

## I. IDENTIFIKAČNÍ ÚDAJE

Název práce:	Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice
Jméno autora:	Erik Rapp
Typ práce:	bakalářská
Fakulta/ústav:	Fakulta elektrotechnická (FEL)
Katedra/ústav:	Katedra radioelektroniky
Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.
Pracoviště vedoucího práce:	Katedra matematiky

## II. HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ

<b>Zadání</b> <i>Hodnocení náročnosti zadání závěrečné práce.</i> Vložte komentář.	<b>náročnější</b>
--	-------------------

<b>Splnění zadání</b> <i>Posuďte, zda předložená závěrečná práce splňuje zadání. V komentáři případně uveďte body zadání, které nebyly zcela splněny, nebo zda je práce oproti zadání rozšířena. Nebylo-li zadání zcela splněno, pokuste se posoudit závažnost, dopady a případně i příčiny jednotlivých nedostatků.</i>	<b>splněno s většími výhradami</b>
Cílem práce bylo objasnit vztahy mezi jednotlivými typy funkčního kalkulu, zejména pro matice, a dokumentovat je na příkladech a aplikacích. Základní objasnění mezi triple kalkulem a spojitým funkčním kalkulem pro nezáporné matice, respektive mezi triple spektrem obecné matice a klasickým spektrem absolutní hodnoty této matice, je v práci s jistými výhradami uvedeno. Příkladů dokumentujících triple kalkulus je však málo (chybí například aplikace kalkulu na speciální matice, metody výpočtu polární dekompozice, apod.). Text není bohužel ucelený, obsahuje řadu chyb a nepřesností. Výklad je často nesrozumitelný a práce tak nemůže sloužit pro studenty či jiné zájemce jako průvodce danou problematikou, což mohlo být vedlejším benefitem.	

<b>Aktivita a samostatnost při zpracování práce</b> <i>Posuďte, zda byl student během řešení aktivní, zda dodržoval dohodnuté termíny, jestli své řešení průběžně konzultoval a zda byl na konzultace dostatečně připraven. Posuďte schopnost studenta samostatně tvůrčí práce.</i>	<b>B - velmi dobře</b>
Student pracoval relativně samostatně, práci se věnoval a strávil nad ní hodně času. Na základě konzultací s vedoucím práce práci modifikoval. Nevzal však bohužel v úvahu převážnou část kritiky vedoucího.	

<b>Odborná úroveň</b> <i>Posuďte úroveň odbornosti závěrečné práce, využití znalostí získaných studiem a z odborné literatury, využití podkladů a dat získaných z praxe.</i>	<b>F - nedostatečně</b>
Abstraktnější problematika (Banachovy algebry, homomorfní kalkulus, atd.) nebyla odborně zvládnuta. K odbornému obsahu práce mám velké množství připomínek, správné důkazy a tvrzení jsou spíše výjimkou (viz příloha). Autor se sice snaží dokazovat jednodušeji, zejména algebraické identity, které jsou více méně jasné, naproti tomu však pomíjí základní myšlenky argumentů. Práce obsahuje velké množství chyb.	

<b>Formální a jazyková úroveň, rozsah práce</b> <i>Posuďte správnost používání formálních zápisů obsažených v práci. Posuďte typografickou a jazykovou stránku.</i>	<b>F - nedostatečně</b>
Rozsah práce je zbytečně velký. Práce obsahuje mnoho materiálu, který nesouvisí s hlavním tématem a není dobře podán. Kvantita tak není v souladu s kvalitou. Styl práce není vyhovující, jedná se o nepříjemné čtení, ve kterém autor nepomáhá čtenáři v základní orientaci. Často chybí základní definice a vymezení pojmů, stejně tak jako fixace značení. V matematice není zvykem značit každou formuli, nicméně klíčové formule by měly být očíslovány a mělo by se na ně náležitě odkazovat.	

<b>Výběr zdrojů, korektnost citací</b>	<b>C - dobře</b>
--	------------------

*Vyjádřete se k aktivitě studenta při získávání a využívání studijních materiálů k řešení závěrečné práce. Charakterizujte výběr pramenů. Posuďte, zda student využil všechny relevantní zdroje. Ověřte, zda jsou všechny převzaté prvky řádně odlišeny od vlastních výsledků a úvah, zda nedošlo k porušení citační etiky a zda jsou bibliografické citace úplné a v souladu s citačními zvyklostmi a normami.*

**Výběr zdrojů je relevantní. Mnohdy citace na známé výsledky chybí - viz seznam připomínek.**

#### **Další komentáře a hodnocení**

*Vyjádřete se k úrovni dosažených hlavních výsledků závěrečné práce, např. k úrovni teoretických výsledků, nebo k úrovni a funkčnosti technického nebo programového vytvořeného řešení, publikačním výstupům, experimentální zručnosti apod.*

### **III. CELKOVÉ HODNOCENÍ A NÁVRH KLASIFIKACE**

Práce mobilizuje rozsáhlý matematický aparát, který je však nesourodě a nepřehledně podán. Lépe by bylo soustředit se na jádro zadání. Vzhledem k tomu, že se jedná o práci matematickou, jejíž hlavním přínosem má být obohacení teorie, je velkým problémem množství logických chyb, nesprávných či neúplných důkazů a definic (viz příloha).

Předloženou závěrečnou práci hodnotím klasifikačním stupněm **E - dostatečně**.

Datum: 3.6.2021

Podpis:





**Příloha k posudku bakalářské práce:**  
**E.Rapp: Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice**

Tento seznam obsahuje pouze *vybrané* připomínky k práci, zejména z posledních stěžejních kapitol. Jsou míněny jako ukázky mých výhrad. Seznam všech komentářů by byl mnohonásobně větší.

1. Definice 2.2 maximálního ideálu je nesprávná. Jelikož ve značení práce symbol pro inkluzi množin nevyklučuje rovnost, není podle této definice žádný ideál maximální kromě  $X$ .
2. Věta 2.28. Důkaz není triviální, a proto postrádám referenci na něj.
3. Věta 1.29 má nesrozumitelný důkaz. Mimo jiné se zde zaměňuje Cauchyův vzorec a Cauchyova věta.
4. Věta 1.8 o neprázdnosti spektra se odkazuje na Liouvillovu větu ve vektorové podobě, která vyžaduje aplikaci Hahn-Banachovy věty. Tato forma Liouvillovy věty však není v práci uvedena.
5. Tvzení 2.10: V důkazu je třeba zdůvodnit jak invertibilita (nenulových) elementů faktoru plyne z vlastnosti maximálního ideálu.
6. Ve Větě 2.32 se užívá algebraická verze Stone-Weierstrasseovy věty. Tato věta by vzhledem ke svému stěžejnímu významu pro spojitý funkční kalkul měla být explicitně v práci formulována. Nestačí jen odkaz na literaturu.
7. Důkaz Příkladu 2.5 o neexistenci netriviálního ideálu v maticové algebře je špatně. Tvrdí se, že z dané identity plyne, že lineární obal jednotkových matic je celá algebra. To je však triviální skutečnost, která neplyne z této identity. Vůbec není zmíněna souvislost s cílem důkazu. Má být: Daná identita implikuje, že ideál obsahuje všechny jednotkové matice, a proto už musí být roven celé algebře. Tato deformace logických vazeb se v práci vyskytuje často.
8. Věta 3.33. Jedná se o Větu o pernamenci spektra. Tato věta neplatí mimo  $C^*$ -algebry. Důkaz se omezuje pouze na komutativní algebry. Nicméně i v tomto speciálním případě důkaz nesprávný a vůbec nevyužívá vlastnost  $C^*$ -algeber. Jedná se opět o hluboké nepochopení teorie.
9. Příklad 3.4. Text se odkazuje na polarizační identitu, která však není v textu označena a jasně vymezena.

10. Definice 3.3. Je diskutabilní, zda  $p(x)$  nazývat polynom neboť polynom se obvykle chápe ne jako prvek z  $X$  ale jako zobrazení z  $X$  do  $X$ . Ještě podstatnější výtkou je skutečnost, že se výrazu (3.5) nevyskytuje první mocnina. To vylučuje případ identického zobrazení, což je nesprávné a v rozporu s pozdější formulací triple kalkulu.

11. Příklad 3.7: Špatná rovnost, má být:

$$x(x^*x) = x|x|^{2n}$$

Navíc vadí, že není definovaná absolutní hodnota. Stejná výhrada pro rovnost pro polynom  $p(x)$ .

12. Příklad 3.8. Nejasná definice, například není jednoznačné, co autor myslí zápisem  $(B \square B)_1$ . Triple součin (symetrický) je špatně definován. Není vysvětleno co je permutační a matice a v jakém smyslu chápat direktní součet. Infomační hodnota tohoto příkladu je tedy nulová.

13. Příklad 3.9. V tomto příkladu se prvek vektorového prostoru rozepíše do dané báze a pak zase složí dohromady - nic to nepřináší.

14. str. 58 - odstavec uprostřed, citace: „Předchozí konstrukce pro multiplicative operátor v konečně dimenzionálních prostorech může na první pohled vypadat samoúčelně, je však užitečná v tom smyslu, že spektrum není závislé na volbě báze, takže to zjednodušuje analýzu tohoto operátoru“. Toto formulace postrádá smysl neboť spektrum operatoru na volbě báze nikdy nezávisí (nezávisle na dané konstrukci).

15. str. 58, formule:

$$\sigma(A \square A) \subset 1/2(\sigma(A^*A) + \sigma(AA^*))$$

je převzaté z literatury a není na první pohled zřejmé. Chybí přesná citace a komentář.

16. str. 58,  $V(A)$  musí předeším obsahovat  $A$ , ovšem tento člen ve vyjádření pro  $B$  chybí.

17. Příklad 3.11. Pozitivita systému není tak jasná a zaslouží si podrobnější zdůvodnění.

18. Ve Větě 3.5 a níže se objevuje termín semi-prostý systém, který není zaveden.

19. Poznámka na konci strany 60. K odvození formule pro  $x \square x$  je třeba vědět že  $e_i$  a  $e_j$  jsou ortogonální právě tehdy když je  $e_i \square e_j = 0$ . Toto mělo být zmíněno. Vztah ke spektru  $x$  není objasněn.

20. Příklad 3.12 měl být rozveden do detailů. Jedná se o stěžejní souvislost.

21. Příklad 3.13: Pro matici  $B$  je celý výpočet zbytečný, stačí si uvědomit rozklad

$$B = e_{11} + 2(-e_{22}).$$

22. V posledním odstavci na straně 61 je závadějící tvrdit, že polární dekompozice se uvažuje *především* nad Hilbertovými prostory. Má totiž smysl pouze pro Hilbertovy prostory.
23. Definice 3.8 a 3.7. zavádějí pro algebraický element stejný koncept spektra zcela odlišnými způsoby. Není vysvětlena rovnost.
24. Definice 3.9 je nesprávná. Operátorová algebra, jak je standardně definovaná, nemusí být uzavřená na adjunkci.  $C^*$ -algebra je naproti tomu samoadjungovaná.
25. Definice 3.10 (a řada výskytů poté): „Nechť  $B(H)$  je operátorová algebra.“  $B(H)$  je vždy operátorová algebra, takže je to totéž jako říci: Nechť se  $1+1=2$ .
26. Tvzení 3.7. Ekvivalence více tvrzení se dokazuje jednotlivými implikacemi. To je v důkazu zcela pomínuto, míchají se předpoklady jednotlivých implikací, zaměňuje příčina a následek. Argumenty jsou chaotické a nelze je vydávat za důkaz.
27. Věta 3.10 o polárním rozkladu. V důkazu je třeba explicitně rozšířit částečnou izometrii  $u$  tak aby byla nula na jádru  $|x|$ . Tento základní rozklad nebyl pochopen neboť právě na tom jsou založeny pozdější argumenty v triple kalkulu.
28. Příklad 3.15. Není pravda, že rovnost

$$|f(z)|^2 f(z) = 0$$

implikuje, že  $|f(z)| = 1$ . K tomu, že izometrie je pouze nula, je třeba využít spojitosti a nulové limity v nekonečnu.

29. Začátek strany 64: to že pro kontrakci  $u$  platí, že  $u^*u \leq e$  si zaslouží podrobnější argumenty.
30. Důkaz Věty 3.10: Chybí vysvětlení proč můžeme psát

$$wq^*qw = w^2.$$

31. str. 65 druhý odstavec: Vzhledem k tomu, že bylo hlavně cílem studovat obdélníkové matice, měla být věta o polárním rozkladu od začátku studována v kontextu operátorů mezi *různými* Hilbertovými prostory.
32. Tvzení 3.11: Mělo by ze ukázat, že  $|x|$  je invertibilní.

33. Tvzení 3.12: Toto tvzení, převzaté z literatury, je formulováno zcela nesprávně. (1)  $X$  má být  $C^*$ -podalgebra. (2) Polární dekompozice v  $B(H)$  vždy existuje a jde o to, že i přesto, že  $u$  nemusí být v  $X$  je nakonec  $uf(|x|) \in X$ . Toto zásadní tvzení umožňující definovat triple kalkulus bohužel nebylo pochopeno.
34. V kapitole 3.4 se opět ignoruje první mocnina v polynomech.
35. V definici 4.2 a dále by bylo užitečné říci, že  $C_0(Sp(A))$  jsou *všechny funkce* na  $Sp(A)$  s hodnotu 0 v nule, neboť spektrum je konečné.
36. Tvzení 3.13: V důkazu schází argument, že  $U^*Uh(A) = h(A)$  využívající vlastnosti částečné izometrie v polárním rozkladu.
37. Tvzení 3.14. V poslední rovnosti důkazu má být po druhém rovnítku  $f(D)$ .
38. Na začátku strany 72 je úvaha o souvislosti symetrie triple součinu a komutativity. Jedná se ovšem o zcela nezávislé vlastnosti.
39. Tvzení 3.16.  $W$  nemusí být unitární operátor. Není tedy jasné proč platí  $VDW^*WDV^* = VD^2V$ .
40. Str. 77, poslední odstavec. Najednou se přeskočí na lokální Gelfandovu reprezentaci pro triple systém dokonce s nepozitivním operátorem  $x \square x$ . Předtím bylo toto dokázáno pouze pro matice. Chybí hlubší vysvětlení, popřípadě odkaz na literaturu.