bending. Diplomová práce (Ing.), České vysoké učení technické v Praze. Fakulta strojní, ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky. Praha, ČR, 2015.
- [6] MALÁ A. Výpočtové metody pro analýzu tenkostěnných i silnostěnných kompozitních nosníků. Praha. Diplomová práce, 2017.
- [7] Kompaktní laserový snímač polohy ILD1320. MICRO-EPSILON [online]. Bechyně: MICRO-EPSILON [cit. 2018-07-30]. Dostupné z: https://www.microepsilon.cz/displacement-position-sensors/laser-sensor/optoNCDT_1320/
- [8] ŘEZNÍČEK, Jan. Pružnost a pevnost I: Podklady pro přednášky [online]. 10., přeprac. vyd. Praha, 2019 [vid. 10.6.2019]. Dostupné z: http://www.pruznost.unas.cz/PP_I_18_19.pdf.
- [9] Genetic Algorithm. MathWorks [online]. [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm.html?s_tid=CRUX_lftnav
- [10] MAREŠ, Tomáš. Základy konstrukční optimalizace. 1. Praha : Tomáš Mareš, 2006.
- [11] GOLDBERG, David Edward. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Reading: Addison-Wesley, c1989. ISBN 0-201-15767-5.
- [12] REEVES, Colin R., Jonathan E. ROWE a SpringerLink (Online service). *Genetic Algorithms—Principles and Perspectives: A Guide to GA Theory* [online]. Boston, MA: Springer US, 2002. ISBN 1387-666X.
- [13] ŠKRABAL, Ondřej. Genetické algoritmy a rozvrhování: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2010
- [14] ŠEDA, Pavel. Využití genetických algoritmů v problému pokrytí, 2015

Přílohy

Příloha 1 Seznam vzorků z kompozitu T700/epoxid o délce 500 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_T700_T_500_1 | 50,07 | 50,22 | 52,69 | 52,93 | 215,49 | 71428,30 |
| | 50_T700_T_500_2 | 50,03 | 50,18 | 52,76 | 52,81 | 216,57 | 71694,98 |
| | 50_T700_T_500_3 | 50,08 | 50,09 | 52,78 | 52,86 | 221,05 | 73200,38 |
| | 50_T700_T_500_4 | 50,12 | 50,11 | 52,81 | 52,9 | 221,59 | 73473,38 |
| | 50_T700_T_500_5 | 50,14 | 50,17 | 52,9 | 52,99 | 225,92 | 75099,67 |
| | 50_T700_T_500_6 | 49,9 | 50,12 | 52,91 | 52,82 | 230,68 | 76350,15 |
| P | 50_T700_P_500_1 | 49,86 | 50,21 | 51,79 | 51,59 | 132,23 | 42769,67 |
| | 50_T700_P_500_2 | 50,29 | 50,23 | 51,65 | 51,39 | 100,72 | 32611,02 |
| | 50_T700_P_500_3 | 50,45 | 50,13 | 51,62 | 51,51 | 102,00 | 33072,36 |
| | 50_T700_P_500_4 | 50,05 | 50,2 | 51,63 | 51,74 | 124,74 | 40414,55 |
| | 50_T700_P_500_5 | 50,64 | 50,35 | 51,65 | 51,7 | 94,69 | 30892,28 |
| | 50_T700_P_500_6 | 50,03 | 50,38 | 51,67 | 51,66 | 116,81 | 37889,67 |
| N1 | 50_T700_N1_500_1 | 50,16 | 50,12 | 51,47 | 51,63 | 112,61 | 36397,98 |
| | 50_T700_N1_500_2 | 50,27 | 50,21 | 51,62 | 51,67 | 112,43 | 36477,88 |
| | 50_T700_N1_500_3 | 49,99 | 50,23 | 51,44 | 51,38 | 103,65 | 33389,45 |
| | 50_T700_N1_500_4 | 50,26 | 50,23 | 51,5 | 51,63 | 105,55 | 34194,65 |
| | 50_T700_N1_500_5 | 50,23 | 50,43 | 51,51 | 51,84 | 107,75 | 35043,06 |
| | 50_T700_N1_500_6 | 50,25 | 50,5 | 51,35 | 51,7 | 92,04 | 29868,65 |
| N2 | 50_T700_N2_500_1 | 50,74 | 50,64 | 51,59 | 51,53 | 69,87 | 22828,67 |
| | 50_T700_N2_500_2 | 50,56 | 50,52 | 51,57 | 51,52 | 80,58 | 26244,23 |
| | 50_T700_N2_500_3 | 50,46 | 50,07 | 51,36 | 51,54 | 94,67 | 30610,63 |
| | 50_T700_N2_500_4 | 50,19 | 50,42 | 51,54 | 51,8 | 109,32 | 35532,97 |
| | 50_T700_N2_500_5 | 50,41 | 50,09 | 51,36 | 51,47 | 93,02 | 30049,50 |
| | 50_T700_N2_500_6 | 50,42 | 50,54 | 51,65 | 51,54 | 89,39 | 29108,83 |

Příloha 2 Seznam vzorků z kompozitu UMS40/epoxid o délce 500 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_UMS40_T_500_1 | 49,85 | 50,13 | 52,77 | 52,84 | 227,27 | 75103,44 |
| | 50_UMS40_T_500_2 | 49,92 | 50,16 | 52,66 | 52,79 | 216,71 | 71567,57 |
| | 50_UMS40_T_500_3 | 50,09 | 50,18 | 52,75 | 52,79 | 212,96 | 70520,38 |
| | 50_UMS40_T_500_4 | 49,5 | 50,13 | 52,74 | 52,73 | 235,18 | 77353,81 |
| | 50_UMS40_T_500_5 | 50,16 | 49,8 | 52,66 | 52,81 | 222,25 | 73328,95 |
| | 50_UMS40_T_500_6 | 50,13 | 50,27 | 52,79 | 52,66 | 204,11 | 67612,22 |
| P | 50_UMS40_P_500_1 | 50,85 | 50,94 | 51,69 | 51,79 | 142,96 | 22423,97 |
| | 50_UMS40_P_500_2 | 50,88 | 50,87 | 51,48 | 51,88 | 139,66 | 21312,43 |
| | 50_UMS40_P_500_3 | 50,96 | 50,83 | 51,73 | 51,76 | 142,98 | 22559,97 |
| | 50_UMS40_P_500_4 | 50,85 | 50,94 | 51,83 | 51,79 | 143,16 | 24331,58 |
| | 50_UMS40_P_500_5 | 50,89 | 50,9 | 51,59 | 51,59 | 142,54 | 18362,24 |
| | - | - | - | - | - | - | - |
| N1 | 50_UMS40_N1_500_1 | 50,23 | 50,1 | 52,05 | 52,23 | 158,69 | 51922,96 |
| | 50_UMS40_N1_500_2 | 50,28 | 50,16 | 52,04 | 52,07 | 147,40 | 48197,47 |
| | 50_UMS40_N1_500_3 | 50,35 | 50,35 | 51,92 | 51,99 | 128,96 | 42190,28 |
| | 50_UMS40_N1_500_4 | 50,15 | 50,06 | 51,84 | 51,76 | 135,66 | 44036,85 |
| | 50_UMS40_N1_500_5 | 50,11 | 50,07 | 51,74 | 52,07 | 145,39 | 47281,44 |
| | 50_UMS40_N1_500_6 | 49,92 | 50,32 | 51,95 | 51,98 | 147,93 | 48190,77 |
| N2 | 50_UMS40_N2_500_1 | 50,13 | 50,32 | 51,9 | 51,96 | 136,80 | 44623,55 |
| | 50_UMS40_N2_500_2 | 50,2 | 50,24 | 51,85 | 51,91 | 133,11 | 43375,05 |
| | 50_UMS40_N2_500_3 | 50,05 | 50,23 | 51,98 | 52,16 | 154,93 | 50597,87 |
| | 50_UMS40_N2_500_4 | 50,25 | 50,24 | 51,76 | 51,85 | 125,03 | 40700,99 |
| | 50_UMS40_N2_500_5 | 50,16 | 50,16 | 51,88 | 51,93 | 139,88 | 45550,46 |
| | 50_UMS40_N2_500_6 | 50,11 | 50,21 | 51,88 | 51,96 | 141,11 | 45962,50 |

Příloha 3 Seznam vzorků z kompozitu XN60/epoxid o délce 500 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|------------------|-------|--------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_XN60_T_500_1 | 50,26 | 50,089 | 53,19 | 53,31 | 249,82 | 83581,43 |
| | 50_XN60_T_500_2 | 50,15 | 50,2 | 53,37 | 53,44 | 262,77 | 88184,5 |
| | 50_XN60_T_500_3 | 49,55 | 50,15 | 53,53 | 53,14 | 282,43 | 94077,88 |
| | 50_XN60_T_500_4 | 50,08 | 50,11 | 53 | 53,24 | 245,22 | 81708,38 |
| | 50_XN60_T_500_5 | 50,09 | 50,11 | 53,37 | 53,42 | 267,83 | 89741,52 |
| | 50_XN60_T_500_6 | 50,31 | 50,13 | 53,24 | 53,26 | 246,23 | 82451,42 |
| P | 50_XN60_P_500_1 | 50 | 50,25 | 52,2 | 52,26 | 169,22 | 55424,63 |
| | 50_XN60_P_500_2 | 49,94 | 49,91 | 52,27 | 52,28 | 188,63 | 61601,32 |
| | 50_XN60_P_500_3 | 50,12 | 50,14 | 52,56 | 52,17 | 179,92 | 59092,44 |
| | 50_XN60_P_500_4 | 50,52 | 50,56 | 52,31 | 52,46 | 149,14 | 49389,93 |
| | 50_XN60_P_500_5 | 50,02 | 50,11 | 52,35 | 52,43 | 187,09 | 61402,48 |
| | 50_XN60_P_500_6 | 49,98 | 50,02 | 52,31 | 52,2 | 181,10 | 59204,03 |
| N1 | 50_XN60_N1_500_1 | 50,23 | 50,14 | 52,75 | 52,81 | 209,85 | 69569,98 |
| | 50_XN60_N1_500_2 | 50,12 | 50,07 | 51,77 | 51,83 | 136,45 | 44283,76 |
| | 50_XN60_N1_500_3 | 50,04 | 50,09 | 51,89 | 51,78 | 141,66 | 45979,76 |
| | 50_XN60_N1_500_4 | 50,25 | 50,14 | 52,97 | 53,15 | 232,34 | 77469,73 |
| | 50_XN60_N1_500_5 | 50,33 | 50,32 | 52,73 | 52,79 | 197,14 | 65503,96 |
| | 50_XN60_N1_500_6 | 50,19 | 50,01 | 52,77 | 52,8 | 216,96 | 71818,46 |
| N2 | 50_XN60_N2_500_1 | 50,02 | 50,02 | 52,35 | 52,3 | 185,28 | 60677,96 |
| | 50_XN60_N2_500_2 | 49,99 | 50,12 | 52,33 | 52,38 | 185,00 | 60661,6 |
| | 50_XN60_N2_500_3 | 50,21 | 50,12 | 52,3 | 52,29 | 171,41 | 56256,18 |
| | 50_XN60_N2_500_4 | 50,18 | 50,1 | 52,34 | 52,63 | 189,01 | 62239,91 |
| | 50_XN60_N2_500_5 | 50,08 | 50,24 | 52,23 | 52,33 | 170,57 | 55959,06 |
| | 50_XN60_N2_500_6 | 50,06 | 50,09 | 52,6 | 52,77 | 210,65 | 69555,71 |

Příloha 4 Seznam vzorků z kompozitu T700/epoxid o délce 780 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|------------------|-------|-------|--------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_T700_T_780_1 | 50,34 | 50,05 | 52,85 | 52,86 | 215,29 | 71491,56 |
| | 50_T700_T_780_2 | 50,22 | 50,03 | 52,99 | 52,9 | 228,28 | 75842,18 |
| | 50_T700_T_780_3 | 50,21 | 50,1 | 52,62 | 52,45 | 191,95 | 63289,92 |
| | 50_T700_T_780_4 | 50,26 | 50,02 | 52,83 | 52,91 | 220,87 | 73290,16 |
| | 50_T700_T_780_5 | 49,81 | 50,02 | 52,73 | 52,68 | 224,87 | 74056,13 |
| | 50_T700_T_780_6 | 50,21 | 49,85 | 52,65 | 53,02 | 226,62 | 74989,16 |
| P | 50_T700_P_780_1 | 50,42 | 50,19 | 51,55 | 51,51 | 97,98 | 31756,31 |
| | 50_T700_P_780_2 | 50,4 | 50,48 | 51,45 | 51,48 | 82,04 | 26625,28 |
| | 50_T700_P_780_3 | 50,53 | 50,36 | 51,49 | 51,42 | 80,83 | 26231,70 |
| | 50_T700_P_780_4 | 50,2 | 50,53 | 51,79 | 51,19 | 90,00 | 29180,48 |
| | 50_T700_P_780_5 | 49,95 | 50,06 | 51,57 | 51,93 | 139,46 | 45136,75 |
| | 50_T700_P_780_6 | 50,15 | 50,24 | 51,22 | 51,52 | 93,73 | 30218,17 |
| N1 | 50_T700_N1_780_1 | 50,45 | 50,39 | 51,31 | 51,38 | 73,93 | 23928,35 |
| | 50_T700_N1_780_2 | 50,13 | 50,22 | 51,39 | 51,36 | 95,71 | 30847,61 |
| | 50_T700_N1_780_3 | 50,56 | 50,36 | 51,58 | 51,43 | 83,69 | 27192,88 |
| | 50_T700_N1_780_4 | 50,34 | 50,22 | 51,35 | 51,53 | 92,67 | 29969,08 |
| | 50_T700_N1_780_5 | 50,12 | 49,95 | 51,258 | 51,63 | 112,30 | 36146,24 |
| | 50_T700_N1_780_6 | 50,29 | 50,37 | 51,56 | 51,65 | 102,08 | 33150,34 |
| N2 | 50_T700_N2_780_1 | 50,24 | 50,1 | 51,49 | 51,51 | 106,20 | 34311,87 |
| | 50_T700_N2_780_2 | 50,41 | 50,2 | 51,6 | 51,47 | 98,38 | 31890,66 |
| | 50_T700_N2_780_3 | 49,91 | 50,04 | 51,29 | 51,44 | 110,63 | 35512,32 |
| | 50_T700_N2_780_4 | 50 | 50,33 | 51,27 | 51,44 | 94,88 | 30563,38 |
| | 50_T700_N2_780_5 | 50,42 | 50,3 | 51,82 | 51,77 | 115,13 | 37554,02 |
| | 50_T700_N2_780_6 | 50,29 | 50,02 | 51,59 | 51,62 | 115,89 | 37508,30 |

Příloha 5 Seznam vzorků z kompozitu UMS40/epoxid o délce 780 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_UMS40_T_780_1 | 49,85 | 50,09 | 52,84 | 52,83 | 231,33 | 76461,78 |
| | 50_UMS40_T_780_2 | 50,18 | 50,11 | 52,63 | 52,8 | 207,62 | 68688,43 |
| | 50_UMS40_T_780_3 | 50,03 | 50,21 | 52,61 | 52,69 | 204,21 | 67440,79 |
| | 50_UMS40_T_780_4 | 49,99 | 49,96 | 52,39 | 52,36 | 192,93 | 63190,74 |
| | 50_UMS40_T_780_5 | 50,06 | 50,29 | 52,67 | 52,75 | 204,84 | 67801,24 |
| | 50_UMS40_T_780_6 | 50,19 | 50,1 | 52,81 | 52,76 | 213,42 | 70705,85 |
| P | 50_UMS40_P_780_1 | 50,76 | 50,73 | 51,69 | 51,78 | 119,34 | 26153,69 |
| | 50_UMS40_P_780_2 | 50,84 | 50,79 | 51,53 | 51,58 | 129,91 | 19485,54 |
| | 50_UMS40_P_780_3 | 50,86 | 51,01 | 51,51 | 51,62 | 148,72 | 16652,08 |
| | 50_UMS40_P_780_4 | 50,81 | 50,84 | 51,83 | 51,88 | 132,26 | 27370,23 |
| | 50_UMS40_P_780_5 | 50,85 | 0,81 | 51,67 | 51,7 | 132,61 | 22609,89 |
| | - | - | - | - | - | - | - |
| N1 | 50_UMS40_N1_780_1 | 50,01 | 49,96 | 51,62 | 51,7 | 133,72 | 43184,78 |
| | 50_UMS40_N1_780_2 | 49,88 | 50,03 | 51,85 | 52,07 | 160,49 | 52111,87 |
| | 50_UMS40_N1_780_3 | 50,1 | 50,13 | 52,08 | 51,93 | 151,59 | 49417,74 |
| | 50_UMS40_N1_780_4 | 49,88 | 49,98 | 51,98 | 51,95 | 162,86 | 52861,09 |
| | 50_UMS40_N1_780_5 | 50,33 | 50,29 | 51,59 | 52,17 | 126,01 | 41130,81 |
| | 50_UMS40_N1_780_6 | 50,01 | 50,18 | 52,03 | 51,76 | 144,18 | 46883,54 |
| N2 | 50_UMS40_N2_780_1 | 50,35 | 50,32 | 51,86 | 52,1 | 132,19 | 43254,97 |
| | 50_UMS40_N2_780_2 | 50,32 | 50,14 | 51,81 | 52,13 | 139,67 | 45600,30 |
| | 50_UMS40_N2_780_3 | 49,95 | 50,05 | 51,62 | 51,63 | 129,70 | 41870,29 |
| | 50_UMS40_N2_780_4 | 50,15 | 50,14 | 51,52 | 51,72 | 117,89 | 38160,89 |
| | 50_UMS40_N2_780_5 | 50,22 | 50,21 | 51,75 | 51,88 | 128,21 | 41720,58 |
| | 50_UMS40_N2_780_6 | 50,26 | 50,12 | 51,93 | 51,29 | 113,53 | 36775,29 |

Příloha 6 Seznam vzorků z kompozitu XN60/epoxid o délce 780 mm

| Skladba | Označení | d_i | d_i | d_e | d_e | A | J |
|-----------|------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| | | [mm] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm ²] | [mm ⁴] |
| T | 50_XN60_T_780_1 | 49,74 | 49,83 | 52,95 | 53,09 | 261,20 | 86354,85 |
| | 50_XN60_T_780_2 | 49,99 | 50,23 | 53,24 | 53,41 | 261,18 | 87406,31 |
| | 50_XN60_T_780_3 | 50,19 | 50,11 | 53,37 | 52,9 | 242,14 | 80790,18 |
| | 50_XN60_T_780_4 | 49,91 | 50,07 | 53,28 | 53,47 | 274,80 | 91851,15 |
| | 50_XN60_T_780_5 | 49,85 | 49,92 | 53,03 | 53,37 | 268,39 | 89219,29 |
| | 50_XN60_T_780_6 | 49,91 | 49,91 | 53,1 | 52,83 | 246,84 | 81707,79 |
| P | 50_XN60_P_780_1 | 50,05 | 50,11 | 52,35 | 52,29 | 180,15 | 59060,29 |
| | 50_XN60_P_780_2 | 50,16 | 49,85 | 52,31 | 52,3 | 184,81 | 60484,13 |
| | 50_XN60_P_780_3 | 50,4 | 50,16 | 52,15 | 51,96 | 142,66 | 46702,65 |
| | 50_XN60_P_780_4 | 50,31 | 50,08 | 52,02 | 52,36 | 160,42 | 52572,26 |
| | 50_XN60_P_780_5 | 50,08 | 50,33 | 52,36 | 52,25 | 169,07 | 55544,38 |
| | 50_XN60_P_780_6 | 50,1 | 49,98 | 51,81 | 52,07 | 152,18 | 49475,39 |
| N1 | 50_XN60_N1_780_1 | 50,22 | 50,2 | 52,77 | 52,91 | 212,86 | 70684,21 |
| | 50_XN60_N1_780_2 | 50,23 | 50,22 | 52,27 | 52,33 | 167,09 | 54906,68 |
| | 50_XN60_N1_780_3 | 50,19 | 50,04 | 52,5 | 53,25 | 223,25 | 74053,56 |
| | 50_XN60_N1_780_4 | 50,24 | 50,3 | 52,58 | 52,65 | 189,49 | 62714 |
| | 50_XN60_N1_780_5 | 50,26 | 50,13 | 52,65 | 52,74 | 202,02 | 66873,76 |
| | 50_XN60_N1_780_6 | 50,18 | 50,21 | 52,3 | 52,72 | 186,74 | 61586,6 |
| N2 | 50_XN60_N2_780_1 | 50,01 | 49,83 | 52,18 | 52,03 | 175,08 | 56978,41 |
| | 50_XN60_N2_780_2 | 50,24 | 50,19 | 52,66 | 52,45 | 188,87 | 62370,6 |
| | 50_XN60_N2_780_3 | 50,29 | 50,12 | 51,94 | 51,9 | 137,56 | 44845,89 |
| | 50_XN60_N2_780_4 | 49,9 | 50,1 | 52,06 | 52,44 | 180,69 | 59063,97 |
| | 50_XN60_N2_780_5 | 49,78 | 49,73 | 52,22 | 52,29 | 200,30 | 65173,18 |
| | 50_XN60_N2_780_6 | 50,35 | 50,24 | 52,46 | 53,03 | 198,27 | 65821,69 |

Příloha 7 Experimentální výsledky pro vzorky ID50_500

| ID50_500 | Timošenkova teorie | | Euler-Bernoulliho teorie | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|--------------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| | E_{eq} [MPa] | G_{eq} [MPa] | $E_{eq1/2}$ [MPa] | $E_{eq1/4}$ [MPa] | Průměr [MPa] | Odchylka [%] |
| 50_T700_N1_780_1 | 12534 | -612 | 24883 | 19613 | 22248 | 26,87 |
| 50_T700_N1_780_2 | 10734 | -437 | 26674 | 18985 | 22829 | 40,50 |
| 50_T700_N1_780_3 | 12355 | -543 | 27464 | 20595 | 24030 | 33,35 |
| 50_T700_N1_780_4 | 10307 | -429 | 24786 | 17921 | 21353 | 38,31 |
| 50_T700_N1_780_5 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_N2_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_N2_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_N2_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_N2_780_4 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_N2_780_5 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_P_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_P_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_P_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_P_780_4 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_P_780_5 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_T_780_1 | 27776 | -1178 | 67135 | 48422 | 57779 | 38,65 |
| 50_T700_T_780_2 | 28716 | -1337 | 61530 | 46910 | 54220 | 31,17 |
| 50_T700_T_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_T_780_4 | - | - | - | - | - | - |
| 50_T700_T_780_5 | 26745 | -1158 | 63078 | 46026 | 54552 | 37,05 |
| 50_UMS40_N1_780_1 | 26967 | -1255 | 57778 | 44051 | 50914 | 31,16 |
| 50_UMS40_N1_780_2 | 13524 | -785 | 23436 | 19532 | 21484 | 19,99 |
| 50_UMS40_N1_780_3 | 14454 | -823 | 25398 | 21051 | 23224 | 20,65 |
| 50_UMS40_N1_780_4 | 16020 | -931 | 27734 | 23122 | 25428 | 19,94 |
| 50_UMS40_N1_780_5 | 14399 | -746 | 27170 | 21878 | 24524 | 24,19 |
| 50_UMS40_N2_780_1 | 12813 | -647 | 24766 | 19743 | 22254 | 25,44 |
| 50_UMS40_N2_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_N2_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_N2_780_4 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_N2_780_5 | - | - | - | - | - | - |

| ID50_500 | Timošenkova teorie | | Euler-Bernoulliho teorie | | | |
|------------------|--------------------|----------------|--------------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| | Eeq [MPa] | Geq [MPa] | $Eeq_{1/2}$ [MPa] | $Eeq_{1/4}$ [MPa] | Průměr [MPa] | Odchylka [%] |
| 50_UMS40_P_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_P_780_2 | 28443 | -1458 | 54030 | 43386 | 48708 | 24,53 |
| 50_UMS40_P_780_3 | 45069 | -2890 | 72455 | 62155 | 67305 | 16,57 |
| 50_UMS40_P_780_4 | 45788 | -3093 | 71461 | 61983 | 66722 | 15,29 |
| 50_UMS40_P_780_5 | 32805 | -2579 | 47485 | 42320 | 44903 | 12,20 |
| 50_UMS40_T_780_1 | 49323 | -2518 | 93768 | 75270 | 84519 | 24,58 |
| 50_UMS40_T_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_T_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_T_780_4 | 55254 | -2918 | 104294 | 83969 | 94131 | 24,21 |
| 50_UMS40_T_780_5 | 38357 | -1652 | 89773 | 65739 | 77756 | 36,56 |
| 50_XN60_N1_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N1_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N1_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N1_780_4 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N1_780_5 | 11906 | -663 | 21624 | 17687 | 19656 | 22,26 |
| 50_XN60_N2_780_1 | 16953 | -1339 | 24763 | 21999 | 23381 | 12,56 |
| 50_XN60_N2_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N2_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_N2_780_4 | 43043 | -3017 | 66339 | 57806 | 62072 | 14,76 |
| 50_XN60_N2_780_5 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_P_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_P_780_2 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_P_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_P_780_4 | 37601 | -1690 | 83227 | 62533 | 72880 | 33,09 |
| 50_XN60_P_780_5 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_T_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_T_780_2 | 55742 | -4243 | 83158 | 73323 | 78240 | 13,41 |
| 50_XN60_T_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_XN60_T_780_4 | 27666 | -1280 | 60158 | 45564 | 52861 | 32,03 |
| 50_XN60_T_780_5 | - | - | - | - | - | - |

Příloha 8 Experimentální výsledky pro vzorky ID50_780

| ID50_780 | Timošenkova teorie | | Euler-Bernoulliho teorie | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|--------------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| | E_{eq} [MPa] | G_{eq} [MPa] | $E_{eq1/2}$ [MPa] | $E_{eq1/4}$ [MPa] | Průměr [MPa] | Odchylka [%] |
| 50_T700_N1_780_1 | 21283 | -769 | 26314 | 24720 | 25517 | 6,45 |
| 50_T700_N1_780_2 | 16874 | -732 | 20052 | 19072 | 19562 | 5,14 |
| 50_T700_N1_780_3 | 19817 | -1136 | 22544 | 21729 | 22136 | 3,75 |
| 50_T700_N1_780_4 | 18516 | -855 | 21767 | 20772 | 21269 | 4,79 |
| 50_T700_N1_780_5 | 14764 | -629 | 17603 | 16725 | 17164 | 5,24 |
| 50_T700_N2_780_1 | 34391 | -624 | 55468 | 47524 | 51496 | 16,71 |
| 50_T700_N2_780_2 | 39739 | -902 | 57146 | 51048 | 54097 | 11,95 |
| 50_T700_N2_780_3 | 31411 | -545 | 51922 | 44073 | 47997 | 17,81 |
| 50_T700_N2_780_4 | 41044 | -745 | 66061 | 56645 | 61353 | 16,62 |
| 50_T700_N2_780_5 | 33715 | -635 | 53482 | 46109 | 49795 | 15,99 |
| 50_T700_P_780_1 | 70231 | -1404 | 107367 | 93835 | 100601 | 14,42 |
| 50_T700_P_780_2 | 62364 | -852 | 126501 | 98792 | 112646 | 28,05 |
| 50_T700_P_780_3 | 98738 | -1744 | 162140 | 137977 | 150058 | 17,51 |
| 50_T700_P_780_4 | 59736 | -764 | 130166 | 98495 | 114331 | 32,16 |
| 50_T700_P_780_5 | 39888 | -553 | 79411 | 62517 | 70964 | 27,02 |
| 50_T700_T_780_1 | 43575 | -1013 | 62677 | 55983 | 59330 | 11,96 |
| 50_T700_T_780_2 | 41137 | -1330 | 52689 | 48941 | 50815 | 7,66 |
| 50_T700_T_780_3 | 50050 | -1648 | 63649 | 59258 | 61453 | 7,41 |
| 50_T700_T_780_4 | 44199 | -1461 | 56245 | 52353 | 54299 | 7,43 |
| 50_T700_T_780_5 | 43320 | -1455 | 54779 | 51093 | 52936 | 7,21 |
| 50_UMS40_N1_780_1 | 21181 | -1436 | 23576 | 22870 | 23223 | 3,08 |
| 50_UMS40_N1_780_2 | 17249 | -1432 | 18819 | 18363 | 18591 | 2,48 |
| 50_UMS40_N1_780_3 | 18638 | -1472 | 20437 | 19913 | 20175 | 2,63 |
| 50_UMS40_N1_780_4 | 18319 | -2064 | 19518 | 19176 | 19347 | 1,79 |
| 50_UMS40_N1_780_5 | 24606 | -7260 | 25201 | 25036 | 25118 | 0,66 |
| 50_UMS40_N2_780_1 | 51888 | -1072 | 78376 | 68798 | 73587 | 13,92 |
| 50_UMS40_N2_780_2 | 54279 | -1376 | 74834 | 67828 | 71331 | 10,33 |
| 50_UMS40_N2_780_3 | 66499 | -1713 | 90760 | 82547 | 86653 | 9,95 |
| 50_UMS40_N2_780_4 | 69157 | -1502 | 101407 | 89965 | 95686 | 12,72 |
| 50_UMS40_N2_780_5 | 60011 | -1366 | 86357 | 77123 | 81740 | 11,97 |

| ID50_780 | Timošenkova teorie | | Euler-Bernoulliho teorie | | | |
|------------------|--------------------|-------------------|--------------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| | E_{eq} [MPa] | G_{eq} [MPa] | $E_{eq1/2}$ [MPa] | $E_{eq1/4}$ [MPa] | Průměr [MPa] | Odchylka [%] |
| 50_UMS40_P_780_1 | 52140 | -945 | 85047 | 72558 | 78802 | 17,21 |
| 50_UMS40_P_780_2 | 50441 | -2032 | 61067 | 57749 | 59408 | 5,75 |
| 50_UMS40_P_780_3 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_P_780_4 | 47327 | -891 | 75404 | 64903 | 70153 | 16,18 |
| 50_UMS40_P_780_5 | 38675 | -503 | 83943 | 63631 | 73787 | 31,92 |
| 50_UMS40_T_780_1 | - | - | - | - | - | - |
| 50_UMS40_T_780_2 | 94778 | -11468 | 100649 | 98977 | 99813 | 1,69 |
| 50_UMS40_T_780_3 | 57071 | -1013 | 94620 | 80224 | 87422 | 17,94 |
| 50_UMS40_T_780_4 | 86180 | -2257 | 117544 | 106931 | 112237 | 9,93 |
| 50_UMS40_T_780_5 | 84314 | -2412 | 111950 | 102763 | 107356 | 8,94 |
| 50_XN60_N1_780_1 | 23112 | -2031 | 25139 | 24551 | 24845 | 2,39 |
| 50_XN60_N1_780_2 | 30099 | -2501 | 32872 | 32066 | 32469 | 2,51 |
| 50_XN60_N1_780_3 | 22316 | -1871 | 24373 | 23775 | 24074 | 2,51 |
| 50_XN60_N1_780_4 | 31435 | -2604 | 34332 | 33490 | 33911 | 2,51 |
| 50_XN60_N1_780_5 | 29753 | -2471 | 32495 | 31698 | 32097 | 2,51 |
| 50_XN60_N2_780_1 | 47758 | -1347 | 63354 | 58173 | 60764 | 8,91 |
| 50_XN60_N2_780_2 | 46531 | -782 | 80143 | 66953 | 73548 | 19,70 |
| 50_XN60_N2_780_3 | 69744 | -1093 | 125365 | 102969 | 114167 | 21,75 |
| 50_XN60_N2_780_4 | 61905 | -903 | 118593 | 94893 | 106743 | 24,97 |
| 50_XN60_N2_780_5 | 43794 | -504 | 110494 | 78067 | 94281 | 41,54 |
| 50_XN60_P_780_1 | 46931 | -689 | 89631 | 71812 | 80722 | 24,81 |
| 50_XN60_P_780_2 | 43467 | -807 | 69672 | 59834 | 64753 | 16,44 |
| 50_XN60_P_780_3 | 54441 | -719 | 115537 | 88462 | 102000 | 30,61 |
| 50_XN60_P_780_4 | 47249 | -730 | 86298 | 70425 | 78362 | 22,54 |
| 50_XN60_P_780_5 | 62739 | -1042 | 108551 | 90524 | 99538 | 19,91 |
| 50_XN60_T_780_1 | 66472 | -1115 | 114736 | 95771 | 105253 | 19,80 |
| 50_XN60_T_780_2 | 29575 | -337 | 79105 | 54302 | 66704 | 45,67 |
| 50_XN60_T_780_3 | 81955 | -1644 | 127124 | 110532 | 118828 | 15,01 |
| 50_XN60_T_780_4 | 65623 | -1009 | 122419 | 99041 | 110730 | 23,60 |
| 50_XN60_T_780_5 | 81560 | -1932 | 116423 | 104267 | 110345 | 11,66 |

Příloha 9 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené ohybem

| L/D | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|-------|----------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,001468 | 0,001513 | 0,001536 | 0,001547 | 0,00156 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,93E+4 | 3,97E+4 | 3,99E+4 | 4,00E+4 | 4,01E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,34E+4 | 2,33E+4 | 2,33E+4 | 2,32E+4 | 2,32E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,004822 | 0,005 | 0,005103 | 0,005152 | 0,005202 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,55E+4 | 5,60E+4 | 5,63E+4 | 5,64E+4 | 5,65E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,92E+4 | 1,91E+4 | 1,90E+4 | 1,90E+4 | 1,90E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,02079 | 0,02175 | 0,02225 | 0,02251 | 0,02277 |
| | E_{eq} [MPa] | 7,24E+4 | 7,28E+4 | 7,30E+4 | 7,32E+4 | 7,33E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,38E+4 | 1,37E+4 | 1,36E+4 | 1,36E+4 | 1,35E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,05489 | 0,05764 | 0,0591 | 0,0598 | 0,0606 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,07E+4 | 8,11E+4 | 8,12E+4 | 8,13E+4 | 8,14E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,08E+4 | 1,06E+4 | 1,05E+4 | 1,05E+4 | 1,05E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,1141 | 0,12 | 0,1232 | 0,1248 | 0,1265 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,56E+4 | 8,59E+4 | 8,61E+4 | 8,62E+4 | 8,62E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 8,80E+3 | 8,68E+3 | 8,61E+3 | 5,58E+3 | 8,55E+3 |
| 10 | v [mm] | 0,2054 | 0,2165 | 0,2223 | 0,2253 | 0,2283 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,89E+4 | 8,91E+4 | 8,93E+4 | 8,93E+4 | 8,94E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 7,45E+3 | 7,34E+3 | 7,28E+3 | 7,26E+3 | 7,23E+3 |
| 15 | v [mm] | 0,62 | 0,6548 | 0,6731 | 0,6825 | 0,692 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,36E+4 | 9,38E+4 | 9,39E+4 | 9,39E+4 | 9,40E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 5,39E+3 | 5,30E+3 | 5,26E+3 | 5,24E+3 | 5,21E+3 |
| 20 | v [mm] | 1,388 | 1,4677 | 1,509 | 1,5308 | 1,5525 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,61E+4 | 9,62E+4 | 9,64E+4 | 9,64E+4 | 9,64E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 4,22E+3 | 4,15E+3 | 4,12E+3 | 4,10E+3 | 4,08E+3 |
| 30 | v [mm] | 4,4275 | 4,6878 | 4,8247 | 4,8948 | 4,9661 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 40 | v [mm] | 10,263 | 10,875 | 11,198 | 11,363 | 11,53 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 50 | v [mm] | 19,835 | 21,028 | 21,65 | 21,976 | 22,303 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |

Příloha 10 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $\alpha=1$

| $\alpha = 1$ | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|--------------|-----------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| L/D | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0016 |
| | φ [rad] | 4,33E-5 | 1,66E-5 | 7,64E-6 | 4,37E-6 | 1,97E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,89E+4 | 3,95E+4 | 3,98E+4 | 4,00E+4 | 4,01E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,35E+4 | 2,33E+4 | 2,33E+4 | 2,32E+4 | 2,32E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,0048 | 0,005 | 0,0051 | 0,0052 | 0,0052 |
| | φ [rad] | 1,05E-5 | 4,05E-5 | 1,87E-5 | 1,07E-5 | 4,83E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,50E+4 | 5,58E+4 | 5,62E+4 | 5,63E+4 | 5,65E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,94E+4 | 1,92E+4 | 1,91E+4 | 1,90E+4 | 1,90E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,0208 | 0,0217 | 0,0223 | 0,0225 | 0,0228 |
| | φ [rad] | 2,91E-4 | 1,13E-4 | 5,22E-5 | 2,99E-5 | 1,35E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 7,19E+4 | 7,27E+4 | 7,30E+4 | 7,31E+4 | 7,32E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,40E+4 | 1,37E+4 | 1,36E+4 | 1,36E+4 | 1,35E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,0549 | 0,0576 | 0,0591 | 0,0598 | 0,0606 |
| | φ [rad] | 5,59E-4 | 2,18E-4 | 1,01E-4 | 5,79E-5 | 2,62E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,03E+4 | 8,09E+4 | 8,12E+4 | 8,13E+4 | 8,14E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,09E+4 | 1,07E+4 | 1,06E+4 | 1,05E+4 | 1,05E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,1141 | 0,1201 | 0,1232 | 0,1248 | 0,1265 |
| | φ [rad] | 9,10E-4 | 3,56E-4 | 1,65E-4 | 9,44E-5 | 4,28E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,53E+4 | 8,58E+4 | 8,60E+4 | 8,61E+4 | 8,62E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 8,93E+3 | 8,72E+3 | 8,64E+3 | 8,60E+3 | 8,56E+3 |
| 10 | v [mm] | 0,2054 | 0,2165 | 0,2223 | 0,2253 | 0,2283 |
| | φ [rad] | 1,30E-3 | 5,26E-4 | 2,43E-4 | 1,40E-4 | 6,33E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,86E+4 | 8,90E+4 | 8,92E+4 | 8,93E+4 | 8,94E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 7,57E+3 | 7,38E+3 | 7,30E+3 | 7,27E+3 | 7,23E+3 |
| 15 | v [mm] | 0,62 | 0,6548 | 0,6731 | 0,6825 | 0,692 |
| | φ [rad] | 2,80E-3 | 1,10E-3 | 5,05E-4 | 2,90E-4 | 1,32E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,34E+4 | 9,37E+4 | 9,38E+4 | 9,39E+4 | 9,40E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 5,48E+3 | 5,34E+3 | 5,27E+3 | 5,25E+3 | 5,22E+3 |
| 20 | v [mm] | 1,3882 | 1,4678 | 1,5094 | 1,5308 | 1,5526 |
| | φ [rad] | 4,70E-3 | 1,80E-3 | 8,61E-4 | 4,94E-4 | 2,24E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,60E+4 | 9,60E+4 | 9,63E+4 | 9,64E+4 | 9,64E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 4,30E+3 | 4,30E+3 | 4,13E+3 | 4,11E+3 | 4,08E+3 |
| 30 | v [mm] | 4,4275 | 4,6879 | 4,8247 | 4,8948 | 4,9662 |
| | φ [rad] | 9,00E-3 | 3,40E-3 | 1,60E-3 | 8,98E-4 | 4,05E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 40 | v [mm] | 10,2631 | 10,8756 | 11,1977 | 11,3628 | 11,5306 |
| | φ [rad] | 1,20E-2 | 4,60E-3 | 2,10E-3 | 1,20E-3 | 5,40E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 50 | v [mm] | 19,8354 | 21,0278 | 21,6547 | 21,9761 | 22,3028 |
| | φ [rad] | 1,50E-2 | 5,70E-3 | 2,60E-3 | 1,50E-3 | 6,75E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |

Příloha 11 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $\alpha=10$

| $\alpha = 10$ | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|---------------|-----------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| L/D | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0016 |
| | φ [rad] | 4,23E-5 | 1,64E-5 | 7,59E-5 | 4,35E-6 | 1,97E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,61E+4 | 3,83E+4 | 3,92E+4 | 3,96E+4 | 3,99E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,40E+4 | 2,36E+4 | 2,34E+4 | 2,33E+4 | 2,32E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,0049 | 0,005 | 0,0051 | 0,0052 | 0,0052 |
| | φ [rad] | 9,94E-4 | 3,96E-5 | 1,84E-5 | 1,06E-5 | 4,81E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,13E+4 | 5,42E+4 | 5,54E+4 | 5,59E+4 | 5,63E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,04E+4 | 1,96E+4 | 1,93E+4 | 1,91E+4 | 1,90E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,0209 | 0,0218 | 0,0223 | 0,0225 | 0,0228 |
| | φ [rad] | 2,68E-4 | 1,09E-4 | 5,11E-5 | 2,96E-5 | 1,35E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 6,85E+4 | 7,12E+4 | 7,21E+4 | 7,27E+4 | 7,31E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,52E+4 | 1,42E+4 | 1,39E+4 | 1,37E+4 | 1,36E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,0552 | 0,0577 | 0,0591 | 0,0598 | 0,0606 |
| | φ [rad] | 5,08E-4 | 2,09E-4 | 9,89E-5 | 5,72E-5 | 2,61E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 7,74E+4 | 7,97E+4 | 8,06E+4 | 8,10E+4 | 8,13E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,20E+4 | 1,11E+4 | 1,08E+4 | 1,06E+4 | 1,05E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,1146 | 0,1202 | 0,1233 | 0,1248 | 0,1265 |
| | φ [rad] | 8,19E-4 | 3,40E-4 | 1,61E-4 | 9,33E-5 | 4,25E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,28E+4 | 8,48E+4 | 8,56E+4 | 8,59E+4 | 8,61E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 9,92E+3 | 9,13E+3 | 8,82E+3 | 8,70E+3 | 8,61E+3 |
| 10 | v [mm] | 0,2062 | 0,2166 | 0,2244 | 0,2253 | 0,2283 |
| | φ [rad] | 1,20E-3 | 5,01E-3 | 2,38E-4 | 1,38E-4 | 6,29E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,64E+4 | 8,82E+4 | 8,88E+4 | 8,91E+4 | 8,93E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 8,46E+3 | 7,74E+3 | 7,47E+3 | 7,36E+3 | 7,28E+3 |
| 15 | v [mm] | 0,6217 | 0,6551 | 0,6732 | 0,6825 | 0,692 |
| | φ [rad] | 2,50E-3 | 1,00E-3 | 4,93E-4 | 2,86E-4 | 1,31E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,18E+4 | 9,31E+4 | 9,35E+4 | 9,37E+4 | 9,39E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 6,19E+3 | 5,62E+3 | 5,41E+3 | 5,32E+3 | 5,25E+3 |
| 20 | v [mm] | 1,3911 | 1,4682 | 1,5095 | 1,5309 | 1,5526 |
| | φ [rad] | 4,20E-3 | 1,80E-3 | 8,39E-4 | 4,87E-4 | 2,23E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,47E+4 | 9,57E+4 | 9,61E+4 | 9,62E+4 | 9,64E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 4,88E+3 | 4,41E+3 | 4,24E+3 | 4,17E+3 | 4,11E+3 |
| 30 | v [mm] | 4,4286 | 4,6879 | 4,8247 | 4,8948 | 4,9662 |
| | φ [rad] | 8,90E-3 | 3,40E-3 | 1,60E-3 | 8,98E-4 | 4,05E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,78E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,43E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 40 | v [mm] | 10,2631 | 10,8756 | 11,1977 | 11,3628 | 11,5306 |
| | φ [rad] | 1,20E-2 | 4,60E-3 | 2,10E-3 | 1,20E-3 | 5,40E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 50 | v [mm] | 19,8354 | 21,0278 | 21,6547 | 21,9761 | 22,3028 |
| | φ [rad] | 1,50E-2 | 5,70E-3 | 2,60E-3 | 1,50E-3 | 6,75E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |

Příloha 12 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $\alpha=100$

| $\alpha = 100$ | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|----------------|-----------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| L/D | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0016 | 0,0016 |
| | φ [rad] | 4,01E-5 | 1,57E-5 | 7,33E-6 | 4,24E-6 | 1,94E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,76E+4 | 3,18E+4 | 3,50E+4 | 3,68E+4 | 3,85E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,53E+4 | 2,48E+4 | 2,42E+4 | 2,39E+4 | 2,36E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,0054 | 0,0052 | 0,0052 | 0,0052 | 0,0052 |
| | φ [rad] | 8,52E-5 | 3,51E-5 | 1,70E-5 | 1,01E-5 | 4,68E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,71E+4 | 4,48E+4 | 4,98E+4 | 5,23E+4 | 5,45E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,38E+4 | 2,21E+4 | 2,08E+4 | 2,02E+4 | 1,95E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,024 | 0,0227 | 0,0226 | 0,0226 | 0,0228 |
| | φ [rad] | 1,99E-4 | 8,96E-5 | 4,54E-5 | 2,73E-5 | 1,29E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,12E+4 | 6,19E+4 | 6,70E+4 | 6,94E+4 | 7,15E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,05E+4 | 1,73E+4 | 1,57E+4 | 1,48E+4 | 1,41E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,0613 | 0,0597 | 0,0598 | 0,0601 | 0,0606 |
| | φ [rad] | 3,58E-4 | 1,65E-4 | 8,55E-5 | 5,20E-5 | 2,49E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 6,28E+4 | 7,16E+4 | 7,62E+4 | 7,82E+4 | 7,99E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,70E+4 | 1,41E+4 | 1,25E+4 | 1,17E+4 | 1,10E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,1256 | 0,1238 | 0,1244 | 0,1253 | 0,1266 |
| | φ [rad] | 5,52E-4 | 2,62E-4 | 1,37E-4 | 8,41E-5 | 4,04E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 6,98E+4 | 7,78E+4 | 8,17E+4 | 8,35E+4 | 8,50E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,47E+4 | 1,19E+4 | 1,04E+4 | 9,65E+3 | 9,06E+3 |
| 10 | v [mm] | 0,2233 | 0,2223 | 0,2242 | 0,2261 | 0,2285 |
| | φ [rad] | 7,83E-4 | 3,79E-4 | 2,01E-4 | 1,23E-4 | 5,95E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 7,48E+4 | 8,20E+4 | 8,55E+4 | 8,70E+4 | 8,83E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,30E+4 | 1,03E+4 | 8,85E+3 | 8,22E+3 | 7,69E+3 |
| 15 | v [mm] | 0,6602 | 0,6679 | 0,6773 | 0,6841 | 0,6924 |
| | φ [rad] | 1,50E-3 | 7,61E-4 | 4,10E-4 | 2,54E-4 | 1,23E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,27E+4 | 8,84E+4 | 9,11E+4 | 9,22E+4 | 9,32E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 9,99E+3 | 7,65E+3 | 6,50E+3 | 5,99E+3 | 5,57E+3 |
| 20 | v [mm] | 1,4595 | 1,4908 | 1,5169 | 1,5338 | 1,5533 |
| | φ [rad] | 2,50E-3 | 1,30E-3 | 6,91E-4 | 4,30E-4 | 2,09E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,73E+4 | 9,20E+4 | 9,41E+4 | 9,51E+4 | 9,58E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 8,12E+3 | 6,10E+3 | 5,14E+3 | 4,72E+3 | 4,37E+3 |
| 30 | v [mm] | 4,5821 | 4,7325 | 4,8331 | 4,8948 | 4,9662 |
| | φ [rad] | 5,20E-3 | 2,70E-3 | 1,50E-3 | 8,98E-4 | 4,05E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,24E+4 | 9,58E+4 | 9,74E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 5,92E+3 | 4,35E+3 | 3,62E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 40 | v [mm] | 10,465 | 10,8756 | 11,1973 | 11,3628 | 11,5306 |
| | φ [rad] | 8,70E-3 | 4,60E-3 | 2,10E-3 | 1,20E-3 | 5,40E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,52E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 4,66E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |
| 50 | v [mm] | 19,9823 | 21,0278 | 21,6547 | 21,9761 | 22,3028 |
| | φ [rad] | 1,32E-2 | 5,70E-3 | 2,60E-3 | 1,50E-3 | 6,75E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 9,69E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 3,84E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 | 3,39E+3 |

Příloha 13 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $\alpha=1\ 000$

| $\alpha = 1\ 000$ | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|-------------------|-----------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| L/D | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,0016 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 |
| | φ [rad] | 3,97E-5 | 1,52E-5 | 6,98E-6 | 4,01E-6 | 1,84E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,32E+4 | 2,44E+4 | 2,62E+4 | 2,81E+4 | 3,14E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,54E+4 | 2,53E+4 | 2,48E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,0068 | 0,0065 | 0,0061 | 0,0058 | 0,0055 |
| | φ [rad] | 7,97E-5 | 3,08E-5 | 1,45E-5 | 8,58E-6 | 4,11E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,52E+4 | 2,89E+4 | 3,37E+4 | 3,80E+4 | 4,42E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,55E+4 | 2,52E+4 | 2,45E+4 | 2,37E+4 | 2,23E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,0352 | 0,0305 | 0,0271 | 0,0254 | 0,0239 |
| | φ [rad] | 1,64E-4 | 6,66E-5 | 3,33E-5 | 2,06E-5 | 1,05E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,13E+4 | 3,96E+4 | 4,79E+4 | 5,37E+4 | 6,13E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,49E+4 | 2,33E+4 | 2,13E+4 | 1,87E+4 | 1,75E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,0932 | 0,0789 | 0,0705 | 0,0665 | 0,0632 |
| | φ [rad] | 2,58E-4 | 1,10E-4 | 5,76E-5 | 3,66E-5 | 1,92E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,79E+4 | 4,88E+4 | 5,80E+4 | 6,40E+4 | 7,10E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,37E+4 | 2,11E+4 | 1,85E+4 | 1,66E+4 | 1,42E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,1864 | 0,1588 | 0,1436 | 0,1367 | 0,1312 |
| | φ [rad] | 3,64E-4 | 1,62E-4 | 8,74E-5 | 5,66E-5 | 3,04E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 4,40E+4 | 5,59E+4 | 6,52E+4 | 7,09E+4 | 7,73E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,23E+4 | 1,91E+4 | 1,63E+4 | 1,43E+4 | 1,21E+4 |
| 10 | v [mm] | 0,3214 | 0,2774 | 0,2543 | 0,2438 | 0,2357 |
| | φ [rad] | 4,84E-4 | 2,23E-4 | 1,23E-4 | 8,06E-5 | 4,39E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 4,93E+4 | 6,16E+4 | 7,05E+4 | 7,58E+4 | 8,15E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,10E+4 | 1,74E+4 | 1,45E+4 | 1,26E+4 | 1,04E+4 |
| 15 | v [mm] | 0,8866 | 0,7924 | 0,7449 | 0,7329 | 0,7084 |
| | φ [rad] | 8,43E-4 | 4,10E-4 | 2,35E-4 | 1,58E-4 | 8,81E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,94E+4 | 7,13E+4 | 7,91E+4 | 8,35E+4 | 8,80E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,81E+4 | 1,42E+4 | 1,14E+4 | 9,65E+3 | 7,80E+3 |
| 20 | v [mm] | 1,8642 | 1,712 | 1,6368 | 1,6044 | 1,5817 |
| | φ [rad] | 1,30E-3 | 6,49E-4 | 3,80E-4 | 2,59E-4 | 1,47E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 6,65E+4 | 7,75E+4 | 8,43E+4 | 8,80E+4 | 9,17E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,58E+4 | 1,20E+4 | 9,34E+3 | 7,83E+3 | 6,23E+3 |
| 30 | v [mm] | 5,493 | 5,2289 | 5,1021 | 5,051 | 5,022 |
| | φ [rad] | 2,40E-3 | 1,30E-3 | 7,72E-4 | 5,35E-4 | 3,09E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 7,57E+4 | 8,49E+4 | 9,01E+4 | 9,29E+4 | 9,56E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,26E+4 | 9,11E+3 | 6,90E+3 | 5,69E+3 | 4,44E+3 |
| 40 | v [mm] | 12,081 | 11,7553 | 11,6054 | 11,5532 | 11,5406 |
| | φ [rad] | 3,90E-3 | 2,10E-3 | 1,30E-3 | 9,09E-4 | 5,29E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,14E+4 | 8,91E+4 | 9,34E+4 | 9,56E+4 | 9,77E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,05E+4 | 7,35E+3 | 5,47E+3 | 4,47E+3 | 3,45E+3 |
| 50 | v [mm] | 22,505 | 22,2186 | 22,1018 | 22,0803 | 22,3028 |
| | φ [rad] | 5,70E-3 | 3,10E-3 | 2,00E-3 | 1,40E-3 | 6,75E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 8,52E+4 | 9,18E+4 | 9,54E+4 | 9,73E+4 | 9,79E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 8,98E+3 | 6,17E+3 | 4,54E+3 | 3,68E+3 | 3,39E+3 |

Příloha 14 Výsledky optimalizace pro nosníky s jedním optimalizovaným parametrem zatížené kombinací ohybu a krutu při $\alpha=10\ 000$

| $\alpha = 10\ 000$ | | Vnitřní průměr D [mm] | | | | |
|--------------------|-----------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| L/D | | 60 | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 1 | v [mm] | 0,0017 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0017 |
| | φ [rad] | 3,97E-5 | 1,52E-5 | 6,94E-6 | 3,96E-6 | 1,79E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,26E+4 | 2,27E+4 | 2,30E+4 | 2,33E+4 | 2,42E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,56E+4 |
| 2 | v [mm] | 0,0073 | 0,0076 | 0,0075 | 0,0074 | 0,0069 |
| | φ [rad] | 7,94E-5 | 3,03E-5 | 1,39E-5 | 7,96E-6 | 3,63E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,28E+4 | 2,33E+4 | 2,44E+4 | 2,55E+4 | 2,84E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,56E+4 | 2,55E+4 | 2,52E+4 |
| 4 | v [mm] | 0,0451 | 0,0446 | 0,0414 | 0,038 | 0,0329 |
| | φ [rad] | 1,59E-4 | 6,09E-5 | 2,82E-5 | 1,64E-5 | 7,79E-6 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,37E+4 | 2,55E+4 | 2,86E+4 | 3,20E+4 | 3,87E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,56E+4 | 2,55E+4 | 2,52E+4 | 2,47E+4 | 2,35E+4 |
| 6 | v [mm] | 0,1376 | 0,1281 | 0,1126 | 0,1004 | 0,0852 |
| | φ [rad] | 2,39E-4 | 9,24E-5 | 4,36E-5 | 2,60E-5 | 1,28E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,50E+4 | 2,86E+4 | 3,39E+4 | 3,90E+4 | 4,76E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,55E+4 | 2,52E+4 | 2,44E+4 | 2,35E+4 | 2,14E+4 |
| 8 | v [mm] | 0,3001 | 0,2659 | 0,2271 | 0,201 | 0,1714 |
| | φ [rad] | 3,20E-4 | 1,26E-4 | 6,07E-5 | 3,69E-5 | 1,88E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,67E+4 | 3,21E+4 | 3,91E+4 | 4,52E+4 | 5,47E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,54E+4 | 2,47E+4 | 2,34E+4 | 2,20E+4 | 1,95E+4 |
| 10 | v [mm] | 0,5419 | 0,4634 | 0,3915 | 0,3471 | 0,2991 |
| | φ [rad] | 4,03E-4 | 1,61E-4 | 7,95E-5 | 4,92E-5 | 2,57E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 2,87E+4 | 3,57E+4 | 4,39E+4 | 5,06E+4 | 6,04E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,52E+4 | 2,41E+4 | 2,23E+4 | 2,06E+4 | 1,78E+4 |
| 15 | v [mm] | 1,5298 | 1,2592 | 1,0682 | 0,9617 | 0,852 |
| | φ [rad] | 6,24E-4 | 2,61E-4 | 1,35E-4 | 8,61E-5 | 4,71E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,40E+4 | 4,39E+4 | 5,36E+4 | 6,07E+4 | 7,02E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,44E+4 | 2,23E+4 | 1,98E+4 | 1,77E+4 | 1,46E+4 |
| 20 | v [mm] | 3,1319 | 2,5722 | 2,2187 | 2,029 | 1,8369 |
| | φ [rad] | 8,68E-4 | 3,77E-4 | 2,02E-4 | 1,32E-4 | 7,42E-5 |
| | E_{eq} [MPa] | 3,92E+4 | 5,08E+4 | 6,09E+4 | 6,78E+4 | 7,65E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,34E+4 | 2,06E+4 | 1,76E+4 | 1,54E+4 | 1,23E+4 |
| 30 | v [mm] | 5,5625 | 7,2043 | 6,4171 | 6,006 | 5,5949 |
| | φ [rad] | 1,40E-3 | 6,61E-4 | 3,70E-4 | 2,49E-4 | 1,46E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 4,83E+4 | 6,10E+4 | 7,07E+4 | 7,68E+4 | 8,41E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 2,12E+4 | 1,76E+4 | 1,44E+4 | 1,22E+4 | 9,43E+3 |
| 40 | v [mm] | 17,6614 | 15,2506 | 13,9413 | 13,248 | 12,5572 |
| | φ [rad] | 2,10E-3 | 1,00E-3 | 5,84E-4 | 4,01E-4 | 2,40E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 5,54E+4 | 6,80E+4 | 7,69E+4 | 8,23E+4 | 8,84E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,93E+4 | 1,53E+4 | 1,22E+4 | 1,01E+4 | 7,63E+3 |
| 50 | v [mm] | 31,2927 | 27,7276 | 25,7468 | 24,7246 | 23,7082 |
| | φ [rad] | 2,90E-3 | 1,40E-3 | 8,43E-4 | 5,87E-4 | 3,57E-4 |
| | E_{eq} [MPa] | 6,10E+4 | 7,31E+4 | 8,13E+4 | 8,60E+4 | 9,13E+4 |
| | G_{eq} [MPa] | 1,76E+4 | 1,36E+4 | 1,05E+4 | 8,64E+3 | 6,41E+3 |