

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V  
PRAZE

Fakulta strojní - Ústav přístrojové a řídicí  
techniky



DIPLOMOVÁ PRÁCE

# Návrh řízení portálového jeřábu s potlačením kyvů břemene

Portal crane control design with load swing suppression

Autor:	Bc. Michal Pála
Vedoucí práce:	Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.
Akademický rok:	2021

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Pála** Jméno: **Michal** Osobní číslo: **456379**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav přístrojové a řídicí techniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Přístrojová a řídicí technika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Návrh řízení portálového jeřábu s potlačením kyvů břemene**

Název diplomové práce anglicky:

**Portal crane control design with load swing suppression**

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši na téma metod tlumení kyvů zavěšeného břemene v manipulačních aplikacích.
2. Sestavte matematický model laboratorní soustavy modelu portálového jeřábu a identifikujte parametry reálné soustavy.
3. Pro daný systém navrhnete vhodné schéma řízení zajišťující potlačení kyvu zavěšeného břemene a kvantitativně ho porovnejte s některou z konvenčních metod návrhu řízení (např. PID).
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam doporučené literatury:

- [1] BARTOLINI, Giorgio; PISANO, Alessandro; USAI, Elio. Second-order sliding-mode control of container cranes. Automatica, 2002, 38.10: 1783-1790.
- [2] PISANO, Alessandro; SCODINA, Stefano; USAI, Elio. Load swing suppression in the 3-dimensional overhead crane via second-order sliding-modes. In: 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). IEEE, 2010. p. 452-457.
- [3] LEE, He-Hoon; CHO, Sung-Kun. A new fuzzy-logic anti-swing control for industrial three-dimensional overhead cranes. In: Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164). IEEE, 2001. p. 2956-2961.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D., U12110.3**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **30.10.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **20.01.2021**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

### **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat Ing. Jaroslavu Buškovi, Ph.D. za jeho ochotu a čas, který mi věnoval ve spojení s řešením této diplomové práce. Dále bych rád zmínil své rodiče, díky nimž jsem mohl celé studium absolvovat a v neposlední řadě bych chtěl také poděkovat škole, která mi poskytla nadstandartní možnosti vzdělávání v oblastech techniky.

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT  
č. SGS20/159/OHK2/3T/12.

Název práce: Návrh řízení portálového jeřábu s potlačením kyvů břemene

Autor: Michal Pála

Vedoucí závěrečné práce: Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.

Abstrakt: Používání jeřábů v oblastech logistiky je dnes častým řešením přemísťování těžkých nákladů. Značnou nevýhodou jejich používání je přirozený kyv břemene, ke kterému při pohybu dochází. To mimo jiné prodlužuje časovou náročnost procesu či zvyšuje rizika nebezpečí. Tomu lze předejít navrhnutím vhodného řídicího systému. Tato diplomová práce je zaměřena na řízení portálového jeřábu. Cílem bylo navrhnout nelineární model soustavy včetně identifikace jeho parametrů, tento model pak následně linearizovat a navrhnout řízení jeřábu tak, aby docházelo k potlačení kyvů břemene. Nelineární model byl navrhnut pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu. Jeho linearizace probíhala s použitím stavového popisu. Při návrhu řízení byl aplikován PID regulátor pro regulaci polohy jeřábové kočky a kolejnice v kombinaci s tvarovači vstupního signálu (tzv. Input shaper) ZV a DZV. Tvarovače byly aplikovány dvěma způsoby - jako filtr referenčního signálu či jako inverzní tvarovače. Naměřené průběhy byly vyhodnoceny pomocí integrálního kritéria ISE, času ustálení a maximálního výkyvu břemene. V závěru se nachází srovnání použitých metod s jejichž pomocí došlo k eliminaci kyvu břemene dle kritéria ISE až o 96,91 % oproti zapojení bez tvarovače signálu.

Klíčová slova: Modelování, řízení, tvarovače vstupního signálu, inverzní tvarovače signálu, portálový jeřáb, potlačení kyvů břemene

The use of cranes in logistics is nowadays a common way of transferring heavy loads. A significant disadvantage of their use is the natural sway, which occurs when it's moving. This, among other things, extends the time required for the process or increases the risks of danger. This can be determined by designing a suitable control system. This diploma thesis is focused on the control of a gantry crane. The aim was to design a nonlinear model of the system, including the identification of its parameters, then linearize this model and design the control of crane so that the load oscillations are being suppressed. The nonlinear model was designed using Lagrange equations. Its linearization is made using a state space theory. During the design of the control, a PID controller was applied for controlling the positions of the crane trolley and crane rail applied in combination with the input signal shapers ZV and DZV. The shapers were applied in two ways - as a reference signal filter or as inverse shapers. The measurements were evaluated using ISE time integral performance criteria, settling time and maximum angle load swing. In the end of this thesis is a comparison of the used methods that helped to eliminate load sway by up to 96,91 % according to ISE time integral performance criteria compared to the control without a signal shaper.

Keywords: Gantry crane, portal crane, control design, input shaping, inverse input shaping, load swing suppression

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V ..... dne .....

Podpis autora .....

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Portálové jeřáby</b>	<b>2</b>
1.1 Modelování portálových jeřábů . . . . .	2
1.2 Řízení portálových jeřábů . . . . .	2
1.2.1 Řízení v otevřené smyčce . . . . .	3
1.2.2 Zpětnovazební řízení . . . . .	3
1.3 Portálový jeřáb INTECO . . . . .	4
<b>2 Modelování</b>	<b>5</b>
2.1 Popis soustavy . . . . .	5
2.2 Parametry modelu portálového jeřábu . . . . .	5
2.3 Nelineární model portálového jeřábu . . . . .	7
2.3.1 Návrh nelineárního modelu . . . . .	7
2.3.2 Ověření správnosti nelineárního modelu . . . . .	9
2.4 Lineární model . . . . .	12
2.4.1 Návrh lineárního modelu . . . . .	12
2.5 Analýza stability v rovnovážných bodech . . . . .	15
2.5.1 Řiditelnost soustavy . . . . .	16
2.5.2 Pozorovatelnost soustavy . . . . .	16
2.6 Porovnání chování nelineárního a lineárního modelu . . . . .	16
<b>3 Řízení</b>	<b>19</b>
3.1 Zpětnovazební řízení . . . . .	20
3.1.1 Regulační obvod . . . . .	20
3.1.2 PID regulátor . . . . .	20
3.1.3 Stavové řízení . . . . .	21
3.2 Tvarovače signálu (Input shaping) . . . . .	24
3.2.1 Tlumení $\xi$ a netlumená frekvence $\omega$ lin. modelu . . . . .	24
3.2.2 Architektura zapojení tvarovačů vstupního signálu . . . . .	25
3.2.3 Tvarovač Zero Vibration (ZV) . . . . .	26
3.2.4 Tvarovač Zero Vibration with distributed Delay (ZVD) . . . . .	28
3.2.5 Vykreslení pólů a nul tvarovače a dílčí odezvy systému . . . . .	29
3.3 Posouzení kvality regulace . . . . .	30

3.3.1	Integrální kritéria jakosti . . . . .	30
3.3.2	Zvolení vhodného integrálního kritéria . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Experimentální část</b>	<b>32</b>
4.1	Skutečná soustava portálového jeřábu INTECO . . . . .	32
4.1.1	Ovládání jeřábu . . . . .	32
4.1.2	Pásmo necitlivosti . . . . .	32
4.1.3	Zjištění zbývajících parametrů . . . . .	33
4.1.4	Porovnání navržených modelů s jeřábem INTECO . . . . .	34
4.1.5	Maximální rychlost jeřábu oproti referenčním z tvarovačů . . .	35
4.1.6	Tlumení kyvu břemene pomocí P regulátoru . . . . .	36
4.1.7	Aplikace LQR regulátoru . . . . .	36
4.2	Aplikace tvarovače ZV a invertovaného ZV na reálné soustavě . . .	38
4.2.1	Aplikace tvarovačů ZV ve směru $x$ . . . . .	38
4.2.2	Aplikace tvarovačů ZV ve směru $y$ . . . . .	39
4.3	Aplikace tvarovače ZVD a invertovaného ZVD na reálné soustavě . .	41
4.3.1	Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $x$ . . . . .	41
4.3.2	Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $y$ . . . . .	42
4.3.3	Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $x$ i $y$ . . . . .	43
4.4	ZVD s upravenými parametry . . . . .	43
4.4.1	ZVD s upravenými parametry ve směru $x$ . . . . .	44
4.4.2	ZVD s upravenými parametry ve směru $y$ . . . . .	45
4.4.3	ZVD s upravenými parametry ve směru $x$ i $y$ . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Zhodnocení výsledků</b>	<b>47</b>
	<b>Závěr</b>	<b>50</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>51</b>

# Úvod

Portálové jeřáby jsou v dnešní době hojně využívány pro přemísťování těžkých a velkých nákladů. Značnou nevýhodou jejich používání je přirozený kyv břemene, ke kterému při pohybu dochází. To mimo jiné prodlužuje časovou náročnost procesu či zvyšuje rizika nebezpečí.

Vhodným návrhem řízení lze kyv břemene jeřábu potlačit. Díky matematickým modelům soustavy jsme schopni získat představu o chování skutečného systému. S jejich použitím pak můžeme řízení navrhnout i bez užití reálné soustavy a až poté ho aplikovat. Tím můžeme předejít komplikacím v praxi.

Vzhledem k používání jeřábů v průmyslu a logistice je téma jejich řízení a modelování velmi aktuální. Na toto téma se zaměřují studie a články, které se zabývají řízením jeřábů s důrazem na potlačení kyvu břemene [1], [2], [3], [4], [5]. Zároveň jsou k nalezení práce [7], [8], [9], [10], kde se autoři zaměřují na tvarovače vstupních signálů, které mají v tomto směru řízení velký potenciál. Co se týče výrobců a automatizačních firem, nabízí například řízení jeřábů, jejich vizualizaci, software pro jejich údržbu (záznamy každé údržby a případné upozornění na jejich nesplnění), vzdálené ovládání a přenosy dat, systémy proti zpříčení kolejnice jeřábu nebo kolizí s ostatními jeřáby.

Úvodní kapitola pojednává o způsobech modelování a řízení portálových jeřábů. Kapitola 2 se zabývá tvorbou nelineárního modelu a jeho následnou linearizací v pracovním bodě. V kapitole 3 jsou navrženy různé varianty řízení portálového jeřábu. V experimentální části, tedy kapitole 4, jsou navržena řízení porovnávána na skutečné soustavě portálového jeřábu. Závěrečná kapitola zhodnocuje dosažené výsledky.



# 1 Portálové jeřáby

Ohledně modelování a řízení jeřábů pojednává mnoho studií. Často jsou zaměřeny na potlačení kyvu břemene skrze aplikované teorie. Jiné se soustředí na potlačování vibrací soustav. Kapitola je rozdělena na část ohledně modelování a řízení jeřábů. Řídicí část kapitoly je rozdělena na řízení v otevřené smyčce a zpětnovazební řízení.

## 1.1 Modelování portálových jeřábů

Návrhu nelineárního modelu 3D portálového jeřábu se věnují práce [4], [5], [2] a [3].

Ve zdroji [4] byl vytvořen model 3D portálového jeřábu s rozdílně zakótovanými nezávislými úhly (narozdíl od této práce). Je zde uvažována kinetická energie nákladu včetně rotace. Při mém pokusu o navržení modelu se stejným zavedením úhlů se model nechoval správně. Například při akčním zásahu  $F_x$  je očekáváno, že se úhel  $\theta$  bude kývat (fungovalo správně) a úhel  $\phi$  dosáhne hodnoty  $\phi = 90^\circ$ , což z počátečních podmínek  $\phi = 0^\circ$  nedosáhl.

V práci [5] z talinské univerzity je použit laboratorní model jeřábu od stejného výrobce. Z tohoto zdroje jsem převzal parametry  $m_c$  (hmotnost jeřábové kočky) a  $m_r$  (hmotnost kolejnice), jelikož jsem se tak mohl vyhnout rozebírání úlohy na části. Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  v [5] jsou stejně zavedeny jako zde (jen opačně). Potenciální energie je zde definována jako  $P = mgl$ . Nemění se tedy v závislosti na úhlech  $\alpha$ ,  $\beta$  a tento vztah je konstantní. Zřejmě se jedná o chybu. Model je tvořen také s pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu s pěti nezávislými proměnnými (uvažují i proměnnou délku lana  $L$ ) a třetím vstupem (motor ovládající délku lana  $L$ ). Na práci navazoval návrh řízení pomocí Fuzzy regulátoru.

Práce [3] demonstruje návrh nelineárního modelu a následně navrhuje řízení pomocí fuzzy logiky, kterou potlačuje kyv břemene.

V italské studii [2] navrhují nelineární model portálového jeřábu a poté na něj aplikují trajektorii druhého řádu (second-order sliding-modes), kterou by měl náklad jeřábu sledovat za účelem potlačení kyvu břemene. Při dosažení optimální dráhy by měl být náklad v poloze rychle a bez zbytkových kyvů. Touto teorií se zabývali stejní autoři také na 2D jeřábu ve zdroji [1] včetně následného experimentu.

## 1.2 Řízení portálových jeřábů

Z hlediska řízení se ovládání jeřábů dělí na dva způsoby, a to na řízení v otevřené smyčce a řízení zpětnovazební. Cílem je eliminovat kyv břemene, který není chtěný, ať už z důvodu bezpečnosti či efektivity práce s použitím jeřábů. Kyv břemene nastává při pohybu jeřábové kočky (či kolejnice), nebo kvůli povětrnostním podmínkám (při použití venku). U portálových jeřábů hrozí také zpříčení kolejnice v kombinaci s velkým zatížením a rychlostí (není řešeno v této práci).

### 1.2.1 Řízení v otevřené smyčce

Řízení v otevřené smyčce nevyužívá zpětných vazeb ze senzorů. Soustavu tedy ovládáme vstupním signálem a nedostává se nám žádná informace o stavu soustavy (poloha či úhel kyvu břemene). Vstupní signál můžeme upravit tak, aby byly kyvy břemene eliminovány. K tomu se dají využít tvarovače vstupního signálu.

**Tvarovače vstupního signálu** Pro řízení jeřábů a jiných kmitajících soustav lze využít tvarovače vstupních signálů (tzv. input shaper). Díky jejich použití je rozdělen akční signál přicházející do soustavy (akční zásah) na více částí tak, aby byl výsledný kyv eliminován. Vstupními tvarovači signálu se zabývají práce z FS ČVUT [7] (V. Kučera, T. Vyhlídal, M. Hromčík) a práce [8, 9] (T. Vyhlídal, M. Hromčík). Shrnutí celé řady tvarovačů se věnuje práce [10].

Práce [7] ukazuje výsledky při řízení soustav s použitím tvarovačů ZV a ZVD. Je zde taky porovnáván průběh kyvu nákladu u 2D portálového jeřábu s využitím těchto tvarovačů.

V práci [10] je shrnutí tvarovačů včetně vykreslení jejich citlivostních křivek (vykresleny také v [9]). Ty ukazují velikost reziduálních (zbytkových) kyvů při aplikaci tvarovače na soustavě s nevhodně odhadnutým parametrem úhlové rychlosti  $\omega$  v poměru se skutečnou úhlovou frekvencí. Práce se zaměřuje na experimentální zjištění těchto citlivostních křivek a porovnání s teoretickými křivky. Jsou zde vysvětleny například tvarovače ZV, ZVD, EI a další.

### 1.2.2 Zpětnovazební řízení

Zpětnovazební řízení využívá měření ze senzorů aplikovaných na soustavě, které jsou zavedeny do řídicího systému pomocí zpětné vazby a použity při řízení.

Pro řízení lze aplikovat různé řídicí systémy k potlačení kyvů břemene a řízení polohy. Například výrobce INTECO [6] dodává k jeřábu model s navrženým PID řízením. V práci [3] je řízena soustava portálového jeřábu pomocí fuzzy logiky.

V praxi jsou jeřáby většinou vybaveny senzory na polohu jeřábové kočky či kolejnice, ne však na vychýlení kyvadla, protože je toto měření náročné. Z tohoto důvodu bude práce převážně zaměřena na využití pouze měřených poloh  $x$  a  $y$  ve zpětné vazbě.

**Inverzní tvarovače vstupního signálu** Tvarovače vstupního signálu se dají také použít i jako inverzní tvarovače při převrácení jejich Laplaceova obrazu přenosu a následném zapojení do zpětné vazby v uzavřené smyčce.

Práce [8] se věnuje inverzním tvarovačům signálu s použitím na modelech, které mají navzájem provázané nezávislé proměnné (tzv. multibody system - jedna nezávislá proměnná ovlivňuje druhou). Ukazuje zlepšení řízení při použití inverzního tvarovače vstupního signálu oproti zapojení bez tvarovače na modelu 2D helikoptéry.

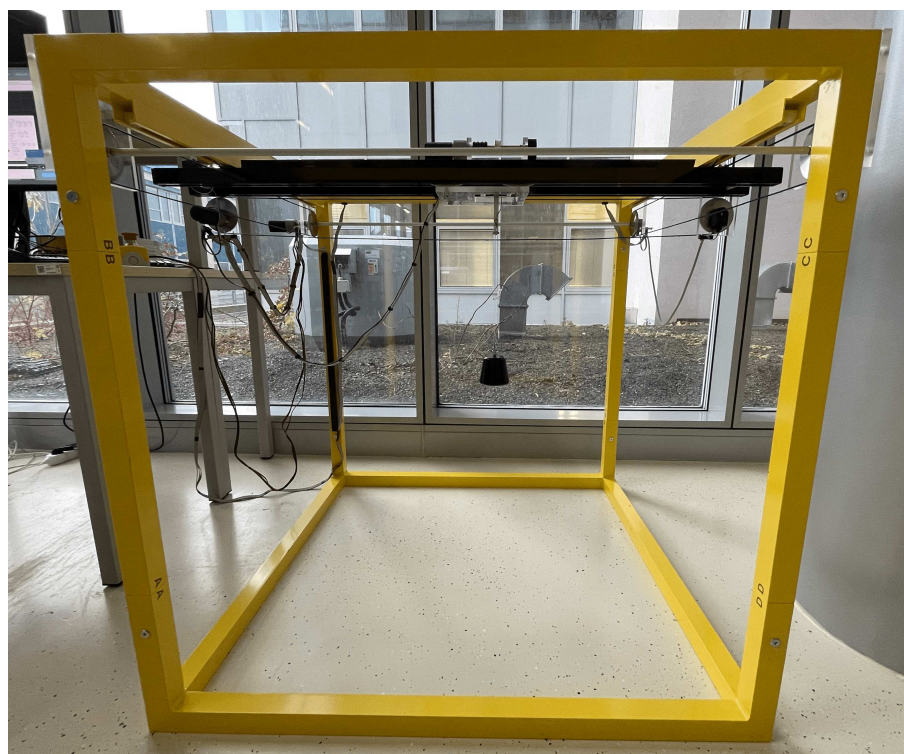
### 1.3 Portálový jeřáb INTECO

Zadání této práce bylo realizováno na portálovém jeřábu od polské firmy INTECO, který je umístěn na fakultě Kybernetiky a robotiky ČVUT. Fotografie laboratorní úlohy jeřábu lze vidět na obr. 1.

Pohyby dílčích částí jsou prováděny skrze stejnosměrné motory ve směru  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Ty jsou ovládány pomocí PWM (Pulse Width Modulation), čili v rozmezí hodnot od -1 až 1. V ose  $x$  se pohybuje kolejnice včetně jeřábové kočky. Kočka se může posouvat ve směru osy  $y$  po kolejnici. Dále je možné měnit délku lana ve směru osy  $z$ , na kterém je zavěšeno závaží. V rámci této práce není pohyb do směru  $z$  používán. Délka lana  $L$  je zafixována.

Jeřáb je osazen pěti enkodéry, díky kterým lze zjistit polohy ve směru  $x$ ,  $y$  a  $z$  (což značí délku lana  $L$ ), úhel ve směru osy  $x$  (značeno jako  $\alpha$ ) a úhel ve směru osy  $y$  (značeno jako  $\beta$ ). Koncové polohy jsou mechanicky zabezpečené koncovými spínači.

Jeřáb je ovládán skrze počítač s prostředím Matlab Simulink. Výrobce k jeřábu dodává model soustavy portálového jeřábu a manuály k použití (k vidění v [6]). Jsou zde naprogramovány uživatelsky přístupné funkce, které ulehčují práci s touto laboratorní úlohou. Těmi je například přehled aktuálních hodnot čtených ze senzorů, pohyby v osách, stop tlačítko či tlačítko pro návrat do původní polohy. Dále je zde připraveno vše pro řízení jeřábu skrze prostředí Matlab Simulink.



Obr. 1: Portálový jeřáb INTECO

## 2 Modelování

Díky matematickým modelům soustav jsme schopni získat přibližnou představu o chování skutečné soustavy, aniž bychom tuto soustavu měli. Následným navrhnutím řídicích metod na již navrženém modelu můžeme předejít komplikacím v praxi. Nelineární model je možné zlinearizovat ve zvoleném pracovním bodě a využívat teorie lineárního řízení, díky které lze navrhovat různé způsoby řízení.

Nelineární modely se tvoří na bázi matematicko fyzikální analýzy, díky které následně získáme diferenciální rovnice popisující chování tohoto systému. Tvorba modelu je náročný a dlouhotrvající proces. Musíme zde počítat se všemi vlivy zasahujícími do systému a případně můžeme nějaké zanedbat (z důvodu zjednodušení tvorby tohoto modelu). Každým zjednodušením ale ztrácíme přesnost chování modelu oproti skutečnému systému. Vytvořený model může sloužit k simulaci jeho chování za určitých podmínek či k návrhu jeho řízení. Výhodou modelů je, že ho lze vytvořit na základě znalostí a dovedností, což je mnohem úspornější oproti vytváření skutečného, předem neotestovaného systému.

V první části této kapitoly je popis soustavy portálového jeřábu. Dále se kapitola zaměřuje na určení všech parametrů modelu. Následuje návrh nelineárního modelu a jeho linearizace v pracovním bodě. Chování modelů je na závěr porovnáváno.

### 2.1 Popis soustavy

Před návrhem nelineárního modelu je potřeba definovat celou soustavu. To je demonstrováno schématem soustavy a definováním její nezávislých proměnných.

Na obr. 2 lze vidět zjednodušené schéma portálového jeřábu. Soustava se skládá z jeřábové kočky (pohybující se ve směru  $x$  a  $y$ ), kolejnice (pohybující se ve směru  $x$ ) a nákladu (pohybující se do směru  $x$ ,  $y$  i  $z$ ). Délka lana je fixní, tzn. pohyb jeřábu v ose  $z$  není používán.

Jeřáb je ovládán skrze síly napětí  $F_x$  (ve směru  $x$ ) a síly  $F_y$ . Přepočty z napětí  $u_{x,y}$  na síly  $F_{x,y}$  budou určeny později v této práci. Síly  $F_x$  a  $F_y$  jsou považovány jako vstupy do soustavy. Výstupem ze soustavy je poloha ve směru  $x$ , poloha ve směru  $y$ , úhel  $\alpha$  (úhel mezi průmětem lana do roviny  $xz$  a osou  $y$ ), úhel  $\beta$  (mezi lanem a průmětem lana do roviny  $xz$ ). Úhel  $\beta$  je na skutečné soustavě měřen jako úhel od osy  $y$ . Pro zjednodušení byl zaveden jako na schématu, viz. obr. 2. Chyby, ke kterým s touto úpravou dochází jsou v blízkosti dolní úvrati zanedbatelné.

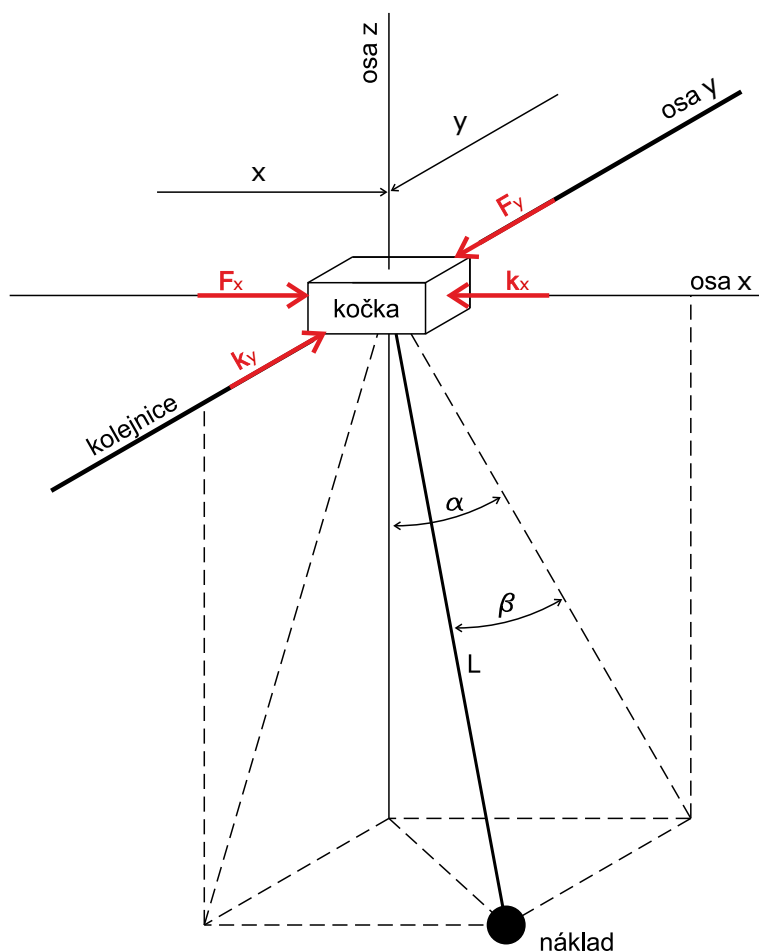
Nezávislé souřadnice soustavy jsou sepsány v tabulce tab. 1. Mezi nezávislé souřadnice patří poloha kolejnice či kočky ve směru  $x$ , poloha kočky ve směru  $y$  a vychýlení úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Tyto souřadnice budou výstupem z nelineárního modelu. Zmíněné nezávislé souřadnice jsou závislé na čase. Pro přehlednost budou nadále psány jen jako  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  (namísto  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\alpha(t)$  a  $\beta(t)$ ).

### 2.2 Parametry modelu portálového jeřábu

Aby bylo možné navržený model odsimulovat, je potřeba znát všechny jeho parametry. Parametry jsou k vidění v tab. 2. Identifikace těchto parametrů probíhala

Tab. 1: Nezávislé souřadnice

Označení	Popis
$x$	poloha kolejnice a kočky ve směru $x$
$y$	poloha kočky ve směru $y$
$\alpha$	úhel mezi průmětem lana do roviny $xz$ a osou $z$
$\beta$	úhel mezi lanem a průmětem lana do roviny $xz$



Obr. 2: Schéma soustavy

různými způsoby.

Hmotnost nákladu  $m_p$  byla zváženo. Hmotnost kočky  $m_c$  a hmotnost kolejnice  $m_r$  jsou převzaty z [5], kde je použit identický laboratorní model jeřábu. Díky tomu nebylo nutné jeřáb rozebírat na části. Délka lana  $L$  byla změřena metrem. Viskózní tření  $k_\alpha$  a  $k_\beta$  bylo zanedbáno, protože v pozdějších fázích zjišťování parametrů tlumilo kyv nákladu více, než bylo třeba. Toto Viskózní tření (dále jen tření) je dohnáno skrze parametry  $k_x$  a  $k_y$ , skrze které dochází k tření při pohybu vozíku a tím i k tlumení kyvadla. Přepočty  $k_{ux,uy}$  sloužící na převod napětí  $u_{x,y}$  na sílu byly zjištěny experimentálně tak, aby se shodovaly směrnice a nájezd polohy ve směrech  $x$  a  $y$  (lze vidět na obr. 17 a obr. 18). Hmotnost lana je zanedbána.

Tab. 2: Parametry modelu

Označení	Popis
$m_c$	hmotnost kočky $m_c = 1,16$ kg, převzato z [5]
$m_r$	hmotnost kolejnice $m_r = 2,2$ kg, převzato z [5]
$m_p$	hmotnost nákladu $m_p = 0,58$ kg, zváženo
$L$	délka lana $L = 0,413$ m, změřeno
$g$	gravitační zrychlení $g = 9,81$ m <sup>2</sup> /s
$k_\alpha$	viskózní tření $k_\alpha = 0$ [Ns/rad], zanedbáno
$k_\beta$	viskózní tření $k_\beta = 0$ [Ns/rad], zanedbáno
$k_x$	viskózní tření $k_x = 31$ [Ns/m], odhadnuto
$k_y$	viskózní tření $k_y = 26,5$ [Ns/m], odhadnuto
$k_{ux}$	přepočet napětí na sílu $k_{ux} = 13,15$ [–], odhadnuto
$k_{uy}$	přepočet napětí na sílu $k_{uy} = 12,48$ [–], odhadnuto

## 2.3 Nelineární model portálového jeřábu

Tato část kapitoly se zabývá návrhem nelineárního modelu. Díky němu můžeme získat představu o chování systému. Návrh vyplývá ze schématu obr. 2. Pro jeho následnou simulaci je potřeba znát všechny parametry modelu, které jsou popsány v tab. 2 Po návrhu nelineárního modelu je ověřena jeho funkčnost.

### 2.3.1 Návrh nelineárního modelu

**Poloha kolejnice, jeřábové kočky a nákladu** Poloha kolejnice  $p_r$  (1), poloha kočky  $p_c$  (2) a poloha závaží  $p_p$  (3) jsou dány (k vidění ve schématu na obr. 2)

$$p_r = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$p_c = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$p_p = \begin{pmatrix} x(t) + L \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \cos(\beta(t)) \\ y(t) + L \cdot \sin(\beta(t)) \\ -L \cdot \cos(\alpha(t)) \cdot \cos(\beta(t)) \end{pmatrix} \quad (3)$$

**Kinetická energie** Energie kolejnice  $K_r$  (4), energie kočky  $K_c$  (5) a energie nákladu  $K_p$  (6) jsou dány vztahy

$$K_r = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \dot{p}_r^2 \quad (4)$$

$$K_c = \frac{1}{2} \cdot m_c \cdot \dot{p}_c^2 \quad (5)$$

$$K_p = \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot \dot{p}_p^2 \quad (6)$$

Sečtením rovnic (4), (5) a (6) získáváme celkovou kinetickou energii  $K$  (40)

$$K = K_r + K_c + K_p \quad (7)$$

**Potenciální energie** Potenciální energie je dána jako

$$P = -m_p \cdot g \cdot L \cdot \cos(\alpha_{(t)}) \cdot \cos(\beta_{(t)}) \quad (8)$$

**Euler-Lagrange** Lagrangerova rovnice druhého druhu (9) je převzata z [4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i, i = 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

kde lagrangian je definován jako rozdíl kinetické a potenciální energie

$$\mathcal{L} = K - P \quad (10)$$

$q$  (11) je vektor nezávislých proměnných

$$q = \begin{pmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ \alpha_{(t)} \\ \beta_{(t)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

a  $F$  (12) jsou vnější síly včetně tření.

$$F = \begin{pmatrix} F_{x(t)} - k_x \cdot \dot{x}_{(t)} \\ F_{y(t)} - k_y \cdot \dot{y}_{(t)} \\ -k_\alpha \cdot \dot{\alpha}_{(t)} \\ -k_\beta \cdot \dot{\beta}_{(t)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

kde síly  $F_x$  a  $F_y$  jsou vyjádřeny vztahy

$$F_{x(t)} = u_{x(t)} \cdot k_{ux} \quad (13)$$

$$F_{y(t)} = u_{y(t)} \cdot k_{uy} \quad (14)$$

Po vypočtení Lagrangerovy rovnice (9) dostáváme dynamiku všech nezávislých proměnných (tab. 1), ze kterých je možné vytvořit nelineární model v prostředí Matlab Simulink. Výsledné vyjádřené proměnné nejsou přidány do tohoto textu, protože jsou příliš dlouhé. Jejich první integrací lze získat rychlost a druhou integrací polohu či úhel. Pro integraci je nutné zadat počáteční podmínky těchto proměnných.

### 2.3.2 Ověření správnosti nelineárního modelu

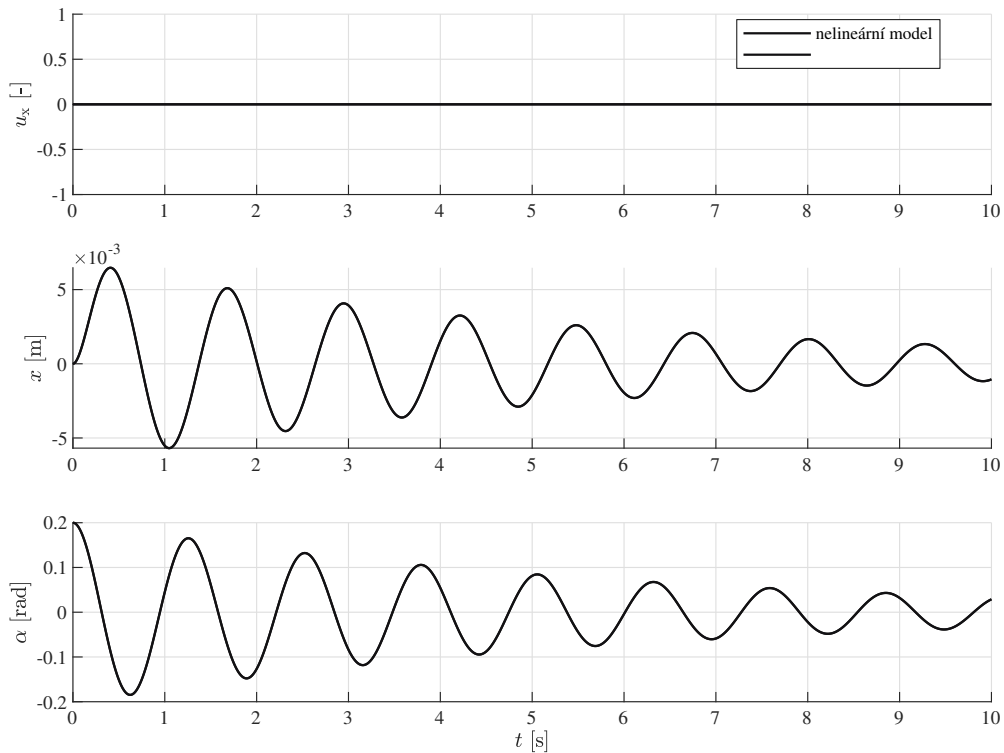
Navržený nelineární model je třeba otestovat. Testování chování modelu lze provést buď různým nastavením nenulových počátečních podmínek či sledovat reakci soustavy na vstupní signál.

**Testování dle počátečních podmínek bez akčního zásahu** Při nastavení různých počátečních podmínek můžeme sledovat průběh nelineárního modelu a zhodnotit, zda se chová dle očekávání. Vykreslení průběhů při testování jsou na obrázcích obr. 3, obr. 4, obr. 5. Všechny stavy, pro které je potřeba zvolit počáteční podmínky, jsou vypsané ve vektoru stavových proměnných  $\mathbf{x}$  (17)

**Předpoklad: Žádný pohyb při nulových počátečních podmínkách** Při všech počátečních podmínkách rovných nule nenastává žádný pohyb v žádné souřadnici. Tento předpoklad byl splněn.

Při nastavení počátečních podmínek na hodnoty stabilního stavu  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  (21) očekávám, že výstup z modelu bude nulový.

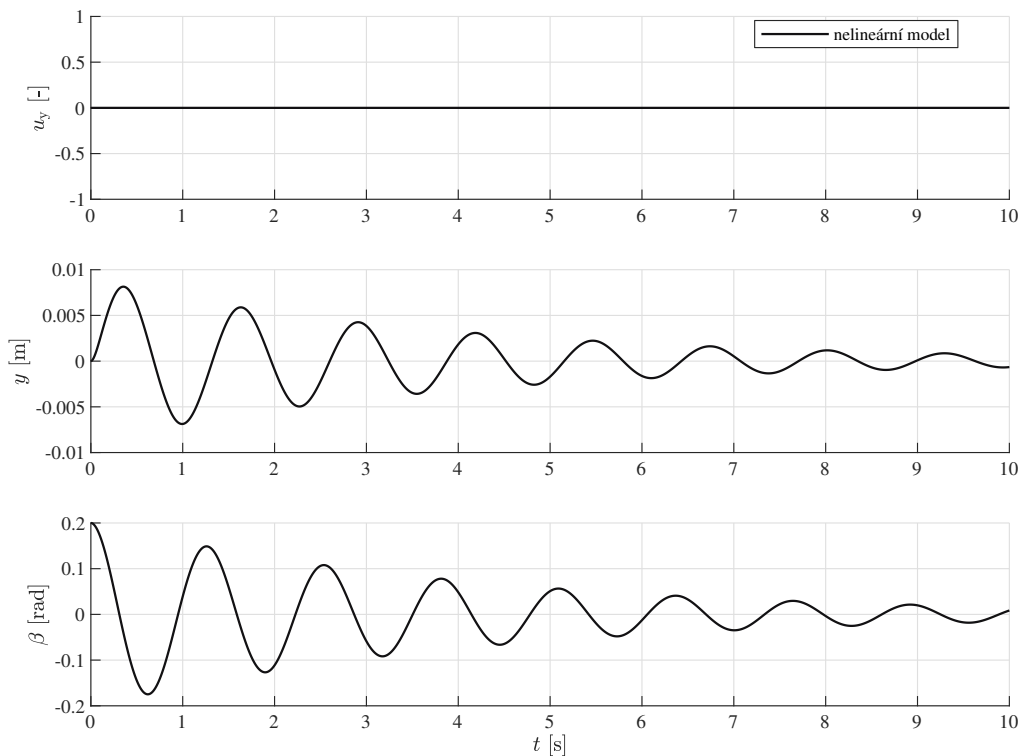
**Předpoklad: Vychýlení úhlu  $\alpha$  jako počáteční podmínka** Při nastavení nenulové počáteční podmínky úhlu  $\alpha$  a ostatních počátečních podmínek nulových je předpokládáno, že se kyvadlo bude kývat pouze ve směru  $\alpha$ . Kyvadlo bude pohybovat s vozíkem v tomto směru (tedy ve směru  $x$ ). Průběh lze vidět na obr. 3. Pohyb ve směru  $y$  a úhel  $\beta$  je po celý průběh nulový. Předpoklad byl splněn.



Obr. 3: Test nelineárního modelu při počáteční podmínce  $\alpha = 0,2$  rad



**Předpoklad: Vychýlení úhlu  $\beta$  jako počáteční podmínka** Při nastavení nenulové počáteční podmínky úhlu  $\beta$  a ostatních počátečních podmínek nulových je předpokládáno, že se kyvadlo bude kývat pouze ve směru  $\beta$ . Kyvadlo bude pohybovat s vozíkem v tomto směru (tedy ve směru  $y$ ). Průběh lze vidět na obr. 4. Pohyb ve směru  $x$  a úhel  $\alpha$  jsou po celý průběh nulové. Předpoklad byl splněn.

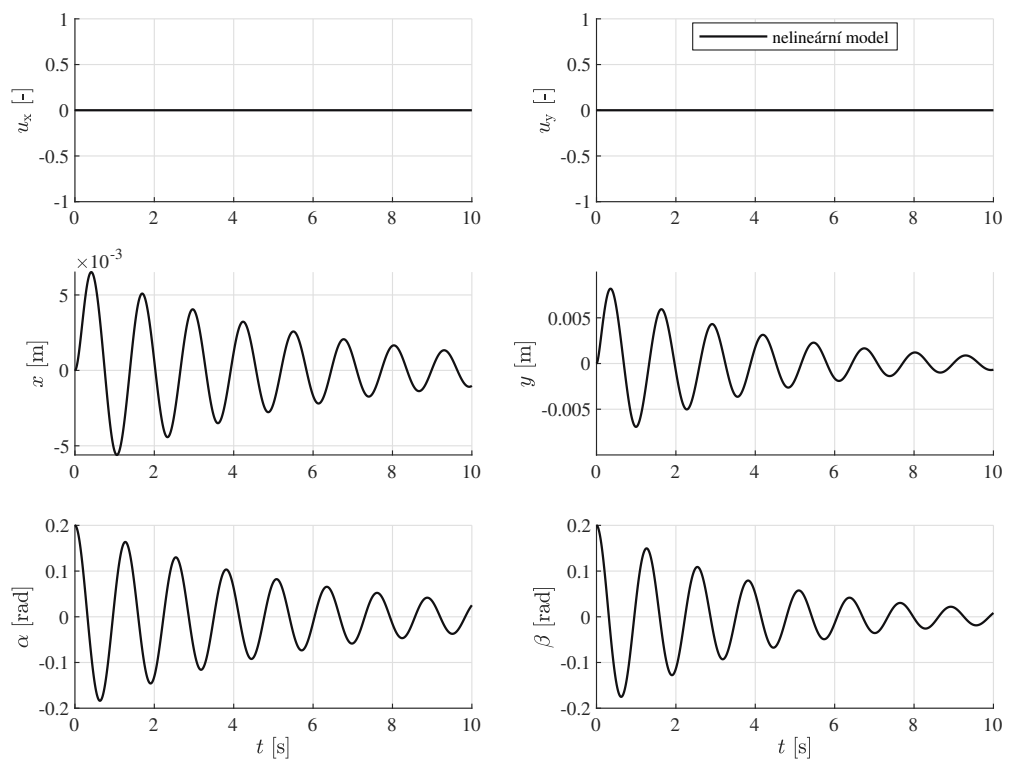


Obr. 4: Test nelineárního modelu při počáteční podmínce  $\beta = 0,2 \text{ rad}$

**Předpoklad: Vychýlení úhlu  $\alpha$  a  $\beta$  jako počáteční podmínky** Při nastavení nenulových počátečních podmínek úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  je předpokládáno, že se kyvadlo bude kývat v obou těchto směrech a bude pohybovat jeřábovou kočkou i kolejnicí (tedy ve směru  $x$  i  $y$ ). Ostatní počáteční podmínky jsou nulové. Průběh lze vidět na obr. 5. Předpoklad byl splněn.

**Předpoklad: Nenulová poloha  $x$  či  $y$  nemá vliv na chování soustavy** Při nastavení nenulových počátečních podmínek polohy  $x$  či  $y$  (a ostatních počátečních podmínek) je předpokládáno, že chování modelu nebude ovlivněno a polohy budou konstantní. Předpoklad byl splněn.

**Testování dle reakce soustavy na vstup** Je předpokládáno, že při přivedení vstupního signálu do soustavy dojde k pohybu jeřábové kočky či kolejnice a dojde k vychýlení kyvadla ve směrech úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Reakce navrženého modelu na vstupní napětí  $u_x, u_y$  lze vidět na obr. 6, obr. 7 a obr. 8, kde je tento model porovnáván s modelem lineárním. Model se chová tak, jak bylo předpokládáno.



Obr. 5: Test nelineárního modelu při počáteční podmínice  $\alpha, \beta = 0,2 \text{ rad}$

## 2.4 Lineární model

Aby bylo možné efektivně navrhovat teorie řízení, je potřeba mít lineární model soustavy. Ten se provádí linearizací nelineárního modelu ve zvoleném pracovním bodě. U lineárního systému máme lineárně závislý výstup na vstupu. Pro lineární řízení je vyvinuto velké množství teorie, kterou lze na lineárním modelu aplikovat. Navržené řízení na lineárním modelu můžeme poté aplikovat na nelineární model (či na skutečnou soustavu) a zjistit, zda na tomto systému funguje.

### 2.4.1 Návrh lineárního modelu

K návrhu lineárního modelu se u soustav MIMO (Multiple Input and Multiple Output) používá stavový popis. Na stavový popis navazuje návrh stavových regulátorů (pole placement, LQR).

**Stavový popis** Stavový popis nám popisuje celou soustavu včetně vstupů a výstupů skrze čtyři matice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Systém považujeme za časově invariantní, tj. matice  $A, B, C$  a  $D$  jsou konstantní.

Pro vytvoření stavového popisu je potřeba dosadit tyto matice do *stavové vektorové rovnice* (15), která nám říká, jak se stavové proměnné mění v závislosti na jeho stavu a vnějším zásahu.

$$\dot{\mathbf{x}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{(t)} \quad (15)$$

a do *výstupní rovnice* systému (16)

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{(t)} \quad (16)$$

kde vektor  $\mathbf{x}_{(t)}$  je vektor stavových proměnných,  $\mathbf{u}_{(t)}$  je vektor vstupů,  $\mathbf{y}_{(t)}$  je vektor výstupů,  $\mathbf{A}$  je matice dynamiky,  $\mathbf{B}$  je matice druhých stran,  $\mathbf{C}$  je matice výstupů a  $\mathbf{D}$  je matice poruchových veličin.

**Vektor stavových proměnných  $\mathbf{x}_{(t)}$**  Za stavové veličiny považujeme polohy všech nezávislých souřadnic a jejich rychlosti.

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ x_2 = \dot{x} & \dot{x}_2 = \ddot{x} \\ x_3 = y & \dot{x}_3 = \dot{y} = x_4 \\ x_4 = \dot{y} & \dot{x}_4 = \ddot{y} \\ x_5 = \alpha & \dot{x}_5 = \dot{\alpha} = x_6 \\ x_6 = \dot{\alpha} & \dot{x}_6 = \ddot{\alpha} \\ x_7 = \beta & \dot{x}_7 = \dot{\beta} = x_8 \\ x_8 = \dot{\beta} & \dot{x}_8 = \ddot{\beta} \end{array}$$

Dostáváme se k vektoru stavových veličin (17)

$$\mathbf{x}_{(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \quad (17)$$

**Vektor funkcí pravých stran  $\mathbf{f}$**  Vektor funkcí pravých stran je derivací stavových veličin (18).

$$\mathbf{f}_{(t)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \ddot{x}(t) \\ x_4 \\ \ddot{y}(t) \\ x_6 \\ \ddot{\alpha}(t) \\ x_8 \\ \ddot{\beta}(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

**Vektor vstupů  $\mathbf{u}_{(t)}$**  Vektor vstupů ovlivňuje soustavu silou  $F_{x(t)}$  ve směru osy  $x$  a silou  $F_{y(t)}$  ve směru osy  $y$ , tj.

$$\mathbf{u}_{(t)} = \begin{pmatrix} F_{x(t)} \\ F_{y(t)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

**Matice  $\mathbf{A}$  (matice dynamiky)** Matice  $\mathbf{A}$  popisuje dynamiku systému. K výpočtu se používá jakobián vektoru pravých stran  $\mathbf{f}$  (18) podle  $\mathbf{x}$  (17)

$$\mathbf{A} = \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (20)$$

linearizují v okolí bodu  $\mathbf{x}_0$ , volím

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

pro nulový zásah  $\mathbf{u}_0$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Tento bod jsem zvolil, protože se jedná o klidový stav, tj. všechny derivace jsou nulové a úhly  $\alpha$  a  $\beta$  také. Za proměnné  $x$  a  $y$  lze dosadit libovolné číslo, na poloze kočky a kolejnice vzhledem k chování modelu nezáleží.

Matice dynamiky pro zvolené parametry (v sekci 2.2 na straně 5) vypadá následovně

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9.226 & 0 & 0 & 1.693 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22.84 & 0 & 0 & 4.905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 22.34 & 0 & 0 & -27.85 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 55.31 & 0 & 0 & -35.63 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

**Matice B (matice pravých stran)** Matice  $\mathbf{B}$  nám říká, jak zásahem  $\mathbf{u}_{(t)}$  (19) měníme stav systému. Matice  $\mathbf{B}$  se vypočte jako jakobián vektoru pravých stran  $\mathbf{f}_{(t)}$  (18) a akčního zásahu  $\mathbf{u}_{(t)}$  (19).

$$\mathbf{B} = \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (24)$$

Při dosazení všech číselných hodnot vypadá matice  $\mathbf{B}$  následovně:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.2976 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.8621 \\ 0 & 0 \\ -0.7206 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2.0873 \end{pmatrix} \quad (25)$$

**Matice C** Matice  $\mathbf{C}$  se nazývá jako matice výstupů. Všechny měřené veličiny se považují za výstup. Při řízení jsou zavedeny zpět uvnitř regulační smyčky pomocí zpětné vazby. Mými měřitelnými veličinami je poloha  $x$ , poloha  $y$ , úhel  $\alpha$  a úhel  $\beta$ , proto

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

**Matice  $\mathbf{D}$**  Matice  $\mathbf{D}$  udává poruchy od vstupního zásahu zavedené na výstup. Nepředpokládám žádné poruchové veličiny, volím

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

## 2.5 Analýza stability v rovnovážných bodech

**Póly soustavy** Před samotným řízením soustavy je důležité zjistit, zda je lineární systém stabilní. Stabilita lze zjistit z hodnot vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ , které se počítají jako

$$M(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0 \quad (28)$$

Výsledné póly matice  $\mathbf{A}$  jsou (29)

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i \\ -8.8712 + 0.0000i \\ -0.1775 + 4.9671i \\ -0.1775 - 4.9671i \\ -22.3373 + 0.0000i \\ -0.2538 + 4.9222i \\ -0.2538 - 4.9222i \end{pmatrix} \quad (29)$$

Z reálných složek pólů matice  $\mathbf{A}$  lze vidět, že systém zlinealizovaný v pracovním bodě není stabilní.

**Rovnovážný stav** Rovnovážný stav lineárního systému lze zjistit položením pravé strany stavové vektorové rovnice (15) rovno nule, tj.  $\mathbf{f} = 0$  a dosazením  $\mathbf{u}_0$  (22), čímž získáme

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{X}_s \quad (30)$$

za předpokladu, že determinant matice  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . V případě analyzovaného systému zlinealizovaném v pracovním bodě vychází  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , což dokazuje, že systém zlinealizovaný v pracovním bodě je astabilní. Tento lineární systém je astabilní, jelikož při zavedení jednotkového vstupu do soustavy jeřábová kočka (či kolejnice) bude vykonávat pohyb donekonečna. Ve skutečnosti je tento prostor omezen, v lineárním modelu nikoli.

### 2.5.1 Řiditelnost soustavy

Řiditelnost soustavy nám říká, zda jsme schopni uřídit soustavu (všechny její stavové proměnné) do jakéhokoli požadovaného stavu (např. auto na určité místo pomocí plynu a volantu).

Soustava je říditelná, pokud se hodnost matice  $\mathbf{C}_c$  (počet nezávislých řádků matice) shoduje s rozměry matice  $\mathbf{A}$ , tj.  $\text{rank}(\mathbf{C}_c) = n$ . Pokud je menší, znamená to, že nelze ovlivnit všechny stavové proměnné do jakéhokoli stavu. Za předpokladu, že systém je lineární, použijeme k vyhodnocení matice říditelnosti definovanou jako [11]

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (31)$$

Vyšetřovaný systém linearizovaný v pracovním bodě má počet stavů  $n = 8$  a jeho říditelnost soustavy zjistíme pomocí hodnosti matice  $\mathbf{C}_c$ . Hodnost matice  $\mathbf{C}_c = 8$ , tj. linearizovaný systém je plně říditelný.

### 2.5.2 Pozorovatelnost soustavy

Pozorovatelnost soustavy nám říká, zda jsme schopni odhadnout (zkonstruovat) všechny stavy systému linearizovaného v bodě, z daných měřitelných výstupů, což je dáno maticí výstupů  $\mathbf{C}$  (26).

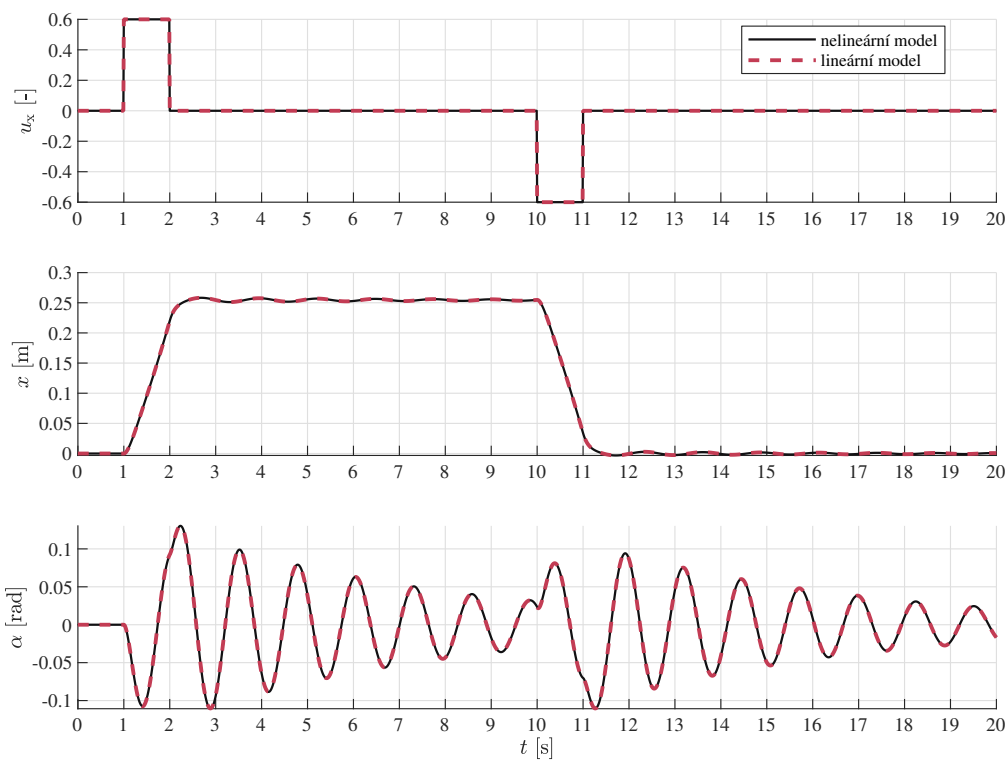
Porovatelnost se zjistí výpočtem hodnosti matice  $\mathbf{O}$ . Pro plnou pozorovatelnost se musí rovnat počtu stavů  $n$ .

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

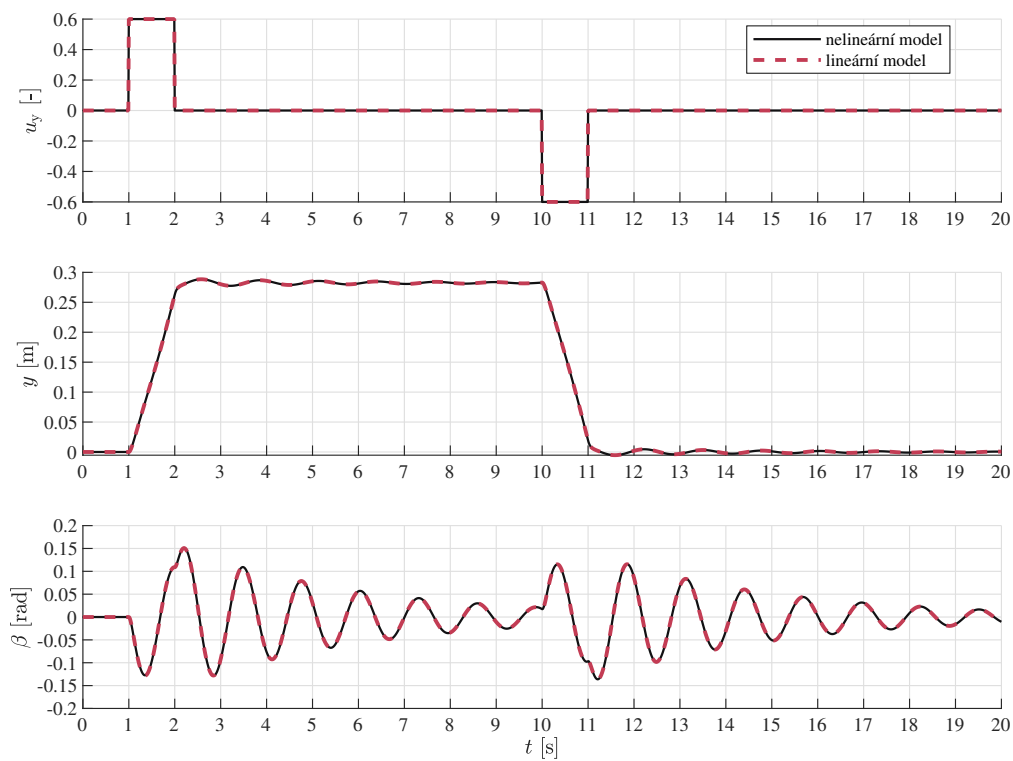
V tomto případě vychází hodnost matice pozorovatelnosti  $\text{rank}(\mathbf{O}) = n = 8$ . Tento systém zlinearizovaný ve svém pracovním bodě je tedy plně pozorovatelný. V případě, že by soustava měla měřitelné pouze polohy  $x$  a  $y$ , vychází hodnost matice pozorovatelnosti také jako plně pozorovatelná. Znamená to, že přestože nějaké výstupy ze soustavy neměříme, jsme schopni je zrekonstruovat, například pomocí Kalmanova filtru.

## 2.6 Porovnání chování nelineárního a lineárního modelu

Nově navržený lineární model je porovnán s chováním nelineárního modelu na obrázcích obr. 6, obr. 7 a obr. 8. Lze vidět, že tyto modely mají stejné průběhy. Při simulaci byla zvolena numerická metoda Ode5 s fixní délkou kroku 0,01 s.

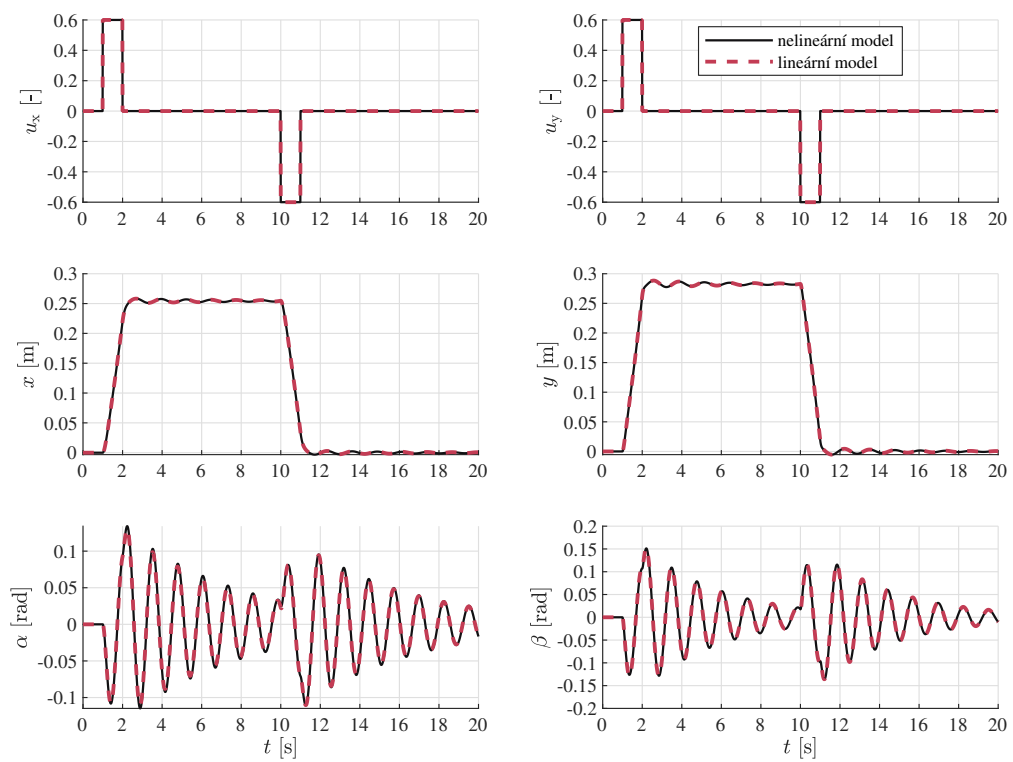


Obr. 6: Porovnání chování navrženého nelineárního a lineárního modelu při zásahu  $u_x = 0,6$  v čase  $t = 1$  s a zásahu  $u_x = -0,6$  v čase  $t = 10$  s



Obr. 7: Porovnání chování navrženého nelineárního a lineárního modelu při zásahu  $u_y = 0,6$  v čase  $t = 1$  s a zásahu  $u_y = -0,6$  v čase  $t = 10$  s

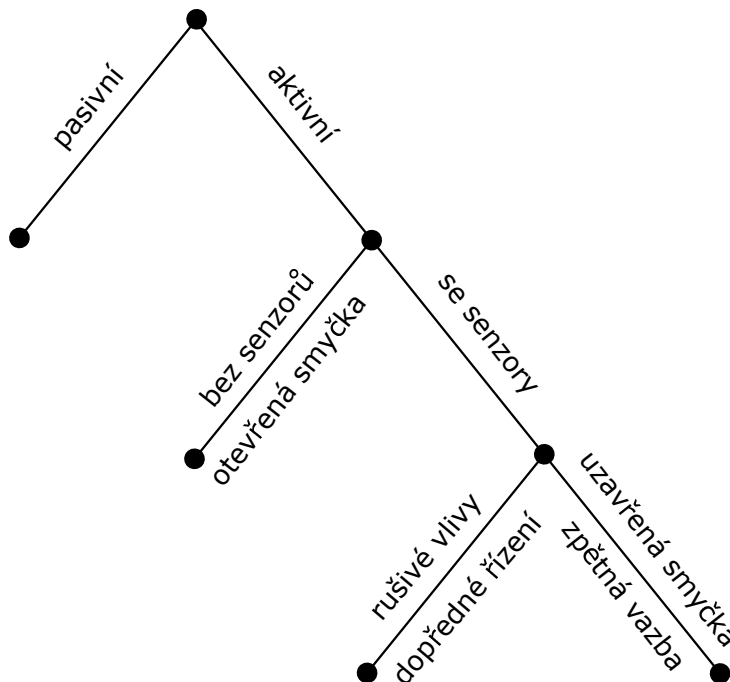




Obr. 8: Porovnání chování navrženého nelineárního a lineárního modelu při zásahu  $u_x, u_y = 0,6$  v čase  $t = 1$  s a zásahu  $u_x, u_y = -0,6$  v čase  $t = 10$  s

### 3 Řízení

Abychom mohli dostat soustavu do požadovaného stavu, musíme ji umět řídit. Z hlediska teorie řízení rozdělujeme řízení na několik způsobů, demonstrováno na obr. 9.



Obr. 9: Schématické rozdělení řízení - převzato a přeloženo z [11]

Rozdělení řízení je velmi jednoduše vysvětleno ve zdroji [11]. Z principu lze řízení dělit zprvu na pasivní a aktivní. Pasivní řízení nevyžaduje žádný vstup do soustavy. Jako pasivní můžeme například chápat značky na silnicích - nevyžadují žádné vstupy (např. energii) a přesto do určité míry řídí dopravu. Aktivním řízením můžeme chápat semaforey, které již řídící vstupy (v podobě elektrického signálu) vyžadují. Bez senzorů ale bohužel nemohou reagovat na aktuální stav dopravy. Optimalizovat se mohou maximálně tak, že v určitém čase řídí dopravu jinak (v dopravních špičkách). S využitím senzorů se dostáváme k mnohem účinnějšímu a efektivnějšímu způsobu řízení. Dopředné řízení se snaží na základě informací ze senzorů (rušivých vlivů) preventivně zasáhnout, než nastane nežádoucí situace.

Přivedením informací ze senzorů zpět pomocí zpětnovazební smyčky známe aktuální stav a reagujeme na něj okamžitě.

Z hlediska řízení bude tato práce převážně zaměřena na zpětnovazební řízení, které má několik výhod. Je zde možnost ustálit i určité nestabilní systémy, kompenzovat vnější nežádoucí vlivy a opravit nejistotu modelu/jeho nemodelovanou dynamiku. [11]

## 3.1 Zpětnovazební řízení

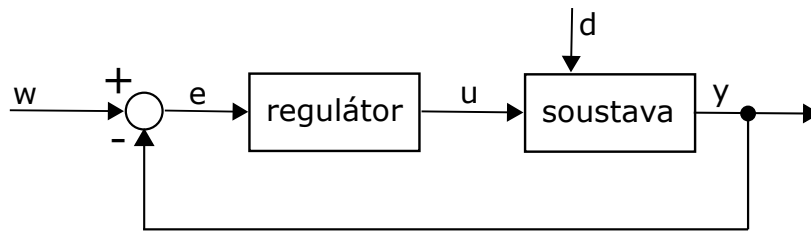
### 3.1.1 Regulační obvod

Pokud chceme efektivně řídit nějakou soustavu, je potřeba aplikovat uzavřený regulační obvod, který je k vidění na obrázku obr. 10.

Regulační obvod nám zajišťuje, aby se výstup ze soustavy, neboli regulovaná veličina  $y(t)$  (např. úhel kyvadla), rovnal naší žádané hodnotě  $w(t)$ . Odečtením regulované veličiny  $y(t)$  od naší žádané veličiny  $w(t)$  dostáváme regulační odchylku  $e(t)$ .

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (33)$$

Regulační odchylka  $e(t)$  nám říká, jak moc se náš výstup regulačního obvodu od jeho vstupu liší. Díky tomu regulátor ví, zda má zvýšit či snížit zásah pomocí akční veličiny  $u(t)$ . Ta vstupuje do soustavy, kterou se snažíme regulovat. Chování naší soustavy je ovlivněno také dalšími vnějšími vlivy, které zde označujeme jako poruchovou veličinu  $d(t)$  (například vítr, rušení, apod.)



Obr. 10: Uzavřený regulační obvod

### 3.1.2 PID regulátor

PID regulátor je nejrozšířenějším regulátorem vůbec. Důvodem je jeho velmi jednoduchá aplikace. Z tohoto důvodu jsou často využívány v praxi.

**PID regulátor se skládá ze tří složek**

- **Proporciální složka (P)** - Akční zásah regulátoru s pouze proporcionální složkou je přímo úměrný regulační odchylce  $e$
- **Integrační složka (I)** - Akční zásah tohoto regulátoru je přímo úměrný integrálu regulační odchylky  $e$
- **Derivační složka (D)** - Reaguje na změnu regulační odchylky  $e$

Kombinací těchto složek můžeme aplikovat regulátory typu P, I, PI, PD, PID. Rovnice ideálního PID regulátoru je dána vztahem [12]

$$u(t) = r_P \cdot e(t) + r_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + r_D \cdot \dot{e}(t) + u(0) \quad (34)$$

kde  $r_P$  je proporcionální konstanta,  $r_I$  je integrační konstanta a  $r_D$  je derivační konstanta.

### 3.1.3 Stavové řízení

Stavový regulátor využívá teorie stavového popisu. Obrovskou výhodou je jednoduchost implementace v případě, že máme stavový model. Jeho výhoda oproti PID regulátoru je řízení více stavových proměnných tzn. je vhodný k použití u soustav typu MIMO (Multiple Input and Multiple Output). Vývoj tohoto řízení je spjat s letectvím a kosmonautikou.

Jedná se o plně zpětnovazební řízení. Pro aplikaci stavového regulátoru předpokládáme, že známe všechny stavy vektoru  $\mathbf{x}$ , tzn. všechny stavy jsou měřitelné. Tento regulátor funguje svým způsobem jako P regulátor, proto neeliminuje trvalé regulační odchylky. K tomu by bylo potřeba stavy ještě integrovat (čímž vznikne LQI regulátor). Pokud nemáme měřené všechny stavy lineárního systému a je tento systém pozorovatelný, lze tyto stavy zkonstruovat (například pomocí Kalmanova filtru).

Za předpokladu, že máme soustavu  $n$ -tého řádu kde  $C = 1$  a  $D = 0$ , vložením do (16) získáme, že  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ .

Při dosazení

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (35)$$

do stavové rovnice (15) a zavedením se  $\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \mathbf{A}_{CL}$ , (kde matice  $\mathbf{A}_{CL}$  je matice systému s uzavřenou smyčkou) získáme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_{CL}\mathbf{x}(t) \quad (36)$$

Z čehož vyplývá, že měníme stav soustavy pouze pomocí jejího aktuálního stavu vynásobeným maticí  $\mathbf{A}_{CL}$ . Tuto matici můžeme navrhnout tak, aby byla celková soustava ( $\mathbf{A}_{CL}$ ) stabilní, i když je matice  $\mathbf{A}$  nestabilní. Toho můžeme docílit úpravou parametru  $\mathbf{K}$ , aniž bychom měnili matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Úprava matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je nežádoucí, protože popisují chování navrženého modelu. Vše funguje za předpokladu, že jsou matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  říditelné, viz. kapitola 2.5.1.

Jak již bylo zmíněno, stavový regulátor se používá v případě, že známe (jsou měřitelné) všechny stavy soustavy (17). Pokud všechny stavy na soustavě neměříme, můžeme si poradit různými způsoby jak tyto stavy získat. Jedním ze způsobů je použití pozorovatele (za předpokladu, že systém zlinearizovaný ve svém pracovním bodě je pozorovatelný). K nejpoužívanějším pozorovatelům patří Kalmanův filtr. Ten predikuje neměřitelné stavy s použitím lineárního modelu (stavového popisu). V dalším případě lze neměřené veličiny v zapojení vynechat a navrhnout matici zisku  $\mathbf{K}$  tak, aby měla složky u neměřitelných stavů so nejvíce blízko k nule (nejlépe nulové). Takový LQR regulátor nebude bohužel efektivní tolik, jako kdyby měřil všechny stavy. Matice zisku  $\mathbf{K}$  se u stavových regulátorů navrhuje skrze metodu umístění pólů (pole placement) nebo váhovou funkci (LQR).

**Stavový regulátor metodou umístění pólů (pole placement)** Tato metoda slouží k návrhu matice zisku  $\mathbf{K}$  pro stavový regulátor. Metodou umístění pólů (pole placement) můžeme změnit dynamiku systému popsaného maticemi  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  posunutím pólů matice celkového uzavřeného systému  $\mathbf{A}_{CL}$  tak, aby měl celkový systém požadované vlastnosti. Princim spočívá ve zvolení pólů matice celkového uzavřeného systému  $\mathbf{A}_{CL}$  a následném dopočítání matice zisku  $\mathbf{K}$ . Při aplikaci předpokládáme, že soustava linearizovaná ve svém pracovním bodě je říditelná. Tato metoda není v této práci použita, jelikož je při tak velkém počtu pólů matice celkového uzavřeného systému  $\mathbf{A}_{CL}$  náročná k aplikaci.

**Stavový regulátor metodou LQR (lineární kvadratický regulátor)** Metoda LQR (linear quadratic regulator) má za cíl stejný úkol jako metoda umístěním pólů, což je vhodný návrh matice zisku  $\mathbf{K}$  k získání požadovaných vlastností celkového uzavřeného systému  $\mathbf{A}_{CL}$ . Rozdíl je ve způsobu získání této matice zisku  $\mathbf{K}$ . LQR využívá pro optimalizaci návrhu cenovou funkci  $J(t)$  [11] skrze kterou hledá vhodné řešení.

$$J(t) = \int_0^t \mathbf{x}_{(\tau)} * \mathbf{Q} \mathbf{x}_{(\tau)} + \mathbf{u}_{(\tau)} * \mathbf{R} \mathbf{u}_{(\tau)} d\tau \quad (37)$$

V matlabu lze s použitím funkce  $lqr()$  získat tuto matici zisku  $\mathbf{K}$  na základě zvolení matic  $\mathbf{Q}$  (matice vah stavových proměnných) a  $\mathbf{R}$  (matice vah zásahů).

Matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  definujeme navolením vah pro všechny stavové proměnné či akční zásahy (větší číslo – nedostupné, malé číslo – dostupné). Pro matici akčních zásahů  $\mathbf{R}$  byla zvolena malá čísla (energie je dostupná) a pro matici vah jednotlivých stavů  $\mathbf{Q}$  byly zvoleny velké váhy pro úhly  $\alpha$  a  $\beta$  (vychýlení kyvadla je považováno za nežádoucí).

Aplikovaná matice  $\mathbf{Q}$  (zvolení vah jednotlivých stavových proměnných)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Aplikovaná matice  $\mathbf{R}$  (zvolení vah jednotlivých akčních zásahů)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0 \\ 0 & 0.65 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Výsledkem je matice zisku  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2.48 & 0.36 & 0 & 0 & -2.57 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.48 & 0.22 & 0 & 0 & -2.67 & -0.15 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Váhy byly zároveň nastavovány tak, aby složky matice zisku  $\mathbf{K}$  byly co nejmenší na pozicích stavových proměnných, které nejsou měřené.

Výsledná matice  $\mathbf{A}_{CL}$  po vložení matice zisku  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{A}_{CL} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.74 & -9.33 & 0 & 0 & 2.46 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.14 & -23.03 & 0 & 0 & 7.21 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.79 & 22.6 & 0 & 0 & -29.71 & -0.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5.18 & 55.77 & 0 & 0 & -41.21 & -0.32 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Při aplikaci byl obvod zapojen tak, že jsem odpojil složky matice zisku  $\mathbf{K}$  na pozicích  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{\beta}$  a  $\dot{y}$ . Výsledný průběh aplikovaného LQR regulátoru lze vidět na obr. 21 a obr. 22 a obr. 23 v porovnání s aplikovaným PID regulátorem.

## 3.2 Tvarovače signálu (Input shaping)

Tvarovač vstupního signálu, neboli input shaper, slouží jako filtr referenčního signálu. Ten rozdělí na více částí tak, aby eliminoval vibrace na výstupu ze soustavy (viz. obr. 12). Aplikují se u kmitavých soustav, jako jsou například robotické manipulátory a jeřáby. Tvarovače signálu se dají použít jak v řízení bez zpětné vazby, tak i ve zpětné vazbě zpětnovazebního řízení při převrácení jeho obrazu přenosu.

Princip spočívá ve vzájemném odečtení se výstupních kmitavých průběhů. Cílem návrhu tvarovače vstupního signálu je navrhnout takové nuly přenosu tvarovače, jako jsou komplexně sdružené póly obrazu přenosu, u kterého chceme tvarovač aplikovat. Myšlenka je taková, že se pak tyto póly a nuly vzájemně vyruší. To lze vidět na obrázcích obr. 15 a obr. 16

K jejich aplikaci je tedy potřeba zjistit komplexní kořeny, které zajišťují kmitání soustavy. Ty se dají nalézt v dílčích přenosech odezev již navrženého lineárního modelu a to ze síly  $F_x$  na úhel  $\alpha$  a síly  $F_y$  na úhel  $\beta$ . Jelikož jsou tyto přenosy odlišné (lze vidět na (42) a (43)) je potřeba navrhnout tvarovač signálu pro směr  $x$  i  $y$  zvlášť. Odlišné chování je dáno dynamikou dílčích částí jeřábu (v jedné ose se pohybuje pouze jeřábová kočka, v druhé i kolejnice).

### 3.2.1 Tlumení $\xi$ a netlumená frekvence $\omega$ lin. modelu

Před aplikací tvarovače vstupního signálu je potřeba zjistit polohy komplexně sdružených pólů, ze kterých lze následně určit netlumenou frekvenci systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$ . Nejprve zjistíme odezvy úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  od vstupních sil  $F_x$  a  $F_y$  z navrženého lineárního modelu. Pomocí odezvy je možné najít komplexně sdružené póly přenosu. Ty zajišťují kmitání úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ .

Z lineárního modelu lze zjistit póly přenosu z  $F_x$  na úhel  $\alpha$

$$s_x = \begin{pmatrix} -8.8712 + 0.0000i \\ -0.1775 + 4.9671i \\ -0.1775 - 4.9671i \end{pmatrix} \quad (42)$$

a póly přenosu z  $F_y$  na úhel  $\beta$

$$s_y = \begin{pmatrix} -22.3373 + 0.0000i \\ -0.2538 + 4.9222i \\ -0.2538 - 4.9222i \end{pmatrix} \quad (43)$$

Kde nás zajímají komplexně sdružené kořeny v přenosu (což jsou v tomto případě poslední dva póly) v (42) a v (43), které zajišťují kmitání úhlů na výstupu ze systému.

S pomocí charakteristické rovnice (44) [12],

$$s_{1,2} = -\gamma \pm i\Omega \quad (44)$$

kde vlastní útlum  $\gamma$  (45) (ve zdroji [12] označováno jako  $\beta$ , zde je tento znak již obsazen) systému je reálná složka komplexně sdruženého kořenu [12]

$$\gamma = -\xi \cdot \omega \quad (45)$$

a kde vlastní úhlová frekvence  $\Omega$  (46) systému je imaginární část komplexně sdruženého kořenu [12]

$$\Omega = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (46)$$

Vyřešením dvou rovnic o dvou neznámých pro směr  $x$  a s dosazením  $\gamma_x = -0,1775$  a  $\Omega_x = 4,9671$  dostáváme řešení, že tlumení systému  $\xi_x$  je pro daný systém

$$\xi_x = 0,0357 \quad (47)$$

a netlumená frekvence systému ve směru  $x$   $\omega_x$  je pro dané systémy

$$\omega_x = 4,9703 \text{ rad/s} \quad (48)$$

Pro směr  $y$  dosadíme  $\gamma_y = -0,2538$  a  $\Omega_y = 4,9222$ , čímž získáme tlumení systému ve směru  $y$

$$\xi_y = 0,0515 \quad (49)$$

a netlumenou frekvenci systému ve směru  $y$

$$\omega_y = 4,9288 \text{ rad/s} \quad (50)$$

Netlumenou frekvenci systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$  lze také získat experimentálně, viz. tab. 4.4

### 3.2.2 Architektura zapojení tvarovačů vstupního signálu

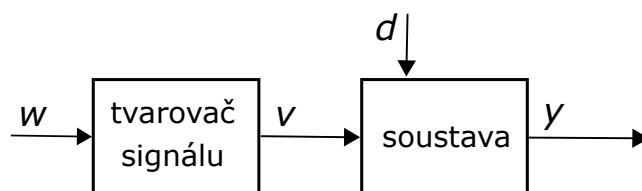
Tvarovače vstupního signálu se dají rozdělit dle jejich způsobu zapojení. Jedním je zapojení tvarovače jako filtru referenčního signálu. Druhý způsob je zapojení tvarovače v jeho inverzní podobě do zpětné vazby v uzavřeném regulačním obvodu.

**Tvarovač signálu jako filtr referenčního signálu** Tvarovač vstupního signálu lze zapojit jako filtr referenčního napětí, jako je naznačeno na obr. 11. Dá se tedy použít pro řízení v otevřené smyčce (open loop), kde nedostáváme od řízeného systému zpětnou vazbu. Odezva zapojení tvarovače signálu a nelineárního modelu dle schématu obr. 11 je zobrazena na obr. 12. Zde je vidět první kmit na výstupu ze soustavy, další je již eliminován.

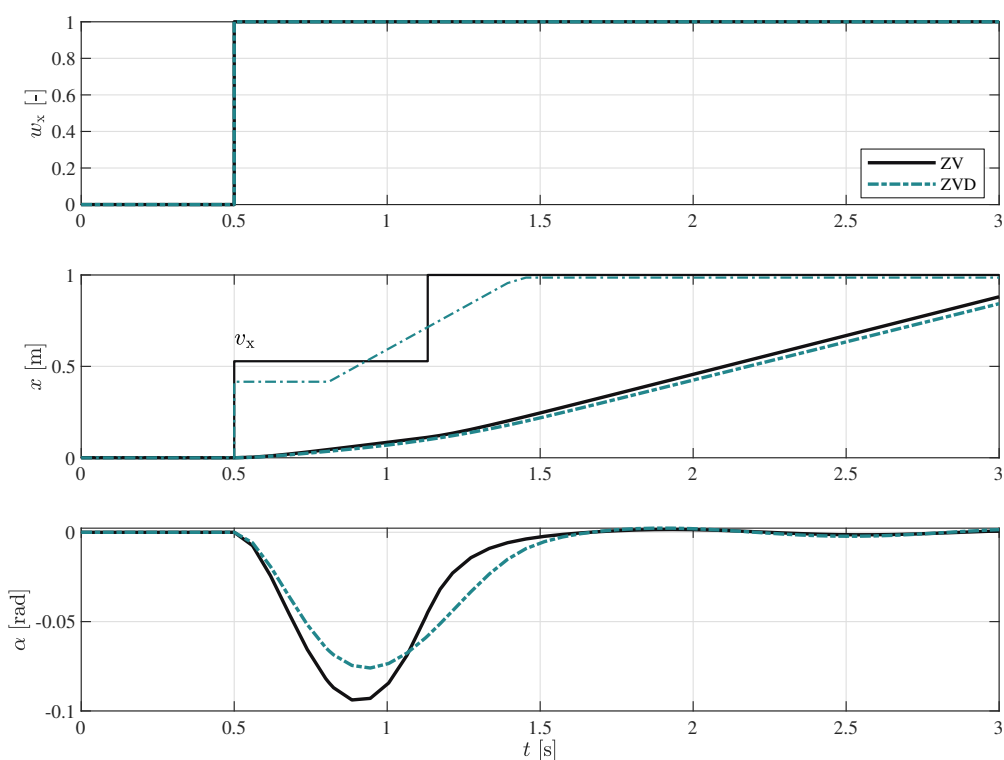
Tímto způsobem lze tvarovač signálu také aplikovat v uzavřeném regulačním obvodu obr. 10 vložením mezi referenční signál a sumační blok [8]. To lze vidět na obr. 13

**Inverzní tvarovač signálu ve zpětné vazbě URO** V případě, že vytvoříme převrácený obraz tvarovače, ho lze zapojit ve zpětné vazbě uzavřeného regulačního obvodu. Schématický náhled je zobrazen na obr. 14

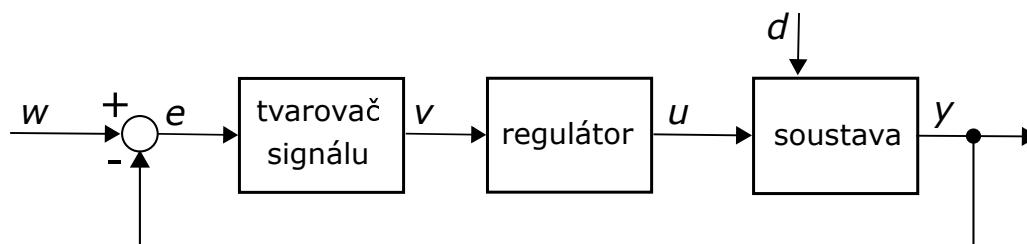




Obr. 11: Zapojení tvarovače signálu bez zpětné vazby, překresleno z [7]



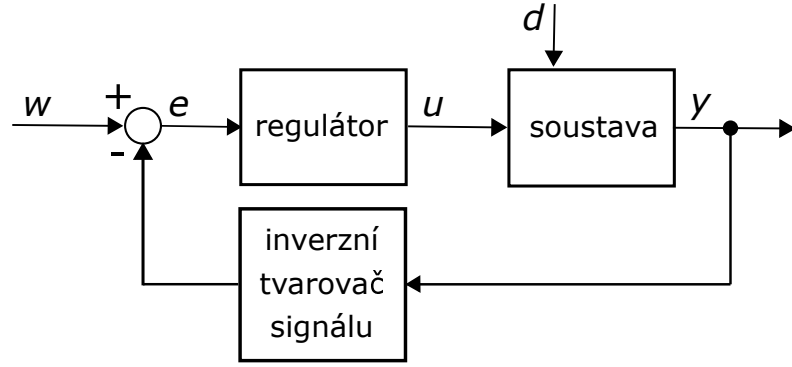
Obr. 12: Odezva nelineárního modelu na vstupní signál ve směru  $x$  s aplikovanými tvarovači ZV a ZVD v zapojení bez zpětné vazby (dle obr. 11)



Obr. 13: Uzavřený regulační obvod s aplikovaným tvarovačem signálu, překresleno z [8]

### 3.2.3 Tvarovač Zero Vibration (ZV)

Tvarovač ZV je nejjednodušší tvarovač vstupního signálu. Jeho odezva na jednotkový skok je ve tvaru dvou schodů. To lze vidět například na referenčním signálu na



Obr. 14: Uzavřený regulační obvod s inverzním tvarovačem signálu ve zpětné vazbě, překresleno z [8]

obr. 24 (čárkovaný modrý).

Přenos tvarovače ZV [7] vypadá následovně

$$S_{ZV}(s) = A_{ZV} + (1 - A_{ZV})e^{-s\tau} \quad (51)$$

kde parametr  $A_{ZV}$  zajišťuje pouze část přenosu  $S_{ZV}(s)$  a následně celý přenos

$$A_{ZV} = \frac{e^{\frac{\gamma}{\Omega}\pi}}{1 + e^{\frac{\gamma}{\Omega}\pi}} \quad (52)$$

oddělených časem  $\tau_{ZV}$

$$\tau_{ZV} = \frac{\pi}{\Omega} \quad (53)$$

Inverzní ZV tvarovač  $S_{ZVi}$  získáme převrácením jeho obrazu

$$S_{ZVi}(s) = \frac{1}{S_{ZV}(s)} \quad (54)$$

Následující tabulka demonstruje napočítané parametry tvarovače vstupního signálu ZV, vycházejících z reálných a imaginárních složek komplexně sdružených kořenů (42) a (43). Na obr. 15 jsou vykresleny kořeny  $s_x$  spolu s nulami tvarovače ZV. Pro směr  $y$  jsou vykresleny na obr. 16.

	$\tau_{ZV}[\text{s}]$	$A_{ZV}[-]$
$ZV_x$	0,6325	0,472
$ZV_y$	0,6382	0,4596

Tab. 3: Tabulka vypočtených parametrů tvarovačů ZV

Tvarovače Zero vibration mohou být citlivé na chyby a nesrovnalosti obsažené v modelech, což může být vidět v citlivostním porovnání v [10], [9]. Ty se projevují zbytkovými kmity na výstupu ze soustavy.

### 3.2.4 Tvarovač Zero Vibration with distributed Delay (ZVD)

Tvarovač ZVD je složitější varianta tvarovače ZV. Tento tvarovač má více podob. V této práci bude zmíněn ZVD tvarovač lichoběžníkového typu (v práci bude dále zmiňován jen jako ZVD). Oproti tvarovači ZV má jeho odezva podobu jednoho schodu a rampy. Odezva tvarovače je zobrazena na obr. 12.

Následující rovnice sloužící pro výpočet parametrů tvarovače ZVD lichoběžníkového typu jsou převzaty z [9]

$$S_{ZVD}(s) = A_{ZVD} + (1 - A_{ZVD})\bar{G}(s, T)e^{-sT} \quad (55)$$

Obraz přenosu tvarovače ZVD se vypočte následujícím vztahem

$$A_{ZVD} = \frac{me^{\frac{\gamma}{\Omega}(\pi+\varphi)}}{1 + me^{\frac{\gamma}{\Omega}(\pi+\varphi)}} \quad (56)$$

Inverzní tvarovač  $S_{ZVDi}$  lze získat převrácením obrazu přenosu  $S_{ZVD}$

$$S_{ZVDi}(s) = \frac{1}{S_{ZVD}(s)} \quad (57)$$

Ostatní parametry jsou dány vztahy

$$T_{ZVD} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (58)$$

$$\tau_{ZVD} = \frac{\pi + \varphi}{\Omega} \quad (59)$$

$$m = |\bar{G}(-\gamma + j\Omega, T)| \quad (60)$$

$$\varphi = \arg(\bar{G}(-\gamma + j\Omega, T)) \quad (61)$$

$$\bar{G}(s, T) = \frac{1 - e^{sT}}{T_{ZVD}s} \quad (62)$$

Vypočtené parametry dle vztahů výše jsou vypsány v tabulce tab. 3.2.4. Odezva navrženého tvarovače ZVD pro směr  $x$  lze vidět na obr. 12. Citlivostní křivka tvarovačů v práci [9] ukazuje, že při nepřesnosti parametrů modelu oproti skutečné soustavě bude mít tvarovač ZVD menší zbytkové kyvy, než tvarovač ZV.

	$T_{ZVD}[\text{s}]$	$\tau_{ZVD}[\text{s}]$	$A_{ZVD}[-]$
ZVD <sub>x</sub>	0,6325	0,309	0,4159
ZVD <sub>y</sub>	0,6382	0,3087	0,4279

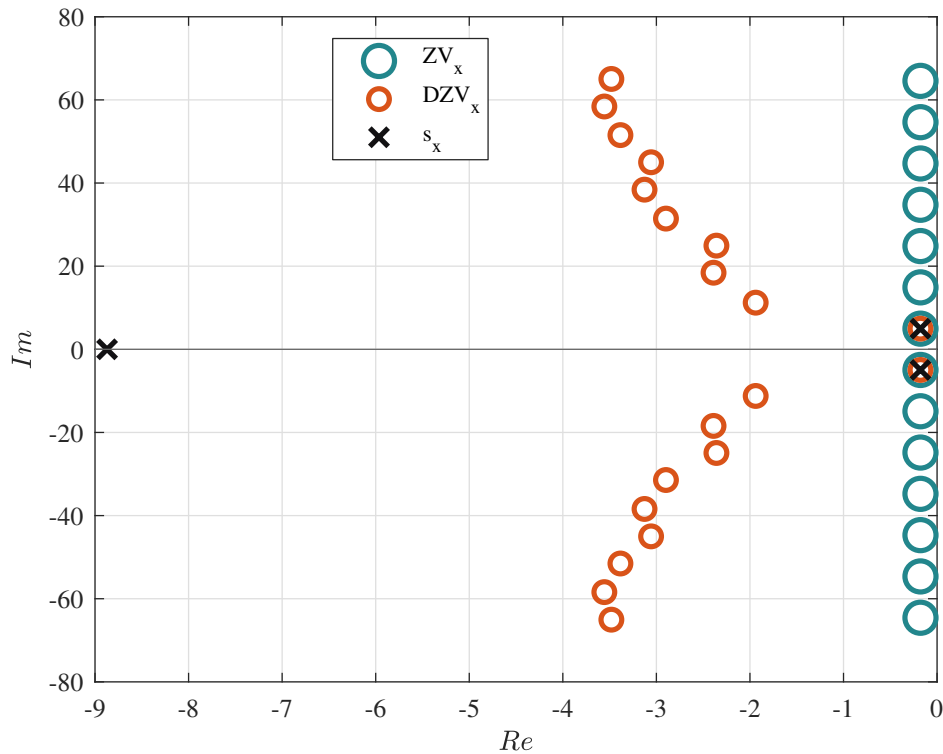
Tab. 4: Tabulka vypočtených parametrů pro tvarovače ZVD

### 3.2.5 Vykreslení pólů a nul tvarovače a dílčí odezvy systému

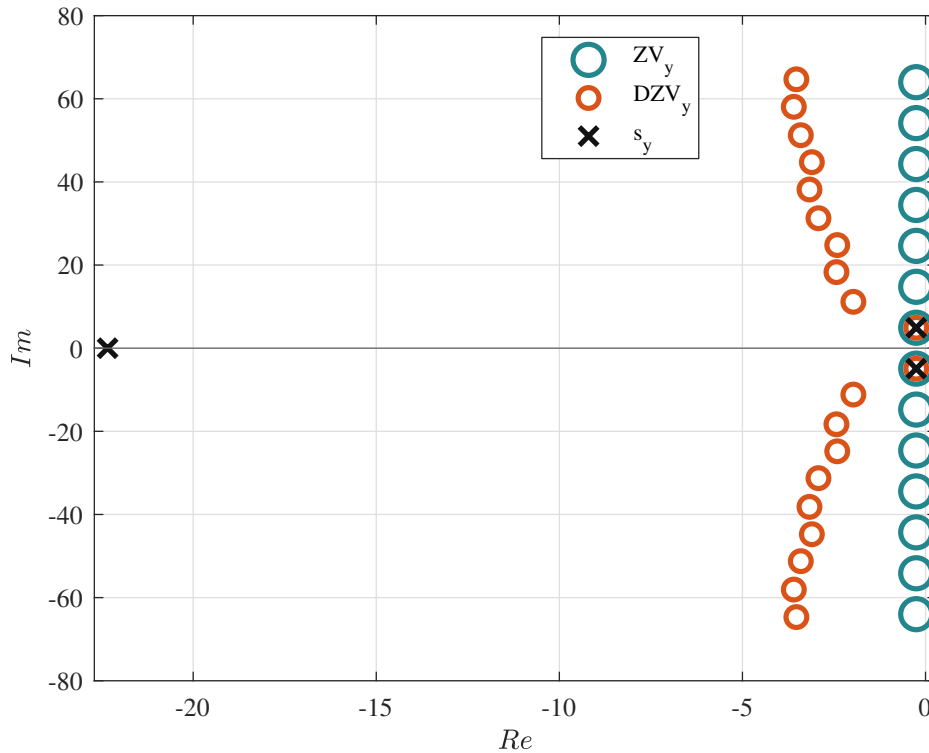
Póly dílčích přenosů ze vstupu  $F_x$  na úhel  $\alpha$  a z  $F_y$  na úhel  $\beta$  jsou vykresleny na obr. 15 a obr. 16 včetně nul navržených tvarovačů vstupního signálu ZV a ZVD. Tvarovače ZV a ZVD mají nekonečné spektrum nul [9], nejsou tudíž vykresleny všechny. Kvůli nekonečnému spektru nul tvarovačů byly nuly vykresleny s pomocí softwaru sloužícího pro hledání kořenů na bázi kvazi-polynomiálního mapování [15]. Jde vidět, že spektrum nul ZV tvarovače směřuje pouze ve směru imaginární osy v komplexní rovině. Oproti tomu spektrum nul tvarovače ZVD směřuje i doleva do stabilní oblasti v komplexní rovině.

V případě použití inverzního tvarovače se nuly tvarovače změny na póly. Při aplikaci inverzního ZV tvarovače na skutečné soustavě docházelo k periodickým změnám napětí na výstupu z regulátoru (obr. 24), přestože poloha jeřábu byla v okolí své referenční hodnoty a k žádnému znatelnému zásahu docházet nemělo. Póly inverzního tvarovače ZV v celkovém uzavřeném zpětnovazebním obvodu jsou zřejmě blízko k mezi stability, což by se dalo zjistit vykreslením pólů a nul tohoto celkového zpětnovazebního obvodu.

Použití inverzního tvarovače ZVD vedlo k dosažení přijatelnějších výsledků a nedocházelo k problémům, jako u inverzního tvarovače ZV (obr. 26). To je dáno směrem spektra pólů ZVD tvarovače (při inverzi se z nul stanou póly).



Obr. 15: Vykreslení kořenů  $s_x$ , tvarovače ZV a tvarovače ZVD pro směr  $x$



Obr. 16: Vykreslení kořenů  $s_y$ , tvarovače ZV a tvarovače ZVD pro směr  $y$

### 3.3 Posouzení kvality regulace

Abych mohl porovnat výsledky aplikovaných metod, rozhodl jsem se využít integrálních kritérií jakosti. Před použitím určitého kritéria je důležité rozepsat, jak které kritérium funguje a které může být vhodné pro použití v oblasti řízení jeřábů.

Jako další parametr k posouzení kvality regulace jsem si zvolil maximální vychýlení úhlů  $\alpha_{max}$  a  $\beta_{max}$ .

Posledním parametrem k zhodnocení výsledků byl čas ustálení  $T_\alpha$ ,  $T_\beta$ , který určuje čas, kdy není překročena absolutní hranice  $|\alpha, \beta| \leq 0,02 \text{ rad}$ .

#### 3.3.1 Integrální kritéria jakosti

Princip zhodnocení kvality regulace spočívá ve výpočtu plochy regulační odchylky  $e$ . Čím menší nám vyjde integrální kritérium, tím menší je plocha regulační odchylky a tím dříve se nám systém ustálí na požadované hodnotě. Nejmenší výsledky vypovídají o největší kvalitě regulace.

**Kritérium lineární regulační plochy (IE Integral of Error)** Kritérium lineární regulační plochy (63) [13] pracuje s holou regulační odchylkou. Ta může být v určitých okamžicích kladná či záporná a při kmitání kolem regulační odchylky dochází k odečtení záporné plochy odchylky a kladné plochy odchylky. Systém tedy může kmitat a na rostoucí velikost integrálního kritéria to nemá vliv. K čemuž dochází z důvodu násobného kořenu (sdruženě komplexní). Dle zdroje [13] je použité

v případech, kdy lze zamezit vzniku kmitavé složky. Toto kritérium proto nebude k vyhodnocování použito, protože jeřáb je kmitavá soustava.

$$J_{IE} = \int_0^{\infty} e_{(t)} dt \quad (63)$$

#### **Kritérium absolutní regulační plochy (IAE Integral of Absolute Error)**

Kritérium absolutní regulační plochy (64) [13] narozdíl od kritéria lineární regulační plochy využívá absolutní hodnotu regulační odchylky. Toto kritérium je oproti předchozímu vhodné k použití pro kmitající soustavy.

$$J_{IAE} = \int_0^{\infty} |e_{(t)}| dt \quad (64)$$

#### **Časově znásobené kritérium absolutní regulační plochy (ITAE – integral of Time multiplied by Absolute Error)**

Oproti kritériu absolutní regulační plochy umí ITAE (65) [13] penalizovat regulační odchylku časem. Každá regulační odchylka je vynásobena aktuálním časem, tzn. větší čas spolu s regulační odchylkou více ovlivňuje výsledek kritéria tak, že dochází k penalizaci výsledku.

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e_{(t)}| dt \quad (65)$$

#### **Kritéria kvadratické regulační plochy (ISE - Integral of Squared Error)**

Kritérium kvadratické regulační plochy (66) [13] se oproti kritériu IAE snaží zjednodušit analytický výpočet (výměnou absolutní hodnoty za kvadrát).

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} e_{(t)}^2 dt \quad (66)$$

**Kritéria kvadratické regulační plochy (Integral of Time multiplied by Squared Error)** Toto kritérium vychází z kritéria ISE, akorát je penalizováno časem (obdobně jako ITAE) (67) [13]

$$J_{ITSE} = \int_0^{\infty} t e_{(t)}^2 dt \quad (67)$$

### **3.3.2 Zvolení vhodného integrálního kritéria**

Vzhledem k tomu, že je v této práci regulovaná soustava kmitavá, nepřipadá v úvahu použít kritérium lineární regulační plochy (IE). Kritéria ITAE a ITSE penalizují odchylky časem, čímž by mohli značně ovlivnit výsledky kritéria u malých odchylek úhlů ve větším čase. Rozhodl jsem se proto použít integrální kritérium kvadratické regulační plochy (ISE).

## 4 Experimentální část

Experimentální část spočívá v aplikaci navržených řídicích metod na skutečné soustavě. K tomu byl využit portálový jeřáb značky INTECO.

Začátek kapitoly pojednává o překážkách, které se objevily při práci se skutečnou soustavou. To je například pásmo necitlivosti, změření maximálních rychlostí motorů či zjištění, jak se jeřáb ve skutečnosti chová oproti navrženým modelům. Dále je vysvětleno, jak byly získány chybějící parametry. Dojde také k porovnání chování navržených modelů (lineárního i nelineárního) s jeřábem INTECO. Poté následuje aplikace navržených metod na skutečné soustavě.

### 4.1 Skutečná soustava portálového jeřábu INTECO

Tato část kapitoly pojednává o tématech, která byla řešena před samotnou aplikací řídicích metod. Je zde vysvětleno ovládání jeřábu, proměření pásma necitlivosti, zjištění zbývajících parametrů, porovnání navržených modelů se skutečnou soustavou a proměření poloh jeřábu při maximálním napětí.

#### 4.1.1 Ovládání jeřábu

Jeřáb je ovládán pomocí signálu pulsně šířkové modulace PWM (Pulse width modulation). Rozsah PWM hodnot je od hodnot -1 do 1, což odpovídá napětí v procentech od -100% až 100%. Toto číslo udává střidu, což je poměr času zapnutí a vypnutí napětí na motoru.

#### 4.1.2 Pásmo necitlivosti

Prvním problémem, který byl potřeba vyřešit, bylo pásmo necitlivosti ve směrech  $x$  i  $y$ . Jeřábová kolejnice i jeřábová kočka se začne pohybovat až při určité hranici napětí. Tato hranice je bohužel pokaždé jiná. Rozhodl jsem se proto udělat 5 měření do každého směru a tyto hodnoty zprůměrovat aritmetickým průměrem. Pásmo jsem změřil skrze simulink s pomocí narůstajícího rampového signálu, dokud se soustava nezačala pohybovat. Jeřáb začal simulovat z náhodných míst, ale stabilizován. Byla vzata vždycky ta hodnota, kdy se jeřáb rozjel a již nezastavoval.

	č.1	č.2	č.3	č.4	č.5	Průměr
$+x$	0,102	0,104	0,107	0,118	0,133	0,1128
$-x$	-0,093	-0,11	-0,102	-0,1095	-0,108	-0,1045
$+y$	0,076	0,0874	0,081	0,081	0,0855	0,08218
$-y$	-0,0722	-0,065	-0,068	-0,068	-0,065	-0,06764

Tab. 5: Hodnoty pásma necitlivosti skutečné soustavy pro směr  $x$  a  $y$  do kladného i záporného směru

Potřebné napětí rozpoohybování jeřábu se liší v kladném a záporném směru. Pro pohyb jeřábu ve směru  $x$  bylo nameřeno a spočítáno pásmo necitlivosti pro směr  $x$

$$x_d \in (-0,1045; 0,1128) \quad (68)$$

a pro směr  $y$

$$y_d \in (-0,0,0676; 0,08218) \quad (69)$$

Pásmo necitlivosti bylo přidáno do nelineárního a lineárního modelu, aby se více podobaly skutečné soustavě.

**Eliminace pásma necitlivosti** Následně bylo potřeba pásmo necitlivosti eliminovat. Toho jsem docílil v simulinku pomocí bloku "Coulumbic and viscous friction". Eliminační pásmo bylo nastaveno uvnitř pásma necitlivosti. Hodnoty použité k eliminaci pásma necitlivosti jsem zvolil následující

pro směr  $x$

$$x_e \in (-0,1; 0,1) \quad (70)$$

a pro směr  $y$

$$y_e \in (-0,06264; 0,07718) \quad (71)$$

Eliminační pásmo bylo také aplikováno do lineárního a nelineárního modelu.

#### 4.1.3 Zjištění zbývajících parametrů

**Koeficient k přepočtu napětí na sílu  $F$**  Po aplikaci pásma necitlivosti a eliminačního pásma je možné porovnávat lineární a nelineární model se skutečným jeřábem INTECO. Pro porovnání jsem naměřil několik odezev na skok o různých velikostech. Dojezdy jeřábové kočky a kolejnice se zprvu s mými modely moc neshodovaly.

Jelikož nevím, jaká je funkce mezi napětími  $u_{x,y}$  a silami  $F_{x,y}$ , snažím se na modelech upravit koeficienty tření  $k_{x,y}$  a přepočtu napětí  $k_{ux,uy}$  na sílu  $F_{x,y}$  tak, aby se shodovaly směrnice poloh  $x, y$  a kyv kyvadla (dosažený výsledek je k vidění na obr. 17 a obr. 18). Shoda kyvu je důležitá, protože jsou z lineárního modelu následně počítány parametry pro tvarovače signálu.

Tření  $k_x$  a  $k_y$  byla zafixována na hodnotách

$$k_x = 31 \text{ Ns/m} \quad (72)$$

$$k_y = 26,5 \text{ Ns/m} \quad (73)$$

Následně byly voleny parametry tak, aby se směrnice poloh  $x$  a  $y$  co nejvíce shodovaly.



	0,15	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Průměr
$k_{ux}$	12,8	13,3	14	13,05	13,75	12	13,15
$k_{uy}$	14	13,5	12,5	12	12	10,9	12,48

Tab. 6: Naměřené koeficienty  $k_{ux,uy}$  sloužící pro přepočet napětí  $u_{x,y}$  na síly  $F_{x,y}$

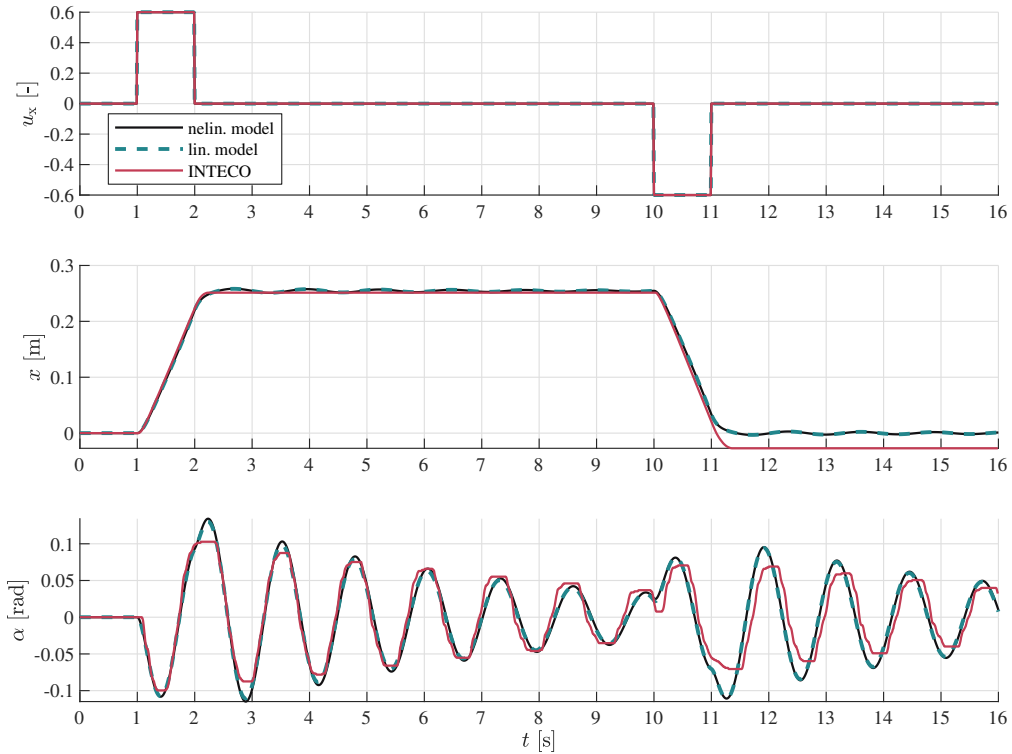
Průměrné hodnoty z tab. 4.1.3 pro  $k_{ux,uy}$  byly aplikovány v modelech k přepočtu napětí  $u_{x,y}$  na síly  $F_{x,y}$

#### 4.1.4 Porovnání navržených modelů s jeřábem INTECO

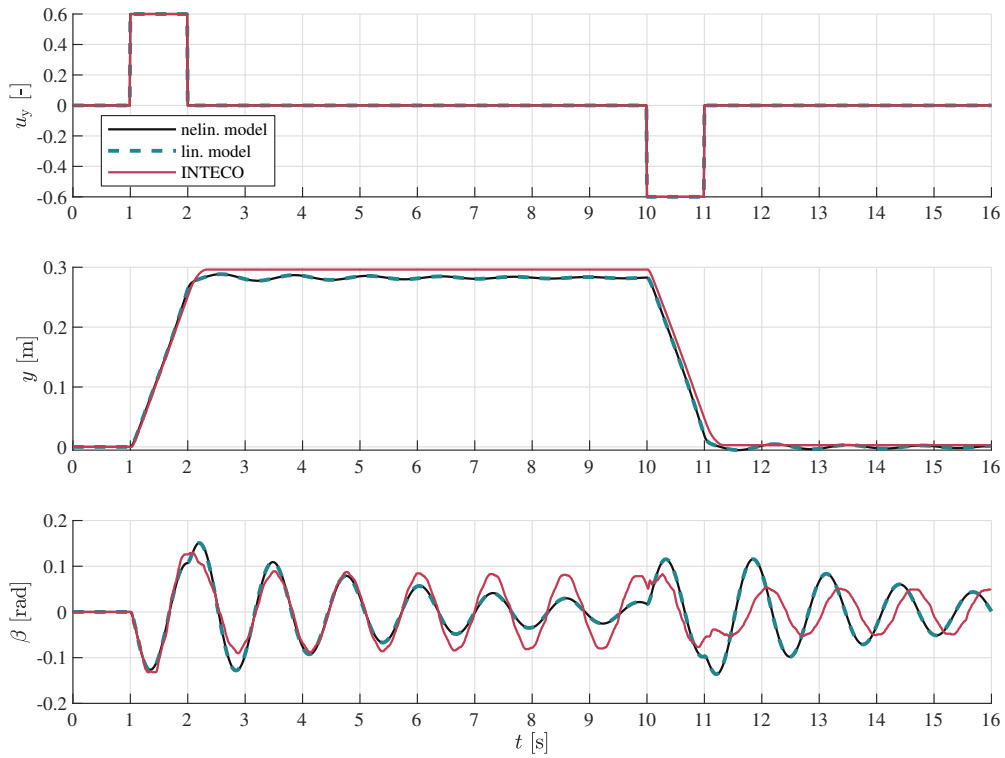
Po zjištění všech parametrů a úpravě modelů byly tyto modely porovnávány se skutečnou soustavou. Porovnání lze vidět na obr. 17 a obr. 18.

Ve směru  $x$  je vidět, že jeřáb cestou zpět ujede větší vzdálenost, než dopředu. Mohlo by to být způsobeno kabeláží, která je zavěšena na kolejnici a mohla by ji svoji silou tahat o něco více do záporného směru. Naopak směrem do kladného směru musí kolejnice sílu od kabelu překonávat.

Perioda kyvu jeřábu a mých modelů je velmi podobná. Rozdíl přichází ve chvíli, kdy se kyvadlo kýve a jeřáb se rozjede zpět, viz. obr. 18). Což by mohlo být důsledkem nesprávně odhadnutého parametru tření  $k_y$ . I přesto chování jeřábu a modelů považuji za dostačující, protože jsou nejzásadnější první kyvy, které budou pomocí tvarovačů eliminovány.



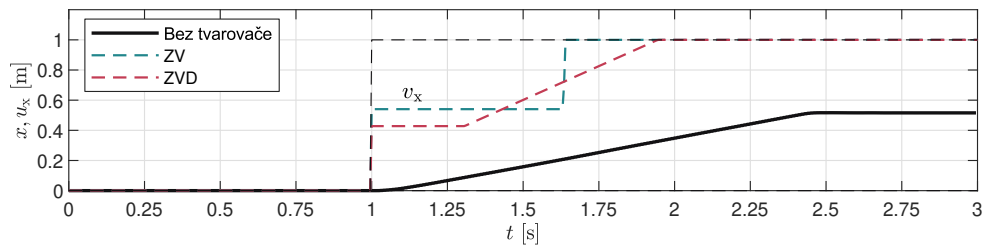
Obr. 17: Porovnání odezvy modelů a skutečné soustavy při zásahu  $u_x = 0,6$  v čase  $t = 1$  s a zásahu  $u_x = -0,6$  v čase  $t = 10$  s



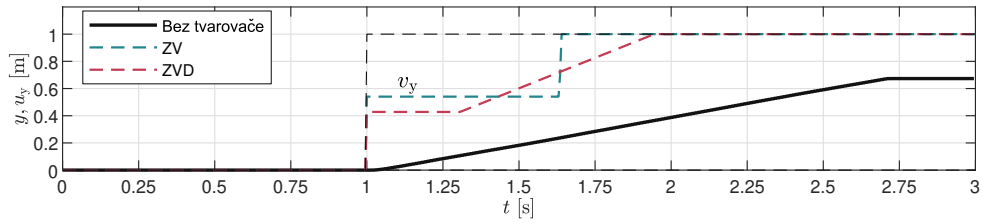
Obr. 18: Porovnání odezvy modelů a skutečné soustavy při zásahu  $u_y = 0,6$  v čase  $t = 1$  s a zásahu  $u_y = -0,6$  v čase  $t = 10$  s

#### 4.1.5 Maximální rychlost jeřábu oproti referenčním z tvarovačů

Na obr. 19 a obr. 20 lze vidět průběhy aplikovaných tvarovačů oproti maximálního napětí na vstupu do soustavy ( $u_{x,y} = 1$ ). Při pokusu o naladění PID regulátoru se vstupním tvarovačem jsem zjistil, že poloha vozíku ve směru  $x$  i  $y$  nestíhá dohánět svoji referenci, což by mohlo mít vliv na funkčnost tvarovačů ZV a DZV. Zalomení průběhu polohy na konstantní hodnotu je dáno dojetím jeřábové kolejnice či kočky na svůj limit.



Obr. 19: Vykreslení výstupů z tvarovačů v porovnání s polohou ve směru  $x$  při maximálním vstupním napětí  $u_y = 1$  (dle obr. 11)



Obr. 20: Vykreslení výstupů z tvarovačů v porovnání s polohou ve směru  $y$  při maximálním vstupním napětí  $u_x = 1$  (dle obr. 11)

#### 4.1.6 Tlumení kyvu břemene pomocí P regulátoru

Jako první způsob řízení na reálné soustavě bylo řízení polohy  $x$  a  $y$  pomocí PID regulátoru v kombinaci s P regulátorem zapojeným ve zpětné vazbě pro úhly  $\alpha$   $\beta$ .

PID regulátor byl naladěn pomocí automatického ladění v komponentě PID v prostředí Matlab Simulink. Ladění bylo nastaveno na sledování reference. Regulátor typu P byl v tu chvíli odpojen z regulačního obvodu. Následně byl zapojen do celkového regulačního obvodu a naladěn experimentálně na lineárním modelu, následně ozkoušen na nelineárním modelu. Zásahy regulátorů byly sčítány sumačním blokem. Parametry nastavených regulátorů jsou vypsány v tab. 7.

Řízení bylo aplikováno na reálnou soustavu. Výsledné průběhy lze vidět na obr. 21, obr. 22 a obr. 23. Z měření lze vidět, že regulátor PID překmitl referenční signál. Tato metoda není zahrnuta v hodnocení výsledků, protože je zde potřeba měřit úhly  $\alpha$  a  $\beta$ .

Výkyvy akčního zásahu  $u_y$  ve směru  $y$  jsou dány přejížděním jeřábové kočky kolem referenční polohy. Mohlo by to být z důvodu nevhodně nastaveného eliminačního pásma necitlivosti. Šlo by to vyřešit větší rezervou mezi pásmem necitlivosti a jeho eliminačním pásmem.

Výhoda regulace na výkyvu úhlu je, že při jeho vychýlení regulační obvod reaguje a stabilizuje ho. To by mohlo být vhodné proti vnějším vlivům, jako je například vítr.

	P	I	D
x	7	0,005	0,5
y	3	0,008	0,2
$\alpha$	5	-	-
$\beta$	5	-	-

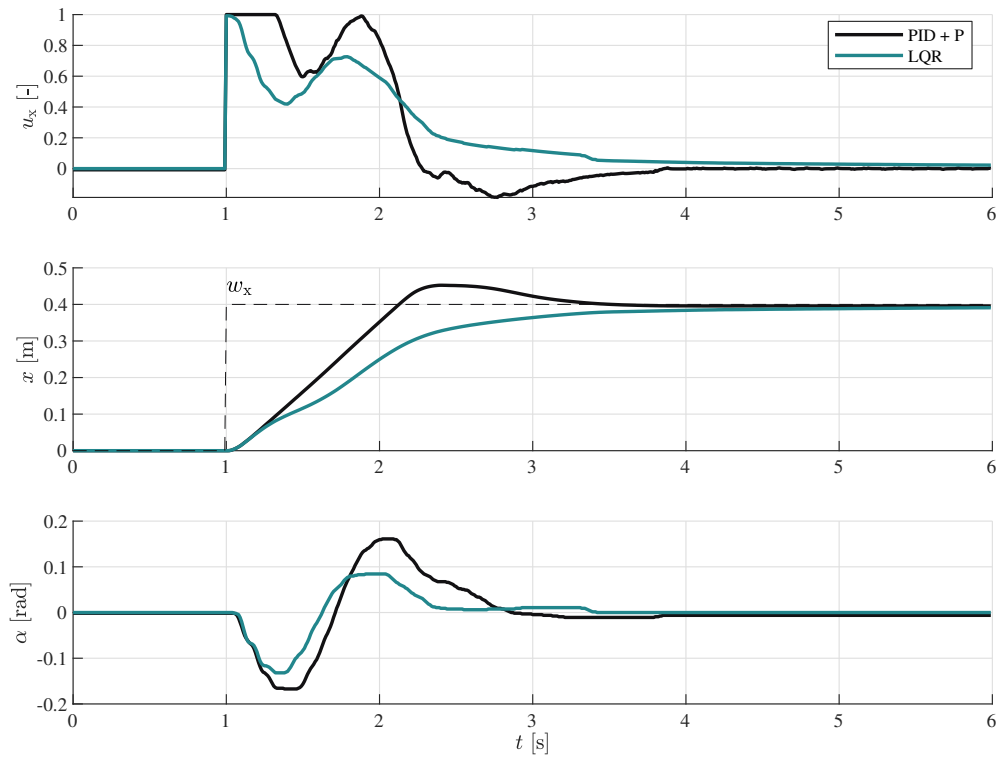
Tab. 7: Navržené hodnoty pro regulátory PID - potlačení kyvu břemene pomocí P regulátoru

#### 4.1.7 Aplikace LQR regulátoru

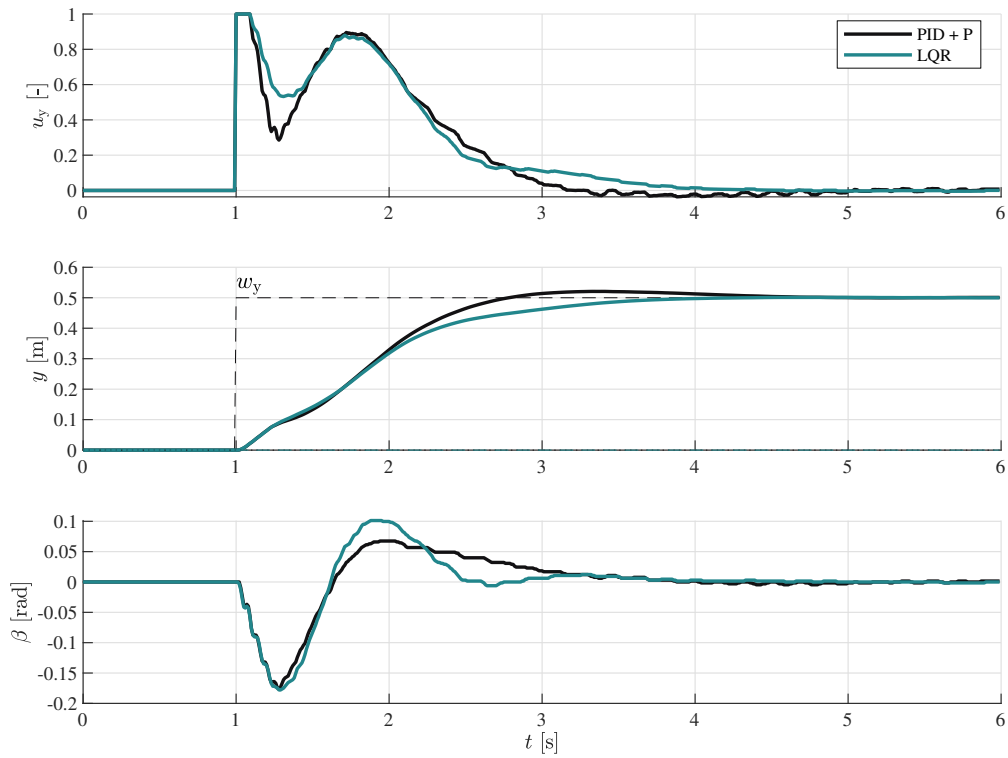
Na lineárním modelu byl také navrhnut LQR regulátor. U regulátoru byly zaslepeny výstupy neměřených veličin ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\alpha}$  a  $\dot{\beta}$ ). Nezapojení těchto stavů vede k nižší

účinnosti tohoto regulátoru. Odezvy regulátoru jsou vykresleny na obr. 21, obr. 22 a obr. 23.

Regulátor LQR je v tomto nastavení pomalejší oproti kombinaci PID a P regulátoru, avšak zde nedochází k překmitu polohy. Stejně jako předchozí metoda, není tento způsob řízení zahrnut v hodnocení výsledků, protože je zde potřeba měřit úhly  $\alpha$  a  $\beta$ .



Obr. 21: Potlačení kyvu břemene pomocí P regulátoru v porovnání s LQR ve směru  $x$



Obr. 22: Potlačení kyvu břemene pomocí P regulátoru v porovnání s LQR ve směru  $y$

## 4.2 Aplikace tvarovače ZV a invertovaného ZV na reálné soustavě

První pokus o aplikaci tvarovače signálu byl v zapojení PID regulátorů na polohy  $x$  a  $y$ . Jejich parametry jsou v tab. 4.2. Tyto parametry byly převzaty z předešlého ladění (tab. 7).

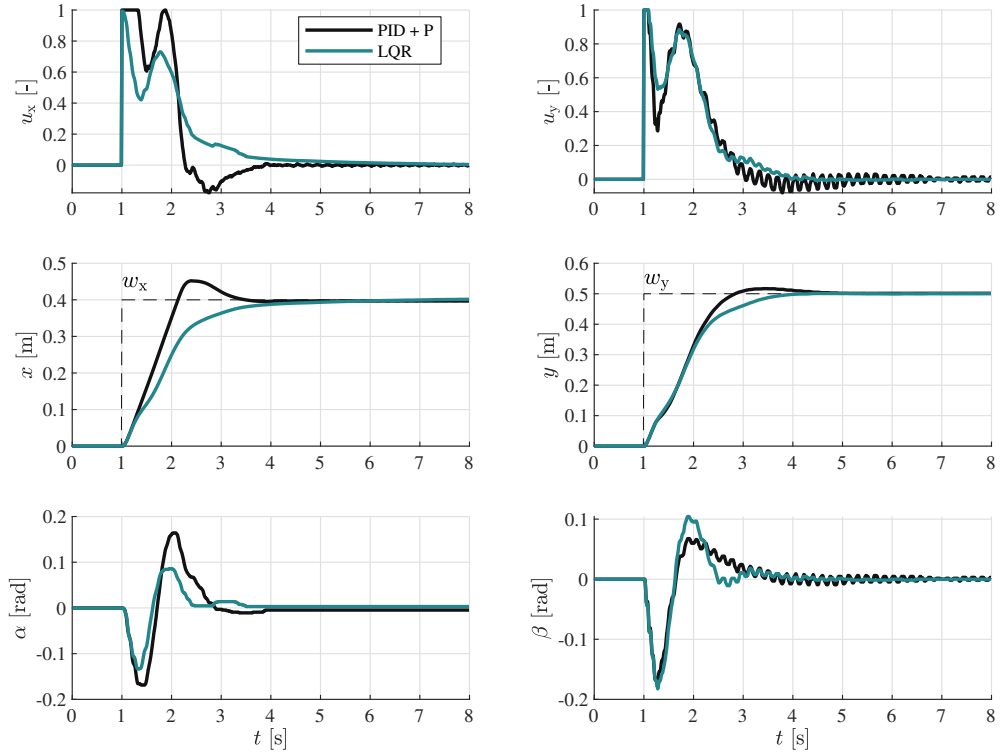
PID regulátory byly zkombinovány s tvarovačem typu ZV v zapojení dle obr. 13 a následně s inverzním tvarovačem ZV (dle zapojení obr. 14).

	$x$	$y$
P	7	3
I	0,005	0,008
D	0,5	0,2

Tab. 8: Parametry PID regulátorů naladěné pro ZV vstupní tvarovač v zapojení dle obr. 13

### 4.2.1 Aplikace tvarovačů ZV ve směru $x$

Na obr. 24 lze vidět porovnání průběhů zapojených tvarovačů ZV oproti PID regulátoru (regulující pouze polohu  $x$ ). Použití PID regulátoru pro dojetí na polohu vychyluje kyvadlo maximálně na  $\alpha_{max} = 0,21$  rad a kyvadlo se kýve déle, než maximální měřený čas (tj. více než 19 vteřin). Při použití tvarovače ZV se dostáváme



Obr. 23: Potlačení kyvu břemene pomocí P regulátoru v porovnání s LQR ve smíšeném směru  $x$  i  $y$

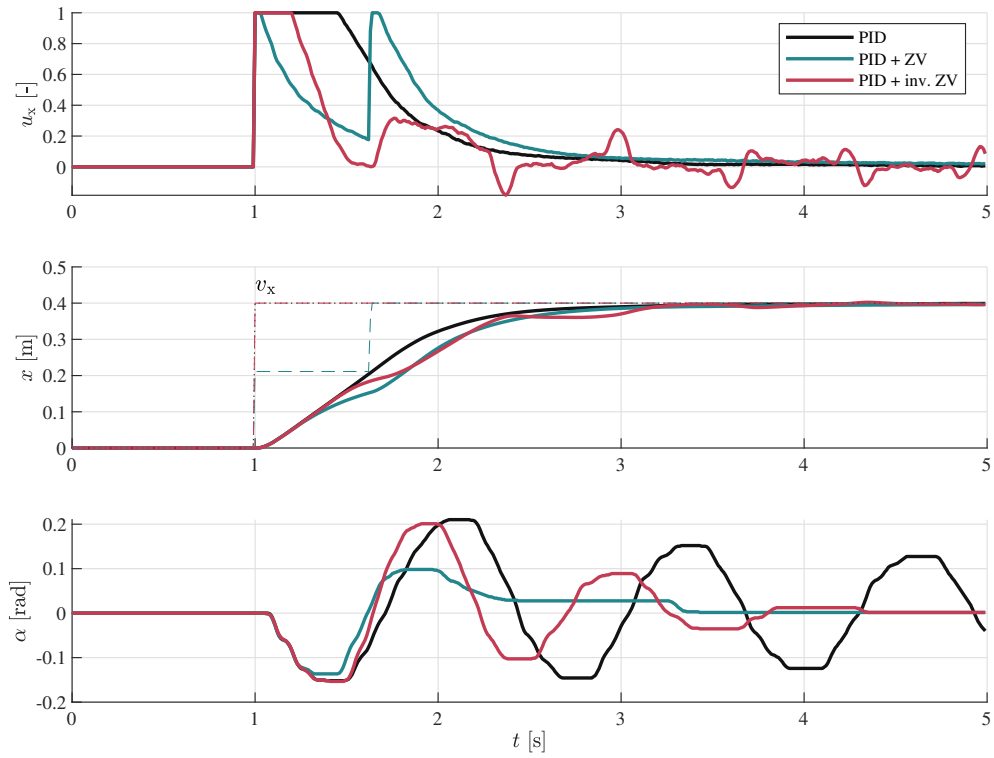
na maximální vychýlení kyvadla  $\alpha_{max} = -0,14 \text{ rad}$  a ustálení v čase  $T_\alpha = 2,29 \text{ [s]}$ . Tvarovač ZV zvládl potlačit kyv břemene dle kritéria  $J_{ISE}\alpha[-]$  o 78,9%. Použití inverzního tvarovače ZV vyvolává na výstupu z regulátoru periodické výkyvy napětí. To lze vidět na naměřeném průběhu na obr. 24. Celkové póly uzavřeného regulačního obvodu jsou pravděpodobně velmi blízko mezi stability, avšak stále ve stabilní oblasti komplexní roviny. Vyhodnocená data z měření jsou vypsána v tab. 4.3.1.

Směr $x$	$J_{ISE}\alpha[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	$\alpha_{max}$	$T_\alpha[\text{s}]$
PID	$65,71 \cdot 10^3$	0	0,21	>19
PID + ZV	$13,86 \cdot 10^3$	78,9	-0,14	2,29
PID + inv. ZV	$26,52 \cdot 10^3$	59,64	0,2	2,69

Tab. 9: Vyhodnocení průběhů odezvy z obr. 24 ve směru  $x$  s pomocí  $J_{ISE}$  integrálních kritérií včetně zlepšení oproti samotnému PID v procentech.

#### 4.2.2 Aplikace tvarovačů ZV ve směru $y$

Použití PID regulátoru pro dojetí na polohu vychyluje kyvadlo maximálně na  $\beta_{max} = 0,24 \text{ rad}$  a kyvadlo se kýve déle, než maximální měřený čas (tj. více než 19 vteřin). Při použití tvarovače ZV se dostáváme na maximální vychýlení kyvadla  $\beta_{max} = -0,16 \text{ rad}$  a ustálení v čase  $T_\beta = 9,34 \text{ s}$ . Oproti směru  $x$  se kyvadlo kýve déle, což by mohlo být dáno odchylkou v parametrech netlumené frekvence systému  $\omega$  a tlumení

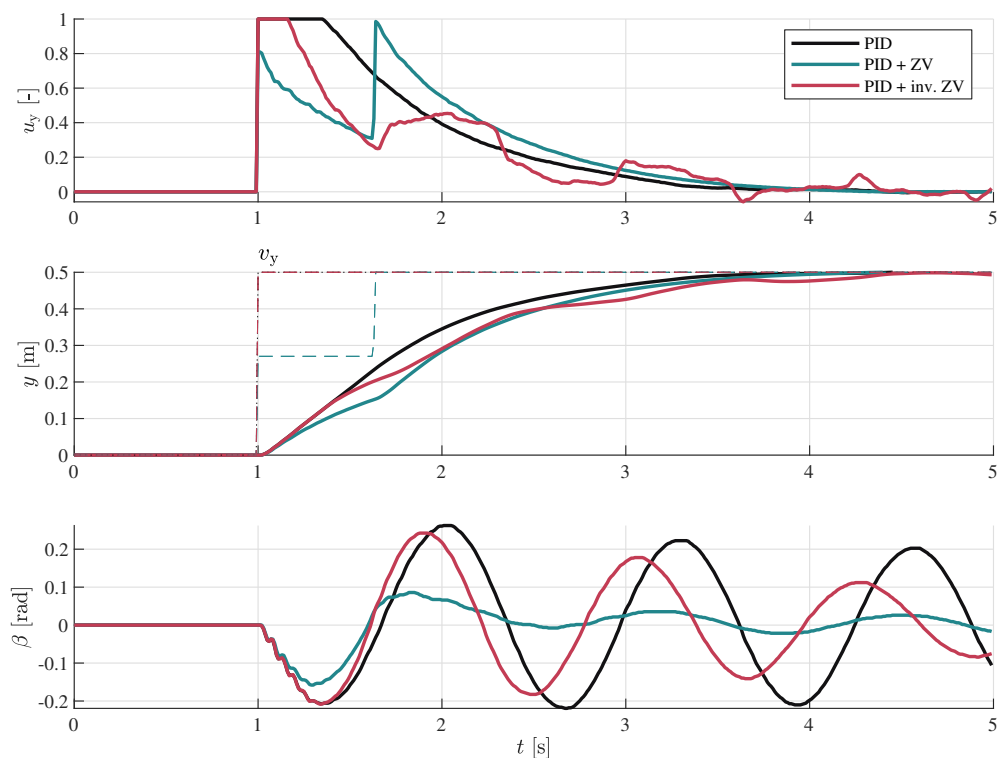


Obr. 24: Odezva portálového jeřábu na požadovanou referenční polohu  $x = 0,4 \text{ m}$  v čase  $t = 1 \text{ s}$  při zapojení PID (dle obr. 10), vstupního tvarovače ZV (dle obr. 13) a inverzního tvarovače ZV (obr. 14)

Směr $y$	$J_{\text{ISE}}\beta[-]$	elim. $J_{\text{ISE}}\beta[\%]$	$\beta_{\text{max}}$	$T_{\beta}[\text{s}]$
PID	$303,4 \cdot 10^3$	0	0,24	>19
PID + ZV	$11,44 \cdot 10^3$	96,23	-0,16	9,41
PID + inv. ZV	$103,2 \cdot 10^3$	65,99	0,24	>19

Tab. 10: Vyhodnocení průběhů odezvy z obr. 25 ve směru  $y$  s pomocí  $J_{\text{ISE}}$  integrálních kritérií včetně zlepšení oproti samotnému PID v procentech.

systému  $\xi$ , které jsou vypočítány z přenosů lineárního modelu. Tyto parametry se dají získat experimentálně ze změřeného průběhu kyvu nákladu a následně použít k přepočtu vstupních tvarovačů, což by vedlo k lepším výsledkům. To je aplikováno v pozdější fázi u tvarovačů ZVD. Tvarovač ZV vládl potlačit kyv dle kritéria  $J_{\text{ISE}}\beta$  o 94,23%. Použití inverzního tvarovače ZV vede k nestabilitě celé soustavy. To lze vidět na průběhu akčního zásahu.



Obr. 25: Odezva portálového jeřábu na požadovanou polohu  $y = 0,5$  m v čase  $t = 1$  s při zapojení PID (dle obr. 10, vstupního tvarovače ZV (dle obr. 13) a inverzního tvarovače ZV (obr. 14)

### 4.3 Aplikace tvarovače ZVD a invertovaného ZVD na reálné soustavě

Kvůli nedostatečným výsledkům tvarovačů ZV byly aplikovány tvarovače DZV. Jejich výsledky jsou znatelně lepší oproti ZV tvarovačům. Zapojení jsou obdobná jako u tvarovačů ZV. Měření probíhala ve směrech  $x$ ,  $y$  a jejich smíšeném směru. PID regulátor pro polohu  $x$  je převzat z předchozího ladění, regulátor PID na polohu  $y$  byly opět automatickým laděním, protože jeho odezvy v zapojení se ZVD tvarovačem nebyly dostatečné. Jejich parametry jsou v tab. 4.3.

	$x$	$y$
P	7	4,1
I	0,005	0,02
D	0,5	0,2

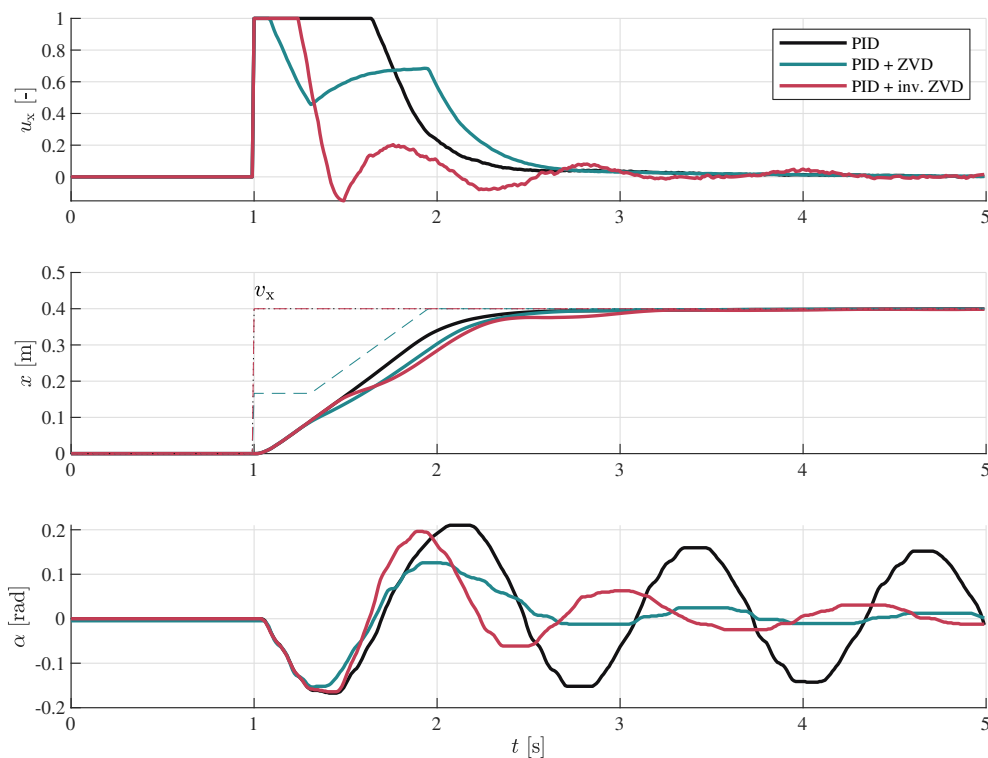
Tab. 11: Parametry PID regulátorů nalažené pro ZVD vstupní tvarovač v zapojení dle obr. 13

#### 4.3.1 Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $x$

Pro různé zapojení tvarovačů ZVD ve směru  $x$  (v obr. 26) došlo k lepším výsledkům oproti ZV tvarovačům. Výsledky jsou vypsány v tab. 4.3.1. Nejlepších výsledků bylo



dosaženo v zapojení ZVD (dle obr. 13) s eliminací úhlu  $\alpha$  o 79,04 %. V zapojení s inverzním tvarovačem (obr. 14) ZVD došlo k eliminaci kyvu úhlu  $\alpha$  o 65,1 %.



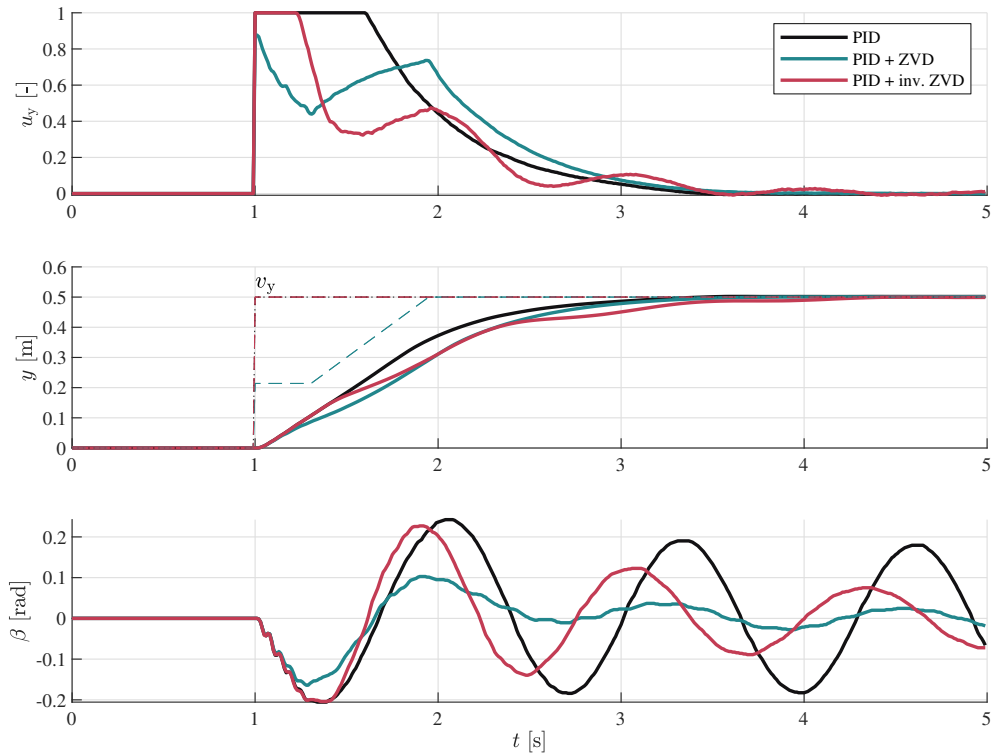
Obr. 26: Odezva portálového jeřábu na požadovanou polohu  $x = 0,4$  m v čase  $t = 1$  s při zapojení PID (dle obr. 10, vstupního tvarovače ZVD (dle obr. 13) a inverzního tvarovače ZVD (obr. 14)

Směr x	$J_{ISE\alpha}[-]$	elim. $J_{ISE\alpha}[\%]$	$\alpha_{max}$	$T_{\alpha}[s]$
PID	$65,71 \cdot 10^3$	0	0,21	>19
PID + ZVD	$13,77 \cdot 10^3$	79,04	-0,15	2,62
PID + inv. ZVD	$22,93 \cdot 10^3$	65,1	0,2	3,53

Tab. 12: Vyhodnocení průběhů odezvy z obr. 26 ve směru  $x$  s pomocí  $J_{ISE}$  integrálních kritérií včetně zlepšení oproti samotnému PID v procentech.

#### 4.3.2 Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $y$

Ve směru  $y$  byly naměřeny průběhy vyhodnocené dle integrálního kritéria ISE (tab. 4.3.2). V tomto směru dosáhlo nejlepšího výsledku zapojení ZVD (dle obr. 13) s eliminací úhlu  $\alpha$  o celých 94,67 %. V zapojení s invertním tvarovačem (obr. 14) ZVD došlo k eliminaci kyvu úhlu  $\alpha$  o 72,74 %.



Obr. 27: Odezva portálového jeřábu na požadovanou polohu  $y = 0,5 \text{ m}$  v čase  $t = 1 \text{ s}$  při zapojení PID (dle obr. 10, vstupního tvarovače ZVD (dle obr. 13) a inverzního tvarovače ZVD (obr. 14)

Směr $y$	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$	$\beta_{max}$	$T_\beta[s]$
PID	$303,4 \cdot 10^3$	0	0,24	>19
PID + ZVD	$16,12 \cdot 10^3$	94,67	-0,16	9,34
PID + inv. ZVD	$82,71 \cdot 10^3$	72,74	0,23	>19

Tab. 13: Vyhodnocení průběhů odezvy z obr. 27  
ve směru  $y$

#### 4.3.3 Aplikace tvarovačů ZVD ve směru $x$ i $y$

Po změření odezvy jednotlivých směrů s aplikovanými tvarovači ZVD byl zaveden i akční zásah ve smíšeném směru (k vidění na obr. 28). Vyhodnocení je v (tab. 4.3.3). Nejlepších výsledků bylo dosaženo v zapojení ZVD (dle obr. 13) s eliminací úhlu  $\alpha$  o 82,43 % a úhlu  $\beta$  o 94,8 %. V zapojení s invertním tvarovačem (obr. 14) ZVD došlo k eliminaci kyvu úhlu  $\alpha$  o 72,29 % a úhlu  $\beta$  o 73,26 %.

### 4.4 ZVD s upravenými parametry

Vzhledem k tomu, že při aplikaci ZVD a inv. ZVD (předchozí kapitola) docházelo při dojetí na referenční polohu k reziduálním kmitům (zbytkové kmity), rozhodl jsem se experimentálně zjistit netlumenou frekvenci systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$  ve směrech  $x$  a  $y$  za účelem zvýšení efektivity aplikovaných tvarovačů vstupního

Směr x+y	$J_{ISE}\alpha[-]$	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$
PID	$69,48 \cdot 10^3$	$294 \cdot 10^3$	0	0
PID + ZVD	$12,21 \cdot 10^3$	$15,29 \cdot 10^3$	82,43	94,8
PID + inv. ZVD	$19,25 \cdot 10^3$	$78,62 \cdot 10^3$	72,29	73,26
	$\alpha_{max}[\text{rad}]$	$\beta_{max}[\text{rad}]$	$T_\alpha[\text{s}]$	$T_\beta[\text{s}]$
PID	0,19	0,24	11,33	>19
PID + ZVD	-0,14	-0,16	1,61	10,64
PID + inv. ZVD	0,18	0,22	2,22	>19

Tab. 14: Vyhodnocení průběhů odezvy z obr. 28 ve směru  $x$  i  $y$  zároveň s pomocí ISE integrálních kritérií včetně zlepšení oproti samotnému PID v procentech.

signálu. Nejprve bylo potřeba vychýlit kyvadlo a naměřit průběh úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Měření bylo prováděno pro úhel  $\alpha$  a  $\beta$  zvlášť. S pomocí logaritmického dekrementu [14] lze určit tlumení systému  $\xi$  (74). Úhlová frekvence  $\omega$  lze dopočítat z naměřené úhlové frekvence a tlumení  $\xi$  s užitím vztahu (46).

$$\xi = \frac{\frac{1}{n-1} \ln \frac{x_1}{x_n}}{\sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{1}{n-1} \ln \frac{x_1}{x_n}\right)^2}} \quad (74)$$

Následným přepočítáním parametrů tvarovačů DZV získáme nové parametry, které jsou vypsány v tab. 4.4.

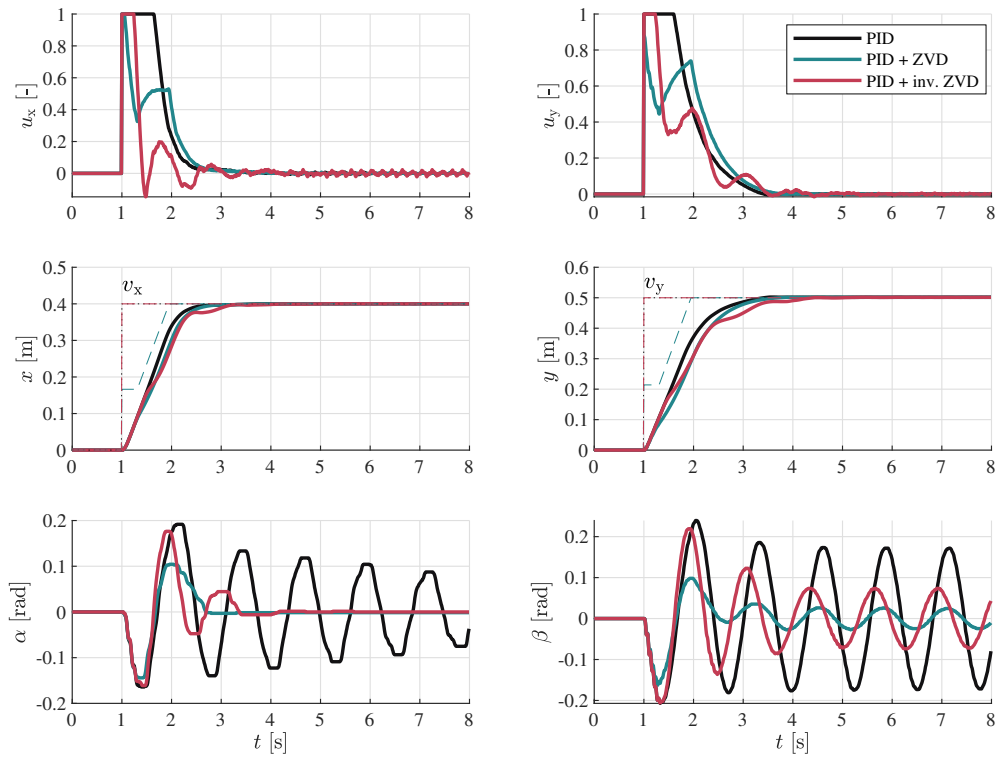
	$\omega[\text{rad/s}]$	$\xi[-]$	$A_{ZVD}[-]$	$\tau_{ZVD}[\text{s}]$	$T_{ZVD}[\text{s}]$
$x$	5,06	0,0133	0,3989	0,6209	0,3078
$y$	4,96	0,0014	0,3900	0,3164	0,6334

Tab. 15: Tabulka experimentálně zjištěných a dopočítaných parametrů pro tvarovač signálu DZV

Nově vytvořený tvarovač s experimentálně zjištěnými parametry DZV byl porovnán oproti tvarovači DZV s vypočtenými parametry (teoretickými z lineárního modelu). Měření proběhlo pro směr  $x$ ,  $y$  i pro oba směry zároveň.

#### 4.4.1 ZVD s upravenými parametry ve směru x

Nově vytvořený tvarovač vstupního signálu DZV s experimentálně zjištěnými parametry je porovnán ve směru  $x$  na obr. 29. Jsou porovnávány tvarovače DZV (v zapojení dle obr. 13) i jeho inverzní tvar (obr. 14). S experimentálně zjištěnými parametry  $\omega_x$  a  $\xi_x$  došlo ke zlepšení výsledků. V zapojení DZV dle obr. 13 došlo k vylepšení integrálního kritéria  $J_{ISE}\alpha$  o cca 1,5% oproti DZV s teoreticky napočítanými parametry. V zapojení dle obr. 14 došlo ke snížení  $J_{ISE}\alpha$  o necelých 10%. Přesné výsledky jsou vypsány v tabulce tab. 4.4.1.



Obr. 28: Odezva portálového jeřábu na požadovanou polohu  $x = 0,4\text{ m}$ ,  $y = 0,5\text{ m}$  v čase  $t = 1\text{ s}$  při zapojení PID regulátoru (dle obr. 10), vstupního tvarovače ZVD (dle obr. 13) a inverzního tvarovače ZVD (obr. 14)

Směr x	$J_{ISE}\alpha[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	$\alpha_{max}[\text{rad}]$	$T_\alpha[\text{s}]$
PID	$65,71 \cdot 10^3$	0	0,21	>19
PID + ZVD	$13,77 \cdot 10^3$	79,04	-0,15	2,62
PID + inv. ZVD	$22,93 \cdot 10^3$	65,1	0,2	3,53
PID + ZVD exp.	$12,72 \cdot 10^3$	80,64	-0,14	2,84
PID + inv. ZVD exp.	$16,46 \cdot 10^3$	74,95	-0,16	1,23

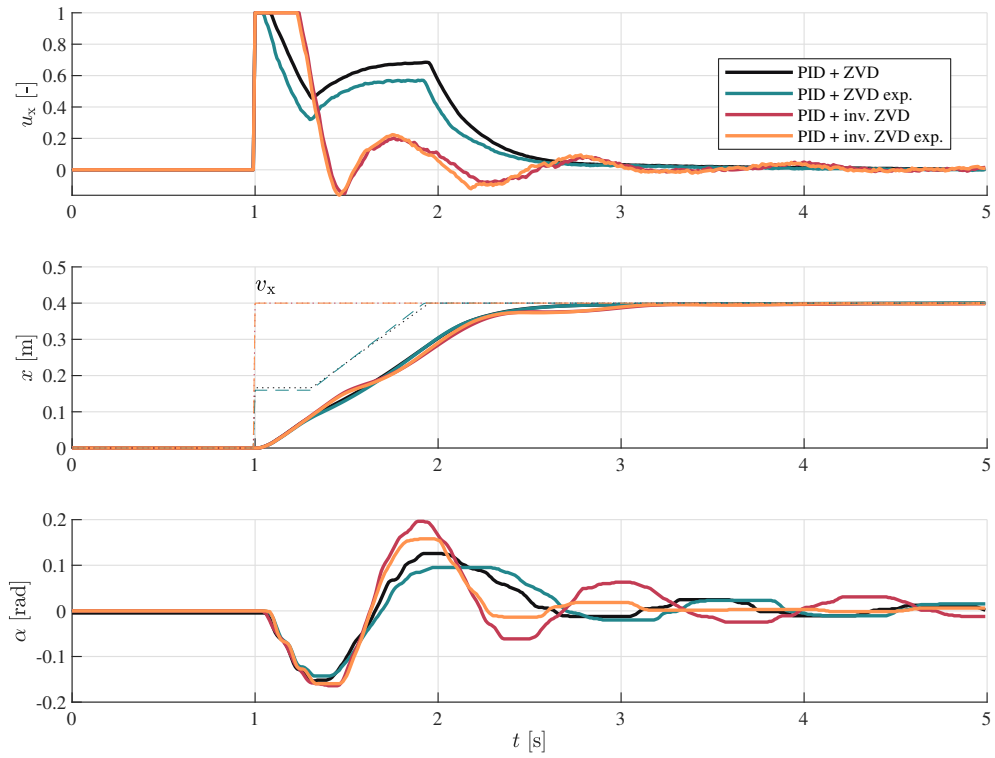
Tab. 16: Vyhodnocení průběhů z obr. 29 ve směru x

#### 4.4.2 ZVD s upravenými parametry ve směru y

Ve směru  $y$  dosáhl nově vytvořený tvarovač DZV zlepšení dle integrálního kritéria  $J_{ISE}\beta$  o cca 2% oproti DZV s parametry lineárního modelu. V zapojení dle obr. 14 došlo ke snížení  $J_{ISE}\alpha$  o 17,83%. Výsledky z měření jsou vypsány v tabulce tab. 4.4.2.

#### 4.4.3 ZVD s upravenými parametry ve směru x i y

Nově vytvořený tvarovač vstupního signálu DZV s experimentálně zjištěnými parametry (netlumená frekvence systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$ ) a následně dopočítaných parametrů pro tvarovač signálu DZV v porovnání s tvarovačem DZV (s teoretickými parametry) je porovnán ve směru  $y$  na obr. 30. Jsou porovnávány tvarovače DZV v zapojení dle obr. 13 i jeho inverzní tvar (obr. 14). S experimentálně



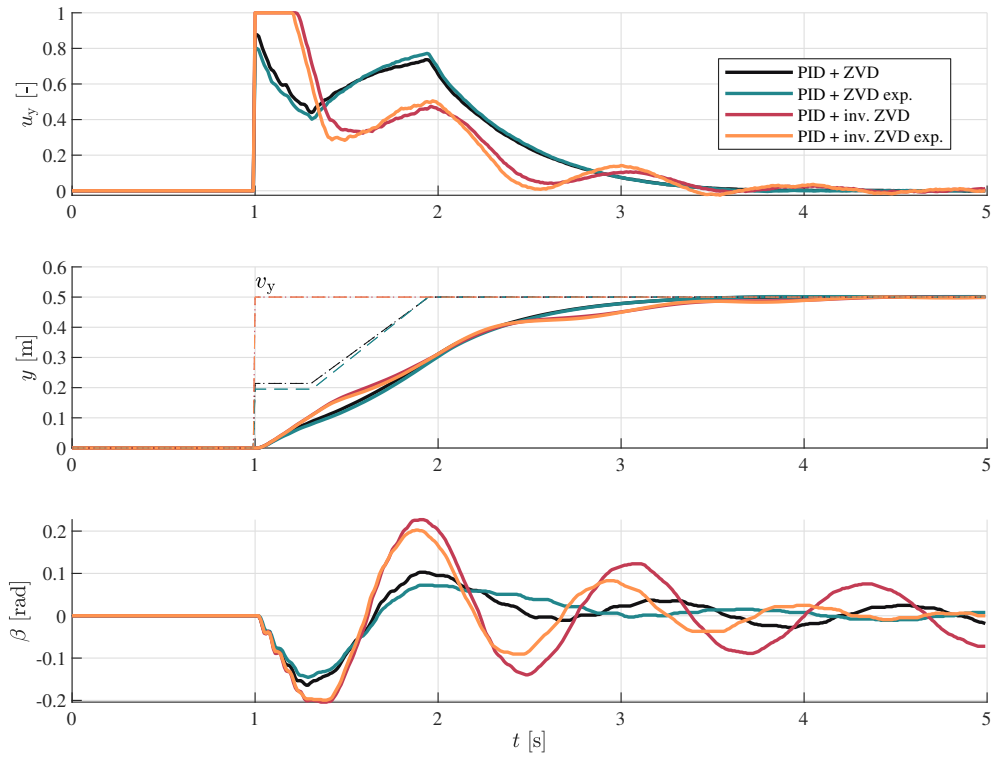
Obr. 29: Porovnání tvarovačů ZVD s napočítanými parametry z lineárního modelu oproti experimentálně zjištěným parametrům - směr  $x$

Směr $y$	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$	$\beta_{max}[\text{rad}]$	$T_\beta[\text{s}]$
PID	$303,4 \cdot 10^3$	0	0,24	>19
PID + ZVD	$16,12 \cdot 10^3$	94,67	-0,16	9,34
PID + inv. ZVD	$82,71 \cdot 10^3$	72,74	0,23	>19
PID + ZVD exp.	$9,521 \cdot 10^3$	96,86	-0,15	1,78
PID + inv. ZVD exp.	$28,62 \cdot 10^3$	90,57	0,2	3,05

Tab. 17: Vyhodnocení průběhů z obr. 30 ve směru  $y$

zjištěnými parametry  $\omega$  a  $\xi$  došlo ke zlepšení výsledků.

V zapojení DZV dle obr. 13 došlo k vylepšení integrálního kritéria  $J_{ISE}\alpha$  o cca 1% a  $J_{ISE}\beta$  o cca 2% oproti DZV s teoreticky napočítanými parametry. V zapojení dle obr. 14 došlo ke snížení  $J_{ISE}\alpha$  o necelých 3% a  $J_{ISE}\beta$  o necelých 17%. Přesné výsledky jsou vypsány v tabulce tab. 4.4.2.



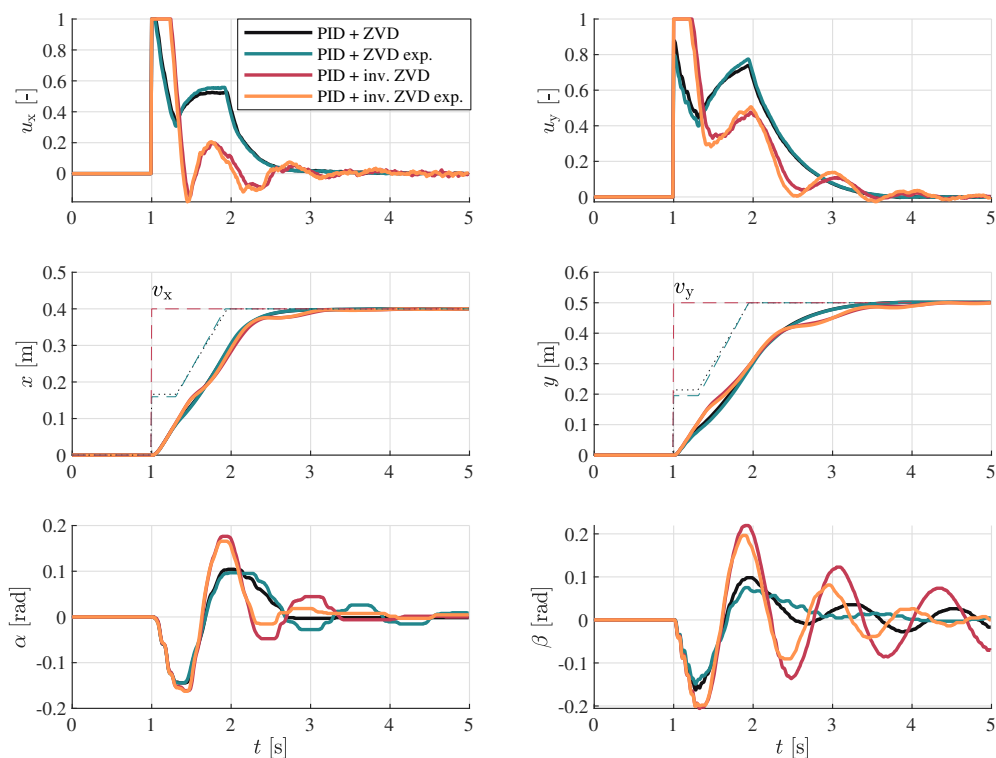
Obr. 30: Porovnání tvarovačů ZVD s napočítanými parametry z lineárního modelu oproti experimentálně zjištěným parametrům - směr  $y$

Směr x+y	$J_{ISE}\alpha[-]$	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$
PID	$69,48 \cdot 10^3$	$294 \cdot 10^3$	0	0
PID + ZVD	$12,21 \cdot 10^3$	$15,29 \cdot 10^3$	82,43	94,8
PID + inv. ZVD	$19,25 \cdot 10^3$	$78,62 \cdot 10^3$	72,29	73,26
PID + ZVD exp.	$13,07 \cdot 10^3$	$9,08 \cdot 10^3$	81,19	96,91
PID + inv. ZVD exp.	$16,89 \cdot 10^3$	$27,89 \cdot 10^3$	75,69	90,51
	$\alpha_{max}[\text{rad}]$	$\beta_{max}[\text{rad}]$	$T_\alpha[\text{s}]$	$T_\beta[\text{s}]$
PID	0,19	0,24	11,33	>19
PID + ZVD	-0,14	-0,16	1,61	10,64
PID + inv. ZVD	0,18	0,22	2,22	>19
PID + ZVD exp.	-0,14	-0,15	2,78	1,68
PID + inv. ZVD exp.	0,17	-0,2	1,24	3,06

Tab. 18: Vyhodnocení průběhů z obr. 31 ve smíšeném směru

## 5 Zhodnocení výsledků

Při měření byla porovnávána klasická PID regulace (v zapojení dle obr. 13) se zapojením regulátoru PID v kombinaci se vstupním tvarovačem ZV (dle zapojení obr. 13) a regulátoru PID s inverzním tvarovačem ZV (zapojení dle obr. 14). Naměřené průběhy lze vidět na obrázcích obr. 24 a obr. 25. Inverzní tvarovač ZV se nezdá jako vhodné řešení pro měřenou soustavu. Na průběhu napětí  $u_x$  se objevovaly pravidelné



Obr. 31: Porovnání tvarovačů ZVD s napočítanými parametry z lineárního modelu oproti experimentálně zjištěným parametrům - smíšený směr

výkmitu (lze vidět na obr. 24). Celkový uzavřený obvod s inverzním ZV tvarovačem byl pravděpodobně velmi blízko mezi stability, ale přesto stále ve stabilní oblasti.

Kvůli nedostatečným výsledkům při aplikaci ZV inverzního tvarovače byly tyto tvarovače nahrazeny tvarovači ZVD. Měření průběhů s aplikací tvarovačů ZVD lze vidět na obrázcích obr. 26, obr. 27 a obr. 28. V zapojení ZVD došlo k největšímu potlačení kyvu břemene v obou směrech. Podařilo se snížit kritérium  $J_{ISE}$  o 79,04 % ve směru  $x$  a o 94,67 % ve směru  $y$ .

Tvarovače ZVD se jeví jako vhodné řešení pro aplikaci tlumení kyvu břemene. Rozhodl jsem se proto změřit průběh kyvu kyvadla ve směrech úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  za účelem zjištění parametrů netlumené frekvence systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$  s pomocí logaritmického dekrementu a následně přepočítat parametry tvarovačů DZV. Průběhy z měření jsou na obrázcích obr. 29, obr. 30 a obr. 31. Aplikace těchto tvarovačů vedla ke zlepšení výsledků o dalších 1,6 % ve směru  $x$  a o 2,19 % ve směru  $y$ . Výsledky jsou vypsány v tabulkách tab. 4.3.1, tab. 4.3.2 a tab. 4.3.3.

Inverzní tvarovač DZV s upravenými parametry dosáhl nejrychlejšího času ustálení ve směru  $x$ . Jeho ustálení trvalo 1,23 s. V ostatních kritériích hodnocení dosáhl nejlepších výsledků tvarovač DZV zapojený jako filtr referenčního signálu. Tvarovač ZV se umístil pouze v nejmenším maximálním výkyvu  $-0,14$  rad ve směru  $x$ , kterého dosáhl i tvarovač DZV s upravenými parametry. Výsledky jsou sepsány v tab. 5, tučně zvýrazněná čísla značí nejlepší výsledek v daném kritériu.

Pro zhodnocení výsledků bylo zvoleno integrální kritérium  $J_{ISE}$ . Bylo počítáno na základě vychýlení úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Toto kritérium bylo zvoleno, protože není penali-

Směr x	$J_{ISE}\alpha[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	$\alpha_{max}[\text{rad}]$	$T_\alpha[\text{s}]$
PID + ZV	$13,86 \cdot 10^3$	78,9	<b>-0,14</b>	2,29
PID + ZVD exp.	<b><math>12,72 \cdot 10^3</math></b>	<b>80,64</b>	<b>-0,14</b>	2,84
PID + inv. ZVD exp.	$16,46 \cdot 10^3$	74,95	-0,16	<b>1,23</b>
Směr y	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$	$\beta_{max}[\text{rad}]$	$T_\beta[\text{s}]$
PID + ZVD exp.	<b><math>9,521 \cdot 10^3</math></b>	<b>96,86</b>	<b>-0,15</b>	<b>1,78</b>
Směr x+y	$J_{ISE}\alpha[-]$	elim. $J_{ISE}\alpha[\%]$	$\alpha_{max}[\text{rad}]$	$T_\alpha[\text{s}]$
PID + ZVD	<b><math>12,21 \cdot 10^3</math></b>	<b>82,43</b>	<b>-0,14</b>	<b>1,61</b>
PID + ZVD exp.	$13,07 \cdot 10^3$	81,19	<b>-0,14</b>	2,78
Směr x+y	$J_{ISE}\beta[-]$	elim. $J_{ISE}\beta[\%]$	$\beta_{max}[\text{rad}]$	$T_\beta[\text{s}]$
PID + ZVD	$15,29 \cdot 10^3$	94,8	-0,16	10,64
PID + ZVD exp.	<b><math>9,08 \cdot 10^3</math></b>	<b>96,91</b>	<b>-0,15</b>	<b>1,68</b>

Tab. 19: Tabulka vyhodnocení výsledků. Tučné označení značí nejlepší výsledek v daném kritériu.

zováno časem (malé kyvy by s rostoucím časem příliš ovlivňovaly výsledek kritéria).  $T_\alpha[\text{s}]$ ,  $T_\beta[\text{s}]$  jsou časy ustálení úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Hranice pro ustálení byla zvolena 0,02 rad, což je přibližně  $1,15^\circ$ . Při měření byla použita numerická metoda Ode5 s fixní délkou kroku 0,01 s. Celkový čas všech měření trval 20 s.

Při aplikaci tvarovačů nestíhaly polohy  $x$  a  $y$  dohánět požadovaný referenční signál. To je dáno nedostatečným výkonem motorů, viz obr. 19 a obr. 20. Kdyby byly na jeřábu výkonnější motory, daly by se navrhnout rychlejší PID regulátory tak, aby poloha stíhala více sledovat svou referenci. Tím by mohlo dojít k většímu potlačení reziduálních kmitů kyvadla a lepší funkčnosti tvarovačů.

Všechna měření byla porovnána v kapitole 5. Nejlepší výsledky vykazovala kombinace PID regulátoru (regulujícím polohu  $x$  a  $y$ ) s ZVD tvarovačem zapojeným jako filtr referenčního signálu s experimentálně zjištěnými parametry  $\omega$  a  $\xi$ . Řídicí metody byly hodnoceny za základě integrálního kritéria  $J_{ISE}$ , maximálního vychýlení úhlu  $\alpha$ ,  $\beta_{max}$  a času ustálení  $T_{\alpha,\beta}$  s definovanou hranicí 0,02 rad. Při měření i simulaci byly použity numerické metody Ode5 s fixní délkou kroku 0,01 s. Nepřesnosti v měření mohou být způsobeny tuhostí konstrukce enkodéru měření  $\alpha$  a  $\beta$  a odchylkami, které tato konstrukce způsobuje, či vůlí mezi lanem a konstrukcí enkodéru.



## Závěr

Cílem práce bylo provést rešerši na téma metod tlumení kyvů zavěšeného břemene v manipulačních aplikacích, sestavit matematický model laboratorní soustavy modelu portálového jeřábu včetně identifikace parametrů reálné soustavy a pro tento systém navrhnout vhodné schéma řízení zajišťující potlačení kyvu zavěšeného břemene. Následně ho kvantitativně porovnat s některou z konvenčních metod návrhu řízení.

Rešerše byla vypracována s pomocí citovaných zdrojů v kapitole 1. Autoři se v nich zabývají návrhy modelů portálových jeřábů i jejich řízením za účelem potlačení kyvu břemene. Jiné práce se zaměřují na tvarovače signálů, které jsou vhodné k použití u kmitavých soustav, čímž jsou vhodné i pro jeřáby.

Nelineární model byl vytvořen s použitím Lagrangeových rovnic II. druhu. Model byl následně linearizován ve zvoleném pracovním bodu. V tomto bodě byl lineární model vyšetřen na stabilitu a pozorovatelnost. Dle výpočtů vyšel astabilní a plně pozorovatelný. Modely byly otestovány z hlediska funkčnosti a vykazovaly předpokládané chování. Parametry modelů byly identifikovány měřením, experimentálně či z citovaných zdrojů. Díky převzatým parametrům nebylo potřeba laboratorní úlohu rozebírat na součásti. V porovnání chování modelů s aplikovanými parametry a se skutečnou soustavou bylo dosaženo uspokojivých výsledků.

Řízení bylo navrženo ve více způsobech. V jednom byly zavedeny ve zpětné vazbě všechny měřené stavy, ve druhém způsobu pak byly zavedeny pouze polohy  $x$  a  $y$ . První způsob byl zaměřen na aplikaci PID regulátoru na polohy  $x$  a  $y$  a P regulátorem na potlačení kyvu břemene. Ten byl porovnáván s LQR stavovým regulátorem, který měl ve zpětné vazbě zapojené pouze měřitelné výstupy. Tyto úhly většinou nejsou v praxi ve zpětné vazbě řízení jeřábů zavedeny, proto nejsou v porovnání výsledků. Druhým způsobem řízení bylo použití kombinace PID regulátoru regulujícím polohy  $x$  a  $y$  s aplikovanými tvarovači. Ty byly navrženy z komplexně sdružených kořenů dílčích přenosů lineárního modelu. Nejprve byl aplikován tvarovač ZV, který byl zapojen jako filtr referenčního signálu v porovnání s jeho inverzní podobou (inverzní tvarovač ZV ve zpětné vazbě). Inverzní tvarovač ZV vykazoval chování, jako by jeho póly byly poblíž meze stability (na straně stabilní oblasti). Z toho důvodu byly aplikovány ještě tvarovače DZV a inverzní DZV tvarovač. Ty fungovaly značně lépe oproti ZV tvarovačům. Následně byla experimentálně zjištěna netlumená frekvence systému  $\omega$  a tlumení systému  $\xi$ , pomocí nichž se podařilo o něco více zlepšit dosažené výsledky.

Všechna měření byla porovnána v kapitole 5. Ve většině kritériích dosáhla nejlepšího výsledku kombinace PID regulátoru (regulujícím polohy  $x$  a  $y$ ) s tvarovačem ZVD zapojeným jako filtr referenčního signálu s experimentálně zjištěnými parametry  $\omega$  a  $\xi$ . Řídicí metody byly hodnoceny za základě integrálního kritéria  $J_{ISE}$ , maximálního vychýlení úhlu  $\alpha$ ,  $\beta_{max}$  a času ustálení  $T_{\alpha,\beta}$  s definovanou hranicí 0,02 rad. Při měření i simulaci byly použity numerické metody Ode5 s fixní délkou kroku 0,01 s. Nepřesnosti v měření mohou být způsobeny tuhostí konstrukce enkodéru měření  $\alpha$  a  $\beta$  a odchylkami, které tato konstrukce způsobuje, či vůlí mezi lanem a konstrukcí enkodéru.

Původní dílčí úkoly zadání této práce byly úspěšně splněny a dosažené výsledky vedly ke naplnění všech cílů práce.

# Seznam použité literatury

## Reference

- [1] BARTOLINI, Giorgio, Alessandro PISANO a Elio USAI. Second-order sliding-mode control of container cranes. *Automatica* [online]. 2002, (10), 8 [cit. 2021-01-12]. Dostupné z: doi:[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00081-X](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00081-X)
- [2] PISANO, Alessandro, Stefano SCODINA a Elio USAI. Load swing suppression in the 3-dimensional overhead crane via second-order sliding-modes. In: *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)* [online]. IEEE, 2010, 2010, s. 452-457 [cit. 2021-01-12]. ISBN 978-1-4244-5829-5. Dostupné z: doi:10.1109/VSS.2010.5545138
- [3] HE-HOON, Lee a Cho SUNG-KUN. A new fuzzy-logic anti-swing control for industrial three-dimensional overhead cranes. In: *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.01CH37164)* [online]. Suwon: IEEE, 2001, s. 2956-2961 [cit. 2021-01-12]. ISBN 0-7803-6576-3. Dostupné z: doi:10.1109/ROBOT.2001.933070
- [4] ISMAIL, R.M.T. Raja, M.A. AHMAD, M.S. RAMLI a F.R.M. RASHIDI. *Nonlinear Dynamic Modelling and Analysis of a 3-D Overhead Gantry Crane System with System Parameters Variation* [online]. Faculty of Electrical and Electronics Engineering, Universiti Malaysia Pahang, Pekan, 26600, Pahang, Malaysia, , 8 [cit. 2021-01-04]. ISSN 1473-804x. Dostupné z: <https://core.ac.uk/download/pdf/159178801.pdf>
- [5] AKSJONOV, Andrei, Valery VODOVOZOV a Eduard PETLENKOV. Three-Dimensional Crane Modelling and Control Using Euler-Lagrange State-Space Approach and Anti-Swing Fuzzy Logic. *Electrical, Control and Communication Engineering* [online]. 2015, **9**(1), 5-13 [cit. 2020-11-07]. ISSN 2255-9159. Dostupné z: doi:10.1515/ecce-2015-0006
- [6] INTECO. *3D Crane INTECO* [online]. Polsko [cit. 2020-11-13]. Dostupné z: <http://www.inteco.com.pl/products/3d-crane/>
- [7] VYHLÍDAL, T., M. HROMČÍK a V. KUČERA. *Summary of recent results on design and application of signal shapers* [online]. , 7 [cit. 2020-12-02]. Dostupné z: <http://elektro.fs.cvut.cz/konference/index.php/trendy/TRENDY12/paper/download/16/21>
- [8] VYHLÍDAL, Tomáš a Martin HROMČÍK. Inverse Feedback Shapers for Coupled Multibody Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* [online]. 2017, **62**(9), 4804-4810 [cit. 2020-12-11]. ISSN 0018-9286. Dostupné z: doi:10.1109/TAC.2017.2688179
- [9] VYHLÍDAL, Tomáš a Martin HROMČÍK. Parameterization of input shapers with delays of various distribution. In: *Automatica* [online]. 2015, s. 8 [cit. 2021-01-12]. ISSN 0005-1098. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.06.025>

- [10] CONKER, Caglar, Hakan YAVUZ a Hasan Huseyin BILGIC. A review of command shaping techniques for elimination of residual vibrations in flexible-joint manipulators. *Journal of Vibroengineering* [online]. 2016, **18**(5), 2947-2958 [cit. 2020-12-02]. ISSN 1392-8716. Dostupné z: doi:10.21595/jve.2016.16725
- [11] BRUNTON, Steven L. a Jose Nathan KUTZ. *Data-driven science and engineering: machine learning, dynamical systems, and control*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. ISBN 978-110-8422-093.
- [12] HOFREITER, Milan. *Základy automatického řízení*. V Praze: České vysoké učení technické, 2012. ISBN 978-80-01-05007-1.
- [13] ŠULC, Bohumil a Miluše VÍTEČKOVÁ. *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03007-5.
- [14] Modeling of a Simple Pendulum. In: *University of Michigan* [online]. [cit. 2021-01-15]. Dostupné z: [https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Activities\\_Pendulum](https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Activities_Pendulum)
- [15] VYHLÍDAL, Tomáš. QPmR — Quasi-Polynomial Mapping Based Rootfinder. In: *Applied Cybernetics Laboratory* [software]. [cit. 2021-01-18]. Dostupné z: <http://www.cak.fs.cvut.cz/algorithms/qpmr>