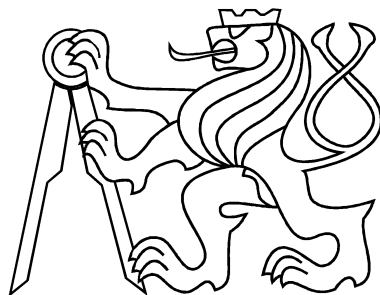


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jednorozměrný model průtoku radiálním
kompresorem s uvažováním vlivu ztrát

2020/2021

Bc. Patrik Kovář

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kovář** Jméno: **Patrik** Osobní číslo: **465371**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem s uvažováním vlivu ztrát

Název diplomové práce anglicky:

One-dimensional through-flow model of a radial compressor with losses

Pokyny pro vypracování:

Popis a funkce radiálního kompresoru.
Popis základních rovnic pro modelování v mechanice tekutin.
Popis použitého jednorozměrného modelu průtoku radiálním kompresorem s uvažováním ztrát.
Popis použitých numerických metod - metoda konečných objemů.
Sestavení a odladění programu pro uvažovanou metodu a jeho aplikace na konkrétních úlohách.

Seznam doporučené literatury:

Anderson, John D., Jr., Modern Compressible Flow (With Historical Perspective), 3rd. Edition, McGrawHill 2003
Leveque, Randall J., Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press 2002
Kadmožka, Jaroslav, Tepelné turbíny a turbokompresory 1, Brno 2004

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Vladimír Prokop, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **23.04.2021**

Termín odevzdání diplomové práce: **15.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Vladimír Prokop, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Patrik Kovář
Název diplomové práce:	Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem s uvažováním vlivu ztrát
Anglický název:	One-dimensional through-flow model of radial compressor with losses
Akademický rok:	2020/2021
Studijní obor:	Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Specializace:	Matematické modelování v technice
Ústav:	Ústav technické matematiky
Vedoucí diplomové práce:	Ing. Vladimír Prokop, Ph.D.
Bibliografické údaje:	77 stran 48 obrázků 3 tabulky
Klíčová slova:	radiální kompresor, ztrátové mechanismy, empirické korelace rekonstrukce geometrie, metoda konečných objemů
Key words:	radial compressor, loss mechanisms, empirical correlations geometry reconstruction, finite volume method

Abstrakt:

V této práci byl vyvinut jednorozměrný řešič proudění radiálním kompresorem s uvažováním vlivu ztrát. Základní zákony zachování jsou transformovány do relativního křivočarého systému souřadnic ve formulaci s absolutními rychlostmi. Vazké efekty a přestup tepla jsou zanedbány. Takto sestavený model představuje soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které jsou řešeny metodou konečných objemu. Ztráty popsané empirickými korelacemi jsou do modelu implementovány prostřednictvím přidružené obyčejné diferenciální rovnice. Řešič je validován na základních testovacích úlohách. Je provedena rekonstrukce geometrie reálného kompresoru. Výsledky získané jednorozměrným algoritmem jsou porovnány s trojrozměrným výpočtem pomocí komerčního řešiče. Nakonec jsou srovnány výkonové parametry kompresoru získané výpočty s experimentálními daty.

Abstract:

In this work, a one-dimensional flow solver with a radial compressor was developed with consideration of the effect of losses. Basic conservation laws are transformed into relative curvilinear coordinate system in absolute velocity formulation. Viscous effects and heat transfer are neglected. The model thus constructed represents a system of partial differential equations that are solved by finite volume method. Losses described by empirical correlations are implemented through an associated ordinary differential equation. Solver is validated on basic test cases. A reconstruction of the geometry of the real centrifugal compressor is performed. Results obtained by one-dimensional algorithm are compared with three-dimensional simulation computed using commercial software. Finally, the compressor performance parameters obtained by the calculations are compared with experimental data.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil pouze podklady uvedené v příloženém seznamu literatury.

V Praze dne _____

Poděkování

Prvně bych chtěl poděkovat vedoucímu práce Ing. Vladimíru Prokopovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícnost a věcné připomínky při řešení problému. Také chci poděkovat doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D. za konzultace numerických řešení a Adamu Taterovi za poskytnutí dat z trojrozměrné simulace. Rovněž chci poděkovat své přítelkyni, rodině a přátelům za podporu.

Obsah

Seznam obrázků	viii
Seznam tabulek	x
Nomenklatura	xi
Úvod	1
1 Základy mechaniky tekutin a termomechaniky	2
1.1 Základní zákony zachování	2
1.1.1 Obecný zákon zachování	3
1.1.2 Zákon zachování hmotnosti	4
1.1.3 Zákon zachování hybnosti	4
1.1.4 Zákon zachování energie	5
1.2 Stavová rovnice a termodynamické vztahy	5
1.2.1 Model ideálního plynu	5
1.2.2 Fourierův zákon	7
1.3 Základy dynamiky plynů	7
1.3.1 Celkový a statický stav	7
1.3.2 Dynamické funkce	8
2 Radiální kompresor	9
2.1 Princip funkce	10
2.1.1 Vstupní soustava	11
2.1.2 Oběžné kolo	12
2.1.3 Difuzory odstředivého kompresoru	14
2.1.4 Výstupní soustava odstředivého kompresoru	15
2.2 Výkonové parametry	15
3 Matematický model radiálního kompresoru	16
3.1 Geometrický popis kompresoru	16
3.1.1 Bézierova křivka	16
3.2 Model proudění	17
3.2.1 Relativní systém souřadnic	18
3.2.2 Zákony zachování v relativním systému	19
3.2.3 Křivočarý systém souřadnic	23
3.2.4 Cylindrický systém souřadnic	23

3.2.5	Zákony zachování v relativním cylindrickém systému	26
3.3	Řešené rovnice	27
3.3.1	Kvazi-1D Eulerovy rovnice v křivočarých souřadnicích	27
3.3.2	Zdrojové členy	28
3.4	Ztrátový model	30
3.4.1	Empirické korelace	31
3.4.2	Implementace ztrátového modelu	33
4	Numerické metody pro řešení výchozích rovnic	34
4.1	Rovnice advekce	34
4.2	Konvergence, konzistence a stabilita metod	36
4.2.1	Konvergence	36
4.2.2	Konzistence	36
4.2.3	Stabilita	37
4.2.4	Analýza Upwind schématu	37
4.3	Vlastnosti Eulerových rovnic	39
4.4	Numerický tok	40
4.4.1	Schéma HLL	40
4.4.2	Schéma HLLC	42
4.5	Godunova metoda	43
4.6	Metoda vyššího řádu přesnosti v prostoru	43
4.6.1	Po částech lineární rekonstrukce	44
4.6.2	Limitérové schéma	45
4.7	Numerické metody časové integrace	46
4.7.1	Dvoukroková TVD Runge-Kutta metoda	46
4.7.2	Metoda Runge-Kutta 4. řádu přesnosti	46
5	Numerická řešení v aplikacích	47
5.1	Konvergentně-divergentní tryska	47
5.1.1	Supersonický režim	48
5.1.2	Subsonický režim	48
5.2	Kanál se změnou směru	49
5.3	Kompresor Eckardt typ O	51
5.3.1	Geometrie	52
5.3.2	Okrajové podmínky	54
5.3.3	Vliv velikosti sítě na kvalitu výsledků	54
5.3.4	Návrhový bod kompresoru	55
5.3.5	Shrnutí dosažených výsledků	60
	Závěr	61
	Použitá literatura	63

Seznam obrázků

1.1	Pevný kontrolní objem v kartézském systému	3
1.2	Rozlehlá nádoba s výtokovou trubicí	7
2.1	Řez leteckým turbovrtulovým motorem [22]	9
2.2	Schéma radiálního kompresoru	10
2.3	Parametry proudu po střednici	10
2.4	Možnosti provedení vstupní soustavy	11
2.5	Vstupní soustava bez rozvíření	11
2.6	Vstupní soustava s rozvířením	11
2.7	Znázornění po výšce zkroucené lopatky na vstupu	12
2.8	Rychlostní trojúhelník na výstupu z kola	13
2.9	Oběžné kolo bez splitterů (vlevo) a se splitterem (vpravo)	13
2.10	Schéma lopátkového difuzoru	14
2.11	Rychlostní trojúhelník na výstupu z kola	15
3.1	Koncept geometrického popisu kompresoru	17
3.2	Relativní souřadnicový systém	18
3.3	Materiální kontrolní objem	19
3.4	Křivočarý souřadnicový systém	23
3.5	Bod v cylindrickém souřadnicovém systému	23
3.6	Rozložení ztrát	29
3.7	Nerovnoměrnost rychlostního pole	32
4.1	Ilustrace metody konečných objemů	35
4.2	Signální rychlosti se stejnými znaménky	40
4.3	Schéma HLL	41
4.4	Schéma HLLC	42
4.5	Rekonstrukce po částech konstantní funkcí	43
4.6	Advekce rekonstruovaného profilu pomocí Laxova-Wendroffova schématu	44
4.7	Rekonstrukce po částech lineární funkcí pomocí minmod limitéru	45
5.1	Geometrie konvergentně-divergentní trysky	47
5.2	Průběh statického tlaku a Machova čísla při supersonickém proudění s kolmou rázovou vlnou v divergentní části trysky	48
5.3	Průběh statického tlaku a Machova čísla při subsonickém proudění	49
5.4	Geometrie kanálu se změnou směru	49
5.5	Průběh hustoty a Machova čísla při proudění kanálem se změnou směru	50

5.6	Vizualizace oběžného kola kompresoru	51
5.7	Náhrada geometrie rotoru pomocí kubik	52
5.8	Vyhodnocení chyby pro souřadnici R horní vodící křivky	52
5.9	Náhrada geometrie rotoru pomocí Beziérových kubik s korekcemi	53
5.10	Geometrie pro 3D úlohu	53
5.11	Geometrie pro 1D úlohu	53
5.12	Vliv velikosti sítě na kvalitu výsledků	54
5.13	Průběh hustoty při proudění kompresorem	55
5.14	Průběh složky rychlosti ve směru R	56
5.15	Průběh složky rychlosti ve směru φ	56
5.16	Průběh složky rychlosti ve směru Z	57
5.17	Průběh Machova čísla při proudění kompresorem	57
5.18	Průběh statického tlaku při proudění kompresorem	58
5.19	Průběh statické teploty při proudění kompresorem	58
5.20	Průběh celkové teploty při proudění kompresorem	59
5.21	Průběh celkového tlaku při proudění kompresorem	59

Seznam tabulek

5.1	Okrajové podmínky pro návrhový bod	55
5.2	Srovnání dosažených výkonových parametrů různými metodami	60
5.3	Porovnání výpočetní náročnosti	60

Nomenklatura

Značení použité v této práci je uvedeno v následující tabulce. Symboly, které slouží pro účely odvození nebo zavedení nových pojmů jsou popsány na příslušných místech v textu.

Symbol	Jednotka	Význam
a	$m \cdot s^{-1}$	rychlost zvuku
A	m^2	průřez
c	$m \cdot s^{-1}$	absolutní rychlost
c_v	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu
c_p	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku
D	m	průměr
e	$J \cdot kg^{-1}$	hustota energie
h	$J \cdot kg^{-1}$	měrná entalpie
ΔH	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	přírůstek ztráty entalpie
i	$^\circ$	úhel náběhu
K	1	součinitel tlakové ztráty
L_z	m	axiální délka rotoru
\dot{m}	$kg \cdot s^{-1}$	hmotnostní tok
Ma	1	Machovo číslo
\vec{n}	1	normovaný normálový vektor
p	Pa	tlak
r	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	specifická plynová konstanta
R	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	univerzální plynová konstanta
s	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	entropie
t	s	čas
\vec{t}	1	normovaný tečný vektor
T	K	termodynamická teplota
u	$m \cdot s^{-1}$	unášivá rychlost
w	$m \cdot s^{-1}$	relativní rychlost
Y	1	tlaková ztráta
Z	1	počet lopatek
x, y, z	m, m, m	kartézské souřadnice
r, φ, z	$m, 1, m$	cylindrické souřadnice
s, n, φ	$m, m, 1$	křivočaré souřadnice

Symbol	Jednotka	Význam
β	$^\circ$	úhel odklonu relativní rychlosti
$\vec{\delta}$	1	Kroneckerovo delta
ϵ	1	relaxační koeficient
η	1	účinnost
φ	$^\circ$	geometrický úhel lopatek, polární souřadnice
γ	1	poměr měrných tepelných kapacit
μ	$1, Pa \cdot s$	součinitel skluzu, dynamická viskozita
π	1	stlačení, Ludolfovo číslo
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	hustota
ω	$rad \cdot s^{-1}$	úhlová rychlost
$\vec{\omega}$	$rad \cdot s^{-1}$	vektor úhlové rychlosti
σ	1	součinitel nárustu entropie
$\vec{\sigma}$	Pa	tenzor napětí
$\vec{\tau}$	Pa	tenzor smykových napětí
$()_0$		řez na vstupu do kompresoru
$()_1$		řez na vstupu do rotoru
$()_2$		řez na vstupu do bezlopatkového difuzoru
$()_3$		řez na vstupu do lopatkového difuzoru
$()_4$		řez na vstupu do výstupní soustavy
$()_5$		řez na výstupu k kompresoru
$()_a$		axiální složka
$()_H$		stav/rozměr vztahující se k patě lopatky na vstupu
$()_r$		radiální složka
$()_s$		statický stav
$()_t$		celkový stav
$()_T$		stav/rozměr vztahující se ke špičce lopatky na vstupu
$()_u$		tangenciální složka
$\bar{()}$		průměrná hodnota
$()'$		vztaženo k relativnímu souřadnicovému systému

Úvod

Lopatkové stroje, někdy též nazývané turbostroje, jsou obecně velmi používanou technologií objevující se v širokém pásmu aplikací. Setkáváme se s nimi v každodenním životě. V energetice se lopatkové stroje objevují ve formě parních nebo vodních turbín k výrobě elektřiny. Ve strojírenství jsou turbostroje zastoupeny v podobě kompresorů, které slouží ke stlačování vzduchu. V potravinovém průmyslu se pomocí stlačeného vzduchu vytváří ochranná atmosféra pro ovoce nebo zeleninu. Stlačený vzduch je důležitý i pro vodní hospodářství, a to jak při zásobování pitnou vodou, tak při čištění odpadních vod. V neposlední řadě je důležitou oblastí využití lopatkových strojů doprava, a to ve smyslu přepravy ropy a zemního plynu pro petrochemický průmysl a energetiku. Své uplatnění nalézají také v lodích a především v letectví, kde je stlačený vzduch dodáván do spalovací komory pro zvýšení účinnosti hoření. Pokud bychom zvládli navrhovat lepší kompresory, zvýšili bychom tak i efektivitu spalování, což by vedlo ke snížení spotřeby během letu, a tím pádem i ke snížení produkce skleníkových plynů.

Z fyzikálního hlediska je proudění v reálném radiálním kompresoru trojrozměrné, stlačitelné, vazké, turbulentní a s přestupem tepla. V dnešních strojích se navíc nepohybujeme pouze v subsonických režimech. Takové proudění je popsáno soustavou nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, u které není vyřešena ani otázka jednoznačnosti a existence řešení [9]. Aproximativní řešení, které se při návrhu stroje a analýze proudění používá, je i v dnešní době výpočetně velmi náročné.

Tyto skutečnosti nás vedou k vyvíjení zjednodušených modelů, jimiž je možné rychle a relativně přesně analyzovat děje uvnitř stroje. Pomocí takového nástroje je pak možné optimalizovat jednorozměrný návrh a nalézt nejvhodnější kandidáty pro následnou vícerozměrnou analýzu.

Při sestavování jednorozměrného modelu proudění radiálním kompresorem se člověk dopouští řady zjednodušení, které přímo nereflktují fyzikální realitu. Tato zjednodušení jsou diskutována v průběhu práce a shrnuta v závěru. Následujícími body jsou shrnuty cíle práce, které současně sledují strukturu celé práce:

- seznámení se základními principy mechaniky tekutin a termodynamiky, jako jsou zákony zachování, konstitutivní vztahy a základní pojmy z dynamiky plynů,
- popis geometrie a využití radiálního kompresoru a funkcí jednotlivých komponent stroje,
- sestavení matematického modelu kompresoru a výchozího systému řešených rovnic,
- seznámení s numerickými metodami, pomocí kterých lze systém rovnic řešit,
- aplikace sestaveného výpočetního nástroje na testovací úlohy.

Kapitola 1

Základy mechaniky tekutin a termomechaniky

Mechanika tekutin zkoumá makroskopický pohyb tekutin a jejich působení na tělesa, která jsou tekutinou obtékána. Tekutiny jsou látky, jejichž mikroskopické částice se i za účinku malých sil vzájemně vůči sobě pohybují - proudí. Mezi tyto látky patří plyny a kapaliny. V kapalinách lze většinou uvažovat hustotu konstantní. V případě proudění plynů lze vliv stlačitelnosti také zanedbat, ale pouze pro rychlosti menší než je zhruba třetina rychlosti zvuku [30], [44].

1.1 Základní zákony zachování

Pro odvození základních zákonů zachování předpokládejme spojitě prostředí neboli kontinuum. V rámci tohoto přístupu je pohyb molekul zcela ignorován. O vlastnostech pozorované látky nebo konstrukčního materiálu předpokládáme, že jsou spojitými funkcemi polohy a času. Ve vhodně zvoleném kontrolním objemu studované látky sestavujeme diferenciální bilance, které umožňují popis rychlostních, teplotních nebo koncentračních rozložení.

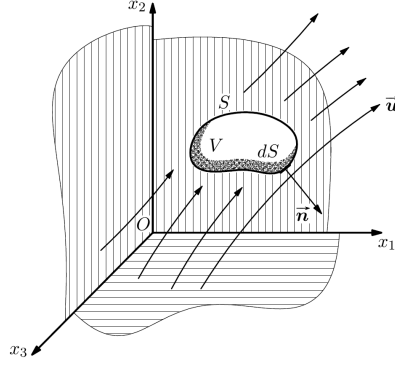
Hybnost určitého množství látky hmotnosti m , které se pohybuje rychlostí \vec{u} , lze vyjádřit součinem $m\vec{u}$. Má-li toto množství látky teplotu T a měrnou tepelnou kapacitu c_p , můžeme jeho entalpii vyjádřit jako mc_pT . Obě tyto veličiny charakterizují množství látky o hmotnosti m z hlediska pohybového nebo energetického. Protože velikost těchto charakteristických parametrů je podmíněna hmotností m , tak mluvíme o tzv. extenzivních parametrech, které jsou závislé na velikosti systému. Hybnost, entalpii a hmotnost ve smyslu extenzivního parametru budeme nazývat fyzikální veličinou.

Naproti tomu existují parametry intenzivní, které na rozměrech soustavy nezávisí. Získáme je tak, že vztáhneme extenzivní parametr k objemu V , který látka nebo směs zaujímá. Hybnost, entalpii a hmotnost objemové jednotky kontinua budeme označovat společným názvem fyzikální vlastnost, která má charakter fyzikálního pole závislého na souřadnicích a čase.

Pro sestavení bilancí fyzikálních veličin nebo vlastností je nutné definovat bilancovaný objekt. K popisu pohybu tekutiny použijeme Eulerův přístup, kdy sledujeme vymezený objem, který se v prostoru nepohybuje a je pevně svázán se souřadnicovým systémem.

1.1.1 Obecný zákon zachování

Uvažujme libovolný kontrolní objem V uzavřený plochou S . Označíme-li vnější normálu plochy S jako \vec{n} , pak platí $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Libovolnou fyzikální veličinu, která se může v tomto objemu měnit, označme ϕ . Veličina ϕ se v tomto objemu může měnit pouze tokem skrze hranici S nebo vznikem či zánikem uvnitř objemu V . Na obrázku 1.1 je znázorněn pevný kontrolní objem v kartézském souřadnicovém systému.



Obrázek 1.1: Pevný kontrolní objem v kartézském systému

Elementem povrchu dS proteče za jednotku času objem $\vec{u} \cdot \vec{n} dS$, konvektivně tedy pronikne hraniční plochou kontrolního objemu množství $\vec{n} \cdot \vec{u} \phi dS$. Mechanismy jiné než konvektivní, kterými může veličina proniknout povrchem S , jsou zahrnuty do členu $\vec{n} \cdot \mathbf{P} dS$. Příkladem může být vedení tepla. Množství veličiny generované v objemové jednotce za jednotku času označme \dot{H} . Univerzální bilanci obecné fyzikální veličiny tedy sestavíme jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi dV = - \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{u} \phi dS - \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \mathbf{P} dS + \int_{\Omega} \dot{H} dV. \quad (1.1)$$

Protože kontrolní objem je vzhledem ke zvolené souřadné soustavě v klidu, meze integrálu na času nezávisí [41], a tak lze napsat

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi dV = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi dV. \quad (1.2)$$

Nechť jsou funkce ϕ , \vec{u} a \mathbf{P} spojité a diferencovatelné v objemu V , pak lze plošné integrály nahradit objemovými pomocí Gaussovy věty.

$$- \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{u} \phi dS - \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \mathbf{P} dS = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{u} + \mathbf{P}) dV. \quad (1.3)$$

Dosazením za výraz představující akumulaci veličiny z rovnice (1.2) přechází univerzální bilance veličiny (1.1) do tvaru

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{u}) + \nabla \cdot \mathbf{P} - \dot{H} \right) dV = 0. \quad (1.4)$$

Protože tato rovnice platí pro libovolný pevný a uzavřený kontrolní objem, musí platit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{u}) + \nabla \cdot \mathbf{P} - \dot{H} = 0 \quad (1.5)$$

Rovnice (1.5) představuje univerzální bilanci obecné fyzikální veličiny v diferenciálním tvaru.

1.1.2 Zákon zachování hmotnosti

Pro odvození rovnice kontinuity v homogenním prostředí budeme vycházet ze zákona zachování v diferenciálním tvaru (1.5). Bilancovaná veličina je hmotnost. Fyzikální vlastnost je v tomto případě reprezentována hmotností objemové jednotky, neboli hustotou ρ . Vzhledem k tomu, že v homogenní tekutině nemůže existovat mechanismus difuzního přenosu hmoty [41], bude člen $\mathbf{P} = 0$. Protože v homogenním prostředí nemůže hmota vznikat ani zanikat, bude i člen produkce $\dot{H} = 0$. Rovnici kontinuity tak lze zapsat jako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.6)$$

1.1.3 Zákon zachování hybnosti

V tomto případě je zachovávaná veličina hybnost $m\vec{u}$. Odpovídající fyzikální vlastností je hybnost vztažená na jednotku objemu $\rho\vec{u}$. Hustota toku veličiny \mathbf{P} je z tenzorového hlediska o jeden řád vyšší než příslušná veličina, a protože hybnost je vektor, bude hustota molekulárního toku hybnosti tenzor druhého řádu, který je označen jako $\vec{\vec{\sigma}}^*$. Přenosem hybnosti mezi sousedními vrstvami tekutiny dochází k jejich vzájemnému tření, které se projeví jako vnitřní napětí $\vec{\vec{\sigma}} = -\vec{\vec{\sigma}}^*$. Opačná znaménka $\vec{\vec{\sigma}}$ a $\vec{\vec{\sigma}}^*$ jsou zde kvůli zvyklosti mechaniky značit tahová napětí kladně. Existuje-li vnější pole objemových sil \vec{f} , pak je člen produkce $\dot{H} = \rho\vec{f}$. Nejběžnějším případem vnějšího silového pole je pole gravitační. Dosazením zmíněných veličin do obecné diferenciální bilance (1.5) dostáváme Cauchyho rovnici

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{f}. \quad (1.7)$$

Tato rovnice je vyjádřením druhého Newtonova zákona pro libovolné spojité prostředí, takže platí jak pro tekutiny, tak pro elastická tělesa. Členy na levé straně představují setrvačné síly vztažené na jednotku objemu a členy na pravo zase vnitřní povrchové a vnější objemové síly, které jsou opět vztaženy na jednotku objemu.

Tenzor napětí $\vec{\vec{\sigma}}$ lze rozdělit do dvou částí. Izotropní tlak p charakterizuje tekutinu, pokud je v klidu, a tenzor vazkých napětí $\vec{\vec{\tau}}$, když se tekutina pohybuje [41]

$$\vec{\vec{\sigma}} = -p\vec{\delta} + \vec{\vec{\tau}}. \quad (1.8)$$

Dosazením vztahu (1.8) do rovnice (1.7) dostáváme rovnici Navierovu-Stokesovu

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\vec{\tau}} + \rho \vec{f}. \quad (1.9)$$

Tato rovnice je základní pohybovou rovnicí mechaniky tekutin a popisuje pohyb reálné tekutiny.

Zanedbáním vazkých efektů v Navierově-Stokesově rovnici (1.9) dostaneme Eulerovu rovnici, která popisuje proudění ideální tekutiny.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{f} \quad (1.10)$$

1.1.4 Zákon zachování energie

V tomto případě bude bilancovanou veličinou celková energie E . Příslušná fyzikální vlastnost je potom součin ρE , který nazveme hustotou energie e . První člen v rovnici (1.11) se v termodynamice nazývá vnitřní energie u_e a zahrnuje kinetickou a potenciální energii mikroskopického pohybu molekul. Druhý člen vyjadřuje kinetickou energii makroskopického pohybu hmoty [31].

$$E = u_e + \frac{1}{2}\rho\|\vec{u}\|^2 \quad (1.11)$$

Ke změnám vnitřní energie dochází v důsledku přenosu tepla, a proto je difusivní člen \mathbf{P} roven hustotě tepelného toku \vec{q} , který je dále možné rozepsat pomocí Fourierova zákona. Ke vzniku vnitřní energie dochází také v důsledku vratné a nevratné přeměny mechanické energie nebo přeměnou jiných druhů energie [41]. Člen produkce tak nabývá tvaru

$$\dot{H} = \vec{\sigma}:(\nabla\vec{u}) + \rho\vec{u}\cdot\vec{f} + \dot{q}. \quad (1.12)$$

Rychlost přeměny mechanické energie na vnitřní popisuje první člen vztahu (1.12). Druhý člen, podobně jako v rovnici (1.9), popisuje práci vnějších objemových sil. Pod třetí člen zahrnujeme např. Jouleovo teplo, rozpouštěcí teplo, reakční teplo nebo teplo uvolněné jaderným štěpením. Energetickou rovnici pak lze s využitím obecné bilance (1.5) zapsat jako

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla\cdot(e\vec{u}) - \vec{\sigma}:(\nabla\vec{u}) - \rho\vec{u}\cdot\vec{f} - \dot{q} + \nabla\cdot\vec{q} = 0. \quad (1.13)$$

Rozložením tenzoru napětí pomocí vztahu (1.8) a dalšími úpravami dostáváme zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla\cdot((e+p)\vec{u}) = \vec{\tau}:(\nabla\vec{u}) + \rho\vec{u}\cdot\vec{f} + \dot{q} - \nabla\cdot\vec{q}. \quad (1.14)$$

1.2 Stavová rovnice a termodynamické vztahy

Vzhledem k tomu, že matematický model proudění, sestavený z rovnice kontinuity, Navierovy-Stokesovy rovnice a zákonu zachování energie, ve trojrozměrném případě tvoří systém pěti rovnic pro sedm neznámých, kterými jsou hustota ρ , složky rychlosti \vec{u} , energie e , tlak p a teplota T , je třeba připojit další rovnice, díky kterým se systém uzavře a bude možné jej vyřešit.

Tyto vztahy se nazývají stavové rovnice a charakterizují chování pracovního média. Stavové rovnice jsou odvozovány z kinetické teorie plynů nebo statistické mechaniky nebo jsou získány z experimentálních dat. Termická stavová rovnice udává vztah stavových veličin k jiné stavové veličině, běžně ve formě $p = p(T, \rho)$. Druhý vztah je kalorická stavová rovnice, která definuje relaci vnitřní energie k termickým stavovým veličinám, typicky ve formě $e = e(T, p)$ [2].

1.2.1 Model ideálního plynu

V literatuře lze nalézt mnoho modelů plynu, které více či méně reflektují realitu, my se však omezíme na model ideálního plynu, který je pro běžné tlaky a teploty dostatečný. Tento model se vyznačuje tím, že se řídí stavovou rovnicí ve tvaru

$$p = \rho r T. \quad (1.15)$$

Navíc pro něj platí, že měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku c_p a objemu c_v nejsou funkcemi teploty a jsou tudíž konstantní. Třetí definiční podmínka říká, že vnitřní energie ideálního plynu je funkcí pouze teploty tj. $e = e(T)$ [31].

Z uvedených vlastností modelu ideálního plynu pak vyplývají další vlastnosti. První z nich je Mayerův vztah

$$c_p - c_v = r = konst., \quad (1.16)$$

kde r představuje měrnou plynovou konstantu, kterou lze získat z podílu univerzální plynové konstanty R a molekulové hmotnosti příslušného plynu M . Pokud bychom jako médium uvažovali vzduch, pak konstanta r nabývá hodnoty:

$$r = \frac{R}{M} = \frac{8,314 [\text{kJ} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]}{28,96 [\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}]} = 287,1 [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]. \quad (1.17)$$

Další vlastností je konstantní poměr měrných tepelných kapacit, který je známý jako Poissonova konstanta

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma = konst. \quad (1.18)$$

Velikost této konstanty závisí na počtu atomů v molekule uvažovaného plynu [31]. Pro vzduch je tato hodnota $\gamma = 1,4$.

Zavedením měrné entalpie h a dosazením za druhý člen z termické stavové rovnice lze ukázat, že vnitřní energie ideálního plynu je skutečně funkcí pouze teploty:

$$h = u_e + \frac{p}{\rho} = u_e(T) + rT = h(T). \quad (1.19)$$

Postupem blíže popsáním v [31] je možné dospět k vyjádření kalorické stavové rovnice ve tvaru

$$h = c_p T. \quad (1.20)$$

Z Mayerova vztahu (1.16) a Poissonovy konstanty (1.18) lze získat výraz

$$r = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p. \quad (1.21)$$

Dosazením tohoto výrazu do stavové rovnice (1.15) dostáváme

$$p = \rho \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p T. \quad (1.22)$$

Dalším dosazením z definičního vztahu (1.19) za součin $c_p T$ získáváme

$$p = \rho \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(u_e + \frac{p}{\rho} \right). \quad (1.23)$$

Člen ρu_e lze vyjádřit ze vztahu (1.11) a po úpravách nabývá stavová rovnice tvaru

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho \|\vec{u}\|^2. \quad (1.24)$$

1.2.2 Fourierův zákon

Pro úplnost je ještě potřeba upravit člen \vec{q} energetické rovnice (1.14), ve kterém je obsažena neznámá teplota T . Jak bylo řečeno v kapitole 1.1.4, tento člen je možné dále rozepsat pomocí Fourierova zákona

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \quad (1.25)$$

kde λ představuje součinitel tepelné vodivosti tekutiny [41].

Pro eliminaci teploty ze vztahu (1.25) je třeba za teplotu dosadit ze stavové rovnice (1.15). Využitím Mayerova vztahu (1.16) a Poissonovy konstanty (1.18) dostáváme

$$\vec{q} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (1.26)$$

kde vystupuje Prandtlovo podobnostní číslo Pr definované jako [41]

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (1.27)$$

Základní zákony zachování doplněné o stavovou rovnici, v tomto případě ve tvaru (1.24), tvoří systém o šesti rovnicích. Pokud bychom uvažovali přestup tepla, tak s využitím vztahu (1.26) snížíme počet neznámých na šest, čímž je systém uzavřený.

1.3 Základy dynamiky plynů

Rychlost zvuku a je rychlost šíření slabého rozruchu tlaku p ve stlačitelném prostředí, tzn. v prostředí, které má proměnnou hustotu ρ . Je definována následujícím vztahem

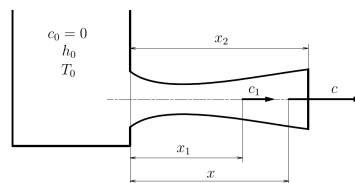
$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}. \quad (1.28)$$

Lokální rychlost zvuku slouží v dynamice plynů jako norma lokální rychlosti proudící tekutiny. Vznikne tím bezrozměrná proměnná, která se nazývá Machovo číslo [30]

$$Ma = \frac{c}{a}. \quad (1.29)$$

1.3.1 Celkový a statický stav

Předpokládejme izentropické proudění, které je jednorozměrné, stlačitelné, stacionární a bez rázových vln. Představme si rozlehlou nádobu, ze které výtokovou trubicí proudí stlačitelná tekutina. O nádobě předpokládáme, že je tak rozměrná, že v určité vzdálenosti od vtokového hrdla do trubice je rychlost $c_0 = 0$. Graficky je tato úvaha znázorněna na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Rozlehlá nádoba s výtokovou trubicí

Představme si, že bychom proud izentropicky zbrzdili na nulovou rychlost. Takto je obecně definován klidový stav, který se zavádí do řešeného systému i v případě, kdy v něm uvažovaná nádoba není, pak se tento stav nazývá fiktivní. Pro klidový stav navíc platí následující výroky.

- Pro celou soustavu, kde proudění lze považovat za izentropické, existuje jediný klidový stav. Klidové hodnoty jednotlivých stavových veličin jsou pro daný systém konstantní.
- Klidové hodnoty jednotlivých stavových veličin v izentropické soustavě jsou nejvyššími dosažitelnými hodnotami těchto veličin.

Tlak a teplota, kterých tekutina dosáhne při rychlosti $c_0 = 0$, jsou definovány jako klidový tlak a klidová teplota. Klidový, stagnační nebo celkový stav jsou synonyma [1]. V této práci budeme dále pracovat s názvem celkový stav a bude označen dolním indexem t .

Naproti celkovému stavu existuje ještě stav statický. Veličiny v tomto stavu si lze představit jako měřené měřicím přístrojem, který se pohybuje s proudícím médiem rychlostí c [31].

Pokud bychom kromě požadavků na proudění navíc uvažovali jako proudící médium ideální plyn, pak je dle úvah blíže popsaných v [31] možné vyjádřit vztah pro celkovou teplotu jako

$$T_t = T_s + \frac{c^2}{2c_p}, \quad (1.30)$$

kde symbolem T_s je označena statická teplota. Druhý člen má fyzikální rozměr teploty. Proto se nazývá dynamická teplota, i když se z termodynamického hlediska o teplotu nejedná [31].

1.3.2 Dynamické funkce

Pomocí dynamických funkcí je možné stanovit hodnotu dané veličiny v obecném místě vztaženou ke klidovému stavu jako funkci Machova čísla popsaného vztahem (1.29). Podrobné odvození a detailnější vymezení oboru platnosti těchto vztahů je možné najít v [39].

Průběh teploty

$$\frac{T_s}{T_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-1} \quad (1.31)$$

Průběh tlaku

$$\frac{p_s}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.32)$$

Průběh hustoty

$$\frac{\rho_s}{\rho_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (1.33)$$

Pokud bychom uvažovali rovnoměrné rozložení hustoty a rychlosti podél proudnice, pak lze vyjádřit poměr kritického průřezu A^* [31] k průřezu A jako

$$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} Ma \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (1.34)$$

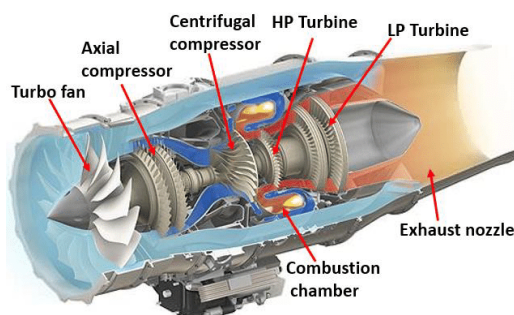
Kapitola 2

Radiální kompresor

Kompresor je stroj určený ke stlačování plynů a par. Obecně se kompresory dělí podle způsobu stlačování na objemové a dynamické. U objemových kompresorů dochází ke stlačení média zmenšením pracovního prostoru ve válci, v němž je médium uzavřeno. U dynamických kompresorů se velikost pracovního prostoru nemění. Dále se dělí na turbokompresory a proudové kompresory [19]. Podle směru, kterým proud vzduchu opouští rotor, mohou být turbokompresory rozděleny na axiální, radiální, případně diagonální [18].

V současné době jsou nejvíce rozšířené kompresory axiální, a to jak v civilních, tak vojenských aplikacích. Mezi jejich přednosti patří vyšší účinnost a malé čelní rozměry při vysokém hmotnostním průtoku. Na druhou stranu stlačení jednoho axiálního stupně je velmi omezené, nejčastěji se pohybuje v rozmezí $\pi = 1,2$ až 2 [18]. Požadavky na vyšší stlačení lze splnit zařazením jednotlivých stupňů za sebe a vytvořit tak vícestupňový kompresor. To ovšem vede k většímu počtu lopatek a náročnějšímu návrhu konstrukce i výroby takového kompresoru.

Ačkoliv radiální kompresory mají nižší účinnost, stlačení jediného stupně se pohybuje až okolo hodnot $\pi = 5$ až 7 [18]. Další výhodou je konstrukční jednoduchost a velká spolehlivost během provozu. Díky tomu si radiální kompresory zachovávají dominantní roli v klasických aplikacích jako je doprava zemního plynu na velké vzdálenosti nebo stlačování vzduchu pro průmyslové a důlní aplikace, ve velkých chladicích zařízeních a v chemickém průmyslu. V současnosti se radiální kompresory navíc uplatňují u plynových turbín menších výkonů, a to v leteckých, v pozemních mobilních i lodních aplikacích nebo v energetice [17]. Na obrázku 2.1 je zobrazen řez turbovrtulovým motorem, kde je použit radiální stupeň jako poslední rotor kompresoru.

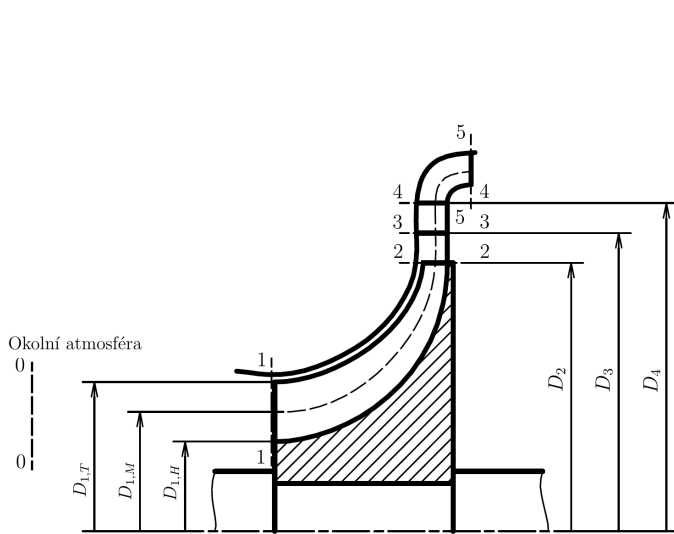


Obrázek 2.1: Řez leteckým turbovrtulovým motorem [22]

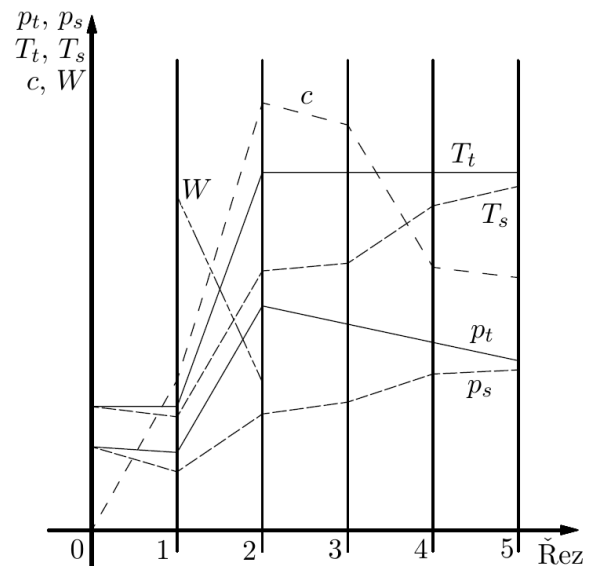
2.1 Princip funkce

Stupeň radiálního kompresoru je tvořen vstupní soustavou, oběžným kolem kompresoru, difuzory a výstupní soustavou. Skica upořádání je vidět na obrázku 2.2.

Vstupní soustavou se přivádí vzduch do rotujícího kola kompresoru. Na vzduch, který rotuje s kolem kompresoru, působí odstředivé síly. Tím se vzduch stlačuje, zvyšuje svojí teplotu i absolutní rychlost. V difuzorech klesá rychlost, za současného růstu tlaku a teploty vzduchu. Ve výstupní soustavě se parametry proudu mění málo. Vzduch je zde převeden do směru podle požadavku další části, která za kompresorem následuje [18]. Změna základních parametrů proudu vzduchu na střední proudnici je zobrazena na obrázku 2.3.



Obrázek 2.2: Schéma radiálního kompresoru



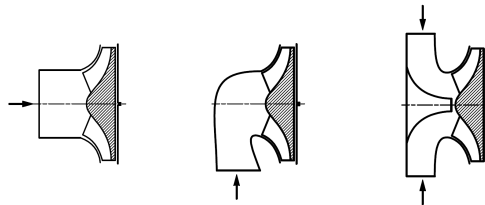
Obrázek 2.3: Parametry proudu po střednici

Úsek mezi řezy (0–0) a (1–1) znázorňuje vstupní soustavu. Řez (0–0) je teoreticky nekonečně daleko před kompresorem, prakticky v takové vzdálenosti, kde se neprojevuje vliv práce kompresoru. Ve vstupní soustavě se nepřivádí žádná práce W , nepřivádíme ani neodvádíme žádné teplo, což v souladu s rovnicí zachování energie znamená, že celkové teploty jsou v obou řezech stejné, $T_{0,t} = T_{1,t}$. Protože rychlost $c_1 > c_0$, nastává ve vstupní soustavě pokles statické teploty. Statický tlak sleduje změnu statické teploty. Vlivem ztrát třením a vířením proudu vzduchu ve vstupu klesá celkový tlak, $p_{1,t} < p_{0,t}$ [18].

Při průtoku vzduchu kolem kompresoru, mezi řezy (1–1) a (2–2) se přivádí práce, a proto zde roste statický tlak i teplota, rychlost vzduchu, a tak i celkový tlak a teplota. Vzduch z kola kompresoru vstupuje do bezlopatkového difuzoru (2–2) až (3–3) a lopatkového difuzoru (3–3) až (4–4). Oba difuzory slouží k přeměně kinetické energie v tlakovou. V difuzorových kanálech bezlopatkového a lopatkového difuzoru klesá rychlost proudícího média, roste statický tlak a statická teplota. Zanedbáme-li přívod či odvod tepla mezi řezy (2–2) až (5–5), je celková teplota konstantní, jelikož se v difuzorech ani ve výstupní soustavě nepřivádí žádná práce. Vlivem tření a víření vzduchu klesá v difuzorech i ve výstupní soustavě celkový tlak [18].

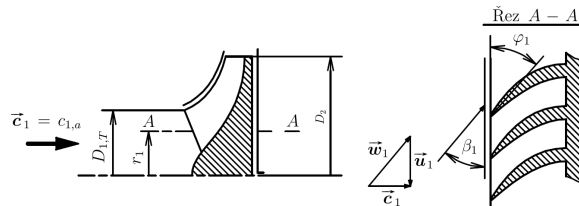
2.1.1 Vstupní soustava

Vstupní soustava radiálního kompresoru má zabezpečit maximální rovnoměrnost rozložení proudu ve vstupu do kola, protože nerovnoměrnost proudu snižuje účinnost celého kompresoru. Možností provedení existuje celá řada a některé varianty jsou znázorněny na obrázku 2.4, nejlépe však zmíněné požadavky splňuje osový vstup [18].



Obrázek 2.4: Možnosti provedení vstupní soustavy

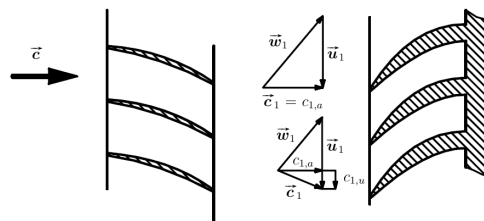
Rozložení rychlosti proudu na konci vstupní soustavy, tj. řez (1 – 1), získáme na jednotlivých poloměrech tak, že sestrojíme rychlostní trojúhelníky. Provedeme válcový řez na jednotlivých průměrech a rozvineme jej do roviny. Pro názornost je tato myšlenka zobrazena na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Vstupní soustava bez rozvíření

Tím, že roste obvodová rychlost \vec{u} směrem k vnějšímu průměru $D_{1,T}$, roste i velikost relativní rychlosti \vec{w} . Pokud Machovo číslo vztahované k relativní rychlosti $M_{w_{1,T}}$ překročí hodnotu 0,95, vznikají zde rázové vlny s následným odtržením proudu vzduchu od lopatek, což znamená další ztráty. Tato skutečnost, při zadané rychlosti c , často omezuje obvodovou rychlost $u_{1,T}$.

Ve snaze zvýšit otáčky kompresoru a tím zvýšit i jeho stlačení při zachování podzvukového Machova čísla $M_{w_{1,T}}$ se provádí kompresory s rozvířením vzduchu před kolem. V takovém případě absolutní rychlost c není osová, ale má obvodovou složku c_u orientovanou ve směru otáčení. Zvýšení obvodové rychlosti u je možné právě o složku c_u . Prakticky se rozvíření vzduchu dosáhne umístěním statorových lopatek před oběžné kolo, jak je vidět na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Vstupní soustava s rozvířením

2.1.2 Oběžné kolo

Oběžné kolo je jediná část odstředivého kompresoru, ve které se médiu předává práce. To se projeví růstem tlaku, teploty i rychlosti, jak je vidět na obrázku 2.3. Na hmotné částice vzduchu, které se pohybují v mezilopátkovém kanále kola, působí kromě síly setrvačné, tlakové a třecí ještě síla odstředivá a Coriolisova. Při rozboru proudění vzduchu kolem kompresoru je možné kolo rozdělit na vstupní část, tzv. záběrník, a výstupní část kola.

Při proudění média oběžným kolem kompresoru vznikají ztráty rázovými vlnami, třením, vířením proudu, ale také třením disku kola, přetékáním proudu vzduchu mezi lopatkami a krytem kompresoru. Podrobně jsou tyto ztrátové mechanismy popsány v kapitole 3.4.

Záběrník

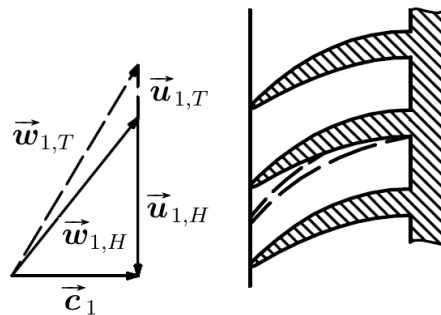
Úhel odklonu relativní rychlosti β od vstupní roviny záběrníku je možné obecně určit vztahem

$$\tan \beta_1 = \frac{c_{1,a}}{u_1 - c_{1,u}}. \quad (2.1)$$

Na obrázku 2.7 je zakreslen úhel β_1 a geometrický úhel záběrníku φ_1 , jejichž rozdílem je definován úhel náběhu i jako

$$i = \varphi_1 - \beta_1. \quad (2.2)$$

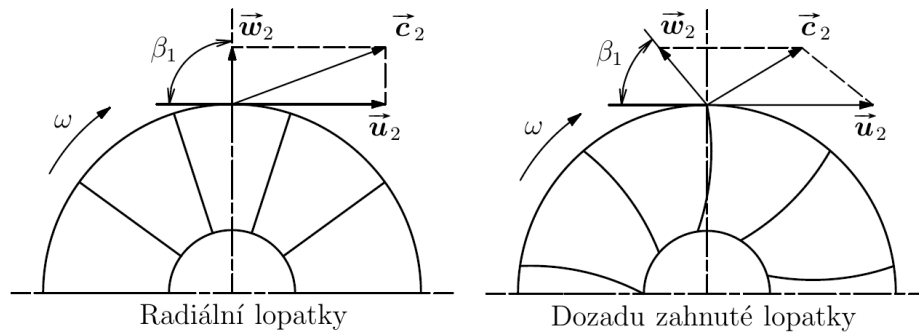
Vzhledem k nutnosti zamezit odrtžení proudu na záběrníku je úhel náběhu i po celé výšce lopatky volen v rozmezí $\pm 2^\circ$. Ze vztahu (2.1) je patrné, že se zvyšujícím se poloměrem, a tím i zvyšující se unášivou rychlostí \vec{u} , se mění úhel β_1 . Z této skutečnosti a požadavku na úhel náběhu i vyplývá, že lopatka na vstupu musí být po výšce zkroucená. Na obrázku 2.7 je lopatka na špičce záběrníku $D_{1,T}$ znázorněna čárkovaně.



Obrázek 2.7: Znázornění po výšce zkroucené lopatky na vstupu

Výstupní část kola

Rychlostní trojúhelník na výstupu z oběžného kola je možné sestavit podobně jako na vstupu. Kolo s nekonečným počtem radiálních lopatek má nulovou tangenciální složku relativní rychlosti $w_{2,u}$. To ovšem neplatí pro kolo s konečným počtem lopatek, kde je rychlost w_2 odkloněna od radiálního směru proti směru otáčení kola. Na obrázku 2.8 jsou znázorněny rychlostní trojúhelníky pro kola s konečnými počty lopatek [36].



Obrázek 2.8: Rychlostní trojúhelník na výstupu z kola

Vlivem odklonu relativní rychlosti od radiálního směru je $c_{2,u} < u_2$. Poměr těchto rychlostí se nazývá součinitel skluzu [18]

$$\mu = \frac{c_{2,u}}{u_2}. \quad (2.3)$$

Hodnota součinitele skluzu se u kol s radiálními i zahnutými lopatkami většinou stanovuje přibližně pomocí poloempirických vztahů, kterých je v literatuře uvedená celá řada. Tyto vztahy bohužel nelze použít univerzálně a odpovídají jen určitým podmínkám práce kola [36]. Jako příklad je uveden Stodolův vztah [17]

$$\mu = 1 - \frac{\pi \sin \varphi_2}{Z(1 - \frac{c_{2,r}}{u_2} \cotg \varphi_2)}. \quad (2.4)$$

V zahraniční literatuře se často pracuje se součinitelem skluzu definovaným Wiesnerem v [49]

$$\mu = 1 - \frac{\sqrt{\cos \varphi_2}}{Z^{0,7}}. \quad (2.5)$$

Z uvedených vztahů pro stanovení součinitele skluzu je patrné, že výrazně závisí na počtu lopatek z . Velký počet lopatek začínajících v řezu (1–1) by vedl k podstatnému růstu rychlostí proudu média v záběrníku, protože by se značně zmenšila průtoková plocha, a došlo by ke značenému růstu ztrát při průtoku kolem. Počet lopatek lze zvýšit použitím tzv. splitterů (mezilopatek), které začínají v oblasti na konci záběrníku. Ilustrace oběžných kol je vidět na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: Oběžné kolo bez splitterů (vlevo) a se splitterem (vpravo)

2.1.3 Difuzory odstředivého kompresoru

V difuzorech odstředivého kompresoru nastává přeměna vysoké kinetické energie v energii potenciální. Pokles rychlosti je doprovázen růstem statického tlaku a statické teploty. Jelikož proud vzduchu vystupuje z oběžného kola značně rozrušen, nastává v difuzorech kromě poklesu rychlosti i vyrovnávání rozrušeného proudu. V mnoha aplikacích může být Machovo číslo na výstupu z oběžného kola $Ma_2 > 1$, protože k dosažení vysokého stlačení je potřebná velká obvodová rychlost u_2 , a tím je i rychlost c_2 vysoká [18].

Průtok média je v důsledku tření, víření i vyrovnání rozrušeného proudu doprovázen velkými ztrátami. Bezprostředně za rotorem kompresoru je difuzor bezlopatkový, za ním pak následuje difuzor lopatkový.

Bezlopatkový difuzor

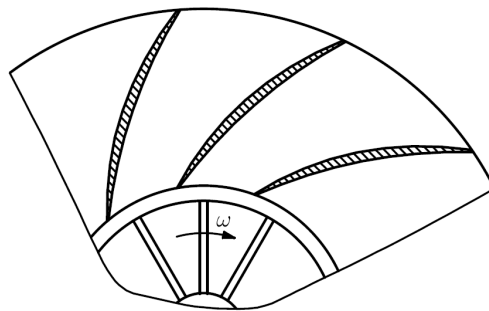
Bezlopatkový difuzor je ohraničen přední a zadní skříní kompresoru mezi řezy (2 – 2) a (3 – 3). Nastává zde pokles rychlosti za současného růstu statického tlaku a teploty. Zvláštnost tohoto procesu spočívá v tom, že tvar kanálu bezlopatkového difuzoru umožňuje přechod nadzvukového proudu do podzvukového bez výskytu rázových vln. V takovém případě musí být radiální složka absolutní rychlosti proudu c_r podzvuková. Kromě zpomalení proudu nastává v bezlopatkovém difuzoru ještě vyrovnání rozrušeného proudu vystupujícího z oběžného kola [36].

U kompresorů s vysokým stlačením bývají rychlosti v bezlopatkovém difuzoru nadzvukové i na výstupu. Nabízející se řešení je použití dlouhého bezlopatkového difuzoru, ve kterém by klesla rychlost proudu na podzvukovou, to je však doprovázeno velkými ztrátami [18].

Lopatkový difuzor

Lopatkový difuzor bezprostředně navazuje na bezlopatkový. V leteckých kompresorech je lopatkový difuzor používán především proto, že má vyšší účinnost než bezlopatkový a větší difuzornost kanálu při stejné změně poloměru, což příznivě ovlivňuje maximální průměr kompresoru. Ztráty v lopatkovém difuzoru jsou významně ovlivňovány difuzorností kanálu [18].

Podzvukové lopatkové difuzory mají provedení lopatky buď s kruhovou nebo jinou střední křivkou, na kterou je navinut aerodynamický profil, jak je znázorněno na obrázku 2.10.

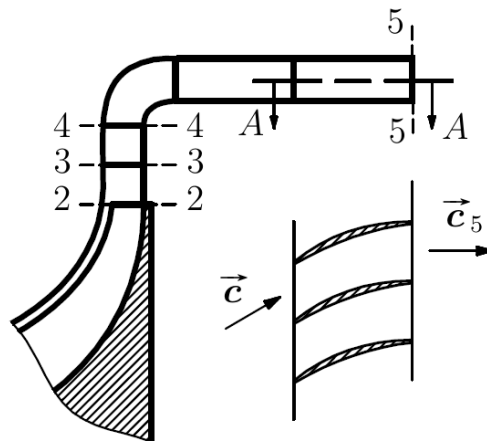


Obrázek 2.10: Schéma lopatkového difuzoru

2.1.4 Výstupní soustava odstředivého kompresoru

Výstupní soustava odstředivého kompresoru převádí médium od difuzoru do směru určeného další částí soustrojí, která za kompresorem následuje. V této části kompresoru opět nepřivádíme ani neodvádíme žádnou práci a zanedbáváme přívod i odvod tepla. Celková teplota se nemění. Ztráty při průtoku výstupní soustavou jsou poměrně značné, protože často dochází k velkému ohnutí proudu. Ztráty třením a vířením proudu vzduchu jsou doprovázeny poklesem celkového tlaku. Statické stavy se zde mění vcelku málo.

Dříve nejužívanější výstupní soustava u odstředivých kompresorů používaných k přepínání pístových motorů je spirální výstupní soustava. U lopatkových leteckých motorů, které mají za odstředivým kompresorem zařazenou spalovací komoru, se nejčastěji používá prstencová výstupní soustava. Většina spalovacích komor vyžaduje vstup vzduchu v osovém směru. Vzduch vystupující z lopatkového difuzoru má jak radiální, tak odvodovou složku rychlosti, a to i po ohnutí proudu. Z tohoto důvodu se na konec výstupní soustavy vkládají usměrňovací lopatky, aby narovnaly proud vzduchu do čistě osového směru [18], [36].



Obrázek 2.11: Rychlostní trojúhelník na výstupu z kola

2.2 Výkonové parametry

Základní parametr, který charakterizuje kompresor, je stlačení π . Je definováno jako poměr tlaku za kompresorem k tlaku před kompresorem. Udává se jako poměr celkových stavů [18]

$$\pi = \frac{p_{0,t}}{p_{5,t}}. \quad (2.6)$$

Dalším významným parametrem kompresoru je účinnost η , která charakterizuje kvalitu procesu stlačování. Je definována následovně [18]

$$\eta = \frac{\left(\frac{p_{0,t}}{p_{5,t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\left(\frac{T_{0,t}}{T_{5,t}}\right) - 1}. \quad (2.7)$$

Kapitola 3

Matematický model radiálního kompresoru

V úvodní kapitole byly popsány základní zákony zachování a základy mechaniky tekutin a termodynamiky. Jsou to základní vědní obory, které se používají pro návrh a analýzu proudění. Ve druhé kapitole byl shrnut účel a princip fungování radiálního kompresoru a jeho dílčích částí. Účelem této kapitoly je popis modelování geometrie kompresoru, představení použitého modelu proudění a popis některých ztrátových mechanismů, které se při proudění vzduchu radiálním kompresorem vyskytují.

3.1 Geometrický popis kompresoru

Na obrázku 2.2 je znázorněna skica soustrojí. Doposud nezodpovězenou otázkou je, o který druh křivek se jedná a jak je modelovat. V minulosti se z důvodu jednoduchosti a výpočetně menší náročnosti pro popis geometrie kanálu i lopatek používaly různé druhy kuželoseček. Větší variabilitu tvarů nabízí tzv. Beziérova křivka, kterou je také možné vyjádřit analyticky a navíc poskytuje přímočarější postup při diskretizaci oblasti, což bude detailněji diskutováno dále.

3.1.1 Bézierova křivka

Bézierova křivka stupně n je tvořena jedním segmentem, který je určen $(n + 1)$ řídicími body, které tvoří řídicí polygon. Krajními body řídicího polygonu prochází (interpoluje je), všechny vnitřní body polygonu aproximuje [28].

Nechť jsou dány řídicí body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$. Potom je vektorová rovnice Bézierovy křivky

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i = B_{0,n}(t) \mathbf{V}_0 + B_{1,n}(t) \mathbf{V}_1 + \dots + B_{n,n}(t) \mathbf{V}_n, t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (3.1)$$

kde bázové funkce

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, t \in \langle 0; 1 \rangle, i = 0, \dots, n \quad (3.2)$$

jsou Bernsteinovy polynomy n -tého stupně [28].

Aplikace na radiální kompresor

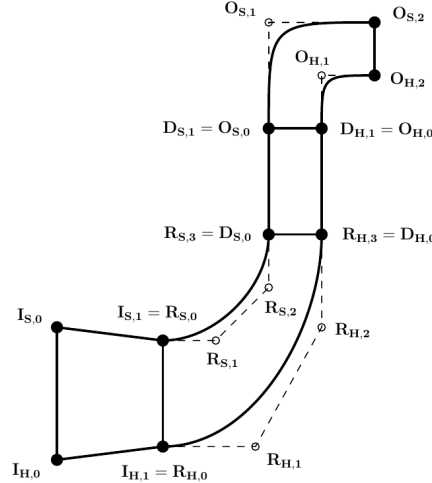
Pro popis tvaru průtočného kanálu oběžného kola byla zvolena Bézierova křivka třetího stupně tzv. kubika. Křivky vyšších řádů poskytují větší variabilitu tvaru, ale dle [46] je křivka třetího řádu pro tuto aplikaci dostatečná. Beziérovu kubiku lze popsat vektorovou rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= B_{0,3}(t)\mathbf{V}_0 + B_{1,3}(t)\mathbf{V}_1 + B_{2,3}(t)\mathbf{V}_2 + B_{3,3}(t)\mathbf{V}_3 = \\ &= (1-t)^3\mathbf{V}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{V}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{V}_2 + t^3\mathbf{V}_3, t \in \langle 0; 1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Geometrii vstupní soustavy, difuzorů i výstupní soustavy je možné modelovat obdobně. Vzhledem ke konstrukčním řešením difuzorů, které se objevují v dostupné literatuře, lze tyto části kompresoru modelovat pomocí křivek prvního řádu - úseček. Vektorová rovnice (3.3) se v tomto případě zjednoduší do tvaru

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{V}_0 + t\mathbf{V}_1, t \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (3.4)$$

Koncept geometrického popisu kompresoru vychází z představy, že fyzická komponenta začíná a končí stejně s parametrickou křivkou, kterou je popsána. Tento přístup umožňuje modelovat jednotlivé části samostatně a pak je zařadit za sebe. Další výhodou je jednoduchá možnost zaručení spojitosti na sebe navazujících částí při aerodynamickém návrhu kompresoru. Tento druh křivek navíc poskytuje možnost snadné manipulace s tvarem průtočného kanálu pro případnou optimalizační úlohu. Graficky je koncept geometrického popisu znázorněn na obrázku 3.1.



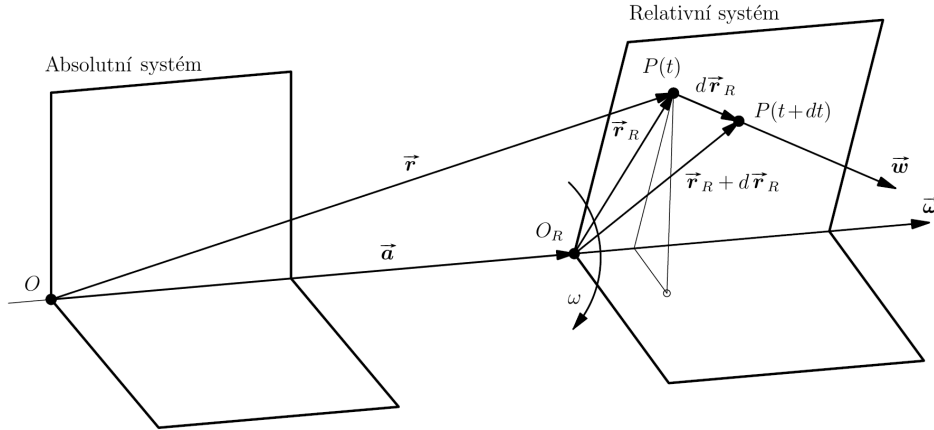
Obrázek 3.1: Koncept geometrického popisu kompresoru

3.2 Model proudění

V problematice turbostrojů se běžně používá adiabatický stlačitelný nevazký model proudění. Tento model předpokládá, že vazké efekty a přestup tepla mohou být zanedbány [3]. Při analýze proudění bývá často výhodné řešit jej v tzv. relativním souřadnicovém systému, který se vůči pevnému nebo též absolutnímu systému nějak pohybuje [47]. Ačkoliv obecně se může pohyb relativního systému skládat z pohybu translačního a rotačního, pro účely turbostrojů budou uvažovány pouze relativní systémy, které rotují okolo osy stroje.

3.2.1 Relativní systém souřadnic

Relativní rychlosti proudění v relativním souřadnicovém systému je nutno svázat s absolutní rychlostí, kterou pozorovatel vidí v absolutním systému. Na obrázku 3.2 je znázorněn relativní souřadnicový systém, který se vůči absolutnímu systému otáčí úhlovou rychlostí ω .



Obrázek 3.2: Relativní souřadnicový systém

Bez újmy na obecnosti mohou být oba počátky O_R relativního systému a O absolutního systému zvoleny tak, že leží na ose [47]. Sledujme částici, jejíž poloha $P(t)$ je popsána polohovým vektorem \vec{r}_R v relativním systému, v absolutním systému vektorem \vec{r} . Za časový úsek dt se částice v relativním systému přesune z bodu $P(t)$ do bodu $P(t+dt)$ a lze tak definovat relativní rychlost

$$\vec{w} = \frac{d\vec{r}_R}{dt}. \quad (3.5)$$

Zatímco se částice pohybuje relativní rychlostí, tak relativní polohový vektor \vec{r}_R současně vykoná rotaci vzhledem k absolutnímu systému. Důsledkem této rotace je změna polohového vektoru \vec{r}_R , pozorovaná pozorovatelem v absolutním systému, rovna $\vec{\omega} \times \vec{r}_R dt$ [47].

Polohový vektor $\vec{r} + d\vec{r}$ v absolutním systému lze vyjádřit jako

$$\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + d\vec{r}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R dt. \quad (3.6)$$

Takže změna polohového vektoru v absolutním systému \vec{r} pak je

$$d\vec{r} = d\vec{r}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R dt. \quad (3.7)$$

Z obrázku 3.2 je vidět, že polohový vektor \vec{r}_R lze vyjádřit rozdílem vektorů \vec{r} a \vec{a} . Díky tomu, že vektory \vec{a} a $\vec{\omega}$ jsou rovnoběžné, tak vektorový součin v rovnici (3.7) přechází do tvaru

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{r} - 0 = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.8)$$

Rychlost částice v absolutním souřadnicovém systému lze pomocí vztahů (3.5), (3.7) a (3.8) zapsat jako

$$\vec{c} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_R}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.9)$$

Zrychlení v relativním systému souřadnic

Označme veličiny vztažené k relativnímu souřadnicovému systému čárkou. Uvažujme obecný vektor \vec{a} . Míra změny vektoru \vec{a} v absolutním a relativním systému je dána vztahem [45]

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}. \quad (3.10)$$

Pokud si za libovolný vektor \vec{a} zvolíme právě vektor absolutní rychlosti \vec{c} popsany vztahem (3.9), dostaneme

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d'(\vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.11)$$

Roznásobením pravé strany rovnice (3.11) získáváme

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d'\vec{w}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.12)$$

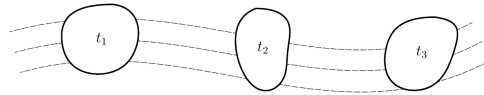
Z definice relativní rychlosti v rovnici (3.5) vidíme, že třetí člen na pravé straně rovnice (3.12) je stejný jako čtvrtý, čímž dostáváme vyjádření absolutního zrychlení pomocí relativních rychlostí ve tvaru

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d'\vec{w}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (3.13)$$

kde člen $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ představuje odstředivou sílu a člen $2\vec{\omega} \times \vec{w}$ Coriolisovo zrychlení [45], [47]. Pokud bychom uvažovali relativní systémy, které se otáčejí konstantní úhlovou rychlostí, tak by druhý člen na pravé straně rovnice (3.13) byl nulový.

3.2.2 Zákony zachování v relativním systému

Pro odvození základních zákonů zachování v rotujícím systému souřadnic je nutné definovat materiálovou derivaci. Ta je spjatá s pojmem materiální kontrolní objem znázorněným na obrázku 3.3. Je to takový kontrolní objem, který se pohybuje rychlostí proudu tekutiny a obsahuje stále stejné materiálové částice. Jeho hmotnost je konstantní, měnit se s časem může jeho tvar a objem [41].



Obrázek 3.3: Materiální kontrolní objem

V absolutním systému souřadnic se materiální kontrolní objem pohybuje rychlostí \vec{c} a materiální derivaci obecné veličiny ϕ lze vyjádřit jako [41]

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla\phi. \quad (3.14)$$

V relativním systému obdobně

$$\frac{D'\phi}{Dt} = \frac{\partial'\phi}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla'\phi. \quad (3.15)$$

Zákon zachování hmotnosti v relativním systému

Uvažujme materiální derivaci skalární veličiny jako je hustota nebo teplota. Materiální derivace je časová míra změny dané veličiny ve sledovaném materiálním kontrolním objemu a nezávisí tedy na volbě souřadnicového systému, takže pro obecnou skalární veličinu α platí [45]

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{D'\alpha}{Dt}. \quad (3.16)$$

Z rovnosti materiálových derivací pro skalární veličiny (3.16) a jejich definic v absolutním a relativním systému souřadnic (3.14) a (3.15) lze vyjádřit

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial'\phi}{\partial t} - (\vec{c} - \vec{w}) \cdot \nabla\alpha. \quad (3.17)$$

Pro připomenutí uvedeme tvar rovnice kontinuity (1.6) v absolutním souřadnicovém systému

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{c}) = 0. \quad (3.18)$$

Aplikací vztahu (3.17) pro hustotu ρ a dosazením za absolutní rychlost \vec{c} ze vztahu (3.9) dostaneme

$$\frac{\partial'\rho}{\partial t} - (\vec{c} - \vec{w}) \cdot \nabla\rho + \nabla \cdot [\rho(\vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r})] = 0. \quad (3.19)$$

Roznásobením posledního členu na levé straně lze upravit do tvaru

$$\frac{\partial'\rho}{\partial t} - (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla\rho + \nabla \cdot (\rho\vec{w}) + \nabla \cdot [\rho(\vec{\omega} \times \vec{r})] = 0. \quad (3.20)$$

Poslední člen na levé straně rovnice (3.20) lze rozepsat jako

$$\nabla \cdot [\rho(\vec{\omega} \times \vec{r})] = \nabla\rho \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \rho\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.21)$$

Dosazením do rovnice (3.20) získáme

$$\frac{\partial'\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{w}) - \nabla\rho \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \nabla\rho \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \rho\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0. \quad (3.22)$$

Poslední člen na levé straně rovnice (3.22) lze zapsat jako

$$\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot \nabla \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \times \vec{r} = 0. \quad (3.23)$$

Protože o vektorech \vec{r} a $\vec{\omega}$ předpokládáme, že jsou v čase pozorování konstantní, bude jejich rotace nulová, tím pádem i celý výraz bude roven nule [47].

Z rovnic (3.22) a (3.23) vidíme, že druhý a třetí člen zmizí a poslední člen je nulový. Rovnice kontinuity v relativním souřadnicovém systému tak nabývá tvaru

$$\frac{\partial'\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{w}) = 0. \quad (3.24)$$

Zákon zachování hybnosti v relativním systému

Rovnici hybnosti v relativním systému je možné formulovat ve dvou variantách. První vyjádření užívá relativní rychlosti. Časová změna rychlosti je pak popsána rovnicí (3.13). Tato formulace je vhodná pro úlohy, kde je většina oblasti uvažována jako otáčející se. Druhou možností je vyjádření pomocí absolutních rychlostí, které je vhodné pro aplikace, kde je většina oblasti stacionární [10]. V této práci byla zvolena rovnice hybnosti ve formulaci s absolutními rychlostmi.

Obdobně jako v případě rovnice kontinuity budeme vycházet z rovnosti materiálových derivací. Hybnost je oproti hmotnosti veličina vektorová. Pro libovolný vektor platí složitější vztah

$$\frac{D\vec{b}}{Dt} = \frac{D'\vec{b}}{Dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}. \quad (3.25)$$

Pro úplnost uveďme několik algebraických vztahů, na základě kterých bude provedeno odvození rovnice hybnosti v relativním systému. Předpokládejme, že skalární funkce α a vektorové funkce \vec{a} a \vec{b} jsou spojitě a diferencovatelné. Podle [23] a [47] pak platí:

$$(\alpha\vec{a}) \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \otimes \vec{b}), \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} + \vec{a} \cdot \nabla \vec{b}. \quad (3.27)$$

Pro připomenutí opět uveďme tvar rovnice hybnosti pro absolutní systém souřadnic (1.9), nyní už se zanedbáním vazkých členů.

$$\frac{\partial(\rho\vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{c} \otimes \vec{c}) = -\nabla p + \rho\vec{f}. \quad (3.28)$$

Z rovnice (3.26) je vidět, že konvektivní člen je možné vyjádřit jako

$$(\rho\vec{c}) \otimes \vec{c} = \vec{c} \otimes (\rho\vec{c}). \quad (3.29)$$

Užitím vztahů (3.27) a (3.29) je možné přepsat konvektivní člen do tvaru

$$\nabla \cdot [(\rho\vec{c}) \otimes \vec{c}] = \nabla \cdot [\vec{c} \otimes (\rho\vec{c})] = [\nabla \cdot \vec{c}](\rho\vec{c}) + \vec{c} \cdot \nabla(\rho\vec{c}). \quad (3.30)$$

Pokud využijeme relaci mezi materiálovými derivacemi pro libovolné vektory (3.25), za libovolný vektor zvolíme $\vec{b} = \rho\vec{c}$ a rozepíšeme materiálové derivace dle vztahů (3.14) a (3.15), lze napsat

$$\frac{\partial(\rho\vec{c})}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla(\rho\vec{c}) = \frac{\partial'(\rho\vec{c})}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \nabla(\rho\vec{c}) + \vec{\omega} \times (\rho\vec{c}). \quad (3.31)$$

Protože se snažíme získat vyjádření konvektivního členu ve formě diadického součinu, jako v původní rovnici (3.28), tak je třeba přičíst člen $[\nabla \cdot \vec{c}](\rho\vec{c})$, čímž dostaneme

$$\frac{\partial(\rho\vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho\vec{c}) \otimes \vec{c}] = \frac{\partial'(\rho\vec{c})}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \nabla(\rho\vec{c}) + \vec{\omega} \times (\rho\vec{c}) + [\nabla \cdot \vec{c}](\rho\vec{c}). \quad (3.32)$$

Právě přičtený výraz, který je nyní poslední na pravé straně rovnice (3.32), lze dále rozepsat

$$[\nabla \cdot \vec{c}](\rho\vec{c}) = [\nabla \cdot (\vec{\omega} + \vec{u})](\rho\vec{c}) = [\nabla \cdot \vec{\omega}](\rho\vec{c}) + [\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})](\rho\vec{c}). \quad (3.33)$$

Při odvozování rovnice kontinuity v relativním systému jsme dospěli ke vztahu (3.23), který ukazuje nulovost divergence unášivé rychlosti, takže rovnice (3.32) přejde do tvaru

$$[\nabla \cdot \vec{c}](\rho \vec{c}) = [\nabla \cdot \vec{w}](\rho \vec{c}). \quad (3.34)$$

Sečtením druhého a posledního členu na pravé straně rovnice (3.32) s využitím vztahu (3.34) získáváme

$$[\nabla \cdot \vec{c}](\rho \vec{c}) + \vec{w} \cdot \nabla(\rho \vec{c}) = [\nabla \cdot \vec{w}](\rho \vec{c}) + \vec{w} \cdot \nabla(\rho \vec{c}) = \nabla \cdot [\vec{w} \otimes (\rho \vec{c})]. \quad (3.35)$$

Rovnici (3.32) můžeme s pomocí (3.35) a (3.29) zapsat jako

$$\frac{\partial(\rho \vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{c} \otimes \vec{c}) = \frac{\partial(\rho \vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{w} \otimes \rho \vec{c}) + \vec{w} \times (\rho \vec{c}), \quad (3.36)$$

čímž dostáváme vyjádření zákona zachování hybnosti v relativním systému souřadnic ve formulaci s absolutními rychlostmi a se zanedbáním vazkých efektů

$$\frac{\partial(\rho \vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \otimes \vec{c}) + \vec{w} \times (\rho \vec{c}) = -\nabla p + \rho \vec{f}. \quad (3.37)$$

Zákon zachování energie v relativním systému

Zákon zachování energie je podobně jako rovnice kontinuity skalární rovnice. Pro připomenutí ji zde opět uvedeme pro absolutní systém souřadnic se zanedbáním vazkých členů tenzoru $\vec{\sigma}$ a přestupu tepla

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{c}) = -p(\nabla \cdot \vec{c}) + \rho \vec{u} \cdot \vec{f}. \quad (3.38)$$

Postupem, který byl blíže představen pro rovnici kontinuity v kapitole 3.2.2, lze levou stranu energetické rovnice přepsat do tvaru

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{c}) = \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{w}), \quad (3.39)$$

a tak dostáváme

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{w}) = -p(\nabla \cdot \vec{c}) + \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \quad (3.40)$$

Vyjádřením absolutní rychlosti \vec{c} jako součtu rychlosti relativní \vec{w} a unášivé $\vec{w} \times \vec{r}$ lze psát

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{w}) = -p[\nabla \cdot (\vec{w} + \vec{w} \times \vec{r})] + \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \quad (3.41)$$

Po roznásobení prvního členu na pravé straně rovnice (3.41) a s využitím vztahu (3.23) získáváme

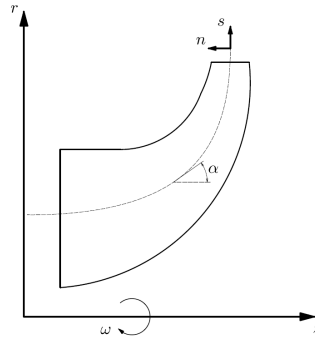
$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \vec{w}) = -p(\nabla \cdot \vec{w}) + \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \quad (3.42)$$

Úpravou dostáváme tvar zákona zachování energie v relativním systému se zanedbanými vazkými efekty a přestupem tepla

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + p)\vec{w}] = \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \quad (3.43)$$

3.2.3 Křivočarý systém souřadnic

Při řešení proudění radiálním kompresorem je užitečné transformovat řešené rovnice do křivočarého souřadnicového systému (s, n, φ) , který je znázorněn na obrázku 3.4. V tomto obecném křivočarém systému představuje souřadnice s vzdálenost měřenou podél proudové plochy, φ úhel běžně používaný v polárních souřadnicích a n souřadnici normálovou vzhledem k souřadnici s . Proudová plocha je definována jako plocha, která má nulovou normálovou složku rychlosti proudu, $w_n = 0$ [2], [3].

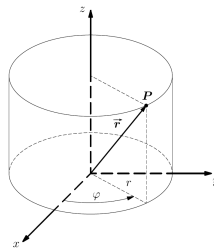


Obrázek 3.4: Křivočarý souřadnicový systém

Z tohoto obrázku je vidět, že pro transformaci rovnic do křivočarého systému souřadnic je možné využít cylindrický souřadnicový systém.

3.2.4 Cylindrický systém souřadnic

Cylindrický souřadnicový systém je, podobně jako kartézský, definován třemi souřadnicemi. Osa z je pro oba systémy totožná, ale na místo souřadnic x, y zde vystupují souřadnice r , která udává vzdálenost od osy z a φ , která definuje úhel průmětu průvodiče bodu \mathbf{P} do roviny xy .



Obrázek 3.5: Bod v cylindrickém souřadnicovém systému

Z obrázku 3.5 vyplývají vztahy pro převod souřadnic mezi kartézským a cylindrickým systémem. Pro souřadnice platí

$$\begin{aligned} x(r, \varphi, z) &= r \cos \varphi, \\ y(r, \varphi, z) &= r \sin \varphi, \\ z(r, \varphi, z) &= z; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ z(x, y, z) &= z. \end{aligned} \quad (3.45)$$

a pro libovolný vektor \vec{a} platí

$$\begin{aligned} a_x &= \cos \varphi a_r - \sin \varphi a_\varphi, & a_r &= \cos \varphi a_x + \sin \varphi a_y, \\ a_y &= \sin \varphi a_r + \cos \varphi a_\varphi, & a_\varphi &= -\sin \varphi a_x + \cos \varphi a_y, \\ a_z &= a_z; & a_z &= a_z. \end{aligned} \quad (3.46) \quad (3.47)$$

Pro jednotkové vektory v ortogonálních systémech, kterým cylindrický systém je [23] [47], platí

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1, \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Derivace jednotkových vektorů lze s přihlédnutím ke vztahům (3.47) vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hamiltonův operátor v cylindrických souřadnicích

Hamiltonův operátor ∇ je vektorový operátor, který je v kartézských souřadnicích definován jako [47]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.50)$$

Pro převedení složky x z kartézských do cylindrických souřadnic je třeba si uvědomit, že se jedná o složené funkce, a tak je nutné užít tzv. "chain rule"

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} \right). \quad (3.51)$$

Dosazením za x a y ze vztahů (3.44)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \cos \varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{r \sin \varphi}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right). \quad (3.52)$$

Obdobně pro složku y dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (3.53)$$

Složka z se pochopitelně nemění, protože v kartézském i cylindrickém souřadnicovém systému jsou osy z shodné. Dosazením těchto výrazů do původní definice operátoru dostáváme

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.54)$$

Dosazením složek vektoru vyjádřených v cylindrických souřadnicích získáváme

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.55)$$

Divergence v cylindrických souřadnicích

Odvozené zákony zachování obsahují konvektivní člen, který je formálně zapsán jako divergence vektorového nebo tenzorového pole. Divergenci vektorového pole $\vec{\mathbf{a}}$ je možné ve složkovém zápisu v cylindrickém systému zapsat jako

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{\mathbf{e}}_z \right) \cdot (a_r \vec{\mathbf{e}}_r + a_\varphi \vec{\mathbf{e}}_\varphi + a_z \vec{\mathbf{e}}_z) = \quad (3.56)$$

$$= \vec{\mathbf{e}}_r \left[\left(a_r \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_r}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial a_r}{\partial r} \right) + \left(a_\varphi \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} \right) + \left(a_z \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_z}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \right] + \quad (3.57)$$

$$+ \frac{1}{r} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \left[\left(a_r \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) + \left(a_\varphi \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \left(a_z \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_z}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} \right) \right] + \quad (3.58)$$

$$+ \vec{\mathbf{e}}_z \left[\left(a_r \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_r}{\partial z} + \vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial a_r}{\partial z} \right) + \left(a_\varphi \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial z} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + \left(a_z \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_z}{\partial z} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.59)$$

S uvážením derivací jednotkových vektorů $\vec{\mathbf{e}}_r$, $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$, $\vec{\mathbf{e}}_z$ podle jednotlivých souřadnic r , φ , z , které jsou popsány vztahy (3.49) a skutečnosti, že v ortogonálních souřadnicových systémech platí (3.48), lze výraz (3.56) zjednodušit do tvaru

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3.60)$$

První dva členy na pravé straně rovnice (3.60) lze zapsat jako derivaci součinu, a tak dostáváme

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3.61)$$

V zákonu zachování hybnosti se konektivní člen objevuje ve formě tzv. diadického součinu. Mějme vektory $\vec{\mathbf{a}}$ a $\vec{\mathbf{b}}$, tenzor druhého řádu $\vec{\vec{\Phi}}$ je definován následovně [47]

$$\vec{\vec{\Phi}} = \vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

V kartézském souřadnicovém systému lze divergenci tenzorového pole $\vec{\vec{\Phi}}$ vyjádřit jako [47]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\vec{\Phi}} &= \vec{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial z} \right) \\ &+ \vec{\mathbf{e}}_y \left(\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial z} \right) \\ &+ \vec{\mathbf{e}}_z \left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Z rovnice (3.63) vidíme, že výsledkem je vektor, jehož každá složka odpovídá divergenci sloupce tenzoru $\vec{\vec{\Phi}}$, kterou lze transformovat pomocí již definované divergence vektoru (3.61).

3.2.5 Zákony zachování v relativním cylindrickém systému

Pomocí právě odvozených diferenciálních operátorů lze systém řešených rovnic transformovat do cylindrického souřadnicového systému.

Rovnice kontinuity a energetická rovnice

Rovnice kontinuity v relativním systému má tvar

$$\frac{\partial' \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) = 0. \quad (3.64)$$

Aplikací divergence na vektor $\rho \vec{w}$ dostáváme rovnici kontinuity v cylindrickém systému

$$\frac{\partial' \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0. \quad (3.65)$$

Zákon zachování energie má formálně stejný tvar jako rovnice kontinuity. V relativním systému nabývá tvaru

$$\frac{\partial' e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + p) \vec{w}] = \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \quad (3.66)$$

Podobně jako v případě rovnice kontinuity lze na vektor $(e + p) \vec{w}$ aplikovat divergenci, čímž dostáváme energetickou rovnici v cylindrickém systému

$$\frac{\partial' e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial [r(e + p)w_r]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [(e + p)w_\varphi]}{\partial \varphi} + \frac{\partial [(e + p)w_z]}{\partial z} = \rho(c_r f_r + c_\varphi f_\varphi + c_z f_z). \quad (3.67)$$

Rovnice hybnosti

Zákon zachování hybnosti je složitější. V relativním systému souřadnic nabývá tvaru

$$\frac{\partial'(\rho \vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \otimes \vec{c}) + \vec{w} \times (\rho \vec{c}) = -\nabla p + \rho \vec{f}. \quad (3.68)$$

Pro zachování přehlednosti označme členy $\vec{w} \times (\rho \vec{c})$ a $\rho \vec{f}$ souhrnným symbolem \vec{q} . Po užití divergence je možné rozepsat tuto rovnici pro první složku

$$\frac{\partial' \rho c_r}{\partial t} + \rho \left(w_r \frac{\partial}{\partial r} + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \right) c_r \vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = q_r. \quad (3.69)$$

Roznásobením a aplikováním derivace součinu dostáváme

$$\frac{\partial' \rho c_r}{\partial t} + \rho \left(w_r \frac{\partial c_r}{\partial r} \vec{e}_r + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} c_r + w_z \frac{\partial c_r}{\partial z} \vec{e}_r \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = q_r. \quad (3.70)$$

Z derivací jednotkových vektorů v cylindrických souřadnicích platí $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi$, čímž dostáváme

$$\frac{\partial' \rho c_r}{\partial t} + \rho \left(w_r \frac{\partial c_r}{\partial r} \vec{e}_r + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + w_z \frac{\partial c_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{w_\varphi c_r}{r} \vec{e}_\varphi \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = q_r. \quad (3.71)$$

Obdobně pro druhou a třetí složku:

$$\frac{\partial' \rho c_\varphi}{\partial t} + \rho \left(w_r \frac{\partial c_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + w_z \frac{\partial c_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varphi - \frac{w_\varphi c_\varphi}{r} \vec{e}_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = q_\varphi, \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial' \rho c_z}{\partial t} + \rho \left(w_r \frac{\partial c_z}{\partial r} \vec{e}_z + w_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \varphi} \vec{e}_z + w_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = q_z. \quad (3.73)$$

3.3 Řešené rovnice

Z předchozích úvah jsme dospěli k soustavě parciálních diferenciálních rovnic, které jsou uvažovány v rotujícím systému souřadnic ve formulaci s absolutními rychlostmi

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) &= 0, \\ \frac{\partial'(\rho \vec{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \otimes \vec{c}) + \nabla p &= -\vec{w} \times (\rho \vec{c}) + \rho \vec{f}, \\ \frac{\partial' e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + p) \vec{w}] &= \rho \vec{c} \cdot \vec{f}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

V cylindrickém systému souřadnic lze systém (3.74) zapsat ve vektorové formě jako

$$\frac{\partial(r\vec{W})}{\partial t} + \frac{\partial(r\vec{F})}{\partial r} + \frac{\partial\vec{G}}{\partial\varphi} + \frac{\partial(r\vec{H})}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i, \quad (3.75)$$

kde vektory \vec{W} , \vec{F} , \vec{G} a \vec{H} nabývají hodnot

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho c_r \\ \rho c_\varphi \\ \rho c_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w_r \\ \rho w_r c_r + p \\ \rho w_r c_\varphi \\ \rho w_r c_z \\ (e + p) w_r \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho w_\varphi \\ \rho w_\varphi c_r \\ \rho w_\varphi c_\varphi + p \\ \rho w_\varphi c_z \\ (e + p) w_\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} \rho w_z \\ \rho w_z c_r \\ \rho w_z c_\varphi \\ \rho w_z c_z + p \\ (e + p) w_z \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Pokud předpokládáme jako proudící médium ideální plyn, tak pro tlak dle (1.24) platí

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \rho \frac{c_r^2 + c_\varphi^2 + c_z^2}{2} \right). \quad (3.77)$$

3.3.1 Kvazi-1D Eulerovy rovnice v křivočarých souřadnicích

V systému řešených rovnic (3.75) je možné zanedbat úhlové derivace [6], [24]. Systém (3.75) lze navíc rozšířit výrazem $2\pi b$, kde b představuje příčný rozměr průtočného kanálu, čímž dostáváme Eulerovy rovnice ve tvaru kvazi-1D

$$\frac{\partial(A\vec{W})}{\partial t} + \frac{\partial(A\vec{F})}{\partial r} + \frac{\partial(A\vec{H})}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i. \quad (3.78)$$

Z obrázku 3.4 je vidět vztah mezi cylindrickým a křivočarým souřadnicovým systémem. Systém řešených rovnic (3.78) tak nabývá tvaru

$$\frac{\partial(A\vec{W}_s)}{\partial t} + \frac{\partial(A\vec{F}_s)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i, \quad (3.79)$$

kde pro vektory \vec{W}_s a \vec{F}_s platí

$$\begin{aligned} \vec{W}_s &= \vec{W}, \\ \vec{F}_s &= \vec{F} t_r + \vec{H} t_z. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Vektor $\vec{t} = (t_r, 0, t_z)$ představuje jednotkový vektor ve směru tečny na střednici kompresoru.

3.3.2 Zdrojové členy

Na pravé straně řešeného systému rovnic (3.79) se vyskytují členy \vec{Q}_i , které nazýváme zdrojové členy. Pomocí těchto členů je možné modelovat změny v geometrii, ale i složitější procesy jako je předávání práce proudícímu médiu nebo přenos tepla.

Důsledkem transformace zákona zachování hybnosti do relativního systému souřadnic jsme na pravé straně získali člen $\vec{\omega} \times (\rho \vec{c})$ popisující odstředivou a Coriolisovu sílu.

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_z \rho c_\varphi \\ -\omega_z \rho c_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Další transformací rovnice hybnosti do cylindrického systému jsme navíc získali další člen

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \frac{w_\varphi c_\varphi}{r} A \\ -\rho \frac{w_\varphi c_r}{r} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

V tomto případě jsou tyto členy považovány za zdrojové jen proto, že se nachází na pravé straně rovnice, ale jak bylo vidět v 3.2.2 a 3.2.5, tak jsou součástí rovnice hybnosti.

Proměnná geometrie

Zdrojový člen popisující změnu průřezu průtočného kanálu má tvar [34]

$$\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial A}{\partial s} p \vec{t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Změna směru proudění

Při proudění radiálním kompresorem dochází ke změně směru proudu z axiálního do radiálního. Přístupů jak modelovat tuto skutečnost je více. První z možností je nahrazení stěny kanálu silou, která nutí médium změnit směr proudění. Tato síla působí ve směru kolmém vzhledem ke střednici [30]. Zdrojový člen by pak bylo možné vyjádřit jako

$$\vec{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}_{ch} A \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Druhou variantou je promítání proudu do správného směru pomocí tečného vektoru \vec{t} . Tento proces musí probíhat v průběhu řešení a lze ho zapsat jako

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{t}) \vec{t}. \quad (3.85)$$

Síla od lopatek

Předávání práce proudy vzduchu je realizováno pomocí lopatek. Je tedy nutné stanovit sílu, kterou tyto lopatky působí na proudové pole. Připomeňme relativní rychlost

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} c_r \\ c_\varphi - \omega r \\ c_z \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Popišme sílu od lopatky jako

$$\vec{F}_b = F_b \vec{n}, \quad (3.87)$$

kde vektor \vec{n} značí normálu k lopatce oběžného kola kompresoru. Postupem blíže popsáním v [42] lze dospět k vyjádření velikosti síly od lopatky ve tvaru

$$F_b = -\frac{\rho \vec{n} \cdot \vec{w}}{\Delta t}. \quad (3.88)$$

Zdrojový člen pak nabývá tvaru

$$\vec{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}_b A \\ \vec{F}_b \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) A \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Ztrátový člen

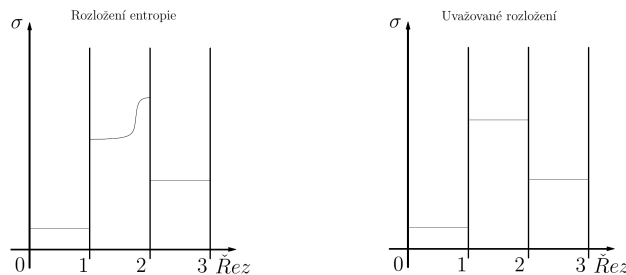
Ve trojrozměrném případě je odpor prostředí v různých směrech různý. V jednorozměrném případě je možné uvažovat odpor jako izotropní, takže nám postačí jedna veličina K . Zdrojový člen popisující ztráty má tvar

$$\vec{Q}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -KA \vec{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

kde

$$K = \frac{1}{2} \rho \sigma \|\vec{c}\|^2. \quad (3.91)$$

Ve vztahu (3.91) vystupuje součinitel nárůstu entropie σ , jehož hodnotu je možné stanovit pomocí empiricky stanovených korelací pro jednotlivé komponenty kompresoru. Rozložení přírůstku entropie má relativně složitý průběh, který je možné získat ze 3D simulace. V našem případě se spokojíme s konstantním rozložením, jak je znázorněno na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Rozložení ztrát

3.4 Ztrátový model

Pro analýzu proudění a návrh turbostrojů je nutné zavést metody jak svázat reálný nevratný děj s idealizovaným. Obecně tyto nevratné procesy nejsou matematicky snadno popsatelné. V mnohých případech je nutné sestavit idealizovaný model, který je následně modifikován zahrnutím nějaké formy ztrátových koeficientů.

Ztráty v kompresoru se dělí na vnitřní a vnější. Mezi vnitřní ztráty patří ztráty vlivem vstupu proudícího média do oběžného kola, tření, difuze, míšení proudů a víření. Další ztráta vzniká únikem radiální vůlí, kdy proud přetéká z přetlakové části lopatky na podtlakovou. V této práci radiální vůle není modelována, takže není uvažována ani ztráta, která by tak vznikala.

Vnější ztráty jsou takové, které zvyšují celkovou entalpii na výstupu z oběžného kola bez odpovídajícího zvýšení hodnoty tlaku. Řadí se mezi ně ztráta zpětným prouděním z difuzoru do oběžného kola a ztráta interakcí zadní stěny oběžného kola s vedlejší nehybnou stěnou. Tyto vnější ztráty mají charakter členu přestupu tepla [48], které v této práci nejsou uvažovány.

Zavedme entropii s jako měřítko nevratnosti nebo odklonu od ideálního děje. Diferenciál entropie lze zapsat jako [48]

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P}. \quad (3.92)$$

Pro isentropický děj dostáváme integrací

$$s_{1,t} - s_{2,t,isen} = 0 = c_p \ln \left(\frac{T_{1,t}}{T_{2,t,isen}} \right) + r \ln \left(\frac{p_{2,t,isen}}{p_{1,t}} \right). \quad (3.93)$$

Pro nevratný děj dostáváme integrací

$$s_{1,t} - s_{2,t} = c_p \ln \left(\frac{T_{1,t}}{T_{2,t}} \right) + r \ln \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right). \quad (3.94)$$

Odečtením rovnice (3.93) od (3.94) a substitucemi $s_{1,t} = s_1$, $s_{2,t} = s_2$, $T_{2,t} = T_{2,t,isen}$ získáváme

$$s_1 - s_2 = r \ln \left(\frac{p_{2,t}}{p_{2,t,isen}} \right). \quad (3.95)$$

Poslední úpravou dostáváme bezrozměrný koeficient σ popisující nárůst entropie

$$\frac{p_{2,t}}{p_{2,t,isen}} = \exp \left(-\frac{\Delta s}{r} \right) = \sigma. \quad (3.96)$$

Ve statorech neprobíhá předávání práce, takže celková teplota je konstantní, ale dochází zde k nevratnému poklesu celkového tlaku

$$p_{1,t} = p_{2,t,isen} > p_{2,t}. \quad (3.97)$$

Pro absolutní souřadnicový systém může být koeficient σ vyjádřen pomocí vztahů (3.96) a (3.97) jako

$$\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} = \sigma. \quad (3.98)$$

V případě rotorů, které jsou uvažovány v relativním souřadnicovém systému platí [48]

$$\sigma = \left(\frac{T'_{1,t}}{T'_{2,t}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p'_{2,t}}{p'_{1,t}} \right). \quad (3.99)$$

Koeficient ztrát může být definován pomocí poměru tlaků nebo pomocí celkových nebo statických entalpií. V případě koeficientu ztrát celkového tlaku existuje také několik variant [48]. V této práci je zvolena možnost

$$Y = \frac{p_{1,t} - p_{2,t}}{p_{1,t}} = 1 - \frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} = 1 - \sigma. \quad (3.100)$$

Nárůst entropie vyjádřený koeficientem σ je možné definovat i jinak [48]

$$\sigma = \left(1 - (\gamma - 1) \left(\frac{U_2}{a_{2,t}} \right)^2 \Delta q \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (3.101)$$

Zde $a_{2,t}$ představuje rychlost zvuku vztaženou k celkovému stavu na výstupu z kola a Δq značí bezrozměrný součinitel entalpické ztráty vztažený k obvodové rychlosti na vnějším průměru oběžného kola [48]. Úpravou dostáváme

$$\sigma = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma r T_{2,t}} U_2^2 \Delta q \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (3.102)$$

Poslední úpravou dostáváme

$$\sigma = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma r T_{2,t}} \Delta H_t \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.103)$$

a vidíme, že velikost ztrátového koeficientu závisí na celkové teplotě na výstupu z oběžného kola $T_{2,t}$ a celkového přírůstku ztrát entalpie ΔH_t , který se stanoví jako součet dílčích přírůstků vyjádřených pomocí korelací.

3.4.1 Empirické korelace

Pro každý ze ztrátových mechanismů existuje několik empirických korelací, které lépe či hůře popisují daný fyzikální jev. Ztrátových modelů, které z nich lze sestavit je nepřehledné množství. Kvalita výpočtu, v tom smyslu jak věrohodně reflektují inženýrskou realitu, tedy závisí na volbě ztrátového modelu. V této práci je použitý ztrátový model publikovaný autorem Oh v [32].

Incidence

Ztráta incidencí vzniká, pokud se úhel relativní rychlosti β_1 liší od vstupního geometrického úhlu lopatky φ_1 . V takovém případě proud náhle změní směr proudění, což zapříčiní odtržení proudu. Conrad [4] dospěl k závěru, že ztráta incidencí je úměrná kvadrátu tangenciální složky relativní rychlosti na vstupu do oběžného kola. Velikost ztráty pak lze vyjádřit vztahem

$$\Delta H_{inc} = f_{inc} \frac{w_\varphi^2}{2}, \quad (3.104)$$

kde součinitel incidence f_{inc} nabývá hodnot

$$f_{inc} = 0,5 - 0,7. \quad (3.105)$$

Namáhání lopatky

Při proudění oběžným kolem poblíž stěn lopatek se vytváří záporný rychlostní gradient, což vede k nárůstu mezní vrstvy a odtrhávání proudu. Tento jev pak vede ke ztrátě vlivem namáhání lopatek. Podle Coppage [5] je nárůst mezní vrstvy řízen difuzním koeficientem

$$D_f = 1 - \frac{w_2}{w_{1,T}} + 0,75 \frac{\Delta H_{Euler}}{u_2^2} \frac{w_2}{w_{1,T}} \left[\frac{Z}{\pi} \left(1 - \frac{D_{1,T}}{D_2} \right) + 2 \frac{D_{1,T}}{D_2} \right]^{-1}, \quad (3.106)$$

kde ΔH_{Euler} představuje teoretickou změnu entalpie. Tu lze stanovit pomocí Eulerovy turbínové rovnice [17]

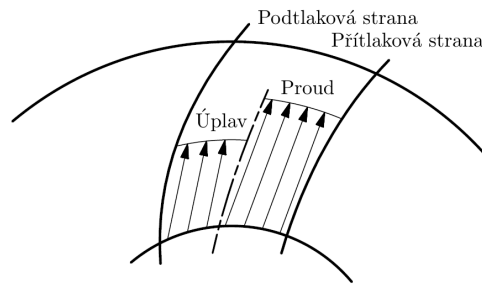
$$H_{Euler} = u_2 c_{2,\varphi} - u_1 c_{1,\varphi}. \quad (3.107)$$

Samotná korelace pak má tvar [5]

$$\Delta H_{bld} = 0,05 D_f^2 u_2^2. \quad (3.108)$$

Míšení

V jednorozměrném případě sledujeme proudění a s ním spojený přenos energie na pracovní látku ve stupni radiálního kompresoru na střední proudnici, na níž předpokládáme střední rychlosti. Tento předpoklad je splněn jen do určité míry, bohužel zřejmě v nejmenší míře v hlavní součásti stupně, kterou je oběžné kolo [17]. Nerovnoměrnosti v rychlostním poli vznikají rozdílnými průběhy rychlostí na podtlakové a přetlakové straně, přítomností relativních vírů a Coriolisovou silou. Ta je kolmá na relativní rychlost proudu, a tudíž nekoná práci, ale je rozdílná v jádře proudu a v blízkosti stěny, kde způsobuje změny ve směru proudění v mezní vrstvě vzhledem k proudění v jádře proudu [17]. Nerovnoměrnost rychlostního pole v průtočném kanále je zobrazena na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Nerovnoměrnost rychlostního pole

Ztráta míšením proudů v průtočném kanále, jak ji popsali Johnson a Dean v [16], má tvar

$$\Delta H_{mix} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha_2} \left(\frac{1 - \epsilon_w - b^*}{1 - \epsilon_w} \right)^2 \frac{c_2^2}{2}, \quad (3.109)$$

kde ϵ_w představuje šířku úplavu v kanále. Podle [33] nabývá hodnot mezi 0,366 a 0,482. V této práci byla hodnota nastavena na střed intervalu. Symbol b^* značí poměr šířky bezlopatkového difuzoru na vstupu ku šířce rotoru na výstupu a symbol α je úhel odklonu absolutní rychlosti od meridionální roviny [16].

Tření

Ztráta třením je způsobena smykovou silou na povrchu lopatky. Je založena na předpokladu proudění v trubici a neuvažuje nerovnoměrné rychlostní pole způsobené mezní vrstvou [15].

$$\Delta H_{sf} = 2C_f \frac{L_b}{D_{hyd}} \bar{w}^2, \quad (3.110)$$

kde součinitel C_f lze vyjádřit v závislosti na Reynoldsově čísle [41] jako

$$C_f = 0,0412 Re^{-0,1925}, \quad (3.111)$$

\bar{w} je průměrná relativní rychlost

$$\bar{w} = \frac{2w_2 + w_{1,T} - w_{1,H}}{4}, \quad (3.112)$$

L_b je délka průtočného kanálu, kde se nachází lopatky

$$L_b \approx \frac{\pi}{8} \left(D_2 - \frac{D_{1,T} + D_{1,H}}{2} - b_2 + 2L_z \right) \left(\frac{2}{\frac{\cos \beta_{1,T} + \cos \beta_{1,H}}{2} + \cos \beta_2} \right) \quad (3.113)$$

a D_{hyd} je průměrný hydraulický průměr

$$\frac{D_{hyd}}{D_2} = \frac{\cos \beta_2}{\frac{Z}{\pi} + \frac{D_2 \cos \beta_2}{b_2}} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{D_{1,T}}{D_2} + \frac{D_{1,H}}{D_2} \right) \left(\frac{\cos \beta_{1,T} + \cos \beta_{1,H}}{2} \right)}{\frac{Z}{\pi} + \left(\frac{D_{1,T} + D_{1,H}}{D_{1,T} - D_{1,H}} \right) \left(\frac{\cos \beta_{1,T} + \cos \beta_{1,H}}{2} \right)}. \quad (3.114)$$

Ztráta v bezlopatkovém difuzoru

Za oběžným kolem kompresoru se vždy nachází bezlopatkový prostor. Vzniká zde entalpická ztráta vlivem tření, víření a difuze. Korelaci popisující ztrátu v bezlopatkovém difuzoru odvodil Stanitz [40]

$$\Delta H_{vld} = c_p T_{2,t} \left[\left(\frac{p_{3,s}}{p_{3,t}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(\frac{p_{3,s}}{p_{2,t}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (3.115)$$

3.4.2 Implementace ztrátového modelu

Samotná implementace ztrátového modelu je realizována pomocí přidružené obyčejné diferenciální rovnice pro velikost ztráty

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \epsilon(Y^* - Y), \quad (3.116)$$

kde veličina Y představuje výpočtem vyhodnocenou velikost ztráty, Y^* předepsanou hodnotu ztrát, která je dána empirickými korelacemi a ϵ je relaxační koeficient, který je menší než jedna.

System parciálních diferenciálních rovnic (3.79) a přidružená obyčejná diferenciální rovnice (3.116) se řeší současně. V každém časovém kroku jsou v každé části kompresoru stanovené hodnoty Y pomocí vztahů (3.96) a (3.99), které jsou porovnávány s předepisovanými hodnotami Y^* , které jsou získány pomocí popsáných empirických korelací.

Kapitola 4

Numerické metody pro řešení výchozích rovnic

V předchozích kapitolách byl sestaven výchozí systém rovnic, které popisují proudění uvnitř turbostroje. Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které současnými metodami nelze řešit analyticky. Existuje několik základních metod jak tyto problémy řešit, jako jsou metoda konečných prvků nebo metoda konečných diferencí. Pro problémy proudění tekutin je však vhodná metoda konečných objemů, kterou se budeme v této kapitole zabývat.

4.1 Rovnice advekce

Rovnice advekce je lineární skalární rovnice hyperbolického typu [27]. Vzhledem k linearitě a celkové jednoduchosti rovnice je možné numerické metody pro její řešení analyzovat a ukázat tak některé vlastnosti jako je stabilita nebo konvergence. Uvažujme počáteční úlohu

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

kde člen $f(u(x, t))$ je fyzikální tok, který je dán jako

$$f(u(x, t)) = au(x, t), \quad a = \text{konst.}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Prostorovou proměnnou x lze diskretizovat s konstantním krokem Δx . Můžeme definovat body $x_i = i\Delta x$, které nazveme jako středy buněk. Obdobně můžeme zavést i body $x_{i+1/2}$, které označíme jako stěny konečných objemů [27].

$$\left. \begin{aligned} x_i &= i\Delta x, \\ x_{i+1/2} &= \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \end{aligned} \right\} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

Integrací rovnice (4.1) přes interval $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ dostáváme

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} dx = 0. \quad (4.4)$$

Záměnou pořadí derivace a integrálu u prvního členu, integrací druhého členu a vydělením rovnice Δx získáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx \right) + \frac{f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))}{\Delta x} = 0, \quad (4.5)$$

a vidíme, že výraz v závorce lze chápat jako průměrnou hodnotu řešení $u(x, t)$ na intervalu, přes který integrujeme, v čase t . Označme tedy tento výraz jako

$$u_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx. \quad (4.6)$$

Aproximujme fyzikální tok f tzv. numerickým tokem F

$$f(u(x_{i+1/2})) \approx F(u(x_i, t), u(x_{i+1}, t)) = F(u_i(t), u_{i+1}(t)) = F_{i+1/2}(t), \quad (4.7)$$

čímž dostáváme metodu konečných objemů v semidiskrétním tvaru

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [F_{i+1/2}(t) - F_{i-1/2}(t)]. \quad (4.8)$$

Rovnice (4.8) už představuje soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, které umíme řešit různými způsoby. Nejsnažší z nich je Eulerova dopředná metoda. Časovou proměnnou t je možné diskretizovat obdobně jako prostorovou x . Můžeme definovat časové vrstvy t^n

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

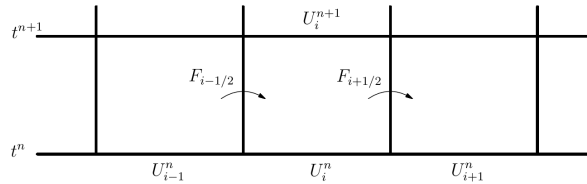
Aproximaci časové derivace pak zapíšeme jako

$$\frac{du_i(t^n)}{dt} \approx \frac{U_i(t^{n+1}) - U_i(t^n)}{\Delta t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}. \quad (4.10)$$

Dosazením této náhrady do vztahu (4.8) dostáváme diskrétní verzi metody konečných objemů

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}(t) - F_{i-1/2}(t)]. \quad (4.11)$$

Pro představu je ilustrace metody konečných objemů v časoprostoru $x-t$ zobrazena na obrázku.



Obrázek 4.1: Ilustrace metody konečných objemů

Z rovnice (4.11) a obrázku 4.1 je patrné, že numerické metody založené na metodě konečných objemů se budou odlišovat volbou numerického toku $F_{i\pm 1/2}$. Uvedme základní protiproudé schéma, tzv. upwind, které je základem pro mnoho složitějších metod [27].

$$F_{i+1/2}^n = \begin{cases} f(u_i^n) & \text{pro } a \geq 0 \\ f(u_{i+1}^n) & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

4.2 Konvergence, konzistence a stabilita metod

Kdykoliv je použita numerická metoda pro řešení diferenciální rovnice, měla by být diskutována přesnost a konvergence. V praxi aplikujeme na diskrétní síť s konečným počtem prvků nějakou metodu a snažíme se zajistit, aby numerické řešení s dostatečnou přesností aproximovalo skutečné řešení. Pro reálné úlohy bohužel přesné řešení k porovnání výsledků není k dispozici. Musíme se tak spolehnout na testování metod na validačních úlohách, kde je přesné řešení známé, a na teoretickou analýzu konvergence. [27]

4.2.1 Konvergence

Aby bylo možné mluvit o termínech jako přesnost nebo konvergence, je nutné nejdříve kvantifikovat chybu, které se při řešení dopouštíme. Označme symbolem u_i^n exaktní řešení a aproximativní řešení symbolem U_i^n . V případě metody konečných diferencí bychom exaktní řešení uvažovali jako hodnotu v uzlu sítě

$$u_i^n = u(x_i, t_n). \quad (4.13)$$

Pro metodu konečných objemů chceme aproximativní řešení U_i^n porovnávat s průměrnou hodnotou v dané buňce

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx. \quad (4.14)$$

Definujme globální chybu aproximace E_G jako rozdíl numerického a analytického řešení

$$E_G^n = U_i^n - u_i^n. \quad (4.15)$$

Uvažujme posloupnost výpočetních sítí, které budeme zjemňovat. Velikost parametrů sítě Δx a Δt pak půjde postupně k nule. Řekneme, že metoda konverguje k přesnému řešení, pokud platí [21], [27]

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|E_G^n\| = 0. \quad (4.16)$$

Obecně je nemožné získat jednoduché vyjádření pro globální chybu E_G^n . Na místo pokusů získat chybu přímo, je obecně uznávaným přístupem zkoumání numerických metod z hlediska lokální chyby aproximace, které se dopouštíme při každém jednotlivém časovém kroku. Zaveďme tedy pojmy konzistence a stabilita metody.

4.2.2 Konzistence

Obecná explicitní numerická metoda popsaná rovnicí (4.11) může být zapsána pomocí operátoru \mathcal{N} , který aproximuje řešení ze stávajícího časového kroku do dalšího

$$U_i^{n+1} = \mathcal{N}(U_i^n). \quad (4.17)$$

Numerický operátor \mathcal{N} můžeme aplikovat i na hodnoty exaktního řešení u_i^n . Chybu jednoho kroku můžeme definovat jako rozdíl $N(u_i^n)$ a skutečného řešení v následujícím časovém kroku. Lokální chyba aproximace je pak definována jako chyba jednoho kroku vztahovaná k velikosti časového kroku [27]

$$E_L^n = \frac{1}{\Delta t} [\mathcal{N}(u_i^n) - u_i^{n+1}]. \quad (4.18)$$

Lokální chybu aproximace v závislosti na diskretizaci popisuje tzv. řád aproximace. O numerické metodě \mathcal{N} řekneme, že je r -tého řádu v prostoru a s -tého řádu v čase, jestliže

$$E_L^n = \mathcal{O}(\Delta x^r, \Delta t^s). \quad (4.19)$$

Zkoumání chyby, kterou do řešení vnášíme v každém časovém kroku, vede k pojmu konzistence metody. O metodě řekneme, že je konzistentní s danou diferenciální rovnicí, pokud platí [27]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|E_L^n\| = 0. \quad (4.20)$$

4.2.3 Stabilita

Zatímco konzistence metody ukazuje lokální chybu aproximace, stabilita nám dává informaci o tom, že tyto lokální chyby se časem nezvětšují a tím pádem se nezvětšuje ani globální chyba aproximace [27]. Stabilitu lze zkoumat mnoha různými způsoby. V této práci se omezíme pouze na tzv. spektrální analýzu.

Metoda je stabilní, jestliže pro každý čas $T > 0$ existují konstanty $C, k > 0$ takové, že platí

$$\|\mathcal{N}(\cdot)\| \leq C, \quad \Delta t \leq k, \quad n\Delta t \leq T. \quad (4.21)$$

Základní teorém o kovergenci lineárních metod je Laxova věta o ekvivalenci. Důkaz této věty je možné najít v [26], my se však omezíme na její znění a důsledky, které s ní vyplývají.

Laxova věta o ekvivalenci

Pro konzistentní lineární schéma je stabilita nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci.

4.2.4 Analýza Upwind schématu

Uvažujme metodu konečných objemů v diskrétním tvaru a dosadíme za numerické toky $F_{i\pm 1/2}$ schéma Upwind ze vztahu (4.12)

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) & \text{pro } a \geq 0 \\ u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{pro } a < 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Pro analýzu tohoto schématu se omezíme pouze na případ, kdy je $a \geq 0$.

Řád aproximace a konzistence

Dosadíme vyšetřované schéma do definice lokální chyby aproximace (4.18)

$$E_L(x, t) = \frac{1}{\Delta t}(u(x, t) - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u(x, t) - u(x - \Delta x, t)) - u(x, t + \Delta t)). \quad (4.23)$$

Rozvinutím jednotlivých členů do Taylorova rozvoje dostáváme

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.24)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.25)$$

Dosazením rozvoju do vztahu (4.23) a úpravami získáváme

$$E_L(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (4.26)$$

S uvážením původního problému (4.1) dostáváme

$$E_L(x, t) = \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t). \quad (4.27)$$

Z rovnice (4.27) je vidět, že upwind schéma je prvního řádu přesnosti v čase i v prostoru.

Stabilita

Uvažujme chybu ve tvaru komplexního čísla

$$E = \lambda^n e^{\Im i \alpha}, \quad (4.28)$$

kde λ představuje amplitudu odpovídající frekvenci $\alpha \in (0, 2\pi)$ v n -té časové hladině, symbol \Im je komplexní jednotka $\Im = \sqrt{-1}$ a i značí index buňky [21]. Dosazením do původního schématu (4.22) dostáváme

$$\lambda^{n+1} e^{\Im i \alpha} = \lambda^n e^{\Im i \alpha} - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (\lambda^n e^{\Im i \alpha} - \lambda^{n+1} e^{\Im(i-1)\alpha}). \quad (4.29)$$

Vydělením součinem $\lambda^n e^{\Im i \alpha}$ dostáváme

$$\lambda = 1 - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{\Im \alpha}) = 1 - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (1 - \cos \alpha + \Im \sin \alpha). \quad (4.30)$$

Metoda je stabilní ve smyslu spektrálního kritéria, pokud platí [21]

$$|\lambda| \leq 1. \quad (4.31)$$

Pro snazší zápis označme podíl v rovnici (4.30) symbolem ν

$$\nu = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \quad (4.32)$$

a upravme

$$|\lambda|^2 = (1 - \nu + \nu \cos \alpha)^2 + \nu^2 \sin^2 \alpha \quad (4.33)$$

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \alpha). \quad (4.34)$$

Aby mohla být splněna podmínka (4.31), musí platit i

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &\leq 1 \\ 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \alpha) &\leq 1 \\ -2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \alpha) &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Vidíme, že člen $(1 - \cos \alpha)$ je vždy nezáporný, ν je dokonce kladné, takže dostáváme

$$1 - \nu \geq 0 \implies \nu \leq 1 \implies \frac{|a| \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (4.36)$$

čímž získáváme stabilitní podmínku pro velikost časového kroku Δt , tzv. CFL podmínku

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}. \quad (4.37)$$

Jak bylo vidět v (4.27), tak protiproudé schéma je konzistentní. Nyní jsme ukázali, že metoda je i stabilní. Díky Laxově větě o ekvivalenci tak lze říci, že metoda je konvergentní.

4.3 Vlastnosti Eulerových rovnic

Uvažujme nyní systém Eulerových rovnic v kartézském souřadnicovém systému pro jedno-
rozměrný případ

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0. \quad (4.38)$$

Tento systém lze s využitím jakobiánu numerického toku F zapsat v kvazilineární formě [21]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \vec{A}(\vec{W}) \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0, \quad (4.39)$$

kde jakobián $\vec{A}(\vec{W})$ nabývá tvaru

$$\vec{A}(\vec{W}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - hu & h - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Pro tuto matici lze stanovit vlastní čísla λ_i a jim příslušné vlastní vektory [21]

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - a \\ \lambda_2 &= a \\ \lambda_3 &= u + a. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Vlastní čísla této matice jsou reálná a navzájem různá, takže systém Eulerových rovnic je
hyperbolický. Díky tomu je možné matici $\vec{A}(\vec{W})$ diagonalizovat pomocí diagonální matice
 $\vec{\Lambda}(\vec{W})$, která obsahuje vlastní čísla λ a tenzoru $\vec{R}(\vec{W})$, který je složen z vlastních vektorů [27]

$$\vec{R}^{-1} \vec{A} \vec{R} = \vec{\Lambda}, \quad \vec{A} = \vec{R} \vec{\Lambda} \vec{R}^{-1}. \quad (4.42)$$

Definujme tzv. charakteristické proměnné jako

$$\vec{V} = \vec{R}^{-1} \vec{W}. \quad (4.43)$$

Dosazením za Jacobiho matici $\vec{A}(\vec{W})$, vynásobením rovnice (4.39) tenzorem \vec{R}^{-1} a zavedením
charakteristických proměnných dostáváme Eulerovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Lambda}(\vec{W}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0. \quad (4.44)$$

Vidíme, že systém (4.38) se rozpadl na tři nezávislé hyperbolické skalární rovnice.

CFL podmínka

V případě jediné rovnice advekce je pouze jedno vlastní číslo, což v případě systému rovnic
neplatí. Stabilitní podmínka pak má tvar

$$\Delta t \leq CFL \frac{\Delta x}{|\lambda_{max}|}, \quad |\lambda_{max}| = \max(|u + a|, |u|, |u - a|). \quad (4.45)$$

4.4 Numerický tok

Vlivem diskretizace oblasti a způsobu rekonstrukce proměnných vzniká v metodě konečných objemů na rozhraních buněk řada tzv. Riemannových problémů. Ten lze chápat jako náhlou nespojitost, kdy se hodnota veličiny skokově mění z hodnoty vlevo na hodnotu vpravo.

Řešiče Riemannova problému mohou být exaktní nebo aproximativní. Aproximativní řešiče, které jsou použity v této práci, mohou být reprezentovány klasickými schémata jako jsou Laxovo-Friedrichsovo nebo Laxovo-Wendroffovo a mnoho jiných. Modernější numerické toky jsou založeny na protiproudém schématu, jehož vlastnosti byly ukázány v předchozí části.

4.4.1 Schéma HLL

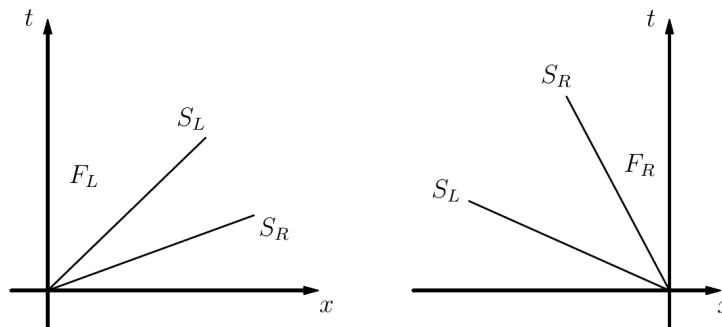
Schéma HLL je aproximativní Riemannův řešič, který představili autoři Harten, Lax a van Leer [13]. Toto schéma zanedbává kontaktní nespojitost exaktního řešení Riemannova problému pro systém Eulerových rovnic v 1D [35], takže uvažuje pouze tři stavy.

Zavedme signální rychlosti vln S , kterými se informace šíří. Způsobů jak odhadnout tyto signální rychlosti existuje celá řada. Většina těchto odhadů je založena na tom, že rychlosti vln odpovídají vlastním číslům (4.41). Použitý způsob odhadu signálních rychlostí je v této práci dán následujícími vztahy

$$S_L = \min(u_L - a_L, u_R - a_R), \quad (4.46)$$

$$S_R = \max(u_L + a_L, u_R + a_R).$$

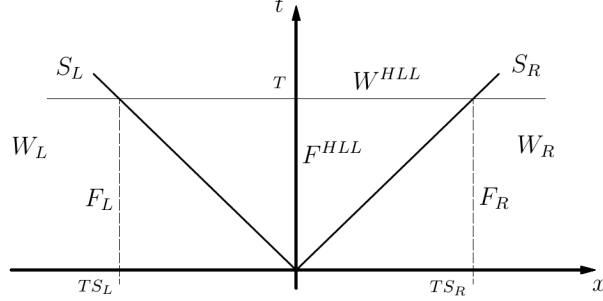
Uvažujme nyní dva případy, které mohou nastat. Na obrázku 4.2 vlevo je znázorněna situace, kdy jsou obě signální rychlosti kladné. Na obrázku vpravo nastal stav, kdy jsou obě signální rychlosti záporné.



Obrázek 4.2: Signální rychlosti se stejnými znaménky

Z těchto obrázků je patrné, že pokud nastane případ, kdy je signální rychlost $S_L \geq 0$, numerický tok přes stěnu se řídí stavem vlevo. Naopak nastane-li případ $S_R \leq 0$, numerický tok se bude řídit stavem vpravo.

Komplikovanější situace nastane v případě, kdy rychlost S_L není kladná a S_R je nezáporná, jak je vidět na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Schéma HLL

Integrální průměr přesného řešení Riemannova problému na oblasti $[TS_L; TS_R] \times [0; T]$

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} W(x, t) dx = \frac{S_R W_R - S_L W_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} = W^{HLL} \quad (4.47)$$

Pokud bychom zákon zachování integrovali na oblasti $[TS_L; 0] \times [0; T]$, tak obdobně dostaneme

$$\int_{TS_L}^0 W(x, t) dx = \int_{TS_L}^0 W(x, 0) dx + \int_0^T F_L dt - \int_0^T F^{HLL} dt \quad (4.48)$$

Vyjádřením toku F^{HLL} dostáváme

$$F^{HLL} = F_L - S_L W_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 W(x, t) dx. \quad (4.49)$$

Provedme substituci integrandu posledního členu na pravé straně z (4.47), čímž získáváme

$$F^{HLL} = F_L - S_L W_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 W^{HLL} dx \quad (4.50)$$

Integrací dostáváme

$$F^{HLL} = F_L + S_L (W^{HLL} - W_L) \quad (4.51)$$

Dosazením za W^{HLL} dostáváme numerický tok pro tento případ ve formě

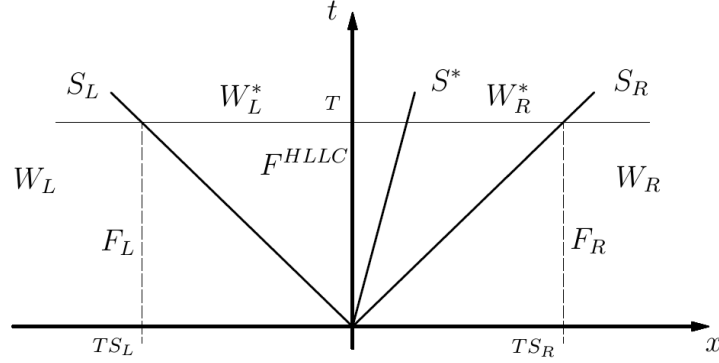
$$\vec{F}^{HLL} = \frac{S_R \vec{F}_L - S_L \vec{F}_R + S_R S_L (\vec{W}_R - \vec{W}_L)}{S_R - S_L}. \quad (4.52)$$

Pro numerický tok mezi hranicemi buněk tedy platí [13]

$$\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} = \begin{cases} \vec{F}_L & \text{pro } S_L \geq 0 \\ \frac{S_R \vec{F}_L - S_L \vec{F}_R + S_R S_L (\vec{W}_R - \vec{W}_L)}{S_R - S_L} & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R \\ \vec{F}_R & \text{pro } S_R \leq 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

4.4.2 Schéma HLLC

Schéma HLLC, jehož autorem je Toro [43], je vylepšenou verzí původního HLL schématu. Písmeno C zde značí Contact, protože toto schéma zahrnuje do struktury řešení Riemannova problému i kontaktní vlnu. Na rozdíl od HLL je tedy čtyřstavovým aproximativním Riemannovým řešičem. Odvození tohoto schématu je obdobné jako v případě HLL, takže uvedeme pouze výslednou podobu. Schéma řešiče je znázorněno na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Schéma HLLC

Pro první dvě signální rychlosti platí stejné vztahy jako v případě HLL, třetí rychlost je stanovena z předpisu

$$S^* = \frac{p_R - p_L + \rho_L p_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}. \quad (4.54)$$

Numerický tok mezi hranicemi buněk je definován následovně [43]

$$\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} \vec{F}_L & \text{pro } S_L \geq 0 \\ \frac{S^*(S_L \vec{W}_L - \vec{F}_L) + S_L p^* \vec{D}^*}{S_L - S^*} & \text{pro } S_L \geq 0 \geq S^* \\ \frac{S^*(S_R \vec{W}_R - \vec{F}_R) + S_R p^* \vec{D}^*}{S_R - S^*} & \text{pro } S^* \geq 0 \geq S_R \\ \vec{F}_R & \text{pro } S_R \leq 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

Pro tlak na hranicích platí

$$p^* = \frac{p_L + p_R + \rho_L (S_L - u_L) (S^* - u_L) + \rho_R (S_R - u_R) (S^* - u_R)}{2} \quad (4.56)$$

a vektor \vec{D}^* je definován jako

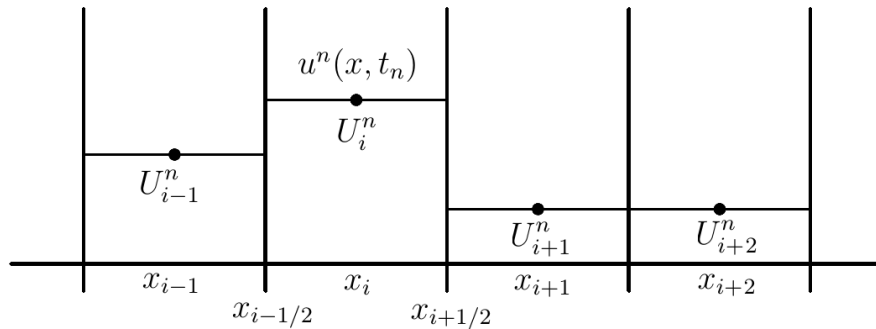
$$\vec{D}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ S^* \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

4.5 Godunova metoda

Upwind schéma pro rovnici advekce může být odvozeno také jako speciální případ následujícího přístupu, který lze použít i pro soustavy rovnic. Tato metoda byla představena Godunovem [12] a je možné ji shrnout do těchto tří kroků, které se opakují.

1. Z průměrné hodnoty dané veličiny v konkrétní buňce je rekonstruována polynomiální funkce $u^n(x, t_n)$.
2. Řešení Riemannových problémů, které vzniknou na rozhraních buněk, čímž je získáno řešení $u^n(x, t_{n+1})$ v čase $t + \Delta t$.
3. Zprůměrování hodnoty řešení na konečném objemu.

V původním Godunově algoritmu je v prvním kroku uvažována rekonstrukce po částech konstantní funkcí, jak je vidět na obrázku 4.5. Tento přístup vede k metodě prvního řádu přesnosti, která zavádí do řešení velkou numerickou vazkost, což má za následek špatnou přesnost a rozmazané výsledky [27].



Obrázek 4.5: Rekonstrukce po částech konstantní funkcí

4.6 Metoda vyššího řádu přesnosti v prostoru

Uvažujme opět skalární rovnici advekce (4.1) pro $a > 0$. Pomocí Taylorova rozvoje lze odvodit Laxovo-Wendroffovo schéma, které je druhého řádu přesnosti v prostoru [27]. Při použití náhrad jednotlivých derivací přístupem z metody konečných diferencí dostaneme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 a^2 (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n). \quad (4.58)$$

Ve formě metody konečných objemů dle schématu () můžeme numerický tok zapsat ve formě

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} a (U_{i-1}^n + U_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 (U_i^n - U_{i-1}^n). \quad (4.59)$$

Z numerických experimentů vychází najevo, že tato metoda vykazuje lepší přenos v místech, kde je řešení hladké. Pokud se však v řešení vyskytuje nespojitost, tak toto schéma selhává a generuje nefyzikální oscilace [27].

4.6.1 Po částech lineární rekonstrukce

Pro získání vyšší přesnosti než je první řád musíme použít lepší než po částech konstantní rekonstrukci. Z průměrné hodnoty v buňce můžeme sestavit lineární funkci ve formě

$$u^n(x, t_n) = U_i^n + \sigma_i^n(x - x_i), \quad x_{i-1/2} \leq x < x_{i+1/2}, \quad (4.60)$$

kde σ_i^n značí derivaci proměnné v dané buňce. Lineární funkce v i -té buňce je definována tak, že hodnota v jejím středu odpovídá hodnotě U_i^n , a co je důležitější, i její průměrná hodnota na tomto konečném objemu je rovna U_i^n .

Vyděme opět z rovnice advekce pro $a > 0$. Schéma pak nabývá tvaru

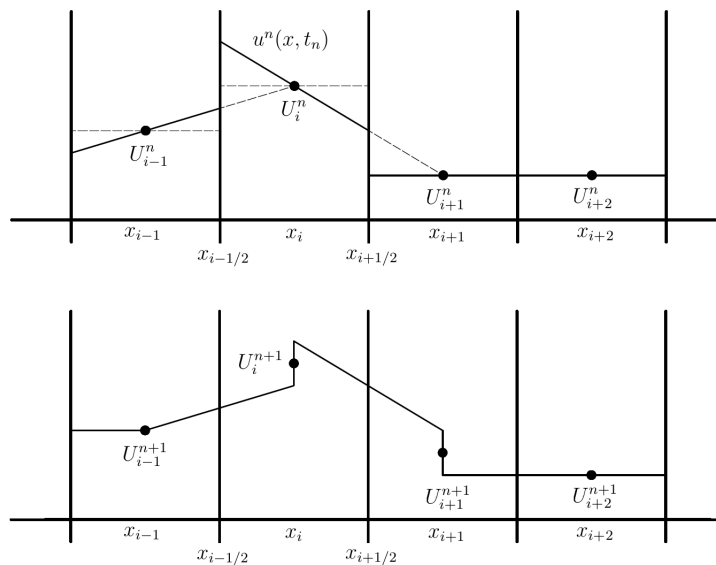
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{a\Delta t}{\Delta x}(\Delta x - a\Delta t)(\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n), \quad (4.61)$$

odkud vidíme, že se opět jedná o schéma upwind s korekčním členem, který závisí na volbě náhrady derivace. Zvolíme-li nulový gradient, dostaneme originální Godunovu metodu. Abychom získali metodu druhého řádu je nutné volit nenulový gradient. Nejsnazší možností se zdá být použití Eulerovy dopředné metody

$$\sigma_i^n = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}. \quad (4.62)$$

Tento přístup ovšem vede opět k Laxovu-Wendroffovu schématu. Uvažujme toto schéma a aplikujme jej na po částech konstantní data, která jsou vidět na obrázku 4.6 vlevo. Vidíme, že funkce $u^n(x, t_n)$ nadhodnocuje velikost proměnné na stěně.

Pokud se takto rekonstruovaná proměnná posune o vzdálenost $a\Delta t$ a vypočítáme průměrnou hodnotu ve sledované buňce i , zjistíme, že hodnota se zvýšila, jak je vidět na obrázku 4.6 vpravo. V dalším časovém kroku bude gradient v buňce $i - 1$ kladný, což vede naopak k nižší průměrné hodnotě. Tyto oscilace pak v čase rostou.



Obrázek 4.6: Advekce rekonstruovaného profilu pomocí Laxova-Wendroffova schématu

V místech, kde je řešení hladké, chceme volit lineární rekonstrukci. V blízkosti nespojitosti potřebujeme omezit velikost gradientu, abychom zabránili oscilacím. Metody založené na této myšlence se nazývají limiterová schémata.

Abychom mohli kvantifikovat míru oscilace v řešení, zavádíme tzv. totální variaci [27]

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |u'(x)| dx. \quad (4.63)$$

Pokud metoda způsobuje oscilace, očekáváme v čase nárůst totální variace. Přírozený požadavek na metodu je, aby se totální variace v čase nezvyšovala.

O metodě řekneme, že má vlastnost TVD (total variation diminishing), pokud pro libovolnou funkci U_i^n hodnoty U_i^{n+1} vypočítané danou metodou splňují

$$TV(U_i^{n+1}) \leq TV(U_i^n). \quad (4.64)$$

Zprůměrování hodnot na konci Godunova algoritmu ani vyhodnocení Riemannových problémů neovlivňují velikost totální variace [27]. Potřebujeme tedy zajistit, aby samotná rekonstrukce proměnných totální variaci nezvyšovala.

4.6.2 Limitérové schéma

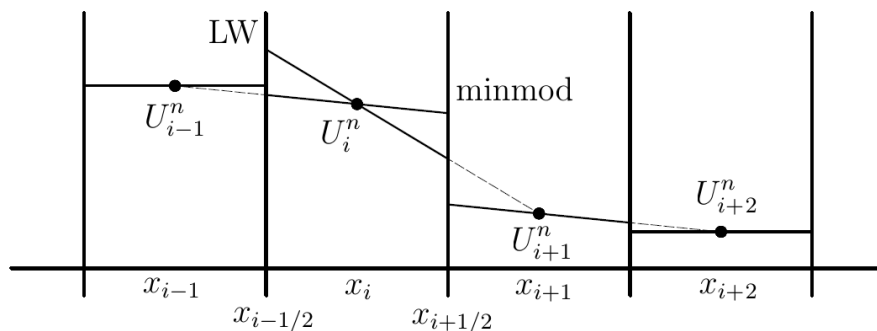
Jedním z limiterů, který poskytuje metodu druhého řádu přesnosti pro hladká řešení a stále zachovává TVD vlastnost, je tzv. minmod limiter [27]

$$\sigma_i^n = \text{minmod} \left(\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} \right), \quad (4.65)$$

kde funkce minmod pro dva argumenty je definována jako

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{pro } |a| \geq |b| \wedge ab > 0 \\ b & \text{pro } |b| < |a| \wedge ab > 0 \\ 0 & \text{pro } ab \leq 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Minmod limiter srovnává dva gradienty a volí menší z nich. Pokud gradienty mají odlišná znaménka, pak hodnota U_i^n musí být lokálním extrémem a v takovém případě je volena nulová hodnota a schéma se v tu chvíli chová jako metoda prvního řádu. Na obrázku 4.7 je znázorněno srovnání chování limitéru a Laxova-Wendroffova (LW) schématu v blízkosti nespojitosti.



Obrázek 4.7: Rekonstrukce po částech lineární funkcí pomocí minmod limitéru

4.7 Numerické metody časové integrace

V úvodu kapitoly jsme dospěli k semidiskrétnímu tvaru metody konečných objemů (4.8). Označme členy na pravé straně jako residuum $Res(W)$

$$\frac{dW}{dt} = Res(W). \quad (4.67)$$

Snažíme se dosáhnout stacionárního řešení, pro které platí

$$\frac{dW}{dt} = 0. \quad (4.68)$$

Z této rovnice je vidět, že řešení nezávisí na chybě metody časové integrace. Metoda vyššího řádu však dospěje do stacionárního stavu dříve, čímž se celková doba výpočtu sníží.

Obecně lze m-krokovou explicitní metodu typu Runge-Kutta zapsat ve tvaru [21]

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= W^n, \\ W^{(s+1)} &= W^{(s)} + \alpha_s \Delta t Res(W^{(s)}), \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \\ W^{n+1} &= W^{(m)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Typickým příkladem je metoda kříkroková, pro kterou jsou koeficienty $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ a $\alpha_2 = 1$. Tato metoda je lineárně stabilní pro $CFL = 2$ a v čase dosahuje druhého řádu přesnosti [21].

4.7.1 Dvoukroková TVD Runge-Kutta metoda

Z hlediska výpočetní náročnosti je výhodnější dvoukroková metoda typu Runge-Kutta, která je rovněž druhého řádu přesnosti. Kromě ušetření jednoho výpočtu residua v každé iteraci, má tato metoda navíc TVD vlastnost [11]. Hodnota parametru CFL je limitována $CFL_{max} = 1$.

$$W^{n+1/2} = W^n + \Delta t Res(W^n) \quad (4.70)$$

$$W^{n+1} = \frac{1}{2} [W^n + W^{n+1/2} + \Delta t Res(W^{n+1/2})] \quad (4.71)$$

4.7.2 Metoda Runge-Kutta 4. řádu přesnosti

K systému Eulerových rovnic je navíc připojena obyčejná diferenciální rovnice pro ztrátový součinitel K , jejíž řešení je provedeno pomocí Runge-Kuttovy metody čtvrtého řádu [25]

$$\begin{aligned} K^{n+1} &= K^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ kde} \\ k_1 &= f(t^n, K^n), \\ k_2 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, K^n + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, K^n + k_2 \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_4 &= f(t^n + \Delta t, K^n + k_3 \Delta t). \end{aligned} \quad (4.72)$$

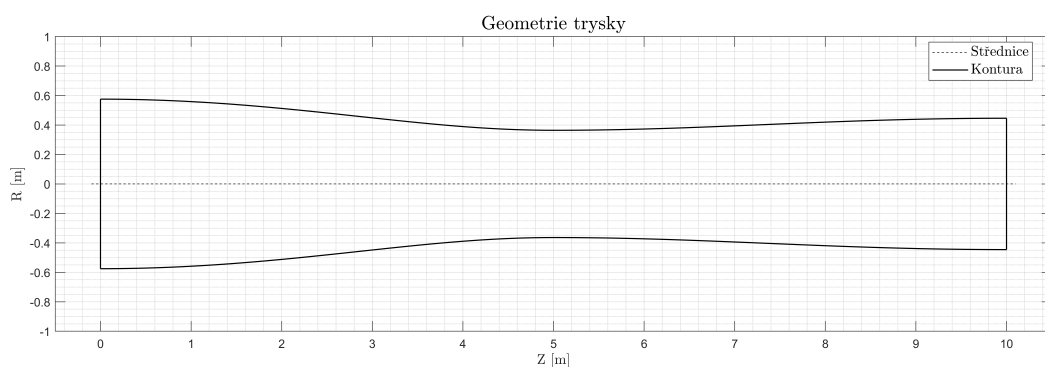
Kapitola 5

Numerická řešení v aplikacích

V předchozích kapitolách byly ukázány postupy, jakými je radiální kompresor modelován, a metody, pomocí kterých je možné analýzu proudění získat. V této kapitole jsou prezentována numerická řešení vybraných úloh. Na základních úlohách je ověřena funkčnost řešiče. Je provedeno porovnání kvality numerických metod s rekonstrukcemi prvního a druhého řádu s použitím numerických toků HLL a HLLC. V další části je představena geometrie radiálního kompresoru a způsob její rekonstrukce. Numerické řešení získané jednorozměrným modelem proudění s uvažováním vlivu ztrát je komparováno s modelem se zanedbáním ztrát a s trojrozměrnou simulací, která byla provedena v komerčním řešiči. V závěru kapitoly je srovnání výkonových parametrů kompresoru za použití různých přístupů a srovnání jejich výpočetní náročností.

5.1 Konvergentně-divergentní tryska

Jako základní validační úloha byla zvolena geometrie konvergentně-divergentní trysky, která je na obrázku 5.1, při různých režimech proudění.



Obrázek 5.1: Geometrie konvergentně-divergentní trysky

Distribuce průtočné plochy je převzatá z [29] a je dána vztahem

$$A(x) = \begin{cases} 1,75 - 0,75 \cos(\pi(0,2x - 1)) & \text{pro } x < 5 \\ 1,25 - 0,25 \cos(\pi(0,2x - 1)) & \text{pro } x \geq 5. \end{cases} \quad (5.1)$$

Pro všechny režimy proudění je nastavená stejná vstupní okrajová podmínka. Zadávané veličiny jsou celkový tlak $p_{t,IN}$ a celková teplota $T_{t,IN}$

$$p_{t,IN} = 6894,76 \text{ Pa}, \quad (5.2)$$

$$T_{t,IN} = 398,15 \text{ K}. \quad (5.3)$$

Jako výstupní okrajová podmínka je zadáván statický tlak $p_{s,OUT}$ prostřednictvím k -násobku vstupního celkového tlaku

$$p_{s,OUT} = k_{OUT} p_{t,IN}. \quad (5.4)$$

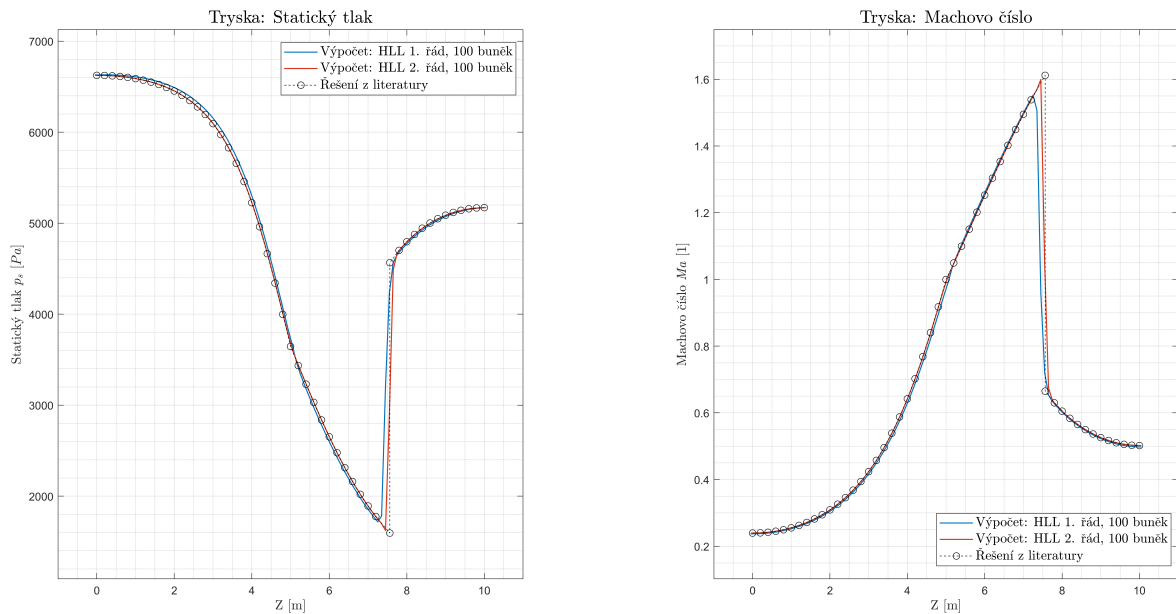
Vypočítané výsledky jsou porovnávány s numerickými výsledky publikovanými v [29] a [38].

5.1.1 Supersonický režim

V případě supersonického režimu proudění se v divergentní části trysky objevuje kolmá rázová vlna. Koeficient výstupní okrajové podmínky byl nastaven na hodnotu

$$k_{OUT} = 0,75. \quad (5.5)$$

Na obrázku 5.2 jsou porovnávány metody různých řádů přesnosti na stejné výpočetní síti. Je z něj vidět, že metoda vyššího řádu zachycuje nespojitost lépe než metoda řádu prvního.



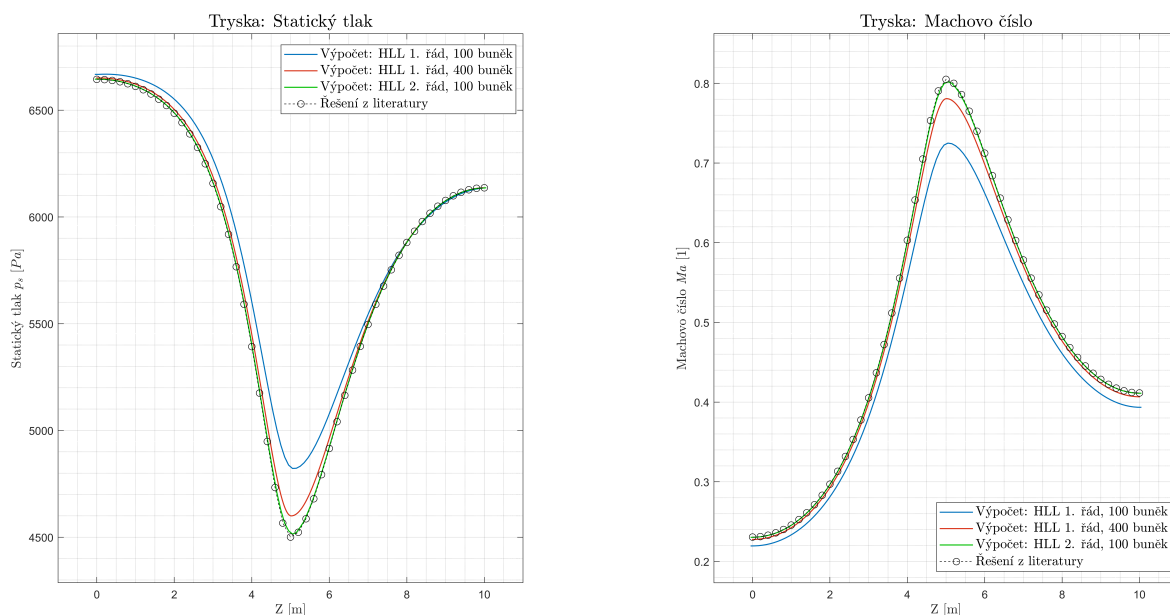
Obrázek 5.2: Průběh statického tlaku a Machova čísla při supersonickém proudění s kolmou rázovou vlnou v divergentní části trysky

5.1.2 Subsonický režim

Druhý výpočet proběhl pro subsonický režim proudění, kdy byl koeficient výstupní okrajové podmínky nastaven na hodnotu

$$k_{OUT} = 0,89. \quad (5.6)$$

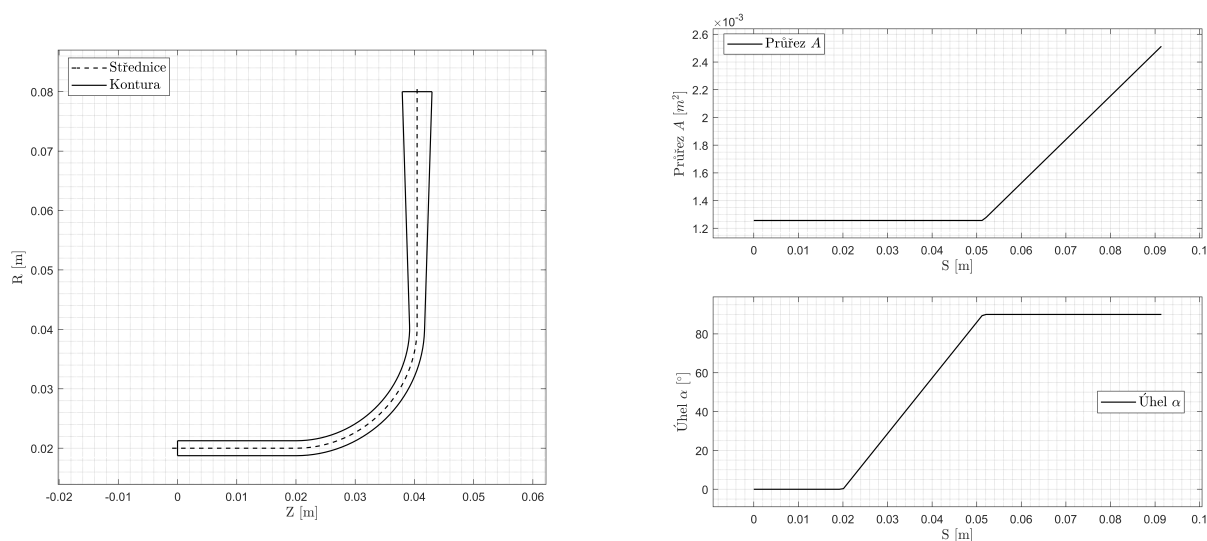
Výsledky simulace jsou zobrazeny na obrázku 5.3. I v tomto případě byly srovnány numerické toky HLL za použití rekonstrukce prvního a druhého řádu. Z výsledků je patrné, že metoda prvního řádu nedosahuje dostatečné přesnosti ani při čtyřnásobném zjemnění výpočetní sítě.



Obrázek 5.3: Průběh statického tlaku a Machova čísla při subsonickém proudění

5.2 Kanál se změnou směru

Druhou úlohou je kanál se změnou směru proudění. Plocha průtočného kanálu A je konstantní až do místa, kde je směr proudu vzduchu otočen do směru osy R , jak je vidět na obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Geometrie kanálu se změnou směru

V této úloze došlo ke změně vstupní okrajové podmínky tak, aby lépe odpovídala známým parametrům v problematice turbostrojů. Místo celkového tlaku $p_{t,IN}$ je zadáván hmotnostní tok na vstupu $\dot{m}_{t,IN}$. Celková teplota $T_{t,IN}$ se zachovala. Hodnoty okrajové podmínky na vstupu byly zadány následovně:

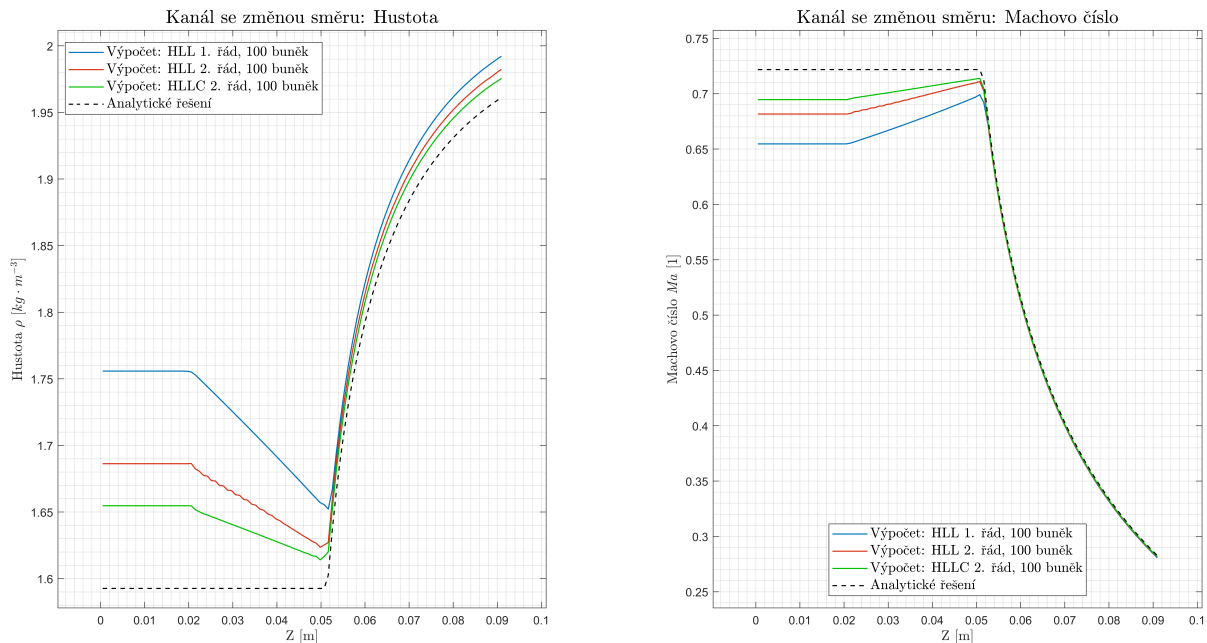
$$\begin{aligned}\dot{m}_{t,IN} &= 0,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \\ T_{t,IN} &= 298,15 \text{ K}, \\ \alpha_{IN} &= 0^\circ, \\ \beta_{IN} &= 0^\circ.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Okrajová podmínka na výstupu zůstala nezměněná. Koeficient byl nastaven na hodnotu

$$k_{OUT} = 1,8.\tag{5.8}$$

Na obrázku 5.5 jsou znázorněny výsledky numerické simulace v porovnání s analytickým řešením. To lze získat pomocí dynamických funkcí popsaných v kapitole 1.3.2. Díky známému průběhu průtočné plochy a kritickému průřezu je možné stanovit průběh Machova čísla z rovnice (1.34). Z dynamických funkcí pak lze stanovit průběhy termodynamických veličin podél kanálu.

Numerická řešení jsou provedena na stejné výpočetní síti. Výsledky jsou vypočítány pomocí numerického toku HLL s rekonstrukcemi prvního a druhého řádu a schématu HLLC s rekonstrukcí druhého řádu. Z výsledků je vidět, že oproti schématu HLL schéma HLLC lépe odpovídá analytickému řešení.



Obrázek 5.5: Průběh hustoty a Machova čísla při proudění kanálem se změnou směru

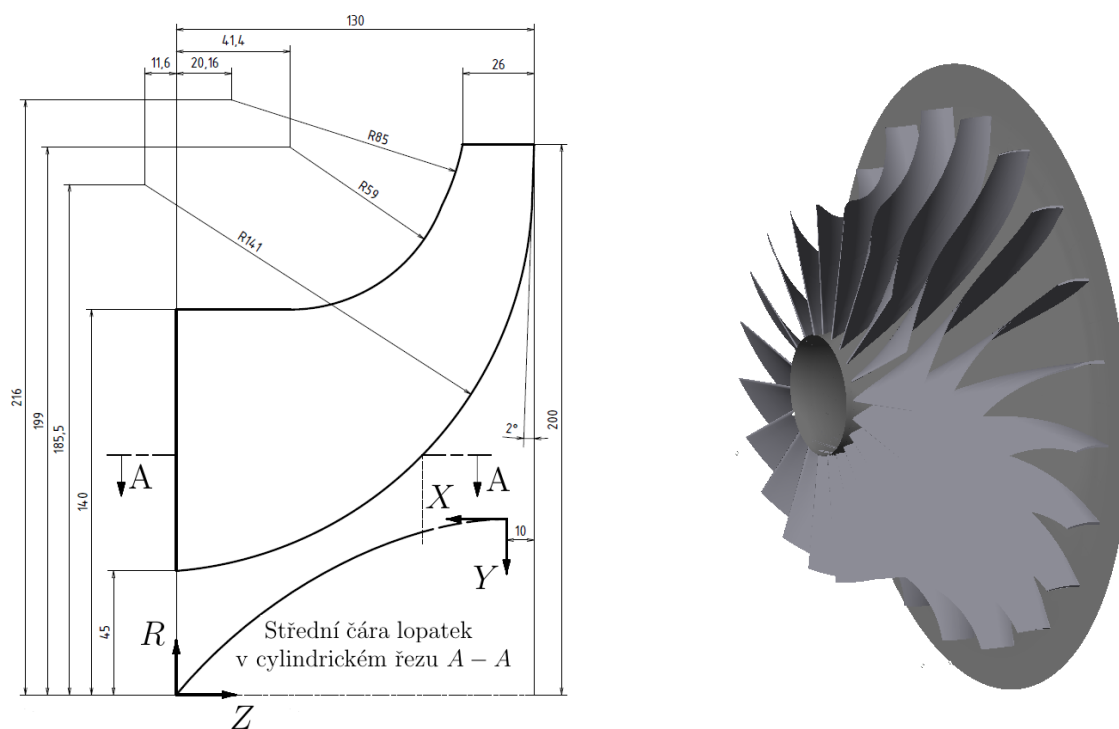
Na základě výsledků, které byly prezentovány v této a předchozí úloze, byla pro další výpočty zvolena rekonstrukce metodou druhého řádu přesnosti a pro časovou diskretizaci dvoukroková TVD Runge-Kuttova metoda. Fyzikální tok byl aproximován numerickým tokem HLLC.

5.3 Kompresor Eckardt typ O

V otevřené literatuře lze najít několik publikovaných geometrií kompresorů, některé dokonce včetně experimentů. Tyto výzkumy v dnešní době poskytují podklady pro validaci a odladění CFD řešičů, díky kterým je možné inženýrský proces zrychlit a zefektivnit. Největší podíl ztrát je generován při proudění oběžným kolem, čemuž odpovídá i rozsah experimentálních dat, která jsou dostupná především pro konfigurace oběžné kolo s bezlopatkovým difuzorem.

Jako testovací příklad byl zvolen jeden z kompresorů, se kterým pracoval autor Eckardt v sedmdesátých letech, konkrétně typ O. Celé soustrojí se skládá ze vstupní soustavy, oběžného kola a bezlopatkového difuzoru. Oběžné kolo má dvacet hlavních lopatek s radiálním zakončením, mezilopatky žádné. Geometrie průtočného kanálu a střední čáry lopatek je popsána pomocí kuželoseček [37]. Distribuce tloušťky však explicitně uvedená není, takže byl zvolen lineární průběh tloušťky od paty ke špičce lopatky. Na základě konstrukčních příruček z té doby byla zvolena tloušťka na patě $t_h = 2,5 \text{ mm}$ a na špičce $t_t = 1,25 \text{ mm}$. Pro střednici je potom tloušťka lopatek $t = 1,875 \text{ mm}$. Skica a vizualizace oběžného kola je vidět na obrázku 5.6. Původní kolo bylo vyrobené z hliníkové slitiny, takže je limitováno nízkými otáčkami, které činí $n = 14\,000 \text{ RPM}$. Bezlopatkový difuzor byl navržen tak, že průtočná plocha je konstantní až do poloměru $R_3 = 400 \text{ mm}$ [7].

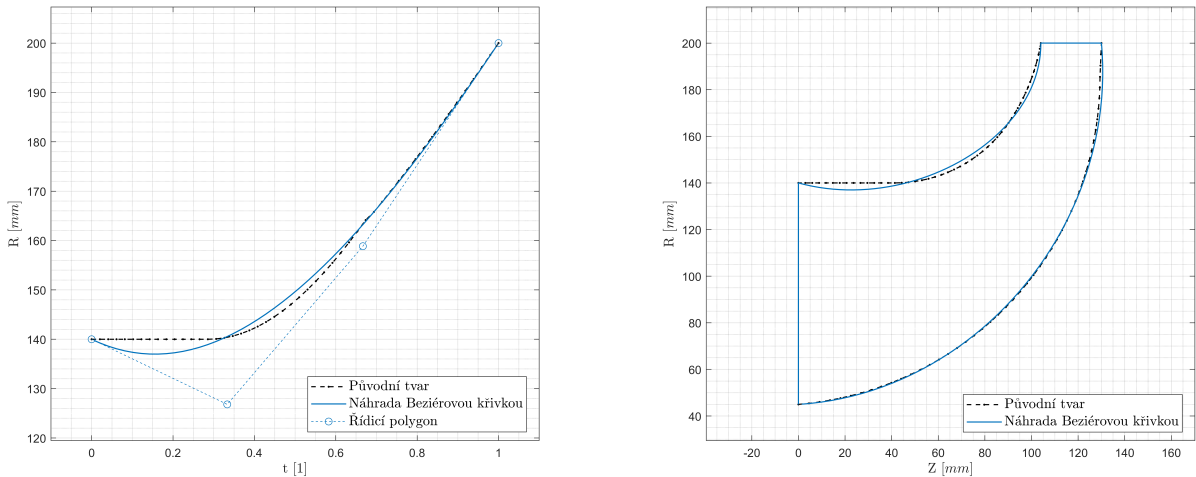
Experimentální data jsou pak publikována v [7], [8], [37]. Během měření je uvedena teplota v místnosti $T_t = 298,15 \text{ K}$ a standardní atmosferický tlak $p_t = 101\,325 \text{ Pa}$. V návrhovém bodě činil hmotnostní tok $\dot{m} = 5,31 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Pro tento režim byly experimentálně stanoveny výkonové parametry. Stlačení kompresoru dosáhlo hodnoty $\pi = 2,094$ a účinnost $\eta = 0,888$.



Obrázek 5.6: Vizualizace oběžného kola kompresoru

5.3.1 Geometrie

V této práci jsou křivky definující tvar kanálu uvažovány jako Beziérovky křivky. V případě statických součástí kompresoru jsou pro popis použity úsečky. Pro popis průtočného kanálu rotoru bylo hledání nejvhodnějších poloh řídicích bodů realizováno prostřednictvím genetického algoritmu popsáno v [14], [20]. Kritérium pro cenovou funkci bylo definováno jako minimum sumy Eukleidovských norem mezi jednotlivými body.

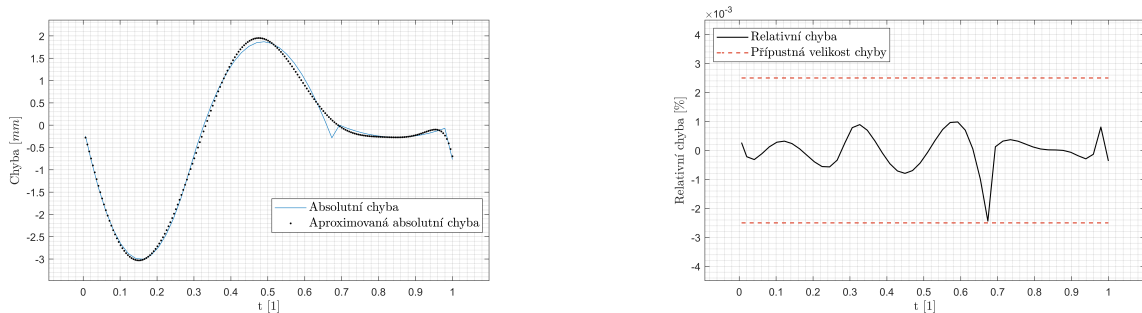


Obrázek 5.7: Náhrada geometrie rotoru pomocí kubik

Jak je vidět na obrázku 5.7, optimální Beziérovky křivky pro popis průtočného kanálu dostatečně neodpovídají původní geometrii. V zájmu zachování jednoduchosti geometrického modelu, ve smyslu zachování řádu Beziérovky křivky, byly zavedeny korekce.

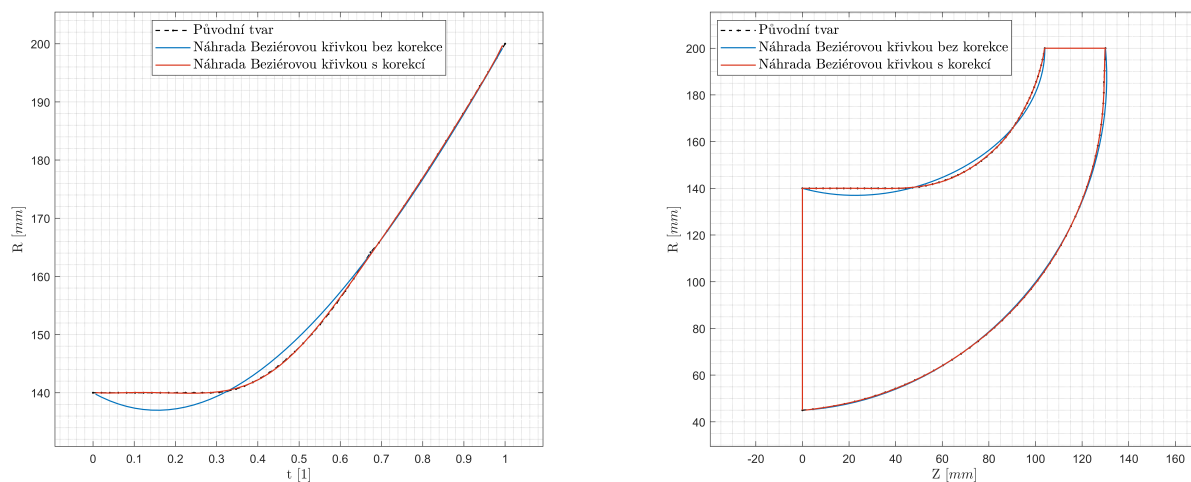
Způsob vyhodnocování chyby je vidět na obrázku 5.8. Absolutní chyba Err_{ABS} je stanovena rozdílem hodnot sobě si odpovídajících bodů. Tato chyba je aproximována polynomiální funkcí $Approx$, jejíž řád se zvyšuje, dokud není splněna podmínka na velikost relativní chyby

$$Err_{REL} = \left| \frac{Err_{ABS} - Approx}{Err_{ABS}} \right| \leq 0,0025. \quad (5.9)$$



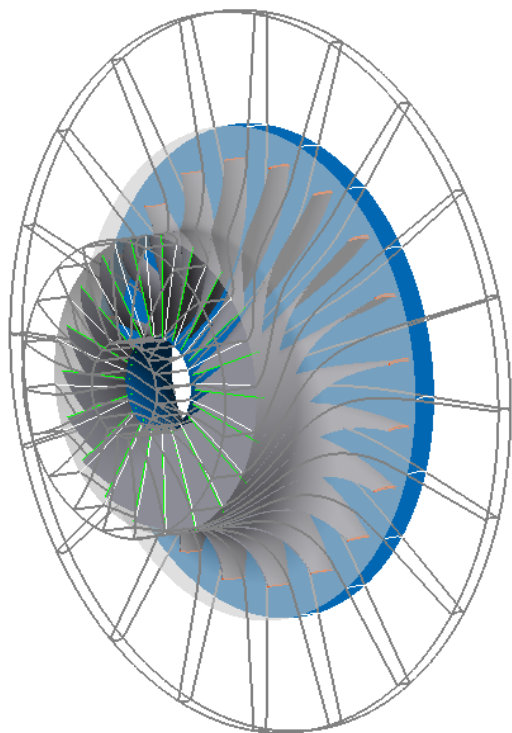
Obrázek 5.8: Vyhodnocení chyby pro souřadnici R horní vodící křivky

Výsledná geometrie je pak tvořena Beziérovou kubikou, na kterou se superponuje korekce získaná aproximovanou polynomiální funkcí. Porovnání kvality náhrady s korekcemi a bez korekcí je vidět na obrázku 5.9. S ohledem na podmínku (5.9) je tato kvalita dostatečná.

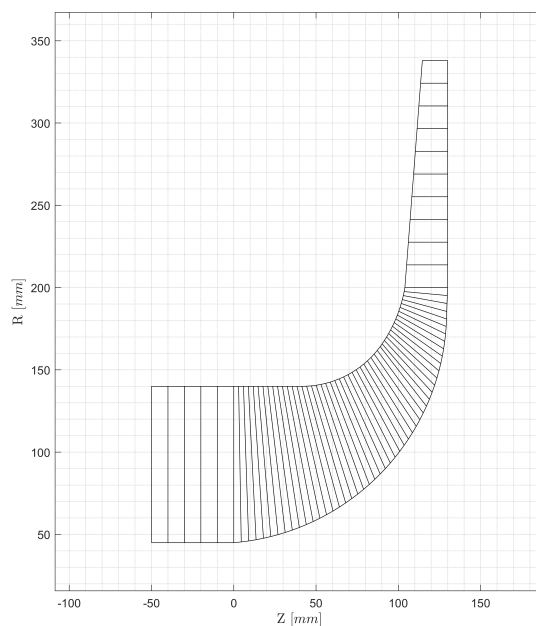


Obrázek 5.9: Náhrada geometrie rotoru pomocí Beziérových kubik s korekcemi

Vizualizace rekonstrukce geometrie řešené úlohy pro trojrozměrný případ je vidět na obrázku 5.10. Na obrázku 5.11 je znázorněn meridionální řez pro jednorozměrnou úlohu s naznačenou výpočetní sítí. Pro obě statické části kompresoru je zvoleno 10 % buněk z celkové velikosti sítě.



Obrázek 5.10: Geometrie pro 3D úlohu



Obrázek 5.11: Geometrie pro 1D úlohu

5.3.2 Okrajové podmínky

Dostupné publikace bohužel nenabízí naměřenou hodnotu statického tlaku na výstupu $p_{s,OUT}$. V komečném řešiči ANSYS CFX je možné definovat hmotnostní tok $\dot{m}_{t,OUT}$ jako výstupní okrajovou podmínku. Má-li být zachována rovnice kontinuity, pak je hmotnostní tok v celé oblasti konstantní, takže je možné úlohu simulovat s použitím následujících okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} p_{t,IN} &= 101325 \text{ Pa}, \\ T_{t,IN} &= 298,15 \text{ K}, \\ \alpha_{IN} &= 0^\circ, \\ \beta_{IN} &= 0^\circ, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\dot{m}_{t,OUT} = 5,31 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Z této simulace pak byla odečtena hodnota statického tlaku na výstupu, která byla následně použita pro jednorozměrný výpočet. Získaná hodnota výstupního statického tlaku je

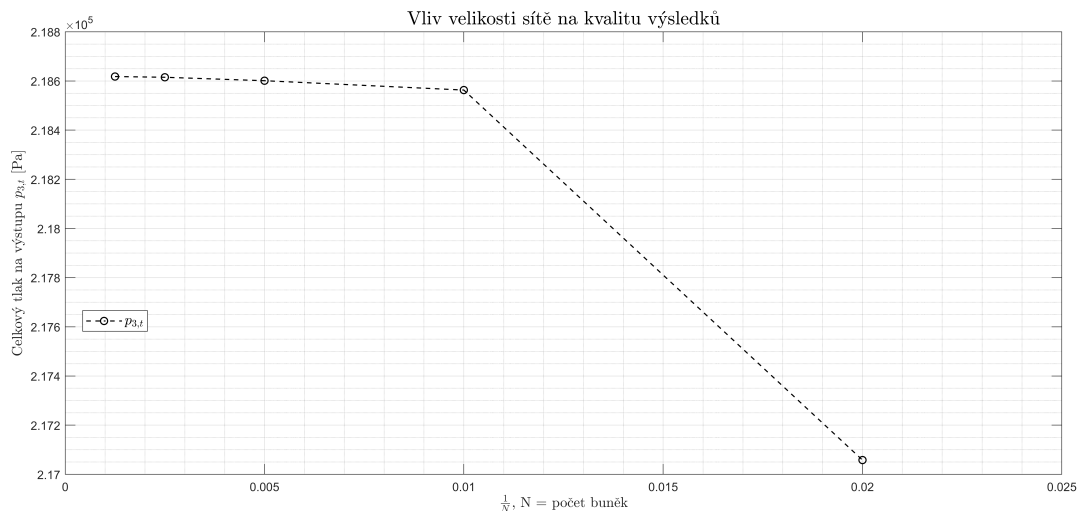
$$p_{s,OUT} = 183500 \text{ Pa}. \quad (5.11)$$

5.3.3 Vliv velikosti sítě na kvalitu výsledků

Na řešené geometrii byl vyšetřován vliv velikosti sítě na kvalitu výsledků. Jako pozorovaný parametr byl zvolen celkový tlak na výstupu $p_{3,t}$. Výpočet byl proveden na pěti sítích, od počtu buněk $N_0 = 800$ s koeficientem zhrubnutí sítě $k_G = 0,5$.

$$N_{i+1} = k_G N_i, \text{ pro } i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (5.12)$$

Výsledky síťové studie jsou zobrazeny na obrázku 5.12, odkud je vidět, že velikost sítě $N_3 = 100$ buněk se stále nachází v asymptotické části konvergenčního spektra. Na základě této studie byla tato velikost sítě zvolena jako dostatečná.



Obrázek 5.12: Vliv velikosti sítě na kvalitu výsledků

5.3.4 Návrhový bod kompresoru

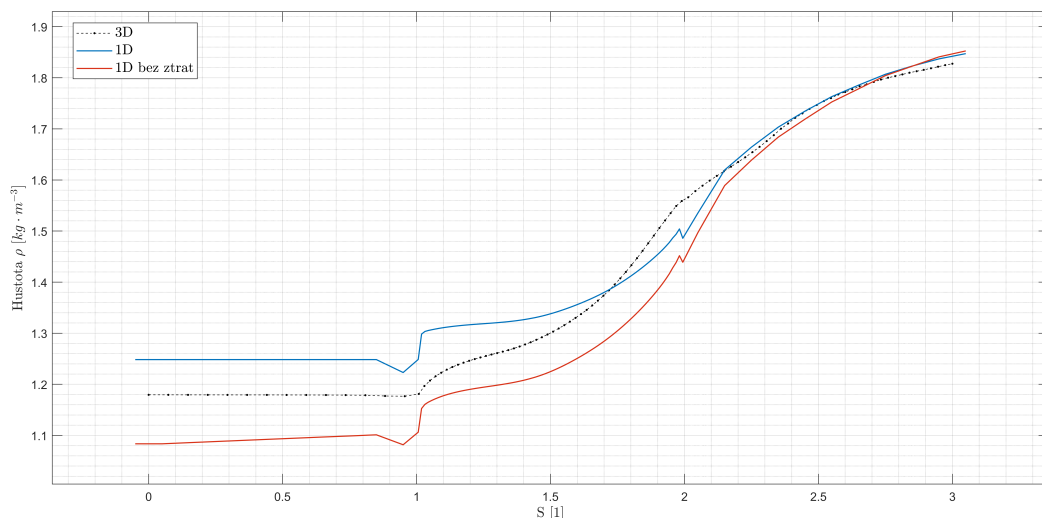
V této části jsou prezentovány výsledky různých druhů simulací návrhového režimu vybraného kompresoru. Výsledky jednorozměrné úlohy jsou porovnány s řešením trojrozměrné simulace, která byla provedena v komerčním řešiči ANSYS CFX. Data ze 3D simulace byla získána jako průměr vážený přes hmotnostní tok.

Výpočetní síť pro trojrozměrnou simulaci čítá 1 416 420 buněk, pro 1D výpočet 100. Pro jednorozměrný výpočet byla použita rekonstrukce druhého řádu s minmod limitérem. Časová diskretizace proběhla pomocí dvoukrokové TVD Runge-Kutta metody. Fyzikální tok byl aproximován schématem HLLC. Stabilitní podmínka byla nastavena na hodnotu $CFL = 0,5$. Přidružená obyčejná diferenciální rovnice pro ztrátový součinitel K byla řešena metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu. Relaxační koeficient v rovnici byl nastaven na hodnotu $\epsilon = 0,001$. Všechny simulace byly nastaveny se stejnými okrajovými podmínkami, které jsou vidět v tabulce 5.1.

Tabulka 5.1: Okrajové podmínky pro návrhový bod

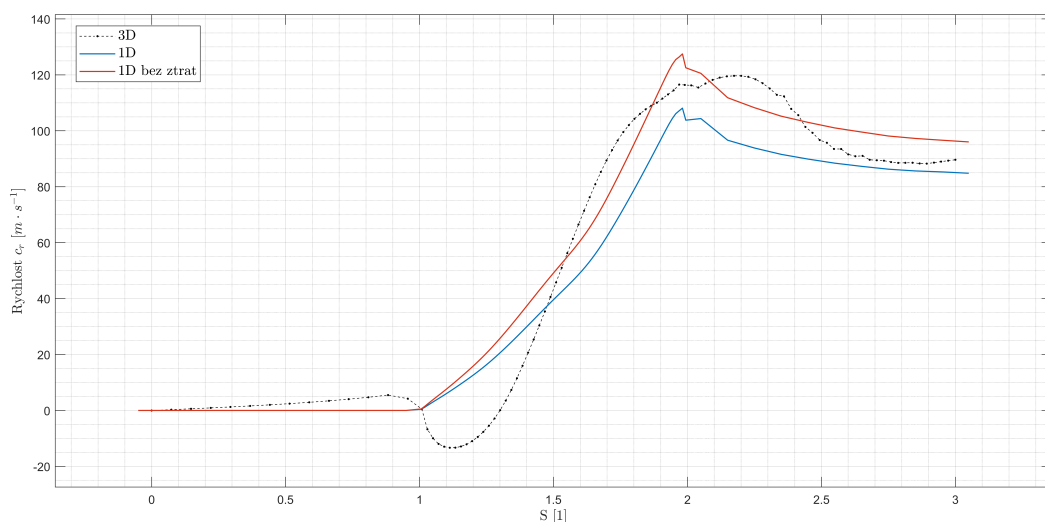
Okrajová podmínka	Veličina	Jednotka	Hodnota
Vstupní	$\dot{m}_{t,IN}$	$kg \cdot s^{-1}$	5,31
	$T_{t,IN}$	K	298,15
	α_{IN}	$^\circ$	0
	β_{IN}	$^\circ$	0
Výstupní	$p_{s,OUT}$	Pa	183 500

Na obrázku 5.13 je vidět průběh hustoty ρ v závislosti na normalizované křivočaré souřadnici S . V okolí přechodu mezi oběžným kolem a difuzorem, tzn. v místě $S = 2$, se vyskytuje nefyzikální oscilace, která může být způsobena náhlou změnou velikosti buněk v rotoru a ve statoru. Jednorozměrný výpočet s uvažováním vlivu ztrát i bez ztrát trendově odpovídá průběhu hustoty získaného z trojrozměrné simulace.

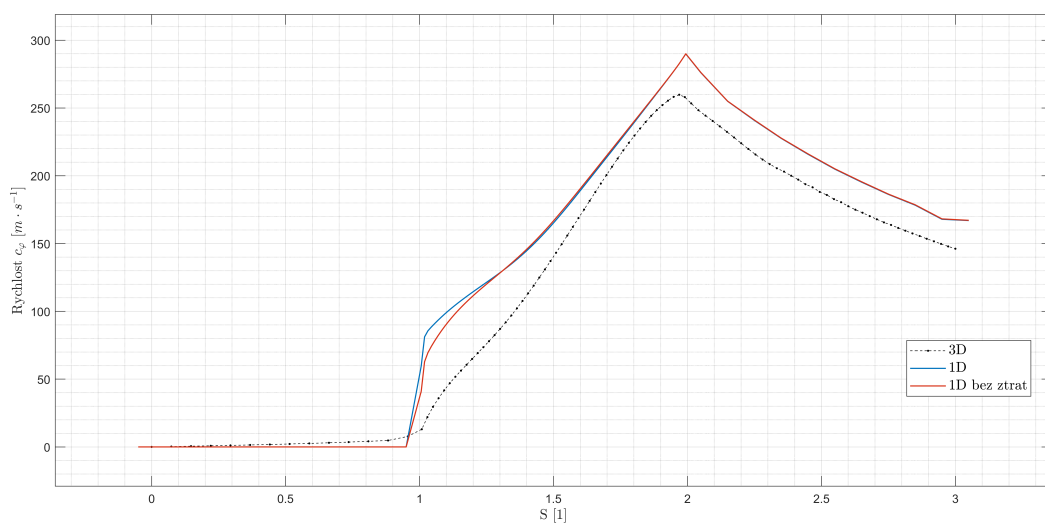


Obrázek 5.13: Průběh hustoty při proudění kompresorem

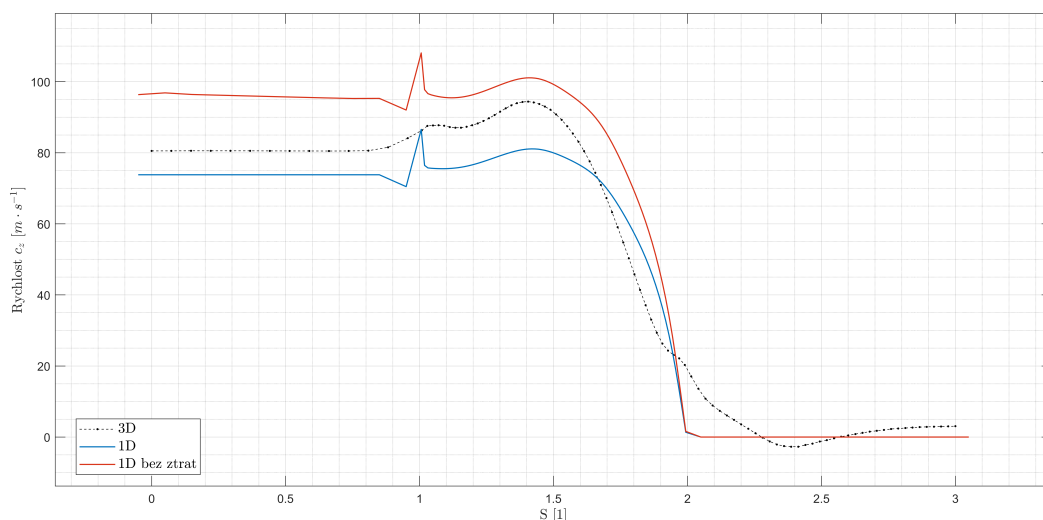
Na obrázku 5.14 je zobrazen průběh složky rychlosti ve směru R . Na vstupu proudu do rotoru, tj. $S = 1$, není dostatečně zachycen zákmit v průběhu složky rychlosti. Naopak na výstupu z rotoru dochází podle 3D simulace k mírnému poklesu složky rychlosti, s čímž si jednorozměrný algoritmus poradil dobře. V případě uvažování vlivu ztrát byl do jisté míry správně zachycen i opětovný nárůst rychlosti. Hodnotě složky rychlosti na výstupu z kompresoru ($S = 3$) získaná 3D simulací lépe odpovídá algoritmus se ztrátami.

Obrázek 5.14: Průběh složky rychlosti ve směru R

Průběh rychlosti ve směru φ je vidět na obrázku 5.15. Rozdíly ve výsledcích jednorozměrných algoritmů jsou zanedbatelné. Trendy průběhů dobře odpovídají trojrozměrné simulaci.

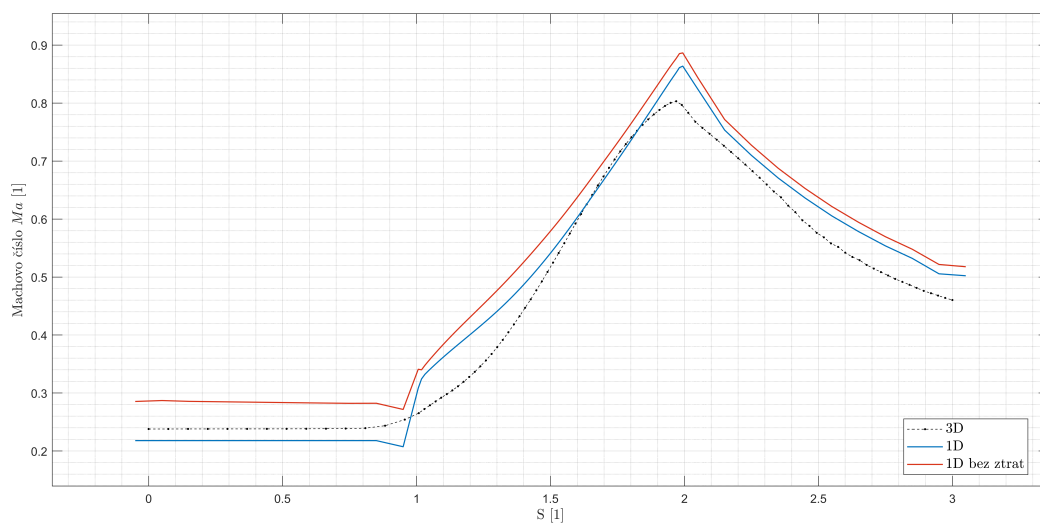
Obrázek 5.15: Průběh složky rychlosti ve směru φ

Na obrázku 5.16 je vykreslen průběh rychlosti ve směry osy Z . Rychlost na vstupu do kompresoru je lépe simulována algoritmem se ztrátami. Při vstupu proudu do oběžného kola se objevuje nefyzikální zákmit, nicméně vzrůstající a následně klesající tendence velikosti složky rychlosti jsou dobře zachyceny oběma jednorozměrnými simulacemi. V difuzoru 1D algoritmy vykazují jistou chybovost, která je však způsobena metodou implementace změny směru proudění, kdy probíhá přepočítání vektoru rychlosti pomocí vektoru tečného ke střednici, viz kapitola 3.3.2.



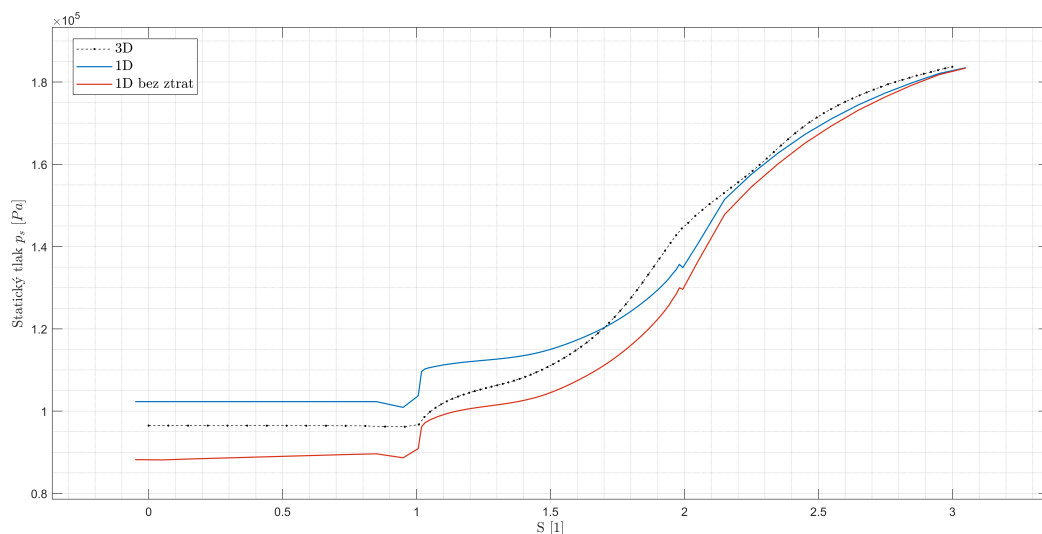
Obrázek 5.16: Průběh složky rychlosti ve směru Z

Průběh Machova čísla je vidět na obrázku 5.17. Prudký nárůst na vstupu do oběžného kola je způsoben nepřesnostmi v rychlostech a termodynamických veličinách. Na výstupu z oběžného kola, kde je maximum, zůstává podle jednorozměrných simulací Machovo číslo stále subsonické. Trend průběhu získaného pomocí 3D simulace je kopírován výsledky jednorozměrných simulací.



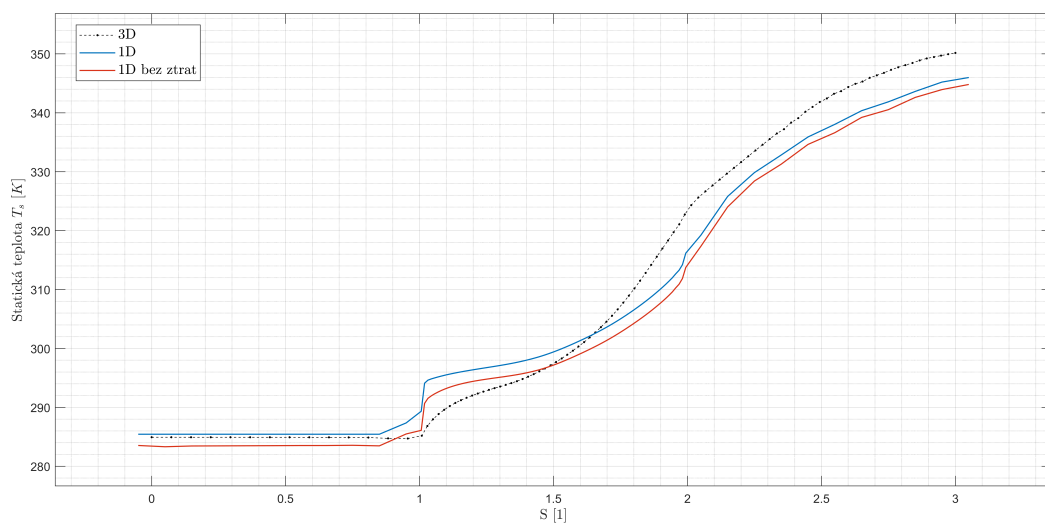
Obrázek 5.17: Průběh Machova čísla při proudění kompresorem

Na obrázku 5.18 je zobrazen průběh statického tlaku. Na první pohled trendy obou průběhů získaných 1D přístupem dobře odpovídají datům z trojrozměrné simulace. Připomeňme obrázek 2.3, který zobrazuje teoretické průběhy parametrů proudu. Je z něj vidět, že ve vstupní soustavě kompresoru se zachovává pouze celková teplota a hodnoty všech ostatních parametrů by měly klesat. To se však v případě jednorozměrné simulace bez uvažování vlivu ztrát neděje. V případě zahrnutí vlivu ztrát dochází k mírnému poklesu statického tlaku ve vstupní soustavě, což je v souladu s digramem 2.3 a tento přístup tak lépe odpovídá realitě.



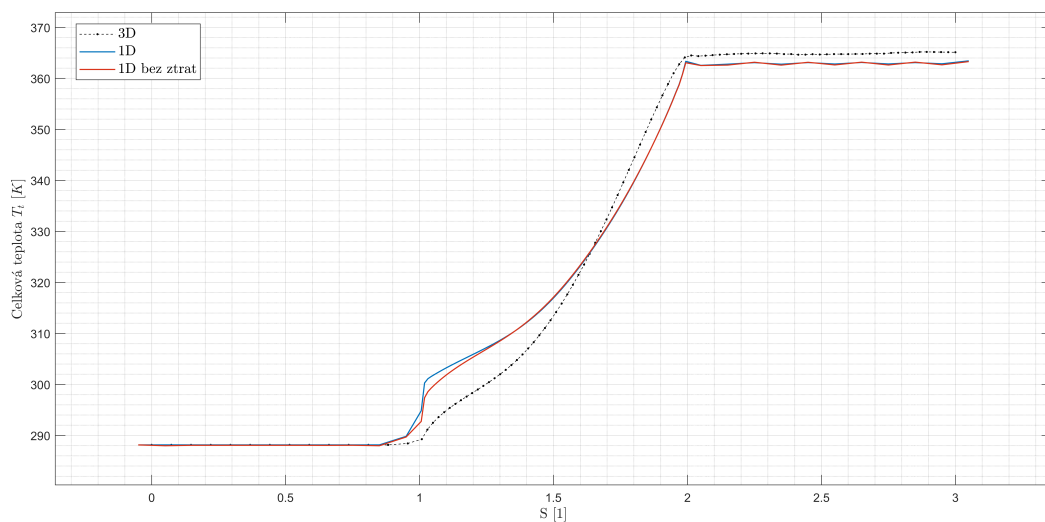
Obrázek 5.18: Průběh statického tlaku při proudění kompresorem

Trendy průběhů statické teploty získaných 1D algoritmy jsou v porovnání s 3D simulací zachyceny správně. Teplota je s hustotou a tlakem svázána stavovou rovnicí, je tak funkcí podílu tlaku a hustoty. Rozdíly v průbězích statického tlaku se stírají, jak je vidět na obrázku 5.19.



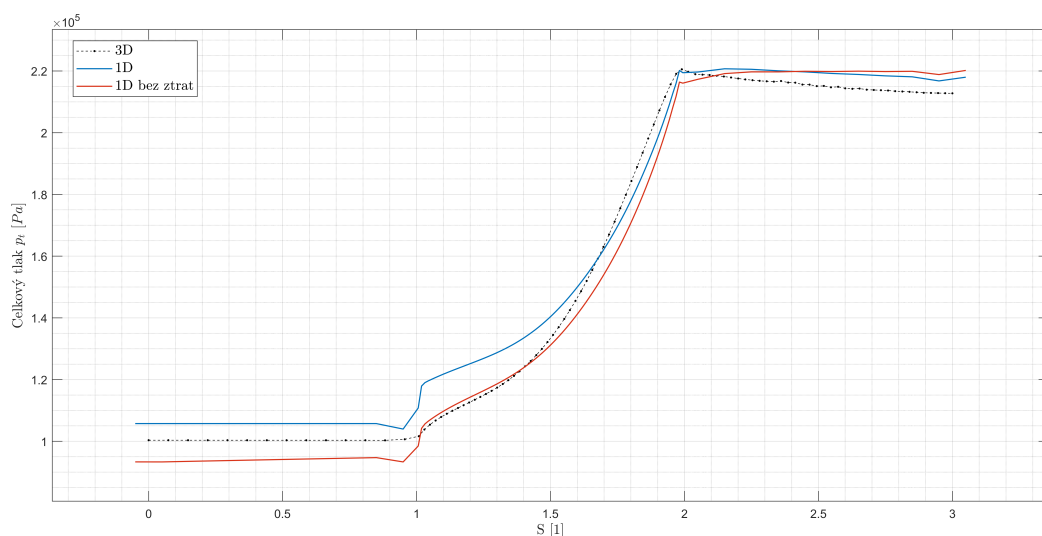
Obrázek 5.19: Průběh statické teploty při proudění kompresorem

Průběhy celkové teploty získané z 1D simulací se téměř neliší a svými trendy odpovídají datům ze 3D simulace. Výsledky jsou v souladu s očekávaným průběhem z diagramu 2.3. Hodnota celkové teploty na výstupu z kompresoru je trochu nižší oproti trojrozměrné simulaci, jak je vidět na obrázku 5.20.



Obrázek 5.20: Průběh celkové teploty při proudění kompresorem

Na obrázku 5.21 je vidět průběh celkového tlaku v kompresoru. V části rotoru trendy získaných průběhů odpovídají dobře. Na rozdíl od průběhu celkové teploty se v obrázku 5.21 ve statických částech kompresoru v případě jednorozměrného modelu se zanedbáním vlivu ztrát objevují nárůsty celkového tlaku, což zcela neodpovídá fyzikálním představám. Tento přístup tak nereflektuje skutečnost.



Obrázek 5.21: Průběh celkového tlaku při proudění kompresorem

5.3.5 Shrnutí dosažených výsledků

Průběhy jednotlivých veličin, které byly popsány, poskytují informace o jevech, které se uvnitř stroje dějí. V inženýrské praxi je potřeba kvantifikovat výsledky přímočařeji. K tomu nám slouží výkonové parametry jako jsou stlačení π a účinnost η .

Ačkoliv byly rozdíly ve výsledcích získaných jednorozměrnými simulacemi malé, ve výkonových parametrech, kterých by kompresor dosáhl při uvažování nebo zanedbání vlivu ztrát, už je rozdíl značný. Hodnoty stlačení a účinnosti jsou vypočítány dle vztahů (2.6) a (2.7). Shrnutí je zaneseno do následující tabulky 5.2.

Tabulka 5.2: Srovnání dosažených výkonových parametrů různými metodami

Metoda	Stlačení π	Účinnost η
Experiment [7]	2,094	88,8
3D	2,119	89,65
1D	2,05	87,8
(1D bez ztrát)	2,35	1,06

Trojrozměrný výpočet vykazuje nejmenší odchylku od experimentálních dat. To může být způsobeno nepřesnou volbou distribuce tloušťky. V dobových fotografiích jsou navíc vidět i poměrně velké radiusy při patě lopatky, které nejsou postihnuty v modelu pro 3D simulaci. Jednorozměrné přístupy radiusy postihnout neumí. Z tabulky je vidět, že 1D přístup se zanedbáním vlivu ztrát poskytuje naprosto nevěrohodné hodnoty výkonových parametrů.

Chyba v dosažených výkonových parametrech při simulaci jednorozměrným modelem proudění radiálním kompresorem s uvažováním vlivu ztrát je vyšší než u trojrozměrného výpočtu, což může být ovlivněno mnoha faktory. Prvním je způsob zjednodušení, kdy je trojrozměrný vazký výpočet s 1 410 329 buňkami nahrazen jednorozměrnou nevazkou simulací s počtem buněk 100. V jednorozměrné simulaci není modelována radiální vůle a nejsou zahrnuty vnější ztráty v kompresoru. Ztrátový model složený z empirických korelací může sám o sobě dávat nepřesnou představu o velikosti ztrát a jejich rozložení nemusí přesně odpovídat skutečnosti.

Porovnání trojrozměrné simulace s jednorozměrným výpočtem z hlediska výpočetní náročnosti je vidět v tabulce 5.3. Hodnota strojového času pro 3D simulaci vychází z předpokladu, že počet výpočetních jader ovlivňuje výpočetní čas přímou úměrou. Hodnoty jsou uvedené pro výpočty na jednom výpočetním jádru.

Tabulka 5.3: Porovnání výpočetní náročnosti

Metoda	Počet buněk N_G	Výpočetní čas t_c
3D	1 416 420	59 h
1D	100	4,5 s

Z porovnání časové náročnosti výpočtů je vidět hlavní výhoda 1D přístupu. Ukazuje se, že zjednodušený model proudění může poskytnout velmi rychlou a relativně přesnou analýzu.

Závěr

Byl vyvinut jednorozměrný model proudění radiálním kompresorem s uvažováním vlivu ztrát, který se skládá ze základních zákonů zachování popsaných v kapitole 1.1. V obecných zákonech zachování byly zanedbány vazké efekty a člen popisující přestup tepla. Byl tak získán systém Eulerových rovnic pro stlačitelné proudění. Jako proudící médium byl zvolen model ideálního plynu.

Princip fungování radiálního kompresoru byl popsán v kapitole 2.1. Vzhledem k povaze úlohy bylo nutné tyto zákony zachování transformovat nejdříve do relativního systému souřadnic ve formulaci s absolutními rychlostmi, což bylo ukázáno v kapitole 3.2.2, a pak do křivočarého souřadnicového systému. Tato transformace byla provedena s využitím cylindrického systému souřadnic, jak bylo vidět v kapitole 3.2.3.

Prostřednictvím empirických korelací byly zahrnuty ztrátové mechanismy, které se při proudění radiálním kompresorem objevují. Z vnitřních ztrát byly zahrnuty ztráty incidencí, namáháním lopatky, míšením, třením a ztráta v bezlopatkovém difuzoru, jejichž popis je uveden v kapitole 3.4.1. Ztráta způsobená radiální vůlí zahrnuta nebyla, protože nebyla modelována ani samotná vůle. Vnější ztráty jako je recirkulace nebo tření disku zahrnuty nebyly pro jejich povahu členu přestupu tepla, který modelován nebyl. Samotné zahrnutí ztrát do systému řešených rovnic bylo provedeno pomocí přidružené obyčejné diferenciální rovnice pro ztrátový koeficient K .

Výchozí systém rovnic představuje soustavu parciálních diferenciálních rovnic. K jejich řešení byla zvolena metoda konečných objemů popsaná v kapitole 4. Byly představeny aproximativní Riemannovy řešiče HLL a HLLC. Dále byl ukázán postup jak docílit metody vyššího řádu přesnosti v prostoru i v čase. Řešení rovnice pro součinitel K bylo provedeno pomocí metody typu Runge-Kutta, která je čtvrtého řádu přesnosti.

Vyvinutý řešič napsaný v jazyce C++ byl nejprve testován na základních případech. Prvním z nich bylo proudění v konvergentně-divergentní trysce při různých režimech proudění, kde byl porovnáván řád metody. Výsledky prezentovaného řešiče byly porovnány s numerickými výsledky, které uvádí autoři v [29], [38]. Jako druhá testovací úloha bylo zvoleno proudění v kanále se změnou směru proudění. Toto řešení bylo porovnáváno s analytickým řešením získaným pomocí funkcí dynamiky plynů. Na základě získaných výsledků lze tvrdit, že řešič funguje správně.

Srovnáním metod různých řádů přesnosti a různých numerických toků se ukázalo, že z prezentovaných metod je pro další výpočty nejvhodnější volbou použití metody druhého řádu přesnosti s užitím minmod limitéru a dvoukrokové metody typu Runge-Kutta, která je také druhého řádu a má vlastnost TVD. Jako Riemannův řešič byl použit numerický tok HLLC.

Jako testovací úloha kompresoru byl zvolen Eckardtův kompresor typ O [7], jehož geometrie definovaná kuželosečkami byla převedena do popisu prostřednictvím Beziérových křivek. Optimální polohy řídicích bodů byly nalezeny pomocí genetického algoritmu popsaného v [14], který byl implementován do prostředí MATLAB a otestován v [20]. Pro dosažení větší shody s originální geometrií byly zavedeny korekce, které byly superponovány na Beziérovu křivku.

Byla provedena síťová studie 5.3.3, ze které je vidět, že síť o velikosti sto buněk je dostatečná. Z celkového počtu buněk je 10 % přiřazeno vstupní soustavě a dalších 10 % náleží bezlopatkovému difuzoru, který následuje za rotorem.

Průběhy rychlostních, teplotních a tlakových polí získané prezentovaným výpočetním nástrojem s uvažováním ztrát i s jejich zanedbáním byly komparovány s výsledky z trojrozměrné simulace, které byly zprůměrovány přes hmotnostní tok. V datech z 1D algoritmu se v některých případech objevují nefyzikální zákřivky na přechodu mezi rotující a statickou částí kompresoru. To může být způsobeno náhlou změnou velikosti buněk, ale i samotným 1D přístupem.

Výsledky získané jednorozměrnými přístupy odpovídají trendům dat ze 3D simulace dobře. V případě průběhu celkového tlaku se ukázalo, že jednorozměrný model bez zahrnutí vlivu ztrát vykazuje jistou chybovost. Při proudění statickými částmi kompresoru docházelo ke zvyšování hodnoty celkového tlaku, což neodpovídá fyzikálním představám.

Tento chybný nárůst se projevil zejména při vyhodnocení dosažených výkonových parametrů kompresoru, které byly porovnávány s experimentálními daty. Nejmenší odchylku od experimentálních dat vykazuje 3D simulace. Jednorozměrný model s uvažováním vlivu ztrát se od experimentálních dat odchyluje více, ale stále dobře odpovídá realitě, jak je vidět v tabulce 5.2. Z této tabulky rovněž vyplývá, že jednorozměrný model se zanedbáním vlivu ztrát poskytuje naprosto nevěrohodné výsledky.

Nakonec bylo provedeno srovnání výpočetního času trojrozměrné simulace v komerčním řešiči s vyvinutým jednorozměrným modelem, které je vidět v tabulce 5.3. Jednorozměrný výpočet je nesrovnatelně rychlejší a poskytuje řešení, které dobře odpovídá analýze pomocí 3D simulace.

Z prezentovaných závěrů vyplývá, že cíle práce byly naplněny ve všech ohledech.

Zlepšení jednorozměrného modelu je problematikou, která má potenciál a má tedy smysl se jí dále zabývat. V další práci by měla být modelována radiální vůle a ztrátový mechanismus, který tak bude nutné vzít v úvahu. Aby se dosáhlo lepší shody se skutečným prouděním v radiálním kompresoru, měly by se modelovat ztráty způsobené vnějšími ztrátovými mechanismy. Další zlepšení by mělo být věnováno výpočetní síti, aby nedocházelo ke skokové změně velikosti buněk, ale k pozvolnému zvětšování velikosti buněk směrem od rotoru. Takto vylepšený model by mohl být použit pro optimalizaci návrhu, který by se podrobil vícerozměrné analýze.

Použitá literatura

- [1] J. D. Anderson. *Modern compressible flow*. Tata McGraw-Hill Education, 2003.
- [2] R. H. Aungier. *Centrifugal compressors: A strategy for aerodynamic design and analysis*. 2000.
- [3] R. H. Aungier. *Turbine Aerodynamics: Axial-Flow and Radial-Flow Turbine Design and Analysis*. ASME Press, 2006.
- [4] O. Conrad, K. Raif a M. Wessels. „The calculation of performance maps for centrifugal compressors with vane-island diffusers“. In: *Performance prediction of centrifugal pumps and compressors* (1979), s. 135–147.
- [5] J.E. Copping a F. Dallenbach. *Study of supersonic radial compressors for refrigeration and pressurization systems*. Technical report. Garrett Corp Los Angeles Ca AiResearch MFG DIV, 1956.
- [6] G. Croce, L. Ratto a A. Satta. „A navier stokes solver for axisymmetric turbomachinery analysis“. In: *5th European conference on Computational Fluid Dynamics*.
- [7] D. Eckardt. „Flow field analysis of radial and backswept centrifugal compressor impellers. I-Flow measurements using a laser velocimeter“. In: *Performance prediction of centrifugal pumps and compressors* (1979), s. 77–86.
- [8] D. Eckardt. „Instantaneous measurements in the jet-wake discharge flow of a centrifugal compressor impeller“. In: (1975).
- [9] Ch. L. Fefferman. „Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation“. In: *The millennium prize problems* 57 (2006), s. 67.
- [10] INC Fluent et al. „FLUENT 6.3 User’s guide“. In: *Fluent documentation* (2006).
- [11] J. Fürst. „Moderní diferenční schmemata pro řešení systému Eulerových rovnic“. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze., 1994.
- [12] S. K. Godunov. „A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics“. In: *Matematicheskii Sbornik* 89.3 (1959), s. 271–306.
- [13] A. Harten, P. D. Lax a B. van Leer. „On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws“. In: *SIAM review* 25.1 (1983), s. 35–61.
- [14] Ch. R. Houck, J. Joines a M. G. Kay. „A genetic algorithm for function optimization: a Matlab implementation“. In: *Ncsu-ie tr* 95.09 (1995), s. 1–10.
- [15] W. Jansen. „A method for calculating the flow in a centrifugal impeller when entropy gradient are present“. In: *Inst. Mech. Eng. Internal Aerodynamics* (1967).

-
- [16] J. P. Johnston a R. C. Dean Jr. „Losses in vaneless diffusers of centrifugal compressors and pumps: analysis, experiment, and design“. In: (1966).
- [17] J. Kadrnožka. *Tepelné turbíny a turbokompresory: Základy teorie a výpočtů*. Akademické nakladatelství CERM, 2004.
- [18] P. Kmoch. *Teorie leteckých motorů I: Základní rovnice, kompresory. Část I*. 2002.
- [19] K. Kolarčík, J. Kaminský a M. Vrtek. „Kompresory“. In: *Ediční středisko VŠB-TU Ostrava* (2008).
- [20] P. Kovář. „Optimalizace trajektorie manipulátoru“. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum., 2019.
- [21] K. Kozel a J. Fürst. *Numerické metody řešení problémů proudění I*. Č, 2001.
- [22] L. Kumar a R. S. Kumarana. „Design and analysis of a high pressure ratio and high mass flow centrifugal compressor“. In: (2018).
- [23] K. K. Kuo a R. Acharya. „Appendix A: Useful Vector and Tensor Operations“. In: *Applications of Turbulent and Multiphase Combustion*. John Wiley & Sons, Ltd, 2012.
- [24] O. Léonard a O. Adam. „A quasi-one-dimensional CFD model for multistage turbomachines“. In: *Journal of thermal science* (2008).
- [25] R. J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM, 2007.
- [26] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Sv. 132. Springer, 1992.
- [27] R. J. LeVeque et al. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Sv. 31. Cambridge university press, 2002.
- [28] I. Linkeová. *Základy počítačového modelování křivek a ploch*. České vysoké učení technické, 2008.
- [29] M. Liou. „A generalized procedure for constructing an upwind-based tvd scheme“. In: *25th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. 1987, s. 355.
- [30] J. Nožička. *Mechanika tekutin*. Vydavatelství ČVUT, 2004.
- [31] J. Nožička. *Základy termomechaniky*. Vydavatelství ČVUT, 2001.
- [32] H. W. Oh, E. S. Yoon a M. K. Chung. „An optimum set of loss models for performance prediction of centrifugal compressors“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* (1997).
- [33] H. W. Oh, E. S. Yoon a M. K. Chung. „Systematic two-zone modelling for performance prediction of centrifugal compressors“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* (2002).
- [34] D. Radek. „Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením“. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum., 2017.
- [35] D. Radek. „Numerické řešení proudění stlačitelné tekutiny pomocí pokročilých metod“. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum., 2019.
- [36] J. Růžek a P. Kmoch. *Teorie leteckých motorů*. VA Brno, 1979.
-

-
- [37] P. Schuster a U. Schmidt-Eisenlohr. „Flow field analysis of radial and backswept centrifugal compressor impellers. II-Comparison of potential flow calculations and measurements“. In: *Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors* (1979), s. 87–95.
- [38] J. W. Slater. *Converging-diverging verification (CDV) nozzle*. URL: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/cdv/cdv.html>.
- [39] A. R. Staff. „Equations, tables, and charts for compressible flow“. In: *NACA Report 1135* (1953).
- [40] J. D. Stanitz. *One-dimensional compressible flow in vaneless diffusers of radial-and mixed-flow centrifugal compressors, including effects of friction, heat transfer and area change*. National Advisory Committee for Aeronautics, 1952.
- [41] J. Šesták a F. Rieger. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Vydavatelství ČVUT, 2004.
- [42] F. Šochman. „Jednorozměrný model průtoku radiálním kompresorem“. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum., 2017.
- [43] E. F. Toro, M. Spruce a W. Speares. „Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver“. In: *Shock waves 4.1* (1994), s. 25–34.
- [44] M. Torrecilla. „Introduction to numerical simulation of fluid flows“. In: (2004).
- [45] G. K. Vallis. *Essentials of atmospheric and oceanic dynamics*. Cambridge University Press, 2019.
- [46] R. Van den Braembussche. *Design and analysis of centrifugal compressors*. John Wiley & Sons, 2019.
- [47] M. H. Vavra. *Aero-thermodynamics and Flows in Turbomachines*. 1960.
- [48] A. Whitfield a N. C. Baines. *Design of radial turbomachines*. New York, NY (USA); John Wiley a Sons Inc., 1990.
- [49] F. J. Wiesner. „A review of slip factors for centrifugal impellers“. In: (1967).