

# Posudek oponenta na diplomovou práci Bc. Pavla Lokvence „Spektrum periodických kvantových grafů v závislosti na vrcholové vazbě“

Předmětem diplomové práce je popis spektrálních vlastností periodického kvantového grafu ve tvaru obdélníkové mřížky, v jejíchž vrcholech je speciální třída vazeb představená v citovaných člancích [3] a [4]. Z prací [3] a [4] je známo spektrum čtvercové mřížky s tímto typem vazby a víme, že má v závislosti na parametrech systému složitou strukturu. Lze předpokládat, že přidáním dalšího parametru (délka druhé strany obdélníku) vznikne matematická úloha se spleťtým řešením. Autor tedy před sebou měl poměrně náročný úkol. Domnívám se, že se mu podařilo úspěšně se vypořádat s případem „čisté“ vazby z článku [3]. Na druhou stranu, výsledky týkající se vazby zavedené v [4] jsou diskutabilní. Níže uvádím podrobnější komentáře k jednotlivým kapitolám.

V kapitole 1 je představena základní teorie ke kvantovým grafům. Autor čerpal převážně z monografie [1] a text doplnil ilustračními příklady. Text je v zásadě v pořádku, je v něm však několik zavádějících pasáží, namátkou:

- Příklad 2 je matoucí, protože jakoby definuje Kirchhoffovy podmínky ve vrcholu, ale ve skutečnosti popisuje celý graf s těmito okrajovými podmínkami ve všech vrcholech, což není totéž.
- V předposledním vzorci příkladu 3 by mělo být  $\sin$  namísto  $\cos$ .
- Není zřejmé, co se rozumí maticí  $\mathbb{U}$ . V kapitole 1 za ni autor považuje matici  $\mathbb{U}$  vystupující ve vzorci (1.14), který převzal z monografie [1], a ve všech dalších kapitolách už používá jiný vzorec – viz (2.3) nebo (4.1). (Lze si vybrat a používat kterýkoli z těchto vzorců, ale není možné volně přeskakovat od jednoho ke druhému, protože vedou na odlišné parametrizace.)
- V příkladu 4, ilustrujícím čtyři vybrané základní typy vrcholových vazeb pomocí unitární matice  $\mathbb{U}$ , není správně ani jedna z uvedených matic. Ve vzorcích se vyskytuje nedefinovaná proměnná  $a$ , některé z „unitárních“ matic nejsou vůbec unitární, není v nich zachycena závislost na stupni vrcholu,...
- Definice 1.10 je zapsaná matoucím způsobem. Úvodní věta je nepravdivá už na první pohled a níže se vyskytuje nedefinovaný symbol  $\sim$ .
- Poznámka 1.5 zmiňuje pojem duální mřížky, ovšem bez kontextu a nesrozumitelně. Dojem při čtení je takový, že sám autor daný pojem nepříliš pochopil.

Druhá kapitola se věnuje konkrétně obdélníkové mřížce s vazbou z článku [3]. Získané výsledky se zdají být správně a postup řešení je srozumitelně vysvětlený. K textu mám pouze drobné výhrady:

- Kapitola se mi jeví nelogicky zařazena, vhodnější by bylo její umístění až před kapitolu 4, se kterou úzce souvisí. Ostatně autor se již v kapitole 2.3 odkazuje na věty 4.1 a 4.3, které se při stávajícím uspořádání nacházejí až o třicet stran dál.

- V poznámce 2.1 se pomocí výpočtu spektra matice  $\mathbb{U}$  složitě odvozuje, že okrajové podmínky nejsou scale-invariantní. Tato skutečnost je nicméně zřejmá ihned z toho, že matice  $\mathbb{U}$  není hermitovská. Možná si student není tohoto jednoduchého kritéria vůbec vědom – trochu překvapivě jej neuvádí ani v první kapitole, kde by jej čtenář očekával.
- Vzorce (2.20) a (2.21) jsou označovány jako „spektrální podmínky“, přitom nejde o podmínky, ale o definiční vztahy pro určité funkce (jejichž položením do rovnosti s nulou teprve získáme spektrální podmínky).

Kapitola 3 shrnuje výsledky článků [2] a [7] ohledně spektra obdélníkové mřížky s vazbou  $\delta$  ve vrcholech. Její text je v pořádku až na drobnosti typu záměny 1 za  $c$  v čitateli ve vzorci (3.8).

Těžiště diplomové práce je v kapitole 4. Student řeší relativně komplikovanou úlohu s několika parametry – délky stran obdélníku, síla vazby  $\delta$  a „poměr“, v jakém jsou „smíchané“ vazba  $\delta$  s rotační vazbou zavedenou ve [3] – a popisuje chování spektra v závislosti na těchto parametrech. Autor jednoznačně odvedl velký kus práce, ale ve vzorcích jsem postřehl vícero chyb (několik jich uvedu), které vyvolávají otázku, zda jsou výsledky vůbec správně.

- Matice  $F^*$  ve vzorci (4.10) má na dvou místech chybné prvky – jsou to jen překlipy, nebo se přenesly i do dalších výpočtů?
- Vzorec (4.23) není správně, není platný pro záporné hodnoty  $\cos kl_1, \cos kl_2$ .
- Vzorec (4.24) není správně, představuje mylný odhad typu  $-f(\theta) > -\min_{\theta} f(\theta)$ . Tato chyba znedůvěřhodňuje celý zbytek důkazu.
- Při výpočtu limit (4.31) – (4.33) je zvolený velice nevhodný postup a ve vzorcích jsou opět nedostatky: namísto  $(2k)!$  se několikrát objevuje  $2k!$  a schází faktor 4 ve vzorci (4.31). Výsledkem je chybný výraz a tato chyba se šíří do následných kroků v důkazu.
- V textu kapitoly je několik dalších menších problémů, například ve vzorcích na konci strany 47 se bez vysvětlení (a nesprávně) objevuje faktor  $1/4$ , nebo vzorec (4.18) se „odvozuje“ z (2.20), což nedává smysl, jelikož vzorec (2.20) se týká jen speciálního případu  $t = 1$ . V kapitole se vyskytují překlipy a jazykové nedostatky včetně nesrozumitelných vět („On the other hand in the vicinity of this point the Lemma 4.1 the assumptions are fulfilled.“ – str. 52). Na textu je znát, že byl psaný ve spěchu.

S ohledem na složitost řešené úlohy a získané výsledky na jedné straně a nedostatky a nesrovnalosti na druhé straně navrhuji hodnocení diplomové práce známkou C (dobře).

2. 9. 2020

Ing. Ondřej Turek, Ph.D.