

Diplomová práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F2

Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Parametry historie napětového tenzoru a jejich dopad na únavovou životnost

Bc. Eva Cízová

Vedoucí práce: Ing. Jan Papuga, PhD.
Studijní program: Strojní inženýrství
Obor: Aplikovaná mechanika
Leden 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Cízová** Jméno: **Eva** Osobní číslo: **457550**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Parametry historie napět'ového tenzoru a jejich dopad na únavovou životnost

Název diplomové práce anglicky:

Parameters of stress tensor history and their impact on fatigue life

Pokyny pro vypracování:

Při víceosém zatěžování jsou pro analýzu historie zatěžování používány různé metody vyhodnocení, které jsou však zřídka soustavně porovnány mezi sebou či vůči experimentálním datům. Proved'te:

- * Analýzu existujících metod zpracování zátěžné cesty jak v Iljušinově deviatorickém prostoru tak při průmětu na konkrétní rovinu se zaměřením na analytické a nikoli numerické řešení
- * Algoritmizaci jednotlivých metod (např. Matlab, C/C++, ...)
- * Sběr vhodných experimentálních dat
- * Analýzu nových multiaxiálních únavových metod napět'ového typu zveřejněných po r. 2011
- * Vyhodnocení rozdílů nových metod vůči metodě PCN a zjištění dopadu zvolené cesty zpracování zátěžné cesty minimálně na metody PCN, Liu & Zenner, Dang Van, Findley a Crossland
- * Shrnutí závěrů

Seznam doporučené literatury:

- [1] Papuga J. A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading. Int J Fatigue 2011;33:153–65.
- [2] Papadopoulos IV, Davoli P, Gorla C, Filippini M, Bernasconi A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. Int J Fatigue 1997;19:219–35.
- [3] Meggiolaro, M. A.; de Castro, J. T. P.: An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories – Part I: Enclosing surface methods. International Journal of Fatigue , 2012, pp. 217-226.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jan Papuga, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **21.10.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **15.01.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Jan Papuga, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomantka bere na vědomí, že je povinna vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studentky

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce, panu Ing. Janu Papugovi, Ph.D., za příkladné vedení diplomové práce a cenné rady a komentáře k jejímu vypracování. Poděkování patří také rodině a přátelům za podporu během studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 15. 1. 2021

I declare that I completed the presented thesis independently and that all used sources are quoted in accordance with the Methodological Instructions that cover the ethical principles for writing an academic thesis.

In Prague, 15. 1. 2021

Bc. Eva Cízová

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá dvěma základními problémy multiaxiálních únavových výpočtů – způsoby zpracování zátěžné cesty a výběrem vhodného kritéria. V úvodu práce jsou představeny parametry napěťového tenzoru a jsou ukázány metody pro výpočet střední hodnoty a amplitudy těchto parametrů z průběhu zátěžné křivky. V další části je provedeno odvození průběhu napěťových parametrů a jejich střední hodnoty a amplitudy pro konkrétní případ namáhání pomocí metody nejmenší opsané kružnice, metody nejmenší opsané elipsy a metody momentu setrvačnosti. V další části práce jsou představena multiaxiální únavová kritéria, která tyto parametry používají. Prezentováno je několik nových kritérií, která jsou následně porovnávána se staršími metodami na základě porovnání výstupu kritérií s experimentálními daty. Oproti starším metodám se jeví výhodně zejména použití Böhmeho kritéria, použití ostatních nových kritérií se jeví spíše nevýhodně. V další části práce je posuzován vliv způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy multiaxiálních kritérií. Je ukázáno, že použití metody nejmenší opsané elipsy je vhodné pro kritéria kritické roviny a pro kritéria používající napěťové invarianty. Pro integrální kritéria je vhodnější použití metody nejmenší opsané kružnice. Metoda momentu setrvačnosti se jeví příliš konzervativně a její použití není pro posuzované zatěžování vhodné.

Klíčová slova: Multiaxiální únava materiálu, Zpracování zátěžné cesty, Metoda nejdelsí tětivy, Metoda nejmenší opsané kružnice, Metoda nejmenší opsané elipsy, Metoda největšího opsaného obdélníka, Metoda momentu setrvačnosti, Multiaxiální únavová kritéria

Vedoucí práce: Ing. Jan Papuga, PhD.

Abstract

Master's thesis focuses on two basic problems of multiaxial fatigue calculations – the stress path evaluation and choice of an appropriate criterion. Firstly, the parameters of the stress tensor are introduced and the methods for calculating the mean values and amplitudes of these parameters from the stress path are presented. In the next part, the evolution of the stress parameters and their mean values and amplitudes are derived for a particular loading case by using the minimum circumscribed circle method (MCC), the minimum circumscribed ellipse method (MCE) and the moment of inertia method (MOI). Next, the multiaxial criteria that use these parameters are presented. Several new criteria are presented and compared with older criteria based on comparison of their outcomes with experimental data. Usage of Böhme's criterion seems to be the most beneficial against older methods, usage of other new criteria does not seem to be advantageous. Further, the impact of stress path evaluation method on outcomes of the multiaxial criteria is considered. It is shown that usage of MCE method is appropriate for critical plane criteria and for criteria based on stress invariants. For integral criteria it is more desirable to use MCC method. The MOI method seems to be too conservative and it is not appropriate to use it for the considered loading.

Keywords: Multiaxial fatigue, Stress path analysis, Longest chord method, Minimum circumscribed circle method, Minimum circumscribed ellipse method, Maximum prismatic hull method, Moment of inertia method, Multiaxial fatigue criteria

Title translation: Parameters of stress tensor history and their impact on fatigue life

Obsah

1 Úvod	1		
1.1 Základní pojmy	2		
2 Metody výpočtu amplitudy a střední hodnoty smykového a deviatorického napětí	5		
2.1 Metoda nejdější těživy	6		
2.2 Metoda nejmenší opsané kružnice a koule	7		
2.3 Metody opsané elipsy a elipsoidu	9		
2.4 Metody opsaného obdélníka a kvádrů	10		
2.5 Metoda momentu setrvačnosti	12		
2.6 Porovnání vybraných metod na ilustrativním případu	13		
3 Odvození vztahů pro průběh napěťových parametrů při čtyřosém namáhání	15		
3.1 Odvození vztahů pro normálové a smykové napětí	16		
3.2 Odvození vztahů pro hydrostatické a deviatorické napětí	21		
3.3 Redukce vztahů pro jednodušší zátěžné podmínky	25		
3.3.1 Čistý tah	25		
3.3.2 Čistý krut	28		
3.3.3 Dvouosé zatěžování se dvěma normálovými složkami	31		
3.3.4 Soufázové zatěžování	35		
3.4 Shrnutí výsledků odvození	38		
4 Multiaxiální kritéria únavové pevnosti	39		
4.1 Kritéria kritické roviny	39		
4.1.1 Findleyovo kritérium	39		
4.1.2 Matakaheho kritérium	40		
4.1.3 Kritérium QCP	40		
4.1.4 Kritérium PCr	41		
4.1.5 Kritérium PCN	41		
4.1.6 Dang Vanovo kritérium	42		
4.2 Integrovaná kritéria	42		
4.2.1 Fogueovo kritérium	42		
4.2.2 Liuovo a Zennerovo kritérium	43		
4.2.3 Kritérium PIN	43		
4.3 Kritéria založená na napěťových invariantech	44		
4.3.1 Sinesovo kritérium	44		
4.3.2 Crosslandovo kritérium	44		
4.4 Nová multiaxiální únavová kritéria	45		
4.4.1 Wangovo kritérium	45		
4.4.2 Margetinovo kritérium	46		
4.4.3 Khalijino kritérium	47		
4.4.4 Anesovo kritérium SSF	49		
4.4.5 Böhmeho kritérium	50		
5 Vyhodnocení rozdílu nových metod proti starším kritériím	53		
5.1 Porovnání pro případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim	54		
5.2 Porovnání pro případy tahu a torze bez středního napětí z databáze FatLim	56		
5.3 Zhodnocení dosažených výsledků	57		
6 Analýza dopadu způsobu zpracování zátěžné cesty na kritéria únavové pevnosti	61		
6.1 Analýza závislosti ekvivalentního napětí na fázovém posuvu	61		
6.1.1 Zhodnocení dosažených výsledků	74		
6.2 Validace na experimentálních datech	79		
6.2.1 Porovnání způsobů zpracování zátěžné cesty pro experimentální data z databáze FatLim	79		
6.2.2 Porovnání způsobů zpracování zátěžné cesty pro případy mimofázového namáhání z databáze FatLim	84		
6.2.3 Porovnání způsobů zpracování zátěžné cesty pro případy mimofázového namáhání bez středního napětí	89		
6.2.4 Zhodnocení dosažených výsledků	94		
7 Závěr	97		
Literatura	99		
A Seznam použitých symbolů, zkratk a indexů	103		
Použité symboly	103		
Použité zkratky	104		
Použité indexy	105		

Kapitola 1

Úvod

Diplomová práce se zabývá tématem multiaxiálních výpočtů únavové pevnosti materiálů. Cíle práce jsou:

- provedení analýzy existujících způsobů zpracování zátěžné cesty,
- analýza nových multiaxiálních kritérií únavové pevnosti,
- vyhodnocení rozdílů mezi nově publikovanými kritérii a staršími metodami,
- posouzení vlivu způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy multiaxiálních únavových kritérií.

V úvodní části práce budou definovány parametry napětového tenzoru, které budou používány v multiaxiálních únavových kritériích. Bude popsán způsob, pomocí kterého se z historie napětového tenzoru získá průběh normálového a smykového napětí na materiálové rovině. Definovány budou také invariantní napětové parametry – hydrostatické a deviatorické napětí a popsána bude transformace do Iljušina deviatorického prostoru. V další části budou popsány metody, pomocí kterých lze z průběhu napětových parametrů získat jejich střední hodnotu a amplitudu. Následně budou pro konkrétní případ zatížení odvozeny analytické vztahy pro průběh napětových parametrů. Účelem tohoto odvození je nalezení analytických vztahů pro střední hodnoty a amplitudy napětových parametrů, které vede na snížení výpočtové náročnosti při určování únavové pevnosti. Následně budou popsána multiaxiální únavová kritéria, která takto odvozené vztahy využívají. Popsáno bude několik starších kritérií, která se běžně používají a také několik novějších metod, jejichž použitelnost bude později porovnávána se staršími metodami.

Základní poznatky představené v teoretické části práce budou využity pro implementaci jednotlivých metod výpočtu únavové pevnosti. Pro nová multiaxiální kritéria bude vyhodnocována míra shody vypočtené únavové pevnosti s experimentálně dosaženou únavovou pevností a tyto výstupy budou porovnány s výstupy starších kritérií. Pro multiaxiální kritéria bude dále posuzován vliv způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy těchto kritérií. Vyhodnocováno bude jak se pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty mění závislost výstupu kritérií na fázovém posuvu mezi složkami. Dále bude posuzován vliv způsobu zpracování zátěžné cesty na míru shody mezi experimentálně zjištěnou únavovou pevností a únavovou pevností vypočtenou pomocí jednotlivých multiaxiálních kritérií.

1.1 Základní pojmy

V této sekci budou na základě definic v [1] popsány základní parametry napětového tenzoru, které budou dále používány pro určení únavové pevnosti. Obecné periodické namáhání, působící v libovolném bodě elementárního objemu V materiálu, je popsáno tenzorem napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Tento tenzor je symetrický a skládá se ze šesti složek. Tenzor napětí v souřadnicích (x, y, z) lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

kde platí

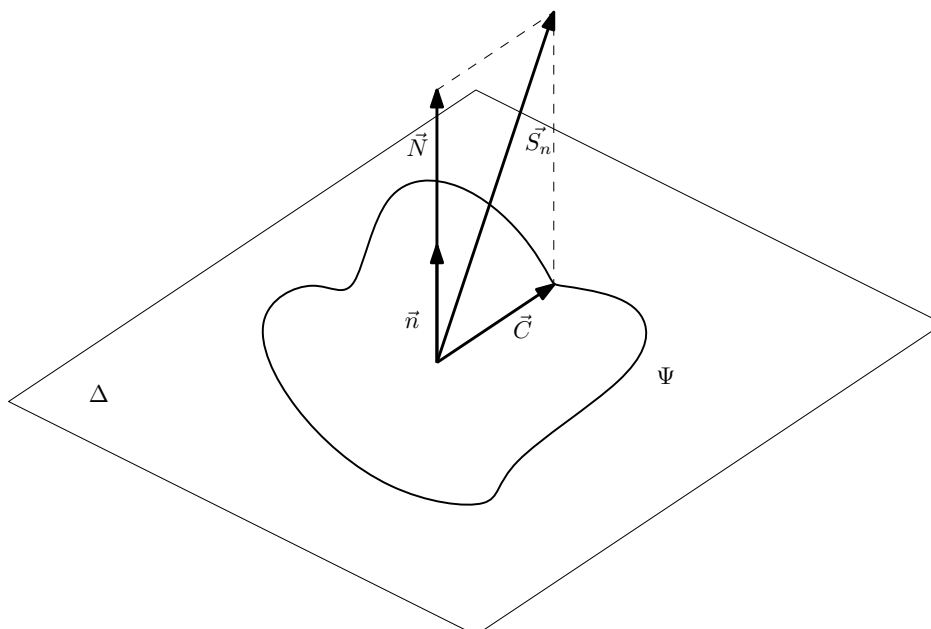
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.2)$$

Popisováno bude periodické namáhání, pro které platí, že jednotlivé složky tenzoru napětí σ_{ij} jsou periodickou funkcí času a skládají se z časově závislé a časově nezávislé složky $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij,m} + \sigma_{ij,a} f_{ij}(t)$. Pokud se v čase nemění hlavní směry napětí, jedná se o proporcionální zatěžování. V případě, že se hlavní směry v čase mění, jedná se o zatížení neproporcionální [1].

Průnik elementárního objemu V s rovinou procházející zvoleným bodem se nazývá elementární materiálová rovina Δ . Tato materiálová rovina je popsána normálovým vektorem \vec{n} a působí na ní vektor napětí \vec{S}_n daný jako

$$\vec{S}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}. \quad (1.3)$$

Na obrázku 1.1 je znázorněna materiálová rovina, na které působí vektor \vec{S}_n a průmět tohoto vektoru do směru normály a do roviny Δ .



Obrázek 1.1: Vektor napětí působící na materiálové rovině Δ a průmět tohoto vektoru do směru normály a do roviny Δ

Průmět vektoru \vec{S}_n do směru \vec{n} se nazývá normálové napětí \vec{N} na rovině Δ a určí se ze vztahu

$$\vec{N} = (\vec{n} \cdot \vec{S}_n) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (1.4)$$

Během cyklického zatěžování se koncový bod vektoru \vec{N} pohybuje tam a zpět ve směru normálového vektoru \vec{n} a nemění tak svůj směr ale pouze okamžitou hodnotu [1]. Normálové napětí \vec{N} tak může být plně popsáno svou algebraickou hodnotou N která se určí jako

$$N = \vec{n} \cdot \vec{S}_n = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}. \quad (1.5)$$

Pro časově závislé cyklické zatěžování s periodou P je $N(t)$ skalární funkcí času. Amplitudu normálového napětí N_a a střední hodnotu normálového napětí N_m lze definovat jako

$$N_a = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}) - \min_{t \in P} (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}) \right) \quad (1.6)$$

$$N_m = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}) + \min_{t \in P} (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}) \right). \quad (1.7)$$

Maximální hodnota normálového napětí N_{max} je definována jako součet střední hodnoty a amplitudy normálového napětí

$$N_{max} = N_m + N_a. \quad (1.8)$$

Kolmý průmět vektoru \vec{S}_n do roviny Δ se nazývá smykové napětí \vec{C} . Smykové napětí je definováno jako vektorový rozdíl vektoru napětí \vec{S}_n a normálového napětí \vec{N}

$$\vec{C} = \vec{S}_n - \vec{N} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (1.9)$$

Během cyklického zatěžování se může měnit velikost i směr vektoru smykového napětí \vec{C} na rovině Δ . Koncový bod vektoru \vec{C} vykreslí během periody P na rovině Δ uzavřenou křivku Ψ [1], jejíž příklad je znázorněn na obrázku 1.1. Definice amplitudy C_a a střední hodnoty C_m smykového napětí \vec{C} pomocí průběhu křivky Ψ není na rozdíl od normálového napětí \vec{N} jednoznačná. Metody určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí jsou popsány v následující kapitole.

Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze rozdělit na sférickou a deviatorickou část

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_H \vec{I}, \quad (1.10)$$

kde \vec{I} je jednotkový tenzor druhého řádu, σ_H je hydrostatické napětí, které se určí podle vztahu

$$\sigma_H = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.11)$$

a \mathbf{s} je deviator napětí, který se určí ze vztahu

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pro cyklické zatěžování je hydrostatické napětí σ_H skalární periodickou funkcí času s periodou P [1]. Amplitudu hydrostatického napětí $\sigma_{H,a}$ a střední hodnotu hydrostatického napětí $\sigma_{H,m}$ lze definovat pomocí vztahů

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} \sigma_H(t) - \min_{t \in P} \sigma_H(t) \right) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} \sigma_H(t) + \min_{t \in P} \sigma_H(t) \right). \quad (1.14)$$

V řadě multiaxiálních kritérií se používá napěťový parametr $\sqrt{J_2}$, který se nazývá odmocnina z druhého invariantu deviátoru napětí a je definován jako

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \quad (1.15)$$

Pro určení amplitudy $\sqrt{J_{2,a}}$ a střední hodnoty $\sqrt{J_{2,m}}$ odmocniny z druhého invariantu deviátoru napětí je vhodné použít transformaci tenzoru deviátoru napětí do pětirozměrného vektoru $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ podle vztahů

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} s_{xx} \quad S_2 = \frac{1}{2} (s_{yy} - s_{zz}) \quad S_3 = s_{xy} \quad S_4 = s_{xz} \quad S_5 = s_{yz}. \quad (1.16)$$

Takto popsaná transformace se označuje jako transformace do Iljušina deviatorického prostoru [2]. Odmocninu z druhého invariantu deviatorického napětí lze pak určit ze vztahu

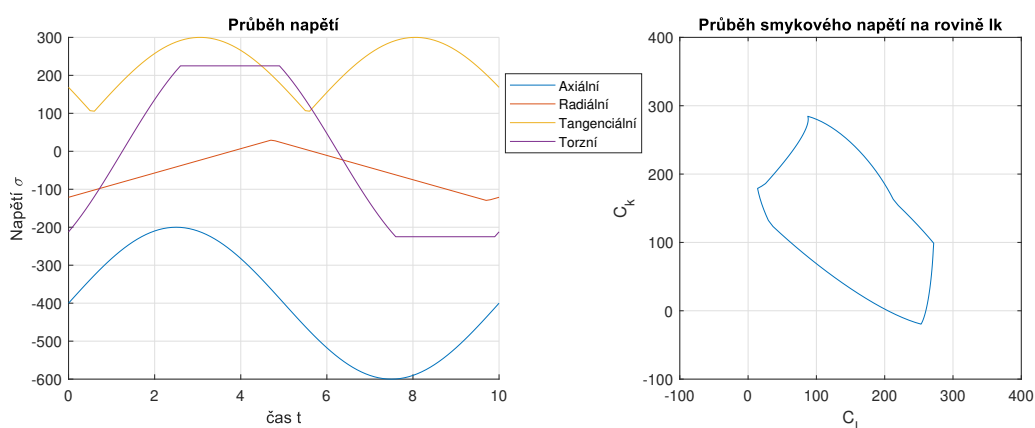
$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \sqrt{\vec{S} \cdot \vec{S}} \quad (1.17)$$

Během cyklického zatěžování s periodou P se může periodicky měnit pět složek vektoru \vec{S} a koncový bod vektoru \vec{S} vykreslí v prostoru E_5 uzavřenou křivku Φ [1]. Způsoby výpočtu amplitudy $J_{2,a}$ a střední hodnoty $J_{2,m}$ jsou popsány v následující kapitole.

Kapitola 2

Metody výpočtu amplitudy a střední hodnoty smykového a deviatorického napětí

V předchozí kapitole bylo popsáno, že vektor smykového napětí \vec{C} v čase mění svou velikost i směr na rovině Δ a koncový bod vektoru vykreslí na této rovině uzavřenou křivku Ψ . Vektor deviatorického napětí \vec{S} v čase mění velikost a směr v prostoru E_5 a jeho koncový bod vykreslí v prostoru E_5 uzavřenou křivku Φ . Dosud definované metody určení střední hodnoty a amplitudy smykového napětí z průběhu křivky Ψ a střední hodnoty a amplitudy odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí z průběhu křivky Φ lze rozdělit na metodu nejdelší tětivy, metody opsaného obrazce a metodu momentu setrvačnosti. Křivky Φ a Ψ bývají označovány jako zátěžná cesta a způsoby výpočtu amplitudy a střední hodnoty smykového a deviatorického napětí z těchto křivek jsou pak označovány jako způsoby zpracování zátěžné cesty. Přehled způsobů zpracování zátěžné cesty je uveden například v [3]. Jednotlivé způsoby budou ilustrovány na příkladu namáhání se čtyřmi periodickými složkami, pro které je průběh složek namáhání a průběh smykového napětí znázorněn na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Ilustrativní příklad namáhání se čtyřmi periodickými složkami a průběh smykového napětí na zvolené rovině

2.1 Metoda nejdelší tětivy

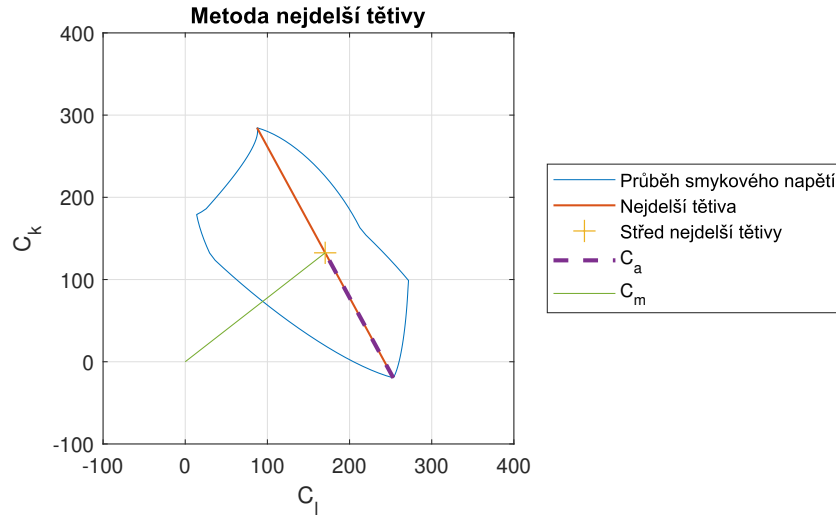
Metoda nejdelší tětivy [1] (Longest chord method LC) definuje amplitudu smykového napětí jako polovinu délky nejdelší tětivy (spojnice dvou bodů) křivky Ψ . Amplituda smykového napětí je tedy definována vztahem

$$C_a = \frac{1}{2} \max_{t_i \in P} (\max_{t_j \in P} \|\vec{C}(t_i) - \vec{C}(t_j)\|), \quad (2.1)$$

kde $\|\cdot\|$ značí normu vektoru. Časové okamžiky, kterým odpovídá maximální rozdíl smykového napětí jsou označeny t_i^* a t_j^* . Střední hodnota smykového napětí je definována jako délka vektoru směřujícího z počátku souřadnic do středu nejdelší tětivy a je dána vztahem

$$C_m = \frac{1}{2} \|\vec{C}(t_i^*) + \vec{C}(t_j^*)\|. \quad (2.2)$$

Na obrázku 2.2 je naznačen způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody nejdelší tětivy pro obecné periodické zatěžování.



Obrázek 2.2: Způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody nejdelší tětivy

Amplituda odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí $\sqrt{J_{2,a}}$ může být obdobně určena jako polovina délky nejdelší tětivy křivky Φ v prostoru E_5 [1] pomocí vztahu

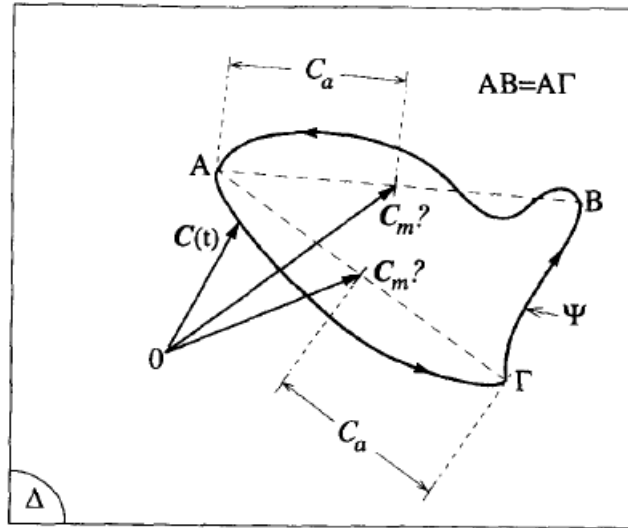
$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{1}{2} \max_{t_i \in P} (\max_{t_j \in P} \|\vec{S}(t_i) - \vec{S}(t_j)\|). \quad (2.3)$$

Střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí je pak dána jako délka vektoru směřujícího z počátku souřadnic do středu nejdelší tětivy a určí se pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,m}} = \frac{1}{2} \|\vec{S}(t_i^*) + \vec{S}(t_j^*)\|, \quad (2.4)$$

kde t_i^* a t_j^* jsou časové okamžiky, mezi kterými je největší rozdíl deviatorického napětí.

Použití metody nejdelší tětiny pro definici amplitudy C_a a $\sqrt{J_{2,a}}$ a střední hodnoty C_m a $\sqrt{J_{2,m}}$ není podle Papadopoula [1] vhodné protože může vézt na nejednoznačné určení střední hodnoty C_m a $\sqrt{J_{2,m}}$. Na obrázku 2.3 je znázorněn příklad křivky Ψ , pro kterou lze nalézt dvě tětiny AB a A Γ , které jsou obě nejdelší tětiny křivky, ale mají různý střed a proto není střední hodnota C_m určena jednoznačně. Z tohoto důvodu nebude metoda nejdelší tětiny používána v dalších kapitolách.



Obrázek 2.3: Příklad průběhu smykového napětí, pro který metoda nejdelší tětiny přináší nejednoznačné nalezení střední hodnoty C_m . [1]

2.2 Metoda nejmenší opsané kružnice a koule

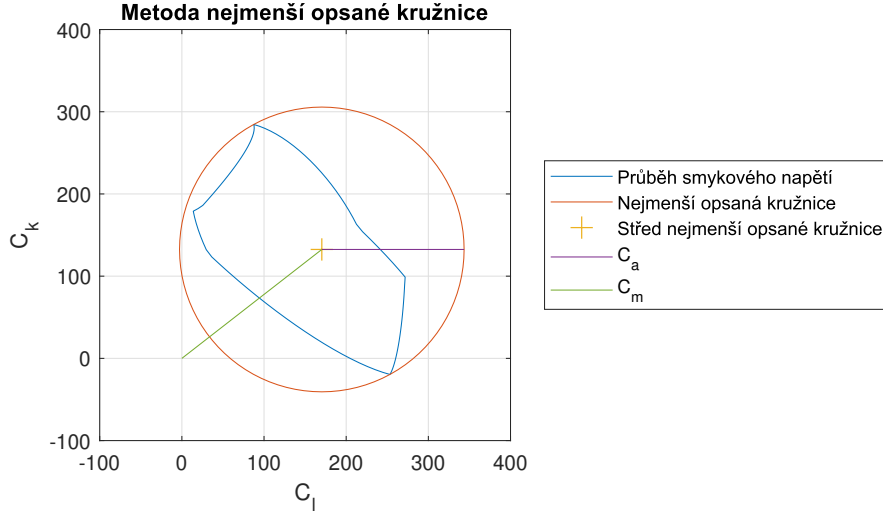
Metoda nejmenší opsané kružnice [1] (Minimum Circumscribed Circle method MCC) se používá pro určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí z průběhu křivky Ψ , která leží v dvourozměrném prostoru Δ . Tato metoda definuje amplitudu a střední hodnotu smykového napětí pomocí nejmenší kružnice opsané křivce Ψ . Střední hodnota smykového napětí C_m je dána jako velikost vektoru \vec{C}_m směřujícího z počátku souřadnic do středu nejmenší opsané kružnice. Amplituda smykového napětí je definována jako poloměr nejmenší opsané kružnice. Střední hodnotu smykového napětí lze určit pomocí problému minima-maxima:

$$\vec{C}_m : \min_{\vec{C}'} (\max_{t \in P} \|\vec{C}(t) - \vec{C}'\|). \quad (2.5)$$

kde \vec{C}' představuje vektor směřující do libovolně zvoleného středu, ze kterého je sestrojena kružnice, která opisuje křivku Ψ . Poloměr této kružnice je roven $(\max_{t \in P} \|\vec{C}(t) - \vec{C}'\|)$. Úkolem problému popsaného rovnicí (2.5) je nalézt střed kružnice \vec{C}' tak, aby poloměr kružnice opsané křivce Ψ byl minimální. Po nalezení středu nejmenší opsané kružnice je amplituda smykového napětí C_a dána jako poloměr této kružnice

$$C_a = \max_{t \in P} \|\vec{C}(t) - \vec{C}_m\|. \quad (2.6)$$

Na obrázku 2.4 je naznačen způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody nejmenší opsané kružnice.



Obrázek 2.4: Způsob nalezení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody nejmenší opsané kružnice

Metoda nejmenší opsané koule je rozšířením metody opsané kružnice a slouží k určení střední hodnoty a amplitudy odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí z průběhu křivky Φ v prostoru E_5 . Úkolem této metody je sestrojít pětirozměrnou hyperkouli, která opíše křivku Φ popisující průběh deviatorického napětí a její poloměr bude minimální. Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ je pak definována jako délka vektoru \vec{S}_m směřujícího z počátku souřadnic do středu hyperkoule a amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ je definována jako poloměr této hyperkoule. Vektor \vec{S}_m je dán jako řešení problému

$$\vec{S}_m : \min_{\vec{S}'} (\max_{t \in P} \|\vec{S}(t) - \vec{S}'\|), \quad (2.7)$$

kde \vec{S}' směřuje do libovolně zvoleného středu hyperkoule a $\max_{t \in P} \|\vec{S}(t) - \vec{S}'\|$ představuje poloměr hyperkoule sestrojené z tohoto středu. Úkolem problému daného rovnicí (2.7) je nalézt střed hyperkoule tak, aby poloměr hyperkoule opsané křivce Φ byl minimální. Po nalezení středu hyperkoule \vec{S}_m je amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ dána pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = \max_{t \in P} \|\vec{S}(t) - \vec{S}_m\|. \quad (2.8)$$

Nevýhodou metody nejmenší opsané koule je to, že není schopná popsat rozdíl mezi proporcionálním a neproporcionálním zatěžováním [3]. Například pro neproporcionální zatěžování pro které je průběh smykového napětí popsán kružnicí bude metoda předpovídat stejnou amplitudu smykového napětí jako pro proporcionální zatěžování pro které je průběh smykového napětí úsečka, protože oběma křivkám bude opsána stejná kružnice. Pro neproporcionální zatěžování je ale [3] předpokládá, že by měla být amplituda smykového napětí vyšší.

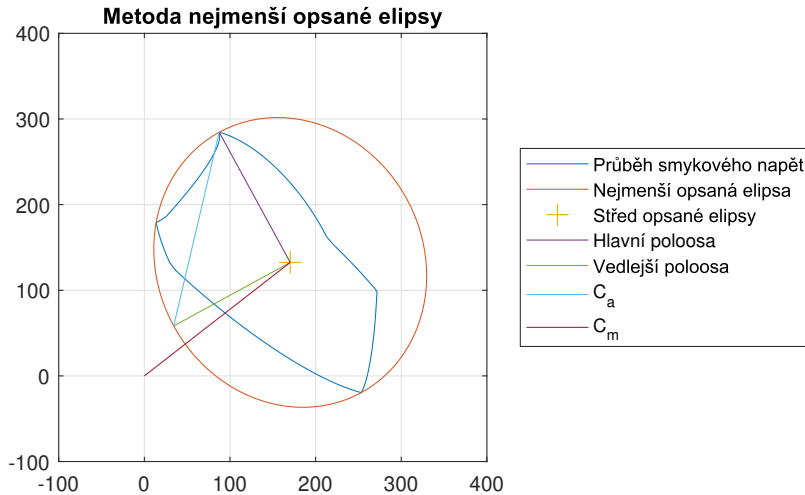
2.3 Metody opsané elipsy a elipsoidu

Pro rozlišení popisu proporcionálního a neproporcionálního zatěžování je vhodné opsat průběhu smykového napětí místo kružnice elipsu a průběhu deviatorického napětí opsat pětirozměrný hyperelipsoid. Existuje několik možných způsobů opisu elipsoidu průběhu namáhání.

Metoda nejmenší opsané elipsy [4], [3] (Minimum Circumscribed Ellipse method MCE) pro určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí hledá elipsu, která opíše křivku Ψ a která bude mít delší poloosu a_1 rovnou poloměru nejmenší opsané kružnice a druhá poloosa a_2 bude mít minimální velikost. Amplituda smykového napětí je pak dána jako vektorový součet poloos elipsy pomocí vzorce

$$C_a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (2.9)$$

a střední hodnota smykového napětí je dána jako velikost vektoru směřujícího z počátku soustavy souřadnic do středu elipsy. Způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí je naznačen na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody nejmenší opsané elipsy

Pro určení amplitudy a střední hodnoty odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí je metoda opsané elipsy rozšířena na metodu nejmenší opsaného elipsoidu, která hledá hyperelipsoid, který opíše křivku Φ a který bude mít nejdelší poloosu a_1 rovnou poloměru nejmenší opsané hyperkoule a ostatní poloosy budou mít minimální velikost. Amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ je dána jako vektorový součet poloos (Frobeniova norma) hyperelipsoidu pomocí vzorce

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{dim} a_i^2} = F, \quad (2.10)$$

kde dim je dimenze průběhu deviatorického napětí $2 \leq dim \leq 5$ a F značí Frobeniovu normu. Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ je dána jako velikost vektoru směřujícího z počátku do středu hyperelipsoidu.

Dalším způsobem opisu elipsoidu průběhu namáhání je metoda opsaného elipsoidu s nejmenším objemem [3] (Minimum Volume Ellipsoid MVE). Tato metoda hledá pro průběh smykového napětí elipsu, která opíše křivku Ψ a bude mít minimální obsah. Amplituda a střední hodnota smykového napětí je definována shodně jako pro metodu nejmenší opsané elipsy. Podobně pro průběh deviatorického napětí metoda hledá hyperelipsoid, který opíše křivku Φ a má minimální objem. Amplituda a střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí jsou definovány shodně jako pro nejmenší opsaný hyperelipsoid.

Další metodou opisu elipsoidu průběhu namáhání je metoda opsaného elipsoidu s minimální F-normou [5], [3] (Minimum F-norm Ellipsoid method MFE). Pro průběh smykového napětí tato metoda hledá elipsu, která opíše křivku Ψ a jejíž Frobeniova norma daná rovnicí (2.10) bude minimální. Amplituda a střední hodnota smykového napětí je definována shodně jako pro metodu nejmenší opsané elipsy. Pro průběh deviatorického napětí tato metoda hledá hyperelipsoid, který opíše křivku Φ a který bude mít minimální hodnotu Frobeniovy normy. Amplituda a střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí jsou definovány shodně jako pro metodu nejmenšího opsaného elipsoidu.

2.4 Metody opsaného obdélníka a kvádrů

Metody opsaného obdélníka a kvádrů se snaží najít obdélník (pro průběh zatěžování v E_2), kvádr (v E_3) nebo 5-ti rozměrný hranol (v E_5), který uzavře průběh zatěžování. Existuje několik metod jak opsat kvádr průběhu zatěžování.

Metoda největšího kvádrů [6], [3] (Maximum Prismatic Hull MPH) hledá pro průběh smykového napětí opsaný obdélník, který uzavře křivku Ψ pro všechny možné orientace obdélníka. Z těchto obdélníků je vybrán obdélník s největší hodnotou Frobeniovy normy. Amplituda smykového napětí se určí z délek stran obdélníku $2b_1$ a $2b_2$ pomocí Frobeniovy normy

$$C_a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \quad (2.11)$$

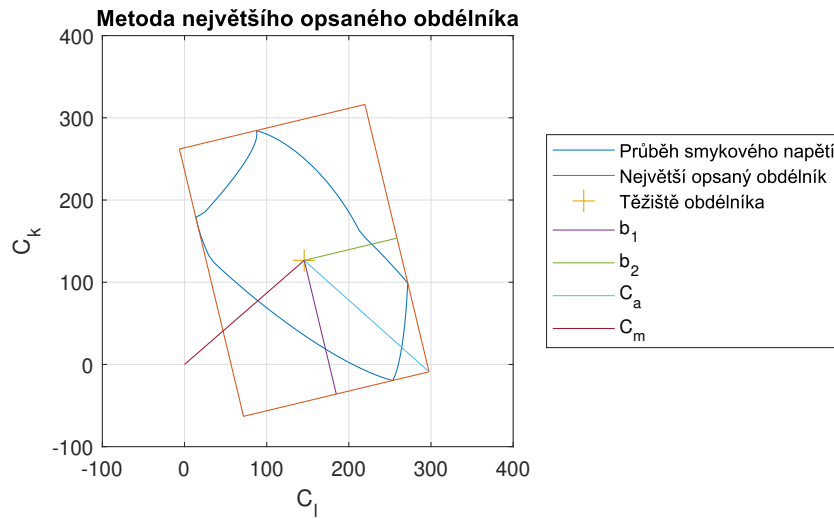
Střední hodnota smykového napětí je dána jako velikost vektoru směřujícího z počátku do těžiště obdélníka. Na obrázku 2.6 je naznačen způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody největšího obdélníka.

Pro průběh deviatorického napětí hledá metoda největšího kvádrů opsaný obdélníkový hranol, který uzavře křivku Ψ pro každou možnou orientaci tělesa a z těchto obdélníkových hranolů vybere ten, který má největší hodnotu Frobeniovy normy. Amplituda odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí je dána pomocí Frobeniovy normy

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{dim} b_i^2} = F, \quad (2.12)$$

kde b_i jsou poloviny délek stran hranolu a dim je dimenze průběhu deviatorického napětí. Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ je dána jako délka vektoru směřujícího z počátku do těžiště hranolu.

Jiná metoda opsaného kvádrů je metoda kvádrů s největším objemem [3] (Maximum Volume Prismatic Hull MVPH). Tato metoda hledá pro průběh smykového napětí opsaný obdélník, který uzavře křivku Φ pro každou možnou orientaci tohoto obdélníka a z těchto obdélníků vybere obdélník s největší plochou. Amplituda a střední hodnota smykového napětí jsou definovány shodně jako pro metodu největšího kvádrů. Pro průběh deviatorického napětí hledá



Obrázek 2.6: Způsob určení amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody největšího obdélníka

tato metoda nejmenší obdélníkový hranol, který uzavře křivku Φ pro každou možnou orientaci tohoto hranolu a z těchto hranolů vybere hranol s největším objemem. Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ a amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ jsou definovány shodně jako pro metodu největšího kvádrů.

Další metodou opsaného kvádrů je metoda největšího kvádrů s nejdelsí tětivou [3] (Maximum Prismatic Hull with Longest Chord MPHLC). Jedná se o rozšíření metody nejdelsí tětivy. Tato metoda pro průběh smykového napětí nejprve definuje nejdelsí tětivu křivky Ψ a tato křivka je nejdelsí stranou obdélníka $2b_1$. Křivka Ψ je následně promítnuta do směru kolmice k nejdelsí tětivě a průmětem je úsečka, jejíž délka definuje druhou stranu obdélníka $2b_2$. Pokud je tímto postupem nalezeno více možných obdélníků, je vybrán obdélník s vyšší hodnotou Frobeniovy normy. Střední hodnota a amplituda smykového napětí jsou definovány shodně jako pro metodu největšího kvádrů. Pro průběh deviatorického napětí metoda nejprve definuje nejdelsí tětivu křivky Φ , jejíž délka je rovna délce nejdelsí strany hranolu $2b_1$. Křivka Φ je následně promítnuta do podprostoru kolmého k nejdelsí tětivě a v tomto podprostoru je definována strana $2b_2$ jako nejdelsí tětiva v tomto podprostoru a křivka Ψ je následně promítnuta do podprostoru kolmého k již definovaným stranám hranolu. Celý postup se opakuje dokud nejsou nalezeny všechny strany hranolu. Pokud je nalezeno více možných hranolů, je vybrán hranol s vyšší Frobeniovou normou. Amplituda a střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí jsou definovány shodně jako pro metodu největšího kvádrů.

Další metoda opsaného kvádrů je metoda největšího kvádrů s obsaženými tětivami [3] (Maximum Prismatic Hull with Container Chords MPHCC). Tato metoda je podobná metodě největšího kvádrů s nejdelsí tětivou, ale jako možné směry stran hranolu jsou zahrnuty všechny tětivy, které na sobě obsahují průmět křivky Ψ případně Φ . Z takto nalezených hranolů je vybrán hranol s největší hodnotou Frobeniovy normy. Střední hodnoty C_m a $\sqrt{J_{2,m}}$ a amplitudy C_a a $\sqrt{J_{2,a}}$ jsou definovány shodně jako pro metodu největšího kvádrů.

2.5 Metoda momentu setrvačnosti

Nevýhodou metod opsaného obrazce je to, že dochází ke ztrátě informace o průběhu zátěžné křivky Ψ případně Φ a jsou použity pouze vlastnosti opsaného obrazce. Může tak dojít například k tomu, že různým křivkám bude opsáno stejné těleso a zatěžování budou brána jako identická. Meggiolaro a kol. [3] proto navrhli použití metody momentu setrvačnosti (Moment of Inertia method MOI), která určuje vlastnosti zatěžování přímo ze zátěžné cesty Ψ . Metoda byla rozšířena v [7] pro křivky Φ v E_5 .

Pro určení střední hodnoty a amplitudy smykového napětí metoda MOI používá analogii křivky Ψ s homogenní strunou jednotkové hmotnosti. Těžiště této struny je použito k určení střední hodnoty smykového napětí C_m . Následně je určen polární moment setrvačnosti vzhledem k těžišti struny a z této hodnoty je určena amplituda smykového napětí.

Souřadnice těžiště struny analogické ke křivce Ψ lze určit v souřadnicích (l, k) pomocí křivkového integrálu podél křivky Ψ

$$C_{l,m} = \frac{1}{p_C} \oint C_l(t) \cdot dp_C \quad (2.13)$$

$$C_{k,m} = \frac{1}{p_C} \oint C_k(t) \cdot dp_C, \quad (2.14)$$

kde dp_C je délka infinitezimální části křivky Ψ a p_C je délka křivky Ψ , která se určí pomocí vztahu

$$p_C = \oint dp_C. \quad (2.15)$$

Střední hodnota smykového napětí se určí ze souřadnic těžiště homogenní struny

$$C_m = \sqrt{C_{l,m}^2 + C_{k,m}^2}. \quad (2.16)$$

Pro výpočet amplitudy smykového napětí je použit polární moment setrvačnosti (PMOI), který popisuje rozložení křivky Ψ kolem těžiště křivky. Polární moment setrvačnosti se určí jako křivkový integrál z druhé mocniny vzdálenosti r_m mezi každým bodem křivky a těžištěm křivky

$$I_p = \frac{1}{p_C} \oint \left((C_l - C_{l,m})^2 + (C_k - C_{k,m})^2 \right) dp_C. \quad (2.17)$$

Amplituda smykového napětí se pak určí pomocí vztahu

$$C_a = \sqrt{3I_p}. \quad (2.18)$$

Pro určení střední hodnoty a amplitudy $\sqrt{J_2}$ používá metoda MOI analogii křivky Φ s homogenní strunou jednotkové hmotnosti v prostoru E_5 . Obdobně jako pro smykové napětí lze určit těžiště struny pomocí křivkového integrálu podél křivky Φ

$$S_{1,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_1 \cdot dp_S \quad S_{2,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_2 \cdot dp_S \quad S_{3,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_3 \cdot dp_S \quad (2.19)$$

$$S_{4,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_4 \cdot dp_S \quad S_{5,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_5 \cdot dp_S, \quad (2.20)$$

kde dp_S je délka infinitezimální části křivky Φ a p_S je délka křivky Φ , která se určí pomocí vztahu

$$p_S = \oint dp_S. \quad (2.21)$$

Střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí se určí ze souřadnic těžiště pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,m}} = \sqrt{S_{1,m}^2 + S_{2,m}^2 + S_{3,m}^2 + S_{4,m}^2 + S_{5,m}^2}. \quad (2.22)$$

Pro výpočet amplitudy $\sqrt{J_{2,a}}$ je použit polární moment setrvačnosti, který popisuje rozložení křivky Φ kolem těžiště a který se určí pomocí vztahu

$$I_p = \frac{1}{p_S} \oint \left((S_1 - S_{1,m})^2 + (S_2 - S_{2,m})^2 + (S_3 - S_{3,m})^2 + (S_4 - S_{4,m})^2 + (S_5 - S_{5,m})^2 \right) dp_S. \quad (2.23)$$

Amplituda odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí se určí pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{3I_p}. \quad (2.24)$$

2.6 Porovnání vybraných metod na ilustrativním případě

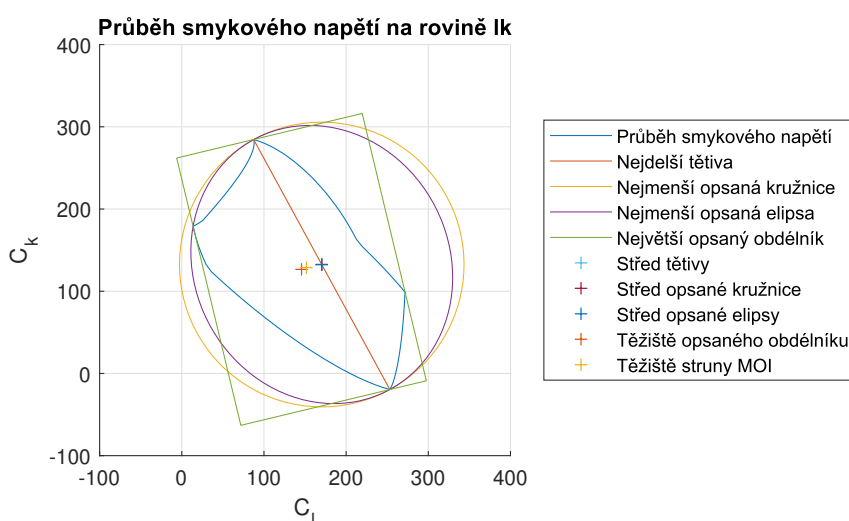
Metody výpočtu amplitudy a střední hodnoty smykového napětí lze porovnat na ilustrativním případě namáhání, pro který je průběh jednotlivých složek namáhání a průběh smykového napětí znázorněn na obrázku 2.1. Pro porovnání byla použita metoda nejdelší tětivy, metoda nejmenší opsané kružnice, metoda nejmenší opsané elipsy, metoda největšího opsaného obdélníka a metoda momentu setrvačnosti. Porovnání metod je graficky znázorněno na obrázku 2.7. Metoda momentu setrvačnosti nemá přímou grafickou interpretaci, pro tuto metodu je zobrazeno pouze těžiště struny analogické ke křivce Ψ , pomocí kterého je určena střední hodnota C_m .

V tabulce 2.1 je pro jednotlivé metody porovnán parametr $\lambda = C_a/C_{aLC}$, který popisuje poměr amplitudy smykového napětí získaného zvolenou metodou a poloviny délky nejdelší spojnice dvou bodů křivky (nejdelší tětiva) pro zátěžnou cestu a metody zobrazené na obrázku 2.7.

λ_{LC}	1.00
λ_{MCC}	1.00
λ_{MCE}	1.34
λ_{MPH}	1.18
λ_{MOI}	1.24

Tabulka 2.1: Porovnání amplitudy smykového napětí získané různými způsoby zpracování zátěžné cesty zakreslené na obrázku 2.7

Z obrázku 2.7 je patrné, že pro určení amplitudy smykového napětí pomocí metody nejdelší tětivy je rozhodující pouze nejdelší vzdálenost mezi dvěma body křivky Ψ a nezáleží na



Obrázek 2.7: Porovnání vybraných způsobů zpracování zátěžné cesty na ilustrativním případu

rozložení ostatních bodů křivky. Podobně při použití metody opsané kružnice je pro určení amplitudy smykového napětí rozhodující pouze rozložení bodů, ležících na opsané kružnici a nikoli rozložení ostatních bodů křivky Ψ . Například pro průběh tvaru úsečky by tak tyto metody daly stejnou hodnotu amplitudy smykového napětí jako pro průběh tvaru kružnice. Metoda nejmenší opsané elipsy, metoda největšího opsaného obdélníka a metoda momentu setrvačnosti lépe popisují rozložení celé křivky Ψ . Metoda největšího opsaného obdélníka je v tomto případě schopna opsat křivku Ψ obrazcem s menší plochou než metoda nejmenší opsané elipsy. Amplituda smykového napětí získaná metodou momentu setrvačnosti leží mezi hodnotami získanými metodou opsaného obdélníka a opsané elipsy. Metoda nejmenší opsané elipsy tak pro tento případ předpovídá největší amplitudu smykového napětí.

Nejdelší tětiva je v tomto případě shodná jako průměr nejmenší opsané elipsy a střed opsané kružnice je proto totožný se středem tětivy. Vzhledem k tomu, že hlavní poloosa nejmenší opsané elipsy je shodná s poloměrem nejmenší opsané kružnice, bude střed opsané elipsy shodný se středem opsané kružnice. U metody největšího opsaného obdélníka je střední hodnota smykového napětí dána polohou těžiště opsaného obdélníka, která je v tomto případě odlišná od polohy středu ostatních obrazců. Těžiště struny analogické ke křivce Ψ , které určuje střední hodnotu C_m při použití metody momentu setrvačnosti leží poblíž těžiště opsaného obdélníka. Střední hodnota smykového napětí tak bude v tomto případě shodná pro metodu nejdelší tětivy, metodu nejmenší opsané kružnice a metodu nejmenší opsané elipsy a rozdílná pro metodu největšího opsaného obdélníka a metodu momentu setrvačnosti.

Kapitola 3

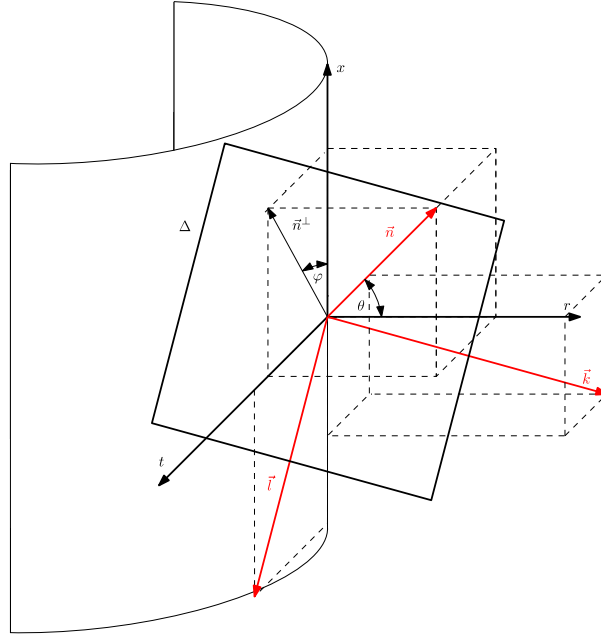
Odvození vztahů pro průběh napěťových parametrů při čtyřosém namáhání

V této kapitole bude provedeno analytické odvození průběhu normálového, smykového, hydrostatického a deviatorického napětí v čase pro konkrétní případ namáhání. Z těchto průběhů budou odvozeny vztahy pro amplitudu a střední hodnotu těchto napěťových parametrů pro metodu opsané koule, elipsoidu a metodu momentu setrvačnosti. Úkolem tohoto postupu je snížení výpočtové náročnosti, kdy nebudou muset být prováděny optimalizační metody hledající opsaný obrazec, ale příslušné parametry budou odvozeny přímo analyticky. Jedná se o rozšíření odvození provedeného Papadopoulem [1] pro případ namáhání kombinací ohybu a krutu se sinusovým průběhem jednotlivých složek namáhání a fázovým posuvem mezi složkami. Odvození bude provedeno pro trubku, která je namáhána tahem, krutem a vnitřním přetlakem. Jedná se o nejsložitější pravděpodobnou kombinaci zatěžování pro jednoduchý trubkový vzorek používaný v únavových zkouškách nejčastěji. Napětí bude vyjádřeno ve válcovém souřadném systému (x, t, r) (axiální, tangenciální a radiální směr). Namáhání vzorku a zavedení souřadnic (x, t, r) je znázorněno na obrázku 3.1. Tahové namáhání a přetlak způsobí vznik axiálního napětí σ_x , krut způsobí vznik torzního napětí τ_{xt} a přetlak způsobí vznik tangenciálního σ_t a radiálního napětí σ_r . Kromě torzního zatížení všechny ostatní složky způsobují vznik normálového napětí v součásti. Torzní napětí způsobí vznik smykového napětí. Napjatost je popsána pomocí tenzoru σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xt} & 0 \\ \tau_{xt} & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Vzhledem k tomu, že smyková složka tenzoru napětí je jen jedna, bude smykové napětí τ_{xt} dále označováno zjednodušeně τ . Složky napětí jsou uvažovány jako harmonické se shodnou frekvencí zatěžování. Napjatost je určena pomocí amplitudy, střední hodnoty a fázového posuvu jednotlivých složek. Tenzor napětí můžeme vyjádřit jako

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + \sigma_{x,m} & \tau_a \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_1\right) + \tau_m & 0 \\ \tau_a \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_1\right) + \tau_m & \sigma_{t,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_2\right) + \sigma_{t,m} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_3\right) + \sigma_{r,m} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$



Obrázek 3.2: Zavedení sférických souřadnic θ, ϕ pro popis polohy roviny Δ a zobrazení jednotkových vektorů ve směru os souřadného systému (n, l, k)

Amplitudu normálového napětí můžeme vyjádřit z rozdílu mezi normálovým napětím a jeho střední hodnotou za použití vzorce

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \cos \delta - \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \sin \delta. \quad (3.7)$$

Po úpravě dostaneme pro rozdíl mezi okamžitým normálovým napětím a jeho střední hodnotou

$$\begin{aligned} N(t) - N_m = & \left(\sigma_{x,a} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \tau_a \sin^2 \theta \cos \delta_1 \sin 2\varphi \right. \\ & \left. + \sigma_{t,a} \sin^2 \theta \cos \delta_2 \sin^2 \varphi + \sigma_{r,a} \cos^2 \theta \cos \delta_3 \right) \sin \frac{2\pi t}{P} \\ & + \left(-\tau_a \sin^2 \theta \sin \delta_1 \sin 2\varphi - \sigma_{t,a} \sin^2 \theta \sin \delta_2 \sin^2 \varphi \right. \\ & \left. - \sigma_{r,a} \sin \delta_3 \cos^2 \theta \right) \cos \frac{2\pi t}{P}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Amplituda normálového napětí je pak dána vztahem

$$\begin{aligned} N_a = & \left[(\sigma_{x,a} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \tau_a \sin^2 \theta \cos \delta_1 \sin 2\varphi + \right. \\ & \left. + \sigma_{t,a} \sin^2 \theta \cos \delta_2 \sin^2 \varphi + \sigma_{r,a} \cos^2 \theta \cos \delta_3)^2 + \right. \\ & \left. + (-\tau_a \sin^2 \theta \sin \delta_1 \sin 2\varphi - \sigma_{t,a} \sin^2 \theta \sin \delta_2 \sin^2 \varphi - \right. \\ & \left. - \sigma_{r,a} \sin \delta_3 \cos^2 \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vztahy pro smykové napětí mohou být vyjádřeny ve tvaru

$$C_l(t) = f \sin \frac{2\pi t}{P} + g \cos \frac{2\pi t}{P} + C_{l,m} \quad (3.18)$$

$$C_k(t) = p \sin \frac{2\pi t}{P} + q \cos \frac{2\pi t}{P} + C_{k,m}, \quad (3.19)$$

kde pro funkce f , g , p a q platí

$$f = \left(-\frac{1}{2}\sigma_{x,a} \sin 2\varphi + \tau_a \cos \delta_1 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sigma_{t,a} \cos \delta_2 \sin 2\varphi \right) \sin \theta, \quad (3.20)$$

$$g = \left(-\tau_a \sin \delta_1 \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\sigma_{t,a} \sin \delta_2 \sin 2\varphi \right) \sin \theta, \quad (3.21)$$

$$p = -\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,a} \cos^2 \varphi + \tau_a \cos \delta_1 \sin 2\varphi + \sigma_{t,a} \cos \delta_2 \sin^2 \varphi - \sigma_{r,a} \cos \delta_3 \right) \sin 2\theta, \quad (3.22)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(\tau_a \sin \delta_1 \sin 2\varphi + \sigma_{t,a} \sin \delta_2 \sin^2 \varphi - \sigma_{r,a} \sin \delta_3 \right) \sin 2\theta. \quad (3.23)$$

Rovnice (3.18) a (3.19) představují parametrické rovnice elipsy, která popisuje průběh smykového napětí na rovině Δ . Střed elipsy je určen časově nezávislými členy rovnic elipsy

$$C_{l,m} = \left(-\frac{1}{2}\sigma_{x,m} \sin 2\varphi + \tau_m \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sigma_{t,m} \sin 2\varphi \right) \sin \theta \quad (3.24)$$

$$C_{k,m} = -\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,m} \cos^2 \varphi + \tau_m \sin 2\varphi + \sigma_{t,m} \sin^2 \varphi - \sigma_{r,m} \right) \sin 2\theta. \quad (3.25)$$

Poloosy elipsy jsou určeny vztahem

$$a_1, a_2 = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}. \quad (3.26)$$

Na obrázku 3.3 je zobrazen příklad průběhu smykového napětí na rovině pro takto popsané namáhání a nejmenší opsaná kružnice a největší opsaný obdélník opisující takto popsanou zátěžnou cestu. Použit byl případ namáhání označený TAK10 v databázi experimentů FatLim [8] a příklad roviny $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 30^\circ$.

Nejmenší kružnice opsaná takto popsané elipse má střed o souřadnicích $(C_{l,m}, C_{k,m})$ a poloměr rovný hlavní poloose elipsy. Amplitudu a střední hodnotu smykového napětí lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C_a = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}} + \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2} \quad (3.27)$$

$$C_m = \sqrt{C_{l,m}^2 + C_{k,m}^2}. \quad (3.28)$$

Nejmenší elipsa opsaná průběhu napětí je totožná s elipsou popisující průběh smykového napětí a je popsána parametrickými rovnicemi (3.18) a (3.19). Střed elipsy má souřadnice

kde dp_C je infinitezimální oblouk křivky. Střední hodnota smykového napětí je dána vztahem

$$C_{l,m} = \frac{1}{p_C} \oint C_l dp_C = \frac{1}{p_C} \int_0^P C_l \sqrt{\dot{C}_l(t)^2 + \dot{C}_k(t)^2} dt \quad (3.34)$$

$$C_{k,m} = \frac{1}{p_C} \oint C_k dp_C = \frac{1}{p_C} \int_0^P C_k \sqrt{\dot{C}_l(t)^2 + \dot{C}_k(t)^2} dt \quad (3.35)$$

$$C_m = \sqrt{C_{l,m}^2 + C_{k,m}^2}. \quad (3.36)$$

Amplitudu smykového napětí lze určit pomocí polárního momentu setrvačnosti

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1}{p_C} \oint \left((C_l(t) - C_{l,m})^2 + (C_k(t) - C_{k,m})^2 \right) dp_C \\ &= \frac{1}{p_C} \int_0^P \left((C_l(t) - C_{l,m})^2 + (C_k(t) - C_{k,m})^2 \right) \sqrt{\dot{C}_l(t)^2 + \dot{C}_k(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Amplituda smykového napětí je pak dána vztahem

$$C_a = \sqrt{3I_p}. \quad (3.38)$$

3.2 Odvození vztahů pro hydrostatické a deviatorické napětí

Hydrostatické napětí můžeme určit podle vztahu

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_t + \sigma_r) = \frac{1}{3} \left[\sigma_{x,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + \sigma_{x,m} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{t,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_2\right) + \sigma_{t,m} + \sigma_{r,a} \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta_3\right) + \sigma_{r,m} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Střední hodnotu hydrostatického napětí můžeme určit jako součet časově nezávislých členů

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{3}(\sigma_{x,m} + \sigma_{t,m} + \sigma_{r,m}). \quad (3.40)$$

Po odečtení střední hodnoty ze vztahu pro hydrostatické napětí a úpravě podle vztahu (3.7) dostaneme vztah pro amplitudu hydrostatického napětí ve tvaru

$$\sigma_{Ha} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{x,a} + \sigma_{t,a} \cos \delta_2 + \sigma_{r,a} \cos \delta_3)^2 + (-\sigma_{t,a} \sin \delta_2 - \sigma_{r,a} \sin \delta_3)^2}. \quad (3.41)$$

Deviátor napětí je dán vztahem

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_H \vec{I} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_t - \sigma_r}{3} & \tau & 0 \\ \tau & \frac{2\sigma_t - \sigma_x - \sigma_r}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_r - \sigma_x - \sigma_t}{3} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Pro určení druhého invariantu deviatoru napětí $\sqrt{J_2}$ je vhodné provést transformaci do Iljušina deviatorického prostoru, která tenzor deviatorického napětí \mathbf{s} převede na pětirozměrný vektor \vec{S} podle transformačních vztahů

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} s_x \quad S_2 = \frac{1}{2}(s_t - s_r) \quad S_3 = s_{xt} \quad (3.43)$$

$$S_4 = s_{xr} \quad S_5 = s_{tr}. \quad (3.44)$$

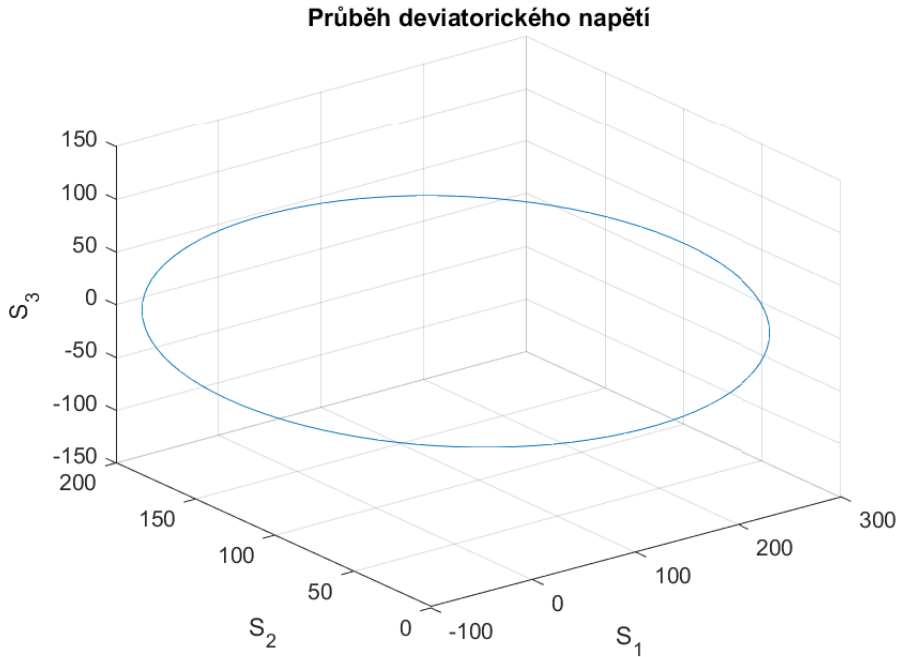
Rovnice (3.54)-(3.56) popisují parametricky elipsu v prostoru E_3 . Střed elipsy je dán časově nezávislými členy rovnic.

$$S_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sigma_{x,m} - \frac{\sigma_{t,m}}{2} - \frac{\sigma_{r,m}}{2} \right) \quad S_{2,m} = \frac{1}{2} (\sigma_{t,m} - \sigma_{r,m}) \quad S_{3,m} = \tau_m. \quad (3.63)$$

Délka poloos elipsy je dána vztahem

$$a_1, a_2 = \left[\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2 + S_{3s}^2 + S_{3c}^2}{2} \pm \left[\left(\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2 + S_{3s}^2 + S_{3c}^2}{2} \right)^2 - \left((S_{1s}S_{2c} - S_{1c}S_{2s})^2 + (S_{1s}S_{3c} - S_{1c}S_{3s})^2 + (S_{2s}S_{3c} - S_{2c}S_{3s})^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.64)$$

Na obrázku 3.4 je znázorněn příklad průběhu deviatorického napětí pro případ namáhání popsaný tenzorem (3.2) v prostoru daném souřadnicemi (S_1, S_2, S_3) . Použit byl případ namáhání označený TAK10 v databázi experimentů FatLim [8].



Obrázek 3.4: Příklad průběhu deviatorického napětí pro případ popsaný tenzorem napětí (3.2) v prostoru daném souřadnicemi (S_1, S_2, S_3)

Nejmenší kulová plocha opsaná průběhu deviatorického napětí má střed totožný se středem elipsy a poloměr odpovídající délce hlavní poloosy elipsy. Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ je pak dána vztahem

$$\sqrt{J_{2,m}} = \sqrt{S_{1,m}^2 + S_{2,m}^2 + S_{3,m}^2}. \quad (3.65)$$

Amplitudu deviatorického napětí $\sqrt{J_{2,a}}$ lze určit pomocí polárního momentu setrvačnosti

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1}{\rho_S} \oint \left((S_1(t) - S_{1,m})^2 + (S_2(t) - S_{2,m})^2 + (S_3(t) - S_{3,m})^2 \right) dp_S \\ &= \frac{1}{\rho_S} \int_0^P \left((S_1(t) - S_{1,m})^2 + (S_2(t) - S_{2,m})^2 + (S_3(t) - S_{3,m})^2 \right) \\ &\quad \sqrt{\dot{S}_1(t)^2 + \dot{S}_2(t)^2 + \dot{S}_3(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Amplituda deviatorického napětí $\sqrt{J_{2,a}}$ je pak dána vztahem

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{3I_p}. \quad (3.78)$$

3.3 Redukce vztahů pro jednodušší zátěžné podmínky

Odvozené vztahy pro průběh smykového napětí budou v této části redukovány pro jednodušší zátěžné podmínky. Bude ukázáno, jak se pro tyto případy změní průběh křivek Ψ a Φ a odvozené vztahy pro amplitudu a střední hodnotu smykového, normálového, hydrostatického a deviatorického napětí. Pro grafickou ilustraci průběhu smykového a deviatorického byl použit případ namáhání označený TAK10 v databázi experimentů FatLim [8], jehož složky byly upraveny v závislosti na popisovaném případě, a příklad roviny $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 30^\circ$.

3.3.1 Čistý tah

Při namáhání čistým tahem platí pro složky tenzoru napětí

$$\sigma_t = \sigma_r = \tau = 0. \quad (3.79)$$

Amplituda normálového napětí je pak dána vztahem

$$N_a = \sigma_{x,a} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi. \quad (3.80)$$

a střední hodnota normálového napětí se redukuje do tvaru

$$N_m = \sigma_{x,m} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi. \quad (3.81)$$

Funkce f , g , p a q , které popisují průběh smykového napětí se redukují do tvaru

$$f = -\frac{1}{2} \sigma_{x,a} \sin 2\varphi \sin \theta \quad (3.82)$$

$$g = 0 \quad (3.83)$$

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_{x,a} \cos^2 \varphi \sin 2\theta \quad (3.84)$$

$$q = 0. \quad (3.85)$$

Poloosy předpokládané elipsy, která určuje průběh smykového napětí na rovině Δ jsou dány vztahem

$$a_1 = \sqrt{f^2 + p^2} = \frac{1}{2} |\sigma_{x,a}| \sqrt{\sin^2 2\varphi \sin^2 \theta + \cos^4 \varphi \sin^2 2\theta} \quad (3.86)$$

$$a_2 = 0. \quad (3.87)$$

a střední hodnota hydrostatického napětí je dána vztahem

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{3}\sigma_{x,m}. \quad (3.95)$$

Funkce S_{1s} , S_{1c} , S_{2s} , S_{2c} , S_{3s} a S_{3c} , které popisují průběh deviatorického napětí se redukují do tvaru

$$S_{1s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{x,a} \quad (3.96)$$

$$S_{1c} = 0 \quad (3.97)$$

$$S_{2s} = 0 \quad (3.98)$$

$$S_{2c} = 0 \quad (3.99)$$

$$S_{3s} = 0 \quad (3.100)$$

$$S_{3c} = 0. \quad (3.101)$$

Poloosy předpokládané elipsy, která popisuje průběh deviatorického napětí jsou dány vztahem

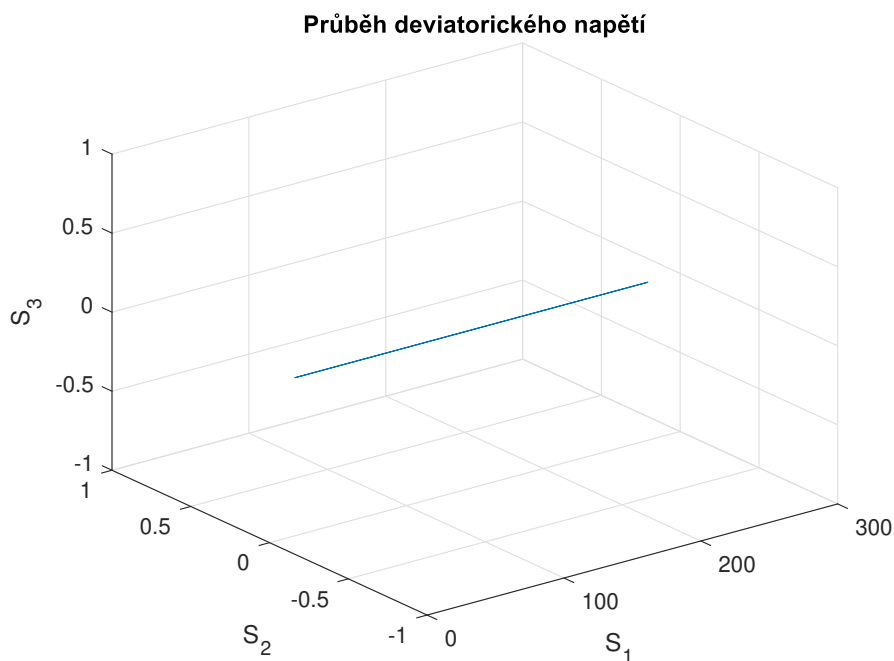
$$a_1 = S_{1s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{x,a} \quad (3.102)$$

$$a_2 = 0. \quad (3.103)$$

Střed předpokládané elipsy má souřadnice

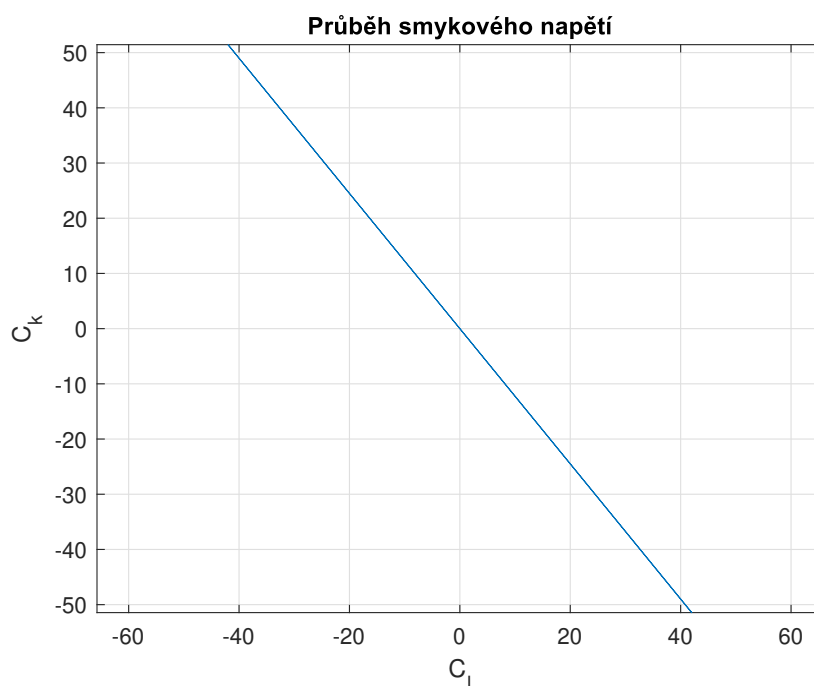
$$S_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{x,m} \quad S_{2,m} = 0 \quad S_{3,m} = 0. \quad (3.104)$$

Příklad průběhu deviatorického napětí pro případ čistého tahu je znázorněn na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Příklad průběhu deviatorického napětí pro případ čistého tahu

Příklad průběhu smykového napětí pro případ čistého krutu je znázorněn na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Příklad průběhu smykového napětí pro čistý krut

Průběh smykového napětí se redukuje na úsečku popsanou parametrickými rovnicemi

$$C_l(t) = f \sin \frac{2\pi t}{P} + C_{l,m} \quad (3.119)$$

$$C_k(t) = p \sin \frac{2\pi t}{P} + C_{k,m}. \quad (3.120)$$

Amplituda smykového napětí je shodná pro použití metody opsané kružnice, elipsy i metody momentu setrvačnosti a je dána vztahem

$$C_a = a_1 = |\tau_a| \sqrt{\cos^2 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \sin^2 2\theta}. \quad (3.121)$$

Střední hodnota smykového napětí se určí ze vztahu

$$C_m = |\tau_m| \sqrt{\cos^2 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \sin^2 2\theta}. \quad (3.122)$$

Tenzor napětí neobsahuje žádnou normálovou složku, pro hydrostatické napětí bude proto platit

$$\sigma_H = \sigma_{H,a} = \sigma_{H,m} = 0. \quad (3.123)$$

Funkce S_{1s} , S_{1c} , S_{2s} , S_{2c} , S_{3s} a S_{3c} , které popisují průběh deviatorického napětí se redukuje

Amplituda odmocniny z druhého invariantu tenzoru napětí $\sqrt{J_{2,a}}$ je shodná pro použití metody opsané kružnice, elipsy i metody momentu setrvačnosti a určí se ze vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = a_1 = \tau_a. \quad (3.134)$$

Střední hodnota odmocniny z druhého invariantu tenzoru napětí se určí pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,m}} = \tau_m. \quad (3.135)$$

■ 3.3.3 Dvouosé zatěžování se dvěma normálovými složkami

V této části bude odvozena redukce vztahů pro případ, kdy platí

$$\sigma_r = \tau = 0. \quad (3.136)$$

Vztah pro výpočet amplitudy normálového napětí se redukuje do tvaru

$$N_a = \sin^2 \theta \sqrt{\sigma_{x,a}^2 \cos^4 \varphi + \sigma_{t,a}^2 \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} \sigma_{x,a} \sigma_{t,a} \sin^2 2\varphi \cos \delta_2}. \quad (3.137)$$

Střední hodnota normálového napětí se určí ze vztahu

$$N_m = \sin^2 \theta (\sigma_{x,m} \cos^2 \varphi + \sigma_{t,m} \sin^2 \varphi). \quad (3.138)$$

Funkce f , g , p a q , které popisují průběh smykového napětí na rovině se redukuje do tvaru

$$f = \frac{1}{2} (-\sigma_{x,a} + \sigma_{t,a} \cos \delta_2) \sin 2\varphi \sin \theta \quad (3.139)$$

$$g = -\frac{1}{2} \sigma_{t,a} \sin \delta_2 \sin 2\varphi \sin \theta \quad (3.140)$$

$$p = -\frac{1}{2} (\sigma_{x,a} \cos^2 \varphi + \sigma_{t,a} \cos \delta_2 \sin^2 \varphi) \sin 2\theta \quad (3.141)$$

$$q = \frac{1}{2} \sigma_{t,a} \sin \delta_2 \sin^2 \varphi \sin 2\theta. \quad (3.142)$$

Poloosy elipsy, která popisuje průběh smykového napětí v čase se určí ze vztahu

$$a_1, a_2 = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}}. \quad (3.143)$$

Střed elipsy má souřadnice

$$C_{l,m} = \frac{1}{2} (-\sigma_{x,m} + \sigma_{t,m}) \sin 2\varphi \sin \theta \quad (3.144)$$

$$C_{k,m} = -\frac{1}{2} (\sigma_{x,m} \cos^2 \varphi + \sigma_{t,m} \sin^2 \varphi) \sin 2\theta. \quad (3.145)$$

Příklad průběhu smykového napětí pro namáhání axiálním a tangenciálním napětím je zobrazen na obrázku 3.9.

určí pomocí rovnice (3.33), střední hodnota smykového napětí se určí pomocí rovnic (3.34), (3.35) a (3.36), polární moment setrvačnosti je dán rovnicí (3.37) a amplituda smykového napětí se z něj určí pomocí vzorce (3.38).

Střední hodnota hydrostatického napětí se redukuje do tvaru

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{3}(\sigma_{x,m} + \sigma_{t,m}). \quad (3.152)$$

Amplituda hydrostatického napětí se určí ze vztahu

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{3}\sqrt{\sigma_{x,a}^2 + 2\sigma_{x,a}\sigma_{t,a}\cos\delta_2 + \sigma_{t,a}^2}. \quad (3.153)$$

Funkce S_{1s} , S_{1c} , S_{2s} , S_{2c} , S_{3s} a S_{3c} , které popisují průběh deviatorického napětí se redukuje do tvaru

$$S_{1s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_{xa} - \frac{\sigma_{ta}}{2}\cos\delta_2\right) \quad (3.154)$$

$$S_{1c} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sigma_{ta}\sin\delta_2 \quad (3.155)$$

$$S_{2s} = \frac{1}{2}\sigma_{ta}\cos\delta_2 \quad (3.156)$$

$$S_{2c} = -\frac{1}{2}\sigma_{ta}\sin\delta_2 \quad (3.157)$$

$$S_{3s} = 0 \quad (3.158)$$

$$S_{3c} = 0. \quad (3.159)$$

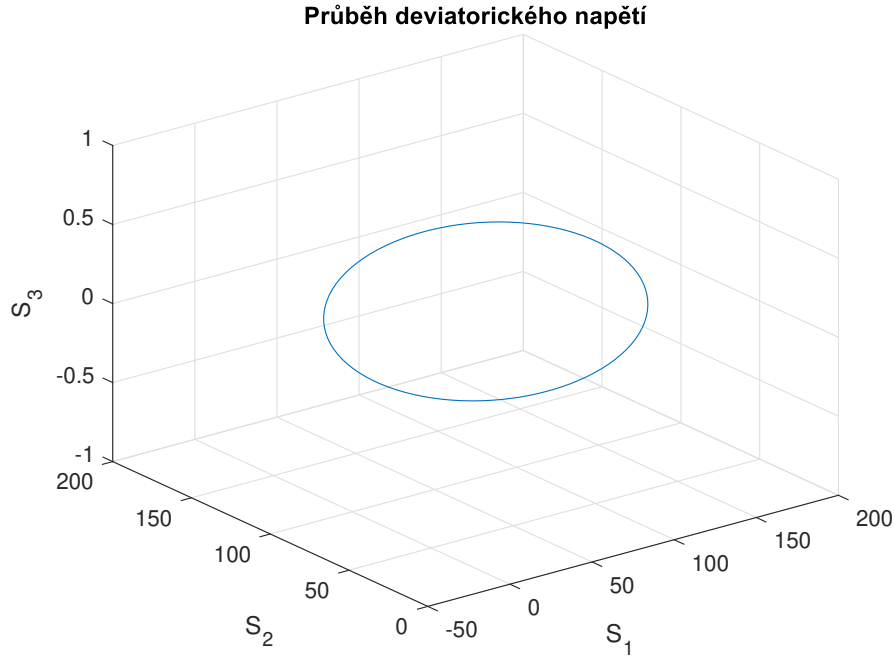
Poloosy elipsy, která popisuje průběh deviatorického napětí se určí podle vztahu

$$a_1, a_2 = \sqrt{\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2}{2}\right)^2 - (S_{1s}S_{2c} - S_{1c}S_{2s})^2}. \quad (3.160)$$

Střed elipsy má souřadnice

$$S_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_{x,m} - \frac{\sigma_{t,m}}{2}\right) \quad S_{2,m} = \frac{\sigma_{t,m}}{2} \quad S_{3,m} = 0. \quad (3.161)$$

Příklad průběhu deviatorického napětí je znázorněn na obrázku 3.10.



Obrázek 3.10: Příklad průběhu deviatorického napětí pro namáhání kombinací axiálního a tangenciálního napětí

Nejmenší kružnice opsaná průběhu deviatorického napětí v prostoru (S_1, S_2) má střed o souřadnicích $(S_{1,m}, S_{2,m})$ a poloměr rovný délce hlavní poloosy. Amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ a střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ se určí ze vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = a_1 = \sqrt{\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2}{2}\right)^2 - (S_{1s}S_{2c} - S_{1c}S_{2s})^2}} \quad (3.162)$$

$$\sqrt{J_{2,m}} = \sqrt{S_{1,m}^2 + S_{2,m}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{x,m}^2 - \sigma_{x,m}\sigma_{t,m} + \sigma_{t,m}^2}. \quad (3.163)$$

Nejmenší elipsa opsaná průběhu deviatorického napětí v prostoru (S_1, S_2) má střed o souřadnicích $(S_{1,m}, S_{2,m})$ a poloosy dané vztahem (3.160). Amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ a střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ se určí ze vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{S_{1s}^2 + S_{1c}^2 + S_{2s}^2 + S_{2c}^2} \quad (3.164)$$

$$\sqrt{J_{2,m}} = \sqrt{S_{1,m}^2 + S_{2,m}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{x,m}^2 - \sigma_{x,m}\sigma_{t,m} + \sigma_{t,m}^2}. \quad (3.165)$$

Při použití metody MOI je parametrizace křivky $P_S(t) = (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ dána rovnicemi

$$S_1(t) = S_{1s} \sin \frac{2\pi t}{P} + S_{1c} \cos \frac{2\pi t}{P} + S_{1m} \quad (3.166)$$

$$S_2(t) = S_{2s} \sin \frac{2\pi t}{P} + S_{2c} \cos \frac{2\pi t}{P} + S_{2m}. \quad (3.167)$$

Derivace parametrizace $\dot{P}_S(t) = (\dot{S}_1(t), \dot{S}_2(t))$ je dána rovnicemi

$$\dot{S}_1(t) = S_{1s} \frac{2\pi}{P} \cos \frac{2\pi t}{P} - S_{1c} \frac{2\pi}{P} \sin \frac{2\pi t}{P} \quad (3.168)$$

$$\dot{S}_2(t) = S_{2s} \frac{2\pi}{P} \cos \frac{2\pi t}{P} - S_{2c} \frac{2\pi}{P} \sin \frac{2\pi t}{P}. \quad (3.169)$$

Obvod křivky popisující průběh deviatorického napětí je dán vztahem

$$p_S = \oint dp_S = \int_0^P \|\dot{P}_S(t)\| dt = \int_0^P \sqrt{\dot{S}_1(t)^2 + \dot{S}_2(t)^2} dt \quad (3.170)$$

Střední hodnota $\sqrt{J_{2,m}}$ je dána vztahem

$$S_{1,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_1 dp_S = \frac{1}{p_S} \int_0^P S_1 \sqrt{\dot{S}_1(t)^2 + \dot{S}_2(t)^2} dt \quad (3.171)$$

$$S_{2,m} = \frac{1}{p_S} \oint S_2 dp_S = \frac{1}{p_S} \int_0^P S_2 \sqrt{\dot{S}_1(t)^2 + \dot{S}_2(t)^2} dt \quad (3.172)$$

$$\sqrt{J_{2,m}} = \sqrt{S_{1,m}^2 + S_{2,m}^2}. \quad (3.173)$$

Amplitudu deviatorického napětí $\sqrt{J_{2,a}}$ lze určit pomocí polárního momentu setrvačnosti

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1}{p_S} \oint \left((S_1(t) - S_{1,m})^2 + (S_2(t) - S_{2,m})^2 \right) dp_S \\ &= \frac{1}{p_S} \int_0^P \left((S_1(t) - S_{1,m})^2 + (S_2(t) - S_{2,m})^2 \right) \sqrt{\dot{S}_1(t)^2 + \dot{S}_2(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Amplituda deviatorického napětí se pak určí pomocí vztahu

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{3I_p}. \quad (3.175)$$

3.3.4 Soufázové zatěžování

Při soufázovém zatěžování platí pro složky tenzoru napětí popsaného rovnicí (3.2), že jejich vzájemný fázový posuv je nulový:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0. \quad (3.176)$$

Střední hodnoty normálového napětí N_m , smykového napětí C_m , hydrostatického napětí $\sigma_{H,m}$ a odmocniny z druhého invariantu deviatoru napětí $\sqrt{J_{2,m}}$ nejsou závislé na fázovém posuvu mezi složkami a vztahy pro jejich výpočet se tedy nezmění. Vztah pro amplitudu normálového napětí se redukuje do tvaru

$$N_a = \sigma_{x,a} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \tau_a \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \sigma_{t,a} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_{r,a} \cos^2 \theta. \quad (3.177)$$

Funkce f , g , p a q (rovnice 3.20-3.23), popisující průběh smykového napětí se redukuje do tvaru

$$f = \left(-\frac{1}{2} \sigma_{x,a} \sin 2\varphi + \tau_a \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sigma_{t,a} \sin 2\varphi \right) \sin \theta \quad (3.178)$$

$$g = 0 \quad (3.179)$$

$$p = -\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,a} \cos^2 \varphi + \tau_a \sin 2\varphi + \sigma_{t,a} \sin^2 \varphi - \sigma_{r,a} \right) \sin 2\theta \quad (3.180)$$

$$q = 0. \quad (3.181)$$

Funkce S_{1s} , S_{1c} , S_{2s} , S_{2c} , S_{3s} a S_{3c} (rovnice 3.57-3.62), které popisují průběh deviatorického napětí se redukuje do tvaru

$$S_{1s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sigma_{x,a} - \frac{\sigma_{t,a}}{2} - \frac{\sigma_{r,a}}{2} \right) \quad (3.188)$$

$$S_{1c} = 0 \quad (3.189)$$

$$S_{2s} = \frac{1}{2} (\sigma_{t,a} - \sigma_{r,a}) \quad (3.190)$$

$$S_{2c} = 0 \quad (3.191)$$

$$S_{3s} = \tau_a \quad (3.192)$$

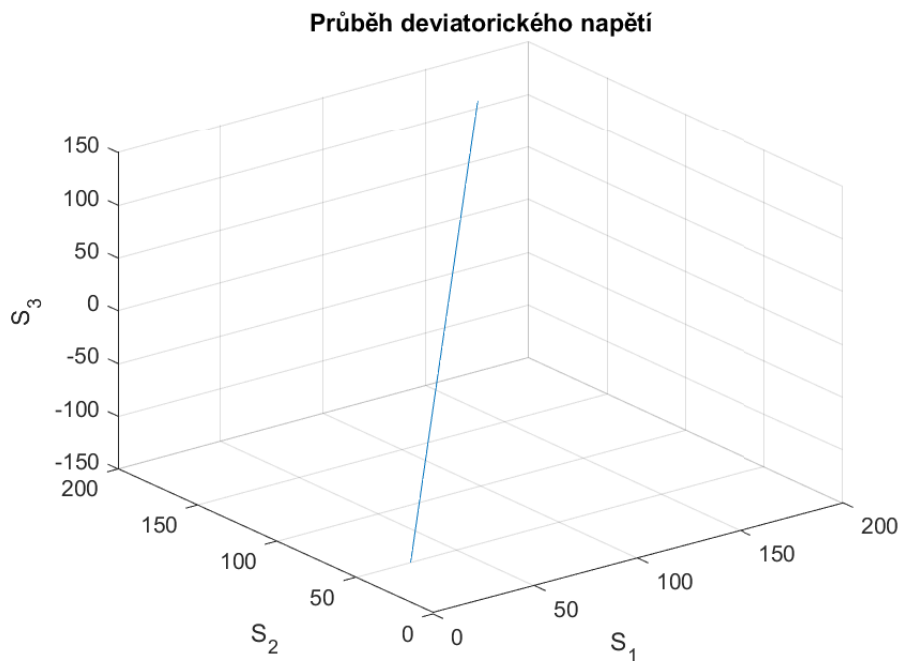
$$S_{3c} = 0. \quad (3.193)$$

Poloosy předpokládané elipsy, která určuje průběh deviatorického napětí jsou pak dány vztahem

$$a_1 = \sqrt{S_{1s}^2 + S_{2s}^2 + S_{3s}^2} \quad (3.194)$$

$$a_2 = 0. \quad (3.195)$$

Příklad průběhu deviatorického napětí je pro tento případ zobrazen na obrázku 3.12.



Obrázek 3.12: Příklad průběhu deviatorického napětí pro soufázové namáhání

Kapitola 4

Multiaxiální kritéria únavové pevnosti

Multiaxiální únavová kritéria slouží k určení únavové pevnosti nebo životnosti součásti zatěžované multiaxiálním namáháním. Jejich úkolem je převést víceosou napjatost na jednoosé namáhání ekvivalentním napětím, které může být následně porovnáno s materiálovým parametrem pro určení dynamické pevnosti součásti. Multiaxiální kritéria lze rozdělit na kritéria kritické roviny, integrální kritéria a kritéria založená na napětových invariantech. Kromě takto rozdělených starších kritérií bude popsáno několik novějších kritérií, která používají jiný přístup k výpočtu. Přehled některých kritérií je uveden například v [1] a [10].

4.1 Kritéria kritické roviny

Kritéria kritické roviny hledají materiálovou rovinu s nejvyšší hodnotou napětového parametru a podle napětí na této rovině je posuzována životnost součásti. Metody kritické roviny lze rozdělit na metody, které hledají rovinu s nejvyšší amplitudou smykového napětí a metody, které hledají rovinu s nejvyšší hodnotou parametru poškození, který je kombinací smykového a normálového napětí na dané rovině. Na takto nalezené rovině je následně vypočten parametr poškození, který je porovnán s materiálovým parametrem určeným zpravidla pomocí meze únavy v čistém tahu a čistém krutu. Pokud je parametr poškození na kritické rovině vyšší než materiálový parametr, předpovídá metoda vznik únavové trhliny na kritické rovině.

4.1.1 Findleyovo kritérium

Findleyovo kritérium [11], [10] patří mezi kritéria kritické roviny, která hledají rovinu s maximálním poškozením. Toto kritérium definuje kritickou rovinu jako rovinu danou souřadnicemi (φ^*, θ^*) , na které nabývá maximální hodnoty napětový parametr

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)} (a_F \cdot C_a + b_F \cdot N_{max}), \quad (4.1)$$

kde C_a je amplituda smykového napětí, $N_{max} = N_a + N_m$ je maximální hodnota smykového napětí a a_F a b_F jsou materiálové parametry. Findleyovo kritérium je pak dáno pomocí napětí na kritické rovině jako

$$a_F \cdot C_a + b_F \cdot N_{max} \leq f_{-1}, \quad (4.2)$$

kde f_{-1} je mez únavy ve střídavém tahu. Materiálové parametry a_F a b_F jsou dány vztahy

$$a_F = 2\sqrt{\kappa - 1} \quad (4.3)$$

$$b_F = 2 - \kappa, \quad (4.4)$$

kde $\kappa = \frac{f_{-1}}{t_{-1}}$ je poměr mezi únavy ve střídavém tahu a ve střídavém krutu.

■ 4.1.2 Matakeho kritérium

Matakeho kritérium [12], [10] patří mezi kritéria, která hledají kritickou rovinu s maximální amplitudou smykového napětí. Kritická rovina je popsána pomocí souřadnic (φ^*, θ^*) , pro které platí

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)}(C_a). \quad (4.5)$$

Kritérium únavové pevnosti je dáno pomocí normálového a smykového napětí na takto nalezené kritické rovině obdobným vztahem jako pro Findleyovo kritérium:

$$a_M \cdot C_a + b_M \cdot N_{max} \leq f_{-1}. \quad (4.6)$$

Materiálové parametry a_M a b_M jsou dány vztahy

$$a_M = \kappa \quad (4.7)$$

$$b_M = 2 - \kappa. \quad (4.8)$$

■ 4.1.3 Kritérium QCP

Kritérium QCP (Quadratic Critical Plane formula) [13], [14] se od předchozích kritérií liší tím, že kromě amplitudy smykového napětí C_a zohledňuje i střední hodnotu C_m . Kritérium definuje kritickou rovinu jako rovinu, na které je maximální hodnota parametru poškození daného vztahem

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)}(\sqrt{a_Q \cdot C_a \cdot (C_a + c_Q \cdot C_m) + b_Q \cdot N_a \cdot (N_a + d_Q \cdot N_m)}), \quad (4.9)$$

kde C_m je střední hodnota smykového napětí a N_a a N_m je amplituda a střední hodnota normálového napětí. Kritérium QCP je definováno pomocí hodnoty tohoto parametru poškození na kritické rovině:

$$\sqrt{a_Q \cdot C_a \cdot (C_a + c_Q \cdot C_m) + b_Q \cdot N_a \cdot (N_a + d_Q \cdot N_m)} \leq f_{-1}. \quad (4.10)$$

Popsaný model obsahuje čtyři materiálové parametry a_Q , b_Q , c_Q a d_Q , které jsou dány v závislosti na parametru κ a κ_0 jako

$$a_Q = \kappa^2 \quad (4.11)$$

$$1 \leq \kappa < \sqrt{2} : \quad b_Q = 1 \quad (4.12)$$

$$\kappa \geq \sqrt{2} : \quad b_Q = \kappa^2 - \frac{\kappa^4}{4} \quad (4.13)$$

$$c_Q = \frac{4t_{-1}^2}{t_0^2} - 1 \quad (4.14)$$

$$\kappa_0 < \sqrt{2} : \quad d_Q = \frac{4f_{-1}^2}{b_Q f_0^2} - 1 \quad (4.15)$$

$$\kappa_0 \geq \sqrt{2} : \quad d_Q = \frac{4f_{-1}^2}{b_Q t_0^2} \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{4}\right) - 1, \quad (4.16)$$

kde $\kappa_0 = \frac{f_0}{t_0}$ je poměr mezi únavy v míjivém tahu a v míjivém krutu. Pokud materiálové charakteristiky f_0 a t_0 nejsou známy, lze je určit z parametrů f_{-1} a t_{-1} pomocí vztahů popsaných v [10]:

$$f_0 = f_{-1} \cdot 2^{0.5} \quad (4.17)$$

$$t_0 = \frac{4t_{-1}}{\frac{2f_{-1}}{f_0} + 1}. \quad (4.18)$$

4.1.4 Kritérium PCr

Papugovo kritérium PCr [15], [10] definuje kritickou rovinu jako rovinu, na které je maximální hodnota parametru poškození daného vztahem

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)} (\sqrt{a_{PC} \cdot C_a^2 + b_{PC} \cdot (N_a + d_{PC} \cdot N_m)}). \quad (4.19)$$

Kritérium únavové pevnosti je definováno pomocí parametru poškození na takto definované kritické rovině pomocí vztahu

$$\sqrt{a_{PC} \cdot C_a^2 + b_{PC} \cdot (N_a + d_{PC} \cdot N_m)} \leq f_{-1}. \quad (4.20)$$

Materiálové parametry a_{PC} , b_{PC} a d_{PC} jsou dány v závislosti na hodnotě κ jako

$$1 \leq \kappa < \sqrt{\frac{4}{3}} : \quad a_{PC} = \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2}}{2} \quad b_{PC} = f_{-1} \quad (4.21)$$

$$\kappa \geq \sqrt{\frac{4}{3}} : \quad a_{PC} = \left(\frac{4\kappa^2}{4 + \kappa^2} \right)^2 \quad b_{PC} = 8f_{-1}\kappa^2 \frac{4 - \kappa^2}{(4 + \kappa^2)^2} \quad (4.22)$$

$$d_{PC} = \frac{t_{-1}}{f_0}. \quad (4.23)$$

4.1.5 Kritérium PCN

Papugovo kritérium PCN [14] se liší od kritéria PCr zohledněním střední hodnoty smykového napětí. Kritérium definuje kritickou rovinu jako rovinu, na které nabývá maximální hodnoty parametr poškození daný vztahem

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)} (\sqrt{a_{PC} \cdot C_a \cdot (C_a + c_{PCN} \cdot C_m) + b_{PC} \cdot \sqrt{N_a \cdot (N_a + d_{PCN} \cdot N_m)}}). \quad (4.24)$$

Kritérium PCN je pak dáno pomocí hodnoty parametru poškození na kritické rovině pomocí vztahu

$$\sqrt{a_{PC} \cdot C_a \cdot (C_a + c_{PCN} \cdot C_m) + b_{PC} \cdot \sqrt{N_a \cdot (N_a + d_{PCN} \cdot N_m)}} \leq f_{-1}. \quad (4.25)$$

Materiálové parametry a_{PC} a b_{PC} jsou definovány shodně jako pro kritérium PCr. Materiálové parametry c_{PCN} a d_{PCN} jsou dány v závislosti na parametru κ_0

$$1 \leq \kappa_0 < \sqrt{\frac{4}{3}} : \quad c_{PCN} = \frac{2f_{-1}^2}{a_{PC}t_0^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa_0^2}} \right) - 1 \quad d_{PCN} = \left(\frac{2f_{-1}^2}{b_{PC}f_0} \right)^2 - 1 \quad (4.26)$$

$$\kappa_0 \geq \sqrt{\frac{4}{3}} : \quad c_{PCN} = \frac{z}{a_{PC}} - 1 \quad d_{PCN} = \frac{z}{b_{PC}^2} (4f_{-1}^2 - zt_0^2) - 1 \quad (4.27)$$

$$z = \left(\frac{8\kappa_0 f_{-1}}{t_0(4 + \kappa_0^2)} \right)^2. \quad (4.28)$$

V případě použití napětí s nulovou střední hodnotou normálového i smykového napětí budou mít kritéria PCN a PCr shodný tvar.

■ 4.1.6 Dang Vanovo kritérium

Dang Vanovo kritérium [16], [10] patří mezi kritéria kritické roviny s maximálním smykovým napětím, ale kromě napěťových parametrů na kritické rovině používá i hydrostatické napětí a proto lze toto kritérium zařadit i mezi kritéria, která používají napěťové invarianty. Kritická rovina je definována jako rovina, na které je nejvyšší amplituda smykového napětí

$$(\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)} (C_a). \quad (4.29)$$

Dang Vanovo kritérium je pak dáno lineární kombinací amplitudy smykového napětí na kritické rovině a maximální hodnoty smykového napětí pomocí vztahu

$$a_{DV} \cdot C_a + b_{DV} \cdot \sigma_{H,max} \leq f_{-1}, \quad (4.30)$$

kde $\sigma_{H,max} = \sigma_{H,a} + \sigma_{H,m}$ je maximální hodnota hydrostatického napětí. Materiálové parametry a_{DV} a b_{DV} jsou dány jako

$$a_{DV} = \kappa \quad (4.31)$$

$$b_{DV} = 3 - 1.5\kappa. \quad (4.32)$$

■ 4.2 Integrální kritéria

Integrální kritéria počítají ekvivalentní napětí pomocí integrálu z kombinace normálového a smykového napětí na rovině Δ přes všechny orientace materiálové roviny Δ . Integrace je provedena přes sférické souřadnice (φ, θ) , které popisují polohu normálového vektoru \vec{n} k rovině Δ . Pokud je takto vypočtená hodnota parametru poškození vyšší než materiálový parametr, předpovídá metoda vznik únavové trhliny, ale nepopíše, na které rovině trhlina vznikne.

■ 4.2.1 Fogueovo kritérium

Fogueovo kritérium [17], [18] určuje parametr poškození pomocí integrálu z parametru daného kombinací amplitudy smykového napětí a amplitudy a střední hodnoty normálového napětí

na materiálových rovinách a kritérium je popsáno pomocí vztahu

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (a_{FOG} \cdot C_a + b_{FOG} \cdot N_a + d_{FOG} \cdot N_m)^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \leq f_{-1}. \quad (4.33)$$

Materiálové parametry a_{FOG} , b_{FOG} a d_{FOG} jsou dány vztahy

$$a_{FOG} = \sqrt{\frac{12\kappa^2 - 21 + b_{FOG}^2}{2}} \quad (4.34)$$

$$b_{FOG} = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{25 - 8(\kappa^2 - 3)^2}}{2}} \quad (4.35)$$

$$d_{FOG} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{(3b_{FOG} + 2a_{FOG})^2 + 45 \left(4 \left(\frac{f_{-1}}{f_0} \right)^2 - 1 \right)} - (3b_{FOG} + 2a_{FOG}) \right). \quad (4.36)$$

Fogueovo kritérium nelze použít pro křehké materiály s $\kappa < 1.12$, protože pro tyto materiály by vycházela komplexní hodnota parametrů a_{FOG} , b_{FOG} a d_{FOG} .

■ 4.2.2 Liuovo a Zennerovo kritérium

Liu a Zenner [19], [18] zohledňují ve svém kritériu na rozdíl od Foguea vliv střední hodnoty smykového napětí. Jejich kritérium je definováno pomocí vztahu

$$\sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (a_{LZ} \cdot C_a^2 (1 + c_{LZ} \cdot C_m^2) + b_{LZ} \cdot N_a^2 (1 + d_{LZ} \cdot N_m)) \sin \theta d\theta d\varphi} \leq f_{-1}. \quad (4.37)$$

Materiálové parametry a_{LZ} , b_{LZ} , c_{LZ} a d_{LZ} jsou dány vztahy

$$a_{LZ} = \frac{1}{5}(3\kappa^2 - 4) \quad (4.38)$$

$$b_{LZ} = \frac{1}{5}(6 - 2\kappa^2) \quad (4.39)$$

$$c_{LZ} = \frac{28}{3a_{LZ}t_0^2} \left(\left(\frac{f_{-1}}{t_0} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) \quad (4.40)$$

$$d_{LZ} = \frac{28}{15b_{LZ}f_0} \left(\left(\frac{2f_{-1}}{f_0} \right)^2 - \frac{a_{LZ}c_{LZ}f_0^2}{21} - 1 \right). \quad (4.41)$$

■ 4.2.3 Kritérium PIN

Papugovo integrální kritérium PIN [18] podobně jako kritérium Liuovo a Zennerovo zohledňuje vliv střední hodnoty smykového napětí. Kritérium únavové pevnosti je popsáno pomocí vztahu

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (a_{PN} \cdot C_a \cdot (C_a + c_{PN} \cdot C_m) + b_{PN} \cdot (N_a + d_{PN} \cdot N_m)) \sin \theta d\theta d\varphi} \leq f_{-1}. \quad (4.42)$$

Materiálové parametry a_{PN} , b_{PN} , c_{PN} a d_{PN} jsou dány vztahy

$$a_{PN} = \frac{15}{2} \kappa \left(\frac{\pi \kappa - 4}{3\pi - 4\kappa} \right) \quad (4.43)$$

$$b_{PN} = 3f_{-1} \left(1 - \kappa \left(\frac{\pi \kappa - 4}{3\pi - 4\kappa} \right) \right) \quad (4.44)$$

$$c_{PN} = 10 \frac{f_{-1}^2}{a_{PN} t_0^2} - \frac{20b_{PN}}{3\pi a_{PN} t_0} - 1 \quad (4.45)$$

$$d_{PN} = 6 \frac{f_{-1}^2}{b_{PN} f_0} \left(1 - \frac{f_0^2}{3t_0^2} \right) + \frac{4f_0}{3\pi t_0} - 1. \quad (4.46)$$

4.3 Kritéria založená na napěťových invariantech

Kritéria založená na napěťových invariantech používají jako parametry popisující napěťový stav hydrostatické napětí a odmocninu z druhého invariantu deviatorického napětí. Tyto hodnoty nejsou závislé na orientaci materiálové roviny. Pokud je hodnota parametru poškození vyšší než hodnota materiálového parametru, předpovídají tato kritéria vznik únavové trhliny, ale nespecifikují, na které rovině trhlina vznikne. Výhodou těchto kritérií je výpočtová nenáročnost, protože není potřeba počítat napětí na jednotlivých rovinách a provádět integraci nebo hledání maxima.

4.3.1 Sinesovo kritérium

Sinesovo kritérium [20], [10] definuje podmínku únavové pevnosti pomocí napěťových invariantů vztahem

$$a_S \cdot \sqrt{J_{2,a}} + b_S \cdot \sigma_{H,m} \leq f_{-1}, \quad (4.47)$$

kde $\sqrt{J_{2,a}}$ je amplituda odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí a $\sigma_{H,m}$ je střední hodnota hydrostatického napětí. Materiálové parametry a_S a b_S jsou dány vztahy

$$a_S = \kappa \quad (4.48)$$

$$b_S = \frac{6f_{-1}}{f_0} - \sqrt{3}\kappa. \quad (4.49)$$

4.3.2 Crosslandovo kritérium

Crosslandovo kritérium [21], [10] se liší od Sinesova kritéria použitím maximální hodnoty hydrostatického napětí místo střední hodnoty. Kritérium je dáno vztahem

$$a_C \sqrt{J_{2,a}} + b_C \sigma_{H,max} \leq f_{-1}, \quad (4.50)$$

kde $\sigma_{H,max} = \sigma_{H,a} + \sigma_{H,m}$ je maximální hodnota hydrostatického napětí. Materiálové parametry a_C a b_C jsou dány vztahy

$$a_C = \kappa \quad (4.51)$$

$$b_C = 3 - \sqrt{3}\kappa. \quad (4.52)$$

4.4 Nová multiaxialní únavová kritéria

Kromě klasických únavových kritérií, která jsou používána již mnoho let a která byla popsána v předchozím textu, bylo v posledních letech zveřejněno několik dalších kritérií, která přinášejí nové způsoby výpočtu únavové pevnosti. Několik z nich je popsáno v následující kapitole a později budou porovnány s několika staršími kritérii.

4.4.1 Wangovo kritérium

Kritérium publikované Wangem a kol. [22] je definováno pouze pro případ kombinace tahového σ_x a torzního napětí τ . Kritérium předpokládá, že ke vzniku trhliny dochází na kritické rovině pro kterou $\theta^* = \pm 90^\circ$. Napětí na rovinách, ze kterých hledáme kritickou rovinu je pak popsáno pouze pomocí úhlu φ a normálové $N(t_k)$ a smykové napětí $C(t_k)$ v časovém okamžiku t_k se určí pomocí vztahů

$$N(t_k) = \frac{\sigma_x(t_k)}{2} + \frac{\sigma_x(t_k)}{2} \cos(2\varphi) + \tau(t_k) \sin(2\varphi) \quad (4.53)$$

$$C(t_k) = \frac{\sigma_x(t_k)}{2} \sin(2\varphi) - \tau(t_k) \cos(2\varphi). \quad (4.54)$$

Maximální smykové napětí $C_{max}(t_k)$ a orientace roviny s maximálním smykovým napětím jsou v časovém okamžiku t_k dány vztahy

$$C_{max}(t_k) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x(t_k)}{2}\right)^2 + (\tau(t_k))^2} \quad (4.55)$$

$$\varphi_{-45^\circ-45^\circ}(t_k) = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{\sigma_x(t_k)}{2\tau(t_k)}\right) \quad (4.56)$$

$$\varphi_{0^\circ-45^\circ}(t_k) = \text{abs}\left(\frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{\sigma_x(t_k)}{2\tau(t_k)}\right)\right), \quad (4.57)$$

kde $\varphi_{-45^\circ-45^\circ}$ je hodnota mezi -45° a 45° , která udává úhel mezi průmětem normálového vektoru k ploše s maximálním smykovým napětím a osou x v čase t_k a $\varphi_{0^\circ-45^\circ}$ je absolutní hodnota úhlu $\varphi_{-45^\circ-45^\circ}$ v rozsahu 0° až 45° . Poloha kritické roviny se určí pomocí váženého průměru z poloh roviny s maximálním absolutním smykovým napětím v časových okamžicích t_k . Poloha roviny s váženým maximem absolutního smykového napětí je popsána úhlem $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{W_{total}} \sum_{t_1}^{t_N} \varphi_{0^\circ-45^\circ}(t_k) W(t_k) \quad (4.58)$$

$$W_{total} = \sum_{t_1}^{t_N} W(t_k), \quad (4.59)$$

kde t_k je časový okamžik ($t_k = t_1, t_2, \dots, t_N$), $W(t_k)$ je vážený průměr v čase t_k a W_{total} je součet $W(t_k)$ pro čas od t_1 do t_N . Vážený průměr $W(t_k)$ se určí pomocí vztahu

$$W(t_k) = \frac{C_{max}(t_k) - \min(C_{max}(t_k))}{\max(C_{max}(t_k)) - \min(C_{max}(t_k))}, \quad (4.60)$$

kde $\max(C_{max}(t_k))$ je maximální hodnota C_{max} v čase a $\min(C_{max}(t_k))$ je minimální hodnota C_{max} v čase. Znaménko úhlu $\hat{\varphi}$ je definováno jako

$$\hat{\varphi} \geq 0, \quad \frac{1}{W_{total}} \sum_{t_1}^{t_N} \varphi_{-45^\circ-45^\circ}(t_k) W(t_k) \geq 0 \quad (4.61)$$

$$\hat{\varphi} < 0, \quad \frac{1}{W_{total}} \sum_{t_1}^{t_N} \varphi_{-45^\circ-45^\circ}(t_k) W(t_k) < 0. \quad (4.62)$$

Absolutní hodnoty smykového napětí jsou shodné na rovinách daných úhly φ a $\varphi + 90^\circ$. Hodnoty váženého maxima absolutního smykového napětí jsou proto shodné na rovinách $\hat{\varphi}$ a $\hat{\varphi} + 90^\circ$ a kritická rovina (θ^*, φ^*) je proto vybrána z těchto dvou rovin jako rovina s vyšší hodnotou ekvivalentního napětí. Ekvivalentní smykové napětí je dáno vztahem

$$\tau_{eq} = \left((C_a(\theta^*, \varphi^*) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} |C_m(\theta^*, \varphi^*)|)^2 + \frac{1}{3} \left(N_a(\theta^*, \varphi^*) + \left(\sqrt{\frac{24t_{-1}^2}{f_{-1}^2} - \frac{9+6\sqrt{2}}{4}} - 1 \right) N_m(\theta^*, \varphi^*) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.63)$$

Tato hodnota je spočtena pro roviny dané úhly $\hat{\varphi}$ a $\hat{\varphi} + 90^\circ$ a rovina s vyšší hodnotou ekvivalentního napětí je vyhodnocena jako kritická rovina a pomocí napětí na této rovině je definováno kritérium únavové pevnosti

$$\tau_{eq} \leq t_{-1}. \quad (4.64)$$

V [22] byla porovnávána únavová životnost získaná pomocí Wangova kritéria s experimentálně zjištěnými životnostmi pro případy čistého tahu, čistého krutu a kombinace tahu a krutu. Použita byla slitina hliníku 7075-T651. Pro posuzované případy byla ukázána dobrá shoda mezi vypočtenými a experimentálně zjištěnými životnostmi.

4.4.2 Margetinovo kritérium

Kritérium popsané Margetinem a kol. [23] patří mezi kritéria kritické roviny. Kritická rovina je definována jako rovina, na které je maximální amplituda smykového napětí. Kritérium používá nelineární kombinaci normálového a smykového napětí na kritické rovině. Únavovou životnost lze určit pomocí parametrů S-N křivky pomocí rovnice

$$\sqrt{\left(\left(\frac{2\tau'_f}{\sigma'_f} \right)^2 \left(\frac{2N_{max}}{\sigma'_f} \right)^{\frac{2(b_\tau-b_\sigma)}{b_\sigma}} - 1 \right) N_{max}^2 + C_a^2} = \tau'_f (2N_f)^{b_\tau} \quad (4.65)$$

Pro určení trvalé pevnosti lze nahradit pravou stranu rovnice mezí pevnosti ve střídavém krutu a kritérium únavové pevnosti je dáno vztahem

$$\sqrt{\left(\left(\frac{2\tau'_f}{\sigma'_f} \right)^2 \left(\frac{2N_{max}}{\sigma'_f} \right)^{\frac{2(b_\tau-b_\sigma)}{b_\sigma}} - 1 \right) N_{max}^2 + C_a^2} \leq t_{-1}. \quad (4.66)$$

Materiálové parametry σ'_f a b_σ jsou parametry získané z regresní S-N křivky materiálu pro případ čistého tahu-tlaku, která je popsána vztahem

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^{b_\sigma}. \quad (4.67)$$

Materiálové parametry τ'_f a b_τ jsou parametry získané z regresní S-N křivky materiálu pro případ čistého krutu, která je popsána vztahem

$$\tau_a = \tau'_f (2N_f)^{b_\tau}. \quad (4.68)$$

V [23] byla porovnávána únavová životnost získána pomocí Margetinova kritéria s životnostmi vypočtenými pomocí několika starších kritérií a životnostmi získanými experimentálně. Použity byly případy kombinace axiálního a torzního napětí bez středních hodnot napětí. Porovnání byla provedena pro ocel S355 a ocel C55. Bylo ukázáno, že pro ocel S355 dosahuje Margetinovo kritérium nejlepší shody s experimentálními daty z posuzovaných kritérií. Pro ocel C55 dává Margetinovo kritérium příliš konzervativní odhady únavové životnosti.

4.4.3 Khalijino kritérium

Kritérium publikované Khalij a kol. [24] je navrženo pro tenzor napětí se dvěma nenulovými normálovými složkami napětí σ_{xx} a σ_{yy} a smykovým napětím τ_{xy} . V [24] je kritérium popsáno v souřadném systému (x, y, z) , obdobně jej lze použít i v souřadném systému (x, t, r) . Kritérium je odvozeno pomocí napěťových invariantů. Pokud složky tenzoru napětí mají nulové střední hodnoty, je kritérium únavové pevnosti popsáno vztahem

$$\alpha(r) \left(\left(\frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \right)^2 - \frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \cos \delta_{yy} \right) + \left(\frac{\tau_{xy,a}}{t_{-1}} \right)^2 + (1 - \alpha(r)) \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \right)^2 + 2 \frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \cos \delta_{yy}} \leq 1, \quad (4.69)$$

kde $r = \frac{t_{-1}}{f_{-1}}$ je poměr mezi únavy ve střídavém smyku a ve střídavém tahu-tlaku. Funkce $\alpha(r)$ má 3 možné varianty. Varianta odvozená od Goughova kritéria [25] je označena GOU a funkce $\alpha(r)$ se podle ní určí ze vztahu

$$\alpha(r) = \frac{1}{r} - 1 \quad (4.70)$$

Funkce $\alpha(r)$ odvozená z kritéria Nishihary a Kawamota [26] je označena N&K a je popsána vztahem

$$\alpha(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right). \quad (4.71)$$

Varianta odvozená v [24] tak, aby bylo kritérium nezávislé na orientaci souřadného systému, je označena OP je funkce $\alpha(r)$ je popsána vztahem

$$\alpha(r) = \frac{1}{3r^2}. \quad (4.72)$$

Pro případ, že složky tenzoru napětí mají nenulové střední hodnoty napětí, lze kritérium 4.69 rozšířit do tvaru

$$\begin{aligned} & \alpha(r) \left(\left(\frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \right)^2 - \frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \cos \delta_{yy} \right) + \left(\frac{\tau_{xy,a}}{t_{-1}} \right)^2 \\ & + (1 - \alpha(r)) \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \right)^2 + 2 \frac{\sigma_{xx,a}}{f_{-1}} \frac{\sigma_{yy,a}}{f_{-1}} \cos \delta_{yy}} \\ & + \gamma_1(r) \frac{\sigma_{mt}}{f_{-1}^2} + \gamma_2(r) \frac{\sigma_{ms}}{f_{-1}^2} \leq 1, \end{aligned} \quad (4.73)$$

kde funkce $\gamma_1(r)$ a $\gamma_2(r)$ jsou popsány vztahy

$$\gamma_1(r) = \frac{f_{-1}^2 - \left(\frac{t_0}{2r}\right)^2}{\frac{4}{7} \left(\frac{t_0}{2}\right)^2} \quad (4.74)$$

$$\gamma_2(r) = \frac{f_{-1}^2 - \left(\frac{f_0}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{4\gamma_1(r)}{21}\right)}{\frac{5}{7} \left(\frac{f_0}{2}\right)^2}. \quad (4.75)$$

Napětové parametry σ_{mt} a σ_{ms} jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \sigma_{mt} = & \frac{1}{21} \left(A_{11} \sigma_{xx,m}^2 + A_{12} \sigma_{yy,m}^2 + A_{13} \sigma_{xx,m} \sigma_{yy,m} + A_{21} \tau_{xy,m}^2 \right. \\ & \left. + A_{22} \sigma_{xx,m} \tau_{xy,m} + A_{23} \sigma_{yy,m} \tau_{xy,m} \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\sigma_{ms} = \frac{3}{7} (A_{31} \sigma_{xx,m} + A_{32} \sigma_{yy,m} + A_{33} \tau_{xy,m}). \quad (4.77)$$

Parametry A_{11} - A_{33} jsou popsány vztahy

$$A_{11} = \frac{4\sigma_{xx,a}^2 + 3\sigma_{yy,a}^2 - 4\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 7\tau_{xy,a}^2}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.78)$$

$$A_{21} = \frac{7\sigma_{xx,a}^2 + 7\sigma_{yy,a}^2 - 6\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 36\tau_{xy,a}^2}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.79)$$

$$A_{31} = \frac{5\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 + 2\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 4\tau_{xy,a}^2}{3\sigma_{xx,a}^2 + 3\sigma_{yy,a}^2 + 2\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 4\tau_{xy,a}^2} \quad (4.80)$$

$$A_{12} = \frac{3\sigma_{xx,a}^2 + 4\sigma_{yy,a}^2 - 4\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 7\tau_{xy,a}^2}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.81)$$

$$A_{22} = \frac{\tau_{xy,a}(10\sigma_{xx,a} - 6\sigma_{yy,a})}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.82)$$

$$A_{32} = \frac{\sigma_{xx,a}^2 + 5\sigma_{yy,a}^2 + 2\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 4\tau_{xy,a}^2}{3\sigma_{xx,a}^2 + 3\sigma_{yy,a}^2 + 2\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 4\tau_{xy,a}^2} \quad (4.83)$$

$$A_{13} = \frac{-2(2\sigma_{xx,a}^2 + 2\sigma_{yy,a}^2 - 3\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2)}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.84)$$

$$A_{23} = \frac{\tau_{xy,a}(-6\sigma_{xx,a} + 10\sigma_{yy,a})}{\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 - \sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 3\tau_{xy,a}^2} \quad (4.85)$$

$$A_{33} = \frac{8\tau_{xy,a}(\sigma_{xx,a} + \sigma_{yy,a})}{3\sigma_{xx,a}^2 + \sigma_{yy,a}^2 + 2\sigma_{xx,a}\sigma_{yy,a} + 4\tau_{xy,a}^2}. \quad (4.86)$$

V [24] byla porovnávána únavová pevnost získaná pomocí Khalijina kritéria s experimentálně zjištěnou únavovou pevností pro případy namáhání kombinací tahu a krutu a pro namáhání se dvěma normálovými složkami napětí. Použito bylo několik materiálů s různými mechanickými vlastnostmi. Byla ukázána dobrá shoda s experimentálními daty, nejlepší shody bylo dosaženo pro variantu OP.

4.4.4 Anesovo kritérium SSF

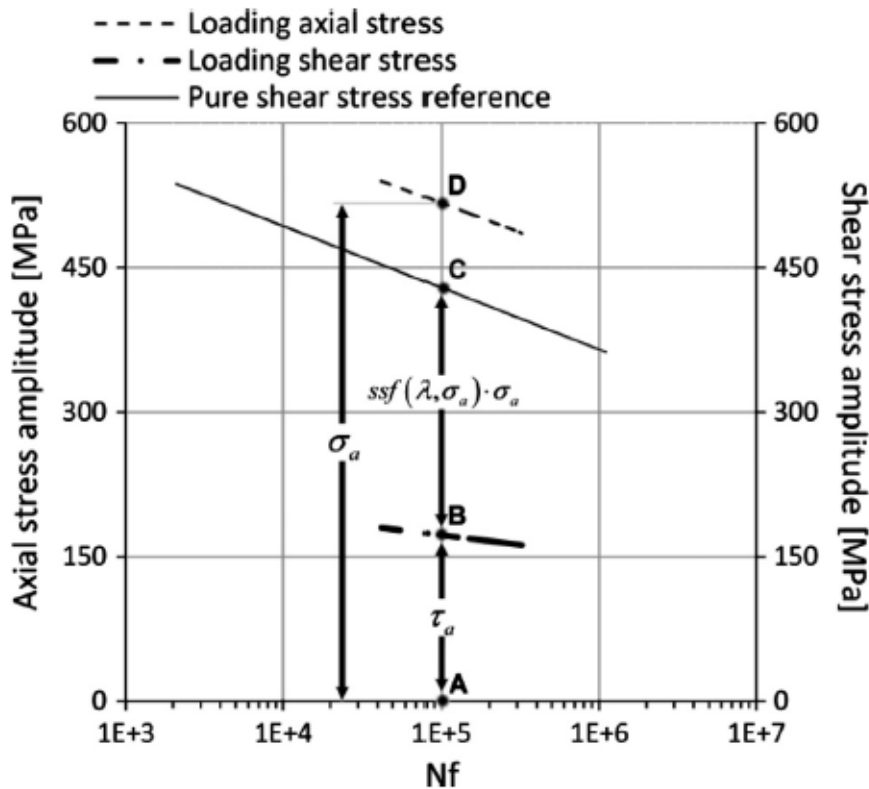
Anesovo kritérium SSF [27], [28] je definováno pro namáhání kombinací axiálního σ_x a smykového napětí τ . Kritérium je založeno na použití proměnné míry poškození (damage scale), pomocí které je z normálového napětí určena míra poškození ve smyku (shear damage scale). SSF ekvivalentní smykové napětí je dáno vztahem

$$T(\tau, \sigma) = \tau + ssf(\sigma, \lambda) \cdot \sigma_x, \quad (4.87)$$

kde τ a σ_x jsou okamžité hodnoty smykového a normálového napětí a $ssf(\sigma, \lambda)$ je funkce, která z normálového napětí určuje míru poškození ve smyku. Únavovou životnost lze určit pomocí ekvivalentního smykového napětí pomocí vztahu

$$\max(\tau + ssf(\sigma, \lambda) \cdot \sigma_x) = A(N_f)^b, \quad (4.88)$$

kde A a b jsou parametry jednoosé smykové SN křivky pro daný materiál. Funkci $ssf(\sigma, \lambda)$ lze zjistit na základě experimentálně zjištěné SN křivky pro daný poměr napětí $\lambda = \frac{\tau}{\sigma_x}$. Způsob určení je popsán na obrázku 4.1. Pro danou životnost je určena kombinace normálového



Obrázek 4.1: Určení hodnoty ssf pomocí SN křivky pro čistý smyk (plná čára) a SN křivky pro kombinaci axiálního (čárkovaná čára) a smykového napětí (čerchovaná čára) [28]

(úsečka AD) a smykového napětí (úsečka AB) a odpovídající jednoosé smykové napětí, které způsobí stejnou životnost. Pro dosažení ekvivalentního smykového napětí odpovídajícího hodnotě jednoosého smykového napětí je potřeba vynásobit normálové napětí koeficientem $ssf = \frac{BC}{AC}$. Hodnoty ssf není možné tímto způsobem určit pro všechny kombinace zatížení a proto je takto proveden výpočet jen pro několik případů zatížení a z těchto hodnot je určena regresní závislost, která je použita pro ostatní případy. Funkci $ssf(\sigma_x, \lambda)$ pak lze určit pomocí polynomu 5. stupně

$$ssf(\sigma_x, \lambda) = a + b \cdot \sigma_x + c \cdot \sigma_x^2 + d \cdot \sigma_x^3 + f \cdot \lambda^2 + g \cdot \lambda^3 + h \cdot \lambda^4 + i \cdot \lambda^5, \quad (4.89)$$

kde $a - i$ jsou parametry regresního modelu.

V [27] byla porovnávána únavová životnost vypočtená pomocí kritéria SSF s životností získanou pomocí Findleyovo kritéria a s životností zjištěnou experimentálně. Použity byly případy čistého tahu, čistého krutu a kombinace tahu a krutu pro materiál 42CrMo4. Bylo ukázáno, že kritérium SSF dosahuje lepší shody s experimentálními daty než Findleyovo kritérium.

4.4.5 Böhmeho kritérium

Böhmeho integrální kritérium [29] vychází z Liuova a Zennerova kritéria a upravuje členy se středním normálovým a smykovým napětím tak, aby nevycházela komplexní ekvivalentní

napětí pro nízké záporné hodnoty středního normálového napětí. Kritérium únavové pevnosti je dáno vztahem

$$\sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ((a_{BO}C_a^2 + b_{BO}N_a^2)(1 + c_{BO}N_m)^2 + d_{BO}C_aC_m) \sin \theta d\theta d\varphi} \leq f_{-1}. \quad (4.90)$$

Materiálové parametry a_{BO} , b_{BO} , c_{BO} a d_{BO} jsou dány vztahy:

$$a_{BO} = \frac{1}{5}(3\kappa^2 - 4) \quad (4.91)$$

$$b_{BO} = \frac{1}{5}(6 - 2\kappa^2) \quad (4.92)$$

$$c_{BO} = -\frac{3f_0(11 - 2\kappa^2)}{70C} + \sqrt{\left(\frac{3f_0(11 - 2\kappa^2)}{70C}\right)^2 + \frac{1}{C} \left(\left(\frac{2f_{-1}}{f_0}\right)^2 - 1 - \frac{\kappa^2}{3} \left(\left(\frac{2t_{-1}}{t_0}\right)^2 - 1 \right) \right)} \quad (4.93)$$

$$d_{BO} = \frac{\kappa^2}{3} \left(\left(\frac{2t_{-1}}{t_0}\right)^2 - 1 - \frac{c_{BO}^2 t_0^2}{35\kappa^2} (8 - \kappa^2) \right) \quad (4.94)$$

$$C = \frac{f_0^2}{84} (17 - 4\kappa^2) - \frac{t_0^2}{105} (8 - \kappa^2). \quad (4.95)$$

Pro nulové střední normálové a smykové napětí je kritérium shodné jako Liuovo a Zennerovo kritérium. V [29] byla porovnávána únavová pevnost vypočtená pomocí Böhmeho kritéria s únavovou pevností vypočtenou pomocí několika starších kritérií a únavovou pevností zjištěnou experimentálně. Použito bylo několik materiálů s různými mechanickými vlastnostmi a případy kombinace statického tahového nebo tlakového normálového napětí a střídavého smykového napětí. Böhmeho kritérium dosahovalo z posuzovaných kritérií jedné z nejlepších shod s experimentálními daty.

Kapitola 5

Vyhodnocení rozdílu nových metod oproti starším kritériím

Pro nová multiaxiální únavová kritéria popsaná v části 4.4 bude v této kapitole provedena validace na experimentálních datech. Výstupy těchto kritérií budou porovnány s výstupy několika starších kritérií pro vyhodnocení výhod a nevýhod použití jednotlivých nových kritérií.

Nová kritéria lze rozdělit na metody kritické roviny (Wangovo a Margetinovo kritérium), kritérium odvozené pomocí napětových invariantů (Khalijino kritérium), integrální kritérium (Böhmeho kritérium) a kritérium definované pomocí nominálních napětí (Anesovo kritérium). Pro porovnání se staršími kritérii bude použito kritérium kritické roviny PCN, Crosslandovo kritérium založené na napětových invariantech a integrální kritérium Liuovo a Zennerovo. Tato kritéria byla vybrána z toho důvodu aby jednotlivé nové metody bylo možné porovnat s kritérii podobného typu. Pro výpočet amplitudy a střední hodnoty napětových parametrů byla použita metoda nejmenší opsané kružnice.

Pro použití Wangova kritéria je potřeba pro daný materiál znát únavovou pevnost ve střídavém tahu f_{-1} a ve střídavém krutu t_{-1} . Pro použití Khalijina a Böhmeho kritéria je navíc potřeba znát únavovou pevnost v míjivém tahu f_0 a míjivém krutu t_0 . Tyto charakteristiky jsou používány i ve starších kritériích. Margetinovo kritérium na rozdíl od těchto kritérií používá parametry SN křivky ve střídavém tahu a ve střídavém krutu a je tedy náročnější na vstupní parametry. Anesovo kritérium používá navíc parametry SN křivky pro danou kombinaci namáhání nebo regresní parametry $a-i$. Pro toto kritérium nebyl nalezen vhodný soubor dat, ve kterém by byly takto definované materiálové parametry k dispozici a proto nebude Anesovo kritérium dále používáno.

Margetinovo a Böhmeho kritérium lze použít pro libovolný průběh napětí popsaný tenzorem 3.2. Khalijino kritérium je definováno pouze pro případy kombinace dvou normálových a jedné smykové složky napětí. Anesovo a Wangovo kritérium je definováno pouze pro případy s jednou normálovou a jednou smykovou složkou tenzoru napětí. Pro porovnání nových a starších kritérií byla proto použita experimentální data ze zkoušek zatížení tahem a krutem, která lze aplikovat na všechna nová kritéria. Experimentální data byla vybrána z databáze FatLim [8]. Tato databáze obsahuje 268 případů multiaxiálního namáhání, pro které byla experimentálně zjištěna únavová pevnost. Z těchto případů bylo vybráno 163 případů kombinace tahového a smykového namáhání, pro které jsou k dispozici parametry SN křivek pro Margetinovo kritérium. Pro tyto případy namáhání byl pro jednotlivá kritéria vyhodnocován relativní rozdíl mezi experimentálně zjištěnou a vypočtenou únavovou pevností. Pro popsanou kombinaci namáhání bylo vypočteno ekvivalentní napětí (levá strana kritérií) a porovnáno s materiálovým

parametrem na pravé straně kritéria a takto byl vyhodnocen koeficient ΔFI :

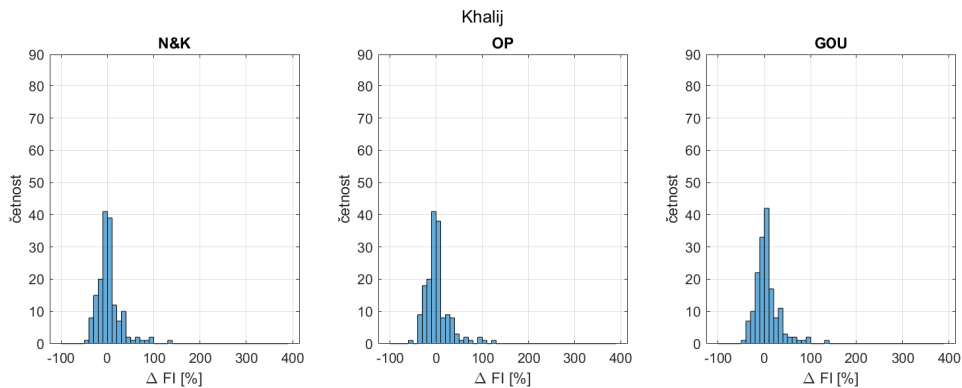
$$\Delta FI = \frac{\sigma_{eq,a} - PS}{PS} \cdot 100\%, \quad (5.1)$$

kde PS označuje materiálový parametr na pravé straně kritéria a $\sigma_{eq,a}$ označuje ekvivalentní napětí vypočtené z daného kritéria. Koeficient $\Delta FI = 0\%$ znamená dokonalou shodu mezi ekvivalentním napětím a materiálovým parametrem na pravé straně kritéria. Hodnota $\Delta FI < 0$ znamená, že kritérium je nekonzervativní a nepředpovídá lom v případě, že je ho v experimentu dosaženo. Hodnota $\Delta FI > 0$ naopak označuje konzervativní kritérium, které předpokládá lom dříve, než je ho dosaženo experimentálně.

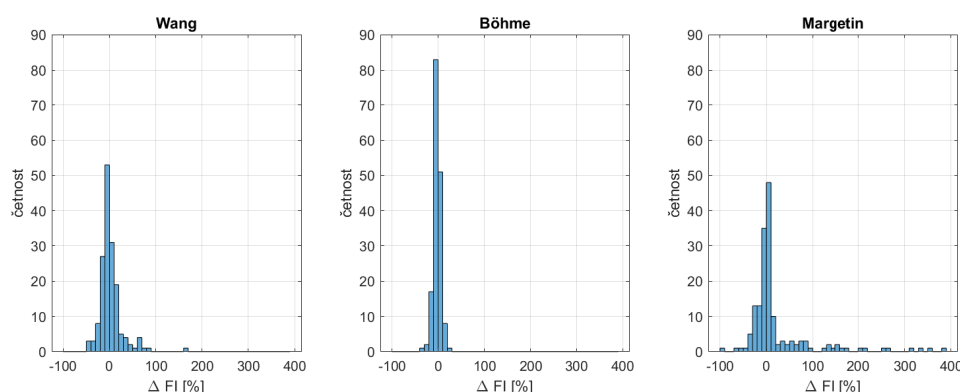
Výsledky porovnání nových a starších kritérií jsou prezentovány v sekcích 5.1 a 5.2, výsledky jsou popsány a zhodnoceny v části 5.3.

5.1 Porovnání pro případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim

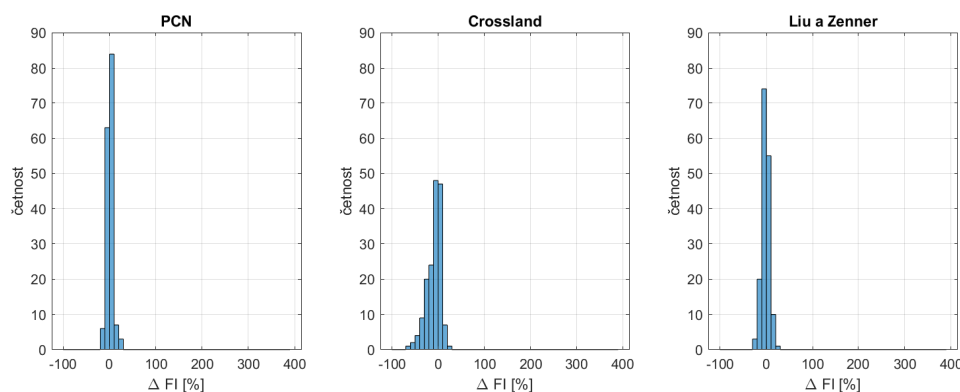
Rozložení koeficientu ΔFI je pro případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim při použití nových kritérií znázorněno pomocí histogramu na obrázcích 5.1 a 5.2. Pro starší kritéria je toto rozložení znázorněno na obrázku 5.3. Statistické parametry popisující rozložení parametru ΔFI jsou shrnuty v tabulce 5.1 pomocí střední hodnoty, směrodatné odchylky, maximální a minimální hodnoty ΔFI .



Obrázek 5.1: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro varianty N&K, OP a GOU Khalijina kritéria. Použity byly případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim.



Obrázek 5.2: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro Wangovo, Böhmeho a Margetinovo kritérium. Použity byly případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim.



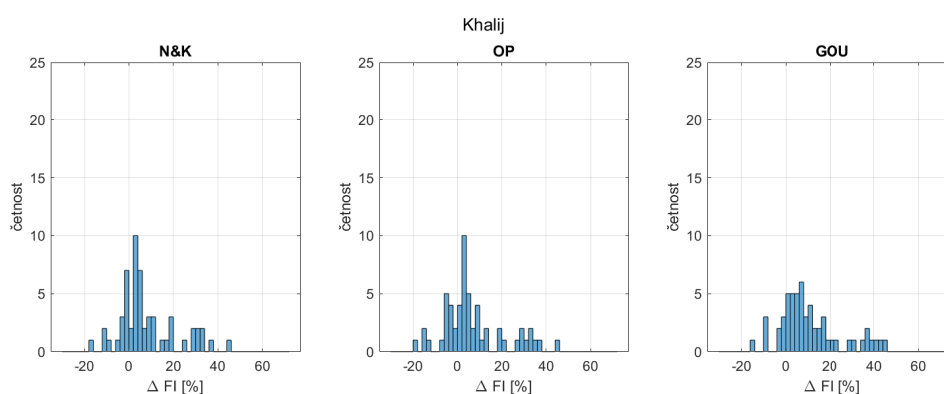
Obrázek 5.3: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro kritéria PCN, Crosslandovo a Liuvo a Zennerovo. Použity byly případy kombinace tahu a torze z databáze FatLim.

	Khalij			WA	BO	MA	PCN	CRO	LZ
	N&K	OP	GOU						
průměr	3.2%	2.0%	5.3%	1.8%	-1.8%	23.2%	0.8%	-8.6%	-1.9%
sm. odchylka	26.0%	27.0%	26.1%	24.6%	7.6%	74.3%	6.1%	14.7%	8.0%
maximum	130.3%	126.1%	132.3%	166.5%	29.5%	381.1%	22.5%	26.5%	26.6%
minimum	-46.4%	-50.5%	-44.3%	-45.2%	-35.5%	-100.0%	-15.4%	-61.8%	-25.5%

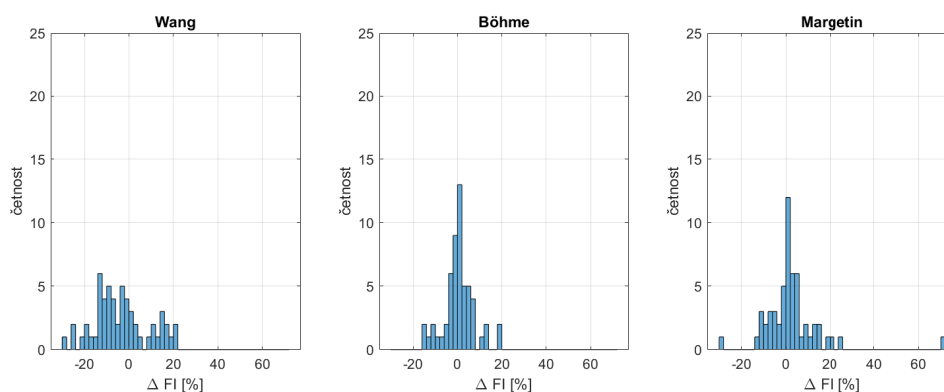
Tabulka 5.1: Výsledky porovnání nových kritérií se staršími kritérii. Vyhodnocován byl relativní rozdíl mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami pomocí parametru ΔFI . Uvedeny jsou statistické parametry popisující rozložení ΔFI . Použity byly případy kombinace tahu a krutu z databáze FatLim.

5.2 Porovnání pro případy tahu a torze bez středního napětí z databáze FatLim

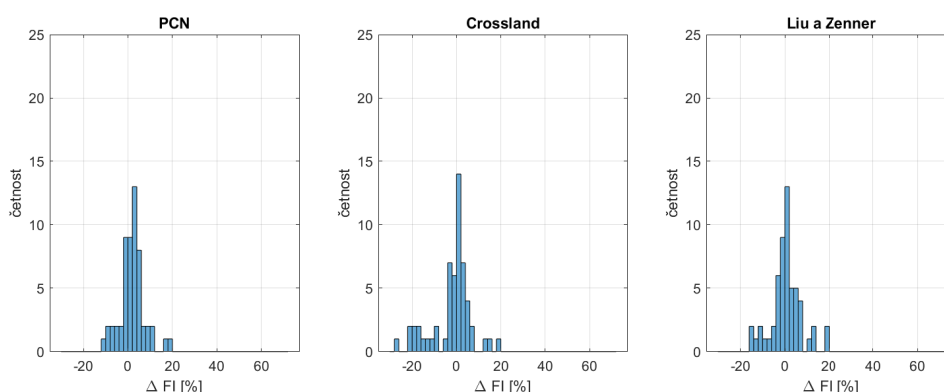
Pro odlišení vlivu střední hodnoty a vlivu amplitudy napěťových parametrů na výstupy kritérií bylo z případů kombinace tahového a torzního zatížení vybráno 56 případů s nulovou střední hodnotou napěťových kanálů. Rozložení parametru ΔFI je pro tyto případy při použití nových kritérií znázorněno histogramy na obrázcích 5.4 a 5.5. Pro starší kritéria je rozložení zobrazeno na obrázku 5.6. Statistické parametry popisující rozložení ΔFI jsou uvedeny v tabulce 5.2.



Obrázek 5.4: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro varianty N&K, OP a GOU Khalijina kritéria. Použity byly případy kombinace tahu a torze bez středních napětí z databáze FatLim.



Obrázek 5.5: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro Wangovo, Böhmeho a Margetinovo kritérium. Použity byly případy kombinace tahu a torze bez středních hodnot napětí z databáze FatLim.



Obrázek 5.6: Histogramy zobrazující rozložení ΔFI pro kritéria PCN, Crosslandovo a Liuovo a Zennerovo. Použity byly případy kombinace tahu a torze bez středních hodnot napětí z databáze FatLim.

	N&K	Khalij OP	GOU	WA	BO	MA	PCN	CRO	LZ
průměr	8.2%	7.1%	11.2%	-3.3%	0.6%	2.6%	2.0%	-2.0%	0.6%
sm. odchylka	12.9%	14.0%	13.9%	12.3%	6.8%	12.8%	5.5%	9.1%	6.8%
maximum	45.8%	45.4%	45.8%	21.9%	19.4%	70.9%	19.1%	18.7%	19.4%
minimum	-16.3%	-18.4%	-14.2%	-29.0%	-15.7%	-29.9%	-10.8%	-26.5%	-15.7%

Tabulka 5.2: Výsledky porovnání nových kritérií se staršími kritérii. Vyhodnocován byl relativní rozdíl mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami pomocí parametru ΔFI . Uvedeny jsou statistické parametry popisující rozložení ΔFI . Použity byly případy kombinace tahu a krutu bez středních hodnot napětí z databáze FatLim.

5.3 Zhodnocení dosažených výsledků

Na základě obrázků 5.1-5.6 a tabulek 5.1 a 5.2 lze posoudit použití kterého z nových kritérií se jeví výhodněji oproti starším kritériím a která nová kritéria naopak nejsou příliš výhodná.

Z příslušných obrázků a tabulek je patrné, že Khalijino kritérium se vyznačuje velkým rozptylem hodnot ΔFI . Pro případy s vysokým středním napětím dosahuje absolutní hodnota ΔFI velmi vysokých hodnot značících velký rozdíl mezi vypočtenými a experimentálně dosaženými únavovými pevnostmi. Nejvyšší rozdíly mezi experimentálně zjištěnými a vypočtenými hodnotami jsou v případech, kdy je střední složka napěťových kanálů vyšší než amplituda. Při použití kompletního datasetu je průměrná hodnota ΔFI mírně konzervativní, nejbližší k hodnotě 0% se dostane ve variantě OP. Při použití dat s nulovou střední složkou zatížení dojde k posunu střední hodnoty ΔFI do konzervativnějších hodnot. Sníží se směrodatná odchylka, která ale stále bude dosahovat poměrně vysokých hodnot. Jednotlivé varianty Khalijina kritéria se svými výstupy navzájem příliš neliší. Pro případy bez středního napětí jsou nejvýraznější odchylky mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami patrné pro křehké materiály s $\kappa \approx 1.2$ a pro velmi houževnaté materiály s $\kappa \approx 1.9$ pro poměr amplitud $r_\sigma = \frac{\sigma_{x,a}}{\tau_a} \in (1.5, 2.0)$. Oproti Crosslandovu kritériu, které je rovněž založeno na napěťových invariantech, dosahuje Khalijino kritérium vyšších hodnot ΔFI , což se jeví užitečně při použití celého datasetu, protože pro Crosslandovo kritérium dosahuje průměrná hodnota ΔFI výrazně nekonzervativních

hodnot. Nevýhodou Khalijina kritéria oproti Crosslandovu je velký rozdíl mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami pro případy s výraznou střední hodnotou napětí a také vyšší rozptyl hodnot ΔFI pro oba datasey. Výhodou Khalijina kritéria oproti ostatním kritériím je to, že je vyjádřeno přímo pomocí amplitud a středních hodnot jednotlivých zátěžných kanálů a není třeba počítat napětí na jednotlivých rovinách. Zejména pro případy bez středních hodnot napětí je tedy výpočtově velmi nenáročná a únavovou pevnost lze pomocí něj určit bez použití výpočtového programu.

Wangovo kritérium se vyznačuje vysokými hodnotami ΔFI pro případy s vysokou střední hodnotou jednotlivých složek napětí. Při použití kompletního datasetu je průměrná hodnota ΔFI blízko 0% a kritérium je mírně konzervativní. Podobně jako Khalijino kritérium má Wangovo kritérium velký rozptyl hodnot ΔFI . Nejvyšší rozdíly mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami lze pozorovat pro případy, kdy je střední složka napětí vyšší než amplituda. Pro případy bez středního napětí je Wangovo kritérium nekonzervativní a pro většinu případů dosahuje ΔFI záporných hodnot. Rozptyl hodnot je i pro případy bez středního napětí poměrně vysoký a na histogramu není patrné rozložení kolem výrazné střední hodnoty. Pro křehké materiály lze pozorovat výrazně nízké záporné hodnoty ΔFI , pro velmi houževnaté materiály lze pozorovat vysoké kladné hodnoty ΔFI . Oproti kritériu PCN, které je také kritériem kritické roviny, se Wangovo kritérium vyznačuje vyšším rozptylem hodnot ΔFI a vyššími hodnotami ΔFI pro případy s vysokou střední hodnotou zatížení. Porovnávaná kritéria mají obdobně průměrnou hodnotu ΔFI blízkou 0%.

Böhmeho kritérium se z nových kritérií vyznačuje nejmenší směrodatnou odchylkou hodnot ΔFI . Při použití kompletního datasetu je z histogramu patrné, že většina případů je rozložena v poměrně úzkém intervalu ΔFI kolem střední hodnoty. Střední hodnota ΔFI je pro Böhmeho kritérium mírně nekonzervativní. Pro případy bez středního napětí jsou statistické parametry parametry popisující rozložení ΔFI obdobné jako pro celkový dataset. Pro případy bez středního napětí je rozložení hodnot ΔFI pro Böhmeho kritérium shodné jako pro Liuovo a Zennerovo kritérium. Pro celkový dataset je střední hodnota ΔFI mírně vyšší než pro Liuovo a Zennerovo kritérium a hodnota ΔFI je tedy blíže k 0% a Böhmeho kritérium také dosahuje nižší směrodatné odchylky. Böhmeho kritérium se z posuzovaných nových kritérií jeví nejvýhodněji díky nízkému rozptylu ΔFI a střední hodnotě ΔFI blízké 0% a také díky tomu, že vykazuje nízké hodnoty ΔFI i pro případy s výrazným středním napětím.

U Margetinova kritéria dosahuje pro případy s výrazným středním napětím parametr ΔFI velmi vysokých hodnot, které v několika případech přesahují 100%. Jedná se o případy u kterých je střední složka napětí vyšší než amplituda. Vypočtené únavové pevnosti se tak v těchto případech velmi liší od experimentálně zjištěných hodnot. Díky těmto případům je střední hodnota a směrodatná odchylka hodnot ΔFI vysoká. V několika případech s výraznou zápornou střední hodnotou napětí jsou vypočtená ekvivalentní napětí komplexní. V těchto případech byla použita pouze reálná část ekvivalentního napětí. Při použití případů bez středního napětí se střední hodnota i směrodatná odchylka ΔFI výrazně sníží. Nejvýraznější odchylky mezi vypočtenými a naměřenými hodnotami jsou patrné pro křehké materiály a pro případy s fázovým posuvem mezi složkami. Při zanedbání jednoho případu pro křehký materiál s fázovým posuvem, který dává vysokou hodnotu ΔFI bude dávat Margetinovo kritérium nižší rozptyl ΔFI než pro Khalijino a Wangovo kritérium. V porovnání s kritériem PCN dává Margetinovo kritérium výrazně horší odezvu na zatížení s výraznou střední složkou. Pro případy bez středního napětí je střední hodnota ΔFI pro Margetinovo kritérium podobná jako pro kritérium PCN a Margetinovo kritérium se vyznačuje vyšším rozptylem hodnot ΔFI .

Z posuzovaných nových multiaxiálních kritérií se nejvýhodněji jeví Böhmeho kritérium, které vykazuje podobné rozložení hodnot ΔFI jako Liuovo a Zennerovo integrální kritérium a oproti tomuto kritériu má mírně nižší rozptyl ΔFI . Oproti ostatním novým kritériím vykazuje Böhmeho kritérium střední hodnotu ΔFI blízkou k 0% a nízký rozptyl hodnot ΔFI a to jak pro případy bez střední hodnoty napětí tak i se středním napětím. Ostatní nová kritéria vykazují vysoké hodnoty ΔFI pro případy s výraznou střední hodnotou napětí a není vhodné je pro tyto případy používat. Khalijino kritérium má výhodu ve výpočtové nenáročnosti a je možné jej použít pro orientační výpočty, u kterých není požadována vysoká přesnost. Wangovo kritérium je pro případy bez středního napětí nekonzervativní a vykazuje výrazný rozptyl hodnot ΔFI . Výhodou tohoto kritéria oproti jiným kritériím kritické roviny může být rychlejší způsob nalezení kritické roviny, který je popsán v sekci 4.4.1. Margetinovo kritérium vykazuje pro případy bez středního napětí oproti Khalijinu a Wangovo kritériu střední hodnotu ΔFI bližší k 0% a mírně nižší rozptyl hodnot ΔFI . Výhodou tohoto kritéria je také to, že je možné jej použít pro více zátěžných kanálů než Khalijino a Wangovo kritérium.

Kapitola 6

Analýza dopadu způsobu zpracování zátěžné cesty na kritéria únavové pevnosti

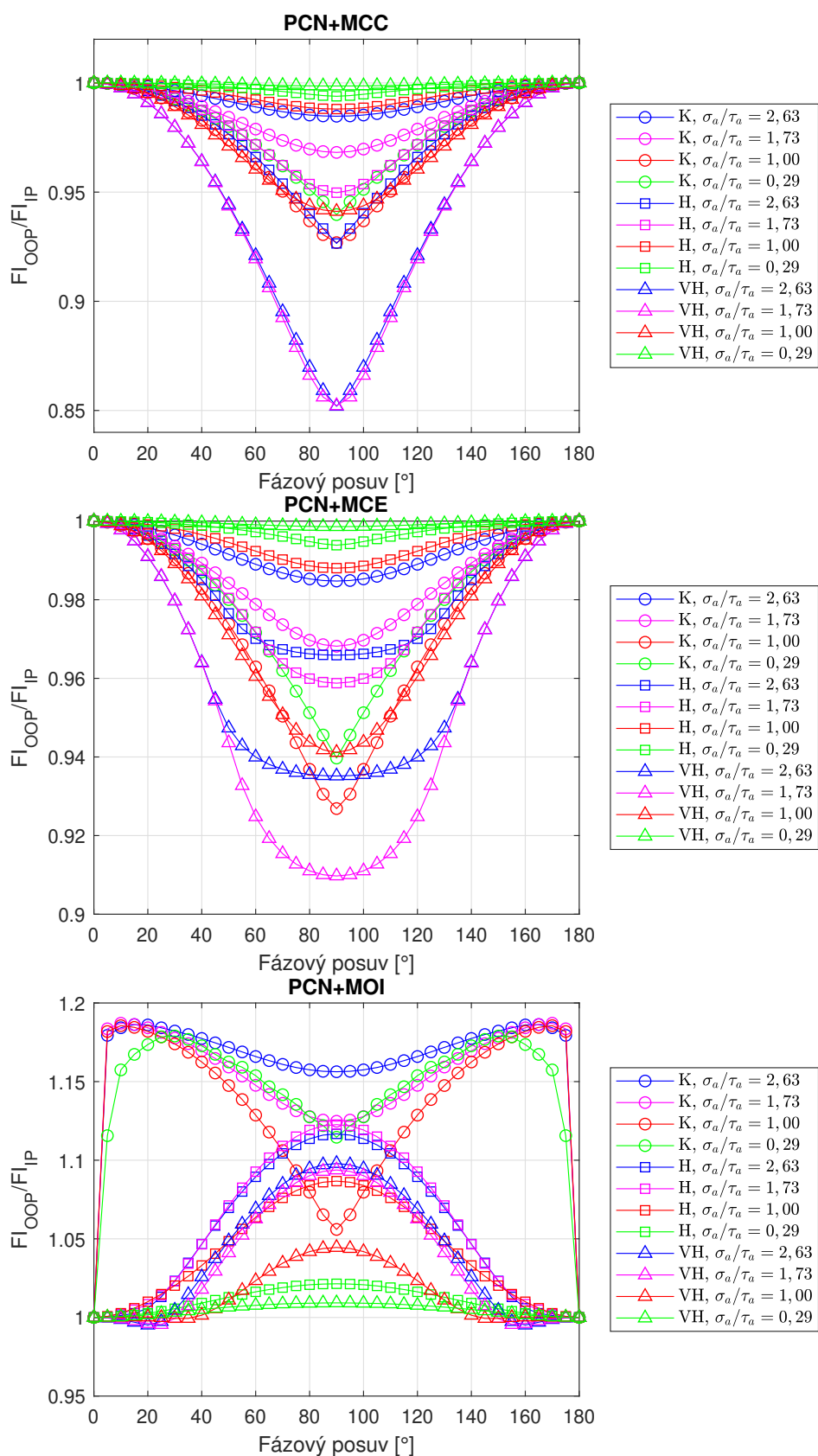
Metody kritické roviny a integrální metody popsané v kapitole 4 používají pro výpočet únavové pevnosti materiálu amplitudu a střední hodnotu smykového napětí. Tyto parametry mohou být určeny z průběhu zátěžné cesty pomocí způsobů popsaných v kapitole 2 a pro konkrétní zatížení jsou v kapitole 3 odvozeny vzorce pro jejich výpočet pomocí metody opsané kružnice, elipsy a metody momentu setrvačnosti. Podobně kritéria založená na napětových invariantech používají střední hodnotu a amplitudu druhého invariantu deviatorického napětí, které se mohou určit pomocí metody opsané kružnice, elipsy a metody momentu setrvačnosti pomocí vzorců odvozených v kapitole 3. V této kapitole budou pro jednotlivá kritéria porovnány výstupy pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Nejprve budou porovnány závislosti ekvivalentního napětí na fázovém posuvu a poté bude provedena validace na experimentálních datech.

6.1 Analýza závislosti ekvivalentního napětí na fázovém posuvu

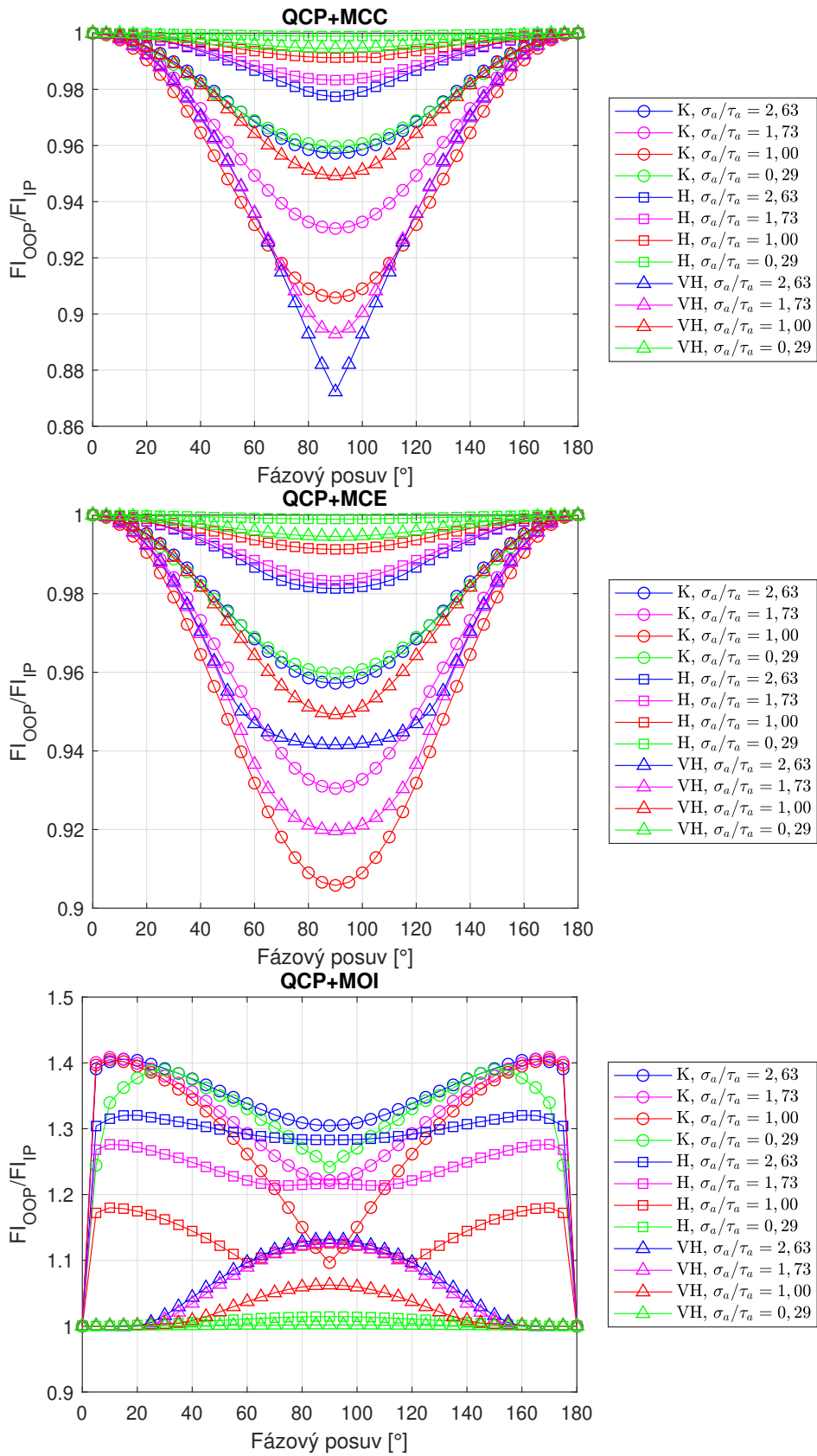
V kapitole 3 bylo ukázáno, že různé způsoby zpracování zátěžné cesty vedou k rozdílným hodnotám napětových parametrů pouze pro neproporcionální zatěžování, při kterém jsou jednotlivé složky zatížení vůči sobě fázově posunuty. Pro posouzení vlivu fázového posuvu na jednotlivá kritéria pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty byla použita citlivostní analýza navržená Papugou v [30]. Tato analýza zkoumá vliv fázového posuvu na ekvivalentní napětí pro jednotlivá kritéria při použití metody opsané kružnice. Tato studie byla za pomoci vztahů odvozených v kapitole 3 rozšířena o testování metody opsané elipsy a metody momentu setrvačnosti. Odezva na namáhání s různým fázovým posuvem byla pozorována pro tři fiktivní materiály. Tyto materiály se liší materiálovým parametrem κ , daným vztahem

$$\kappa = \frac{f_{-1}}{t_{-1}}, \quad (6.1)$$

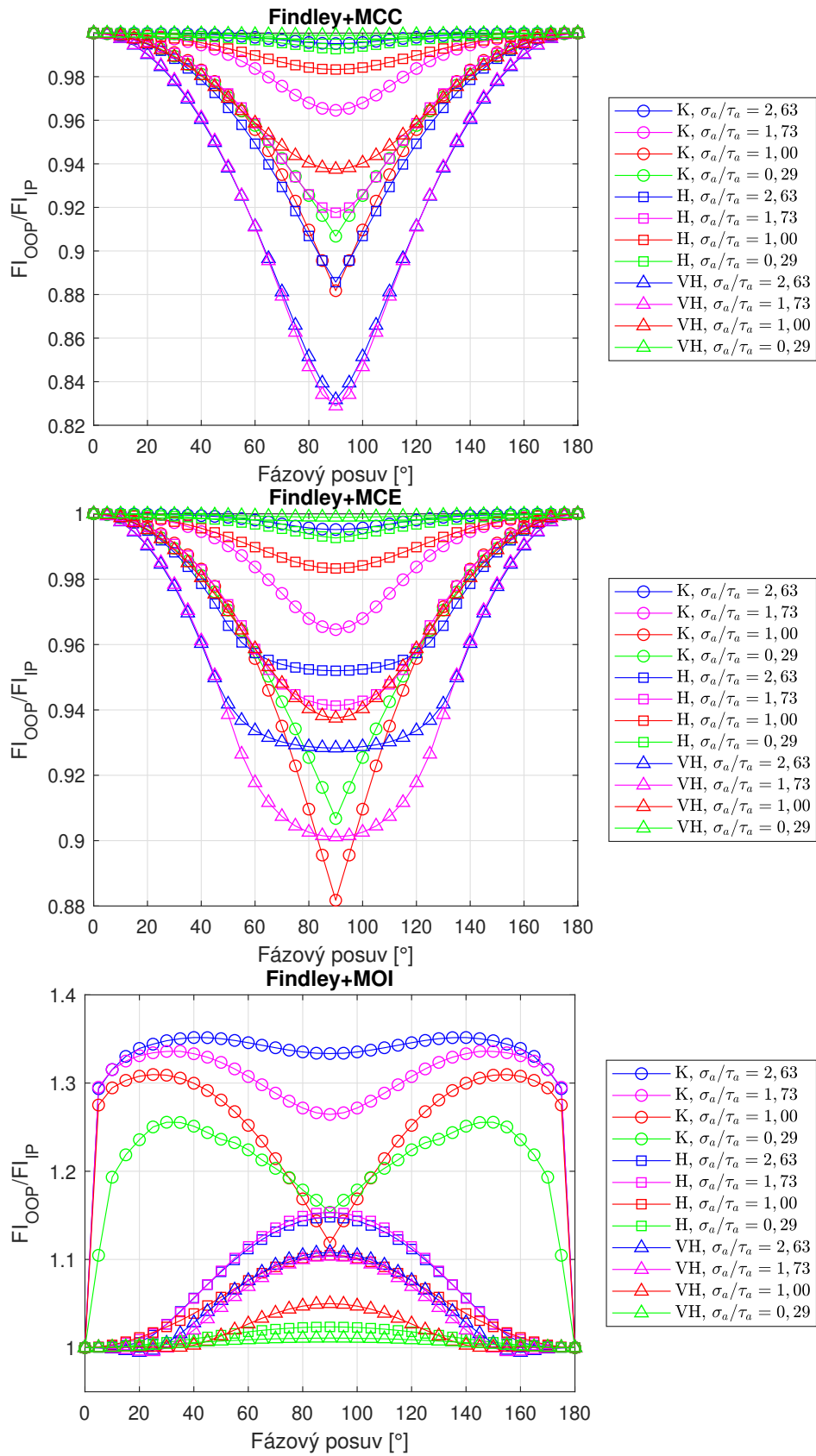
kde f_{-1} je mez únavy ve střídavém tahu-tlaku a t_{-1} je mez únavy ve střídavém krutu. Použit byl křehký materiál s $\kappa = 1.07$, houževnatý materiál s $\kappa = 1.58$ a velmi houževnatý materiál s $\kappa = 1.82$. Pro tyto materiály byla pozorována odezva na zatížení kombinací axiálního σ_x a smykového napětí τ . Složky napětí měly nulovou střední hodnotu $\sigma_{x,m} = \tau_m = 0$ a poměr



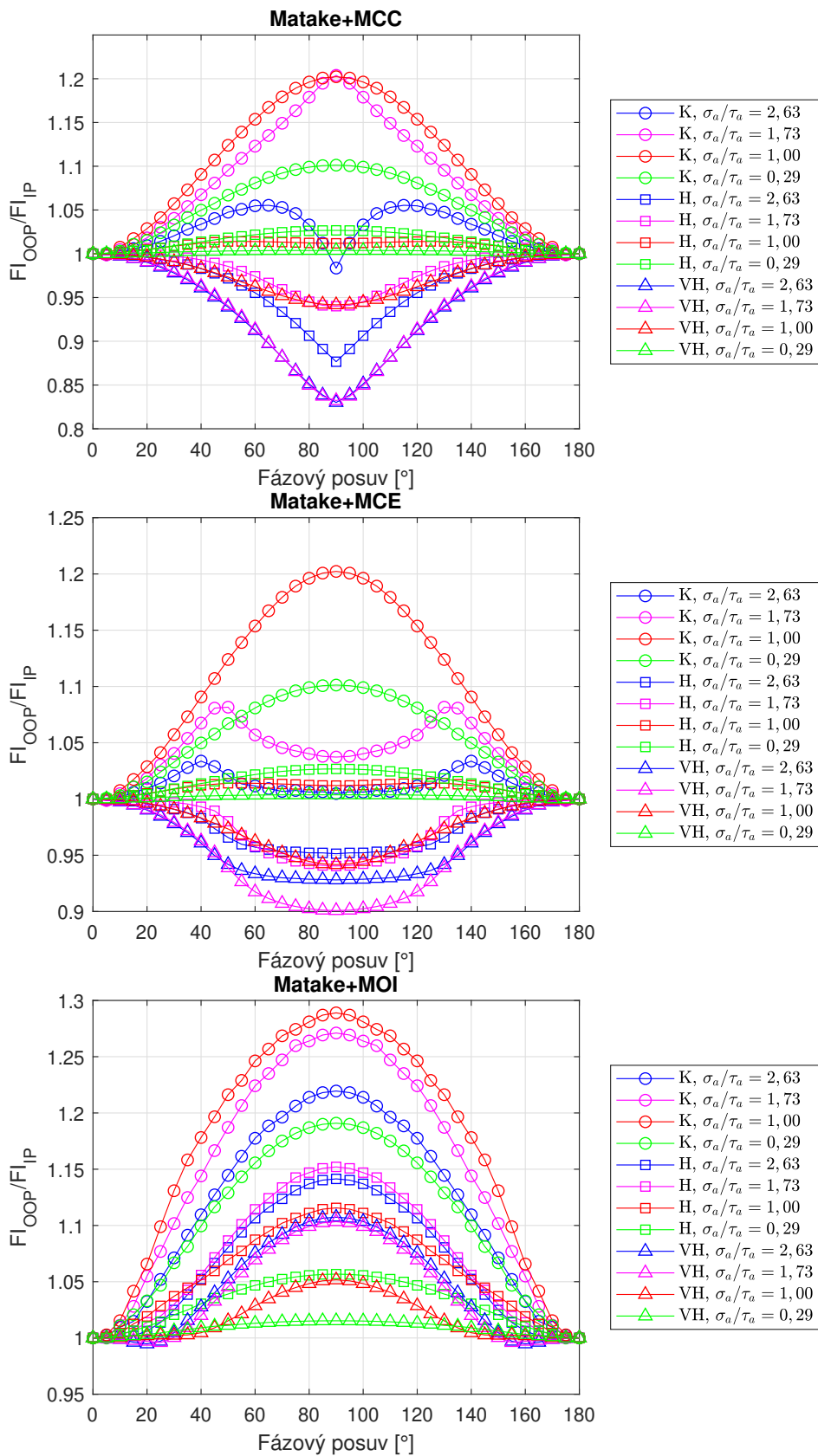
Obrázek 6.1: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro kritérium PCN



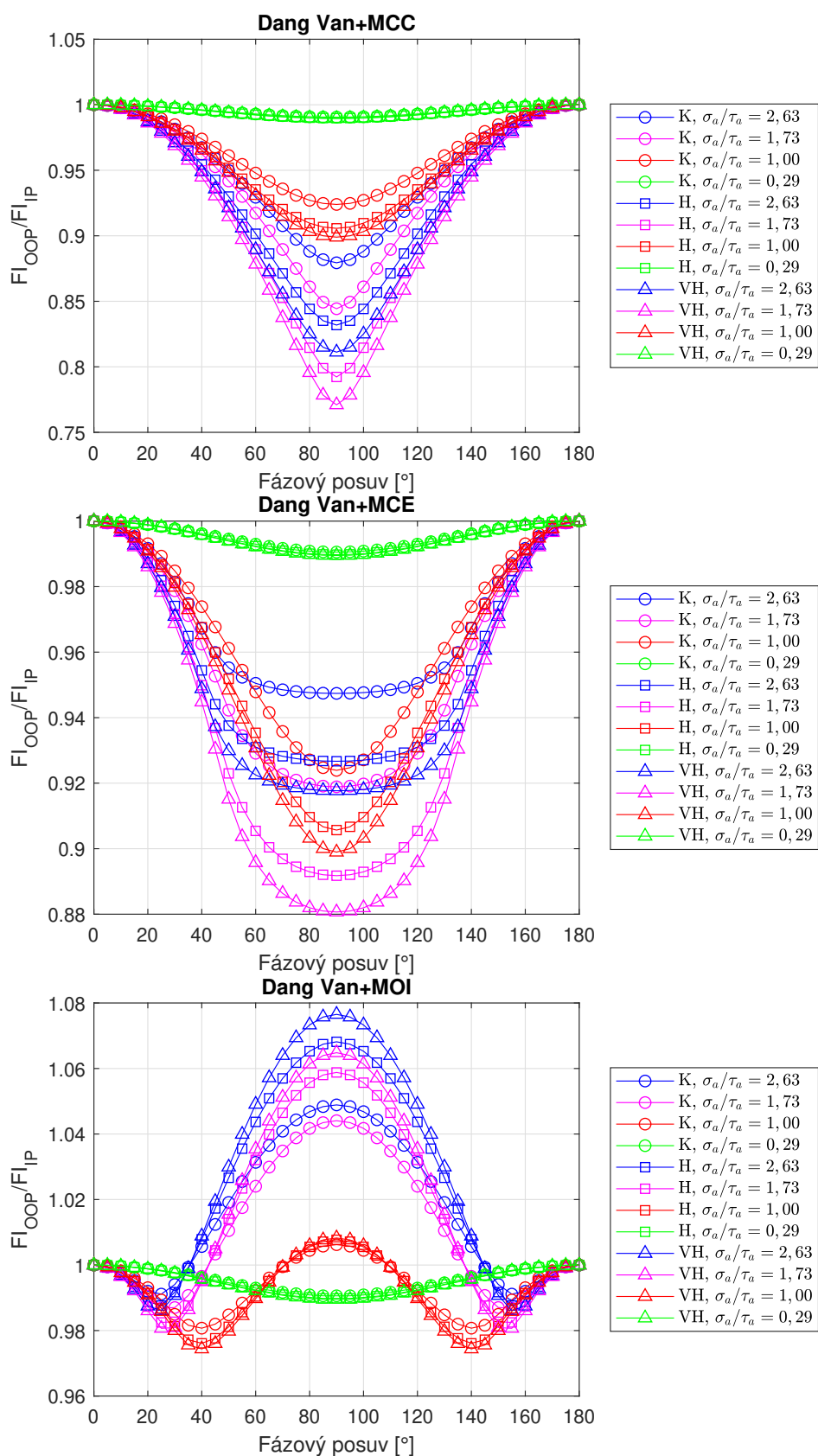
Obrázek 6.2: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro kritérium QCP



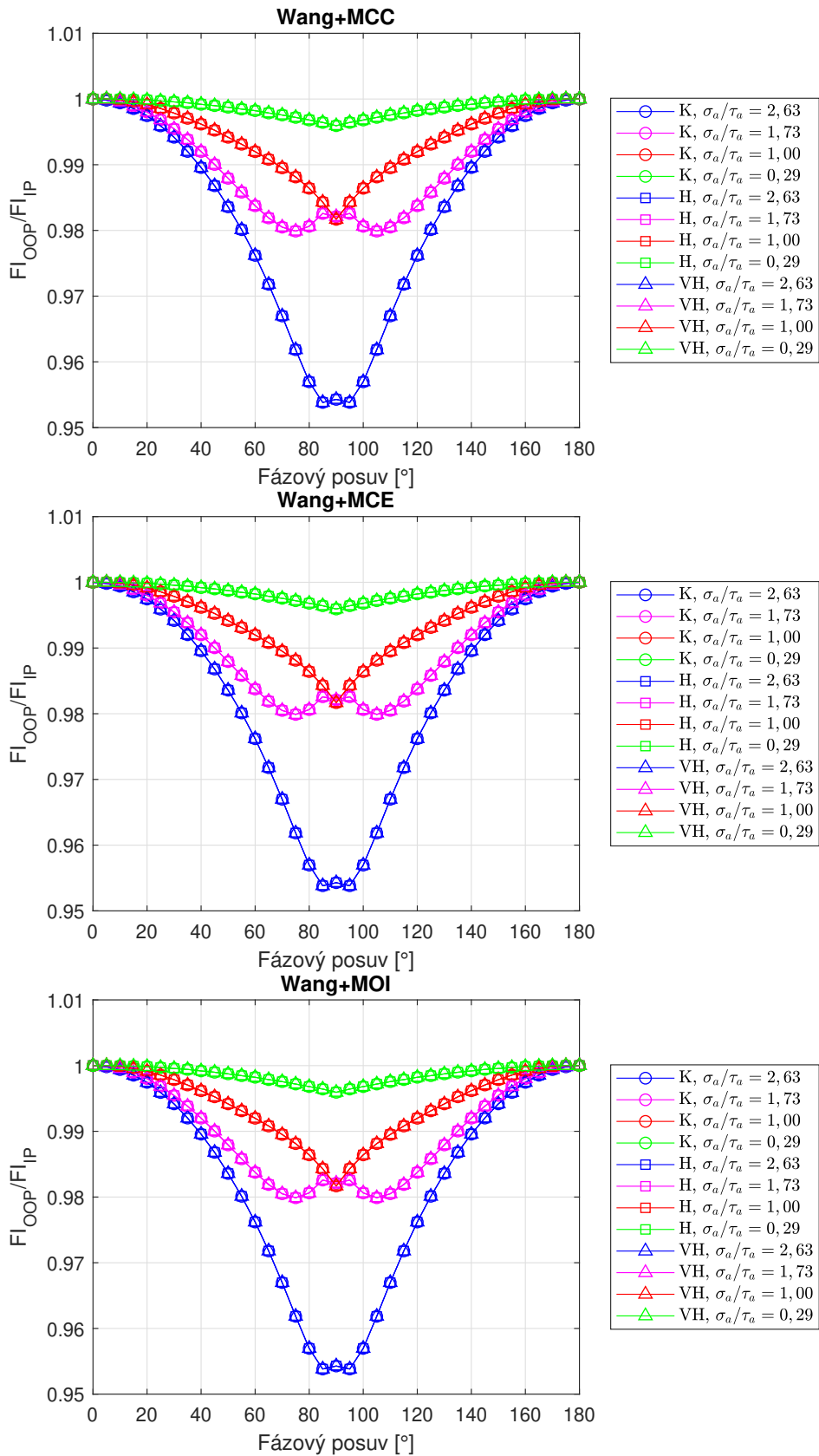
Obrázek 6.3: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Findleyovo kritérium



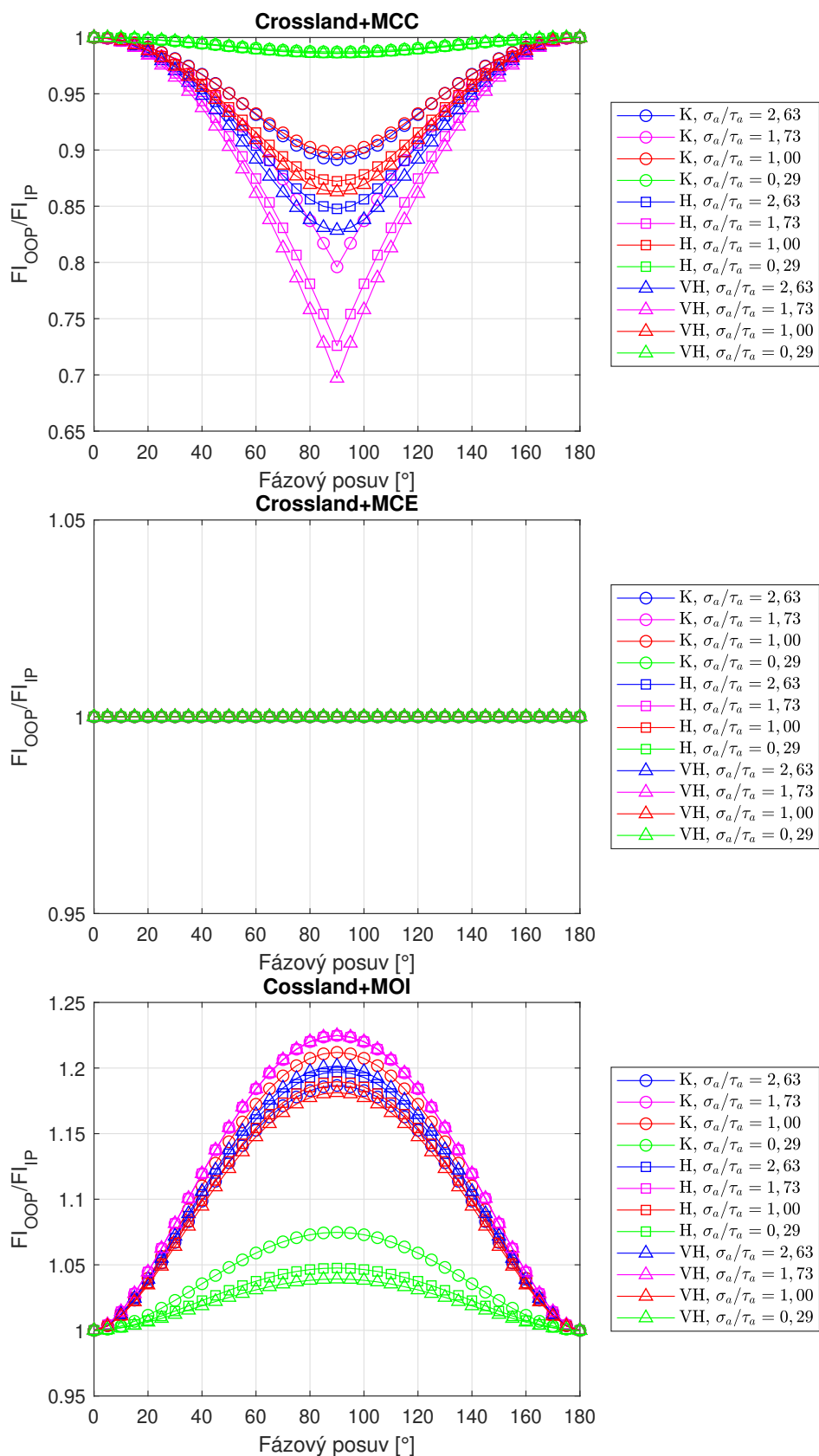
Obrázek 6.4: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Matakeho kritérium



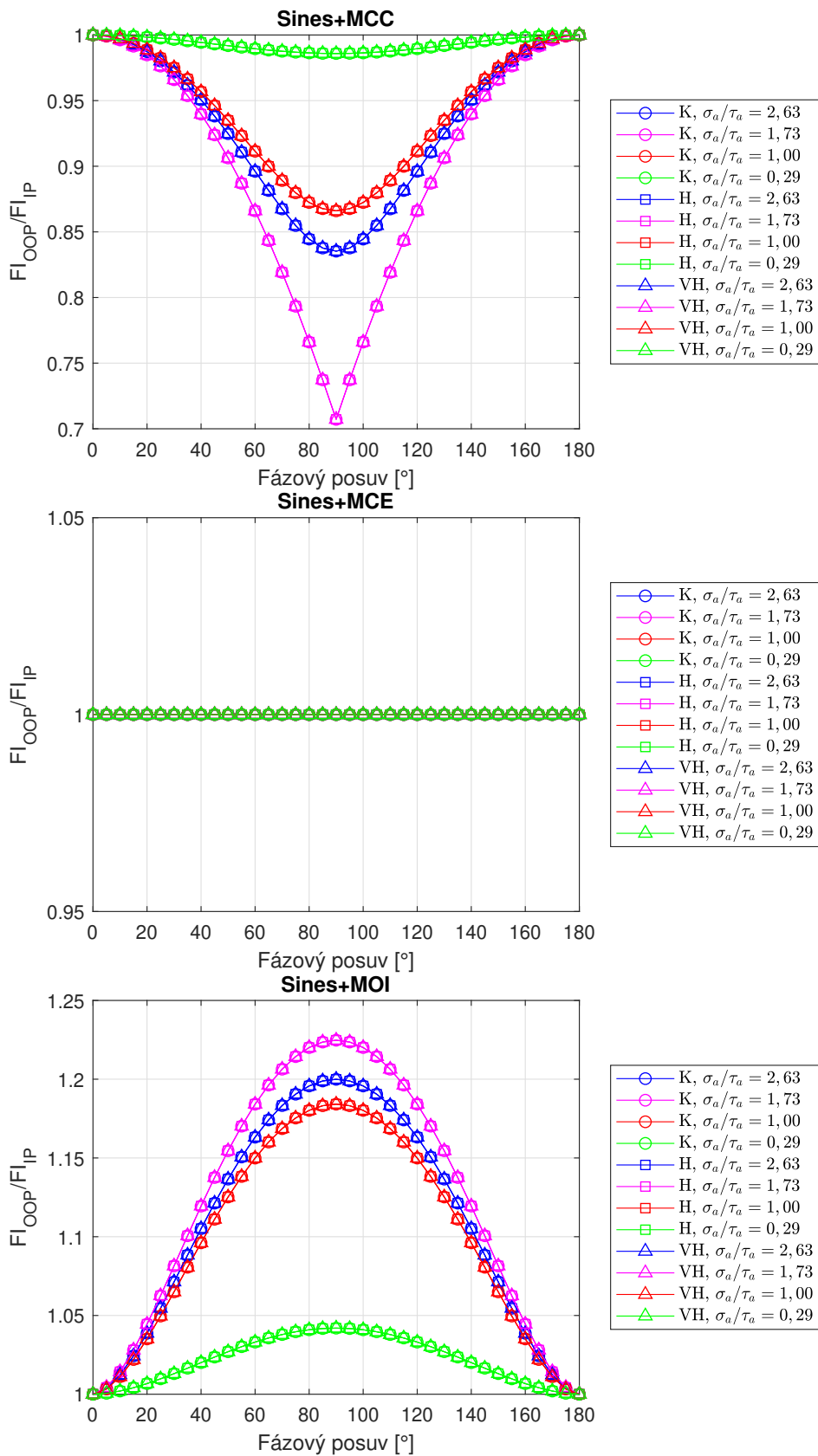
Obrázek 6.5: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Dang Vanovo kritérium



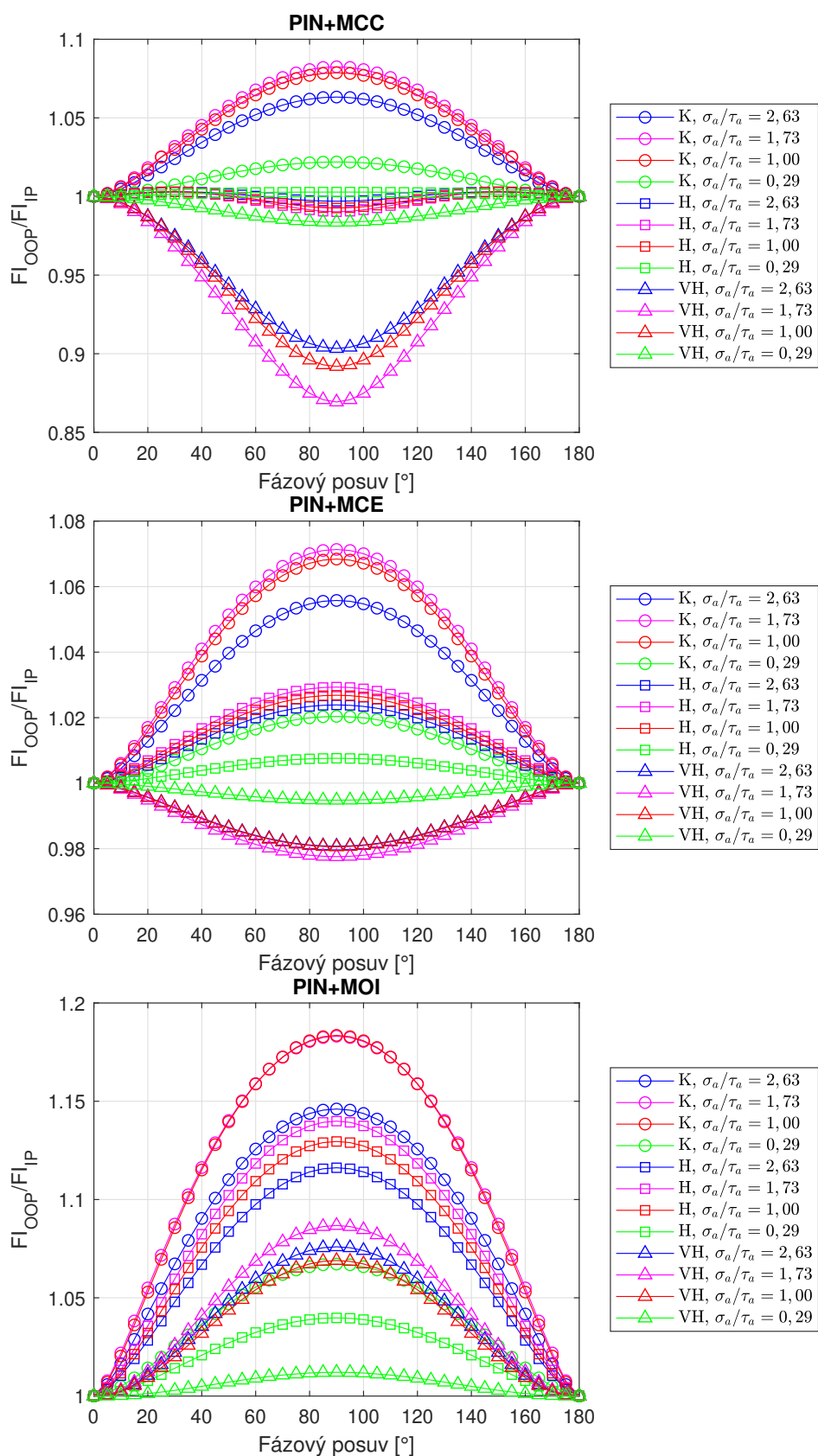
Obrázek 6.6: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Wangovo kritérium



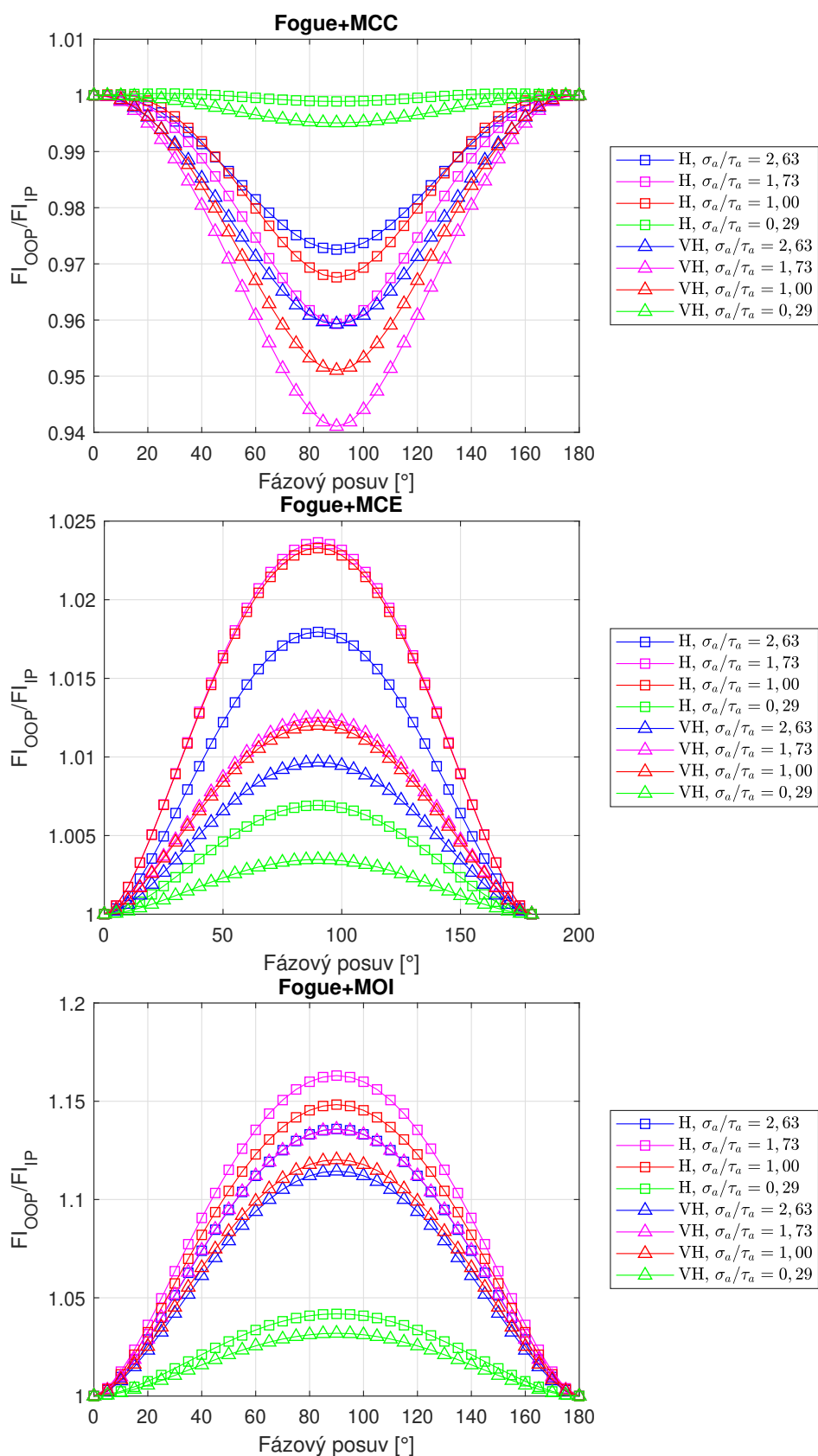
Obrázek 6.7: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Crosslandovo kritérium



Obrázek 6.8: Porovnání závislosti $\frac{FI_{OOP}}{FI_{IP}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Sinesovo kritérium



Obrázek 6.9: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro kritérium PIN



Obrázek 6.11: Porovnání závislosti $\frac{F_{I_{OOP}}}{F_{I_{IP}}}$ pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty pro Fogueovo kritérium

kružnice. Tato změna se projeví zejména pro zatížení vyššími hodnotami axiálního napětí. Ekvivalentní napětí pro mimofázové zatížení zůstane nižší než pro soufázové zatížení. Při použití metody momentu setrvačnosti dojde k dalšímu zvýšení ekvivalentního napětí. Pro nízké hodnoty fázového posuvu ekvivalentní napětí s fázovým úhlem klesá. Pro $r_\sigma = 0.29$ dochází k poklesu až do 90° , pro ostatní zatížení dochází pro vyšší úhly fázového posuvu k nárůstu ekvivalentního napětí na vyšší hodnotu než odpovídá soufázovému zatížení. Nárůst je nejvýraznější pro velmi houževnatý materiál.

U Wangova kritéria dochází pro nižší hodnoty r_σ k poklesu ekvivalentního napětí s fázovým posuvem. Pro vyšší r_σ dochází k mírnému nárůstu ekvivalentního napětí s fázovým posuvem pro vyšší fázové posuvy a ve zbytku intervalu fázových úhlů dochází k poklesu ekvivalentního napětí s fázovým posuvem. Poměr FI_{OOP}/FI_{IP} je shodný pro různé materiály při použití shodného r_σ . Změna ekvivalentního napětí s fázovým posuvem je nejvýraznější pro $r_\sigma = 2.63$. Ekvivalentní napětí pro Wangovo kritérium není závislé na způsobu zpracování zátěžné cesty. To je způsobeno tím, že pro kritickou rovinu platí $\theta^* = \pm 90^\circ$ a pro funkce f , g , p a q popisující průběh smykového napětí na kritické rovině proto platí:

$$f = \pm \left(-\frac{1}{2}\sigma_{x,a} \sin 2\varphi + \tau_a \cos \delta_1 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sigma_{t,a} \cos \delta_2 \sin 2\varphi \right), \quad (6.4)$$

$$g = \pm \left(-\tau_a \sin \delta_1 \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\sigma_{t,a} \sin \delta_2 \sin 2\varphi \right), \quad (6.5)$$

$$p = 0, \quad (6.6)$$

$$q = 0. \quad (6.7)$$

Pro poloosy elipsy, popisující průběh smykového napětí na kritické rovině bude proto platit:

$$a_1 = \sqrt{f^2 + g^2}, \quad (6.8)$$

$$a_2 = 0. \quad (6.9)$$

Průběh smykového napětí na kritické rovině proto bude popsán úsečkou a amplituda C_a na této rovině nebude záviset na způsobu zpracování zátěžné cesty. Nezávislost Wangova kritéria na způsobu zpracování zátěžné cesty byla ukázána pro čtyřosé namáhání popsané tenzorem napětí (3.2), vztahy lze redukovat pro případ kombinace tahu a krutu použitý v této kapitole.

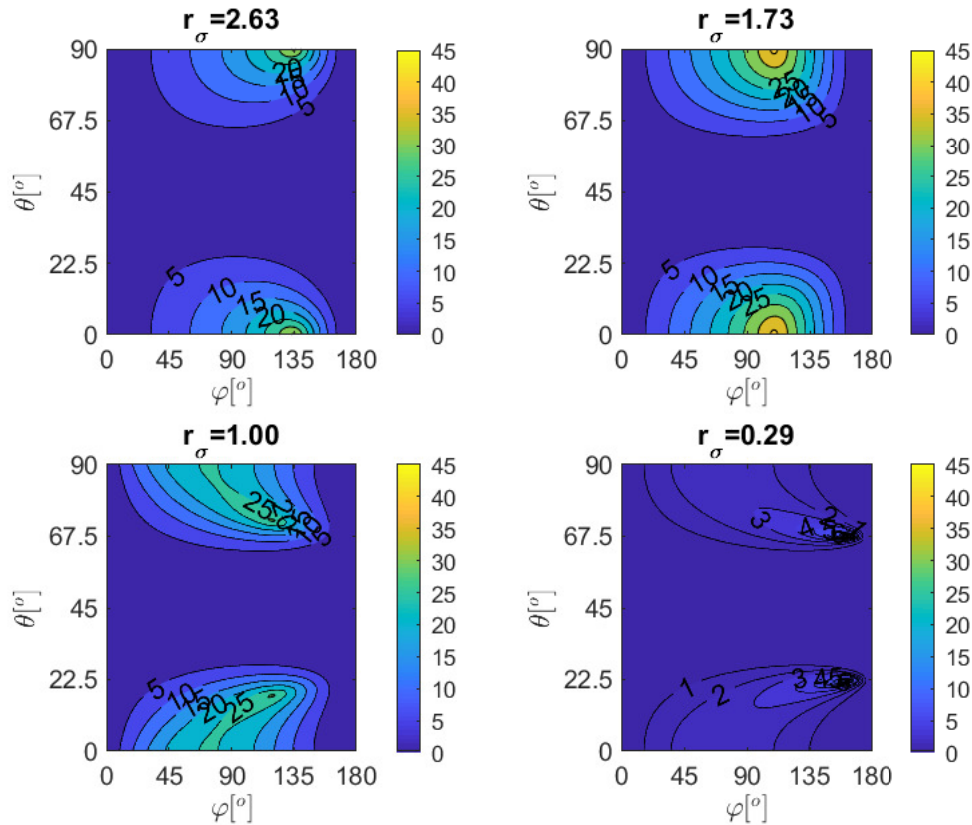
U kritérií využívajících napěťové invarianty (Crossland a Sines) dochází při použití metody opsané kružnice k poklesu ekvivalentního napětí s fázovým posuvem. Nejvýrazněji se závislost projeví pro případy s vysokým axiálním napětím. Pro Sinesovo kritérium je poměr FI_{OOP}/FI_{IP} shodný pro různé materiály při použití stejného poměru r_σ . Při použití metody opsané elipsy pro tato kritéria se ekvivalentní napětí s fázovým posuvem nebude měnit. Toto chování je způsobeno tím, že amplituda $\sqrt{J_{2,a}}$ pro tento případ nebude závislá na fázovém posuvu mezi složkami, což lze ukázat pomocí vztahů odvozených v kapitole 3. Pro kombinaci tahu a krutu se funkce S_{1s} - S_{3c} redukují do tvaru

$$S_{1s} = \frac{\sigma_{x,a}}{\sqrt{3}} \quad (6.10)$$

$$S_{1c} = S_{2s} = S_{2c} = 0 \quad (6.11)$$

$$S_{3s} = \tau_a \cos \delta_1 \quad (6.12)$$

$$S_{3c} = -\tau_a \sin \delta_1. \quad (6.13)$$



Obrázek 6.12: Závislost rozdílu mezi amplitudou smykového napětí $C_{a,MCE}$ získanou pomocí metody opsané elipsy a amplitudou smykového napětí $C_{a,MCC}$ získanou pomocí metody opsané kružnice na úhlech φ a θ pro různé poměry amplitudy axiálního a torzního napětí r_σ a fázový posuv 90° .

Důvod proč jsou změny výraznější pro houževnatý a velmi houževnatý materiál lze ukázat na základě obrázku 6.13. Na tomto obrázku je zobrazen vývoj koeficientů a s materiálovým parametrem κ pro jednotlivá multiaxiální kritéria. Tento koeficient ovlivňuje v jednotlivých kritériích to, jak moc se projeví amplituda smykového napětí v ekvivalentním napětí. Z obrázku je patrné, že kromě Fogueova kritéria pro všechna kritéria koeficient a s parametrem κ roste a proto se pro větší κ více projeví změna ekvivalentního napětí se změnou způsobu zpracování zátěžné cesty. U Fogueova kritéria byla zobrazena závislost pouze na intervalu κ , kde koeficient a není komplexní číslo. Pro nízké hodnoty κ koeficient a_{FOG} s κ klesá a pro větší κ roste. Pro použitý houževnatý a velmi houževnatý materiál platí, že a_{FOG} s κ roste a proto se s κ zvyšuje vliv způsobu zpracování zátěžné cesty na ekvivalentní napětí. U Sinesova, Crosslandova a Liuova a Zennerova kritéria závislost ekvivalentního napětí na fázovém posuvu při použití metody nejmenší opsané elipsy vymizí. U Wangova kritéria není ekvivalentní napětí závislé na způsobu zpracování zátěžné cesty.

Při použití metody momentu setrvačnosti dojde u všech kritérií kromě Wangova k výraznému nárůstu ekvivalentního napětí, které bude ve většině případů vyšší než pro soufázové zatěžování. Pokles ekvivalentního napětí pod hodnotu pro soufázové zatěžování můžeme pozorovat pro některá kritéria kritické roviny pro nízké fázové posuvy pro velmi houževnatý materiál. Pokles

6.2 Validace na experimentálních datech

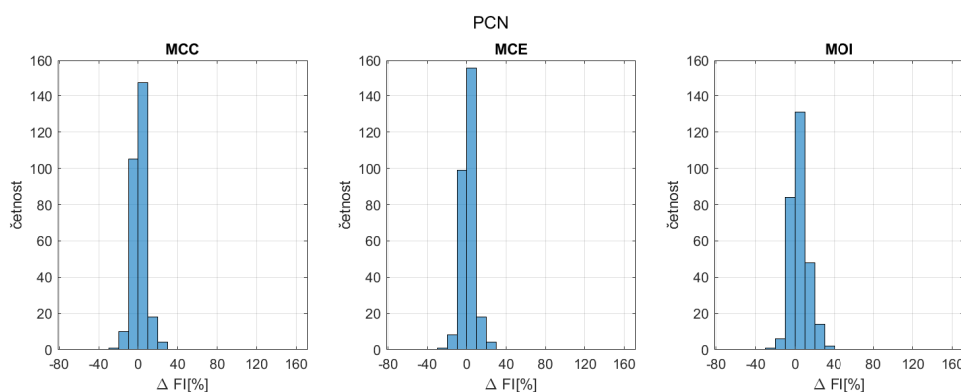
Analýza závislosti ekvivalentního napětí na fázovém posuvu porovnává výstupy kritérií pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty, ale nepopisuje výsledky které metody se více blíží reálnému chování materiálu. Pro validaci metod zpracování zátěžné cesty byla použita experimentální data z databáze FatLim [8]. Tato databáze obsahuje 286 případů, ve kterých byla experimentálně zjištěna únavová pevnost při multiaxiálním zatěžování. V databázi jsou uvedeny amplitudy, střední hodnoty a fázové posuvy jednotlivých složek tenzoru napětí daného rovnicí (3.2), pro jejichž kombinaci byla zjištěna únavová pevnost. Pro takto popsané kombinované namáhání byla pro jednotlivé případy vyhodnocována hodnota parametru ΔFI , jehož význam je popsán v kapitole 5.

Vliv způsobu zpracování zátěžné cesty byl vyhodnocován pro kritéria popsaná v kapitole 4. Kritéria Anesovo, Khalijino a Wangovo nebyla použita z toho důvodu, že jejich výstupy nezávisí na způsobu zpracování zátěžné cesty. Margetinovo kritérium nebylo použito z toho důvodu, že materiálové parametry popisující SN křivky pro čistý tah a čistou torzi jsou k dispozici pouze pro některé případy namáhání z databáze FatLim a není proto možné provést porovnání s ostatními kritérii v rámci celého datasetu. Z nových kritérií tedy bylo použito pouze Böhmeho kritérium, starší kritéria byla použita všechna.

Výsledky analýzy jsou prezentovány v sekcích 6.2.1-6.2.3 a výsledky jsou popsány a zhodnoceny v sekci 6.2.4.

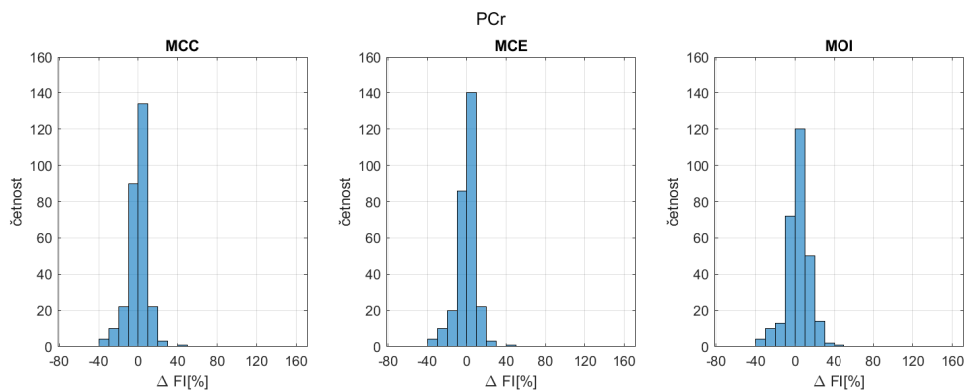
6.2.1 Porovnání způsobů zpracování zátěžné cesty pro experimentální data z databáze FatLim

Pro 286 případů z databáze FatLim byl vyhodnocován parametr ΔFI pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty a pro různá kritéria. Porovnání rozložení parametru ΔFI pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty je pro jednotlivá kritéria znázorněn na obrázcích 6.14-6.25. V tabulce 6.1 jsou shrnuty statistické parametry popisující rozložení parametru ΔFI pomocí jeho střední hodnoty, směrodatné odchylky, maximální a minimální hodnoty.

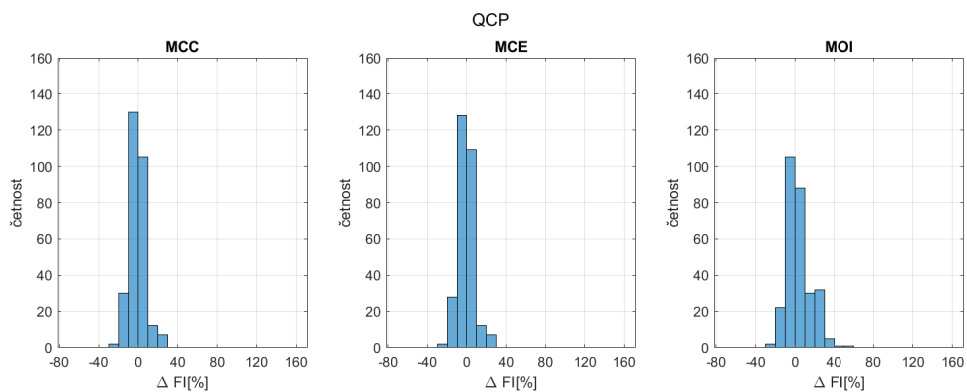


Obrázek 6.14: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium PCN pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.

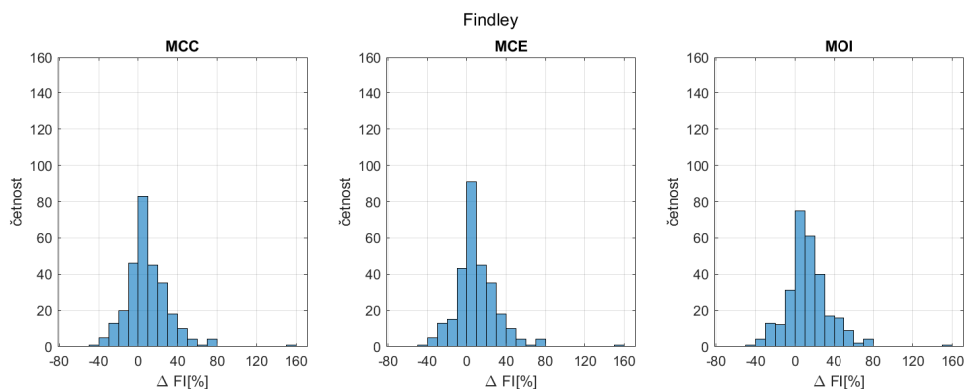
6. Analýza dopadu způsobu zpracování zátěžné cesty na kritéria únavové pevnosti



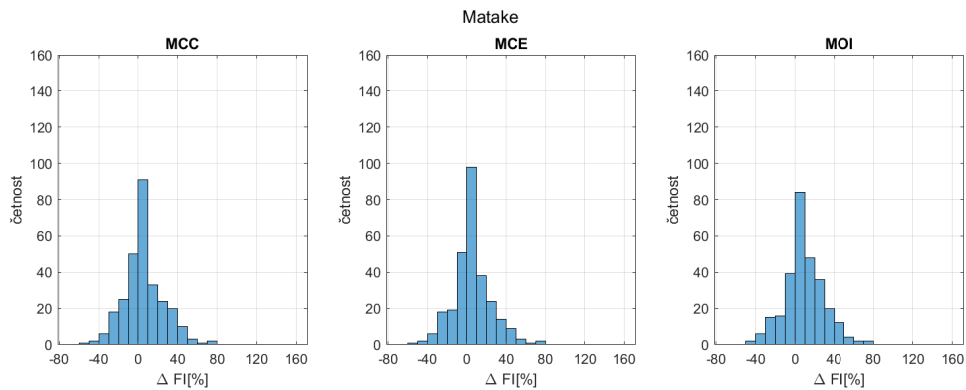
Obrázek 6.15: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium PCr pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



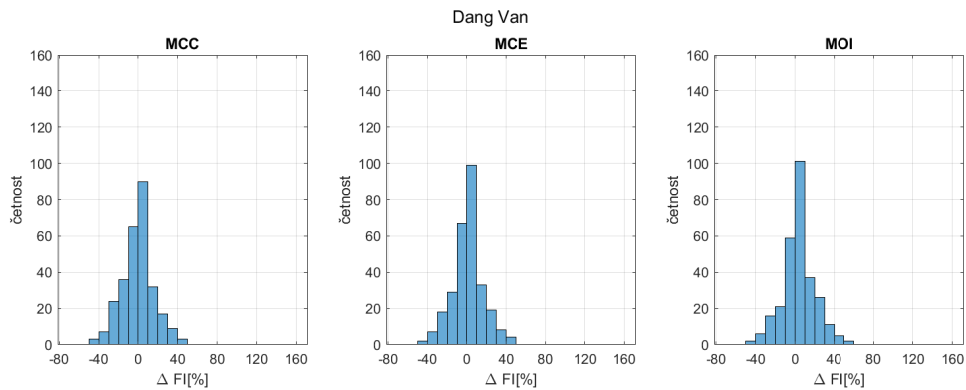
Obrázek 6.16: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium QCP pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



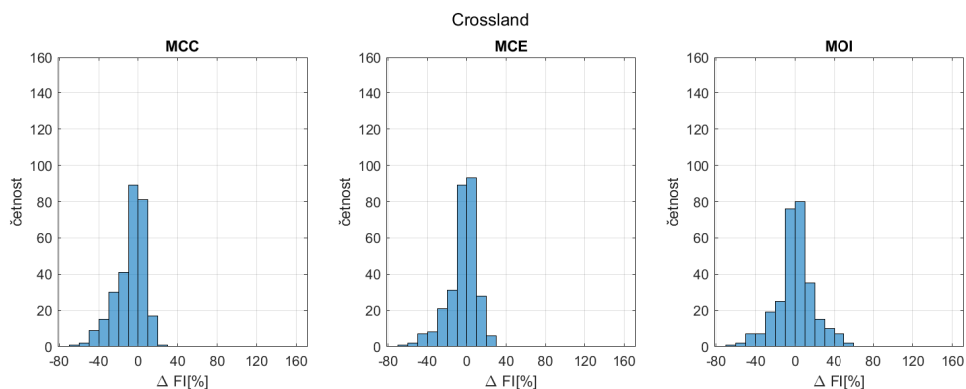
Obrázek 6.17: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Findleyovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



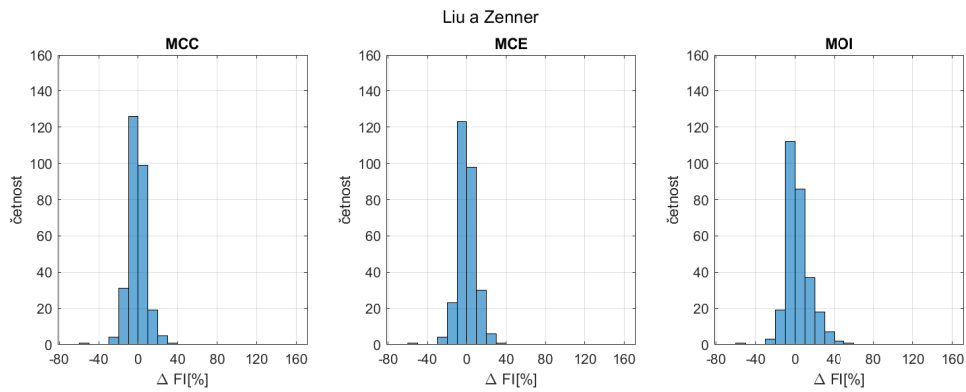
Obrázek 6.18: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Matakého kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



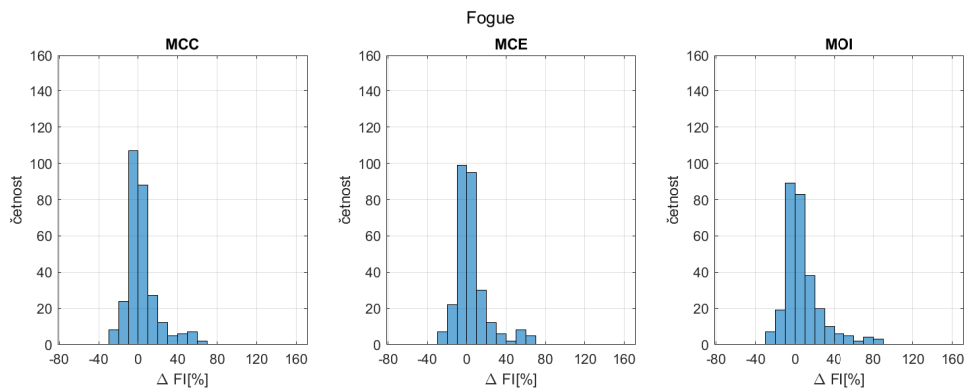
Obrázek 6.19: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Dang Vanovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



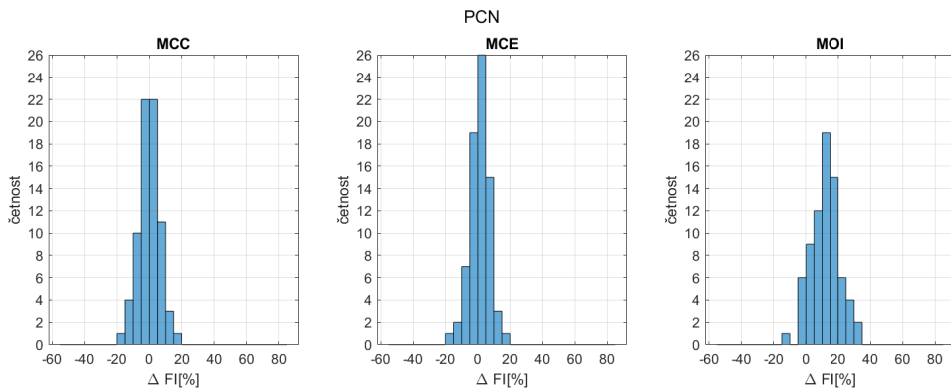
Obrázek 6.20: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Crosslandovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



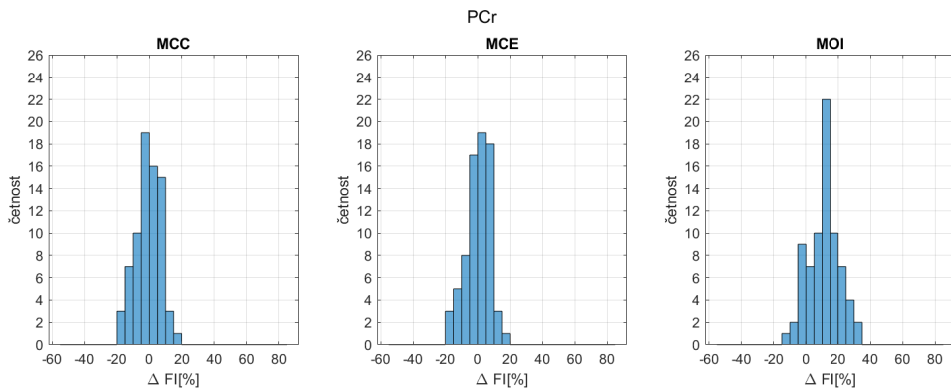
Obrázek 6.24: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Liuovo a Zennerovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



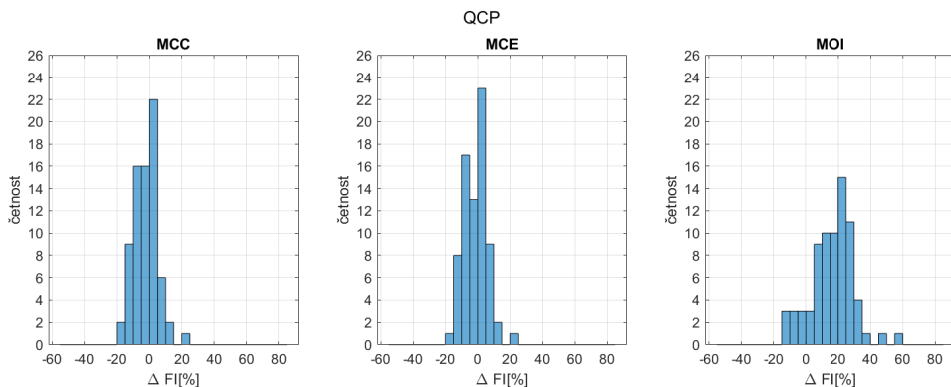
Obrázek 6.25: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Fogueovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly všechny případy zatěžování z databáze FatLim.



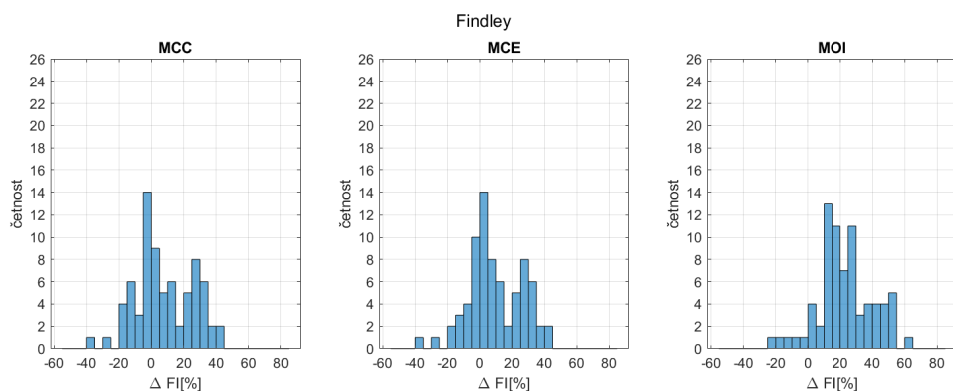
Obrázek 6.26: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium PCN pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



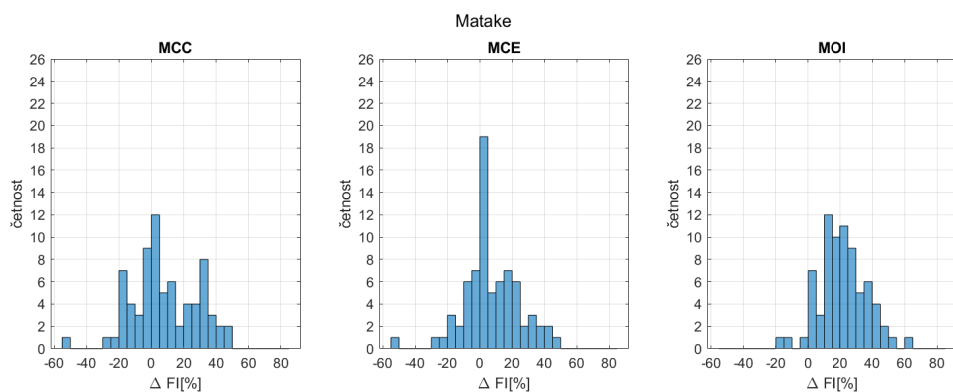
Obrázek 6.27: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium PCr pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



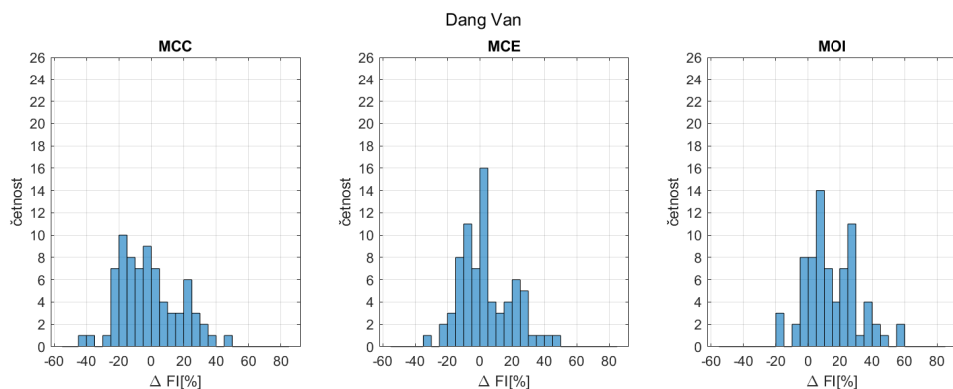
Obrázek 6.28: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium QCP pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



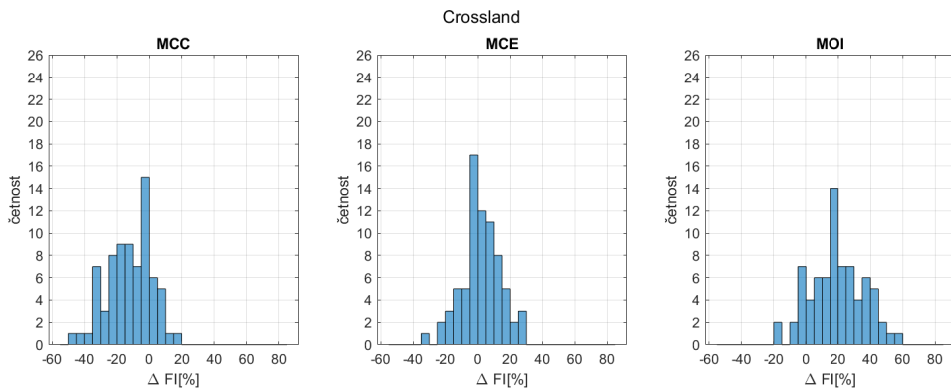
Obrázek 6.29: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Findleyovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



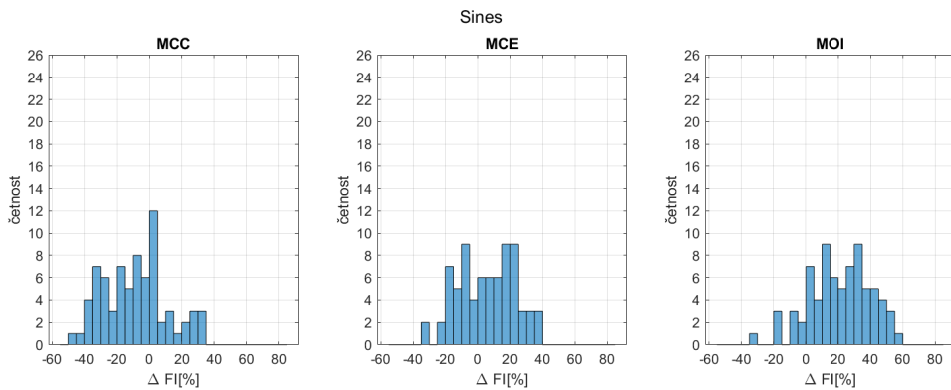
Obrázek 6.30: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Matakeho kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



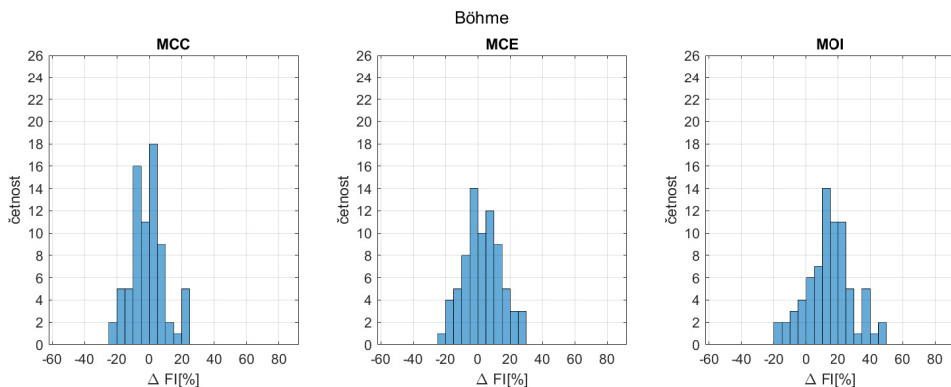
Obrázek 6.31: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Dang Vanovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



Obrázek 6.32: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Crosslandovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



Obrázek 6.33: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Sinesovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.



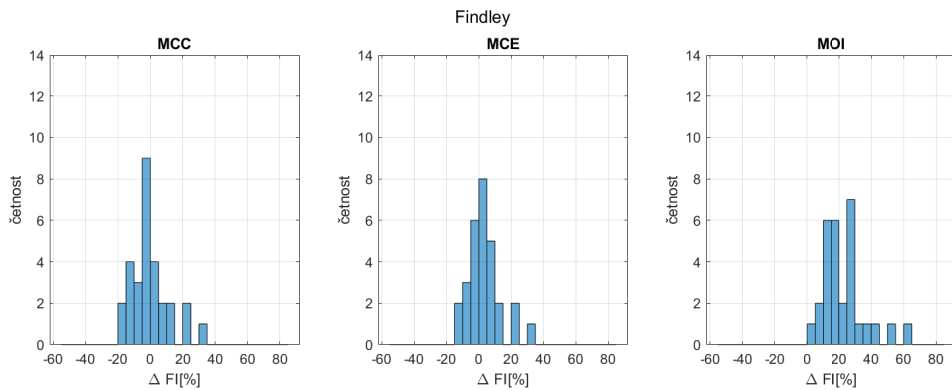
Obrázek 6.34: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Böhmeho kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.

	PCN MCC	PCN MCE	PCN MOI	PCr MCC	PCr MCE	PCr MOI	QCP MCC	QCP MCE	QCP MOI
průměr	-0.2%	1.1%	12.3%	-0.8%	0.4%	11.2%	-2.5%	-1.7%	16.3%
sm. odchylka	6.4%	6.0%	8.9%	7.4%	7.1%	9.5%	7.1%	7.2%	13.4%
maximum	16.3%	16.3%	33.1%	16.3%	16.3%	33.1%	20.3%	20.3%	55.6%
minimum	-18.0%	-18.0%	-10.8%	-17.8%	-17.8%	-12.1%	-17.4%	-17.4%	-14.4%
	FIN MCC	FIN MCE	FIN MOI	MAT MCC	MAT MCE	MAT MOI	DV MCC	DV MCE	DV MOI
průměr	7.8%	9.3%	23.2%	8.5%	7.3%	21.7%	-1.5%	3.8%	14.7%
sm. odchylka	17.7%	16.6%	16.9%	20.0%	17.3%	14.7%	18.5%	16.2%	16.2%
maximum	41.8%	41.8%	62.4%	46.9%	46.9%	61.1%	46.9%	46.9%	59.1%
minimum	-39.8%	-39.8%	-23.7%	-51.3%	-51.3%	-18.4%	-40.1%	-30.5%	-19.9%
	CRO MCC	CRO MCE	CRO MOI	SIN MCC	SIN MCE	SIN MOI	BO MCC	BO MCE	BO MOI
průměr	-12.3%	2.2%	19.0%	-8.7%	5.7%	20.9%	-1.0%	3.0%	15.1%
sm. odchylka	13.2%	12.1%	16.5%	19.6%	17.2%	18.9%	10.3%	11.3%	14.4%
maximum	17.7%	29.8%	55.8%	33.6%	38.8%	55.3%	21.3%	26.6%	50.0%
minimum	-47.4%	-33.0%	-19.5%	-48.8%	-32.2%	-31.0%	-23.8%	-23.4%	-19.6%
	PIN MCC	PIN MCE	PIN MOI	LZ MCC	LZ MCE	LZ MOI	FOG MCC	FOG MCE	FOG MOI
průměr	2.9%	6.0%	14.4%	-2.5%	1.1%	13.6%	6.7%	10.7%	22.0%
sm. odchylka	7.0%	7.9%	10.0%	11.2%	12.4%	16.6%	17.0%	18.6%	22.5%
maximum	22.8%	25.4%	37.1%	23.0%	27.5%	52.2%	53.1%	63.4%	84.3%
minimum	-10.0%	-9.8%	-9.8%	-54.6%	-54.6%	-54.6%	-22.6%	-19.9%	-19.2%

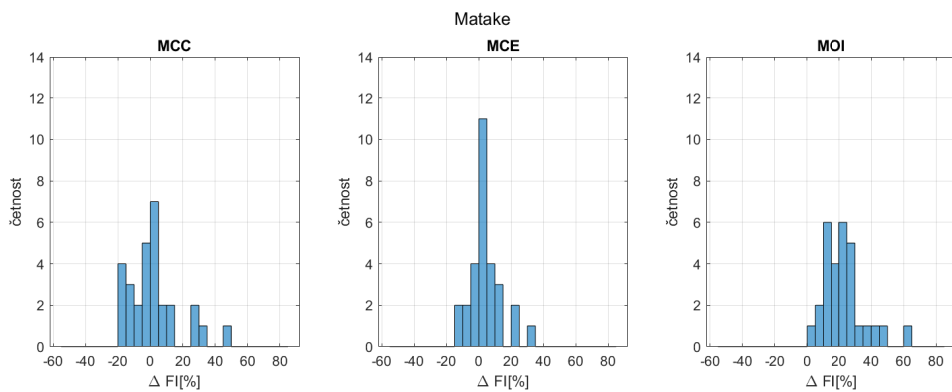
Tabulka 6.2: Výsledky porovnání experimentálních a vypočtených hodnot pro různé metody zpracování zátěžné cesty vyjádřené pomocí statistických parametrů popisujících rozložení parametru ΔFI . Použity byly případy mimofázového zatěžování z databáze FatLim.

6.2.3 Porovnání způsobů zpracování zátěžné cesty pro případy mimofázového namáhání bez středního napětí

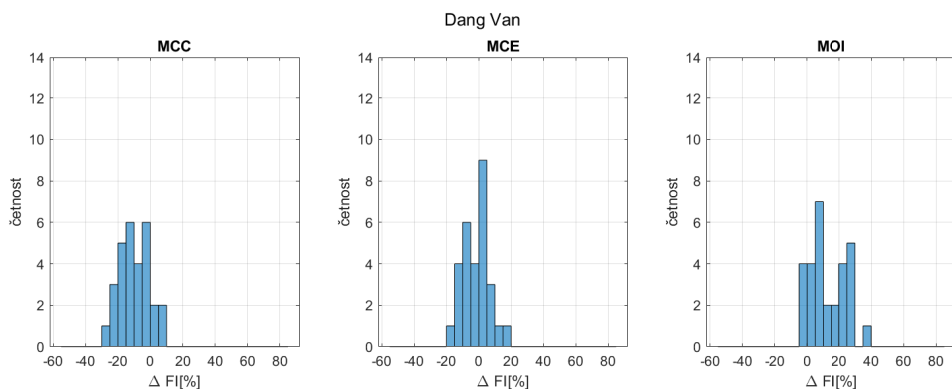
Pro odlišení vlivu střední hodnoty napětí od vlivu metody zpracování zátěžné cesty bylo z mimofázových případů v databázi FatLim vybráno 29 případů, pro které zátěžné kanály mají nulovou střední složku. Histogramy rozložení ΔFI jsou pro tyto případy znázorněny na obrázcích 6.38-6.49. Statistické parametry jsou pro tyto případy vypsány v tabulce 6.3.



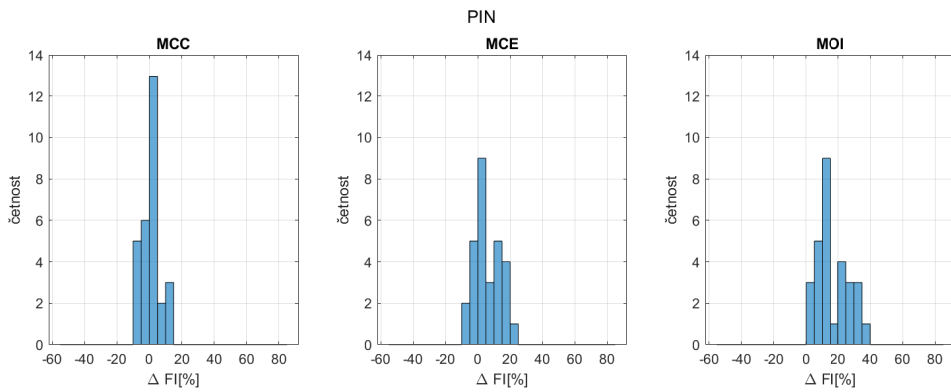
Obrázek 6.41: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Findleyovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.



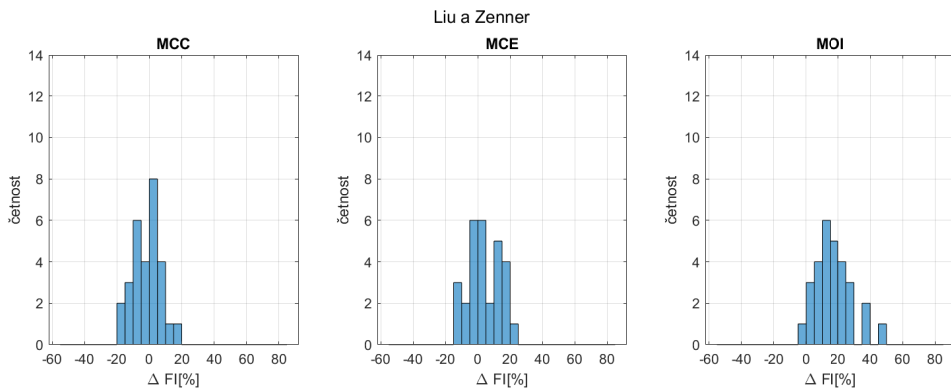
Obrázek 6.42: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Matakaeho kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.



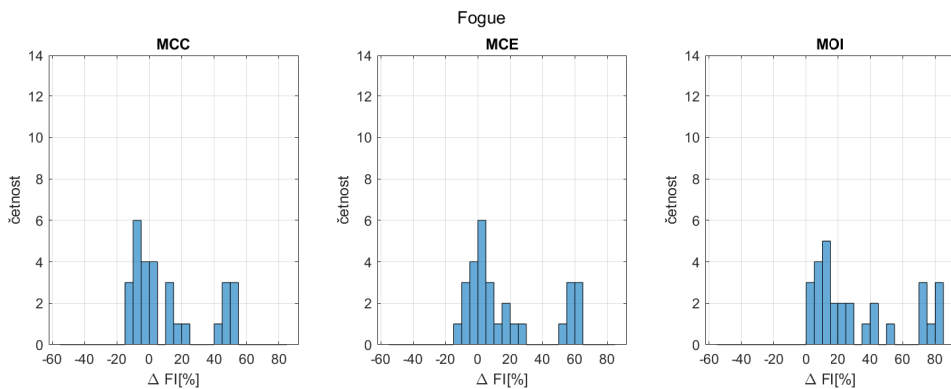
Obrázek 6.43: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Dang Vanovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.



Obrázek 6.47: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro kritérium PIN pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.



Obrázek 6.48: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Liuovo a Zennerovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.



Obrázek 6.49: Histogram zobrazující rozložení relativního rozdílu mezi experimentálními a vypočtenými hodnotami ΔFI pro Fogueovo kritérium pro různé způsoby zpracování zátěžné cesty. Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středních hodnot napětí.

	PCN MCC	PCN MCE	PCN MOI	PCr MCC	PCr MCE	PCr MOI	QCP MCC	QCP MCE	QCP MOI
průměr	-0,7%	2.0%	17.2%	-0.7%	2.0%	17.2%	-1.1%	0.5%	23.0%
sm. odchylka	7.1%	6.2%	8.2%	7.1%	6.2%	8.2%	7.7%	7.9%	11.7%
maximum	16.3%	16.3%	33.1%	16.3%	16.3%	33.1%	20.3%	20.3%	55.6%
minimum	-11.7%	-9.7%	3.7%	-11.7%	-9.7%	3.7%	-12.8%	-12.8%	0.9%
	FIN MCC	FIN MCE	FIN MOI	MAT MCC	MAT MCE	MAT MOI	DV MCC	DV MCE	DV MOI
průměr	-0.4%	3.1%	23.1%	2.2%	4.1%	23.0%	-9.7%	-1.7%	13.1%
sm. odchylka	10.9%	9.4%	13.1%	15.6%	9.7%	12.6%	9.4%	8.3%	10.9%
maximum	30.1%	30.1%	62.4%	46.9%	31.5%	61.1%	7.9%	18.5%	36.4%
minimum	-17.7%	-12.6%	4.5%	-19.6%	-12.5%	3.3%	-29.9%	-15.9%	-4.8%
	CRO MCC	CRO MCE	CRO MOI	SIN MCC	SIN MCE	SIN MOI	BO MCC	BO MCE	BO MOI
průměr	-14.3%	5.4%	26.6%	-20.9%	-1.2%	18.5%	-1.2%	3.8%	17.5%
sm. odchylka	8.6%	9.3%	12.5%	13.9%	15.2%	18.7%	8.4%	9.9%	11.3%
maximum	3.2%	27.2%	55.8%	3.8%	23.9%	51.7%	19.4%	20.3%	50.0%
minimum	-30.9%	-10.8%	5.2%	-48.8%	-32.2%	-17.2%	-15.7%	-12.8%	-0.3%
	PIN MCC	PIN MCE	PIN MOI	LZ MCC	LZ MCE	LZ MOI	FOG MCC	FOG MCE	FOG MOI
průměr	0.8%	5.9%	16.3%	-1.2%	3.8%	17.5%	11.7%	17.0%	32.4%
sm. odchylka	5.5%	8.2%	9.7%	8.4%	9.9%	11.3%	22.7%	24.8%	28.2%
maximum	14.2%	21.9%	35.7%	19.4%	20.3%	50.0%	53.1%	63.4%	84.3%
minimum	-10.0%	-6.5%	1.2%	-15.7%	-12.8%	-0.3%	-13.9%	-10.3%	0.0%

Tabulka 6.3: Výsledky porovnání experimentálních a vypočtených hodnot pro různé metody zpracování zátěžné cesty vyjádřené pomocí statistických parametrů popisujících rozložení parametru ΔFI . Použity byly případy mimofázového zatěžování bez středního napětí z databáze FatLim.

6.2.4 Zhodnocení dosažených výsledků

Na základě histogramů na obrázcích 6.14-6.49 a tabulek 6.1, 6.2 a 6.3 lze pozorovat, jak se projeví změna způsobu zpracování zátěžné cesty na rozložení koeficientu ΔFI a posoudit, pro která kritéria je vhodné použití které metody.

Pro kritéria kritické roviny, která hledají rovinu s maximálním parametrem poškození (PCN, PCr, QCP a Findley), se projeví změna mezi použitím metody opsané kružnice a opsané elipsy jen pro některé případy. Jedná se o případy mimofázového namáhání pro velmi houževnaté a houževnaté materiály zatížené vyšším poměrem axiálního ku smykovému napětí, což odpovídá výsledkům pozorování z kapitoly 6.1. Pro tyto případy je průměrná hodnota ΔFI při použití metody opsané kružnice záporná a díky použití metody opsané elipsy se tato hodnota přiblíží k 0%. Použití metody opsané elipsy má tedy pozitivní efekt. Toto chování lze pozorovat u případů mimofázového namáhání se středními hodnotami napětí i bez středních hodnot. V rámci celkového datasetu se rozložení hodnot ΔFI příliš nezmění, změny jsou více patrné při použití datasetů, které obsahují pouze mimofázové případy. Použití metody momentu setrvačnosti pro kritéria kritické roviny s maximálním poškozením téměř ve všech případech mimofázového namáhání přináší výrazný posuv ΔFI do konzervativních hodnot. Tuto změnu lze pozorovat na rozložení ΔFI i pro celkový dataset. Hodnoty ΔFI jsou pak rozloženy kolem vysoké střední hodnoty a metoda momentu setrvačnosti se pro tato kritéria jeví jako příliš konzervativní.

Matakeho kritérium je jediné z kritérií, pro které dochází ke snížení střední hodnoty ΔFI vlivem přechodu od metody opsané kružnice k opsané elipse. Pokles hodnot ΔFI se projeví zejména v případech mimofázového namáhání se střední hodnotou namáhání, v případech s nulovým středním napětím se tento trend projeví jen v několika případech a průměrná hodnota ΔFI je pro případy bez středního napětí vyšší pro metodu opsané elipsy. V případech, kdy dochází k poklesu ΔFI , klesá průměrná hodnota z vysoké kladné průměrné hodnoty ΔFI na nižší kladnou hodnotu a použití metody opsané elipsy přináší pozitivní efekt. Pro některé případy ΔFI při použití metody opsané elipsy pro Matakeho kritérium vzroste. Jedná se převážně o případy s vyšším poměrem axiálního ku smykovému napětí. V těchto případech roste průměrná hodnota ΔFI z nízké záporné hodnoty na vyšší zápornou hodnotu a metoda opsané elipsy má opět pozitivní efekt. Na celkovém datasetu se změna rozložení ΔFI projeví jen mírně, výraznější rozdíly jsou patrné pro datasety s mimofázovým zatěžováním. Použití metody momentu setrvačnosti vede na výrazné zvýšení hodnot ΔFI , které bude ve většině případů větší než 0% a metoda momentu setrvačnosti se tak jeví jako příliš konzervativní.

Použití metody opsané elipsy se u Dang Vanova kritéria ve většině případů mimofázového zatěžování projeví nárůstem hodnot ΔFI oproti použití metody opsané kružnice. Změna se neprojeví u případů s nízkým poměrem axiálního ku smykovému napětí. Průměrná hodnota ΔFI se pro celkový dataset a dataset s mimofázovým zatěžováním z mírně záporné hodnoty posune na nízkou kladnou hodnotu a kritérium se stane mírně konzervativním. U případů bez střední hodnoty smykového napětí má metoda opsané elipsy pozitivní efekt protože pro metodu opsané kružnice je kritérium nekonzervativní a díky použití metody opsané elipsy se průměrná hodnota ΔFI přiblíží k 0%. Použití metody momentu setrvačnosti pro Dang Vanovo kritérium opět přináší příliš konzervativní odhady, což se projeví na všech datasetech.

Pro kritéria využívající napěťové invarianty (Crossland a Sines) přináší metoda opsané elipsy výrazné navýšení hodnot ΔFI oproti metodě opsané kružnice. Při použití metody opsané kružnice jsou tato kritéria velmi nekonzervativní a při použití metody opsané elipsy budou hodnoty pro mimofázové namáhání rozloženy kolem nízké kladné průměrné hodnoty ΔFI . Metoda opsané elipsy má tak pro tato kritéria velmi pozitivní efekt. To lze pozorovat pro set s mimofázovým zatěžováním a ještě výrazněji pro případy s nulovými středními napětími. V rámci celkového datasetu zůstává pro Crosslandovo kritérium průměrná hodnota ΔFI záporná. Použití metody momentu setrvačnosti pro tato kritéria vede k dalšímu výraznému zvýšení hodnot ΔFI , které ale už nemá pozitivní efekt, protože vede na příliš konzervativní hodnoty ΔFI . Mírně pozitivní efekt lze pozorovat v rámci celkového datasetu pro Crosslandovo kritérium.

U integrálních kritérií se změna ΔFI při přechodu od metody opsané kružnice k opsané elipse projeví téměř ve všech případech mimofázového namáhání. U Liuova a Zennerova kritéria u jednoho případu dojde k mírnému snížení hodnoty ΔFI a ve většině ostatních případů dojde ke zvýšení hodnoty ΔFI . Změna se nejvíce projeví u velmi houževnatých materiálů s vyšší hodnotou κ . Použití metody opsané elipsy u Liuova a Zennerova kritéria posune střední hodnotu ΔFI pro mimofázové případy z mírně nekonzervativní hodnoty na mírně konzervativní. Pro případy bez středního napětí se efekt použití opsané elipsy u Liuova a Zennerova kritéria jeví spíše negativně. U Böhmeho kritéria lze pozorovat podobné chování jako u Liuova a Zennerova kritéria. U kritéria PIN při použití metody opsané elipsy dochází pro několik případů pro křehké materiály k mírnému poklesu hodnot ΔFI . U většině ostatních případů dochází ke zvýšení hodnot ΔFI , které se opět nejvýrazněji projeví u velmi houževnatých materiálů. Použití metody opsané elipsy vede u kritéria PIN na zvýšení

Kapitola 7

Závěr

Hlavním cílem diplomové práce bylo vyhodnocení dopadu použitého způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy jednotlivých multiaxiálních kritérií a porovnání takto vypočtených únavových životností s experimentálně získanými daty. Dalším úkolem bylo zhodnocení nových únavových metod pomocí porovnání s experimentálními daty a výstupy starších kritérií.

V první kapitole byly definovány parametry historie napětového tenzoru, které byly v dalších částech práce používány jako vstupní hodnoty multiaxiálních únavových kritérií. V další kapitole byly popsány způsoby zpracování zátěžné cesty, pomocí kterých lze z průběhu napětových parametrů určit amplitudu a střední hodnotu smykového a deviatorického napětí. Ve třetí kapitole bylo pro případ namáhání trubkového vzorku zatíženého tahem, krutem a vnitřním přetlakem provedeno odvození průběhu smykového a deviatorického napětí. Bylo ukázáno, že pokud mají složky napětí shodnou frekvenci zatěžování a sinusový průběh, průběh smykového napětí na rovině má tvar elipsy a pro takto odvozený průběh byly odvozeny algebraické vztahy pro výpočet amplitudy a střední hodnoty smykového napětí pomocí metody opsané kružnice a metody opsané elipsy a integrální vztahy pro výpočet těchto parametrů pomocí metody momentu setrvačnosti. Podobně pro průběh deviatorického napětí v Π lžšinově deviatorickém prostoru bylo ukázáno, že průběh deviatorického napětí tvoří elipsu v prostoru E_3 a pro tento průběh byla odvozena amplituda a střední hodnota odmocniny z druhého invariantu deviatorického napětí pomocí metody opsané koule, elipsoidu a metody momentu setrvačnosti. Odvozené vztahy byly dále redukovány pro jednodušší zátěžné podmínky a bylo ukázáno, že pro soufázové zatěžování a pro jednoosé zatěžování se průběh smykového i deviatorického napětí redukuje na úsečku a pro tyto případy používané způsoby zpracování zátěžné cesty dávají shodné amplitudy a střední hodnoty smykového i deviatorického napětí. Ve čtvrté kapitole byla popsána multiaxiální kritéria, pro která byl dále vyhodnocován vliv způsobu zpracování zátěžné cesty. Dále bylo popsáno několik novějších kritérií jejichž funkčnost byla dále posuzována.

Pro jednotlivá únavová kritéria byla provedena algoritmizace pomocí vztahů odvozených v kapitole 3. V kapitole 5 byla vyhodnocována výhodnost použití nových metod v porovnání se staršími kritérii. Porovnáván byl relativní rozdíl mezi výstupy jednotlivých kritérií a únavovými pevnostmi určenými experimentálně. Použita byla data z databáze experimentů FatLim [8]. Z posuzovaných nových kritérií se nejvýhodněji jeví použití Böhmeho kritéria, které vykazuje mírně lepší shodu s experimentálními daty než starší kritérium Liuovo a Zennerovo. Ostatní nová kritéria se oproti starším kritériím jeví spíše nevýhodně hlavně díky špatné shodě s experimenty pro případy s výraznou střední složkou namáhání. Khalijino kritérium má oproti ostatním kritériím výhodu ve výpočtové nenáročnosti a může být použito pro orientační

výpočty, u kterých není vyžadována vysoká přesnost. Wangovo kritérium je oproti ostatním metodám kritické roviny výhodné díky jednoduššímu způsobu nalezení kritické roviny, ale posuzovaná míra shody s experimentálními daty je horší než pro starší kritéria. Margetinovo kritérium vykazuje pro případy bez středního napětí mírně lepší shodu s experimenty než pro Khalijino a Wangovo kritérium ale oproti porovnávaným starším kritériím je tato míra shody horší. Anesovo kritérium bylo vyhodnoceno jako příliš náročné na vstupní materiálové parametry a nebylo dále testováno.

V kapitole 6 byl pozorován dopad způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy multiaxiálních únavových kritérií. V první části kapitoly bylo pozorováno jak se vlivem způsobu zpracování zátěžné cesty mění pro jednotlivá kritéria závislost ekvivalentního napětí na fázovém posuvu. Pro posouzení byly použity tři fiktivní materiály (křehký, houževnatý a velmi houževnatý) a čtyři kombinace axiálního a torzního napětí. Závislost ekvivalentního napětí na fázovém posuvu se zpravidla nejvíce projevila pro velmi houževnatý materiál namáhaný vyšším poměrem axiálního ku torznímu napětí. Při použití metody opsané kružnice ekvivalentní napětí ve většině případů s fázovým posuvem klesalo. Při použití metody opsané elipsy došlo ve většině případů k nárůstu ekvivalentního napětí oproti metodě opsané kružnice, což se nejvíce projevilo u velmi houževnatého a houževnatého materiálu s vyšším poměrem axiálního ku torznímu napětí. U Crosslandova, Sinesova a Liuova a Zennerova kritéria přestalo při použití metody opsané elipsy ekvivalentní napětí záviset na fázovém posuvu. Výstupy Wangova kritéria na způsobu zpracování zátěžné cesty nezávisí. Při použití metody momentu setrvačnosti došlo k výraznému nárůstu ekvivalentního napětí, které ve většině případů s fázovým posuvem rostlo a bylo tedy pro mimofázové namáhání vyšší než pro soufázové.

Ve druhé části kapitoly 6 byla pro jednotlivé způsoby zpracování zátěžné cesty provedena validace na experimentálních datech. Použita byla experimentální data z databáze FatLim [8] a posuzován byl relativní rozdíl mezi vypočtenými a experimentálně zjištěnými únavovými pevnostmi. Bylo ukázáno, že metoda opsané elipsy se jeví výhodně pro kritéria kritické roviny a pro kritéria využívající napěťové invarianty. Pro integrální kritéria se jeví výhodněji metoda opsané kružnice. Metoda momentu setrvačnosti přináší příliš konzervativní výsledky. Navíc je tato metoda oproti metodě opsané kružnice a opsané elipsy při použití vztahů odvozených v kapitole 3 výpočtově náročnější, protože je místo algebraických vztahů nutné použít vztahy integrální. Metoda momentu setrvačnosti z těchto důvodů není příliš vhodná pro použití pro namáhání popsané v kapitole 3. Nicméně je možné, že se tato metoda ukáže výhodnější oproti metodě opsané kružnice a opsané elipsy pro obecnější namáhání, pro které má zátěžná cesta obecnější tvar než elipsu, protože metoda momentu setrvačnosti používá vlastnosti celé zátěžné křivky a ne jen vlastnosti opsaného obrazce. Pro obecnější namáhání by také bylo možné použít další způsoby zpracování zátěžné cesty popsané v kapitole 2. Vyhodnocení dopadu způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy multiaxiálních únavových kritérií pro obecnější zatěžování například s nesinusovým průběhem a rozdílnými frekvencemi zátěžných kanálů je vhodným předmětem dalšího výzkumu v této oblasti.

Přínosem diplomové práce je odvození analytických vztahů pro amplitudy a střední hodnoty napěťových parametrů, které nebylo pro použité zatěžování dosud provedeno. Dalším přínosem je provedení analýzy nových kritérií a jejich zhodnocení na základě porovnání s experimentálními daty. Přínosem je také zhodnocení vlivu způsobu zpracování zátěžné cesty na výstupy multiaxiálních kritérií a posouzení vhodnosti jednotlivých metod pro různá kritéria. Výsledky práce byly publikovány v [31].



Literatura

- [1] I. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, and A. Bernasconi, “A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue for metals,” *International Journal of Fatigue*, vol. 19, pp. 219–235, 1997.
- [2] M. Źyczkowski and T. Kurtyka, “Generalized Ilyushin’s spaces for a more adequate description of plastic hardening,” *Acta Mechanica*, vol. 52, pp. 1–13, 1984.
- [3] M. Meggiolaro and J. Castro, “An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories – part i: Enclosing surface methods,” *International Journal of Fatigue*, vol. 42, p. 217–226, 2012.
- [4] M. Freitas, B. Li, and J. L. T. Santos, “A numerical approach for high-cycle fatigue life prediction under multiaxial loading,” *ASTM Special Technical Publication*, pp. 139–156, 2000.
- [5] N. Zouain, E. Mamiya, and F. Comes, “Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 25, pp. 51–71, 2006.
- [6] E. Mamiya, J. Araújo, and F. Castro, “Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue,” *International Journal of Fatigue*, vol. 31, pp. 1144–1153, 2009.
- [7] M. Meggiolaro, J. Castro, and H. Wu, “Generalization of the moment of inertia method to estimate equivalent amplitudes for simplifying the analysis of arbitrary non-proportional multiaxial stress or strain histories,” *Acta Mechanica*, vol. 227, 2016.
- [8] J. Papuga, I. Vízková, M. Nesládek, and Trubelová, “Validation data set for testing the criteria for multiaxial fatigue strength estimation,” *Fatigue Fracture of Engineering Materials Structures*, vol. 41, pp. 2259–2271, 2018.
- [9] E. Mamiya and J. Araújo, “Fatigue limit under multiaxial loadings: On the definition of the equivalent shear stress,” *Mechanics Research Communications*, vol. 29, pp. 141–151, 2002.
- [10] J. Papuga, “A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading,” *International Journal of Fatigue*, vol. 33, pp. 153–165, 2011.

- [11] W. N. Findley, J. J. Coleman, and B. C. Hanley, "Theory for combined bending and torsion fatigue data for SAE 4340 steel.," in *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals.*, pp. 150–157, Institution of Mechanical Engineers, 1956.
- [12] T. Mataka, "An explanation on fatigue limit under combined stress," *Bull JSME*, vol. 20, pp. 257–263, 1977.
- [13] J. Papuga, "Improvements of two criteria for multiaxial fatigue limit evaluation," *Bulletin of Applied Mechanics*, pp. 80–86, 2010.
- [14] J. Papuga and R. Halama, "Mean stress effect in multiaxial fatigue limit criteria," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 89, pp. 823–834, 2019.
- [15] J. Papuga and M. Ružička, "Two new multiaxial criteria for high cycle fatigue computation," *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 58–66, 2008.
- [16] K. Dang Van, "Sur la résistance à la fatigue des métaux," *Sciences et Techniques de l'Armement*, vol. 47, pp. 647–722, 1973.
- [17] M. Fogue, *Critère de fatigue a longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase*. Phd. thesis, 1987.
- [18] J. Papuga, L. Suchý, and M. Ružička, "Mean shear stress effect built into the multiaxial fatigue strength estimation method of an integral type," *MATEC Web of Conferences*, vol. 300, p. 16010, 2019.
- [19] H. Zenner, A. Simbürger, and J. Liu, "On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading," *International Journal of Fatigue*, vol. 22, pp. 137–145, 2000.
- [20] G. Sines, "Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stresses," Technical Note NACA-TN-3495, NACA, 1955.
- [21] B. Crossland, "Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel," in *Proc Int Conf on Fatigue of Metals*, pp. 138–149, Institution of Mechanical Engineers, 1956.
- [22] X.-W. Wang, D.-G. Shang, Y.-J. Sun, and H. Chen, "Multiaxial high-cycle fatigue life prediction model considering mean shear stress effect under constant and variable amplitude loading," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 96, pp. 676–687, 2017.
- [23] V. Chmelko and M. Margetin, "The performance of selected multiaxial criteria under tension/torsion loading conditions," *International Journal of Fatigue*, vol. 135, p. 105532, 2020.
- [24] L. Khalij, E. Pagnacco, and R. Troian, "Fatigue criterion improvement of Gough and Nishihara Kawamoto to predict the fatigue damage of a wide range of metallic materials," pp. 137–150, 2017.
- [25] H. J. Gough, H. V. Pollard, and W. J. Clenshaw, *Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses*. London: His Majesty's Stationery Office, 1951.

- [26] T. Nishihara and M. Kawamoto, “The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference,” in *Memoirs College Eng.*, pp. 85–112, Kyoto Imperial University, 1945.
- [27] V. Anes, L. Reis, and M. Freitas, “The damage scale concept and the critical plane approach,” *Fatigue Fracture of Engineering Materials Structures*, vol. 40, pp. 1240–1250, 2017.
- [28] V. Anes, L. Reis, B. Li, M. Fonte, and M. Freitas, “New approach for analysis of complex multiaxial loading paths,” *International Journal of Fatigue*, vol. 62, p. 21–33, 2014.
- [29] A. S. Böhme, A. Vinogradov, J. Papuga, and F. Berto, “Multiaxial fatigue in carburized bevel gears,” *submitted to Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2020.
- [30] J. Papuga, M. Nesládek, and J. Jurenka, “Differences in the response to in-phase and out-of-phase multiaxial high-cycle fatigue loading,” *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 13, pp. 163–183, 2019.
- [31] J. Papuga, E. Cízová, and A. Karolczuk, “Validating the methods to process the stress path in multiaxial high-cycle fatigue criteria,” *Materials*, vol. 14, p. 206, 2021.

Příloha A

Seznam použitých symbolů, zkratek a indexů

Použité symboly

Symbol	Význam
a_i	Velikosti poloos opsaného hyperelipsoidu
a, b, c, d	Materiálové parametry multiaxiálních únavových kritérií
$a - i$	Parametry regresního modelu kritéria SSF
$a(r), r, \gamma_1(r), \gamma_2(r)$	Materiálové parametry Khalijina kritéria
A, b	Parametry jednoosé smykové SN křivky kritéria SSF
b_i	Poloviny délek stran opsaného obdélníkového hranolu
C	Smykové napětí na rovině Δ
f_0	Únavová pevnost v míjivém tahu
f_{-1}	Únavová pevnost ve střídavém tahu
f, g, p, g	Funkce popisující průběh smykového napětí
FI	Koeficient vyjadřující poměr mezi levou a pravou stranou kritéria
I_p	Polární moment setrvačnosti
$\sqrt{J_2}$	Odmocnina z druhého invariantu deviatorického napětí
\vec{l}, \vec{k}	Jednotkové vektory ve směru souřadných os l a k
\vec{n}	Jednotkový normálový vektor k rovině Δ
(n, l, k)	Souřadnice pro popis průběhu smykového napětí na rovině Δ
N	Normálové napětí na rovině Δ
P	Perioda zatěžování
p_C	Délka křivky Ψ
P_C	Parametrizace křivky Ψ
\dot{P}_C	Derivace parametrizace křivky Ψ
p_S	Délka křivky Φ
P_S	Parametrizace křivky Φ
\dot{P}_S	Derivace parametrizace křivky Φ
r_σ	Poměr mezi amplitudami axiální a torzní složky σ
s	Tenzor deviatorického napětí
$S_{1s}, S_{1c}, S_{2s}, S_{2c}, S_{3s}, S_{3c}$	Funkce popisující průběh deviatorického napětí
\vec{S}	Vektor deviatorického napětí
\vec{S}_n	Vektor napětí působící na rovině Δ
t	Čas

LC	Metoda nejdelší tětivy
LZ	Liuovo a Zennerovo kritérium
MA	Margetinovo kritérium
MAT	Matakeho kritérium
MCC	Metoda nejmenší opsané kružnice (koule)
MCE	Metoda nejmenší opsané elipsy (elipsoidu)
MFE	Metoda opsané elipsy (elipsoidu) s nejmenší F-normou
MOI	Metoda momentu setrvačnosti
MPH	Metoda největšího opsaného obdélníka (kvádru)
MPHCC	Metoda opsaného obdélníka (kvádru) s obsaženými tětivami
MPHLC	Metoda opsaného obdélníka (kvádru) s nejdelší tětivou
MVE	Metoda opsané elipsy (elipsoidu) s nejmenším objemem
MVPH	Metoda opsaného obdélníka (kvádru) s největším objemem
OOP	Mimofázové namáhání
PCN	Papugovo nové kritérium kritické roviny
PCr	Papugovo kritérium kritické roviny
PIN	Papugovo integrální kritérium
PMOI	Polární moment setrvačnosti
QCP	Kvadratické kritérium kritické roviny
SIN	Sinesovo kritérium
VH	Velmi houževnatý materiál
WA	Wangovo kritérium

Použité indexy

Index	Význam
a	Amplituda
BO	Böhmeho kritérium
C	Crosslandovo kritérium
DV	Dang Vanovo kritérium
F	Findleyovo kritérium
FOG	Fogueovo kritérium
LZ	Liuovo a Zennerovo kritérium
m	Střední hodnota
M	Matakeho kritérium
max	maximální hodnota
PC	Kritérium PCr
PCN	Kritérium PCN
PN	Kritérium PIN
Q	Kritérium QCP
r	radiální směr
S	Sinesovo kritérium
t	tangenciální směr
x	axiální směr