



**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

F3

**Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky**

Bakalářská práce

Efektivní výpočty vlastností neorientovaných grafů

Jana Zelenková

Obor: Informatika a počítačové vědy

Studijní program: Otevřená informatika

Leden 2021

Vedoucí práce: RNDr. Marko Genyk-Berezovskyj

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Zelenková** Jméno: **Jana** Osobní číslo: **460536**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra kybernetiky**
Studijní program: **Otevřená informatika**
Studijní obor: **Informatika a počítačové vědy**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Efektivní výpočty vlastností neorientovaných grafů

Název bakalářské práce anglicky:

Effective Calculations of Undirected Graph Properties

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s programovými balíky, případně i se samostatnými aplikacemi, které efektivně počítají hodnoty vlastností prostých neorientovaných grafů.
2. Sestavte co možná nejširší přehled o efektivitě jednotlivých SW při výpočtu vlastností grafů. Do přehledu zahrňte co nejvíce grafových vlastností. Při výpočtech vlastností, pokud to bude možné, vyčleňte charakteristické skupiny grafů, na nichž se konkrétní vlastnost počítá buď výrazně snadněji, nebo výrazně obtížněji než v očekávaném (průměrném) případě. Sledujte, jak se efektivita výpočtů mění se vzrůstající velikostí grafů nebo s přítomností či absencí některých dalších důležitých vlastností grafů. Naměřené výsledky porovnejte s teoretickými předpoklady a zhodnoťte, zda si navzájem odpovídají.
3. K výpočtům využijte také superpočítače dostupné v akademickém prostředí ČR a zhodnoťte, nakolik jejich využití zrychlí a případně usnadní nebo zkomplikuje výpočet grafových vlastností. Využijte veřejně přístupné generátory pro tvorbu grafů a skupin grafů, na nichž provedete měření.
4. Přípravu dat a měření ve všech použitých HW/SW prostředích implementujte pomocí programů nebo skriptů, které doprovodíte uživatelskou dokumentací, aby další měření mohla probíhat co nejvíce automatizovaně.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Jonathan L. Gross, Jay Yellen: Graph Theory and Its Applications, Chapman and Hall/CRC, 2018
- [2] Jiří Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2002
- [3] Robert Sedgwick: Algorithms in C++ Part 5: Graph Algorithms, : Addison-Wesley Professional, 2002
- [4] Reinhard Diestel: Graph Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 2016
- [5] Martin Mareš, Tomáš Valla: Průvodce labyrintem algoritmů, CZ.NIC, z.s.p.o., 2017

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

RNDr. Marko Genyk-Berezovskij, katedra kybernetiky FEL

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **27.05.2019** Termín odevzdání bakalářské práce: **05.01.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: **19.02.2021**

RNDr. Marko Genyk-Berezovskij
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Tomáš Svoboda, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studentky

Poděkování / Prohlášení

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce, kterým byl pan RNDr. Marko Genyk-Berezovskyj. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu a pevné nervy.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 5. 1. 2021

Jana Zelenková

Abstrakt / Abstract

Bakalářská práce si klade za cíl porovnat nástroje, které umožňují výpočet hodnot vlastností prostých neorientovaných grafů. Zaměřuje se na programy Mathematica a programový balík SageMath. Práce představuje vybrané vlastnosti grafů a porovnává rychlost výpočtu těchto vlastností na náhodných grafech, které se liší buď velikostí nebo nějakou charakteristickou vlastností. Zároveň porovnává rychlost výpočtu na počítačích s různou hardwarovou konfigurací.

Klíčová slova: Graf, vlastnosti grafů, Mathematica, SageMath

The Bachelor's thesis aims to compare two tools used for finding the values of the properties of the simple unoriented graphs. Compared tools are Wolfram Mathematica and SageMath, program bundle for Python. The thesis presents chosen properties of the graphs and compares the tools on the time needed for finding chosen properties in random graphs. Tested graphs differ in size or characteristic attributes. Also the impact of different hardware equipment is tested in computing the chosen properties of the graphs.

Keywords: Graph, Properties of the graph, Mathematica, SageMath

Title translation: Effective Calculations of Undirected Graph Properties

Obsah /

1 Úvod	1	4.15 Rovinný graf (Planar Graph) .	11
1.1 Cíl práce.....	1	4.16 Regulární graf (Regular Graph).....	12
2 Aplikace pro výpočet vlastností grafů	2	4.17 Hranově tranzitivní graf (Edge-transitive Graph)	12
2.1 Wolfram Mathematica	2	4.18 Distančně regulární graf (Distance-Regular Graph)	12
2.2 SageMath.....	2	4.18.1 Vzdálenost v grafu (Distance)	13
3 Časová složitost	3	4.18.2 Distančně regulární graf .	13
3.1 Polynomiální úlohy	3	5 Diskuze výsledků	14
3.2 NP úlohy	3	5.1 Vliv velikosti grafu	14
3.3 NP-úplné úlohy (NP-Complete problems)	4	5.1.1 Souvislý graf	14
4 Teorie	5	5.1.2 Strom.....	14
4.1 Graf	5	5.1.3 Průměr	15
4.2 Souvislý graf (Connected graph)	5	5.1.4 Poloměr	17
4.2.1 Prohledávání do šířky (Breadth-first search, zkráceně BFS)	6	5.1.5 Eulerovský graf	17
4.3 Strom (Tree)	7	5.1.6 Klikovost grafu.....	19
4.3.1 Prohledávání do hloubky (Depth-first search, zkráceně DFS)	7	5.1.7 Počet koster v grafu	19
4.4 Excentricita (Eccentricity)	7	5.1.8 Perfektnost grafu	20
4.5 Průměr (Diameter)	8	5.1.9 Rovinný graf	21
4.6 Poloměr (Radius)	8	5.1.10 Regulární graf.....	22
4.7 Obvod grafu (Girth)	8	5.1.11 Hranově tranzitivní graf .	22
4.8 Eulerovský graf (Eulerian Graph)	9	5.1.12 Distančně regulární graf .	23
4.8.1 Fleuryho algoritmus (Fleury's algorithm)	9	5.2 Vliv charakteristických vlastností grafů	23
4.9 Klikovost grafu (Clique number)	9	5.3 Vliv hardwarového vybavení ..	25
4.10 Nezávislost grafu (Independence number)	10	6 Závěr	30
4.10.1 Nezávislá množina (Independent set)	10	A Grafy zobrazující vliv charakteristických skupin grafů na časovou náročnost výpočtu jejich vlastností	31
4.10.2 Nezávislost grafu.....	10	B Grafy ukazující výpočet vlastností na různém hardwaru	66
4.11 Kostra grafu (Spanning tree)..	10	C Složky se soubory	78
4.11.1 Kruskalův algoritmus	10	Literatura	79
4.12 Chromatické číslo grafu, vrcholová barevnost, barevnost grafu (chromatic number)	10		
4.13 Hamiltonovský graf (Hamiltonian).....	11		
4.14 Perfektnost grafu (Perfect Graph)	11		

/ **Obrázky**

4.1.	Neorientovaný graf	5
4.2.	Orientovaný graf	6
4.3.	Souvislý graf.....	6
4.4.	Nesouvislý graf	6
4.5.	Kružnice v grafu	7
4.6.	Strom	7
4.7.	Graf s klikami	9
4.8.	Planární graf nakreslený bez křížení	12
4.9.	Planární graf zakreslený s křížícími se hranami	12
5.1.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf souvislý, v Mathema- tice	15
5.2.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf souvislý, v Sagemath ...	15
5.3.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, jest- li je graf stromem, v Mathe- matice	16
5.4.	Graf závislosti času na ve- likosti grafu při zjišťování, jestli je graf stromem, v Sage- math	16
5.5.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu prům- ěru grafu pro Mathematicu ..	17
5.6.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu prům- ěru grafu pro Sagemath.....	17
5.7.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu polo- měru grafu pro Mathematicu ..	18
5.8.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu polo- měru grafu pro Sagemath.....	18
5.9.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf Eulerovský, v Mathe- matice	19
5.10.	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf Eulerovský, v Sage- math	19

5.11.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu klik v grafu pro Mathematicu	20
5.12.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu klik v grafu pro Sagemath .	20
5.13.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu koster v grafu pro Mathematicu	21
5.14.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu koster v grafu pro Sagemath	21
5.15.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf perfektní, v Mathematice	22
5.16.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf perfektní, v Sagemath ..	22
5.17.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf rovinný, v Mathematice	23
5.18.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf rovinný, v Sagemath....	23
5.19.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf regulární, v Mathematice	24
5.20.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf regulární, v Sagemath ..	24
5.21.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf hranově tranzitivní, v Mathematice	25
5.22.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf distančně regulární, v Sagemath	25
5.23.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda	

	je graf distančně regulární, v Mathematice	26
5.24.	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf distančně regulární, v Sagemath	26
5.25.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice	27
5.26.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath	27
5.27.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice	28
5.28.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath	28
5.29.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice	29
5.30.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath	29
A.1.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice	31
A.2.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath	32
A.3.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice	32
A.4.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath	33

- A.5.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice 33
- A.6.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath 34
- A.7.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice 34
- A.8.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath 35
- A.9.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů souvislých, na počtu hran v SageMath 35
- A.10.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů souvislých, na počtu hran v Mathematice . 36
- A.11.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath 36
- A.12.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice 37
- A.13.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath 37
- A.14.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice 38
- A.15.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je

	sto souvislých grafů Eule- rovských, na počtu hran v SageMath.....	38
A.16.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Eule- rovských, na počtu hran v Mathematice	39
A.17.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Hamil- tonovských, na počtu hran v SageMath.....	39
A.18.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Hamil- tonovských, na počtu hran v Mathematice	40
A.19.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů perfektních, na počtu hran v SageMath	40
A.20.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů perfektních, na počtu hran v Mathematice .	41
A.21.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů rovinných, na počtu hran v SageMath	41
A.22.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice .	42
A.23.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů stromem, na počtu hran v SageMath.....	42
A.24.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů stromem, na počtu hran v Mathematice	43
A.25.	Graf závislosti času potřeb- ném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů regulárních, na počtu hran v SageMath	43

- A.26.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice . 44
- A.27.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtu koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice . 44
- A.28.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtu koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath 45
- A.29.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice 45
- A.30.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath 46
- A.31.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice 46
- A.32.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath 47
- A.33.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů souvislých, na počtu hran v SageMath 47
- A.34.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů souvislých, na počtu hran v Mathematice . 48
- A.35.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath 48
- A.36.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice 49

- A.37.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath..... 49
- A.38.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice 50
- A.39.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulrovských, na počtu hran v SageMath..... 50
- A.40.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulrovských, na počtu hran v Mathematice 51
- A.41.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v SageMath 51
- A.42.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice . 52
- A.43.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v SageMath..... 52
- A.44.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v Mathematice 53
- A.45.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v SageMath 53
- A.46.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice . 54
- A.47.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtu kos-

- ter ve stu náhodných grafů,
na počtu hran v Mathematice . 54
- A.48.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, počtů kos-
ter ve stu náhodných grafů,
na počtu hran v SageMath 55
- A.49.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, počtů klik
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v Mathematice 55
- A.50.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, počtů klik
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v SageMath 56
- A.51.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, průměrů
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v Mathematice 56
- A.52.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, průměrů
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v SageMath 57
- A.53.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, poloměrů
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v Mathematice 57
- A.54.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, poloměrů
ve stu náhodných grafů, na
počtu hran v SageMath 58
- A.55.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, zda je sto
náhodných grafů souvislých,
na počtu hran v SageMath 58
- A.56.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, zda je sto
náhodných grafů souvislých,
na počtu hran v Mathematice . 59
- A.57.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, zda je sto
náhodných grafů distančně
regulárních, na počtu hran v
SageMath 59
- A.58.** Graf závislosti času potřeb-
ném při zjišťování, zda je sto
náhodných grafů distančně

	regulárních, na počtu hran v Mathematice	60
A.59.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath.....	60
A.60.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice	61
A.61.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulrovských, na počtu hran v SageMath.....	61
A.62.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulrovských, na počtu hran v Mathematice	62
A.63.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v SageMath	62
A.64.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice .	63
A.65.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v SageMath	63
A.66.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v Mathematice .	64
A.67.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v SageMath	64
A.68.	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice .	65

- B.69.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači 66
- B.70.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači 67
- B.71.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači 67
- B.72.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy souvislých, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 68
- B.73.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači 68
- B.74.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači 69
- B.75.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 69
- B.76.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 70
- B.77.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na

- počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 70
- B.78.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 71
- B.79.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 71
- B.80.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy souvislých, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 72
- B.81.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 72
- B.82.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 73
- B.83.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinových, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 73
- B.84.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 74
- B.85.** Graf ukazuje závislost času potřebného na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu.. 74

- B.86.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 75
- B.87.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 75
- B.88.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 76
- B.89.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 76
- B.90.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinových, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 77
- B.91.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu 77

Kapitola 1

Úvod

Tato bakalářská práce se zaměřuje na porovnání aplikací pro výpočet vlastností prostých neorientovaných grafů. A to zjištěním, jak rychle jednotlivé programy počítají různé vlastnosti grafů. Taktéž se soustředí na porovnání rychlosti výpočtu na různých sadách grafů. Chce poměřit rychlost výpočtu grafových vlastností u grafů, které se budou lišit velikostí, ale třeba i nějakou charakteristickou vlastností. Nakonec chce zjistit jaký má vliv změna hardwarového prostředí na výpočet vlastností grafů a poté chce shrnout zjištěné poznatky.

Nejprve si ujasníme teoretické pojmy a definice grafu a jeho jednotlivých vlastností, kterými se budeme zabývat. Ujasníme, co je to časová náročnost a s jakými programy pro výpočet vlastností grafů budeme pracovat. Následně Zhodnotíme výsledky, kterých jednotlivé programy dosahovaly a porovnáme, který z nich byl efektivnější. Porovnáme, jaký má vliv na rychlost výpočtu velikost grafu, nebo pokud má graf nějakou specifickou vlastnost. Na závěr vyzkoušíme, jestli se výpočet programu urychlí, pokud vyměníme hardwarové prostředí osobního počítače za superpočítač.

1.1 Cíl práce

Cílem této práce je vybrat aplikace, které se zabývají výpočtem vlastností prostých neorientovaných grafů. Vytvořit množství náhodných grafů, které se budou lišit velikostí. Taktéž vytvořit skupiny náhodných grafů různých velikostí, které v dané skupině budou sdílet nějakou charakteristickou vlastnost. Poté nechat vybrané aplikace vypočítat různé grafové vlastnosti a změřit jejich čas výpočtu. Nakonec porovnat časy výpočtu daných vlastností napříč různými velikostmi grafů i různými charakteristickými skupinami a vhodně je vizualizovat. Cílem je i zkusit vlastnosti spočítat na různých hardwarových konfiguracích a zanalyzovat jejich vliv na rychlost výpočtu.

Kapitola 2

Aplikace pro výpočet vlastností grafů

Nejprve je třeba vybrat aplikace, které budeme porovnávat.

Pro porovnání jsem zvolila dvě nejpoužívanější aplikace pro výpočet vlastností grafů, a to Mathematicu a SageMath.

2.1 Wolfram Mathematica

Mathematica je vlajkovým produktem společnosti Wolfram primárně určena pro technické výpočty a výuku. Je založena na jazyku Wolfram. Jedná se o placený produkt. [1]

Na svém osobním počítači, který mám k dispozici je Mathematica 11, stejně jako na superpočítači ferretgdu. Na superpočítači ČVUT ferret5 je k dispozici verze Mathematica 9.

2.2 SageMath

SageMath je volný open-source matematický softwarový systém. Je postavený na již existujících open-source balíčcích jako NumPy, SciPy a dalších. Používá k přístupu k nim jazyk založený na Pythonu nebo k nim přistupuje přímo skrz interfacý nebo wrappery.

Na svém osobním počítači, který mám k dispozici je SageMath ve verzi 7.5.1. Na superpočítačích bohužel k dispozici není.

[2]

Kapitola 3

Časová složitost

Na začátku je třeba říci, co je to časová složitost a jak může ovlivnit rychlost výpočtu jednotlivých vlastností.

Časová složitost se zabývá závislostí času stráveném řešením dané úlohy na její velikosti. V našem případě úloha značí vypočítání vlastnosti daného grafu. Vstupními daty jsou tedy jednotlivé grafy a požadovaným výsledkem úlohy je daná vlastnost tohoto grafu. Velikost úlohy tedy znamená velikost grafu, kterou můžeme určit buď počtem hran nebo počtem vrcholů daného grafu. Doba práce algoritmu závisí na konkrétním typu počítače.

Pro obecný algoritmus potřebujeme vyjádřit dobu jeho trvání nezávisle na použitém stroji. Doba trvání algoritmu se pak vyjadřuje jako množství elementárních operací potřebných ke zpracování daného vstupu. Tyto elementární operace jsou například přiřazení, či porovnání dvou hodnot. Každá elementární operace se vykoná v konstantním čase.

Složitost obecných algoritmů se pak obvykle udává v asymptotickém tvaru vyjadřujícím řád růstu funkce. Tento tvar tedy zanedbávají multiplikativní a aditivní konstanty. Tento tvar je zapsán v tzv. Omega notaci jako $O(f(n))$, kde $f(n)$ je funkce popisující algoritmus. Tímto způsobem tedy řadíme algoritmy do třídy složitosti (lineární, polynomiální, exponenciální, ...) nezávisle na jejich implementaci či použitém hardware. [3]

3.1 Polynomiální úlohy

Existuje-li algoritmus, který danou úlohu řeší za dobu shora omezenou nějakým polynomem, jedná se o řešení v polynomiálním čase, nebo-li o polynomiální úlohu. Takové úlohy jsou považovány za rychlé a snadno řešitelné. I dnes ovšem existuje mnoho úloh, pro které polynomiální řešení dosud nebylo objeveno. Doba práce u takové úlohy je $O(p(n))$, kde p je polynom a n je velikost vstupu. [3]

3.2 NP úlohy

Mluvíme o NP úloze existuje-li algoritmus, který má následující vlastnosti:

- Vstupem jsou data a takzvaný certifikát. Certifikát je nspecifikovaný kus dat se shora omezenou velikostí, jež je dána pevně daným polynomem. Tento polynom závisí na délce vstupních dat.
- Pracuje v polynomiálním čase a dává odpověď **ano** nebo **nevím**.
- Pro část úlohy, pro kterou je očekávána odpověď **ano**, existuje takový certifikát, aby i algoritmus dal odpověď **ano**.
- Pro část úlohy, kde je očekávána odpověď **ne**, dá algoritmus odpověď **nevím**.

Můžeme říci, že každá úloha, která je polynomiální je taktéž NP, ale nelze to tvrdit naopak. [3–4]

3.3 NP-úplné úlohy (NP-Complete problems)

Existuje mnoho problémů (jako hledání chromatického čísla), které nemají řešení v polynomiálním čase, nebo alespoň prozatím nebyl nalezen algoritmus, který by to zvládnul. Pokud by se našel algoritmus řešící problém v polynomiálním čase, pak by tato úloha přestala být NP-úplným problémem. [3–4]

Kapitola 4

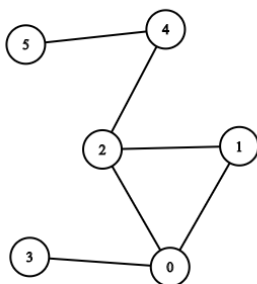
Teorie

Tato kapitola představí jednotlivé vlastnosti grafů. Pro tuto práci byly vybrány takové vlastnosti, jejichž výpočet umožňují oba použité programy, tedy Mathematica i SageMath. Definice jednotlivých vlastností jsou popsány níže. Nejprve vysvětlení, co je to graf.

4.1 Graf

O grafu můžeme přemýšlet jako o množině objektů, jež nazýváme vrcholy, kde vztah mezi jednotlivými vrcholy je znázorněn jejich propojením, nebo-li hranou. Tyto hrany mohou vést od jednoho vrcholu k druhému nebo z daného vrcholu zpět. Graf většinou slouží jako abstrakce nějakého problému. U hran lze rozlišovat, zda se jedná o hrany orientované či neorientované. Orientovaná hrana je taková, u které záleží, který vrchol je počáteční a který koncový. U neorientovaných hran toto nerozlišujeme a jedná se o symetrické spojení. Příklad orientovaného a neorientovaného grafu nalezneme na obrázcích 4.1 a 4.2.

Tato práce se bude zabývat pouze vlastnostmi neorientovaných grafů. To jsou tedy grafy, kde je orientace hran nepodstatná a nezáleží na tom, který vrchol je počáteční. [4, 3]

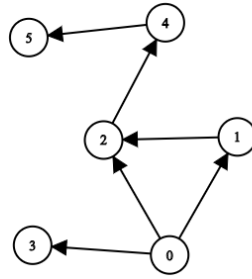


Obrázek 4.1. Neorientovaný graf

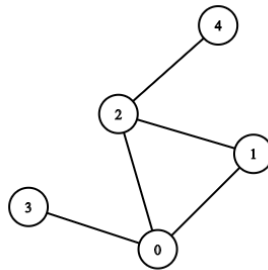
4.2 Souvislý graf (Connected graph)

Je takový graf, jehož každé dva vrcholy jsou spojeny cestou. Příklad souvislého grafu můžeme vidět na obrázku 4.3, naopak nesouvislého grafu na obrázku 4.4. [4, 3, 5]

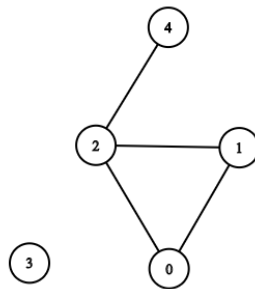
Pro efektivní výpočet souvislosti grafu můžeme použít prohledávání do šířky. Asymptotická složitost tohoto algoritmu je $O(|V| + |E|)$, kde V představuje počet vrcholů v grafu a E počet hran v grafu.



Obrázek 4.2. Orientovaný graf



Obrázek 4.3. Souvislý graf



Obrázek 4.4. Nesouvislý graf

■ 4.2.1 Prohledávání do šířky (Breadth-first search, zkráceně BFS)

Prohledávání do šířky je algoritmus, který projde vrcholy v daném maximálním souvislém podgrafu, takzvané komponentě souvislosti. Tento algoritmus se nejprve podívá na všechny sousedy startovacího vrcholu a následně postupně prochází jejich sousedy. [6]

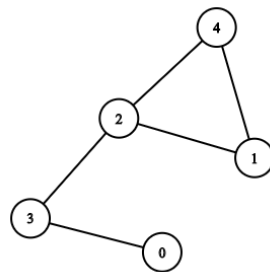
4.3 Strom (Tree)

Je takový graf, který je souvislý (4.3) a nemá žádnou neorientovanou uzavřenou cestu (kružnici). Graf s kružnicí je vidět na obrázku 4.5. Příklad stromu je na obrázku 4.6. [4, 3, 7]

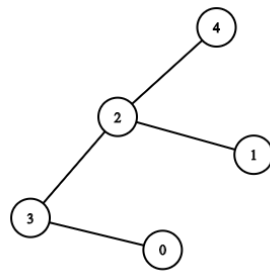
Pro zjištění, zda je graf stromem lze použít algoritmus pro prohledávání do hloubky. Asymptotická složitost tohoto algoritmu je $O(|V| + |E|)$, kde V představuje počet vrcholů v grafu a E počet hran v grafu.

4.3.1 Prohledávání do hloubky (Depth-first search, zkráceně DFS)

Tento algoritmus vždy nejprve expanduje prvního potomka každého vrcholu, pokud ještě nebyl označen jako navštívený. Pokud narazí na vrchol, který nemá nenavštíveného potomka, pak se vrací zpět pomocí backtrackingu a expanduje dalšího potomka naposledy navštíveného vrcholu. [6]



Obrázek 4.5. Kružnice v grafu



Obrázek 4.6. Strom

4.4 Excentricita (Eccentricity)

Excentricita vrcholu v ($ecc(v)$) v grafu G je největší ze všech vzdáleností vrcholu v od ostatních vrcholů v grafu.

$$ecc(v) = \max_{x \in V_G} \{d(v, x)\}$$

[4, 3, 8]

Excentricita grafu je zjistitelná pomocí prohledávání do hloubky, jehož asymptotická složitost je $O(|V| + |E|)$. [6, 9–10]

4.5 Průměr (Diameter)

Průměr grafu G je maximální excentricita v grafu G , jedná se tedy o maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v grafu. Jinými slovy, lze říct, že průměr grafu je nejvyšší počet vrcholů, které musí být navštíveny, pokud cestujeme z jednoho vrcholu do jiného, ale to pouze za předpokladu, že jsou vyloučeny cesty, které vedou zpět, jsou objíždkami nebo smyčkami. Jedná se tedy o maximum všech hodnot v matici grafové vzdálenosti.

$$\text{diam}(G) = \max_{x \in V_G} \{ecc(x)\}$$

Z definice lze usoudit, že graf, který není souvislý má nekonečný průměr.

[4, 3, 11]

Průměr grafu můžeme zjistit nalezením všech cest v grafu a zjištění, která z nich je nejdelší. Pro zjištění průměru grafu lze použít algoritmus pro prohledávání do šířky, jehož asymptotická složitost je $O(|V| + |E|)$. [6, 9–10]

4.6 Poloměr (Radius)

Naopak poloměr grafu G je minimální excentricita, tedy minimální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v G . Jinak řečeno jedná se o nejnižší počet vrcholů, které musí být navštíveny, pokud cestujeme z jednoho vrcholu do jiného, pokud vyloučíme cesty vedoucí zpět, objíždky a smyčky.

$$\text{rad}(G) = \min_{x \in V_G} \{ecc(x)\}$$

Lze tedy usoudit, že poloměr grafu, který není souvislý má nekonečný radius. Poloměr grafu existuje tedy pouze pokud existuje jeho průměr.

[4, 3, 12]

Stejně jako pro průměr grafu, tak i jeho poloměr můžeme vypočítat pomocí prohledávání do hloubky, jehož asymptotická složitost je $O(|V| + |E|)$. [6, 9–10]

4.7 Obvod grafu (Girth)

Obvod grafu G , jedná-li se o graf s alespoň jedním cyklem, je délka nejkratšího cyklu v G . Girth je tudíž nedefinovatelný, pokud graf G je acyklický.

[4, 3, 13]

Složitost výpočtu obvodu grafu můžeme rozdělit do dvou kategorií. Pokud je obvod grafu sudý, pak složitost výpočtu této vlastnosti bude $O(n^2)$. Myšlenka je taková, že pro každý uzel v grafu se spustí prohledávání do šířky, dokud nenalezneme první cyklus, poté se přesune na další vrchol. Výsledkem je nejkratší nalezený cyklus v grafu. Pokud je obvod sudý, pak je tento nalezený nejkratší cyklus oním hledaným nejkratším cyklem. Konkrétně je-li graf bipartitní, tento postup vždy vypočítá obvod. Ovšem pokud je obvod lichý, pak je nalezený cyklus délky g nebo $g + 1$. Problém s lichým obvodem je takový, že algoritmus musí být schopen odhalit, zda daný graf obsahuje trojúhelník. Ukázalo se, že jakýkoli algoritmus, který je schopen nalézt v hustém grafu trojúhelník, dokáže spočítat obvod. Takový algoritmus má časovou složitost $O(|V|^2)$, [38]. Nicméně jedná-li se o řídký graf, pak čas potřebný pro nalezení obvodu není tak malý jako pro nalezení trojúhelníků. Nejlepší má časovou složitost $O(|V||E|)$. [14]

4.8 Eulerovský graf (Eulerian Graph)

Eulerovský tah obsahuje všechny hrany grafu (podle definice tahu žádnou hranu neobsahuje více jak jednou).

Eulerovský graf je takový souvislý graf, který má Eulerovský tah.

Je překvapivé, že řešení tohoto problému je poměrně rychlé a jedná se o polynomiální nebo i lineární obtížnost.

[4, 3, 15]

Pro zjištění, zda je graf eulerovský můžeme použít Fleuryho algoritmus (Fleury's algorithm).

4.8.1 Fleuryho algoritmus (Fleury's algorithm)

- Při hledání Eulerovského tahu začíná v jednom ze dvou vrcholů, které mají lichý stupeň.
- Pro opuštění vrcholu vybere jakoukoliv hranu, jejíž odstranění nezpůsobí rozpad grafu na dvě oddělené množiny hran.
- Přidá vybranou hranu a smaže ji z grafu.
- Takto pokračuje až do konce.

[16]

4.9 Klikovost grafu (Clique number)

Maximální podgraf v grafu G , který je zároveň i úplným grafem, nazýváme klikou. Klika je tudíž maximálním podgrafem, jehož vrcholy vzájemně sousedí.

Klikovost grafu je potom počet vrcholů v největší klice v grafu.

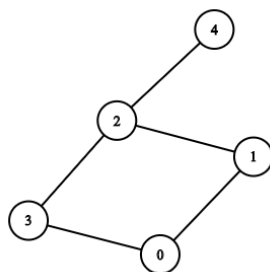
Pro libovolný graf platí

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{m - d_i},$$

kde d_i je stupeň vrcholu i a m je počet vrcholů v grafu G . Dále můžeme říci, že minimální počet barev, kterými lze graf G obarvit (tzv. chromatic number) je stejný nebo větší než klikovost grafu G .

Příklad grafu se třemi klikami je vidět na obrázku 4.7

[4, 3, 17]



Obrázek 4.7. Graf se třemi klikami

Jelikož se v případě zjišťování klikovosti grafu jedná o NP-úplnou úlohu, časová složitost algoritmu, který tento problém řeší bude exponenciální. [18]

4.10 Nezávislost grafu (Independence number)

Představme si nejdříve nezávislou množinu.

4.10.1 Nezávislá množina (Independent set)

Podmnožina vrcholů grafu je nezávislou množinou, právě tehdy pokud žádný pár vrcholů v této podmnožině není spojen hranou. Maximální nezávislá množina je pak taková množina, ke které již nejde přidat další vrchol bez toho, aniž by došlo ke ztrátě nezávislosti. Nejpočetnější nezávislá množina je tedy maximální nezávislá množina, která má největší počet prvků (vrcholů nebo hran, záleží, o kterou nezávislou množinu se jedná) porovnáváme-li všechny nezávislé množiny v grafu. [4, 3, 19]

4.10.2 Nezávislost grafu

Nezávislost grafu vychází z definice nezávislé množiny a jedná se tedy o počet vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině v daném grafu. Existuje úzká souvislost mezi klikovostí a nezávislostí grafu. Vytvoříme-li doplňkový graf ke grafu G (představme si úplný graf U se stejným počtem vrcholů jako má graf G , kde každé dva vrcholy grafu U jsou spojeny hranou, pak doplňkový graf, ke grafu G vznikne tak, že z úplného grafu U odebereme všechny hrany, které má společné s grafem G), pak maximální nezávislé množiny v doplňkovém grafu odpovídají klikám v grafu G .

[4, 3, 20]

Stejně jako klikovost i u zjišťování nezávislosti grafu se jedná o NP-úplnou úlohu, můžeme tedy i při zjišťování této vlastnosti hovořit o exponenciální složitosti. [18]

4.11 Kostra grafu (Spanning tree)

Je podmnožina grafu, kde se počet vrcholů v této podmnožině rovná počtu vrcholů grafu. Zároveň je tato podmnožina stromem.

[4, 3, 21]

Pro nalezení kostry grafu existuje několik algoritmů. Jedním z nich je Kruskalův algoritmus.

4.11.1 Kruskalův algoritmus

Kruskalův algoritmus vybírá vždy takovou hranu, která má ze všech hran, spojujících dva různé podstromy, tu nejmenší váhu. Nejprve tedy seřadí hrany podle jejich váhy a následně přidává hrany grafu tak, aby nevznikl žádný cyklus. Časová složitost tohoto algoritmu záleží na použití řadícího algoritmu. Použijeme-li algoritmus založený na porovnávání, pak se jedná o složitost $O(|E|\log|E|)$. Pokud jsou hrany již předřazeny, lze k jejich řazení použít algoritmus s lineární časovou složitostí, nebo, jako v našem případě, mají totožnou váhu, pak je složitost tohoto algoritmu $O(|E|\alpha(|E|))$, kde E jsou hrany a α je inverzní Ackermannova funkce.

[6]

4.12 Chromatické číslo grafu, vrcholová barevnost, barevnost grafu (chromatic number)

Obarvení grafu značí ohodnocení jednotlivých vrcholů grafu hodnotami z množiny (barvami), tak aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou hodnotu (barvu).

Barevnost grafu je minimální počet různých barev potřebných pro správné obarvení vrcholů grafu.

V některých případech můžeme mluvit i o hranové barevnosti, kdy místo toho, abychom ohodnocovali jednotlivými barvami vrcholy ohodnocujeme jednotlivé hrany.

Pokud má graf chromatické číslo jedna nebo dva lze celkem jednoduše ověřit:

- Graf má chromatické číslo jedna, právě tehdy, když je graf diskrétní.
- Graf má chromatické číslo menší nebo rovno dvěma, právě tehdy, když graf neobsahuje kružnici liché délky.
- Graf má chromatické číslo menší nebo rovno dvěma, právě tehdy, když je graf bipartitní.

V ostatních případech, kdy by počet barev byl větší nebo roven třem se ale dostáváme do NP-úplné úlohy. Algoritmus pro obarvení grafu je typickým příkladem backtrackingu.

[4, 3, 22]

4.13 Hamiltonovský graf (Hamiltonian)

Hamiltonovský graf je takový graf, který má Hamiltonovský cyklus, tedy cyklus procházející přes všechny vrcholy grafu.

Ačkoliv je Hamiltonovský cyklus analogický k Eulerovskému tahu, tak není znám přístup, ve kterém by šlo za jeho pomoci jednoduše zjistit, zda se jedná o Hamiltonovský cyklus, vlastně neexistuje žádný takový rychlý způsob. V případě Hamiltonovského cyklu se jedná o NP-složitý problém, můžeme tedy mluvit o exponenciální časové složitosti. Máme zde ale několik podmínek, které musí Hamiltonovský graf splňovat a lze je aplikovat na velké množství tříd grafů. Stejně tak je tu několik základních pravidel, které nám mohou říci, že se o Hamiltonovský graf nejedná.

Všechny Hamiltonovské grafy jsou souvislé a mají všechny vrcholy se stupněm minimálně dva. Ovšem nelze tvrdit, že každý graf, který toto splňuje by byl hamiltonovským.

Jestliže součet stupňů všech nesousedních vrcholů grafu je větší, než počet vrcholů všech podmnožin nesousedních vrcholů, pak se jedná o Hamiltonovský graf.

Všechny planární souvislé grafy se stupněm minimálně čtyři mají Hamiltonovské cykly, ale nemají je všechny polyhedrální grafy.

[4, 3, 23]

4.14 Perfektnost grafu (Perfect Graph)

Graf je perfektní, jestliže se pro jeho každý podgraf chromatické číslo rovná klikovosti.

[4, 3, 24]

Po dlouhou dobu byla složitost rozpoznávání perfektních grafů otevřenou otázkou, ale nakonec po důkazu silné věty o dokonalém grafu (The Strong Perfect Graph Theorem) objevili Chudnovský, Cornuéjols, Liu, Seymour a Vušković algoritmus, který tento problém má řešit v polynomiálním čase.

[25]

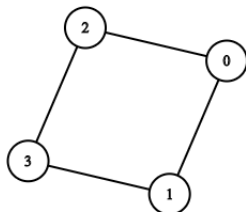
4.15 Rovinný graf (Planar Graph)

Graf nazýváme rovinným, jestliže existuje způsob, jak ho nakreslit bez toho, aby se jeho hrany křížily.

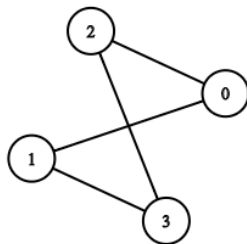
Tentýž planární graf zakreslený s křížícími se hranami i bez nich nalezneme na obrázcích 4.9 a 4.8.

Existuje mnoho efektivních algoritmů na testování, zda je graf rovinný. Většina těchto testů je založena na $O(n^3)$ algoritmech Auslendera a Partera.

[4, 3, 26]



Obrázek 4.8. Planární graf nakraslený bez křížení



Obrázek 4.9. Planární graf zakreslený s křížícími se hranami

4.16 Regulární graf (Regular Graph)

Regulární graf je takový graf, jehož všechny vrcholy mají stejný stupeň. Můžeme mluvit i o k -regulárním grafu, kde všechny vrcholy mají stupeň o velikosti k .

[4, 3, 27]

4.17 Hranově tranzitivní graf (Edge-transitive Graph)

Hranově tranzitivní graf je, pokud pro každý pár hran u, v v grafu G existuje automorfismus, který přidělí u k v .

[4, 3, 28]

4.18 Distančně regulární graf (Distance-Regular Graph)

U distančně regulárního grafu si nejdříve musíme uvědomit, co je to vzdálenost v grafu.

■ 4.18.1 Vzdálenost v grafu (Distance)

Vzdálenost vrcholu u od vrcholu v ($d(u, v)$) je délka nejkratší cesty, pokud existuje. Neexistuje-li, pak je rovna nekonečnu. [4, 3, 29]

■ 4.18.2 Distančně regulární graf

Distančně regulární graf je graf, ve kterém pro jakékoli dva vrcholy u a v a jakékoli indexy i, j , jejichž hodnoty mohou být v rozsahu od 0 do d , kde d je grafová vzdálenost, počet vrcholů ve vzdálenosti i od u a ve vzdálenosti j od v závisí pouze na i, j a vzdálenosti mezi u a v .

[30]

Kapitola 5

Diskuze výsledků

Poté co jsme si vysvětlili jednotlivé pojmy a ujasnili si s jakými aplikacemi budeme pracovat se můžeme podívat na výsledky jednotlivých měření.

Abych mohla efektivně měřit čas, který daná aplikace stráví výpočtem dané vlastnosti, napsala jsem několik skriptů, které jednotlivé aplikace spouští a měří čas strávený výpočtem. Protože každé aplikaci trvá jiný čas, než se spustí a každá pracuje jinak efektivně s načítáním a ukládáním do souboru, rozhodla jsem se měřit čas až od chvíle, kdy jsou grafy načteny do paměti až po okamžik, kdy aplikace určí výsledek. Graf i s výsledkem je následně uložen a do statistiky je zapsán čas, který aplikace strávila výpočtem.

Protože některé vlastnosti jsou počítány velmi rychle pracují vždy se skupinou sta různých náhodných grafů a uváděný čas je tedy čas, který aplikace stráví výpočtem dané vlastnosti na 100 grafech se stejným počtem vrcholů a hran.

5.1 Vliv velikosti grafu

Nejdříve se zaměříme na vliv velikosti grafu na rychlost výpočtu.

Velikost grafu můžeme ovlivňovat počtem uzlů nebo hran. Já jsem se rozhodla vytvořit několik skupin grafů o stejném počtu vrcholů. V rámci těchto skupin jsem vytvořila ještě další tři podskupiny a to tak, abych reprezentovala grafy s malým počtem hran, grafy se středním počtem hran a grafy s nejvyšším možným počtem hran. Nakonec se ukázalo, že kvůli nedostatečné vnitřní paměti počítače nemá význam řešit některé větší grafy, nebo že některé vlastnosti jsou tak výpočetně náročné, že se nedají vyřešit v přijatelně krátkém čase.

Pro účely jsou použity náhodné souvislé grafy.

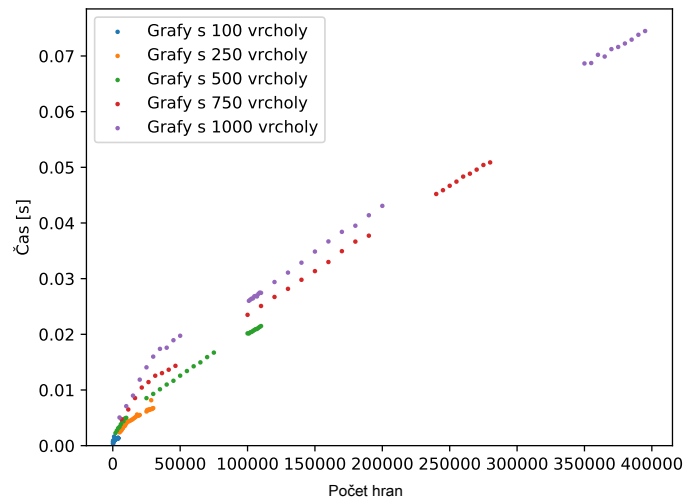
5.1.1 Souvislý graf

U zjišťování, zda je graf souvislý se výsledky obou aplikací výrazně liší. Zatímco Mathematica (viz 5.1) zvládla výpočet v téměř zanedbatelném čase a při přidávání hran do grafu u ní sledujeme jen nepatrné lineární stoupání u SageMath (viz 5.2) je toto stoupání výrazné. A u největších grafů výpočet trval i několik vteřin. Pro zjišťování, zda je graf souvislý se mi tedy jeví jako lepší volba Mathematica.

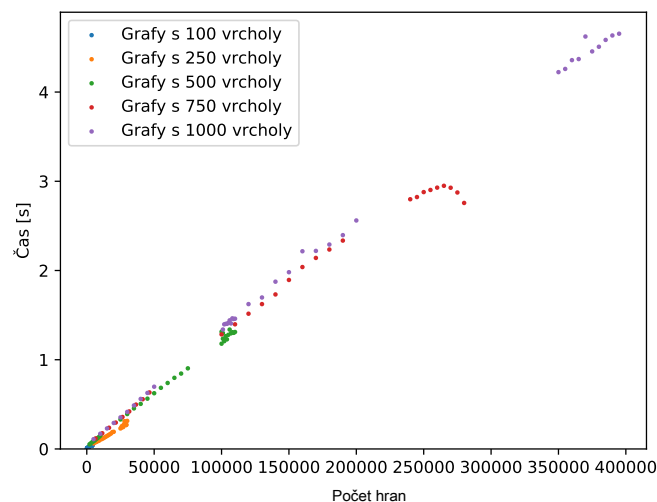
Očekávaná časová složitost algoritmu byla lineární. Z grafů 5.1 a 5.2, lze vidět, že čas potřebný pro oba programy roste lineárně s počtem hran a vrcholů grafu. Pro velmi malé grafy vidíme nelineární nárůst, což je způsobeno minimálním časem potřebným pro běh programu. Zjištěná složitost výpočtu tudíž odpovídá předpokládané.

5.1.2 Strom

V případě zjišťování, zda je graf stromem se výsledky mezi aplikacemi výrazně liší. Zatímco Mathematica (viz graf 5.3) nezávisle na velikosti grafu, zjišťovala tuto vlastnost v konstantním čase, U SageMath (5.4) se doba výpočtu lineárně zvedala v závislosti na počtu hran v grafu. Je však zajímavé, že ani v jednom případě se na rychlosti výpočtu výrazně nepodílel počet vrcholů grafu.



Obrázek 5.1. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů souvislých, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice

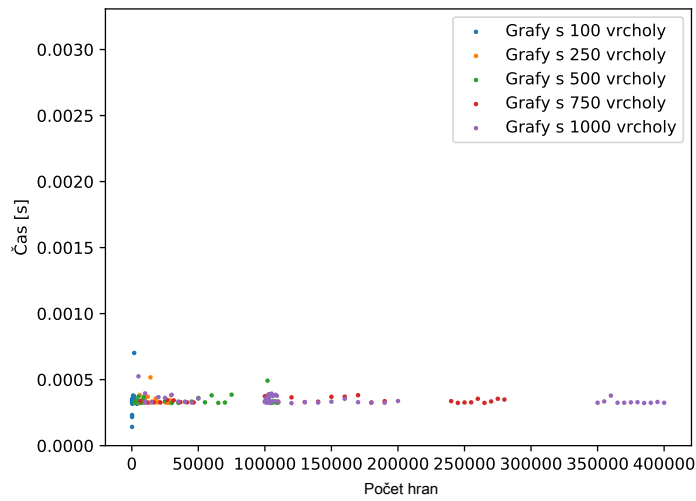


Obrázek 5.2. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů souvislých, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

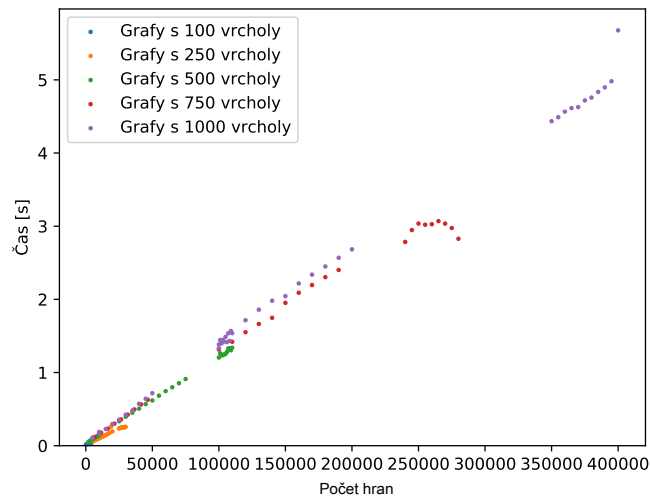
Při zjišťování, zda je graf stromem byla očekávána lineární časová složitost závislá na počtu hran a vrcholů. U SageMath (5.4) můžeme vidět, že časová náročnost opravdu lineárně stoupá s velikostí grafu, avšak Mathematica (5.3) má čas výpočtu konstantní a nezávislý na velikosti grafu. To by mohlo být způsobeno tím, že se vlastnost počítá již při načítání grafu do paměti. Čas výpočtu je měřen až po načtení grafů do paměti, výpočet se tedy jeví konstantní.

5.1.3 Průměr

Z grafů 5.5 a 5.6 je zjevné, že SageMath a Mathematica se různí způsobem výpočtu této vlastnosti grafu. Zatímco u SageMath vidíme, že nejvíce času zabírá výpočet u grafů



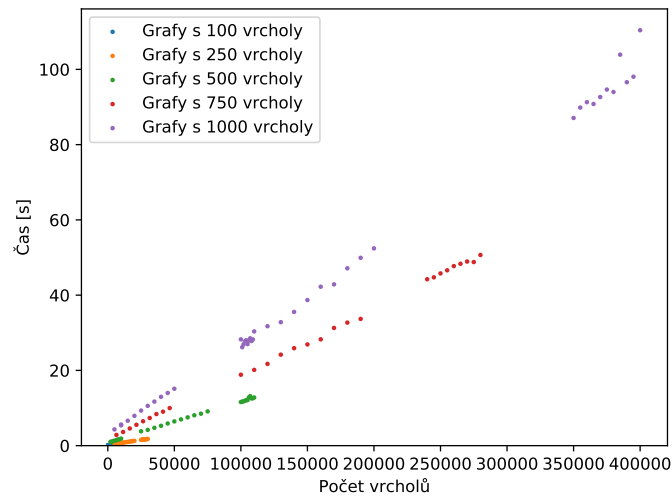
Obrázek 5.3. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, jestli je sto grafů stromem, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



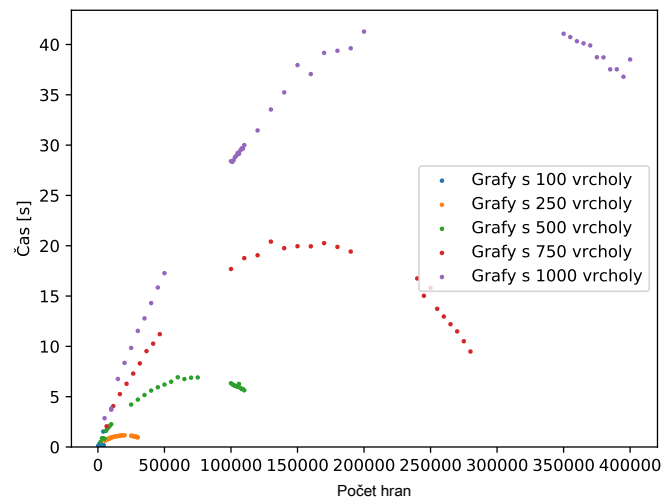
Obrázek 5.4. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, jestli je sto grafů stromem, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

se středním počtem hran, u programu Mathematica se časová náročnost s přibývajícím počtem hran zvedá.

U průměru grafu byla očekávána lineární časová složitost. Program Mathematica 5.5 vykazuje předpokládanou časovou složitost, závislou na počtu hran a vrcholů grafu. SageMath 5.6 však předpokládanou časovou náročnost nemá. Z grafu se zdá, že jsou implementovány optimalizace pro velké grafy, protože u grafů s větším počtem vrcholů a hran se čas výpočtu snižuje, zatímco u menších grafů roste rychleji než lineárně.



Obrázek 5.5. Graf ukazuje závislost doby potřebné pro výpočet průměrů sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



Obrázek 5.6. Graf ukazuje závislost doby potřebné pro výpočet průměrů sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

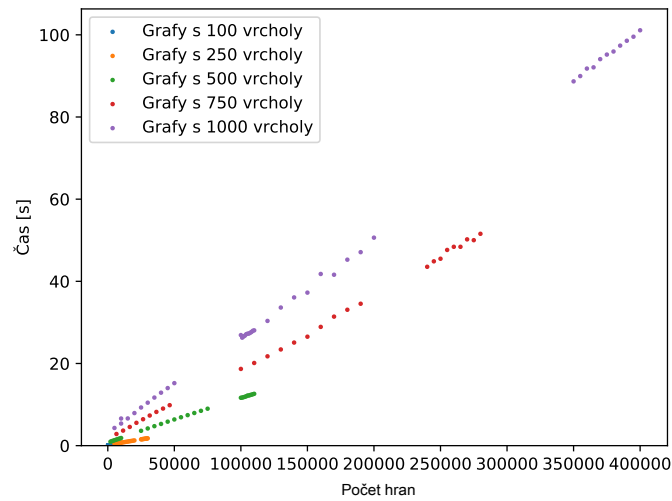
5.1.4 Poloměr

Na grafech 5.7 a 5.8 můžeme vidět, že se rychlost výpočtu těchto vlastností v obou aplikacích příliš neliší. Avšak s postupným zvyšováním velikosti grafu a to jak s počtem vrcholů, tak s počtem hran.

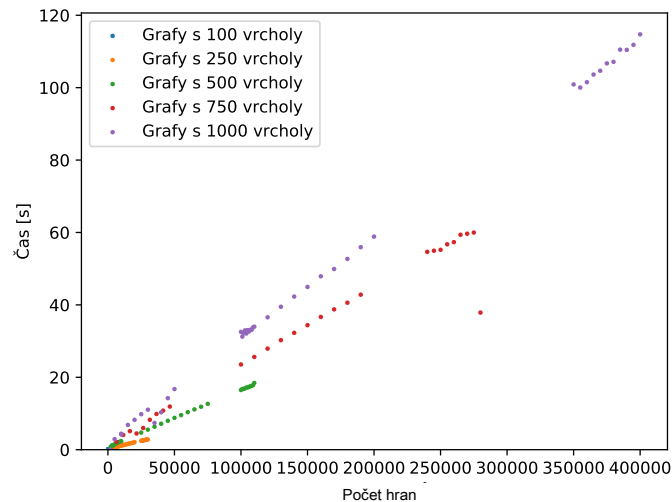
Časová složitost výpočtu poloměru grafu byla u programů Mathematica i SageMath lineární, což odpovídá předpokládané časové náročnosti.

5.1.5 Eulerovský graf

V případě zjištění, zda je graf Eulerovský, dochází stejně jako v případě zjišťování, zda je graf stromem, k velkým rozdílům mezi aplikacemi, jak nám ukazují grafy 5.9 a 5.10. Zatímco Mathematica zvládá tuto vlastnost vypočítat v konstantním čase nezávisle na



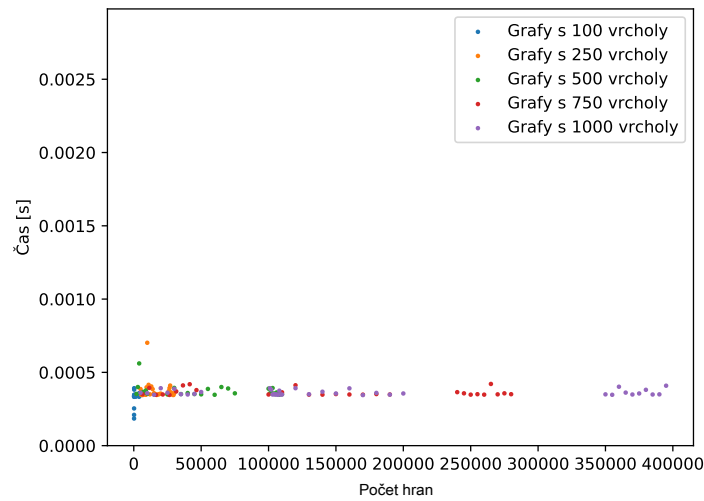
Obrázek 5.7. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění poloměru sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



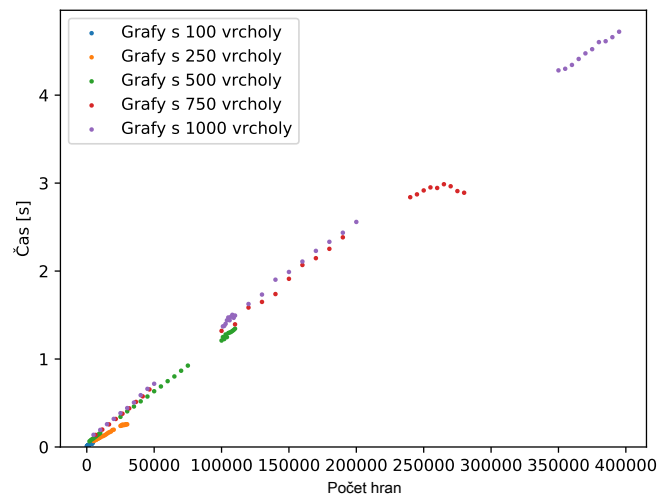
Obrázek 5.8. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění poloměru sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

velikosti grafu, u SageMath dochází k lineární stoupání v závislosti na počtu hran. V obou případech nemá vliv počet vrcholů v grafu.

Pro výpočet, zda je graf Eulerovský je očekávána polynomiální nebo lineární časová složitost. SageMath 5.10 tento předpoklad naplňuje. Mathematica má konstantní dobu výpočtu této vlastnosti. To je pravděpodobně způsobeno jejím výpočtem již při načítání grafů do paměti. Při měření výpočtu vlastnosti po načtení do paměti se pak čas výpočtu jeví jako konstantní.



Obrázek 5.9. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově Eulerovských, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



Obrázek 5.10. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů Eulerovských, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

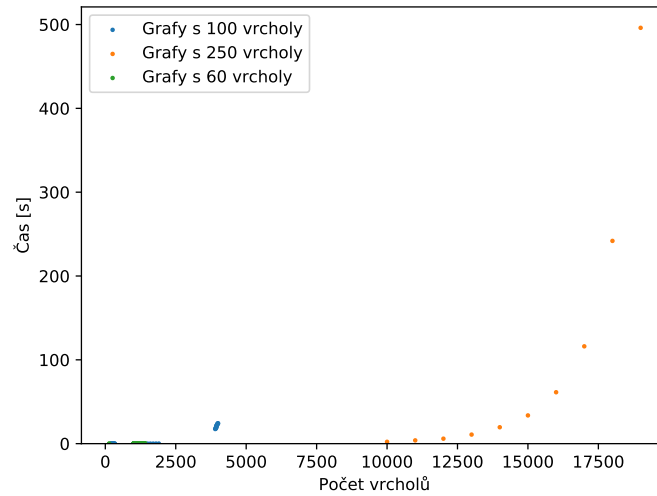
5.1.6 Klikovost grafu

Klikovost grafu je časově náročný problém, proto v tomto případě porovnáváme výpočty na daleko menších datech. V grafech u obou aplikací je jasně patrná exponenciální časová náročnost a s přibývajícím množstvím hran. Jak ukazují grafy 5.11 a 5.12.

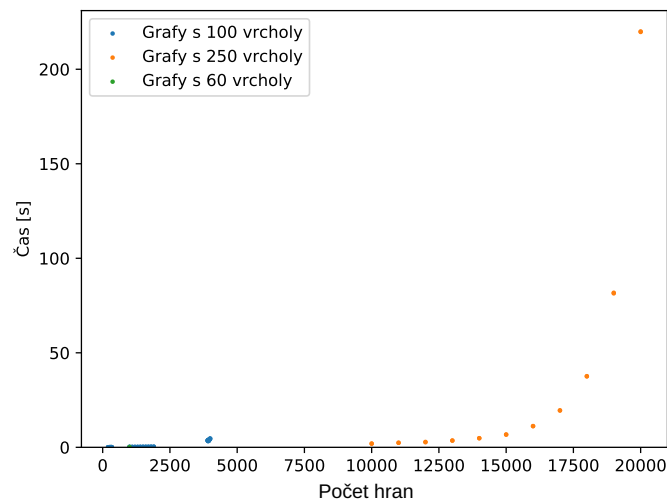
Výpočet klikovosti grafu je NP-úplná úloha. Očekávaná časová náročnost byla tudíž exponenciální. Z grafů 5.11 a 5.12 je vidět, že oba použité programy tento předpoklad naplňují.

5.1.7 Počet koster v grafu

Kvůli náročnosti výpočtu této vlastnosti jsem se musela omezit na menší grafy 5.13 a 5.14. Rychlost výpočtu počtu koster v grafu se v obou aplikacích jeví jako podobná,



Obrázek 5.11. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtu klik ve sto grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice

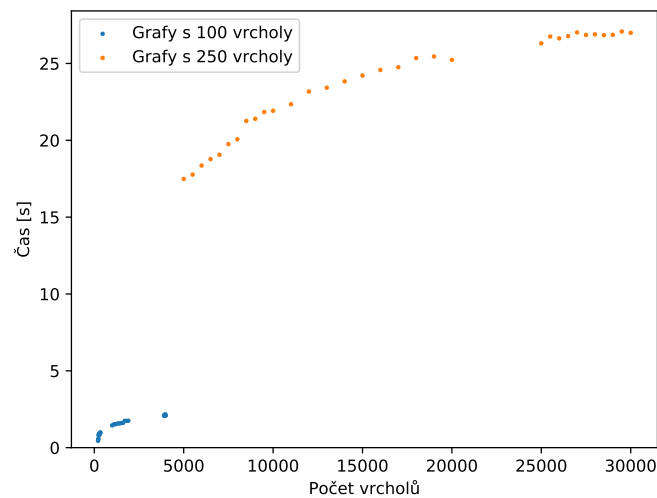


Obrázek 5.12. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtu klik ve sto grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

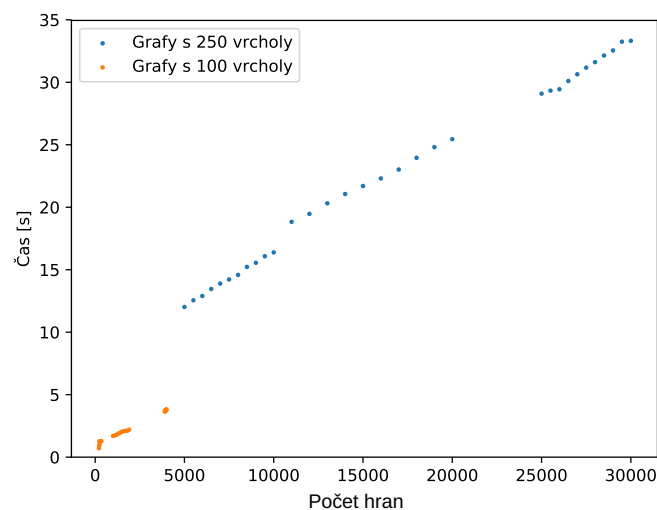
ačkoli u křivky programu Mathematica je viditelnější tendence se podobat logaritmické křivce.

5.1.8 Perfektnost grafu

U zjišťování, zda je graf perfektní 5.15 a 5.16 jsem znovu narazila na problém s výpočetní náročností a bylo tedy nutné zvolit menší instance zkoumaných dat. U obou aplikací se grafy hodně podobají, přesto se zdá, že u Mathematici dochází k mírnému nárůstu doby výpočtu s přibývajícím počtem hran u SageMath se jeví křivka více zploštělá.



Obrázek 5.13. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtů koster ve sto různých grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice

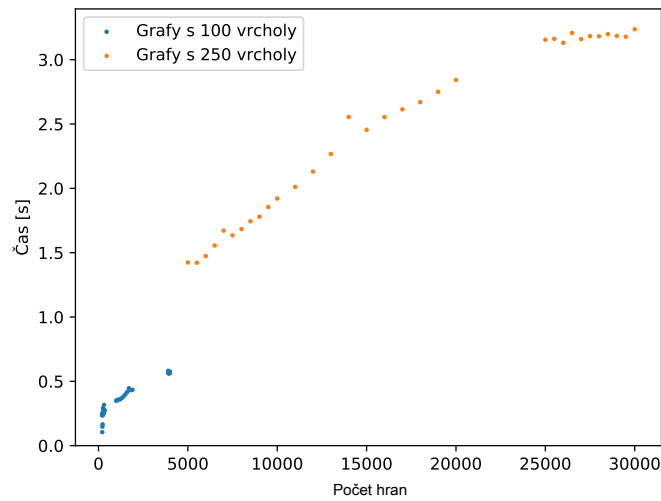


Obrázek 5.14. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtů koster ve sto různých grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

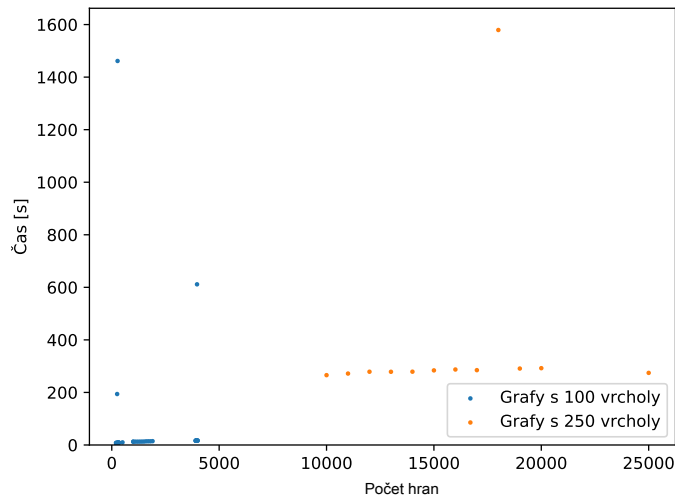
5.1.9 Rovinný graf

V případě zjišťování, zda je graf rovinný (5.17 a 5.18) se výsledky aplikací výrazně liší. Mathematica vlastnost vypočítá v konstantním čase bez ohledu na velikost grafu, oproti tomu u SageMath při přibývajících hranách dochází k výraznému zvýšení doby výpočtu, ovšem počet vrcholů grafu na výpočet nemá vliv.

Mathematica vlastnost opět vypočítává již při načítání dat a její výsledek je tedy nevyhovující. SageMath vykazuje lineární časovou složitost výpočtu, zdá se tedy, že nepoužívá předpokládaný způsob výpočtu vlastnosti.



Obrázek 5.15. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů perfektních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



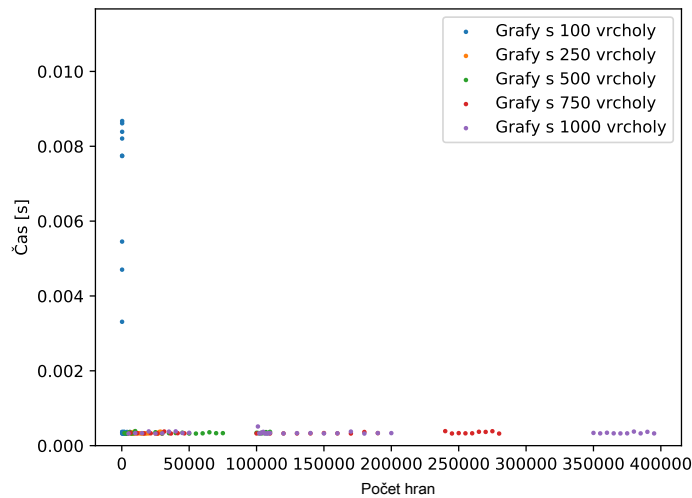
Obrázek 5.16. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů perfektních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

5.1.10 Regulární graf

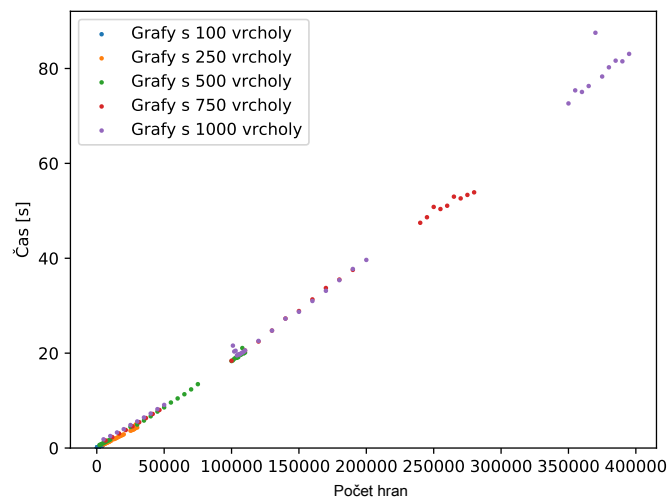
U zjišťování, zda je graf regulární se dostáváme na stejné výsledky u obou aplikací. Jak vidíme na grafech 5.19 a 5.20. Čas strávený výpočtem je téměř zanedbatelný a nemá na něj vliv počet vrcholů ani počet hran v grafu.

5.1.11 Hranově tranzitivní graf

U této vlastnosti je zjevné, že počet vrcholů nemá vliv, avšak počet hran se jeví být rozhodujícím 5.21, 5.22. V obou aplikacích se v případě jednoho grafu se 750 vrcholy a mnoha hranami vyhoupl čas strávený výpočtem do ohromných čísel. U obou aplikací s přibývajícím počtem hran čas až na výjimku mírně roste. Přesto Mathematica obzvláště grafy s více hranami počítala rychleji.



Obrázek 5.17. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů rovinných, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



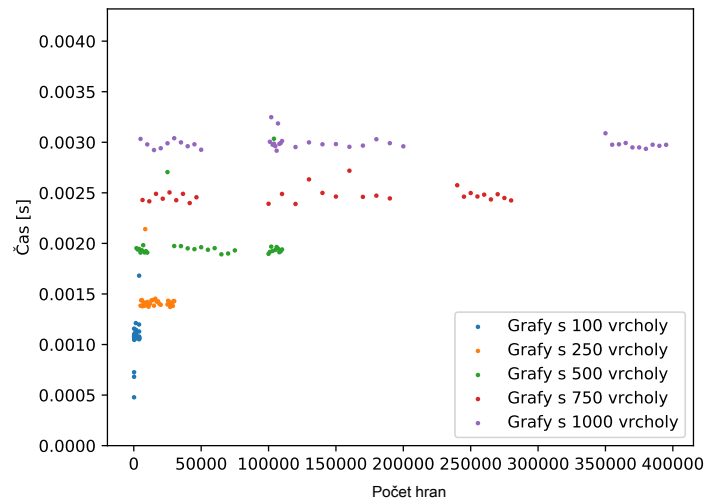
Obrázek 5.18. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů rovinných, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

5.1.12 Distančně regulární graf

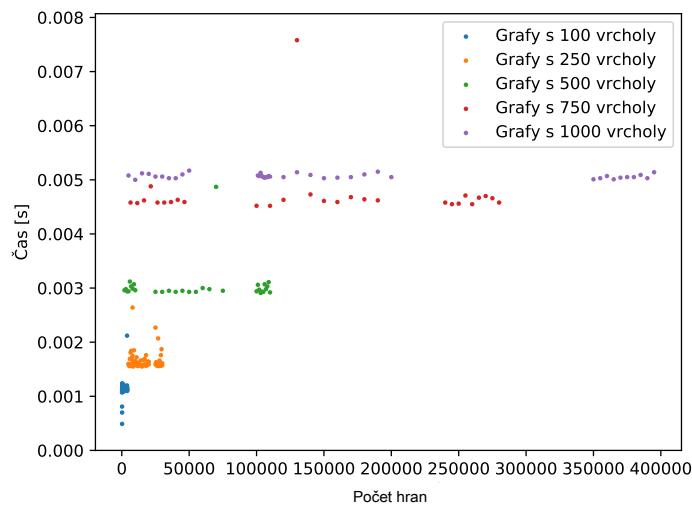
Pokud zjišťujeme, zda je vlastnost distančně regulární 5.23, 5.24 dostáváme výsledky podobné jako v případě, pokud zjišťujeme, zda graf je regulární (5.19, 5.20). Na rychlost výpočtu nemá velikost grafu vliv a čas, který jsme výpočtem strávili je téměř zanedbatelný.

5.2 Vliv charakteristických vlastností grafů

Nyní se zaměříme na porovnání rychlosti výpočtu vlastností na grafech s různými charakteristickými vlastnostmi. Porovnáme, jak tyto vlastnosti ovlivňují rychlost výpočtu zkoumaných vlastností.



Obrázek 5.19. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



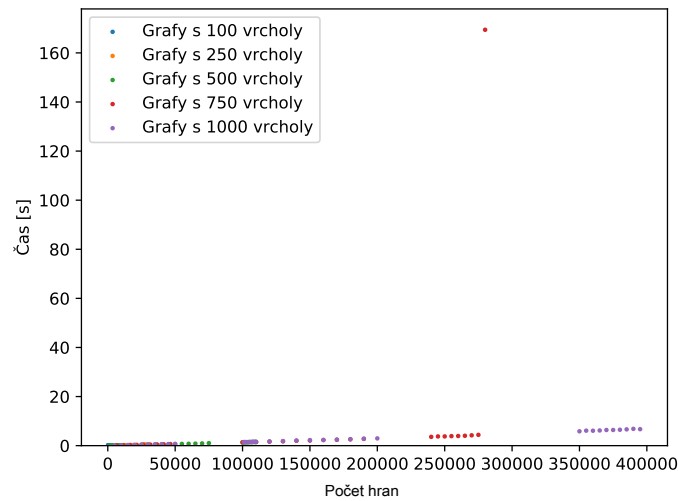
Obrázek 5.20. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

Porovnávat budeme tři skupiny grafů, kde v každé skupině má každý graf stejnou vlastnost. V první skupině máme grafy, které jsou souvislé, ve druhé grafy cyklické, a nakonec grafy zcela náhodné.

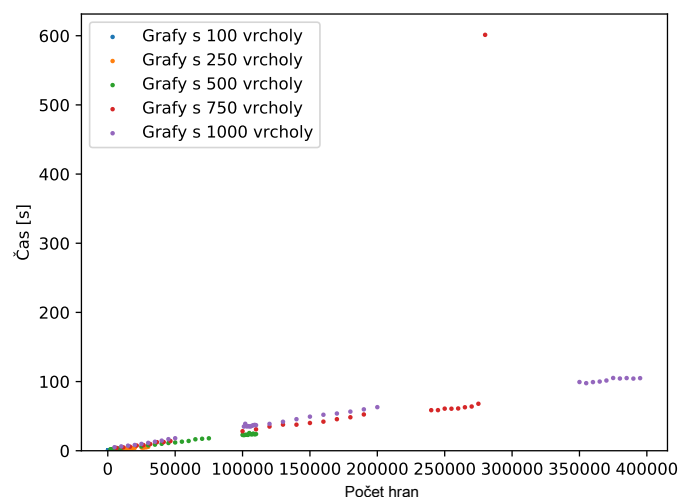
Všechny grafy použité pro testování mají 100 vrcholů. Jsou rozděleny do tří skupin podle počtu hran. Jsou zde grafy, které mají málo hran, tedy od 200 do 350, pak máme skupinu s hranami od 1000 do 2000 a nakonec grafy s nejvíce hranami 3900 do 4000.

Všechny grafy jsou k nalezení v příloze A.

Já pro porovnání vyzdvihnu hledání průměru grafu. (5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30). Jak je z grafů patrné, tak jednotlivé vlastnosti na rychlost výpočtu neměli velký vliv, což se týká i zbylých grafů a jejich vlastností.



Obrázek 5.21. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově tranzitivních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



Obrázek 5.22. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově tranzitivních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

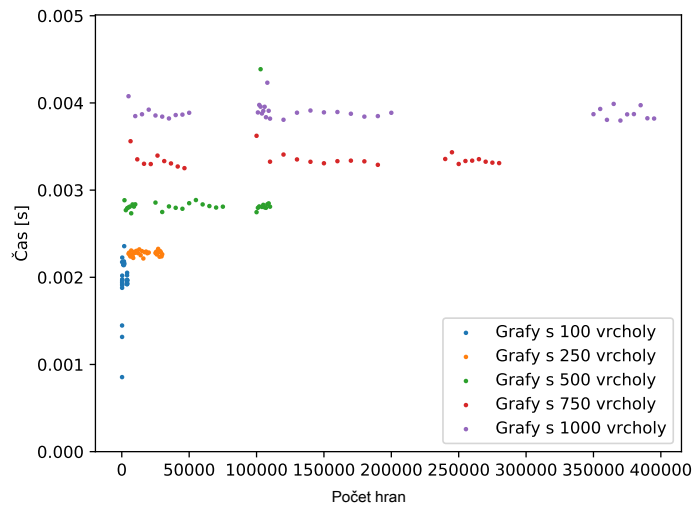
5.3 Vliv hardwarového vybavení

Nyní porovnáme jaký má vliv hardware na rychlost výpočtu. Výpočty jsem prováděla na svém osobním počítači a dvou superpočítačích dostupných v akademickém prostředí ČVUT. Porovnáme rychlost výpočtu na těchto třech typech zařízení.

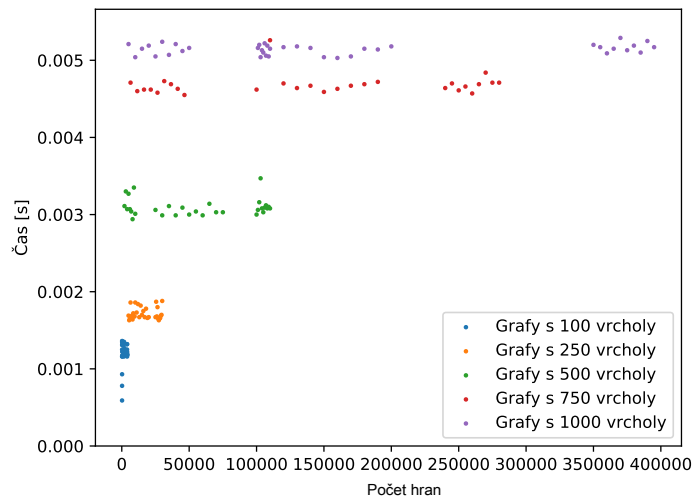
Můj osobní počítač má čtyřjádrový procesor Intel Core i5-4210U 1,7GHz a 8 GB RAM.

První testovaný superpočítač má dva šestijádrové procesory Intel Xeon 2,66 GHz a 775 GB RAM. [31]

Druhý testovaný superpočítač ferretgpu.civ.cvut má dva dvanáctijádrové procesory Intel Xeon Gold 2,6 GHz a 1888 GB RAM. [31]



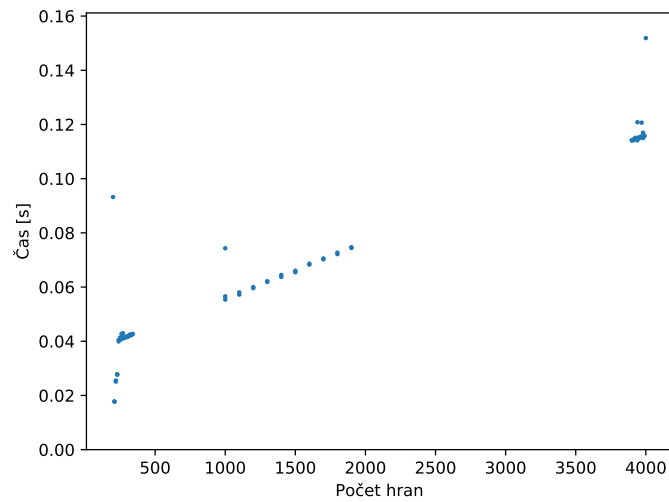
Obrázek 5.23. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů distančně regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



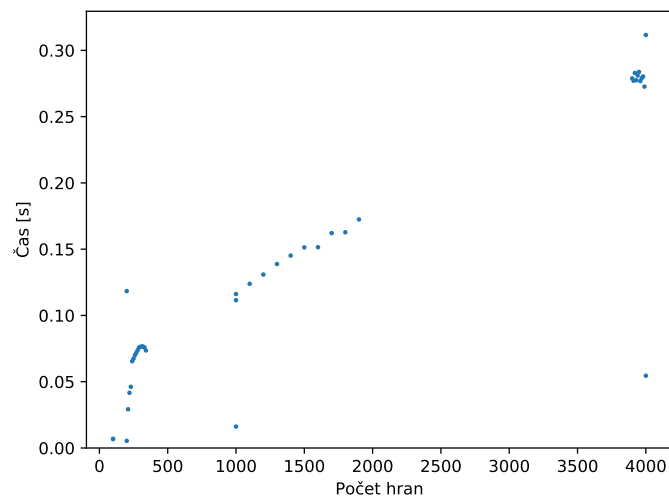
Obrázek 5.24. Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů distančně regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

Grafy s jednotlivými výsledky jsou k nahlédnutí v příloze, B.

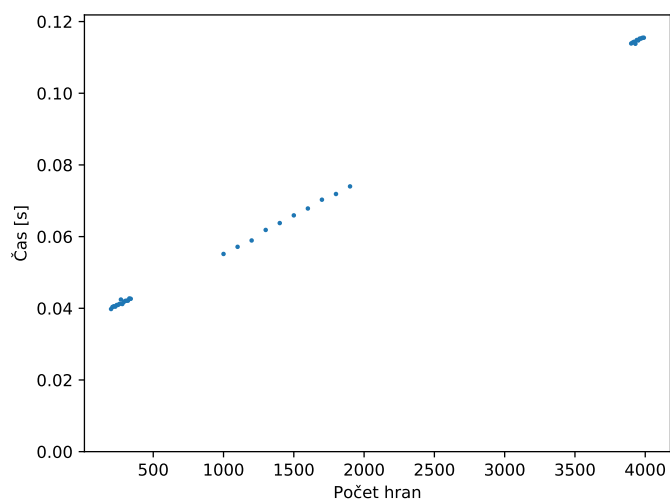
Ačkoliv superpočítač disponuje větším počtem jader v procesoru, na výpočet vlastností v testovaném programu to nemá vliv, protože tato aplikace je pouze jednovláknová. Využití superpočítače by tedy mělo smysl pouze v případě, že by daná aplikace byla schopná využít více jader. Jediné, co lze vyzdvihnout je, že narozdíl od osobního počítače u superpočítače nehrozí, že do výpočtů budou zasahovat jiné procesy.



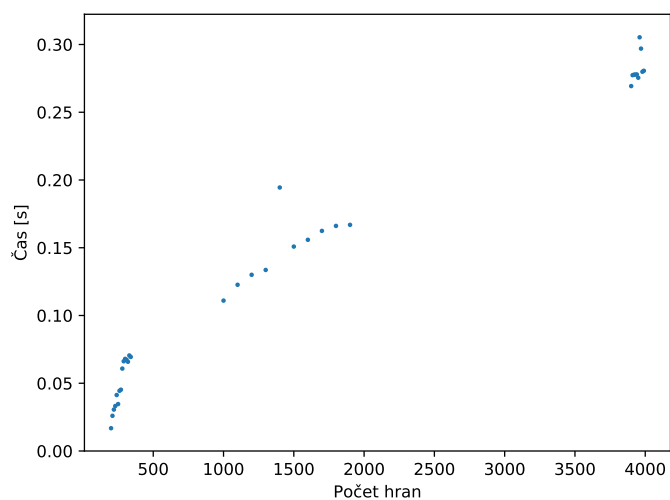
Obrázek 5.25. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto souvislých grafech, na počtu hran v Mathematice



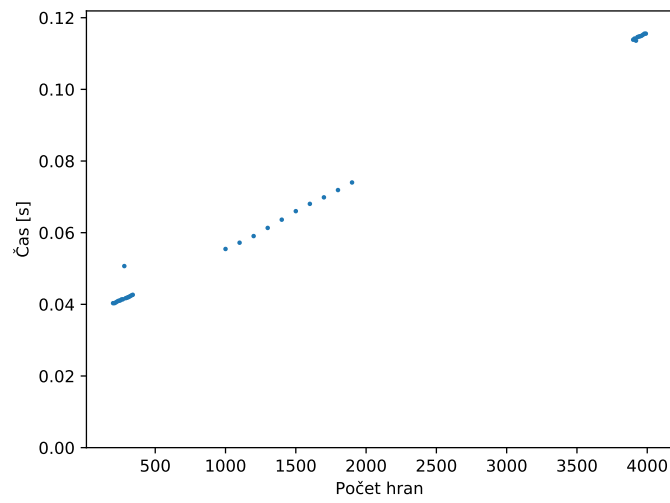
Obrázek 5.26. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto souvislých grafech, na počtu hran v SageMath



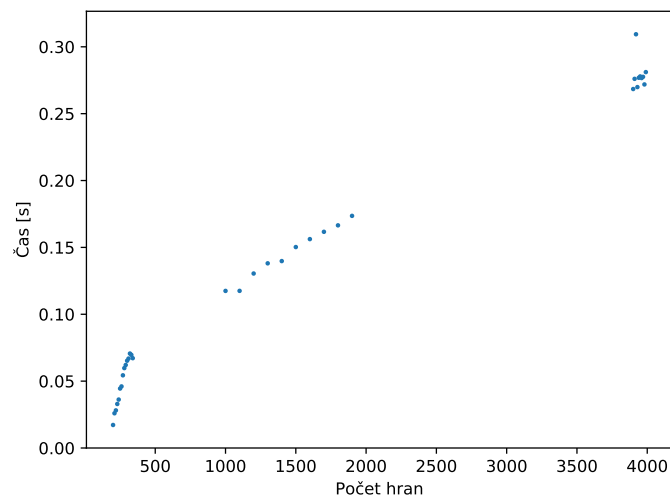
Obrázek 5.27. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto cyklických grafech, na počtu hran v Mathematice



Obrázek 5.28. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto cyklických grafech, na počtu hran v SageMath



Obrázek 5.29. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto náhodných grafech, na počtu hran v Mathematice



Obrázek 5.30. Graf závislosti času potřebném při zjišťování poloměrů ve sto náhodných grafech, na počtu hran v SageMath

Kapitola 6

Závěr

Práce představila dva programy na výpočet vlastností grafů, tedy SageMath a Mathematica. Představila jednotlivé vlastnosti, které můžeme u grafů zjišťovat a pak je otestovala.

Zaměření práce bylo otestování programu Wolfram Mathematica a Pythonovského SageMath a porovnání času, který stráví výpočtem různých vlastností grafů. Ukázalo se, že ve většině případů byla rychlejší aplikace Mathematica.

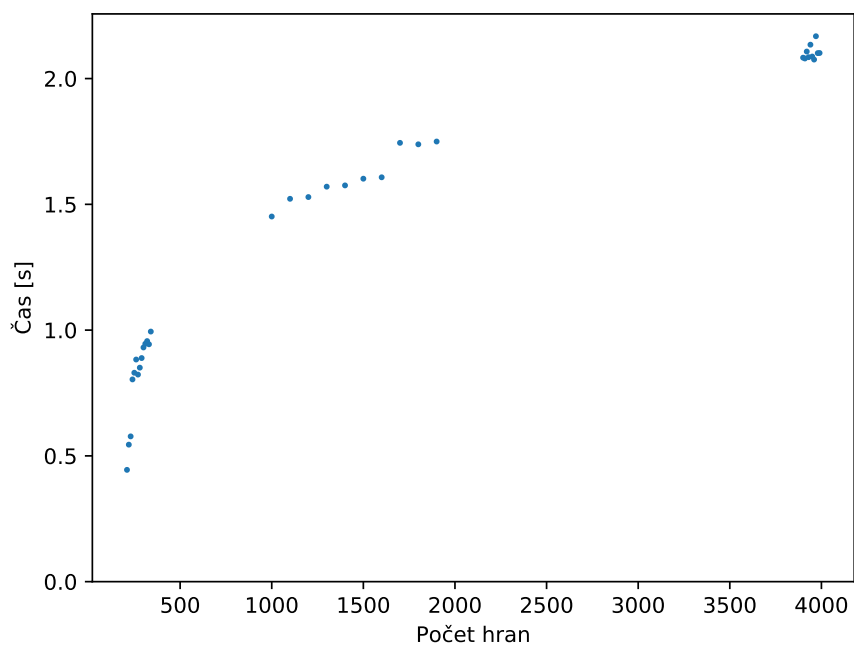
Dále jsme se soustředila na porovnání, kolik času zabere výpočet nějaké vlastnosti, pokud měníme velikost grafu. Ukázalo se, že tato rychlost se mění, jak s různými vlastnostmi, tak i s jednotlivými aplikacemi. Z provedených výpočtů vyplývá, že rychlost výpočtu není obecně závislá na velikosti grafu ani v počtu vrcholů ani v počtu hran. Zatímco u některých vlastností nemá velikost grafu na rychlost výpočtu vliv, u jiných doba výpočtu roste. A to jak s počtem vrcholů, tak s počtem hran.

Dále jsme zvolili tři skupiny grafů a testovali jsme, jestli pokud mají grafy v rámci skupiny nějakou společnou vlastnost, ovlivníme rychlost výpočtu jiných vlastností. Toto se na námi zvolených vlastnostech ovšem neprojevalo.

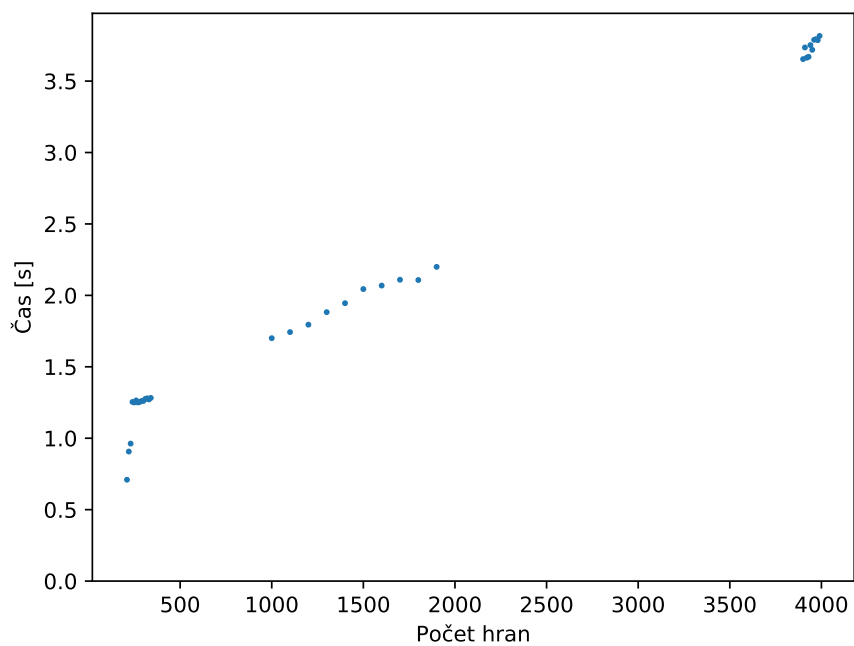
Nakonec jsme spustili program Mathematica na různých hardwarových zařízeních a porovnali výsledky. Ukázalo se, že rozdílný hardware nemá vliv.

Příloha A

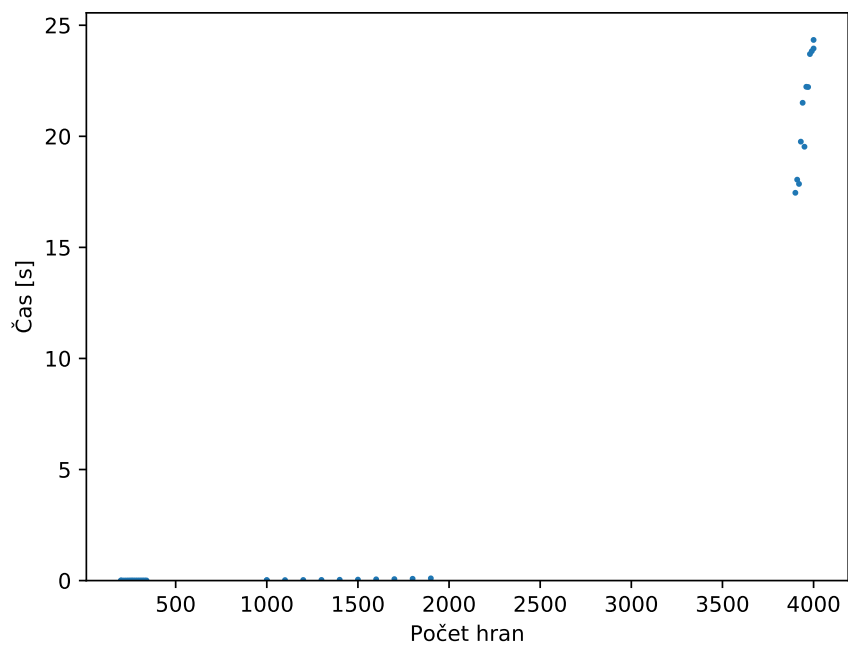
Grafy zobrazující vliv charakteristických skupin grafů na časovou náročnost výpočtu jejich vlastností



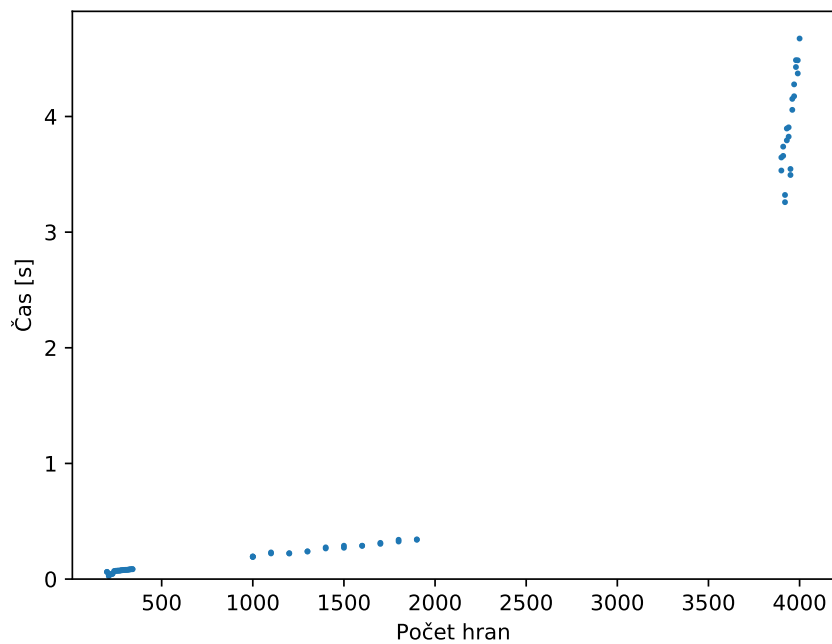
Obrázek A.1. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice



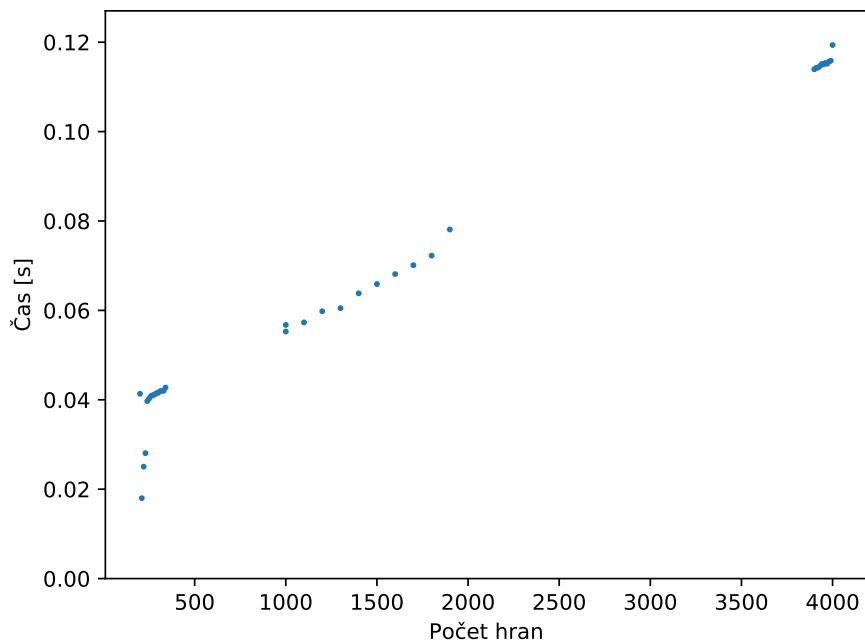
Obrázek A.2. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath



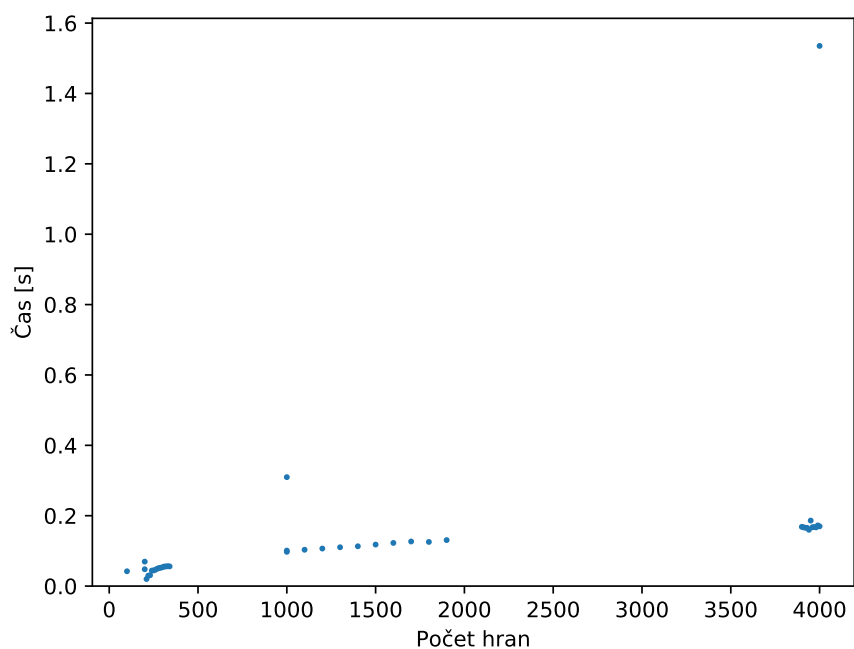
Obrázek A.3. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice



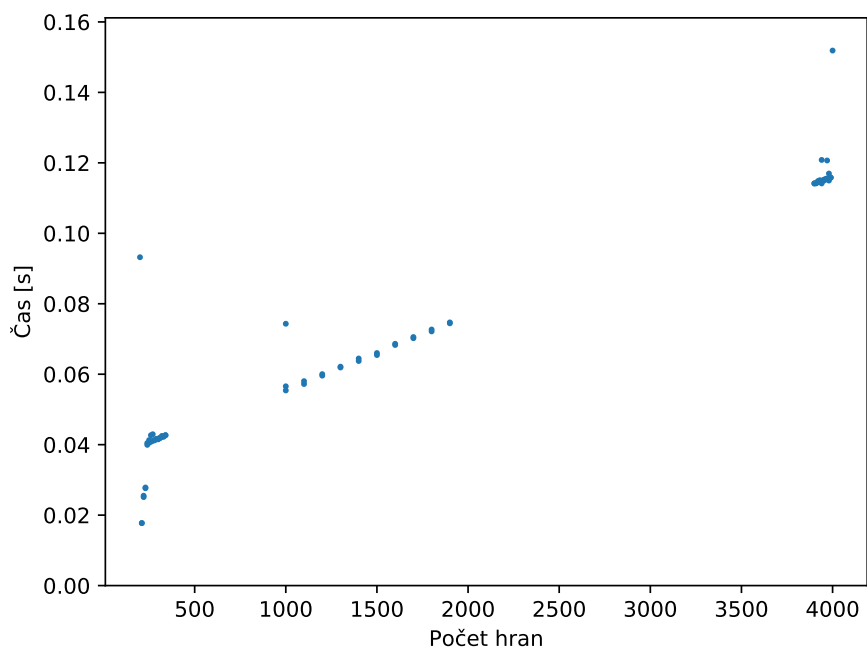
Obrázek A.4. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath



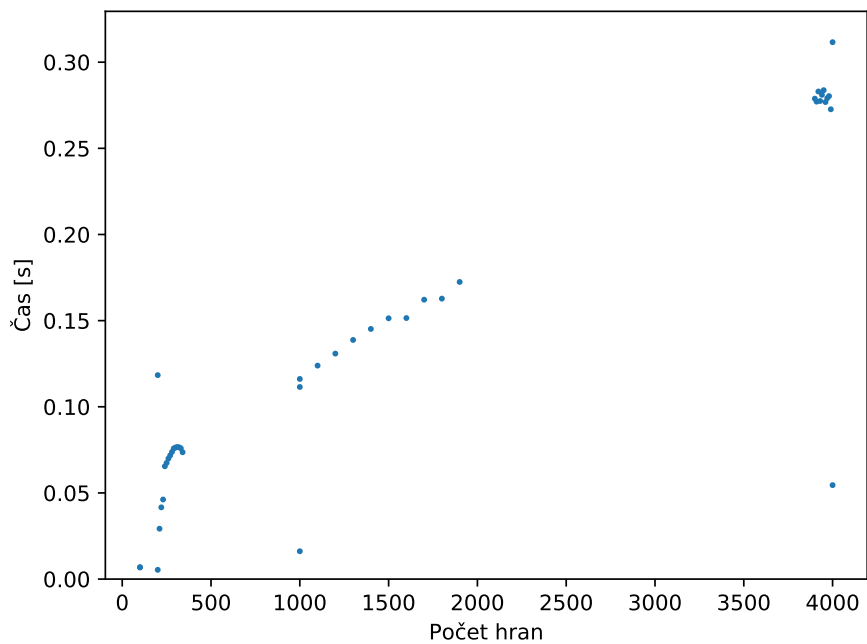
Obrázek A.5. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice



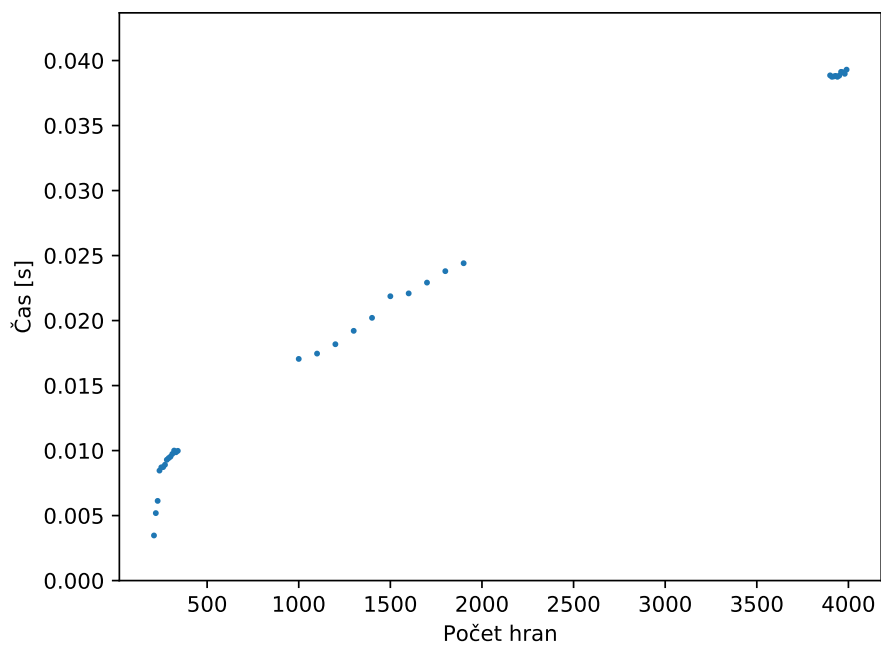
Obrázek A.6. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath



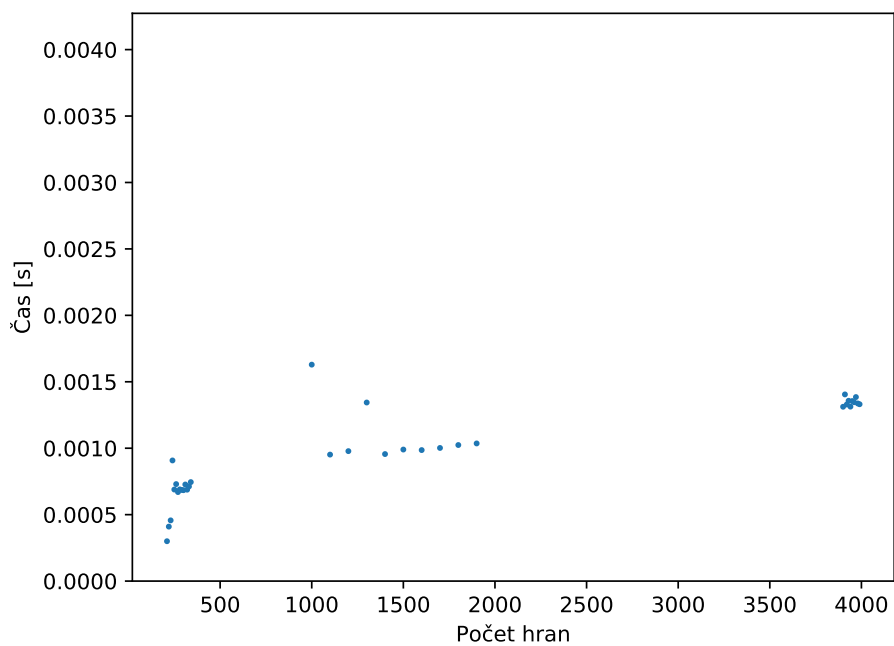
Obrázek A.7. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v Mathematice



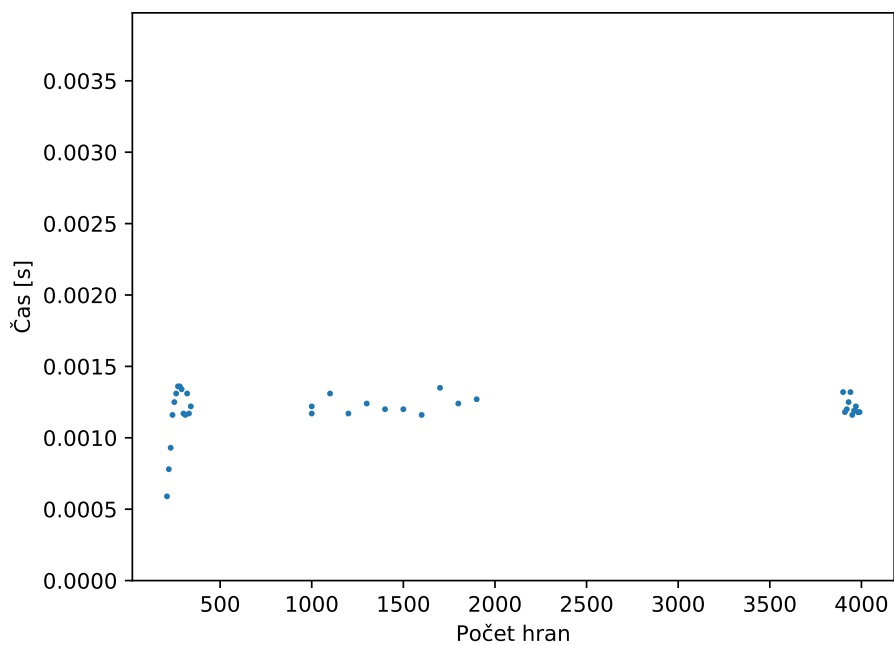
Obrázek A.8. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu souvislých grafů, na počtu hran v SageMath



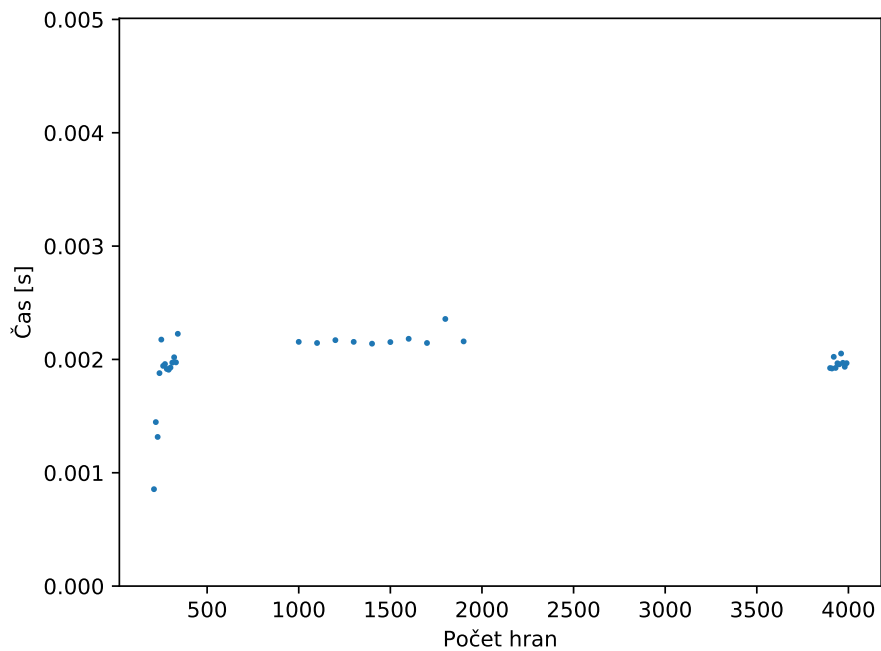
Obrázek A.9. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů souvislých, na počtu hran v SageMath



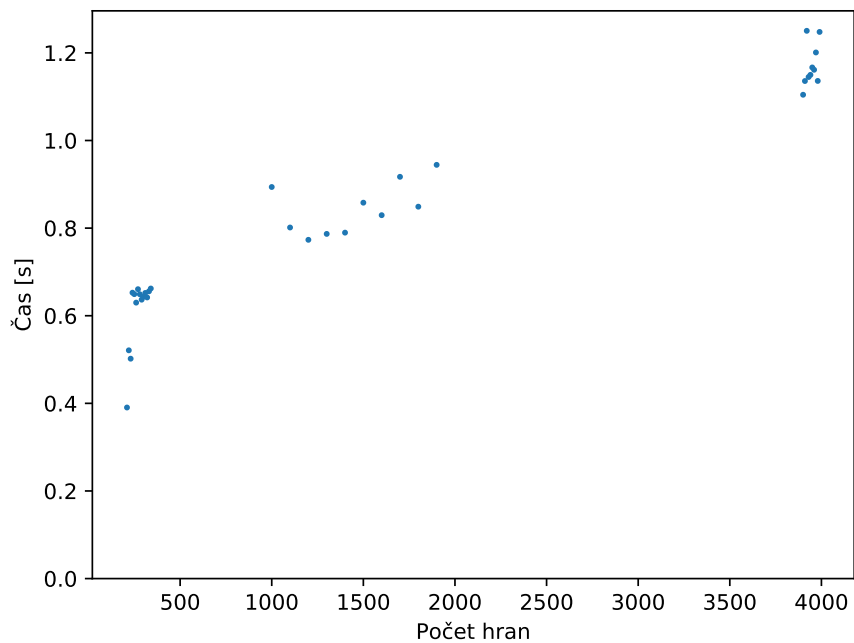
Obrázek A.10. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů souvislých, na počtu hran v Mathematice



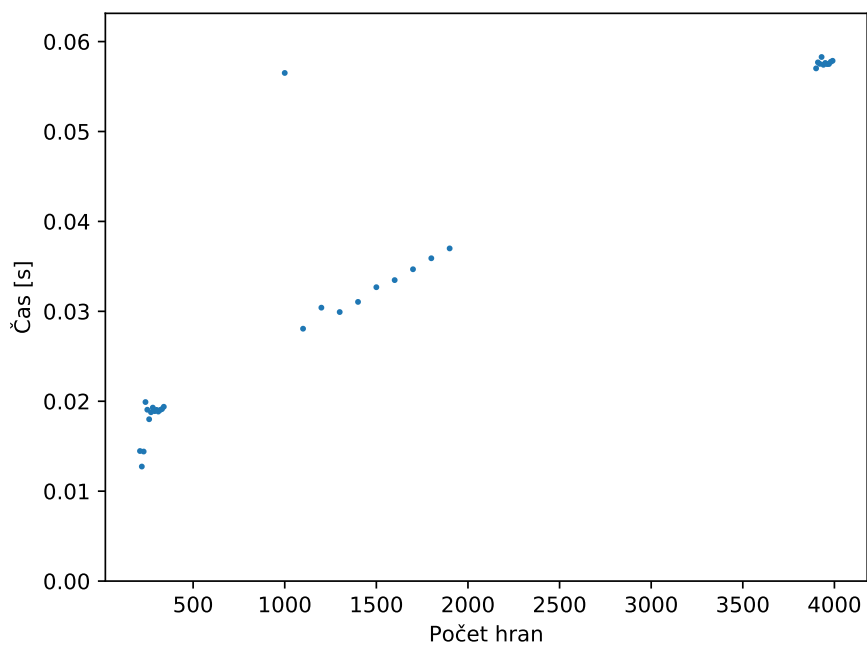
Obrázek A.11. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



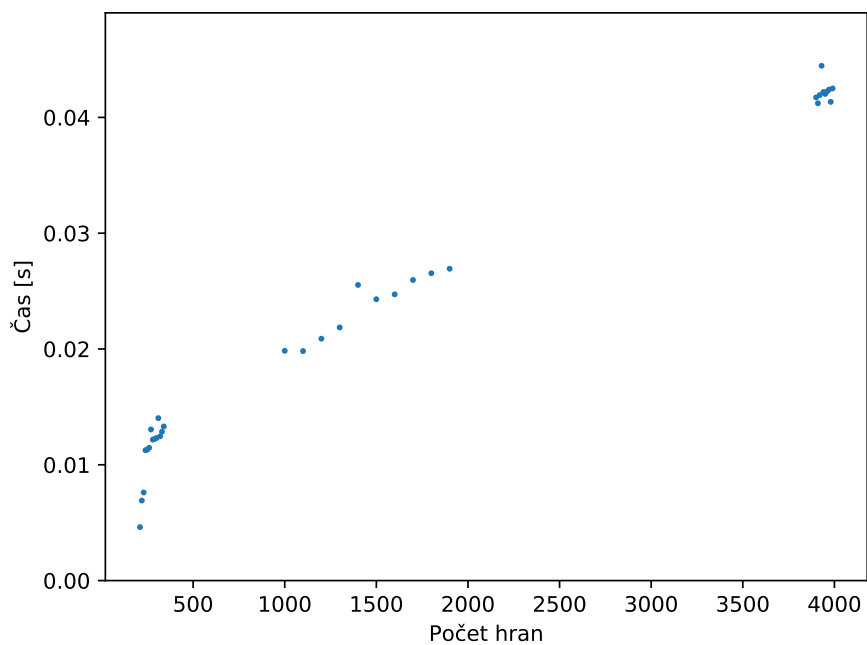
Obrázek A.12. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů
distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice



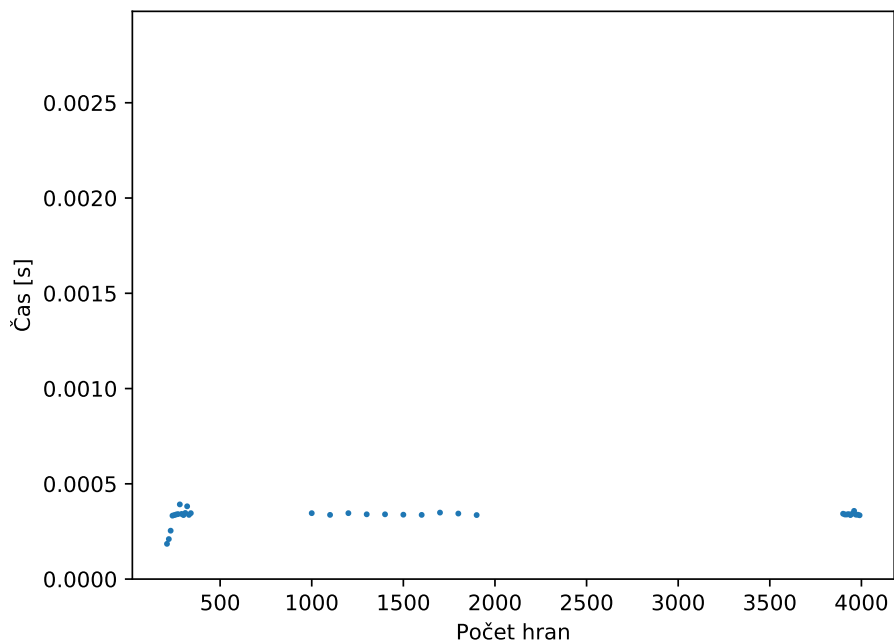
Obrázek A.13. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů
hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath



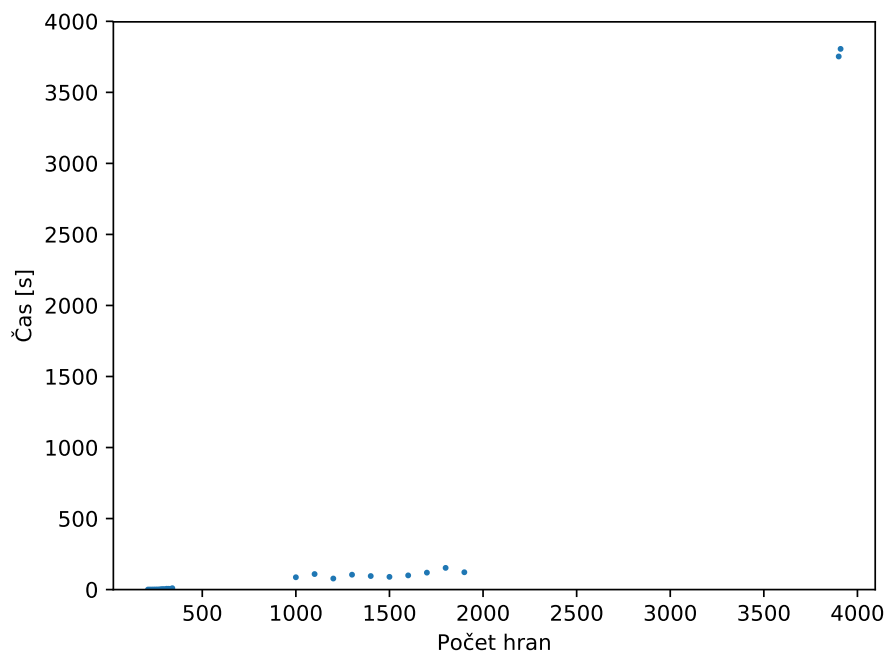
Obrázek A.14. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice



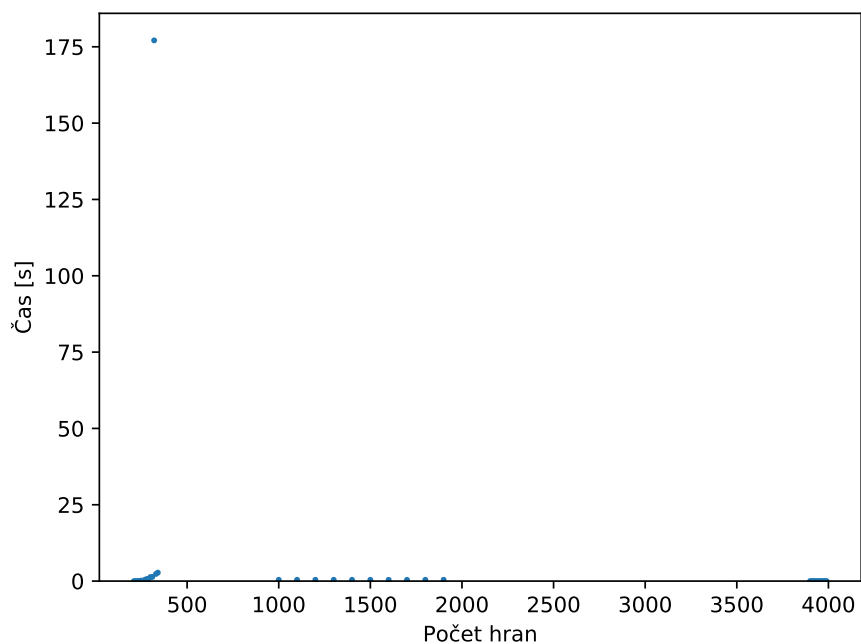
Obrázek A.15. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath



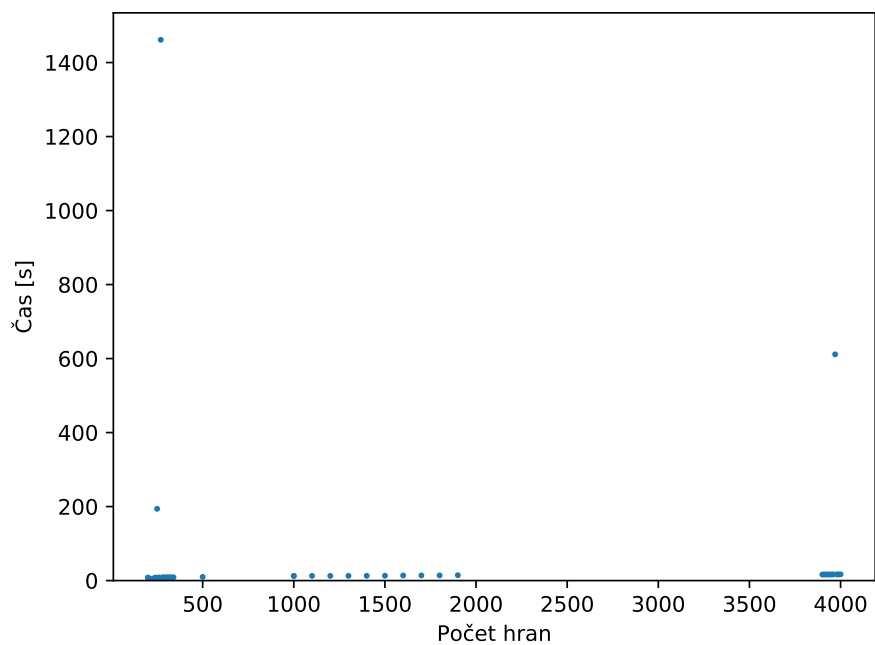
Obrázek A.16. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice



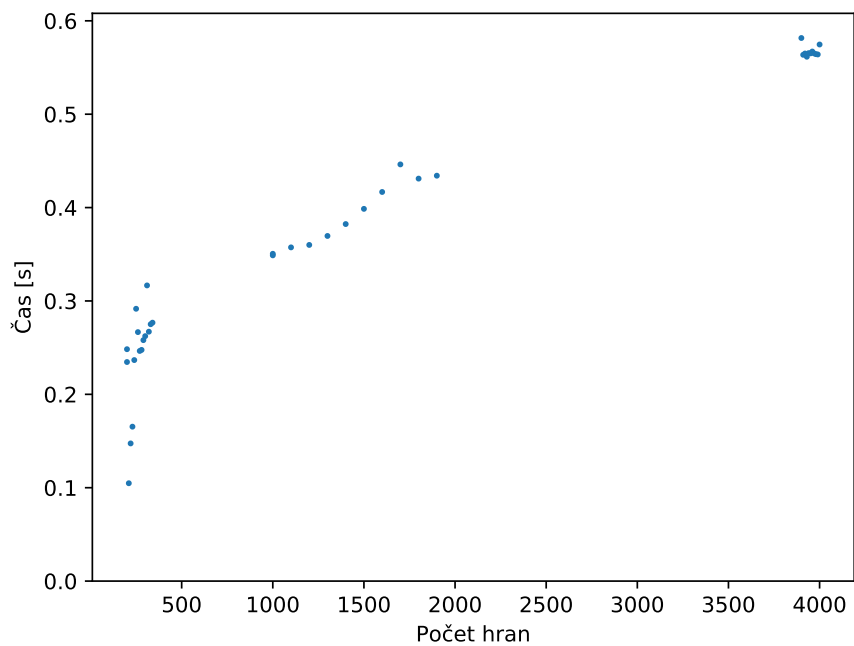
Obrázek A.17. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Hamiltonovských, na počtu hran v SageMath



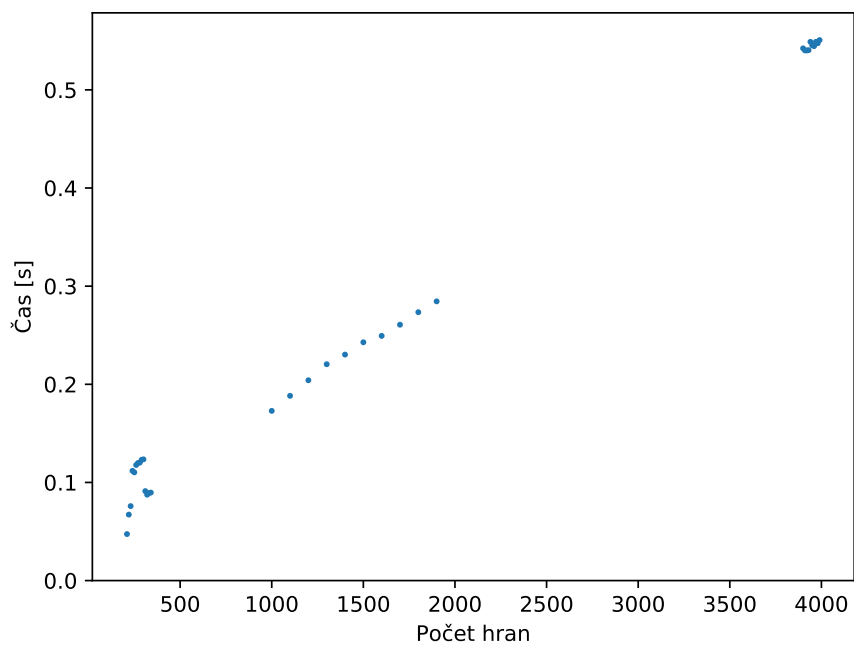
Obrázek A.18. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů Hamiltonovských, na počtu hran v Mathematice



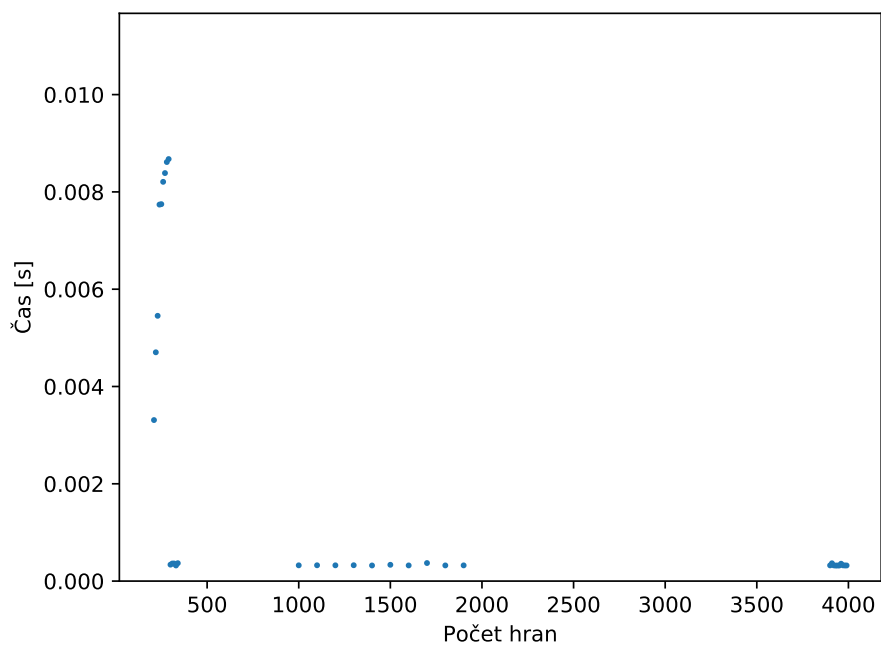
Obrázek A.19. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů perfektních, na počtu hran v SageMath



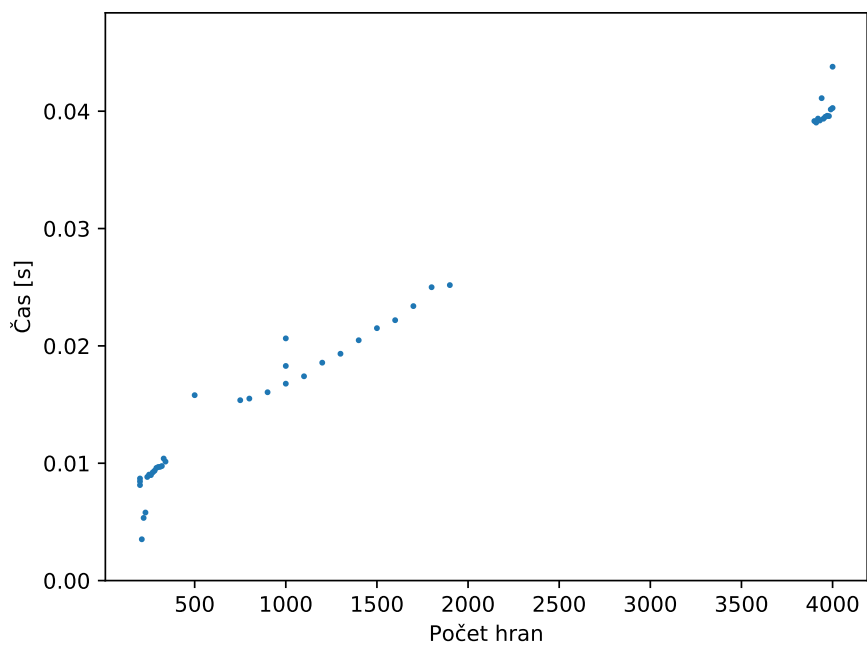
Obrázek A.20. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů perfektních, na počtu hran v Mathematice



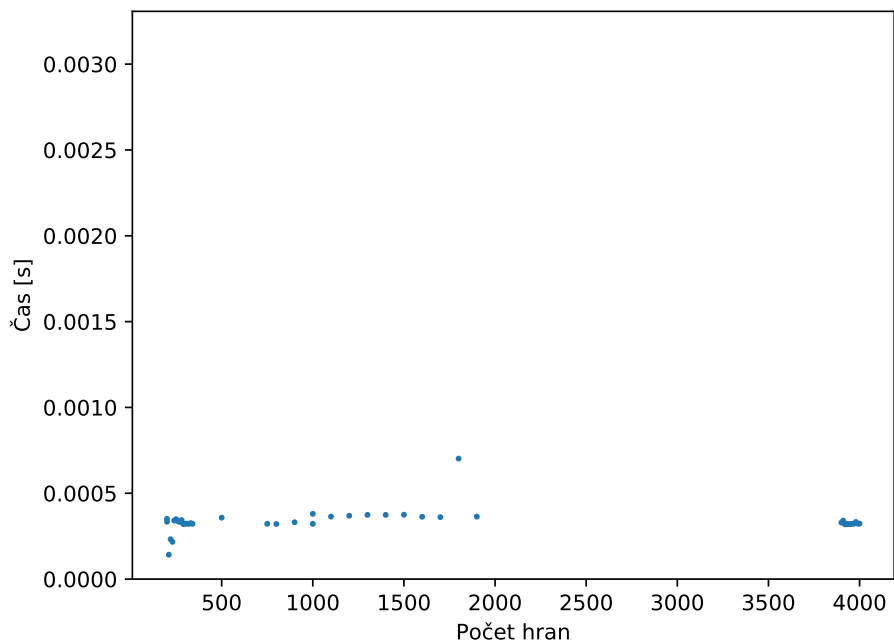
Obrázek A.21. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů rovinných, na počtu hran v SageMath



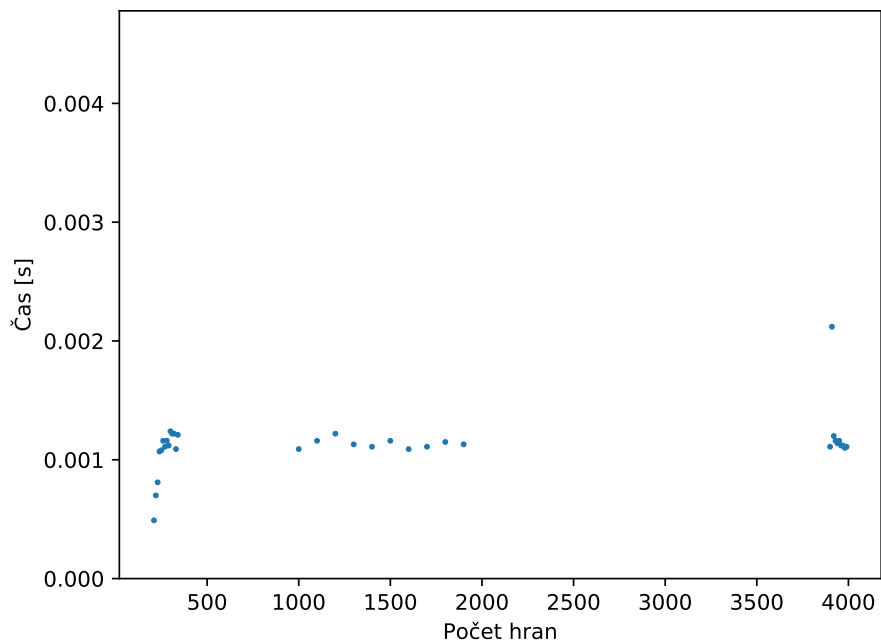
Obrázek A.22. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



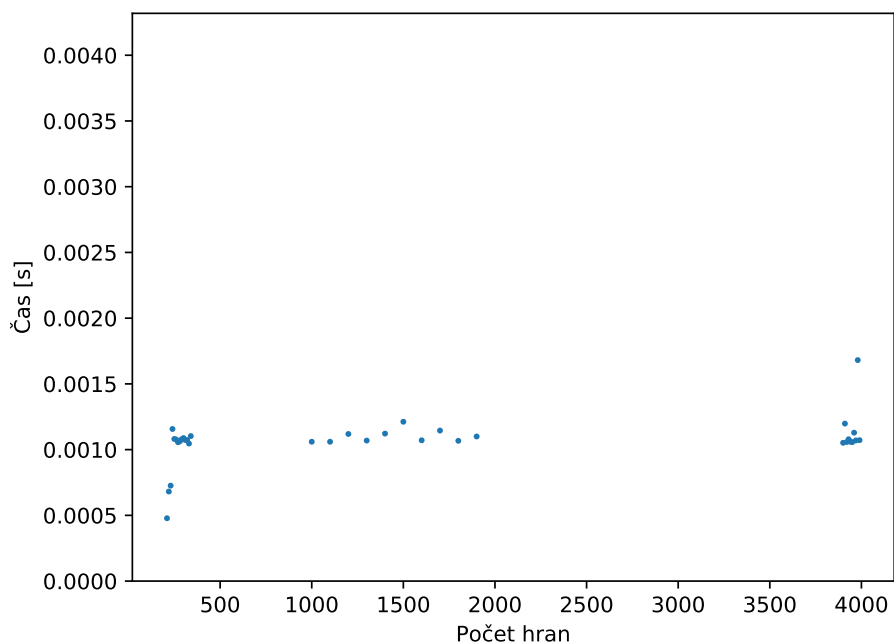
Obrázek A.23. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů stromem, na počtu hran v SageMath



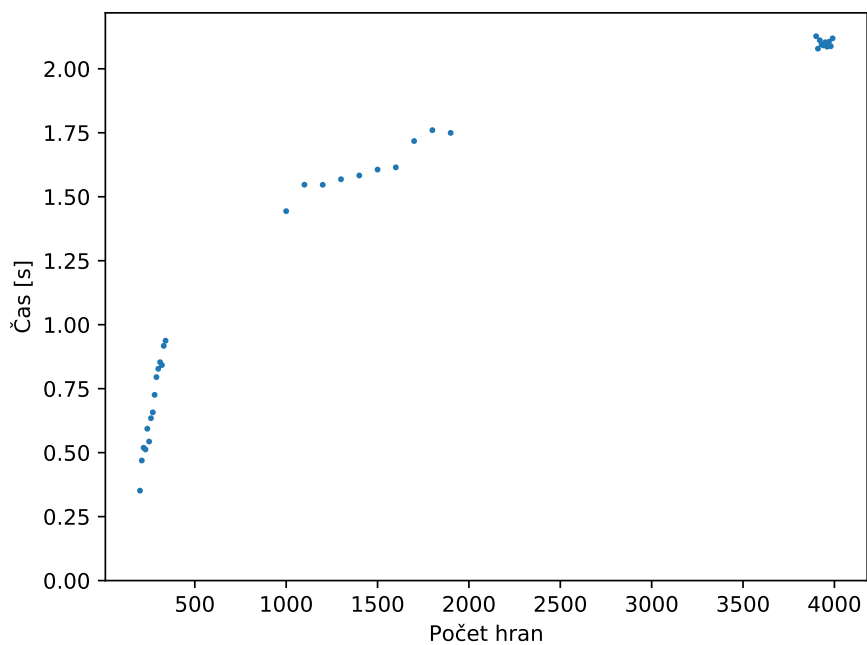
Obrázek A.24. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



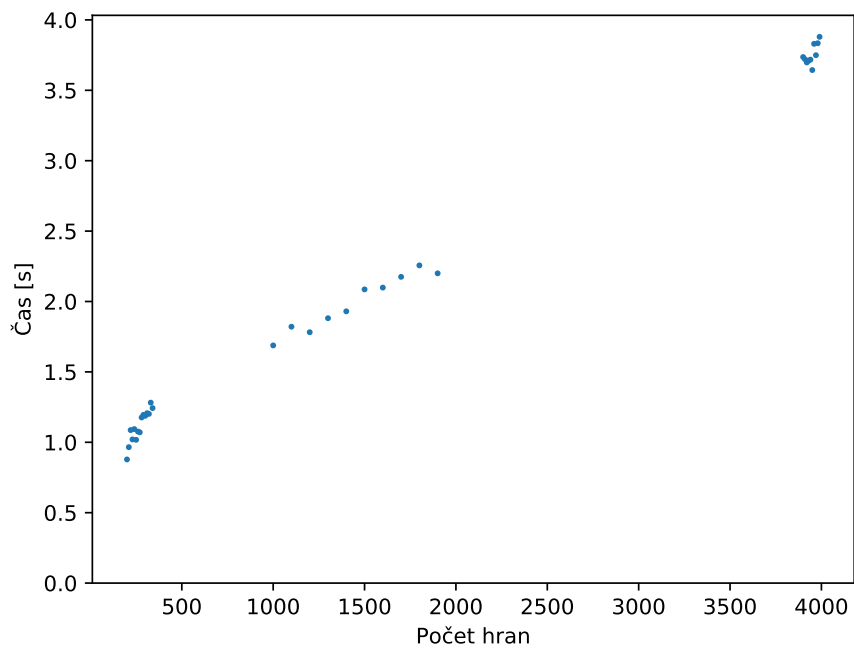
Obrázek A.25. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů regulárních, na počtu hran v SageMath



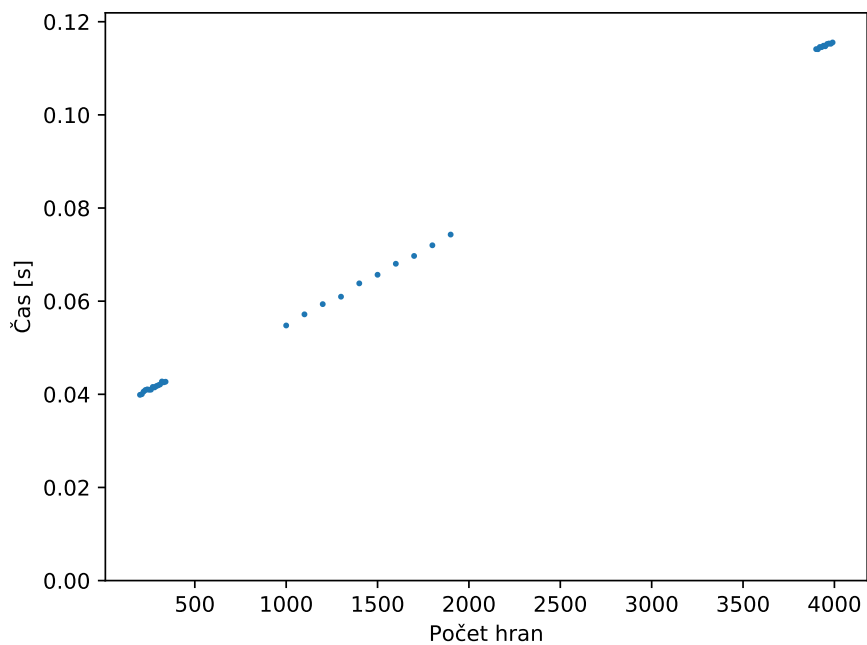
Obrázek A.26. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto souvislých grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice



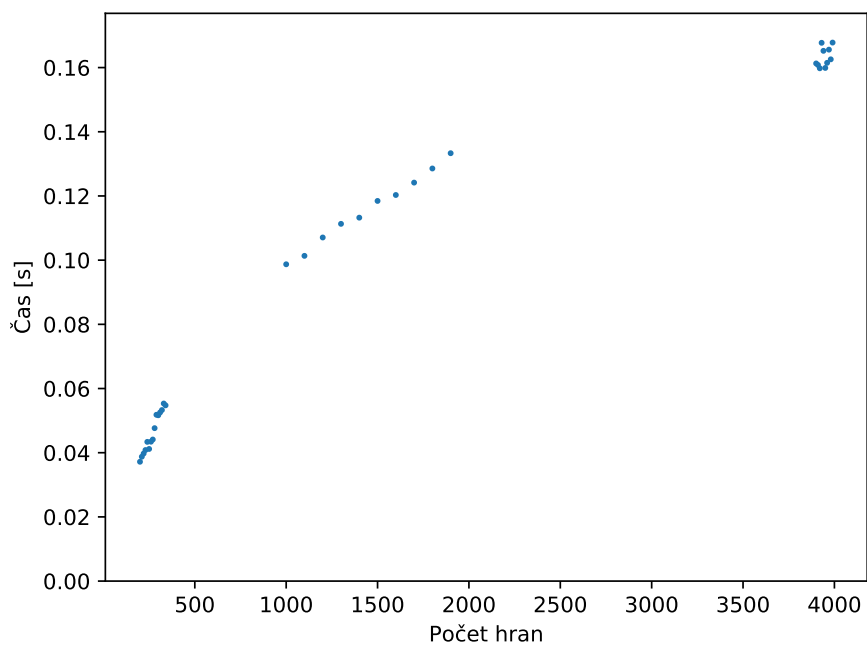
Obrázek A.27. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice



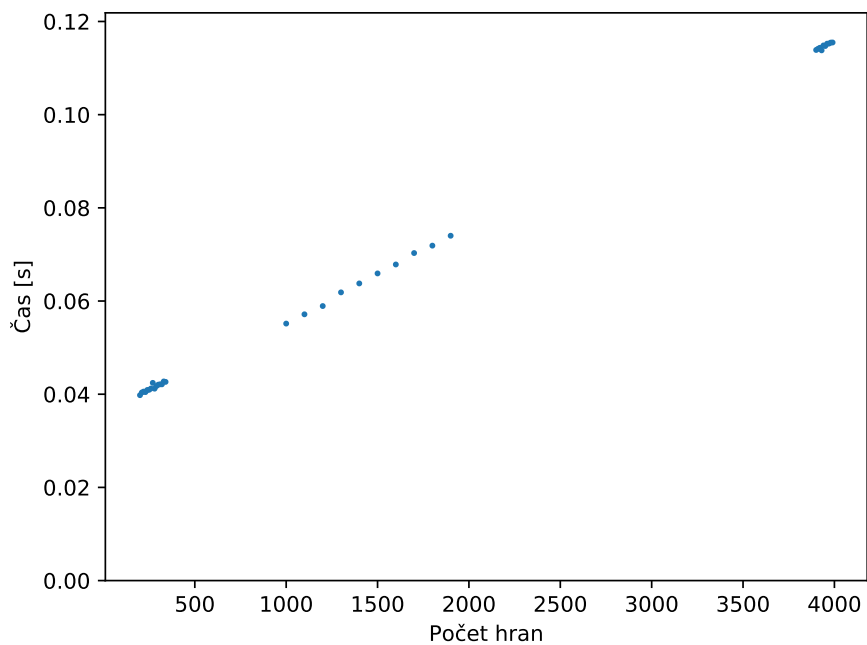
Obrázek A.28. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



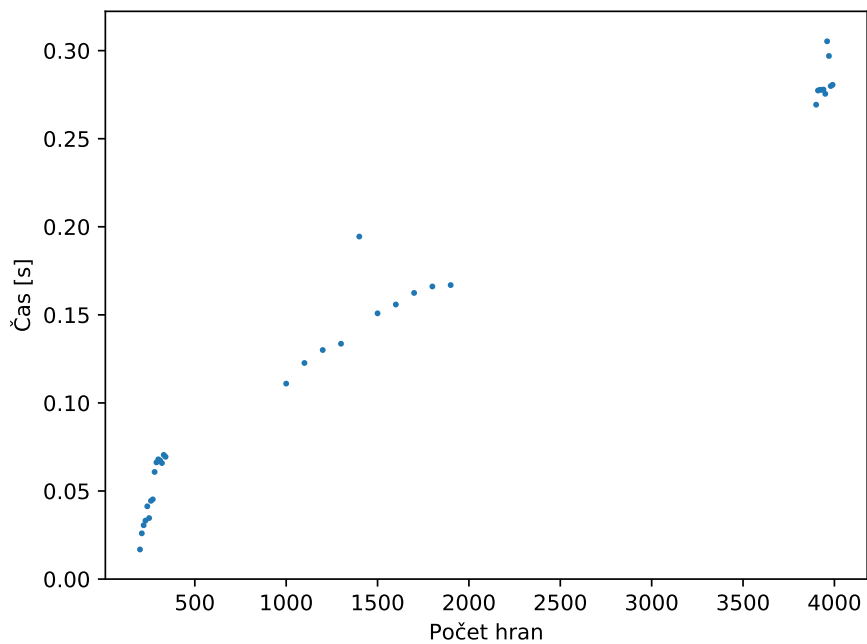
Obrázek A.29. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice



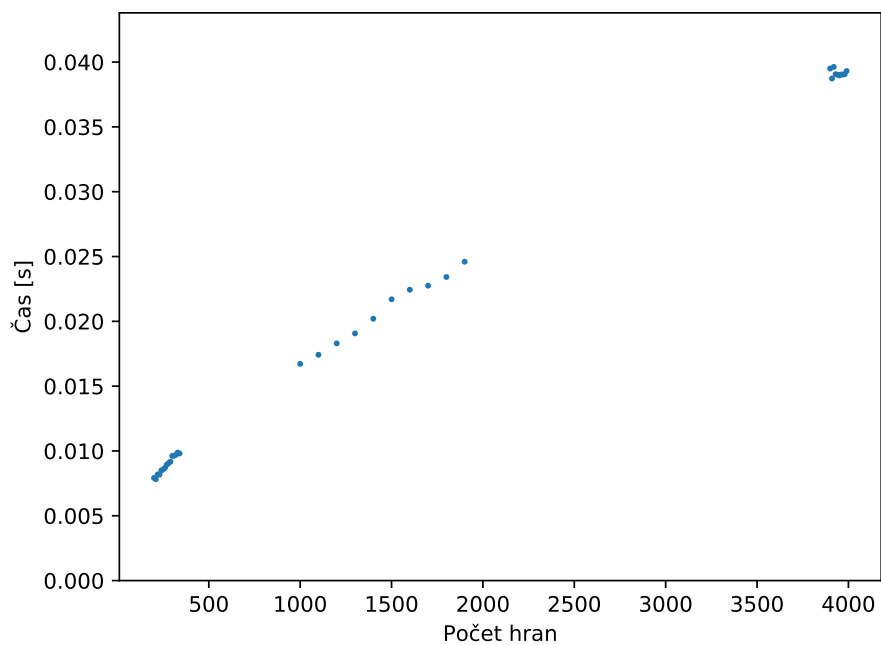
Obrázek A.30. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



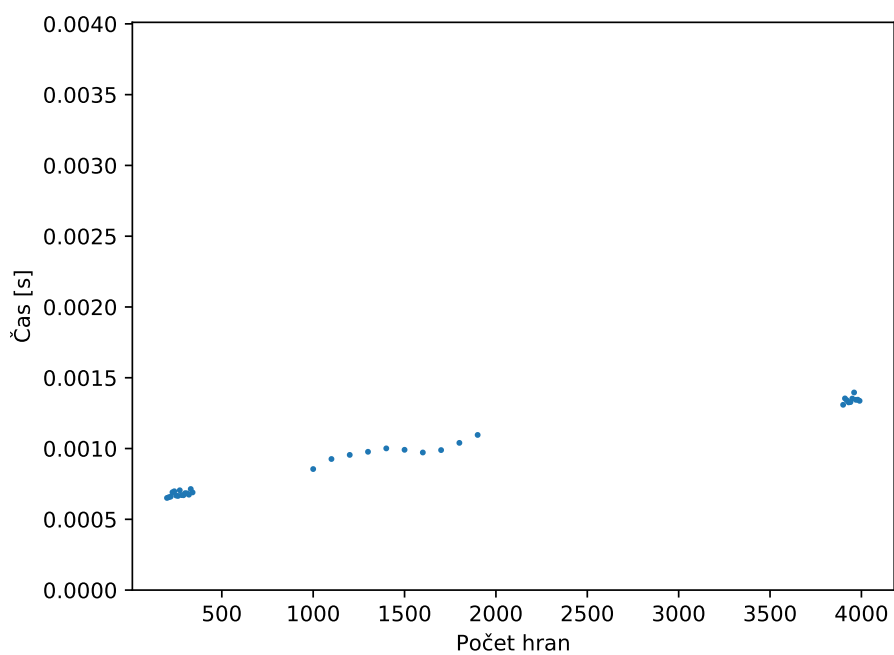
Obrázek A.31. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice



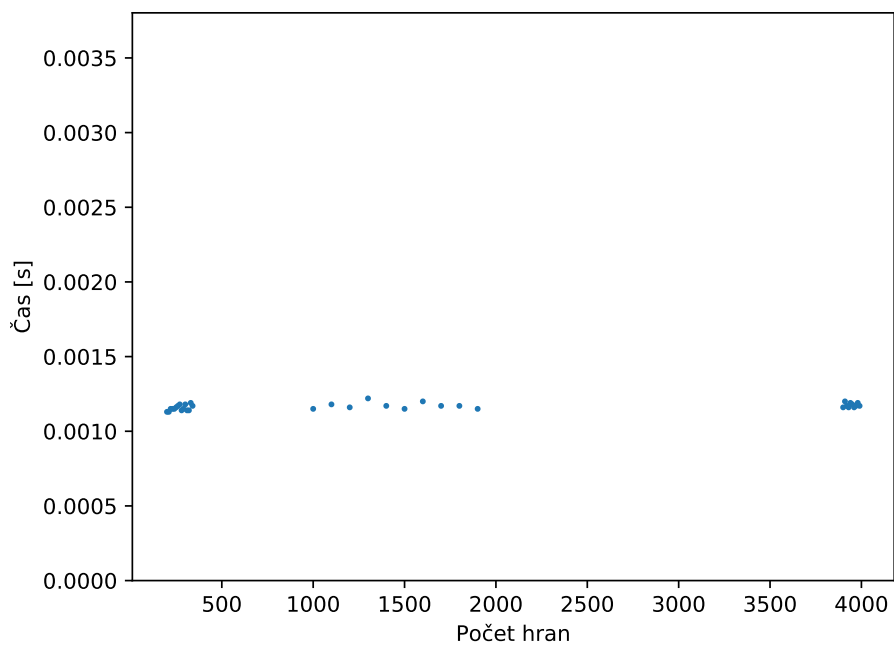
Obrázek A.32. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



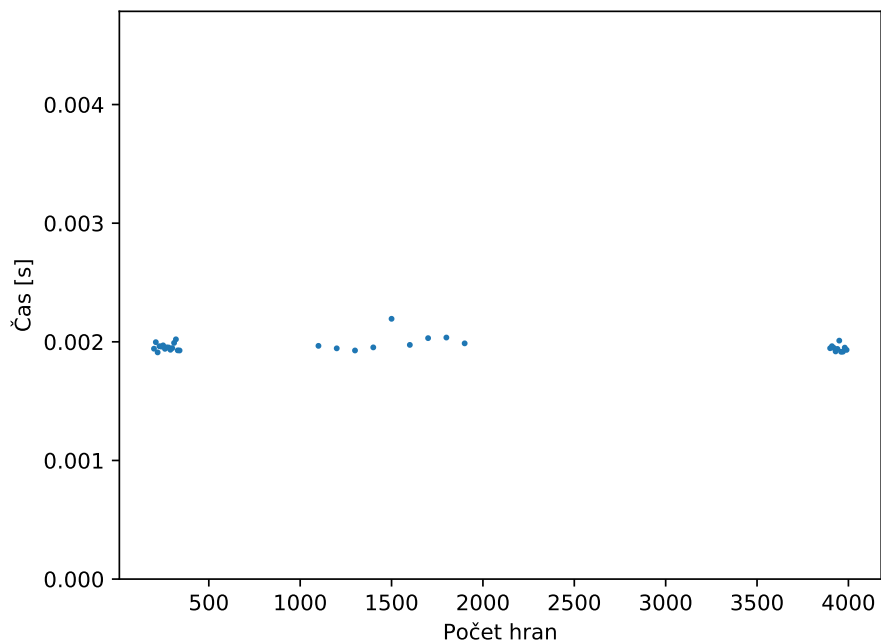
Obrázek A.33. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů souvislých, na počtu hran v SageMath



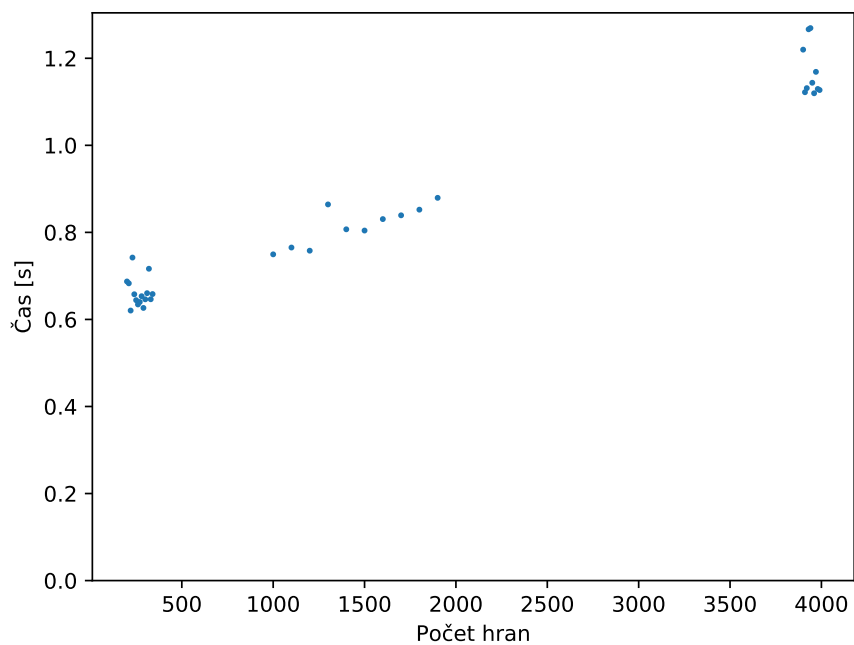
Obrázek A.34. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů souvislých, na počtu hran v Mathematice



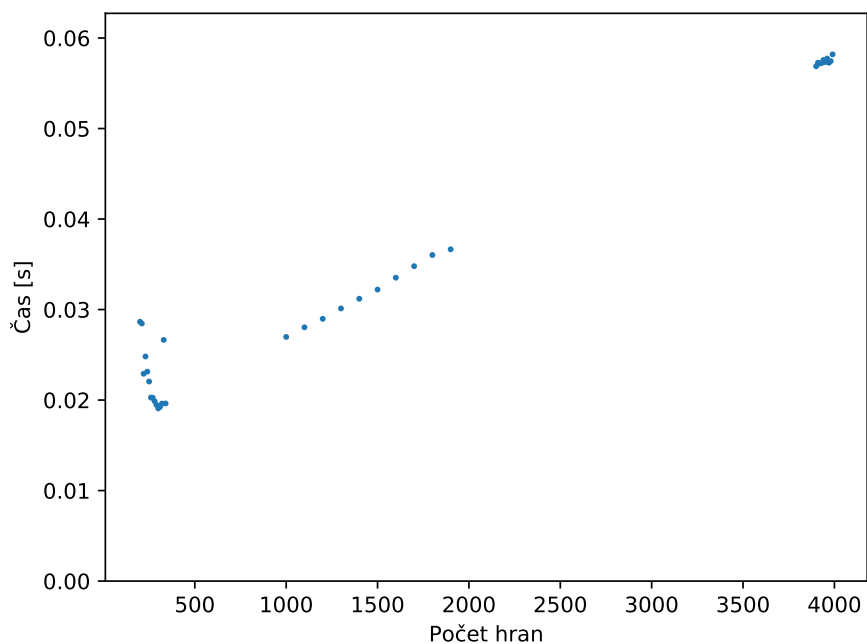
Obrázek A.35. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



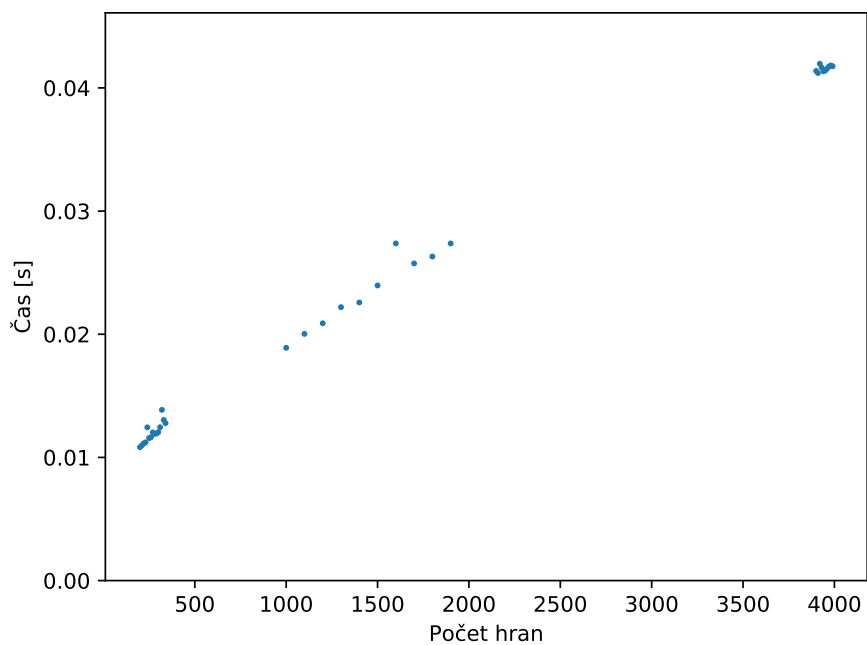
Obrázek A.36. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů
distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice



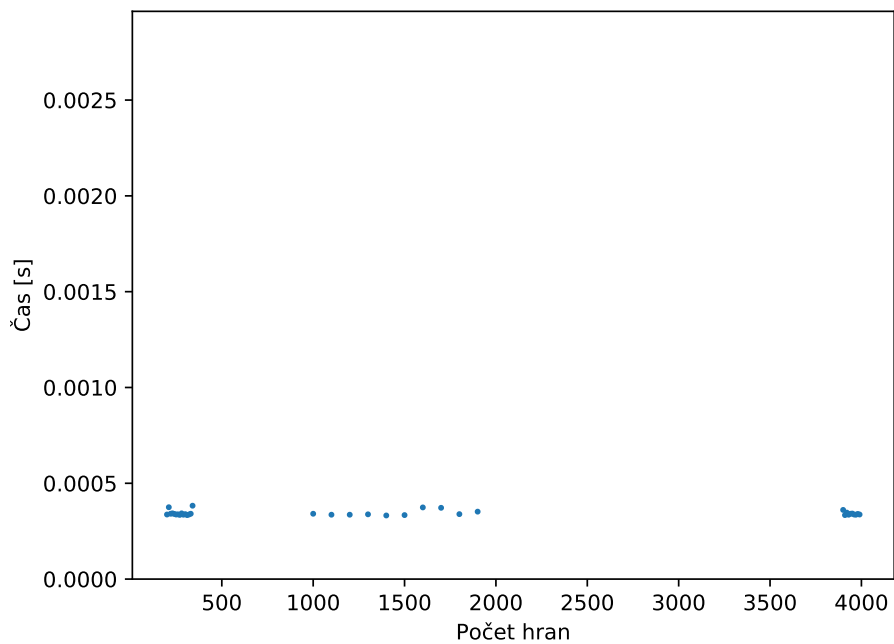
Obrázek A.37. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů
hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath



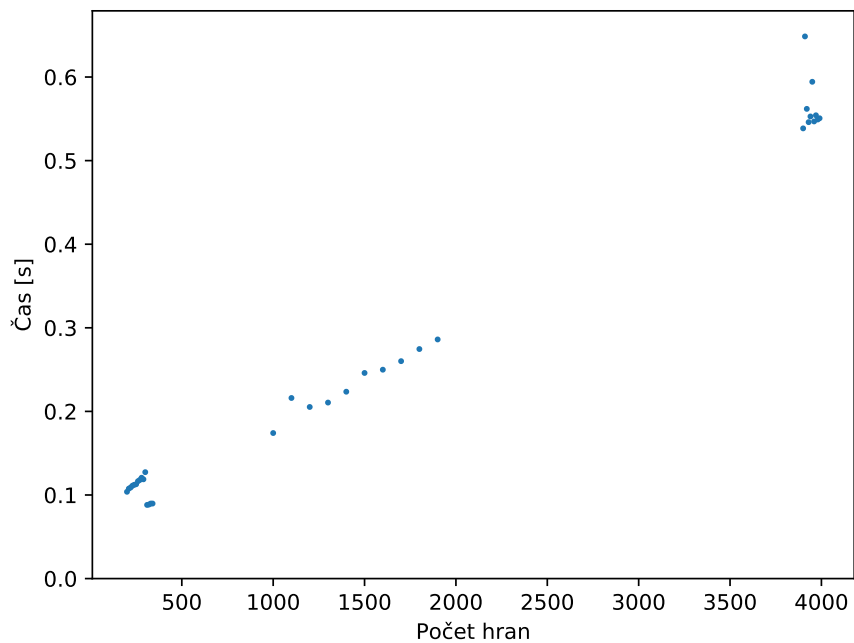
Obrázek A.38. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice



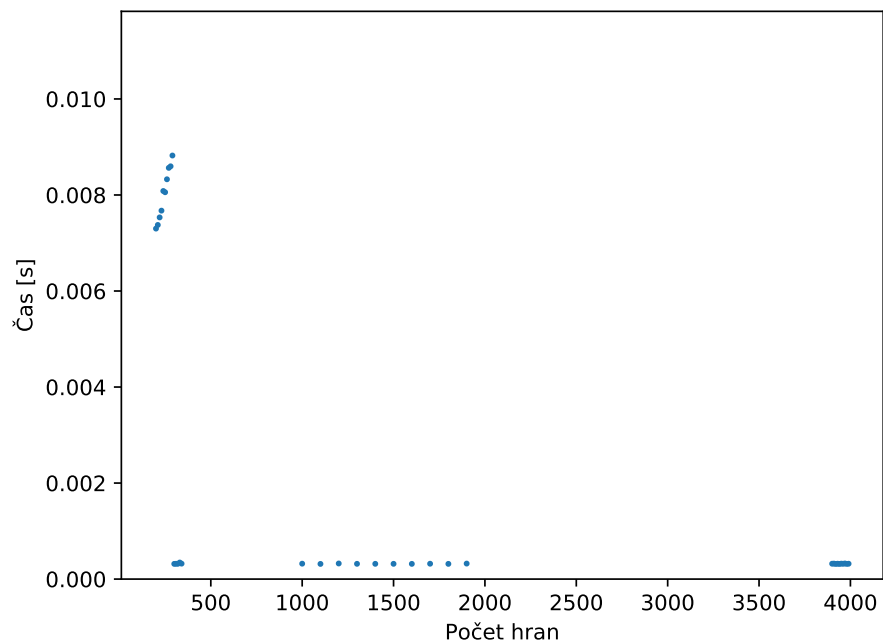
Obrázek A.39. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath



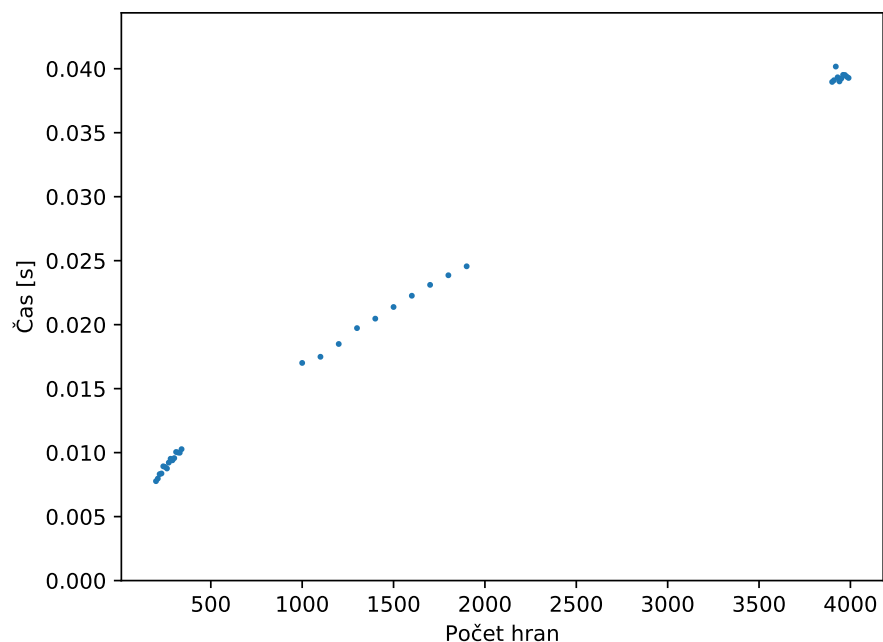
Obrázek A.40. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice



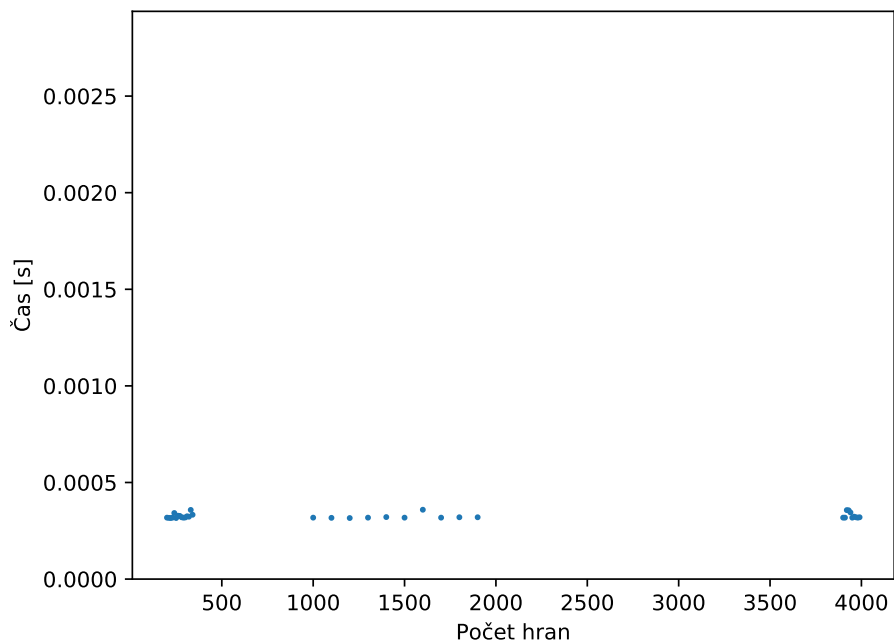
Obrázek A.41. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v SageMath



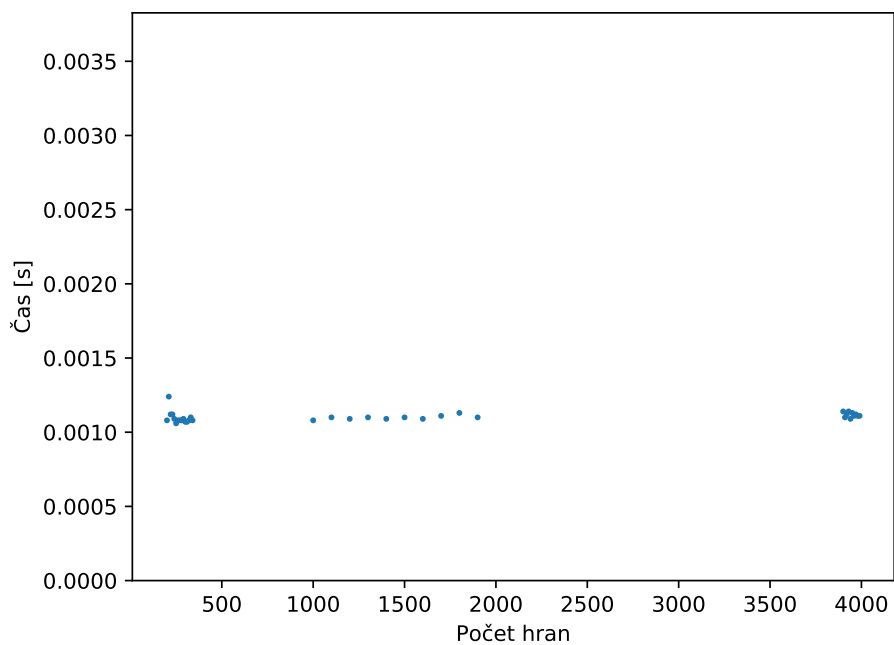
Obrázek A.42. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



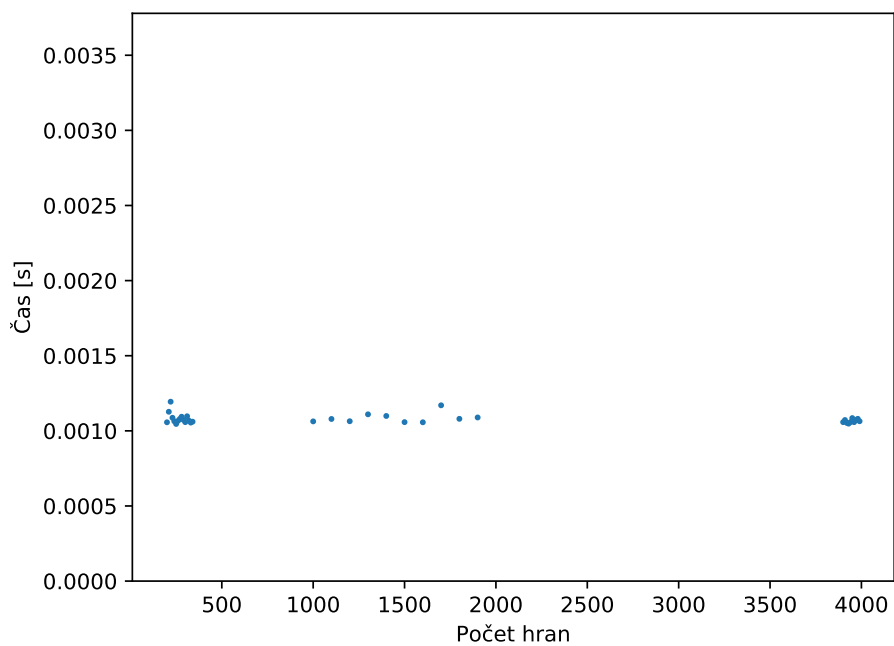
Obrázek A.43. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v SageMath



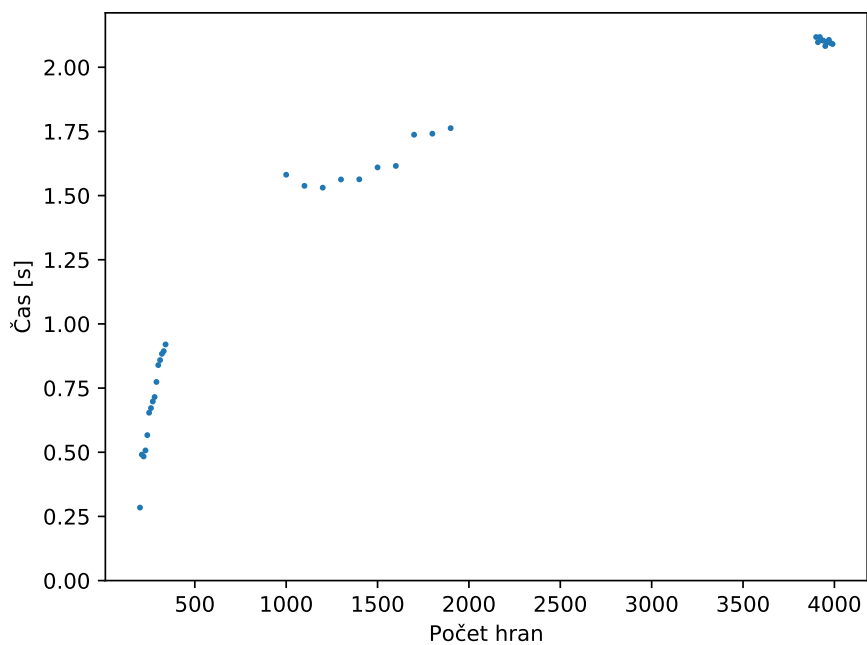
Obrázek A.44. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



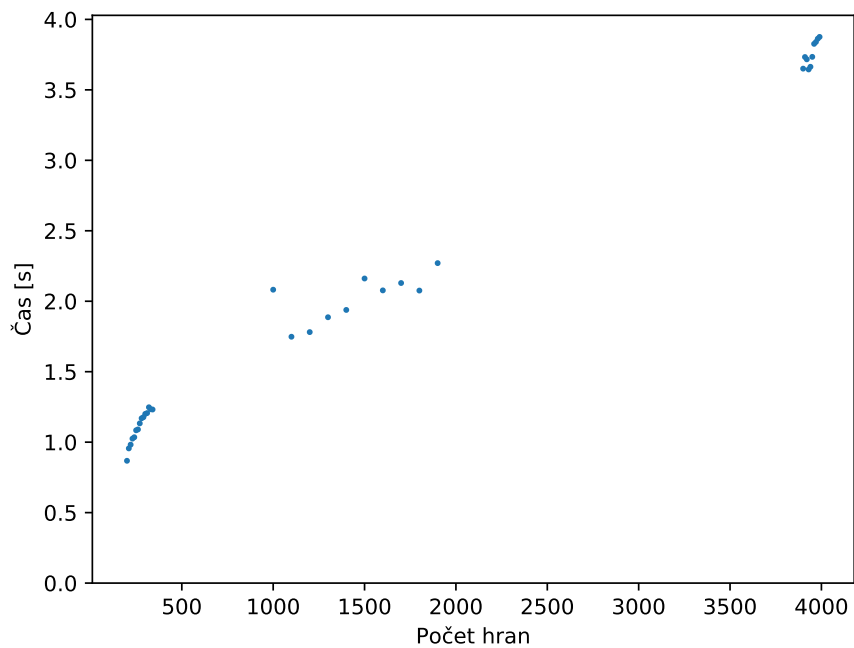
Obrázek A.45. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v SageMath



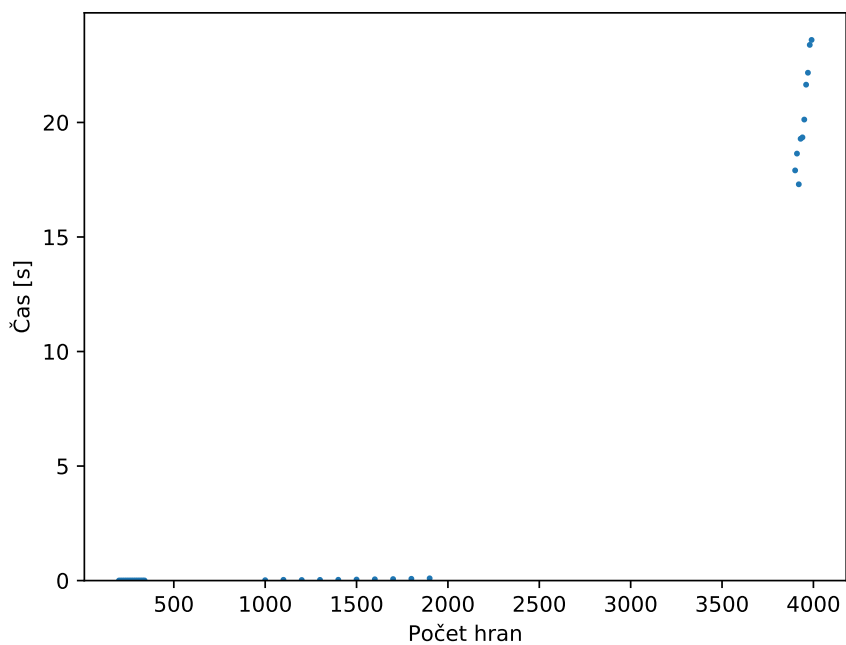
Obrázek A.46. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice



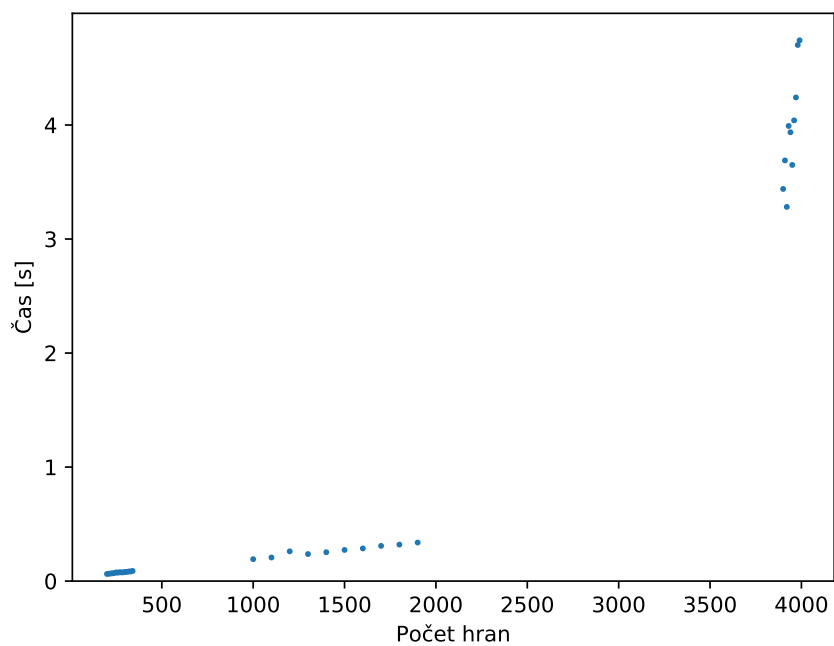
Obrázek A.47. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



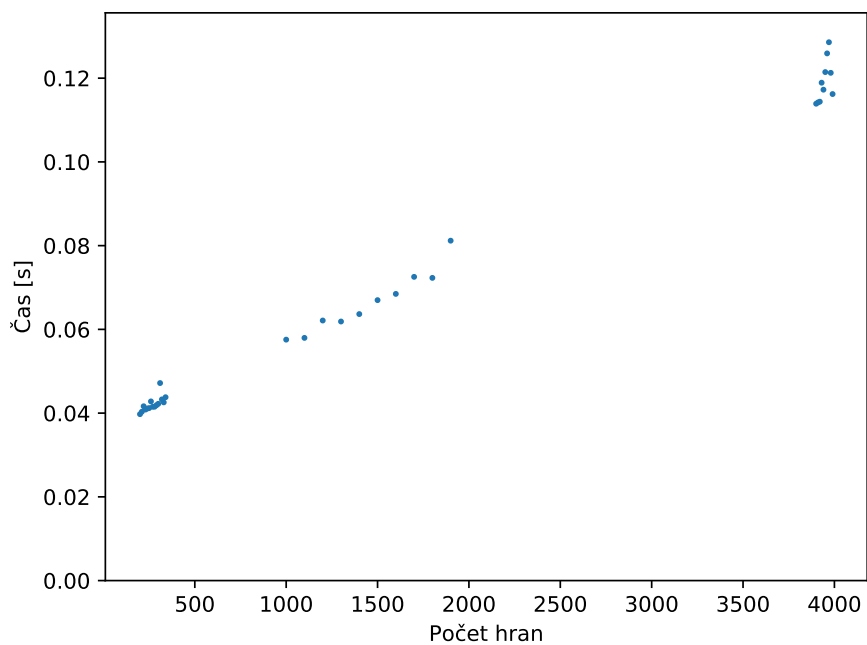
Obrázek A.48. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



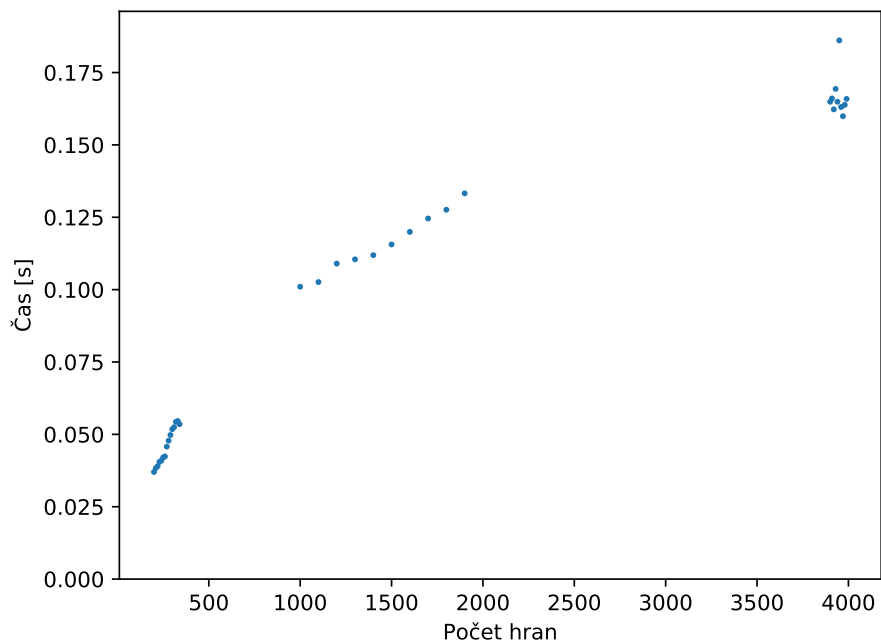
Obrázek A.49. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



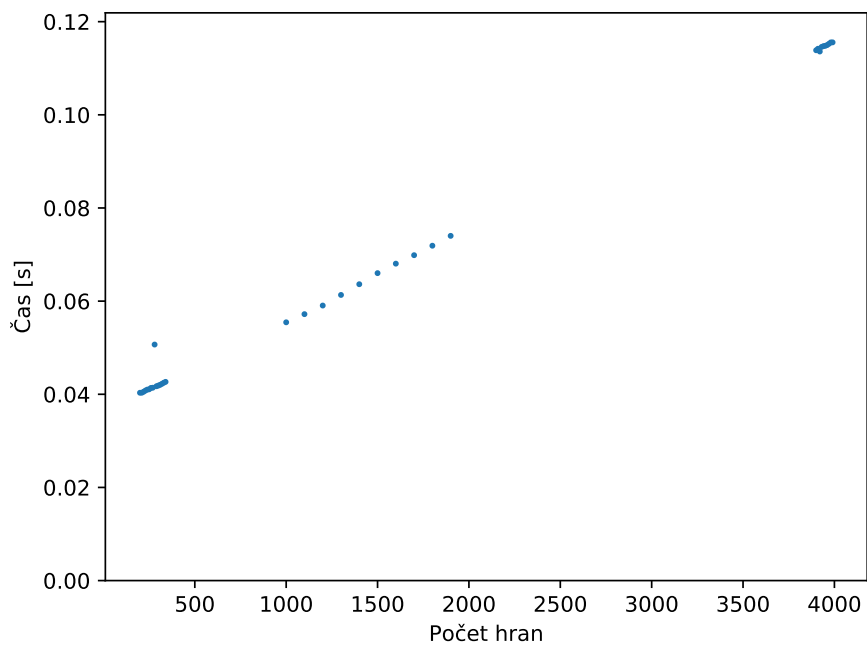
Obrázek A.50. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



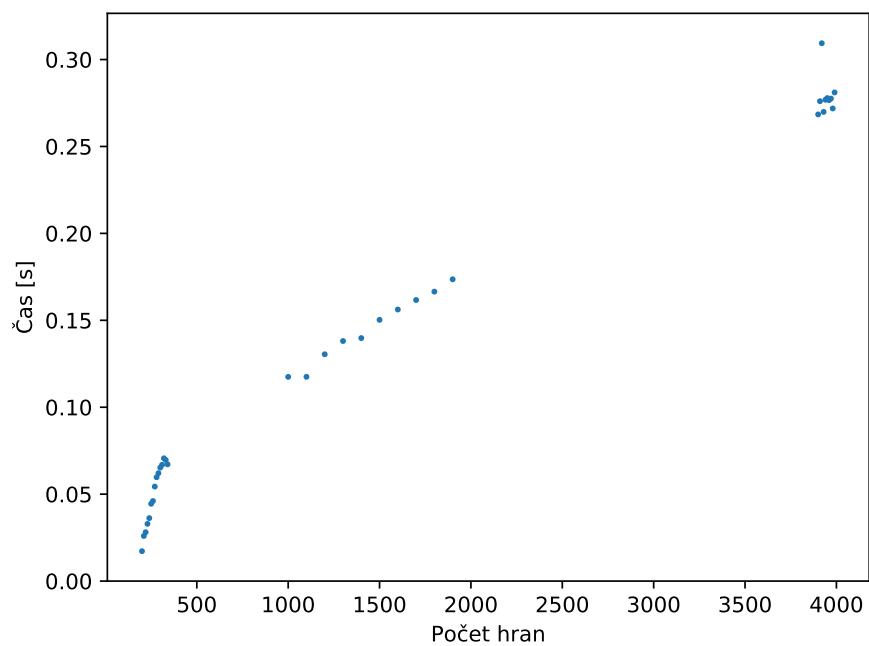
Obrázek A.51. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



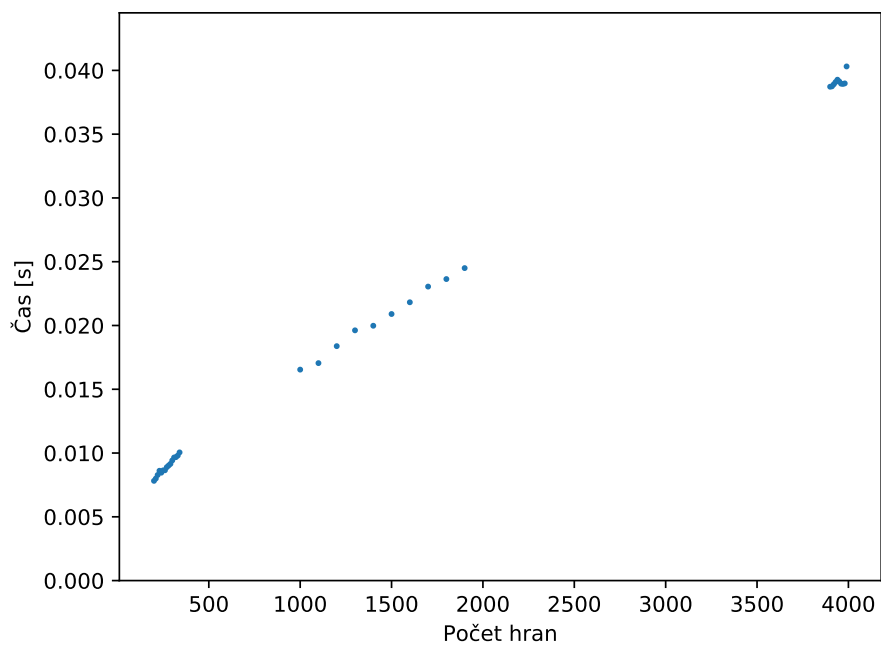
Obrázek A.52. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



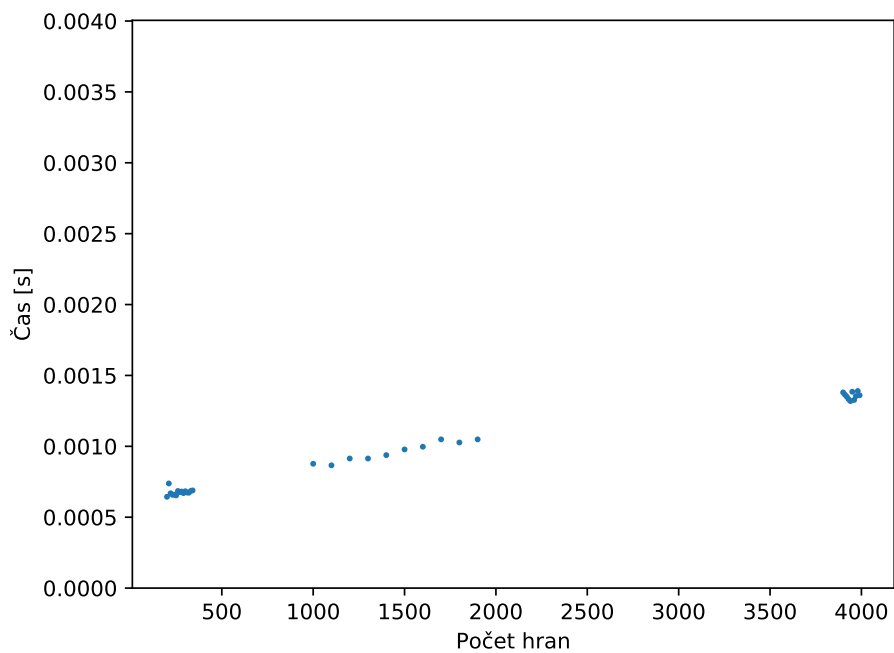
Obrázek A.53. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



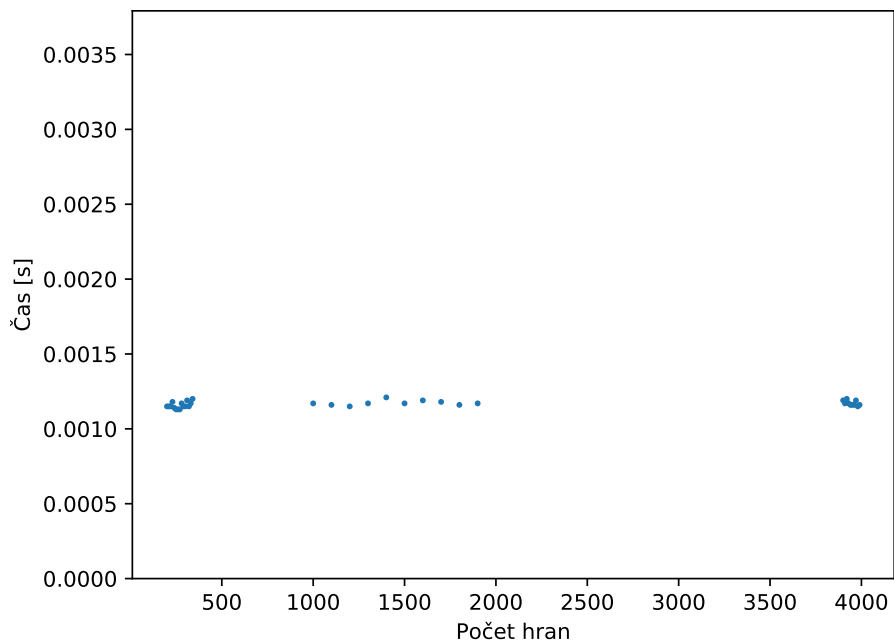
Obrázek A.54. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



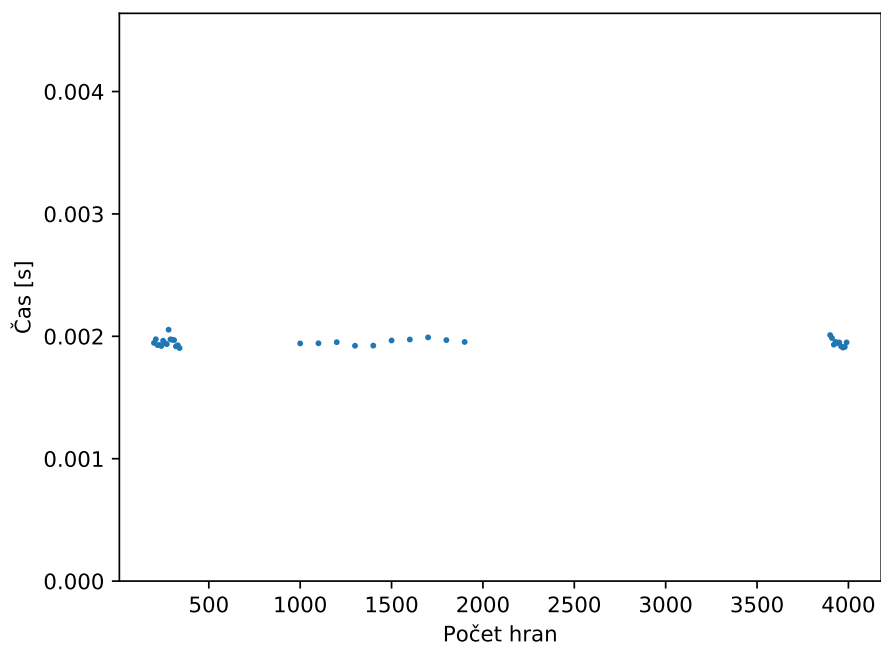
Obrázek A.55. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů souvislých, na počtu hran v SageMath



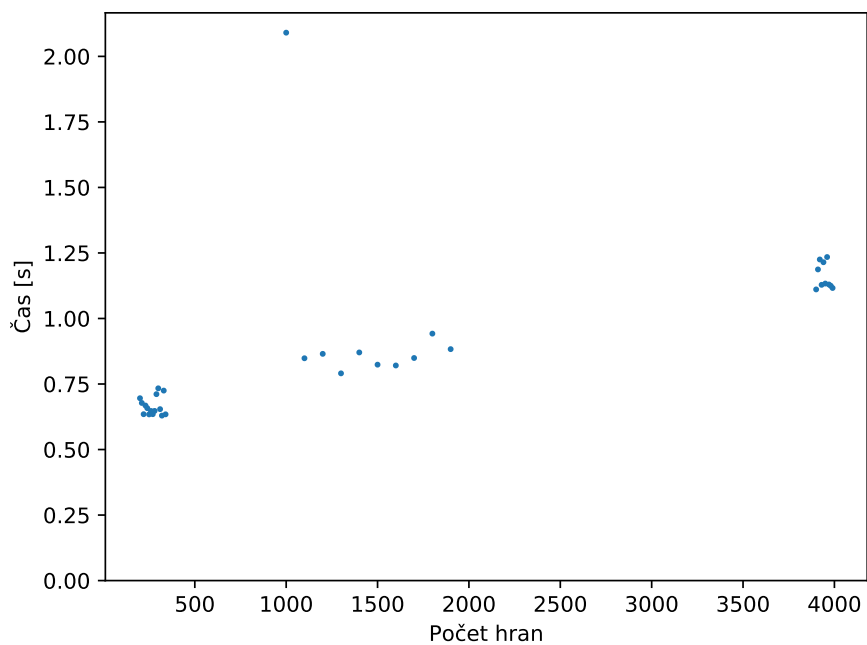
Obrázek A.56. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů souvislých, na počtu hran v Mathematice



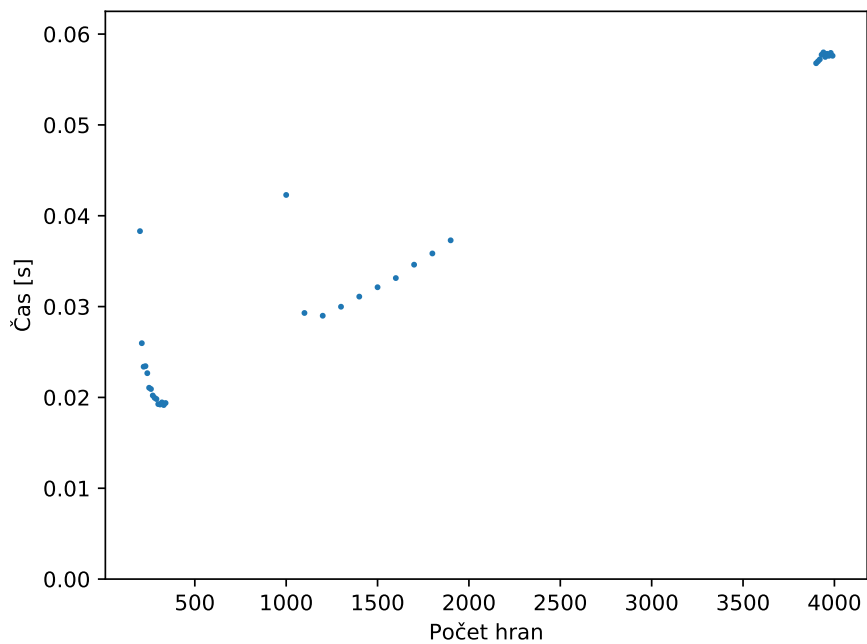
Obrázek A.57. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



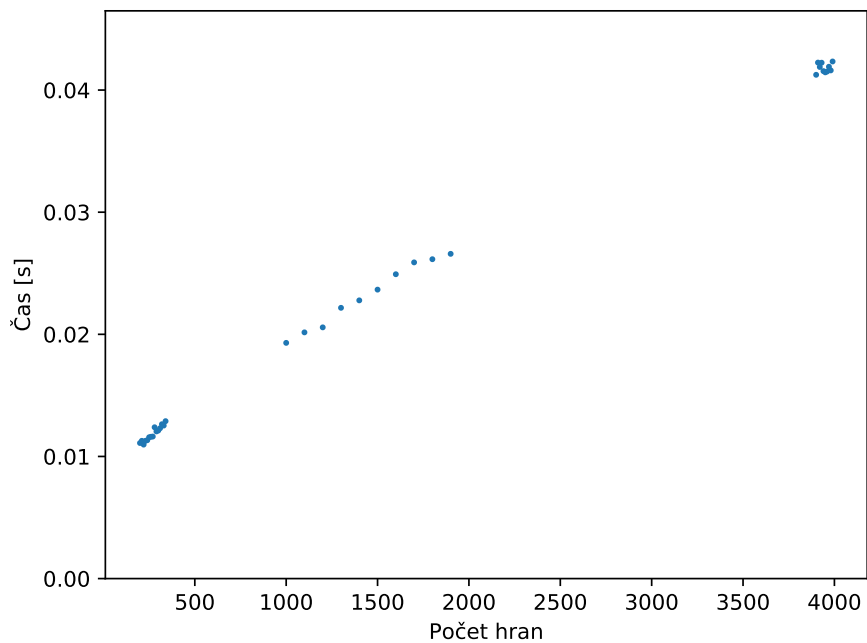
Obrázek A.58. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů vzdáleně regulárních, na počtu hran v Mathematice



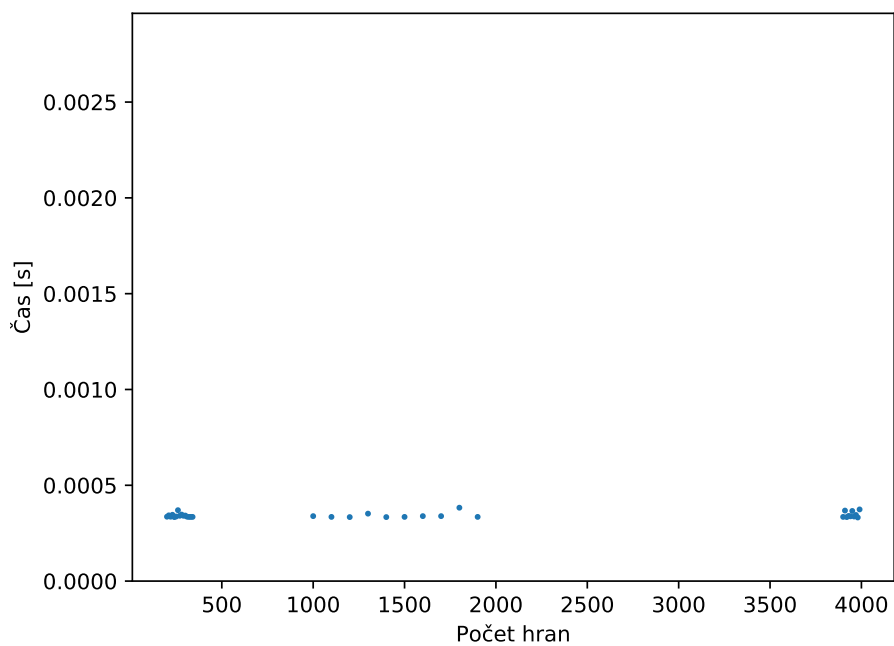
Obrázek A.59. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath



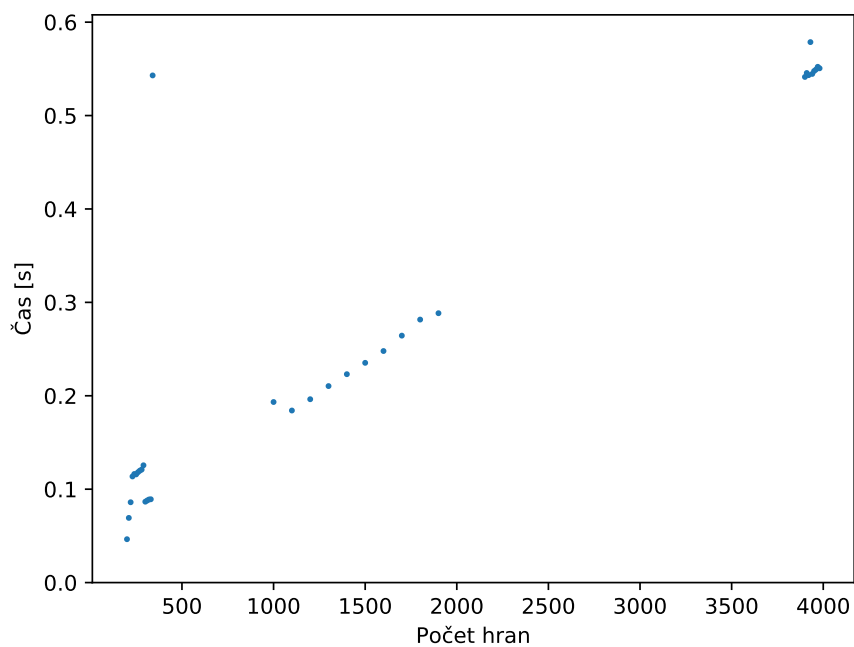
Obrázek A.60. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice



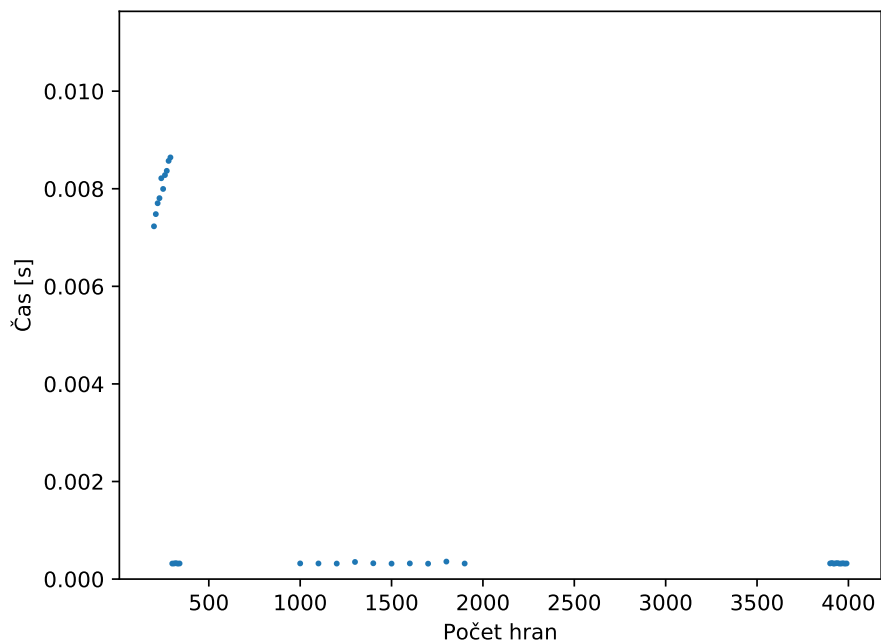
Obrázek A.61. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath



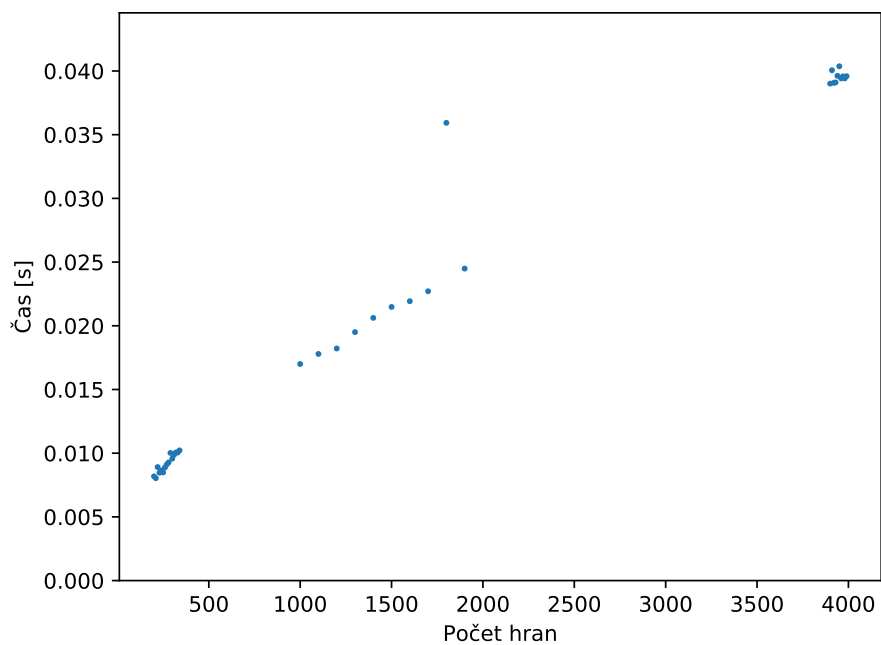
Obrázek A.62. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice



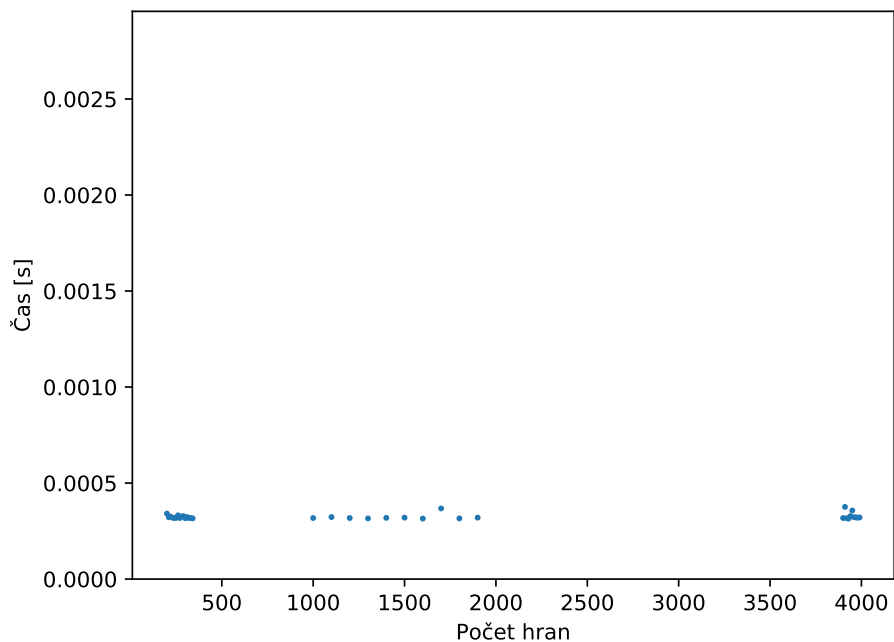
Obrázek A.63. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v SageMath



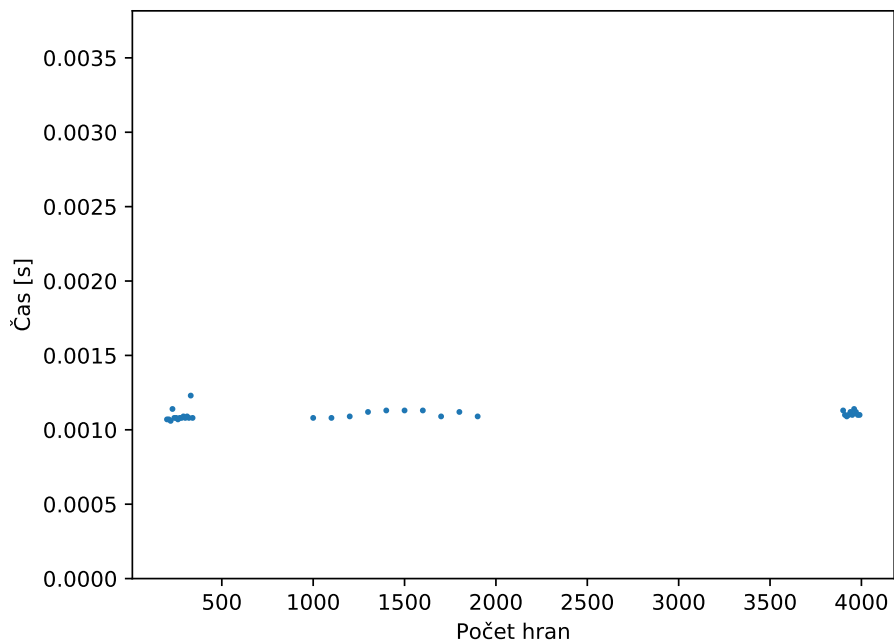
Obrázek A.64. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



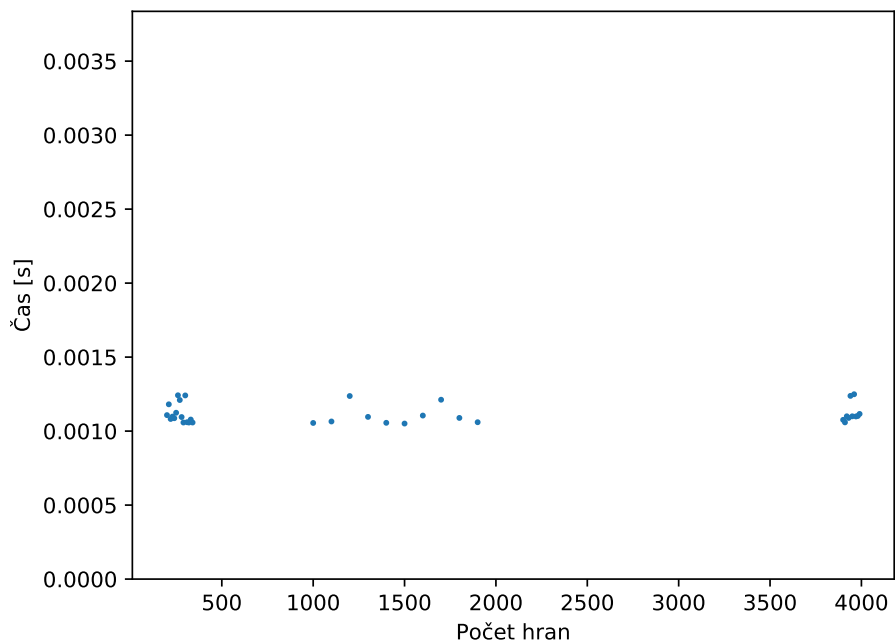
Obrázek A.65. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v SageMath



Obrázek A.66. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



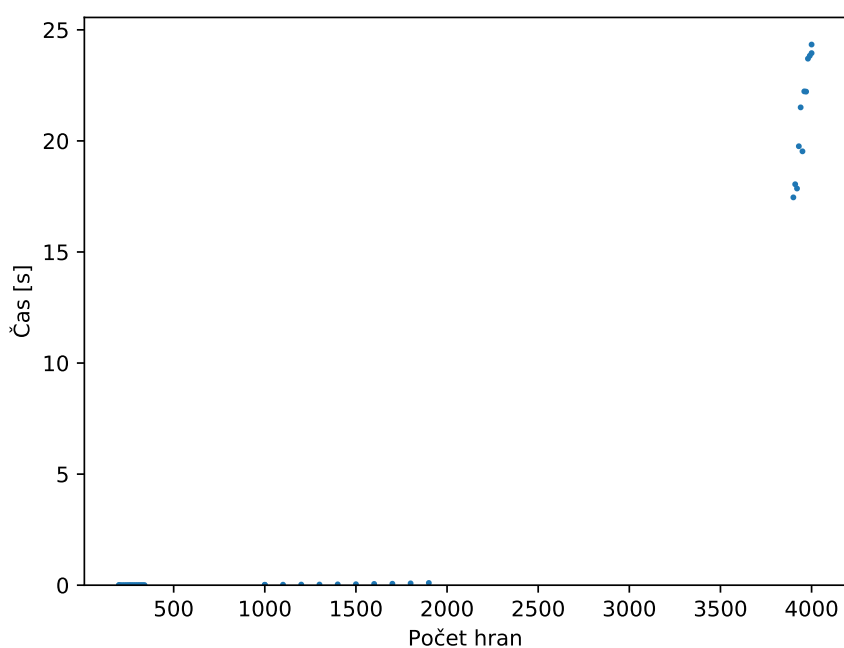
Obrázek A.67. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v SageMath



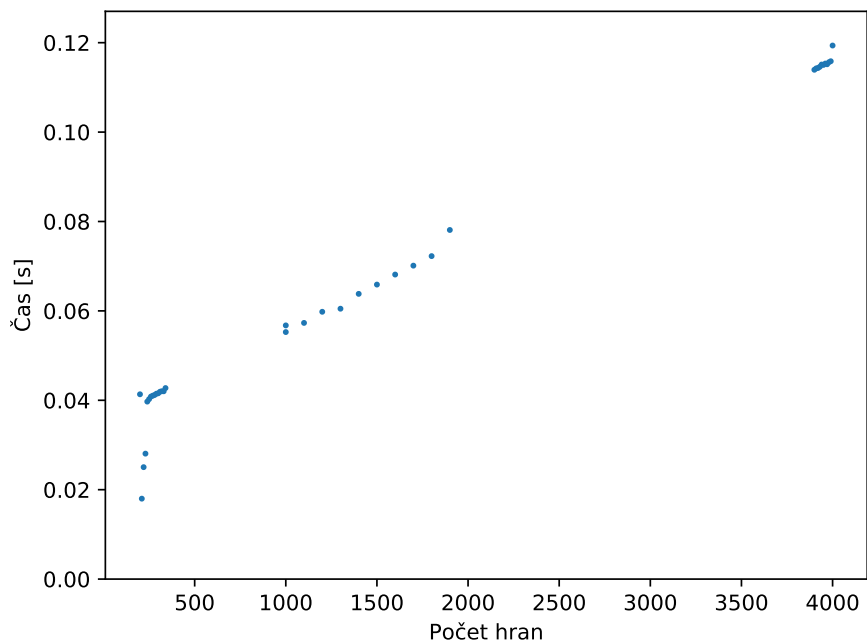
Obrázek A.68. Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice

Příloha B

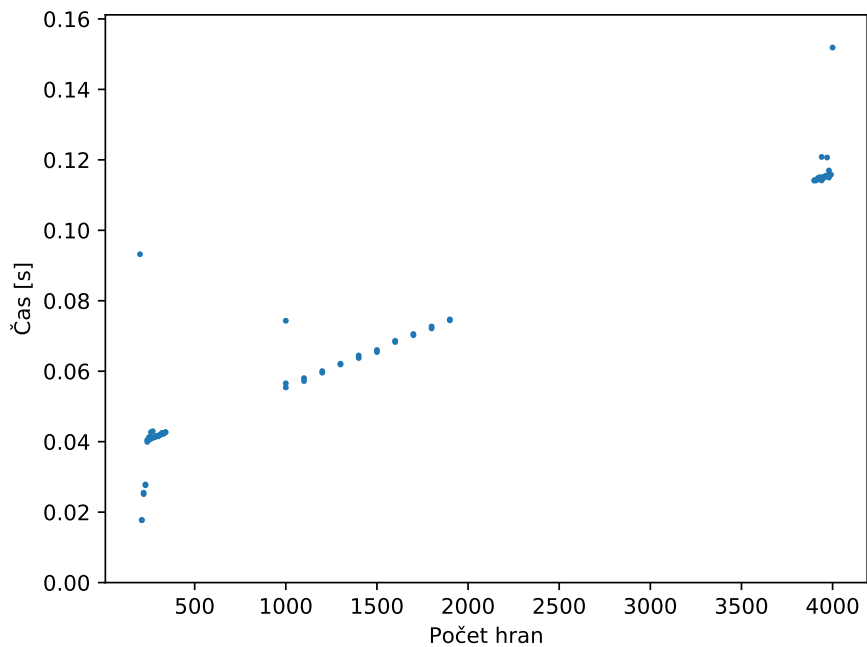
Grafy ukazující výpočet vlastností na různém hardwaru



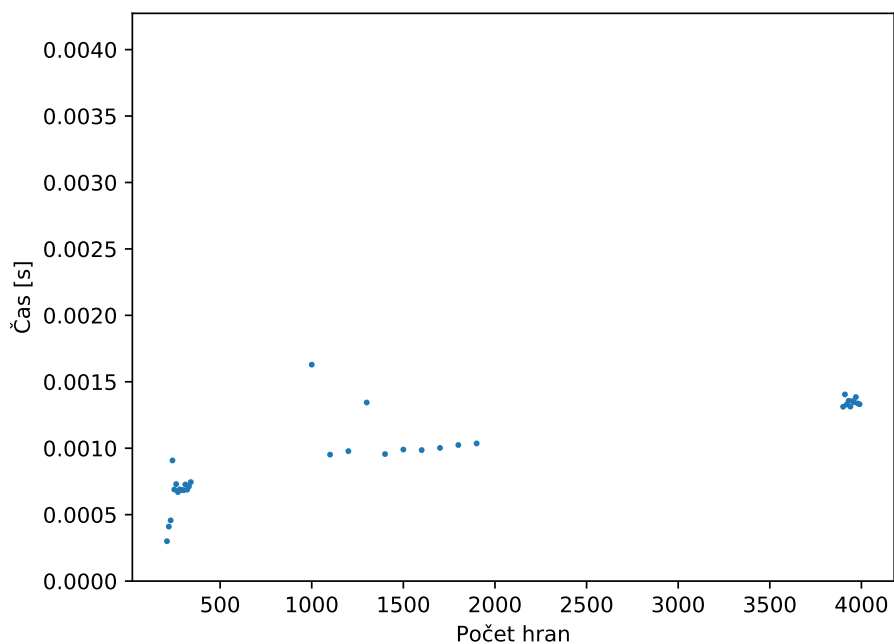
Obrázek B.69. Graf ukazuje závislost času potřebného ke výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



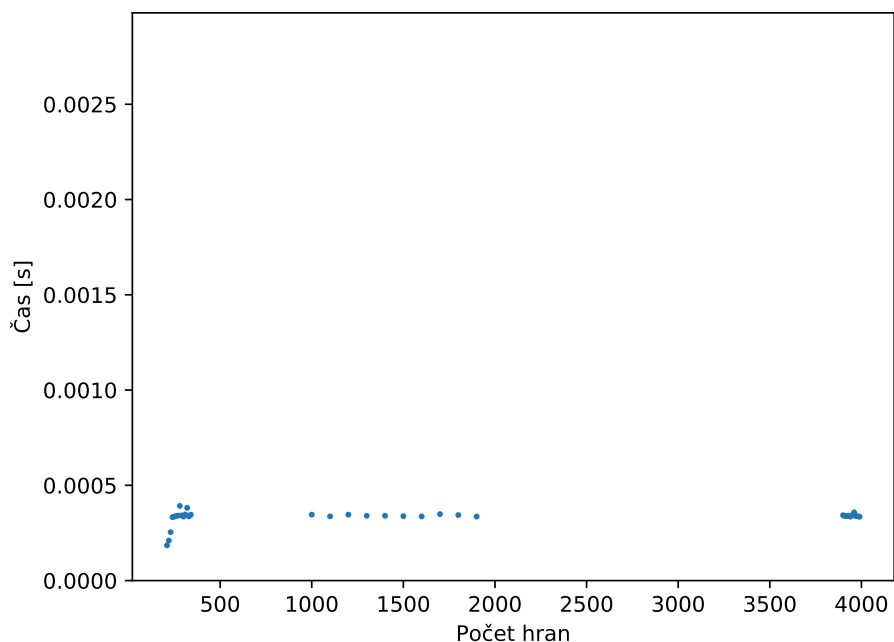
Obrázek B.70. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



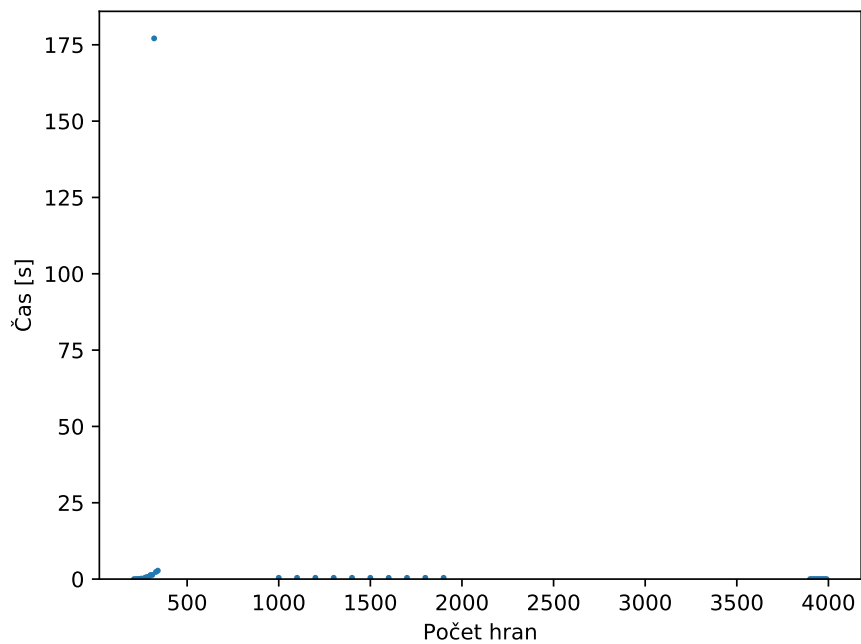
Obrázek B.71. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



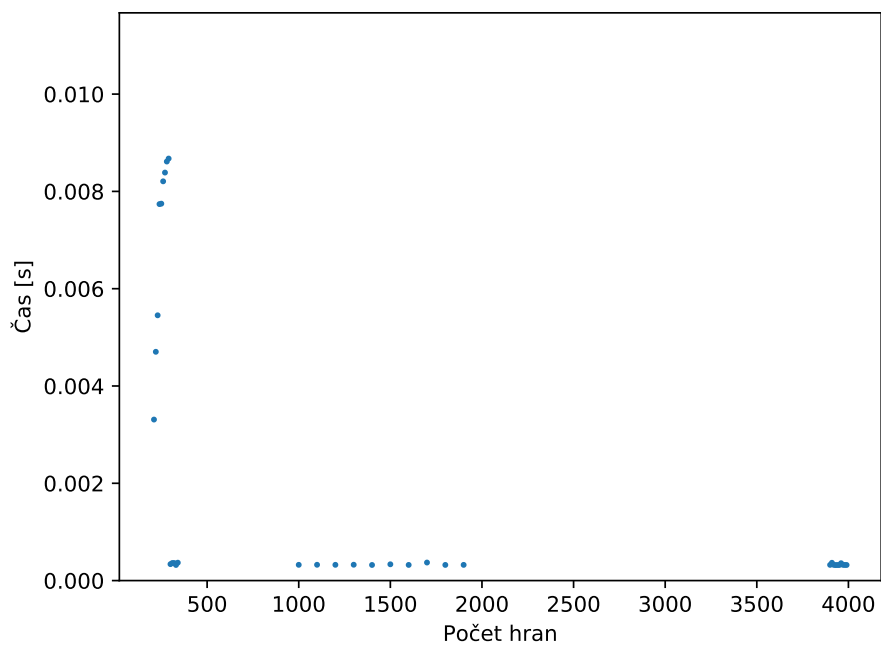
Obrázek B.72. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy souvislých, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



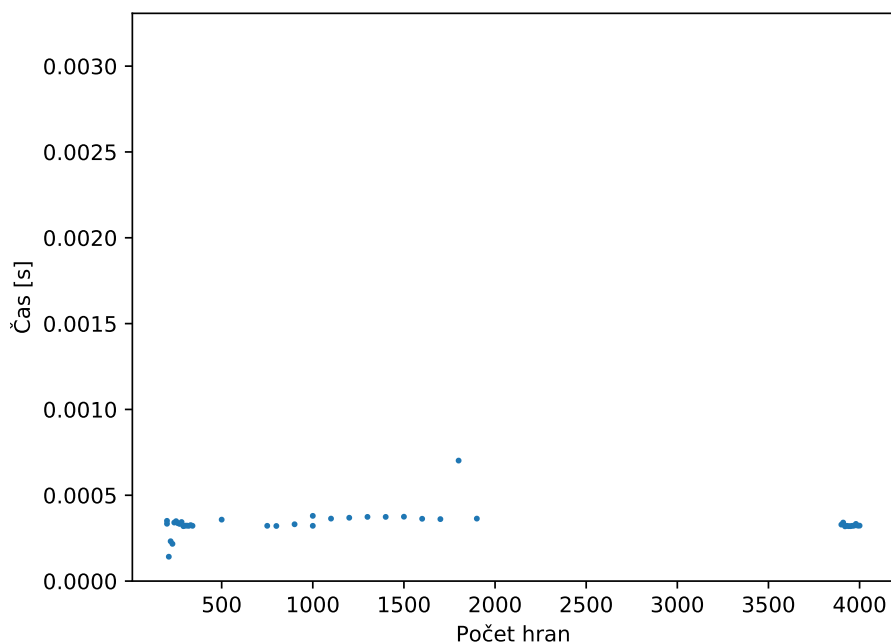
Obrázek B.73. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



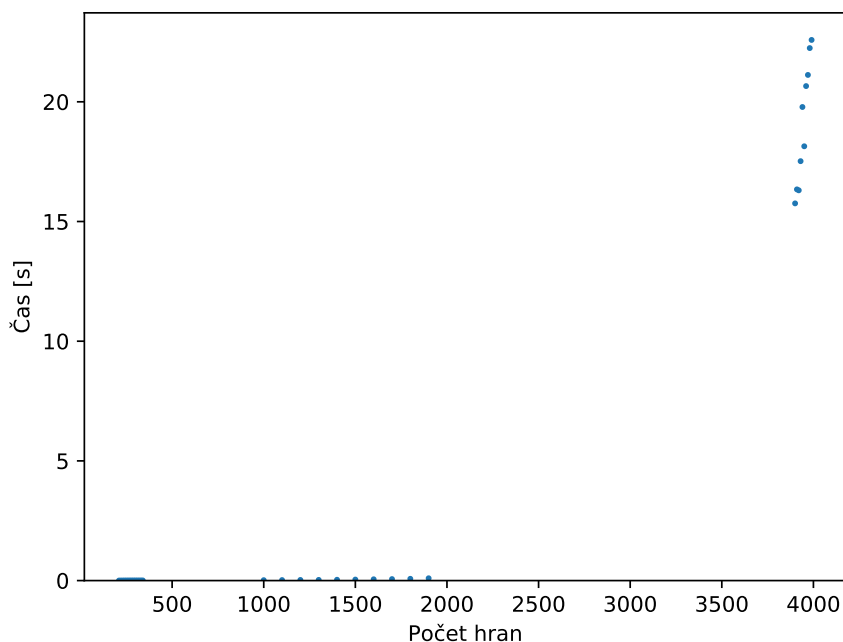
Obrázek B.74. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



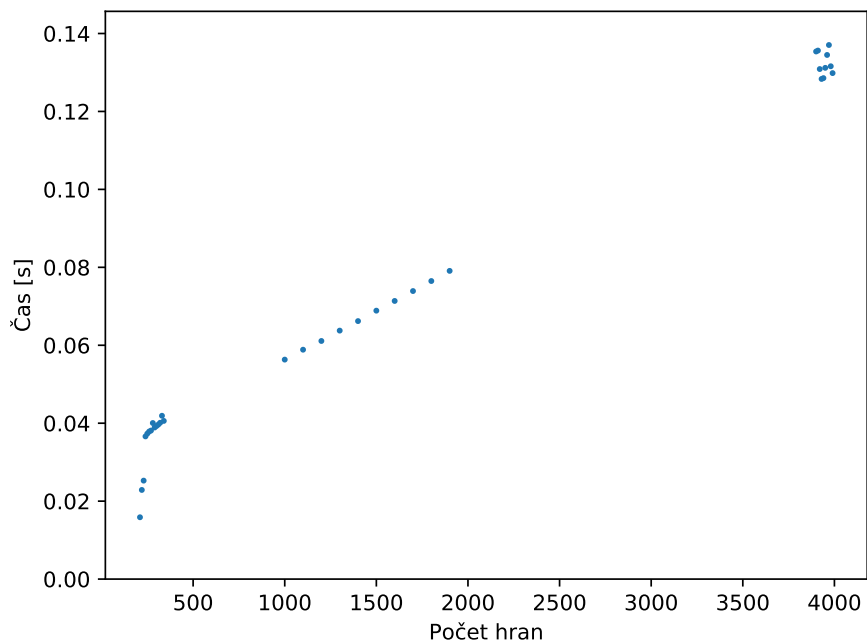
Obrázek B.75. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



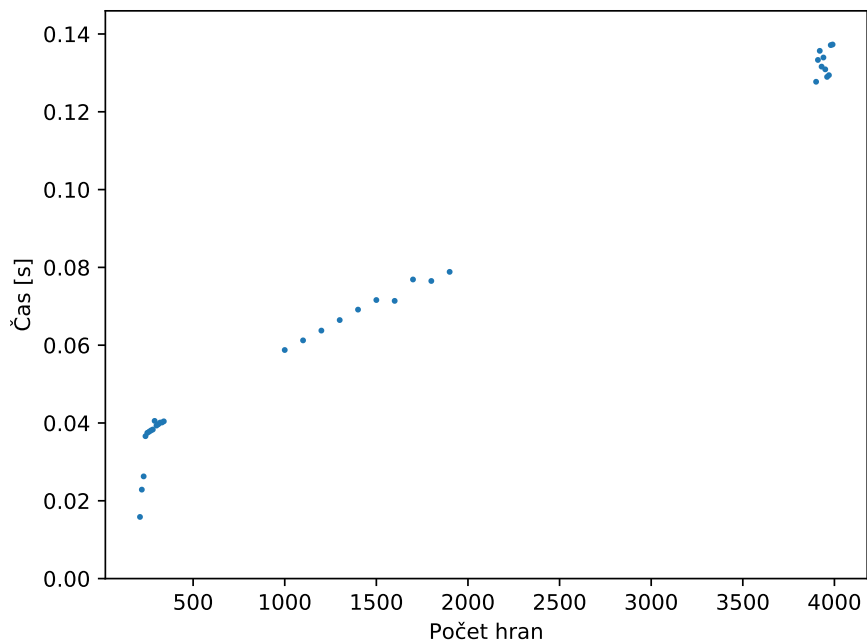
Obrázek B.76. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



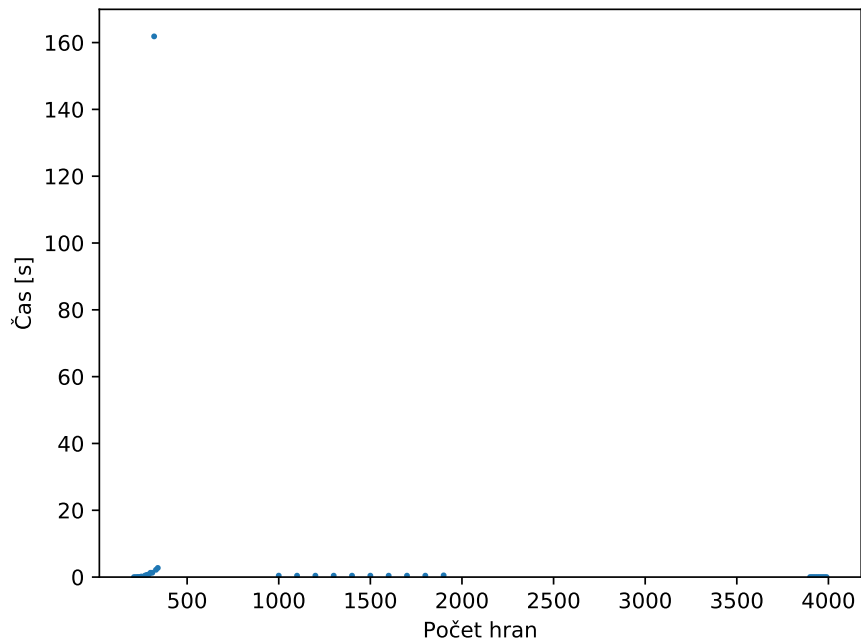
Obrázek B.77. Graf ukazuje závislost času potřebného ke výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



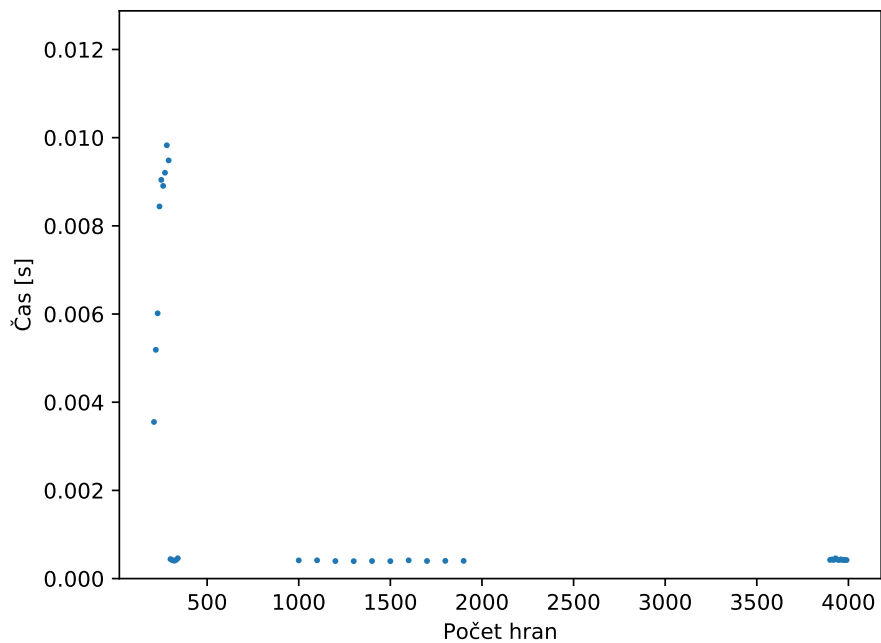
Obrázek B.78. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



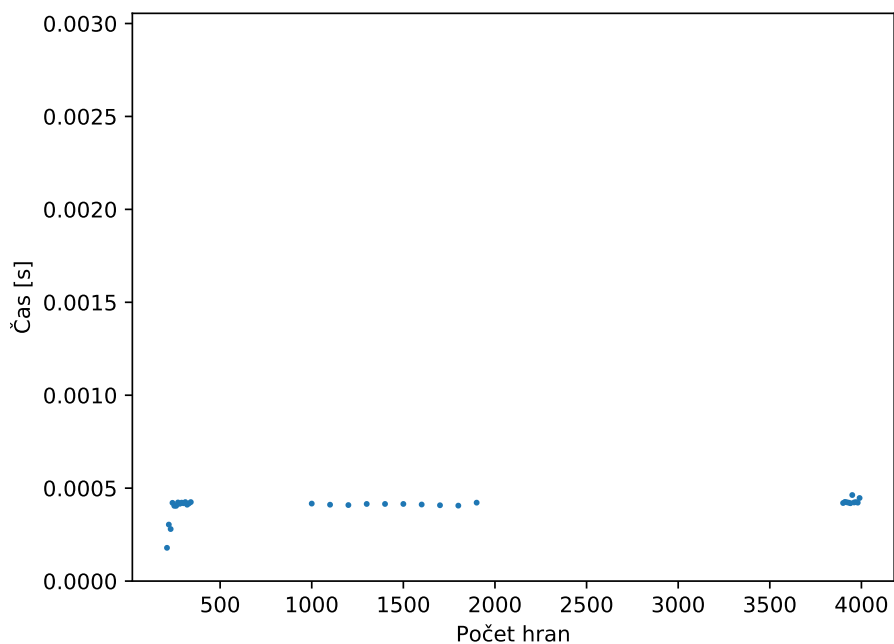
Obrázek B.79. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



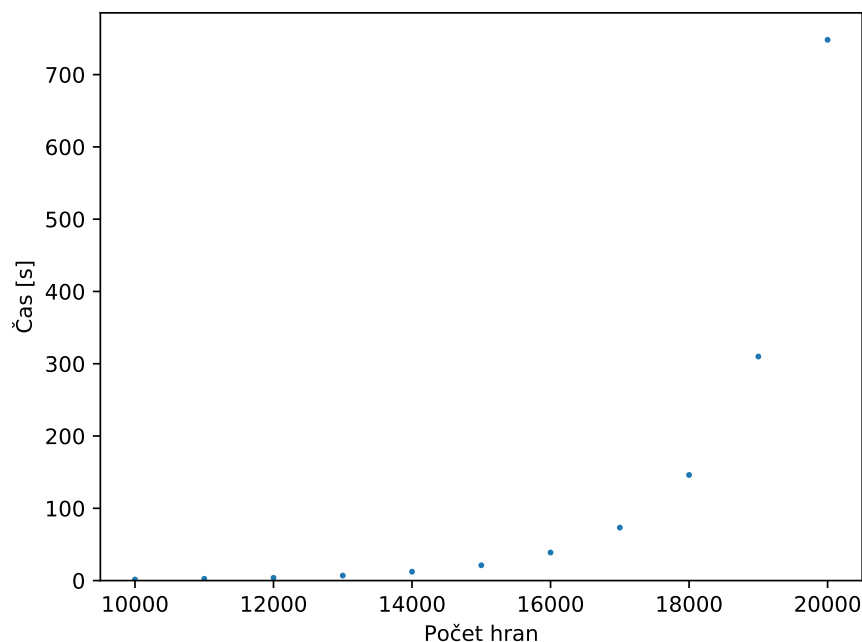
Obrázek B.82. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



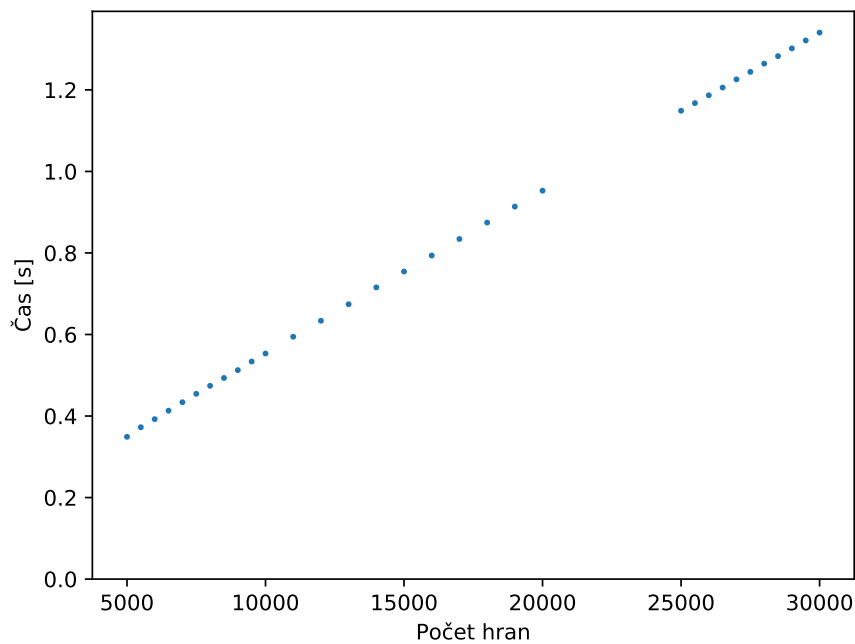
Obrázek B.83. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



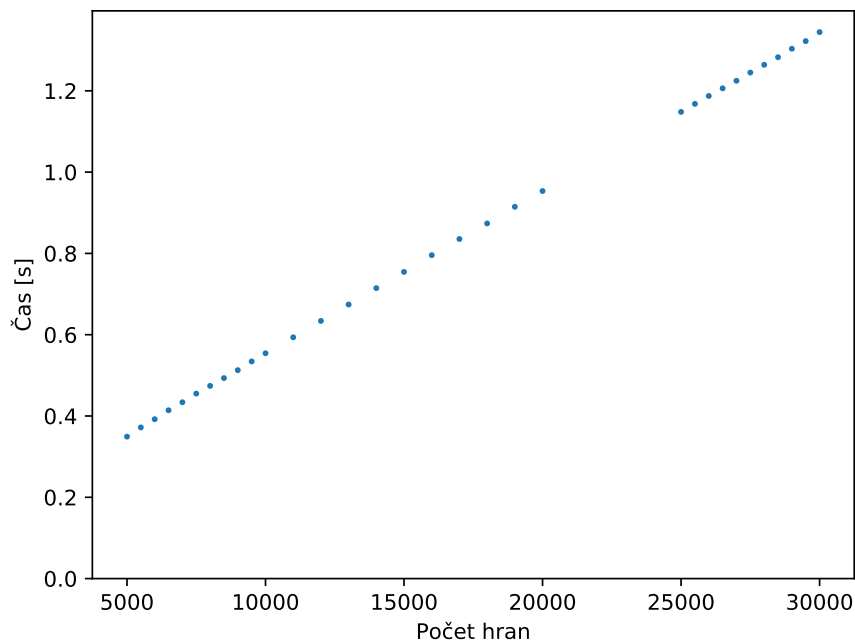
Obrázek B.84. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



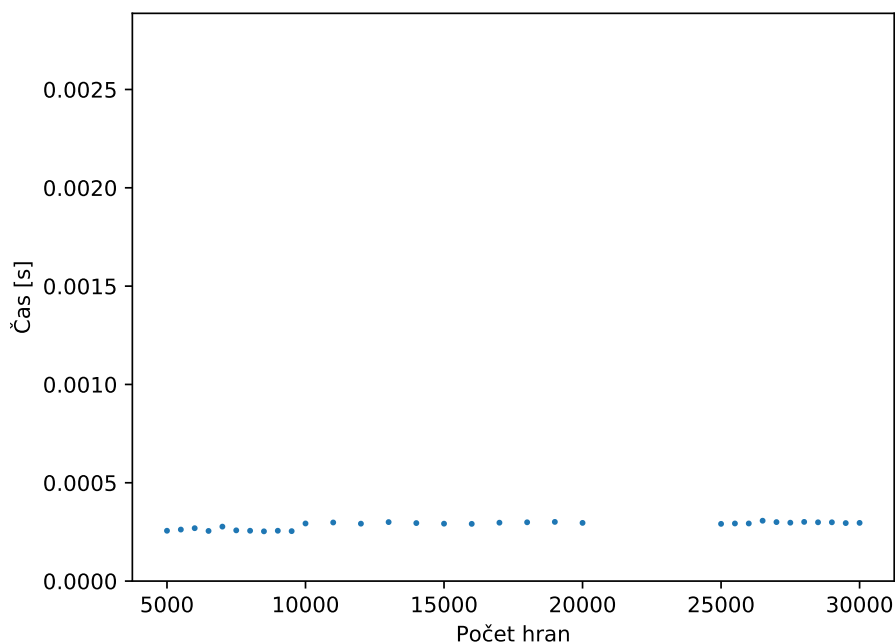
Obrázek B.85. Graf ukazuje závislost času potřebného na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



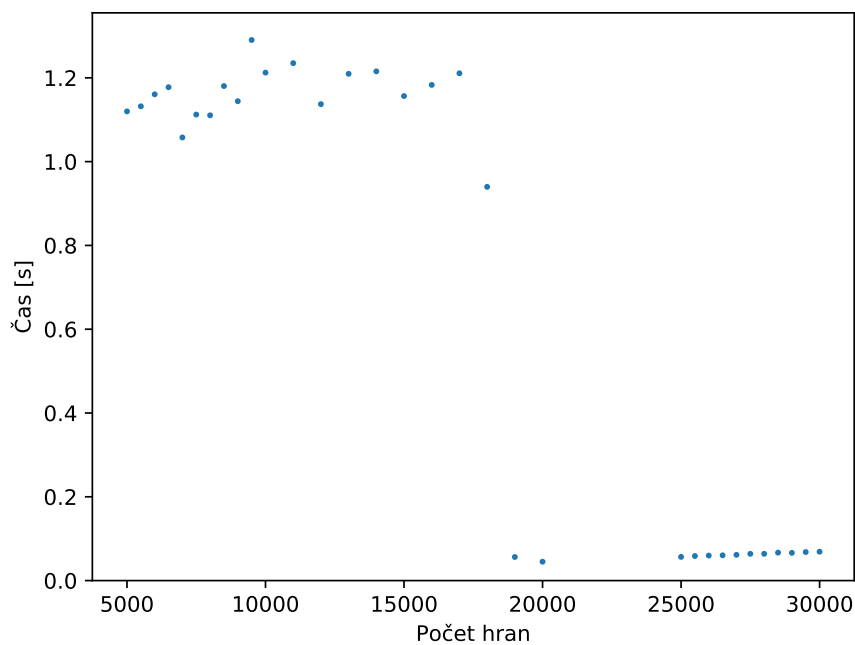
Obrázek B.86. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



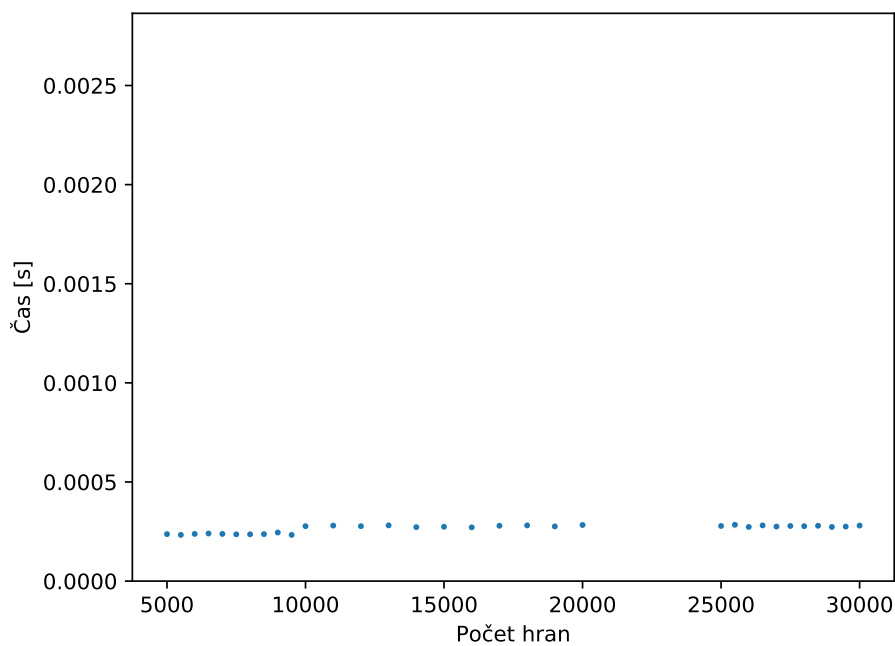
Obrázek B.87. Graf ukazuje závislost času potřebného na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



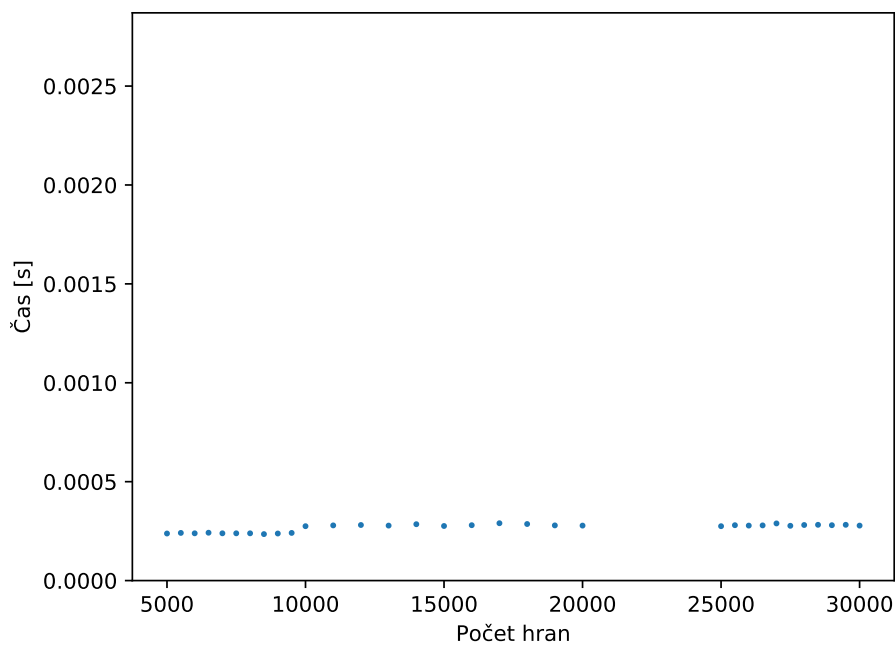
Obrázek B.88. Graf ukazuje závislost čas potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



Obrázek B.89. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



Obrázek B.90. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpc



Obrázek B.91. Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpc

Příloha C

Složky se soubory

- scripts - obsahuje všechny skripty použité k výpočtům, některé vygenerované náhodné grafy a grafy s vypočtenými vlastnostmi
- graphs.zip - obsahuje grafy a statistiky, ze kterých byly grafy sestaveny
- <https://gitlab.fel.cvut.cz/zelenj12/efektivni-vypocty-vlastnosti-neorientovanych-grafu> - Obsahuje použité skripty a další výsledky

Literatura

- [1] Wolfram Research. *Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing*. <https://www.wolfram.com/mathematica/>. [Vid. 10. 5. 2020].
- [2] Harald Schilly. *SageMath - Open-Source Mathematical Software System*. <https://www.sagemath.org/>. [Vid. 10. 5. 2020].
- [3] Jiří Demel. *Grafy a jejich aplikace* . 2019 . Edition 3.
- [4] Jonathan L. Gross, Jay Yellen a Mark Anderson. *Graph Theory and Its Applications* . CRC Press , 2019 . ISBN 978-1-4822-4948-4. Edition 3.
- [5] Eric W. Weisstein. "Connected Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/ConnectedGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [6] Kolář Josef. *Teoretická informatika* . Česká informatická společnost , 2004 . ISBN 80-900853-8-5. Edition 2.
- [7] Eric W. Weisstein. "Tree." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Tree.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [8] Eric W. Weisstein. "Graph Eccentricity." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/GraphEccentricity.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [9] Arthur M. FARLEY a Andrzej PROSKUROWSKI. *Computation of the Center and Diameter of Outerplanar Graphs* . Discrete Applied Mathematics 2 (1980) 185-191 .
- [10] Shridevi Shinde Ishwar Baidari, Ravi Roogi. *Algorithmic Approach to Eccentricities, Diameters and Radii of Graphs using DFS* . International Journal of Computer Applications (0975 – 8887), Volume 54– No.18, September 2012 .
- [11] Eric W. Weisstein. "Graph Diameter." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/GraphDiameter.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [12] Eric W. Weisstein. "Graph Radius." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/GraphRadius.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [13] Eric W. Weisstein. "Girth." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Girth.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [14] A. Itai a M. Rodeh. *Finding a minimum circuit in a graph* . SIAM J. Computing, 7(4):413-423, 1978 .
- [15] Eric W. Weisstein. "Eulerian Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/EulerianGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [16] Western Sydney University. *Fleury's Algorithm for Finding Eulerian Path or Circuit*. https://staff.cdms.westernsydney.edu.au/cgi-bin/cgiwrap/zhuhan/dmath/dm_readall.cgi?page=14&part=3. [Vid. 22. 12. 2020].

- [17] Eric W. Weisstein. "*Clique Number.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/CliqueNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [18] Marie DEMLOVÁ. *Teorie algoritmů*. Texty k přednáškám .
- [19] Eric W. Weisstein. "*Independent Set.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/IndependentSet.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [20] Eric W. Weisstein. "*Independence Number.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/IndependenceNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [21] Eric W. Weisstein. "*Spanning Tree.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/SpanningTree.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [22] Eric W. Weisstein. "*Chromatic Number.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [23] Eric W. Weisstein. "*Hamiltonian Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/HamiltonianGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [24] Eric W. Weisstein. "*Perfect Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/PerfectGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [25] P.D. Seymour M. Chudnovsky, N. Robertson a R.Thomas. *The strong perfect graph theorem* . 2006 .
- [26] Eric W. Weisstein. "*Planar Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/PlanarGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [27] Eric W. Meringer, Markus and Weisstein. "*Regular Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/RegularGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [28] Eric W. Weisstein. "*Edge-Transitive Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/Edge-TransitiveGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [29] Eric W. Weisstein. "*Distance Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/DistanceGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [30] Eric W. Weisstein. "*Distance-Regular Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/Distance-RegularGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020].
- [31] ČVUT. *Technické vybavení superpočítání.* <https://ist.cvut.cz/nase-sluzby/superpocitani/superpocitani-technika/>. [Vid. 12. 5. 2020].