

I. IDENTIFIKAČNÍ ÚDAJE

Název práce:	Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice
Jméno autora:	Erik Rapp
Typ práce:	bakalářská
Fakulta/ústav:	Fakulta elektrotechnická (FEL)
Katedra/ústav:	Katedra radioelektroniky
Oponent práce:	doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D.
Pracoviště oponenta práce:	Katedra matematiky

II. HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ

Zadání	náročnější
<i>Hodnocení náročnosti zadání závěrečné práce.</i>	
Práce je teoretického charakteru a vyžaduje od studenta pochopení látky jdoucí nad rámec standardních kurzů matematiky vyučovaných na FEL ČVUT.	

Splnění zadání	splněno s většími výhradami
<i>Posuďte, zda předložená závěrečná práce splňuje zadání. V komentáři případně uveďte body zadání, které nebyly zcela splněny, nebo zda je práce oproti zadání rozšířena. Nebylo-li zadání zcela splněno, pokuste se posoudit závažnost, dopady a případně i příčiny jednotlivých nedostatků.</i>	
Práce měla dle zadání za cíl zkoumat triple kalkulus na obdélníkových maticích (případně obecněji na operátorech mezi Hilbertovými prostory) a nalézt souvislost mezi různými druhy spektra a singulárními hodnotami. Tuto stěžejní část zadání lze sice v práci nalézt, ale dle mého názoru jí není věnována dostatečná pozornost i přes značný rozsah práce. To je způsobeno tím, že na její úkor jsou v práci rozebírány věci, které se zadáním přímo nespojují nebo jdou svou abstrakcí výrazně nad požadavky zadání (spektrální teorie v Banachových algebrách, funkcionální kalkuly v Banachových algebrách a C^* -algebrách,...). Díky tomu práce není podrobným a uceleným textem na téma specifikované v zadání, ale spíše souborem různých výsledků.	

Zvolený postup řešení	částečně vhodný
<i>Posuďte, zda student zvolil správný postup nebo metody řešení.</i>	
V práci je řada míst pojata velmi abstraktně, přestože si to splnění úkolů vymezených v zadání vůbec nevyžaduje. Takový postup mi nepřijde příliš vhodný. Právě vysoká míra abstrakce nepomáhá úplnosti textu, ale naopak vede k mnoha komplikacím, nejasnostem, nepřesnostem a chybám. Z mého pohledu by bylo mnohem vhodnější se v celé práci omezit pouze na matice, neboť nejdůležitější část práce věnovaná triple kalkulu nejde za rámec matic. Tím by došlo k výrazné redukci potřebné teorie a zbylo by tak více místa pro podrobnější rozbor triple kalkulu.	

Odborná úroveň	F - nedostatečně
<i>Posuďte úroveň odbornosti závěrečné práce, využití znalostí získaných studiem a z odborné literatury, využití podkladů a dat získaných z praxe.</i>	
Z matematického pohledu je odborná úroveň nedostatečná. Příklady uvedené v práci jsou velmi často strohé. Odkaz na literaturu nebo podrobný rozbor by jim rozhodně neškodil. Velké výhrady mám ke zdůvodnění celé řady tvrzení. Tato zdůvodnění nejsou často správná, nebo jsou v nich vynechány podstatné části, bez kterých jsou důkazy pouze o formální manipulaci se symboly. V případě vynechání části důkazu bych očekával alespoň odkaz na literaturu, který je ale spíše výjimkou. Takto v matematice rozhodně nelze postupovat. Konkrétní seznam vybraných nedostatků uvedu v sekci „Další komentáře a hodnocení“.	

Formální a jazyková úroveň, rozsah práce	E - dostatečně
<i>Posuďte správnost používání formálních zápisů obsažených v práci. Posuďte typografickou a jazykovou stránku.</i>	
Rozsah bakalářské práce je vyšší, než je běžné. Bohužel to s velkým množstvím odborných chyb nevytváří zcela dobrý dojem.	

Negativně hodnotím používání celé řady pojmů, jejichž význam v práci není uveden. Do této skupiny spadá například „semiprostý Jordanův triple systém“ nebo „*-isomorfismus“. Vágní poznámku o *-homomorfismu, jehož speciálním případem je *-isomorfismus, jsem našel na straně 48 před Větou 2.32. Ta ale dost těžko vymezuje skutečný význam pojmu *-homomorfismu. Kromě chybějících definic jsem také narážel na pojmy, které jsou využívány ještě před tím, než jsou v práci definovány. Zde jako příklad uvádím pojem „involuce“. Ten se v textu objevuje již na začátku (dokonce ve spojení s normovanými algebry, které nejsou v práci definovány vůbec), ale definice involuce je (pro Banachovy algebry) uvedena až na straně 42.

V práci se také objevují různá značení stejných objektů, což nepřispívá ke konzistentnosti textu. Například maticové jednotky jsou značeny v různých částech textu odlišně (viz Příklad 2.5, Příklad 3.8 a Příklad 3.13), aniž by pro to byl relevantní důvod. Kromě toho se v práci bez jakéhokoli upozornění využívá slovo znak jako synonymum pro definovaný pojem „charakter“, což je z pohledu čtenáře velmi nepříjemné a matoucí.

K jazykové a typografické stránce mám jen několik drobných postřehů, které ale nejsou až tak zásadní a uvádím je zejména pro úplnost. Počet překlepů a chybějících čárek mezi větami není tak velký, aby výrazněji zhoršoval kvalitu práce. Za trochu matoucí považuji psaní tří teček u víceřádkových formulí (viz například formule na straně 7). Tři tečky běžně označují vynechání nějaké části, ale v práci jsou použity k naznačení, že formule pokračuje na další řádce. Bylo by také vhodné vyvarovat se používání dlouhých souvětí, které nepřispívají k čtivosti a eleganci textu.

Výběr zdrojů, korektnost citací

C - dobře

Vyjádřete se k aktivitě studenta při získávání a využívání studijních materiálů k řešení závěrečné práce. Charakterizujte výběr pramenů. Posuďte, zda student využil všechny relevantní zdroje. Ověřte, zda jsou všechny převzaté prvky řádně odlišeny od vlastních výsledků a úvah, zda nedošlo k porušení citační etiky a zda jsou bibliografické citace úplné a v souladu s citačními zvyklostmi a normami.

Výběr zdrojů považuji za celkem dobrý. Odkazy na literaturu by však měly být v textu mnohem častější, jak plyne z mých předešlých komentářů.

Další komentáře a hodnocení

Vyjádřete se k úrovni dosažených hlavních výsledků závěrečné práce, např. k úrovni teoretických výsledků, nebo k úrovni a funkčnosti technického nebo programového vytvořeného řešení, publikačním výstupům, experimentální zručnosti apod.

Neúplný seznam nalezených nedostatků:

- Str. 3: Není uvedeno, co je $C_0(\Omega)$.
- Str. 8, Příklad 1.10: Není specifikováno, že $B(X)$ obsahuje jen omezené lineární operátory. Navíc není nikde uvedena norma, kterou na prostoru uvažujeme. Není také mimo jiné jasné, v jakém smyslu je $B(X_n)$ ztotožněn s prostorem matic (podobný problém s nejasností kolem ztotožněním se vyskytuje i v předchozích příkladech). Pokud na $B(X_n)$ uvažujeme operátorovou normu, pak se jedná o unitální Banachovu algebru. Naopak prostor matic s Frobeniovou normou nebude tvořit unitální Banachovu algebru (v případě $n > 1$) dle definice uvedené v práci.
- Str. 11, důkaz Tvzení 1.5: Důkaz není možné vést tak, že předpokládáme platnost toho, co chceme dokázat.
- Str. 12, důkaz Tvzení 1.7: V důkazu se objevují konečné řady, jejichž součet samozřejmě existuje vždy. Správně se má v důkazu objevit nekonečná řada, jejíž konvergenci ale rozhodně nelze odbyt pouhým konstatováním, že se jedná o analogii s mocninnou řadou. Je třeba uvést korektní argument založený na tom, že se pohybujeme v Banachově prostoru.
- Str. 14, Příklad 1.19: Zde stačí, že matice je invertibilní právě tehdy, když není injektivní. Z toho okamžitě vidíme, že bodové spektrum koinciduje se spektrem. K tomu nepotřebujeme Cayleyovu-Hamiltonovu větu.
- Str. 14, Příklad 1.20: Ekvivalence mezi $(\lambda 1_\Omega - a)f = 0$ a $f = 0$ s.v. rozhodně neplatí. Dále není specifikováno, co je Ω , a proto nelze mluvit o ryzí monotonii funkcí definovaných na Ω . (Dokonce ani nevíme, zda funkce nabývají jen reálných hodnot.)
- Str. 15, důkaz Věty 1.8: Liouvilleova věta z komplexní analýzy nelze okamžitě aplikovat na zobrazení s hodnotami v Banachově prostoru.

- Str. 15, Příklad 1.21: Není zde dobře řečeno, o co se v příkladu snažíme. Chybí diskuze konvergence nekonečné řady. V konkrétním příkladu je využita separabilita metrického prostoru komplexních čísel. To ale neznamená, že neexistuje příklad, kde bychom se bez ní obešli.
- Str. 17, důkaz Tvzení 1.14: Není zdůvodněno, proč tvrzení plyne z uvedeného vztahu.
- Str. 17, Příklad 1.22: x rozhodně nemůže být libovolný prvek v $X[e]$, neboť musí ležet v X , abychom mohli najít jeho spektrum vzhledem k Banachově algebře X . Pro takové prvky ale jejich spektrum vzhledem k $X[e]$ obsahuje vždy 0 , a proto v inkluzi nastává rovnost. (Také je nutné předpokládat neunitálnost Banachovy algebry X , jinak se dostaneme do sporu s definicí spektra v unitálních Banachových algebrách, neboť z Definice 1.10 je jasné, že invertibilní prvky nemůžou mít ve spektru 0 .) Navíc se autor pravděpodobně snaží ukázat, že nemusí nastávat rovnost v případě popsaném Tvzením 1.17. Zde upozorňuji na to, že Tvzení 1.17 mluví o situaci, kdy Banachova algebra a její podalgebra mají stejnou jednotku. Jednotka v $X[e]$ ale neleží v X .
- Str 20, Příklad 1.25: J_n může být diagonální matice (tj. ve vyjádření J_n obecně nefiguruje matice U_n).
- Str. 23, Definice 1.16: V definici není specifikováno, kde je funkce reprezentována mocninnou řadou. Upozorňuji, že ve standardní terminologii jsou analytičnost a holomorfnost synonyma.
- Str. 25, důkaz Tvzení 1.27: Rovnost mezi determinanem exponenciály matice a exponenciálou determinantu matice je v důkazu použita na nilpotentní matici, ale do této doby byla dokázána jen pro diagonální matice.
- Str. 27, Definice 1.20: Není uvedeno, co je γ a jaké jsou meze sumy (není jasné, zda suma může být i nekonečná). Požadavky na γ_n nejsou dostatečné. V poznámce následující za definicí je uvedeno, že integrál je chápán ve slabém smyslu. Takové integrály ale mají obecně hodnoty ve druhém duálu. Není vůbec zřejmé, že by v uvedeném případě měly ležet v původní algebře. Navíc ve vzorci v poznámce za definicí určitě nemá být na pravé straně 0 .
- Str. 27-28, důkaz Věty 1.29: Obsahuje řadu nedostatků. Křivky γ_1 a γ_2 nelze obecně volit jako kružnice. Místo argumentace Cauchyho větou (na konci strany 27) má být využit Cauchyho vzorec (poznámka o „vektorovém případě“ je divná, neboť v integrálu máme obyčejnou komplexní funkci) a v uvedené formuli je špatně znaménko. Při důkazu nulovosti druhého intergálu se využije Cauchyho věta. Zde chybí podrobnější rozbor, který by si tato část zcela jistě zasloužila. V závěru důkazu postrádám argument, proč $l(r)$ jde k nule.
- Str. 29, konec důkazu Tvzení 1.31: Má být $\sigma(f(x))$ a nikoli $f(\sigma(x))$.
- Str. 30, text za Definicí 1.21: Není jasné, proč suma konverguje. Dále je definován prvek $1_\Omega(x)$, kde Ω je oblast v komplexní rovině. V nekonečné sumě se ale objevují prvky $1_\Omega(x)$, kde Ω je jednoprvková množina.
- Str. 33, důkaz Důsledku 2.2: V důkazu je argumentováno Tvzením 2.1, z kterého ale daný závěr neplyne.
- Str. 34: Příklad 2.1 a 2.2 postrádají jakékoli zdůvodnění. Bylo by dobré buď uvést zdůvodnění, nebo se alespoň odkázat na literaturu.
- Str. 35, Definice 2.2: Definice maximálního ideálu je špatně. Maximální ideál je vlastní ideál. Uvedená definice však říká, že maximální ideál je vždy X . (V práci je symbol \subset používán pro neostrou inkluzi.)
- Str. 37, Příklad 2.5: Ideály byly v práci definovány jen v případě komutativních Banachových algeber. (Pro nekomutativní případ máme více možností: levý ideál, pravý ideál, oboustranný ideál.) V důkazu, že příslušný prostor matic má jediný netriviální (oboustranný) ideál není vůbec potřeba fakt, že uvedený prostor matic je lineárním obalem maticových jednotek. Zde je třeba argumentovat jinak.
- Str. 39-40, Příklad 2.7: Zobrazení T není bijekce. Argumentace v závěrečné části příkladu je podivná.
- Str. 40, Příklad 2.8: V příkladu se nemá jednat o diskrétní Fourierovu transformaci, ale o Fourierovy řady. Vyznění příkladu by mělo být, že obraz uvedeného prostoru posloupností při zobrazení Γ lze ztotožnit s prostorem spojitých funkcí na jednotkové kružnici, jejichž Fourierova řada je absolutně konvergentní. Takový závěr ale není z uváděných argumentů vidět. Ve zdůvodnění je využita rovnost $\delta_n = \delta^n$, která neplatí.
- Str. 41, důkaz Věty 2.19: Mocnina nemá být $2n$, ale 2^n . V poslední části důkazu se autor snaží dokázat něco, co není obsahem uvedené věty.
- Str. 42, Příklad 2.10: Je-li H různé od K , pak sdružení nemůže být operací involuce (viz Definice 2.4).
- Str. 46, Důsledek 2.26: Důsledek je špatně formulovaný. Správně v něm má být, že existuje nejvýše jedna norma, vzhledem ke které je Banachova algebra C^* -algebrou.
- Str. 48, konec důkazu Tvzení 2.30: Omezený by měl být člen $(2n+1)\beta^2$.
- Str. 49, důkaz Věty 2.32: Místo Γ_x^{-1} má být Γ^{-1} (stejná chyba je i v důkazu Věty 2.34).
- Str. 49, důkaz Věty 2.33: Je evidentně chybný. Vůbec se v něm nevyužívá struktura C^* -algebry. Navíc se v důkazu předpokládá, že inverze k x leží v Y , což je ale věc, kterou se poté autor snaží „dokázat“.

- Str. 51-52, Tvrzení 2.41 a jeho důkaz: Tvrzení by si zasloužilo reformulaci. V jeho druhé části máme v závěru pozitivitu x , kterou ale máme i v předpokladech tvrzení. V důkazu vystupují funkce $f(z)$ a $g(z)$, které je ale třeba zapsat jinak, neboť jejich zavedení v textu říká, že f je definována jen pro nezáporná reálná čísla a funkce g pro nekladná. Zdůvodnění, že $v^4=0$ rozhodně nelze považovat za dostatečné (vypadá to, že se autor snaží využít přesně to, co má dokázat).
- Str. 52, Definice 2.12: Pokud H a K jsou různé, pak není jasné, co je absolutní hodnota z x .
- Str. 56: V sumě z Definice 3.3 má být dolní mez rovna 0. V Příkladu 3.7 by měla být mocnina $|x|$ jiná, nežli n -tá.
- Str. 57, Příklad 3.8: Chybí zdůvodnění maticové reprezentace $(B \square B)_1$, $(B \square B)_2$ a $(B \square B)|_{N(C)}$. (Není uveden ani odkaz na literaturu.)
- Str. 58: Inkluze obsahující spektrum $A \square A$ vyžaduje zdůvodnění. (Opět není uveden ani odkaz na literaturu.)
- Str. 60, poznámka za Definicí 3.6: Text je zavádějící. Pod záporným násobkem se rozhodně nerozumí jen násobení číslem -1 . Podobné je to s komplexním násobkem, který rozhodně neznamená jen násobení imaginární jednotkou. Dále v každém Jordanově triple systému existuje alespoň jeden tripotent, a to 0.
- Str. 60, poznámka za Definicí 3.7: Spektrum nuly nebylo definováno.
- Str. 64-65, důkaz Věty 3.10 a text pod důkazem: Není zdůvodněno, proč je u_0 definováno korektně. Navíc po rozšíření ze spojitosti je třeba zobrazení dodefinovat nulou, což v důkazu zcela chybí. Důkaz jednoznačnosti nelze považovat za správný (navíc je v něm část, která vůbec nesouvisí s obsahem dokazovaného tvrzení). Za důkazem je uvedeno, že analogicky lze uvážit polární rozklad i v $B(H, K)$. Protože se jedná o obecnější verzi polárního rozkladu, která je navíc podstatná pro budovaný triple kalkulus, měl by být tento výsledek formulován a dokázán namísto speciální verze pokryté Větou 3.10.
- Str. 66: Tvrzení 3.12 je špatně formulováno. Není zřejmé, kde se polární rozklad uvažuje. Předpoklad o jeho existenci by mi dával smysl, pokud bychom chtěli mít částečnou isometrii v X . V takovém případě by ale byl závěr tvrzení triviální a nezajímavý. Zde je podstatné, že polární rozklad uvažujeme v $B(H)$, kde je jeho existence vždy zaručena Větou 3.10.
- Str. 68: Není zdůvodněno, proč $UP_i P_j^* U^* U P_i = U\{P_i, P_j, P_i\}$. (V další části textu se vyskytují obdobné identity, které jsou opět bez zdůvodnění.)
- Str. 70: V poznámce se mluví o funkci $f(z)$ a není zřejmé, proč by měla být spojitá na spektru (v poznámce nevidím omezení pouze na matice – je zde zmínka o lineárních operátorech).

III. CELKOVÉ HODNOCENÍ, OTÁZKY K OBHAJOBĚ, NÁVRH KLASIFIKACE

Práce obsahuje celou řadu podstatných nedostatků. Důkazy tvrzení jsou často chybné, některé pojmy nejsou definovány vůbec, nebo až poté, co jsou používány. Příklady jsou mnohdy nedostatečně komentovány.

Otázky k obhajobě:

- 1) Jak lze nalézt polární rozklad obecné obdélníkové matice?
- 2) V předposledním odstavci na straně 73 je zmíněno, že uvažujeme uzávěr prostoru generovaného maticí A . Jak se liší prostor generovaný maticí A od svého uzávěru?

Předloženou závěrečnou práci hodnotím klasifikačním stupněm **E - dostatečně**.

Datum: 7.6.2021

Podpis: