České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Gradovaná symplektická geometrie

Graded symplectic geometry

Bakalářská práce

Autor: **Rudolf Šmolka**

Vedoucí práce: **Ing. Jan Vysoký, Ph.D.**

Akademický rok: 2019/2020

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Tímto bych chtěl poděkovat svému školiteli Ing. Janovi Vysokému, Ph.D. za jeho skutečně nadstandardní ochotu, vstřícnost a nápomocnost po celou dobu tvorby této práce. Také bych chtěl poděkovat svým bezvýhradně skvělým rodičům, bez jejichž neutuchající podpory by tato práce nikdy nemohla vzniknout.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 30. července 2020 Rudolf Šmolka

Název práce:

Gradovaná symplektická geometrie

Autor: Rudolf Šmolka

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Jan Vysoký, Ph.D., Katedra fyziky, FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt: Jedním z možných zobecnění hladkých variet jsou takzvané $\mathbb{Z}$-gradované variety. Zde zkoumáme jejich podskupinu, N-variety, které rigorózně zavádíme způsobem, který nejprve ilustrujeme na klasických hladkých varietách. Dále definujeme jisté základní pojmy, jako gradovaný vektorový prostor či gradovaný okruh, pro které ukážeme platnost vybraných tvrzení, známých pro jejich negradované protějšky. Na N-varietách také zavádíme další geometrické struktury, jako vektorová pole nebo diferenciální formy. Nakonec definujeme symplektické N- a NQ-variety, které ilustrujeme na konkrétních příkladech.

Klíčová slova: diferenciální forma, N-varieta, snop, symplektická forma, vektorový fibrovaný prostor posunutý ve stupních

Title:

Graded symplectic geometry

Author: Rudolf Šmolka

Abstract: One of the possible generalizations of a smooth manifold is a so-called $\mathbb{Z}$-graded manifold. Here we are concerned with their special case: N-manifolds, whom we introduce rigorously in a way we first demonstrate on classical smooth manfolds. Next, we define certain fundemental concepts like a graded vector space or a graded ring, and we show them to enjoy several of the same properties as their non-graded counterparts. We also introduce further geometric structures on N-manifolds, such as vector fields or differential forms. Finally, we define symplectic N- and NQ-manifolds and provide their concrete examples.

Key words: differential form, degree shifted vector bundle, N-manifold, sheaf, symplectic form

Obsah

Úvod

Problematika $\mathbb{Z}$-gradovaných variet je relativně mladá (autor [1] klade počátky cca do pozdních 90. let minulého století) a na rozdíl od supervariet, které jsou zkoumány podstatně déle, doposud neexistuje ucelená publikace, která by se jimi zabývala. Situace je ještě o něco horší, neboť neexistuje dokonce ani ucelená *definice* samotné $\mathbb{Z}$-gradované variety. Znatelná část tohoto textu je tak věnována právě této definici, ovšem nikoliv pro „obecnou“ $\mathbb{Z}$-gradovanou varietu, nýbrž pro její speciální případ, totiž takzvanou nezáporně gradovanou varietu neboli N-varietu. Takto se omezujeme proto, že, jak uvidíme na konci kapitoly 2, nám nezáporné gradování umožní vyhnout se technickým problémům týkajících se práce s formálními řadami.

Samotná zde uvedená definice N-variety se snaží následovat a podrobně rozebrat postup naznačený v článku [1] s tím podstatným rozdílem, že gradované struktury (grupy, vektorové prostory, algebry...) nezavádíme, neformálně řečeno, jako direktní součet různých prostorů, nýbrž v podstatě jako posloupnost příslušných prostorů. Rozdíl je tedy v tom, že prvky různých stupňů se nám „nemíchají“, to jest neexistují nehomogenní prvky. To vede na definici odpovídajících snopů, které zaručeně splňují axiom lokality a lepící axiom, s čímž mohly mít alternativní definice problém.

Autor by na tomto místě chtěl explicitně poznamenat, že kromě veškeré uvedené literatury měly pivotní roli jakožto informační zdroj poznámky poskytnuté vedoucím práce Janem Vysokým. Tyto poznámky při absenci jakéhokoliv publikovaného úvodu do problematiky sloužily pro tuto práci jako skutečný informační základ i jako mnohočetná inspirace.

Na začátku první kapitoly je velice stručně představena klasická symplektická geometrie. Tato část slouží k uvedení pojmů, které se budeme po zbytek práce pokoušet přenést do gradovaného prostředí. Druhá část první kapitoly si klade za cíl předvést alternativní (a samozřejmě ekvivalentní) definici hladké variety prostřednictvím pojmů, jako je snop a snopový (izo)morfismus. V této kapitole také poprvé používáme jisté velice základní pojmy z teorie kategorií, jejichž použití vede k znatelně vyšší přehlednosti a stručnosti.

Ve druhé kapitole se poprvé setkáme s výše zmíněnými „gradovanými“ pojmy. Nejprve po vzoru knihy [2] prozkoumáme vlastnosti gradovaných okruhů, a posléze se přesuneme ke gradovaným vektorovým prostorům a algebrám. Uvedeme definici rozšířené symetrické algebry nad gradovaným vektorovým prostorem, kterou pak v kapitole 3 použijeme k definici gradovaných domén a konečně také N-variet.

Čtvrtá kapitola se zabývá definicí vektorových polí na N-varietách a činí tak „globálně“ bez zavedení tečného prostoru v bodě. Za tímto účelem nejprve rozpracovává pokročilejší snopové struktury, jmenovitě snopy morfismů modulů gradovaných algeber. Pátá a poslední kapitola se zabývá obohacováním N-variet o dodatečné struktury. Její první část vrcholí zavedením diferenciálních forem jakožto gradovaných funkcí na gradovaném tečném prostoru s posunutými stupni. Její druhá část ukazuje tři základní a známé derivace těchto forem, konkrétně jde o vnější derivaci, vnitřní součin a Lieovu derivaci. Tyto derivace jsou zavedeny elegantně jako vektorová pole právě na již zmíněném gradovaném tečném prostoru s posunutými stupni.

Na konci páté kapitoly je slavnostně zavedena symplektická N-varieta, která se dále vybaví kompatibilním homologickým vektorovým polem za vzniku NQ-variety. Jsou uvedeny příklady těchto variet, které ilustrují jak samotné výše uvedené pojmy, tak jejich netriviální vztah k některým dalším známým matematickým strukturám.

Kapitola 1

Klasická geometrie

1.1 Krátký úvod do symplektické geometrie

Symplektická geometrie se nejspíše poprvé objevila v článku J. L. Lagrange [3], ve kterém autor zkoumá orbity planet pod vzájemným gravitačním vlivem. Lagrange zde uvažuje dráhu planety jako elipsu plně popsanou šesti nezávislými parametry. Vývoj těchto parametrů v čase popisuje systémem parciálních diferenciálních rovnic, které lze upravit do tvaru dnešních Hamiltonových pohybových rovnic, jak ostatně později činí sám Lagrange (více například v [4]).

Typicky se však počátky symplektické geometrie spojují právě s Hamiltonovou formulací klasické mechaniky, se kterou se čtenář může detailněji seznámit například v [5]. V této formulaci stav zkoumaného systému odpovídá právě jednomu bodu fázového prostoru, jehož souřadnice se často značí jako $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, a nazývají se zobecněnými souřadnicemi respektive hybnostmi. Časový vývoj tohoto systému je spjat s funkcí $H(q^i, p_j)$, které se říká Hamiltonova funkce nebo také Hamiltonián, Hamiltonovými pohybovými rovnicemi:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{1.1}$$

pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a je jimi, až na počáteční podmínky, plně určen.

Hledání fázových křivek, totiž křivek ve fázovém prostoru odpovídajících časovému vývoji systému, je tak možno formulovat jako hledání integrálních křivek tzv. hamiltonovského vektorového pole

$$X_H := \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j}, \tag{1.2}$$

kde jsme využili, jakožto i nadále budeme využívat, Einsteinovy sumační konvence. Zavedeme-li na fázovém prostoru 2-formu $\omega := \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$, zjistíme že platí $\omega(X_H, \cdot) = -\mathrm{d}H$. Inspirováni těmito pozorováními si nyní tyto vlastnosti „vypůjčíme“ a abstraktním způsobem zavedeme základní pojmy symplektické geometrie. Pro hlubší úvod do problematiky nechť je čtenář odkázán na publikace [6] a [7], které jsou také hlavním informačním zdrojem této podkapitoly.

Jelikož tato podkapitola pojednává o dobře známých faktech, využijeme v ní poněkud méně formálního (a snad stručnějšího) zápisu. V tomto duchu rovněž nebudeme uvádět důkazy lemmat a tvrzení. Budeme-li hovořit o varietách, vždy budeme mít namysli *hladké* variety, to jest variety třídy C^∞.

O 2-formě ω na varietě M řekneme, že je **nedegenerovaná**, právě když je lineární zobrazení $X \mapsto \omega(X,\cdot)$, zobrazující vektorová pole na 1-formy, bijekcí.

Mějme libovolnou 2-formu ω na varietě M. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. ω je nedegenerovaná.
2. Zobrazení $X \mapsto \omega(X,\cdot)$ je prosté (nebo surjektivní).
3. Pokud pro všechna vektorová pole Y platí, že $\omega(X,Y)=0$, potom $X=0$.
4. Matice komponent formy ω je v libovolných souřadnicích a v každém bodě variety M invertovatelná.

2-formu ω na varietě M nazveme **symplektickou formou**, právě když je nedegenerovaná a zároveň uzavřená (to jest $\mathrm{d}\omega = 0$). Uspořádanou dvojici (M,ω) nazveme **symplektickou varietou**.

Po zbytek kapitoly bude (M,ω) vždy představovat symplektickou varietu.

Okamžitě lze nahlédnout, že každá symplektická varieta má nutně *sudou dimenzi*. Skutečně, pro determinant matice komponent symplektické formy v libovolných souřadnicích bude totiž platit $0 \neq \det(\omega) = \det(\omega^{\mathrm{T}}) = \det(-\omega) = (-1)^{\dim M}\det(\omega)$, což vynucuje sudost $\dim(M)$.

Zobrazení $X \mapsto \omega(X,\cdot)$ je lineárním izomorfismem mezi vektorovými poli a 1-formami na M. Jedná se tedy o jistou analogii zvyšování a snižování indexů[1] z (pseudo)riemannovské geometrie, kde místo symplektické formy zastává právě (pseudo)metrický tenzor. Konkrétně zobrazení $X \mapsto \omega(X,\cdot)$ by bylo obdobou snížení indexu, a jeho inverze obdobou indexového zvýšení.

Pro každou funkci $H \in \mathrm{C}^\infty(M)$ potom definujeme **hamiltonovské vektorové pole** X_H příslušné funkci H vztahem $\omega(X_H,\cdot) = -\mathrm{d}H$. Dále libovolné vektorové pole V na M označíme za **symplektické**, právě když splňuje $\mathcal{L}_V\omega = 0$, kde $\mathcal{L}_V$ značí Lieovu derivaci[2] ve směru V.

Ze vztahu[3] $\mathcal{L}_V = i_V\mathrm{d} + \mathrm{d}\, i_V$ ihned vidíme, že každé hamiltonovské vektorové pole je symplektické.

Pro každé dvě funkce $f,g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ definujeme jejich **Poissonovu závorku** jako

$$\{f,g\} := \omega(X_f,X_g) = X_f(g). \tag{1.3}$$

Přímo z definice vidíme, že Poissonova závorka je antisymetrická a bilineární. Dále pro každé tři $f,g,h \in \mathrm{C}^\infty(M)$ platí vztahy:

1. $X_{fg} = fX_g + gX_f$.
2. $X_{\{f,g\}} = X_fX_g - X_gX_f$.
3. $\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}$. (Jacobiho identita).

[1] Také známy jako „hudební“ izomorfismy.
[2] Pro korektní definici Lieovy derivace viz [7].
[3] Známého rovněž pod názvem „Cartanova kouzelná formule“ ("Cartan's Magic Formula"), viz [7].

4. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

Známým příkladem symplektické variety je kotečný fibrovaný prostor T^*N, kde N je libovolná varieta. Na tomto prostoru lze totiž *vždy* definovat takzvanou kanonickou symplektickou formu[4] jako vnější derivaci Liouvilleovy 1-formy, což je forma, kterou lze globálně a kanonicky definovat na každém kotečném fibrovaném prostoru (viz [8]).

1.2 Alternativní definice hladké variety - snopy a lokálně okruhové prostory

V této podkapitole představíme definici klasické hladké variety, avšak způsobem, který budeme schopni v dalších kapitolách vhodně rozšířit i pro definici N-variet. Tuto definici je možno nalézt také například v [9] nebo [10].

Zde i po zbytek textu budeme užívat základní názvosloví teorie kategorií, přičemž se budeme držet následujícího značení: třídu všech morfismů v kategorii C značíme $\mathrm{hom}(\mathsf{C})$, třídu objektů značíme $\mathrm{ob}(\mathsf{C})$, místo $x, y \in \mathrm{ob}(\mathsf{C})$ budeme často psát $x, y \in \mathsf{C}$ a množinu všech morfismů z x do y značíme $\mathsf{C}(x, y)$. Místo $\mu \in \mathsf{C}(x, y)$ budeme často psát $\mu : x \to y$. Řekneme-li, že kategorie D je **plnou podkategorií** kategorie C, máme tím namysli, že

$$(\forall x \in \mathsf{D})\ (x \in \mathsf{C})\ \wedge\ (\forall x, y \in \mathsf{D})\ (\mathsf{D}(x, y) = \mathsf{C}(x, y)). \tag{1.4}$$

Poznámka. i. Buď X topologický prostor. Potom $\mathsf{Open}(X)$ značí kategorii, jejíž objekty jsou všechny otevřené podmnožiny prostoru X a jejíž morfismy jsou inkluze. To jest

$$\mathrm{hom}(\mathsf{Open}(X)) := \{\, \imath_V^U : V \to U \mid V \subseteq U \,\}. \tag{1.5}$$

ii. cAs značí kategorii komutativních unitálních asociativních algeber, kde morfismy jsou algebraické homomorfismy.

iii. Veškeré vektorové prostory či algebry uvažujeme vždy nad reálnými čísly.

iv. V celé kapitole budeme pojmem algebra vždy myslet asociativní unitální algebru.

Značení 1.2.1. V celém textu budeme také hojně využívat následující značení: Pro topologický prostor X a bod $x \in X$ značíme jako $\mathrm{Op}(X)$ množinu všech **otevřených podmnožin** prostoru X (to jest $\mathrm{Op}(X) \equiv \mathrm{ob}(\mathsf{Open}(X))$) a jako $\mathrm{Op}_x(X)$ množinu všech **otevřených okolí** bodu x. Budeme-li psát $\mathrm{Op}(U)$, respektive $\mathrm{Op}_x(U)$, pro nějakou množinu $U \in \mathrm{Op}(X)$, respektive $U \in \mathrm{Op}_x(X)$, chápeme U přirozeně jako topologický prostor s indukovanou topologií.

Definice 1.2.2. Buď X topologický prostor, C kategorie. Potom kontravariantní funktor $\mathcal{F} : \mathsf{Open}(X) \to \mathsf{C}$ se nazývá **předsnop**[5] na X s hodnotami v C.

Jinými slovy předsnop $\mathcal{F}$ přiřazuje každé otevřené množině $U \subseteq X$ objekt $\mathcal{F}(U) \in \mathsf{C}$ a každé inkluzi $\imath_W^V : W \to V$ morfismus $\mathcal{F}(\imath_W^V) \in \mathsf{C}(\mathcal{F}(V), \mathcal{F}(W))$ (odtud *kontravariantní*), přičemž navíc platí

$$\forall U \in \mathrm{Op}(X),\ \mathcal{F}(\imath_U^U) = \mathrm{id} \in \mathsf{C}(\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(U)), \tag{1.6a}$$

[4] Známou také jako Poincarého 2-forma.

[5] V angličtině „presheaf“. Snop (anglicky „sheaf“) je v běžné řeči svazek sklizeného obilí.

$$\forall\, W \subseteq V \subseteq U \in \mathrm{Op}(X),\ \mathcal{F}(\imath^U_V \circ \imath^V_W) = \mathcal{F}(\imath^V_W) \circ \mathcal{F}(\imath^U_V). \tag{1.6b}$$

$\mathcal{F}(\imath^U_V)$ se nazývá **restrikce** z U do V. Pokud C je kategorie, jejíž objekty mají prvky, tj. má smysl psát $s \in \mathcal{F}(U)$, a morfismy v C jsou zobrazení těchto prvků (například již zmíněná kategorie cAs), píšeme často jednoduše $\mathcal{F}(\imath^U_V)(s) =: s|_V$.

Definice 1.2.3. Buďte X topologický prostor, C kategorie, jejíž objekty mají prvky a jejíž morfismy jsou zobrazeními těchto prvků. Buď dále $\mathcal{F} : \mathsf{Open}(X) \to \mathsf{C}$ předsnop na X. Potom řekneme, že $\mathcal{F}$ je **snop** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ splňuje následující dva axiomy:

I. (Axiom lokality)
Pro libovolné $U \in \mathrm{Op}(X)$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathrm{Op}(U)$ pokrytí U a $s, r \in \mathcal{F}(U)$ platí

$$(\,\forall \alpha \in I\,)\ (\, s|_{U_\alpha} = r|_{U_\alpha}\,) \implies (\, s = r\,). \tag{1.7}$$

II. (Lepící axiom)
Pro libovolné $U \in \mathrm{Op}(X)$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathrm{Op}(U)$ pokrytí U a kolekci prvků $\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$, platí

$$\begin{aligned} &(\,\forall \alpha, \beta \in I,\, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\,)\ (\, s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}\,) \\ &\implies (\,\exists s \in \mathcal{F}(U)\,)\ (\,\forall \alpha \in I\,)\ (\, s|_{U_\alpha} = s_\alpha\,). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Příklad 1.2.4. Mějme hladkou varietu M. Definujme přiřazení $\mathcal{C}^\infty_M : \mathsf{Open}(M) \to \mathsf{cAs}$, které každé množině $U \in \mathrm{Op}(M)$ přiřadí $\mathcal{C}^\infty_M(U)$ - komutativní algebru hladkých funkcí na U a každé inkluzi $\imath^U_V$ přiřadí klasickou „funkční“ restrikci $\mathcal{C}^\infty_M(\imath^U_V) : \mathcal{C}^\infty_M(U) \to \mathcal{C}^\infty_M(V)$. Potom $\mathcal{C}^\infty_M$ je snop na M a nazývá se **snop hladkých funkcí na varietě M**.

Důkaz. To, že $\mathcal{C}^\infty_M$ je předsnop je jasné. Abychom ukázali, že jde skutečně o snop, je třeba ověřit axiomy I a II z definice 1.2.3, což jsou ale pro hladké funkce na varietě dobře známé vlastnosti. $\square$

Definice 1.2.5. Pro každý topologický prostor X a kategorii C zavádíme **kategorii předsnopů** na X s hodnotami v C, značenou $\mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$, následovně: objekty této kategorie jsou předsnopy na X s hodnotami v C a morfismy jsou jejich přirozené transformace.

Jinými slovy, máme-li $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$, potom $\mathscr{N} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je **morfismus předsnopů** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{N} = \{\mathscr{N}_U\}_{U\in\mathrm{Op}(X)}$, kde $\mathscr{N}_U \in \mathsf{C}\,(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ a navíc pro všechna $V, W \in \mathrm{Op}(X)$, $W \subseteq V$, diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\mathscr{N}_V"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\imath^V_W)"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\mathcal{G}(\imath^V_W)"] \\ \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\mathscr{N}_W"] & \mathcal{G}(W) \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

komutuje. Máme-li další $\mathcal{H} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$ a $\mathscr{M} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismus předsnopů, potom $\mathscr{M} \circ \mathscr{N} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ zavádíme jako

$$(\mathscr{M} \circ \mathscr{N})_U := \mathscr{M}_U \circ \mathscr{N}_U, \tag{1.10}$$

pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$.

Ještě zmíníme, že $\mathscr{N} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ nazveme **isomorfismem** $\overset{def}{\iff}$ je $\mathscr{N}_U$ isomorfismus pro pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$. Pokud je C navíc kategorie, jejíž objekty mají prvky a jejíž morfismy jsou zobrazení těchto prvků, potom **kategorii snopů** na X s hodnotami v C značíme jako $\mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})$ a zavádíme ji jako plnou podkategorii kategorie $\mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$.

Definice 1.2.6. Mějme X topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{cAs})$. Potom pro každé $x \in X$ definujeme **stonek** předsnopu $\mathcal{F}$ v bodě x, jako

$$\mathcal{F}_x := \left(\bigsqcup_{U \in \mathrm{Op}_x(X)} \mathcal{F}(U) \right) \Big/ \sim \, , \tag{1.11}$$

kde $\sim$ je ekvivalence definovaná následovně: mějme $U, V \in \mathrm{Op}_x(X), s \in \mathcal{F}(U), r \in \mathcal{F}(V)$. Potom

$$s \sim r \overset{def}{\iff} (\, \exists W \in \mathrm{Op}_x(X),\, W \subseteq U \cap V \,)\, (\, s|_W = r|_W \,). \tag{1.12}$$

Prvek stonku $\mathcal{F}_x$, tj. třída ekvivalence $[s]$, kde $s \in \mathcal{F}(U)$ pro nějaké $U \in \mathrm{Op}_x(X)$, se typicky značí jako $[s]_x$.

Poznámka 1.2.7. Při stejném značení buď $s \in \mathcal{F}(U)$ pro $U \in \mathrm{Op}_x(X)$. Potom z definice stonku je jasné, že

$$[s]_x = [s|_V]_x \, , \tag{1.13}$$

Pro každé $V \in \mathrm{Op}_x(U)$.

Tvrzení 1.2.8. *Mějme X topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{cAs})$. Potom se pro každé $x \in X$ na stonku $\mathcal{F}_x$ přirozeně indukuje struktura komutativní algebry a pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ je přiřazení $s \in \mathcal{F}(U) \mapsto [s]_x \in \mathcal{F}_x$ algebraický homomorfismus.*

Důkaz. Buďte $\lambda \in \mathbb{R}$, $[s]_x, [r]_x \in \mathcal{F}_x$ a $U, V \in \mathrm{Op}_x(X)$ takové, že $s \in \mathcal{F}(U), r \in \mathcal{F}(V)$. Pak zavádíme

$$\lambda\, [s]_x := [\lambda s]_x \, , \tag{1.14a}$$
$$[s]_x + [r]_x := [s|_{U\cap V} + r|_{U \cap V}]_x \, , \tag{1.14b}$$
$$[s]_x\, [r]_x := [s|_{U\cap V}\, r|_{U\cap V}]_x \, . \tag{1.14c}$$

Ukažme korektnost těchto definic. Jsou-li $\tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $\tilde{r} \in \mathcal{F}(\tilde{V})$, kde $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathrm{Op}_x(X)$ a zároveň platí $s \sim \tilde{s}$, $r \sim \tilde{r}$. Nechť $S, R \in \mathrm{Op}_x(X)$ jsou ty množiny, pro které platí $s|_S = \tilde{s}|_S$, resp. $r|_R = \tilde{r}|_R$. Pak, jelikož restrikce jsou algebraické homomorfismy, jistě platí

$$(\lambda s)|_S = \lambda s|_S = \lambda \tilde{s}|_S = (\lambda \tilde{s})|_S, \tag{1.15}$$

a tedy $\lambda s \sim \lambda \tilde{s}$, což dokazuje korektnost (1.14a). Jelikož restrikce navíc splňují také vztah (1.6b) a platí, že $S \cap R \subseteq U \cap V \cap \tilde{U} \cap \tilde{V}$, tak zjišťujeme

$$\begin{aligned}(s|_{U\cap V} + r|_{U\cap V})|_{S\cap R} = s|_{S\cap R} + r|_{S\cap R} &= \tilde{s}|_{S\cap R} + \tilde{r}|_{S\cap R} \\ &= (\tilde{s}|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}} + \tilde{r}|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}})|_{S\cap R}\, ,\end{aligned} \tag{1.16}$$

tedy $s|_{U\cap V} + r|_{U\cap V} \sim \tilde{s}|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}} + \tilde{r}|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}}$, což dokazuje korektnost (1.14b). Korektnost (1.14c) by se ukázala obdobně. Komutativita a asociativita takto vzniknuvší algebry potom plyne z komutativity a asociativity algeber $\mathcal{F}(U)$ pro všechna $U \in \mathrm{Op}_x(X)$. Dále vidíme, že roli neutrálního multiplikativního elementu hraje třída ekvivalence $[1]_x$, kde 1 značí neutrální multiplikativní element algebry $\mathcal{F}(V)$ pro nějaké $V \in \mathrm{Op}_x(X)$. Fakt, že přiřazení $s \in \mathcal{F}(U) \mapsto [s]_x \in \mathcal{F}_x$ je algebraický homomorfismus potom plyne přímo z definic (1.14). $\square$

Pokud tedy máme topologický prostor a na něm předsnop s hodnotami v komutativních algebrách, potom stonek v každém bodě „zdědí“ strukturu komutativní algebry. Speciálně má tedy také strukturu komutativního okruhu.

Poznámka 1.2.9. Připomeňme si, že komutativní okruh se nazývá **lokální**, právě pokud obsahuje unikátní maximální ideál ([11], [2]). Mějme R, S dva lokální okruhy a $\psi : R \to S$ okruhový homomorfismus. Pokud ψ navíc zobrazuje každý neinvertibilní element v R na neinvertibilní element v S, pak jej nazveme **morfismem lokálních okruhů**. Lokálními okruhy se budeme více zabývat v kapitole 2. Nakonec poznamenejme, že každý okruhový izomorfismus mezi dvěma lokálními okruhy je automaticky také izomorfismem lokálních okruhů.

Definice 1.2.10. Buďte X topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{cAs})$. Nechť dále pro každé $x \in X$ platí, že $\mathcal{F}_x$, pokud je na něj nahlíženo jako na okruh, je lokální okruh. Potom dvojici $(X, \mathcal{F})$ nazveme **lokálně okruhový prostor**[6].

Příklad 1.2.11. Ukažme, že při značení z příkladu 1.2.4 je $(M, \mathcal{C}^\infty_M)$ lokálně okruhový prostor, to jest pro libovolné $x \in M$ je stonek $\mathcal{C}^\infty_{M,x}$ lokální okruh. K tomu využijeme, že okruh je lokální, právě když jeho neinvertibilní prvky tvoří aditivní grupu, viz opět [2] nebo věta 2.1.24 aplikovaná na triviálně gradovaný[7] okruh.

Tvrdíme, že $[f]_x \in \mathcal{C}^\infty_{M,x}$ je invertibilní, právě když $f(x) \neq 0$. Skutečně, v takovém případě totiž ze spojitosti existuje $U \in \mathrm{Op}_x(X)$ takové, že f není na U nikde rovna nule. Pak ale $[f]_x [1/f|_U]_x = [1]_x$. Naopak, pokud $f(x) = 0$, je jasné, že f invertibilní není. Množina neinvertibilních prvků stonku $\mathcal{C}^\infty_{M,x}$ je tedy $\{ [f]_x \mid f(x) = 0 \}$, což je zjevně množina uzavřená na sčítání a tedy aditivní grupa, což jsme měli ukázat.

Na libovolném topologickém prostoru jsme zavedli předsnopy, stonky a morfismy předsnopů. Ukazuje se, že každý morfismus předsnopů zároveň kanonickým způsobem indukuje morfismus stonků, jak shrnuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.2.12. *Buďte X topologický prostor, $x \in X$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{cAs})$ a $\mathscr{N} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismus předsnopů. Potom zobrazení $\mathscr{N}_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, definované pro každé $[s]_x \in \mathcal{F}_x$ jako*

$$\mathscr{N}_x [s]_x := [\mathscr{N}_U s]_x \in \mathcal{G}_x, \tag{1.17}$$

kde $U \in \mathrm{Op}_x(X)$ a $s \in \mathcal{F}(U)$, je dobře definovaný algebraický homomorfismus. Je-li navíc $\mathscr{N}$ izomorfismus, pak $\mathscr{N}_x$ je také izomorfismus.

Důkaz. Mějme $\tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $\tilde{U} \in \mathrm{Op}_x(X)$, $\tilde{s} \sim s$. Buď $V \in \mathrm{Op}_x(X), V \subseteq U \cap \tilde{U}$ ta množina, že $s|_V = \tilde{s}|_V$. Potom

$$(\mathscr{N}_U s)|_V \equiv \mathcal{G}(\imath^U_V)\mathscr{N}_U s = \mathscr{N}_V \mathcal{F}(\imath^U_{U\cap\tilde{U}}) s \equiv \mathscr{N}_V s|_V = \mathscr{N}_V \tilde{s}|_V = (\mathscr{N}_{\tilde{U}} \tilde{s})|_V, \tag{1.18}$$

kde v druhé a v poslední rovnosti jsme využili komutativitu (1.9). Ukázali jsme tedy, že $\mathscr{N}_U s \sim \mathscr{N}_{\tilde{U}} \tilde{s}$. Fakt, že $\mathscr{N}_x$ je algebraický homomorfismus, resp. izomorfismus, potom snadno plyne z definice příslušných operací na stoncích a z toho, že $\mathscr{N}_U$ je algebraický homomorfismus, resp. izomorfismus pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$. $\square$

[6] Anglicky „locally ringed space“.

[7] Gradované okruhy zavádíme v kapitole 2.

Definice 1.2.13. Mějme nyní X, Y dva topologické prostory a $g : X \to Y$ spojité zobrazení. Mějme navíc $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{cAs})$. Potom předsnop $g_*\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(Y, \mathsf{cAs})$ definovaný jako

$$(g_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(g^{-1}(U)), \tag{1.19a}$$

$$(g_*\mathcal{F})(\imath^U_V) := \mathcal{F}(\imath^{g^{-1}(U)}_{g^{-1}(V)}), \tag{1.19b}$$

pro všechna $U, V \in \mathrm{Op}(Y), V \subseteq U$, se nazývá **přímý obraz předsnopu** $\mathcal{F}$.

Poznámka. (i) $g_*\mathcal{F}$ je vskutku dobře definovaný předsnop, jak se snadno ověří s využitím spojitosti zobrazení g a toho, že pro všechna $V \subseteq U \in \mathrm{Op}(Y)$ platí $g^{-1}(V) \subseteq g^{-1}(U)$.

(ii) Podobně snadno se ukáže, že je-li $\mathcal{F}$ snop, potom $g_*\mathcal{F}$ je také snop.

Tvrzení 1.2.14. *Při stejném značení je pro každé $x \in X$ zobrazení $g^x : (g_*\mathcal{F})_{g(x)} \to \mathcal{F}_x$ působící na každé $[s]_{g(x)} \in (g_*\mathcal{F})_{g(x)}$ jako*

$$g^x \, [s]_{g(x)} := [s]_x \in \mathcal{F}_x, \tag{1.20}$$

dobře definovaný algebraický homomorfismus. Je-li navíc g homeomorfismus, pak g^x je bijekce.

Důkaz. V první řadě je třeba říci, že výše uvedená definice dává smysl: máme-li $[s]_{g(x)} \in (g_*\mathcal{F})$, znamená to, že existuje $U \in \mathrm{Op}_{g(x)}(Y)$ taková, že $s \in g_*\mathcal{F}(U) \equiv \mathcal{F}(g^{-1}(U))$. Jelikož však $g^{-1}(U) \in \mathrm{Op}_x(X)$, má smysl uvažovat $[s]_x \in \mathcal{F}_x$. Nezávislost na výběru kandidáta, linearitu a zachovávání součinu lze potom ověřit přímočaře z příslušných definic. Nakonec, buď $1 \in g_*\mathcal{F}(U)$ pro nějaké $U \in \mathrm{Op}_{g(x)}(Y)$, potom z nezávislosti na výběru reprezentanta ihned vidíme, že $g^x[1]_{g(x)} = [1]_x$, což z g^x dělá algebraický homomorfismus. Všimněme si, že pokud je g homeomorfismus, pak $(g^{-1})_*(g_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Je potom snadné ověřit, že $\left(g^{-1}\right)^{g(x)}$ je oboustraná inverze pro g^x. $\square$

Poznámka. Mějme nyní X, Y dva topologické prostory, $g : X \to Y$ spojité zobrazení, $\mathcal{F}$ předsnop na X a $\mathcal{G}$ předsnop na Y. Buď navíc $\mathscr{N} : \mathcal{G} \to g_*\mathcal{F}$ morfismus předsnopů (jak $\mathcal{G}$ tak $g_*\mathcal{F}$ jsou předsnopy na Y, může tedy mezi nimi existovat morfismus). Pro každé $x \in X$ jsme zavedli morfismus stonků $g^x : (g_*\mathcal{F})_{g(x)} \to \mathcal{F}_x$ a pro každé $y \in Y$ morfismus stonků $\mathscr{N}_y : \mathcal{G}_y \to (g_*\mathcal{F})_y$. Pro každé $x \in X$ nyní tyto morfismy můžeme složit dohromady za vzniku algebraického homomorfismu

$$g^x \circ \mathscr{N}_{g(x)} \, : \mathcal{G}_{g(x)} \to \mathcal{F}_x. \tag{1.21}$$

Pro $[s]_{g(x)} \in \mathcal{G}_{g(x)}$, kde $s \in \mathcal{G}(U)$ a $U \in \mathrm{Op}_{g(x)}(Y)$, tedy dostaneme

$$g^x \circ \mathscr{N}_{g(x)} \, [s]_{g(x)} = [\mathscr{N}_U s]_x \, . \tag{1.22}$$

Nyní máme vše potřebné pro zavedení morfismů lokálně okruhových prostorů.

Definice 1.2.15. Mějme $(X, \mathcal{F})$ a $(Y, \mathcal{G})$ dva lokálně okruhové prostory. Označme $\varphi := (\underline{\varphi}, \varphi^*)$, kde $\underline{\varphi} : X \to Y$ je spojité zobrazení a $\varphi^* : \mathcal{G} \to \underline{\varphi}_* \mathcal{F}$ je morfismus snopů. Nechť navíc platí, že pro každé $x \in X$ je zobrazení

$$(\underline{\varphi})^x \circ (\varphi^*)_{\underline{\varphi}(x)} : \mathcal{G}_{g(x)} \to \mathcal{F}_x \tag{1.23}$$

definované stejně jako v předchozí poznámce, morfismem lokálních okruhů. Potom řekneme, že $\varphi : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ je **morfismus lokálně okruhových prostorů**.

Pro každý morfismus lokálně okruhových prostorů $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ budeme značit

$$(\underline{\varphi})^x \circ (\varphi^*)_{\underline{\varphi}(x)} =: \varphi_x. \tag{1.24}$$

Je třeba zavést skládání morfismů lokálně okruhových prostorů: buď $(Z, \mathcal{H})$ další lokálně okruhový prostor a $\chi : (Y, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{H})$ další morfismus. Potom $\chi \circ \varphi = (\,\underline{\chi \circ \varphi}, (\chi \circ \varphi)^*\,)$, kde $\underline{\chi \circ \varphi} : X \to Z$ spojité zobrazení zavádíme jako

$$\underline{\chi \circ \varphi} := \underline{\chi} \circ \underline{\varphi}\,, \tag{1.25}$$

a $(\chi \circ \varphi)^* : \mathcal{H} \to \underline{\chi \circ \varphi}_* \mathcal{F}$ morfismus snopů zavádíme pro každé $U \in \mathrm{Op}(Z)$ jako

$$(\chi \circ \varphi)^*_U := \varphi^*_{\underline{\chi}^{-1}(U)} \circ \chi^*_U\,. \tag{1.26}$$

Tato definice dává smysl, neboť $\chi^*_U : \mathcal{H}(U) \to \mathcal{G}(\,\underline{\chi}^{-1}(U))$ a

$$\varphi^*_{\underline{\chi}^{-1}(U)} : \mathcal{G}(\,\underline{\chi}^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(\,\underline{\varphi}^{-1}(\,\underline{\chi}^{-1}(U))) \equiv \mathcal{F}((\underline{\chi \circ \varphi})^{-1}(U))). \tag{1.27}$$

Zbývá ověřit, že pro každé $x \in X$ je zobrazení

$$(\chi \circ \varphi)_x : \mathcal{H}_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))} \to \mathcal{F}_x \tag{1.28}$$

morfismem lokálních okruhů. Pozorujme, co se stane, když tímto zobrazením zobrazíme prvek $[s]_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))} \in \mathcal{H}_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))}$, kde $s \in \mathcal{H}(U)$:

$$\begin{aligned}
(\chi \circ \varphi)_x\,[s]_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))} &\overset{(1.22)}{=} [(\chi \circ \varphi)^*_U\, s]_x \\
&\overset{(1.26)}{=} \left[\varphi^*_{\underline{\chi}^{-1}(U)}\,(\chi^*_U s)\right]_x \\
&\overset{(1.22)}{=} (\underline{\varphi})^x\,(\varphi^*)_{\underline{\varphi}(x)}\,[\chi^*_U s]_{\underline{\varphi}(x)} \\
&\overset{(1.22)}{=} (\underline{\varphi})^x\,(\varphi^*)_{\underline{\varphi}(x)}\,(\underline{\chi})^{\underline{\varphi}(x)}\,(\chi^*)_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))}\,[s]_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))} \\
&\overset{(1.24)}{=} \left(\varphi_x \circ \chi_{\underline{\varphi}(x)}\right)[s]_{\underline{\chi}(\underline{\varphi}(x))}\,,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

a tedy

$$(\chi \circ \varphi)_x = \varphi_x \circ \chi_{\underline{\varphi}(x)}. \tag{1.30}$$

Složení dvou morfismů lokálních okruhů je ale opět morfismus lokálních okruhů.

Isomorfismem lokálních okruhových prostorů myslíme takové $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)$, kde $\underline{\varphi}$ je homeomorfismus a φ^* je isomorfismus snopů. **Kategorii lokálně okruhových prostorů** s takto zavedenými morfismy značíme LRS.

Příklad 1.2.16. Pokračujme v příkladu 1.2.11. Mějme druhou hladkou varietu N a na ní snop hladkých funkcí $\mathcal{C}^\infty_N$. Buď dále $\underline{\varphi} : M \to N$ hladké zobrazení. Z předchozího příkladu víme, že jak $(M, \mathcal{C}^\infty_M)$ tak $(N, \mathcal{C}^\infty_N)$ jsou lokálně okruhové prostory. Zavedeme mezi nimi morfismus $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)$, kde $\varphi^* : \mathcal{C}^\infty_N \to \underline{\varphi}_* \mathcal{C}^\infty_M$ definujeme pro každé $U \in \mathrm{Op}(N)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_N(U)$ jako

$$\varphi^*_U f := f \circ \underline{\varphi}|_{\underline{\varphi}^{-1}(U)} \in \mathcal{C}^\infty_M\left(\underline{\varphi}^{-1}(U)\right), \tag{1.31}$$

tedy jako dobře známý pullback funkce. Ověřme, že zobrazení $\varphi_x : \mathcal{C}^\infty_{N,\underline{\varphi}(x)} \to \mathcal{C}^\infty_{M,x}$ je morfismus lokálních okruhů. Pro každou $f \in \mathcal{C}^\infty_N(U)$ dostáváme

$$\varphi_x \, [f]_{\underline{\varphi}(x)} = \left[f \circ \underline{\varphi}|_{\underline{\varphi}^{-1}(U)} \right]_x . \tag{1.32}$$

Z příkladu 1.2.11 víme, že $[f]_{\underline{\varphi}(x)}$ není invertibilní, právě když $f(\underline{\varphi}(x)) = 0$. To ale znamená, že $(f \circ \underline{\varphi}|_{\underline{\varphi}^{-1}(U)})(x) = 0$, a tedy $\varphi_x \, [f]_{\underline{\varphi}(x)}$ není invertibilní v $\mathcal{C}^\infty_{M,x}$.

Ukazuje se, že výše uvedený způsob zavedení morfismu LRS mezi dvěma hladkými varietami je jediný možný, jak formalizuje následující věta.

Věta 1.2.17. *Buďte M, N dvě hladké variety a $\mathcal{C}^\infty_M$, $\mathcal{C}^\infty_N$ jejich snopy hladkých funkcí. Buď dále $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : (M, \mathcal{C}^\infty_M) \to (N, \mathcal{C}^\infty_N)$ libovolný morfismus lokálně okruhových prostorů. Potom už je nutně $\underline{\varphi}$ hladké a φ^* má tvar (1.31).*

Důkaz. Mějme libovolné $U \in \mathrm{Op}(N)$, $\underline{\varphi}^{-1}(U) \neq \emptyset$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_N(U)$. Potom pro každé $x \in \underline{\varphi}^{-1}(U)$ je jistě $g := f - f(\underline{\varphi}(x)) \in \mathcal{C}^\infty_N(U)$. Navíc, jelikož $g(\underline{\varphi}(x)) = 0$, je $[g]_{\underline{\varphi}(x)}$ neinvertibilní prvek stonku $\mathcal{C}^\infty_{N,\underline{\varphi}(x)}$. Z předpokladu je tedy také $\varphi_x \, [g]_{\underline{\varphi}(x)} = [\varphi^*_U g]_x$ neinvertibilní prvek stonku $\mathcal{C}^\infty_{M,x}$, což znamená, že $(\varphi^*_U g)(x) = 0$. Jelikož φ^*_U je homomorfismus algeber, dostáváme

$$0 = (\varphi^*_U g)(x) = \left(\varphi^*_U \left(f - f(\underline{\varphi}(x)) \right) \right)(x) = (\varphi^*_U f)(x) - f(\underline{\varphi}(x)) . \tag{1.33}$$

Jelikož $x \in \underline{\varphi}^{-1}(U)$ bylo libovolné, máme

$$\left(\forall x \in \underline{\varphi}^{-1}(U) \right) \; \left((\varphi^*_U f)(x) = (f \circ \underline{\varphi})(x) \right) , \tag{1.34}$$

což znamená, že $\varphi^*_U f = f \circ \underline{\varphi} \;\; \in \mathcal{C}^\infty_M(\underline{\varphi}^{-1}(U))$. Konkrétně za f můžeme dosadit libovolné souřadnicové funkce na N, z čehož plyne hladkost $\underline{\varphi}$. $\square$

Poznámka 1.2.18. Buď X topologický prostor a na něm snop $\mathcal{F}$. Potom každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ je samo o sobě topologickým prostorem (s indukovanou topologií). Každá množina otevřená v U bude zároveň otevřená v X, což umožňuje ze snopu $\mathcal{F}$ na X snadno vyrobit snop $\mathcal{F}|_U$ na U jednoduše tak, že pro každé $W, V \in \mathrm{Op}(U)$, $W \subseteq V$ definujeme

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V), \tag{1.35a}$$

$$\mathcal{F}|_U(\imath^V_W) := \mathcal{F}(\imath^V_W). \tag{1.35b}$$

Tvrzení 1.2.19. *Buď $(X, \mathcal{F})$ lokálně okruhový prostor. Potom pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ je $(U, \mathcal{F}|_U)$ také lokálně okruhový prostor. Dále existuje morfismus LRS $i : (U, \mathcal{F}|_U) \to (X, \mathcal{F})$, pro který navíc platí, že pro každé $x \in U$ je i_x algebraický izomorfismus.*

Důkaz. Je tedy třeba definovat $\underline{i} : U \to X$ spojitou funkci a $i^* : \mathcal{F} \to \underline{i}_* \, \mathcal{F}|_U$ morfismus snopů. $\underline{i}$ definujeme přirozeně jako kanonickou inkluzi, to jest $\underline{i}(x) = x$ pro všechna $x \in U$. Dále si všimněme, že pro všechna $V \in \mathrm{Op}(X)$ máme

$$\underline{i}_* \, \mathcal{F}|_U \, (V) = \mathcal{F}|_U \, (\underline{i}^{-1}(V)) = \mathcal{F}|_U \, (U \cap V) = \mathcal{F}(U \cap V), \tag{1.36}$$

a tedy pro každé $V \in \mathrm{Op}(X)$ můžeme definovat $i_V^* := \mathcal{F}(\imath_{U\cap V}^V)$, to jest jako restrikci. Je snadné ukázat, že takto zavedené i^* je dobře definovaný morfismus snopů. Podívejme se nyní na zobrazení stonků $i_x : \mathcal{F}_{\underline{i}(x)} \to (\mathcal{F}|_U)_x$ pro libovolné $x \in U$. Pro každé $V \in \mathrm{Op}_{\underline{i}(x)}(X)$ a $s \in \mathcal{F}(V)$ dostaneme

$$i_x \, [s]_{\underline{i}(x)} = [s|_{U\cap V}]_x \,, \tag{1.37}$$

z čehož lze přímo nahlédnout, že se jedná o izomorfismus. Skutečně, jeho oboustranná inverze $(i_x)^{-1}$ by bylo zobrazení, které pro každé $W \in \mathrm{Op}_x(U)$ a $q \in \mathcal{F}|_U$ působí jako

$$(i_x)^{-1} \, [q]_x := [q]_{\underline{i}(x)} \,. \tag{1.38}$$

To, že se jedná o oboustrannou inverzi, potom plyne z poznámky 1.2.7. Pro každé $x \in U$ je tedy $i_x : \mathcal{F}_{\underline{i}(x)} \to (\mathcal{F}|_U)_x$ izomorfismus algeber a tedy i okruhů, přičemž $\mathcal{F}_{\underline{i}(x)}$ je dle předpokladu lokální okruh. Podle tvrzení 2.1.28 (aplikovaného na triviálně gradovaný okruh) je potom $(\mathcal{F}|_U)_x$ také lokální okruh a tudíž $(U, \mathcal{F}|_U) \in \mathsf{LRS}$. □

Definice 1.2.20. Buď $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mathbb{R}^n$ je hladká varieta, jejíž snop hladkých funkcí značíme $\mathcal{C}_n^\infty := \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty$. Z příkladu 1.2.11 víme, že $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_n^\infty) \in \mathsf{LRS}$. Z poznámky 1.2.18 potom plyne, že $(U, \mathcal{C}_n^\infty|_U) \in \mathsf{LRS}$ pro každou $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^n)$. Těmto speciálním lokálně okruhovým prostorům říkáme **domény**.

Věta 1.2.21. *Následuje definice hladké variety, která je ekvivalentní s obvykle uváděnou definicí, to jest například definicí v [7]. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $(X, \mathcal{F}) \in \mathsf{LRS}$, kde X je Hausdorffův prostor splňující druhý axiom spočetnosti, a nechť existuje $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ otevřené pokrytí prostoru X takové, že pro každé $\alpha \in I$ je lokálně okruhový prostor $(U_\alpha, \mathcal{F}|_{U_\alpha})$ izomorfní nějaké doméně $(\hat{U}_\alpha, \mathcal{C}_n^\infty|_{\hat{U}_\alpha})$. Potom $(X, \mathcal{F})$ nazveme **hladká varieta** dimenze n.*

Důkaz. Příklady 1.2.4, 1.2.11 a 1.2.16 nám říkají, že každá „klasicky“ zavedená varieta tuto novou definici splňuje. Skutečně, pro varietu $(M, \mathcal{C}_M^\infty)$ stačí vzít atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ a zkonstuovat pro každé α izomorfismus lokálně okruhových prostorů $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \mathcal{C}_M^\infty|_{U_\alpha}) \to \big(\psi(U_\alpha), \mathcal{C}_n^\infty|_{\psi(U_\alpha)}\big)$ stejně jako v příkladu 1.2.16, kde za $\underline{\varphi}_\alpha$ volíme ψ_α.

Naopak, mějme $(X, \mathcal{F})$ ze znění věty. Buďte $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ izomorfismy lokálních okruhů $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \mathcal{F}|_{U_\alpha}) \to (\hat{U}_\alpha, \mathcal{C}_n^\infty|_{\hat{U}_\alpha})$. Tvrdíme, že $\{(U_\alpha, \underline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je hladký atlas na X. Konkrétně je třeba ověřit, že pro každé $\alpha, \beta \in I$ takové, že $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, je

$$\underline{\varphi}_{\beta\alpha} := \underline{\varphi}_\beta \circ \underline{\varphi}_\alpha^{-1}|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})} \tag{1.39}$$

hladké zobrazení. Za tímto účelem definujme dva pomocné morfismy $\chi, \eta \in \hom(\mathsf{LRS})$,

$$\Big(\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta}), \mathcal{C}_n^\infty|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})}\Big) \xrightarrow{\ \chi\ } (U_{\alpha\beta}, \mathcal{F}|_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\ \eta\ } \Big(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta}), \mathcal{C}_n^\infty|_{\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})}\Big)\,, \tag{1.40}$$

pro všechna $V \in \mathrm{Op}(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})),\ W \in \mathrm{Op}(U_{\alpha\beta})$ jako

$$\underline{\eta} := \underline{\varphi}_\beta|_{U_{\alpha\beta}}, \quad \eta_V^* := \varphi_{\beta,V}^*, \tag{1.41}$$

$$\underline{\chi} := (\underline{\varphi}_\alpha|_{U_{\alpha\beta}})^{-1}, \quad \chi_W^* := (\varphi_\alpha^*|_{\underline{\varphi}_\alpha(W)})^{-1}. \tag{1.42}$$

Potom $\eta \circ \chi$ je morfismus lokálně okruhových prostorů, přičemž $\underline{\eta \circ \chi}$ je podle věty 1.2.17 hladké zobrazení. Důkaz tím končí, neboť $\underline{\eta \circ \chi} = \underline{\varphi}_{\beta\alpha}$. □

Kapitola 2

Gradovaná algebra

2.1 Lokální gradované okruhy

Cílem této podkapitoly je zavést gradované okruhy, vyslovit některá tvrzení známá z obecné algebry a ověřit jejich platnost v gradovaném případě. Zejména tak činí následováním publikace [2].

Definice 2.1.1. Buď $\{M_k\}_k \in \mathbb{Z}$ posloupnost množin číslovaných celými čísly. Tuto posloupnost nazveme **gradovanou množinou** a značíme jednoduše $M := \{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Množiny M_k nazveme **komponentními množinami** gradované množiny M. Píšeme-li $m \in M$, máme tím na mysli, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $m \in M_k$. Toto k nazveme **stupněm prvku** $m \in M$ a značíme $|m| := k$.

Poznámka. Značíme-li pro dvě gradované množiny $M \subseteq N$, myslíme tím, že $(\forall k \in \mathbb{Z})$ $(M_k \subseteq N_k)$.

Definice 2.1.2. Gradovanou abelovskou grupou myslíme gradovanou množinu, jejíž komponentní množiny jsou abelovské grupy. Pokud $H = \{H_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $G = \{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ jsou dvě gradované abelovské grupy, řekneme že H je **gradovanou abelovskou podgrupou** G právě když $\forall k \in \mathbb{Z},\ H_k$ je podgrupou G_k. Píšeme $H \leq G$.

Poznámka. Píšeme-li někde $0 \in G$, myslíme tím, že 0 je neutrální element nějaké grupy G_k, kde $k = |0| \in \mathbb{Z}$. Znak 0 tedy v tomto textu neznačí jedinečný prvek.

Definice 2.1.3. Buďte R gradovaná abelovská grupa, $1 \in R_0$, $(\mu_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ soubor biaditivních zobrazení $\mu_{ij} : R_i \times R_j \to R_{i+j}$ a nechť $\forall r \in R_i,\ \forall s \in R_j,\ \forall q \in R_\ell$ platí:

$$\mu_{0j}(1, s) = s,\ \ \mu_{i0}(r, 1) = r, \tag{2.1a}$$

$$\mu_{i(j+\ell)}(r, \mu_{j\ell}(s, q)) = \mu_{(i+j)\ell}(\mu_{ij}(r, s), q). \tag{2.1b}$$

Potom $(R, (\mu_{ij}), 1)$ nazveme **gradovaným okruhem**.

Poznámka. i. Při stejném značení lze vidět, že z komponentních množin pouze R_0 má strukturu okruhu.

ii. Jak je zvykem u klasických okruhů, značíme multiplikativně $\mu_{ij}(r, s) =: rs$.

iii. Prvek $1 \in R$ je určen jednoznačně. Skutečně: buď $\tilde{1}$ jiný prvek splňující (2.1a). Potom $1 = 1\tilde{1} = \tilde{1}$.

iv. Pro dva prvky $r, s \in R$ je tedy vždy definován jejich součin $rs \in R$, kde $|rs| = |r| + |s|$. Jejich součet $r + s$ je však definován pouze pokud $|r| = |s|$.

Definice 2.1.4. Buď R gradovaný okruh. Potom $I \leq R$ nazveme **levým ideálem** v R $\overset{def}{\iff}$ $(\forall r \in R)\ (rI_k \subseteq I_{k+|r|})$. Pokud zároveň platí $(\forall r \in R)\ (I_k r \subseteq I_{k+|r|})$, nazveme I **oboustranným ideálem** (nebo jen ideálem).

Definice 2.1.5. Buď R gradovaný okruh, M gradovaná abelovská grupa. $\{\varphi_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ množina biaditivních zobrazení $\varphi_{ij} : R_i \times M_j \to M_{i+j}$, splňující $\forall r, s \in R,\ \forall m \in M$

$$\varphi_{(|r|+|s|)|m|}(rs, m) = \varphi_{|r|(|s|+|m|)}(r, \varphi_{|s||m|}(s, m)), \tag{2.2a}$$

$$\varphi_{0|m|}(1, m) = m. \tag{2.2b}$$

Potom $(M, (\varphi_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}})$ nazveme levým **modulem** nad gradovaným okruhem R (neboli levým R-modulem). Pro všechny $r \in R$ a $m \in M$ píšeme $rm := \varphi_{|r||m|}(r, m)$.

Definice 2.1.6. Buď R gradovaný okruh a M levý R-modul. Potom $N \leq M$ nazveme **podmodulem** modulu M $\overset{def}{\iff}$ $(\forall r \in R)\ (rN \subseteq N)$ tj. N je uzavřené na násobení prvky z R. Pokud jsou jedinými podmoduly modulu M gradované množiny $\{\{0\}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a M samotné, řekneme, že M je **ireducibilní**. Gradovanou množinu $\{\{0\}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ budeme dále značit jednoduše jako 0.

Následující úsek slouží k definici lokálního gradovaného okruhu. Dále pomocí Jacobsonova radikálu a několika lemmat dokážeme větu 2.1.24 o ekvivalentních definicích lokálního gradovaného okruhu.

Poznámka. V celé podkapitole budeme písmenem R značit gradovaný okruh.

Definice 2.1.7. Maximálním (levým) ideálem v R myslíme přirozeně takový (levý) ideál $I \neq R$, že $(\forall J \neq R,\ J$ (levý) ideál v $R)\ (I \leq J \implies I = J)$. Maximálních (levých) ideálů se může v R vyskytovat více. Naopak **největším** (levým) ideálem v R myslíme takový (levý) ideál $I \neq R$, že $(\forall J \neq R,\ J$ (levý) ideál v $R)\ (J \leq I)$. Největší (levý) ideál může být v R nanejvýš jeden. Každý největší (levý) ideál je zároveň maximální.

Poznámka 2.1.8. Obdobným postupem jako u klasických okruhů lze pomocí Zornova lemmatu ukázat, že každý (levý) ideál v nenulovém gradovaném okruhu musí být obsažen v nějakém maximálním (levém) ideálu. Z toho mimo jiné plyne, že maximální (levý) ideál $I \subset R$ je největší, právě když je *jediným* maximálním (levým) ideálem v R.

Definice 2.1.9. Řekneme, že R je **lokální** $\overset{def}{\iff}$ obsahuje právě jeden maximální levý ideál.

Definice 2.1.10. Průnik všech maximálních levých ideálů gradovaného okruhu R označíme $\mathrm{J}(R)$ a nazveme **Jacobsonův radikál**.

Poznámka. Stejně jako v negradovaném případě je snadné ukázat, že průnik libovolné množiny (levých) ideálů v R je opět (levý) ideál v R.

Definice 2.1.11. Buď M levý R-modul. Potom **annihilátorem** M myslíme množinu

$$\mathrm{Ann}(M) := \{r \in R \mid rM = 0\}. \tag{2.3}$$

Tvrzení 2.1.12. Ann(M) *je oboustranný ideál gradovaného okruhu* R*.*

Důkaz. Mějme $a \in \mathrm{Ann}(M)$. Potom $\forall r \in R,\ \forall m \in M$ platí:

$$\begin{aligned} (ar)m = a(rm) = 0 \ \wedge \ (ra)m = r(am) = 0, \\ \implies ar \in \mathrm{Ann}(M) \ \wedge \ ra \in \mathrm{Ann}(M). \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

Poznámka. R-modulem máme nadále na mysli vždy levý R-modul.

Definice 2.1.13. Buď I levý ideál v R. Potom symbolem R/I myslíme gradovanou abelovskou grupu, jejíž k-tá komponenta je faktorgrupa R_k/I_k. Tato gradovaná abelovská grupa se dá přirozeným způsobem chápat jako levý R-modul: pro $r, s \in R$ zavádíme $r[s] := [rs]$. Nezávadnost této definice plyne z faktu, že $\forall i \in I$, $[r(s+i)] = [rs+ri] = [rs]+[ri] = [rs]$.

Tvrzení 2.1.14. *Buď I levý ideál v R. Potom* Ann(R/I) *je největší oboustranný ideál obsažený v I.*

Důkaz. (Ann$(R/I) \subseteq I$): Mějme $a \in \mathrm{Ann}(R/I)$. Potom platí $[a] = [a \cdot 1] = a[1] = [0] \implies a \in I$.

(Ann(R/I) je největší): Buď $J \subseteq I$ libovolný ideál. Buď $j \in J$. Potom $\forall r \in R$ platí:

$$j[r] = [\underbrace{jr}_{\in J \subseteq I}] = [0] \implies j \in \mathrm{Ann}(R/I). \tag{2.5}$$

□

Lemma 2.1.15. *Buď $r \in R$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

1. $r \in \mathrm{J}(R)$.
2. $(\forall x \in R, |x| = -|r|)$ $(1 - xr$ *má levou inverzi*$)$.
3. $r \in \bigcap\limits_{M \in Q} \mathrm{Ann}(M)$*, kde Q značí množinu všech ireducibilních R-modulů.*

Důkaz. $(1 \implies 2)$: Pro spor předpokládejme, že existuje takové x stupně $-|r|$, že $1 - xr$ nemá levou inverzi. Potom $1 \notin R(1 - xr)$ a $R(1 - xr)$ je tedy vlastní levý ideál. Jako takový je ale obsažen v nějakém maximálním levém ideálu I. $R(1 - xr) \subseteq I \implies (1 - xr) \in I$. Ale také $r \in \mathrm{J}(R) \subseteq I \implies xr \in I$. Dstáváme tedy $1 - xr + xr = 1 \in I \implies I = R$. Což je spor, jelikož I byl vlastní ideál.

$(2 \implies 3)$: Opět pro spor mějme ireducibilní R-modul M, $m \in M$ takové, že $rm \neq 0$. Potom $Rrm \leq M$ a $(\forall s \in R)$ $(sRrm \subseteq Rrm)$, tedy Rrm je podmodul modulu M. Jelikož M je ireducibilní, a $0 \neq rm \in Rrm$, musí nutně $Rrm = M$. Potom ale $(\exists q \in R)$ $(qrm = m)$ tedy

$$0 = m - qrm = (1 - qr)m. \tag{2.6}$$

Jelikož ale předpokládáme, že $(1 - qr)$ má levou inverzi, dostáváme, že $m = 0$. Spor.

$(3 \implies 1)$: Mějme I libovolný maximální levý ideál a ukažme, že R/I je ireducibilní R-modul. Buď S jeho podmodul a $\pi : R \to R/I$ projekce $r \mapsto [r]$. Pak vidíme, že

$(\forall q \in R, \forall [s] \in S)\ (\pi(qs) = [qs] \in S) \implies \pi^{-1}(S)$ je levý ideál v R. Navíc, $(\forall 0 \in R)\ ((\pi^{-1}(S))_{|0|} \supseteq \pi^{-1}([0]) = I_{|0|})$

$$\begin{aligned} &\implies I \subseteq \pi^{-1}(S), \\ &\implies \pi^{-1}(S) = I \ \vee\ \pi^{-1}(S) = R, \\ &\implies Q = R/I \ \vee\ Q = \{\{[0]\}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tedy R/I je ireducibilní. Z předpokladu plyne, že $[r] = r[1] = [0]$, tedy $r \in I$, a jelikož I byl libovolný maximální levý ideál, $r \in \mathrm{J}(R)$. □

Důsledek 2.1.16. *Bod* (3) *říká, že* $\mathrm{J}(R)$ *je průnikem všech* $\mathrm{Ann}(M)$*, kde* M *je ireducibilní. Jelikož ale každý annihilátor je oboustranný ideál, okamžitě dostáváme že* $\mathrm{J}(R)$ *je vždy oboustranný ideál. Z toho mimo jiné plyne, že* $R/\mathrm{J}(R)$ *má strukturu gradovaného okruhu.*

Značení 2.1.17. Gradovanou množinu invertibilních prvků R označíme $\mathcal{U}(R)$, to jest $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{U}(R)_k := \{\, r \in R_k |\ \exists q \in R_{-k},\ rq = qr = 1 \,\}. \tag{2.8}$$

Lemma 2.1.18. $r \in \mathrm{J}(R) \iff (\forall x, y \in R, |x| + |y| = -|r|)\ (1 - xry \in \mathcal{U}(R))$.

Důkaz. ($\impliedby$): Pro volbu $y = 1$ dostaneme $(\forall x \in R, |x| = -|r|)\ (1 - xr \in \mathcal{U}(R))$ a z bodu 2 lemmatu 2.1.15 plyne $r \in \mathrm{J}(R)$.
($\implies$): Mějme $1 - xry$. Jelikož $ry \in \mathrm{J}(R)$, z lemmatu 2.1.15 plyne, že $(\exists q \in R)\ (q(1 - xry) = 1)$. q má tedy pravou inverzi a platí:

$$\begin{aligned} q &= 1 + qxry \\ &= 1 - (-q)x \cdot \underbrace{ry}_{\in \mathrm{J}(R)} \implies q \in \mathcal{U}(R) \implies 1 - xry \in \mathcal{U}(R). \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

Lemma 2.1.19. $\mathrm{J}(R)$ *je největší ideál* I *v* R *takový, že*

$$1 + I \subseteq \mathcal{U}(R). \tag{2.10}$$

Důkaz. Fakt, že $1 + \mathrm{J}(R) \subseteq \mathcal{U}(R)$, plyne z lemmatu 2.1.18. Buď nyní I libovolný ideál v R splňující (2.10). Potom

$$i \in I \implies (\forall x \in R, |x| = -|i|)\ (1 - xi \in \mathcal{U}(R)) \overset{2.1.15}{\implies} i \in \mathrm{J}(R). \tag{2.11}$$

□

Lemma 2.1.20. $q \in \mathcal{U}(R) \iff [q] \in \mathcal{U}(R/\mathrm{J}(R))$.

Důkaz. Netriviální je pouze implikace zprava doleva. Mějme $\tilde{q} \in R$ takové, že $[\tilde{q}][q] = [q][\tilde{q}] = [1]$. Tedy

$$\begin{aligned} &(\exists h_1,\ h_2 \in \mathrm{J}(R))\ (\tilde{q}q = 1 + h_1 \ \wedge\ q\tilde{q} = 1 + h_2), \\ &\overset{2.1.18}{\implies} (\exists s_1, s_2 \in R)\ (s_1\tilde{q}q = 1 \ \wedge\ q\tilde{q}s_2 = 1), \end{aligned} \tag{2.12}$$

a tedy q má levou i pravou inverzi. □

Lemma 2.1.21. *Pokud je* $\mathrm{J}(R)$ *největším levým ideálem v* R*, je také největším pravým ideálem.*

Důkaz. Mějme P libovolný vlastní pravý ideál v R. Pro spor předpokládejme, že existuje $p \in P$, $p \notin \mathrm{J}(R)$. Pro takové p nutně $(\exists \tilde{p})\ (\tilde{p}p = 1)$, protože jinak by Rp byl vlastní levý ideál v R a tudíž $Rp \subseteq \mathrm{J}(R)$ a $p \in \mathrm{J}(R)$. Podívejme se blíže na prvek $p\tilde{p}$:

i. $p\tilde{p} \notin \mathrm{J}(R)$, protože jinak by $\mathrm{J}(r) \ni (p\tilde{p})p = p$,

ii. $p\tilde{p}$ musí mít levou inverzi, protože jinak by $Rp\tilde{p}$ byl levý ideál $\implies p\tilde{p} \in \mathrm{J}(R)$.

Tedy $\exists q,\ 1 = q(p\tilde{p}) = (qp)\tilde{p} \implies \tilde{p} \in \mathcal{U}(R) \implies p \in \mathcal{U}(R)$ což je spor, jelikož p byl prvek vlastního pravého ideálu. □

Definice 2.1.22. Buď R gradovaný okruh. Řekneme, že R je (nekomutativní) **gradované těleso** $\overset{def}{\iff} \mathcal{U}(R) = R \setminus 0$.

Lemma 2.1.23. *Pokud mají v gradovaném okruhu* R *všechny nenulové prvky levou inverzi, pak je* R *gradovaným tělesem.*

Důkaz. Nechť pro každý nenulový prvek v R značí vlnovka jeho levou inverzi. Mějme $0 \neq r \in R$. Potom jistě také $\tilde{r} \neq 0$ a má tedy také levou inverzi $\tilde{\tilde{r}} \in R$. Dostáváme tak

$$r\tilde{r} = \tilde{\tilde{r}}\tilde{r}r\tilde{r} = \tilde{\tilde{r}}\tilde{r} = 1, \tag{2.13}$$

tedy $\tilde{r}$ je také pravou inverzí prvku r, což znamená, že $r \in \mathcal{U}(R)$. □

Následuje gradovaná verze věty [2, theorem 19.1].

Věta 2.1.24 (Ekvivalentní definice lokálního gradovaného okruhu). *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. R *je lokální gradovaný okruh.*
2. $R/\mathrm{J}(R)$ *je gradované těleso.*
3. $\mathrm{J}(R) = R \setminus \mathcal{U}(R)$.
4. $R \setminus \mathcal{U}(R)$ *je ideál v* R.
5. $R \setminus \mathcal{U}(R) \leq R$.
6. $(\forall a, b \in R,\ |a| = |b|)\ (a + b \in \mathcal{U}(R) \implies a \in \mathcal{U}(R) \vee b \in \mathcal{U}(R))$.

Důkaz. ($1 \implies 2$): Hledáme inverzní prvek pro každé $[0] \neq [r] \in R/\mathrm{J}(R)$. Jelikož $[r] = [0] \iff r \in \mathrm{J}(R)$, tak nám dle lemmatu 2.1.20 stačí ukázat, že každé $r \notin \mathrm{J}(R)$ je invertibilní. Pokud r nemá levou inverzi $\implies Rr$ je vlastní levý ideál $\implies Rr \subseteq \mathrm{J}(R) \implies r \in \mathrm{J}(R)$. Díky lemmatu 2.1.21 můžeme postupovat stejně pro pravou inverzi.

($2 \implies 1$): Mějme I libovolný vlastní levý ideál. Potom $\forall h \in I,\ [1+h] \in \mathcal{U}(R/\mathrm{J}(R)) \overset{2.1.20}{\implies} 1 + h \in \mathcal{U}(R) \implies 1 + I \subseteq \mathcal{U}(R) \overset{2.1.19}{\implies} I \subseteq \mathrm{J}(R)$. Tedy $\mathrm{J}(R)$ je největším, to jest jediným maximálním, levým ideálem v R (viz definice 2.1.7 a poznámka 2.1.8).

$(2 \implies 3): \; R/\mathrm{J}(R)$ těleso $\overset{2.1.20}{\implies} \mathcal{U}(R) = R \setminus \mathrm{J}(R) \iff \mathrm{J}(R) = R \setminus U(R)$.

$(3 \implies 4 \implies 5 \implies 6)$: Triviální.

$(6 \implies 2): \; [r] \neq [0] \iff \exists I$ maximální levý ideál v R, takový, že $r \notin I \implies I + Rr$ je levý ideál, $I \subset I + Rr \ni r \implies I + Rr = R \implies \exists h \in I,\; q \in R$ tak, že $h + qr = 1 \in \mathcal{U}(R)$. Z předpokladu dostaneme

$$h \in \mathcal{U}(R) \;\vee\; qr \in \mathcal{U}(R). \tag{2.14}$$

Jelikož ale h invertibilní není, zjišťujeme, že r má levou inverzi. Pouze drobnou úpravou lemmatu 2.1.20 dostaneme, že také $[r]$ má levou inverzi. Jelikož $[r]$ bylo libovolné nenulové, z lemmatu 2.1.23 plyne, že $R/\mathrm{J}(R)$ je gradované těleso. $\square$

Na konec této podkapitoly užijeme pojmů z teorie kategorií ke klasifikaci gradovaných okruhů.

Definice 2.1.25. gRing definujeme jako kategorii, jejíž objekty jsou gradované okruhy a pro každé $R, S \in \mathsf{gRing}$ je $\varphi : R \to S$ morfismem $\overset{def}{\iff} \varphi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ kde $\forall i \in \mathbb{Z},\; \varphi_i : R_i \to S_i$ je homomorfismem grup a navíc $\forall x, y \in R$ platí

$$\begin{aligned} \varphi_{|x|+|y|}(xy) &= \varphi_{|x|}(x)\, \varphi_{|y|}(y), \\ \varphi_0(1_R) &= 1_S. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Místo $\varphi_{|x|}(x)$ píšeme nadále pouze $\varphi(x)$. Buďte dále $\varphi \in \mathsf{gRing}(R, S),\; \psi \in \mathsf{gRing}(S, Q)$, pak definujeme

$$\psi \circ \varphi = \{(\psi \circ \varphi)_i\}_{i \in \mathbb{Z}} := \{\psi_i \circ \varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}. \tag{2.16}$$

Lze snadno nahlédnout, že takto definované $\psi \circ \varphi$ je morfismem z R do Q. Identický morfismus se definuje intuitivně jako identita po složkách, což dělá z gRing dobře definovanou kategorii.

Definice 2.1.26. V kategorii gRing zavádíme podkategorii glRing, jejíž objekty jsou lokální gradované okruhy, a řekneme, že $\varphi \in \mathsf{gRing}(R, S)$, kde R, S jsou lokální, je současně v $\mathsf{glRing}(R, S)$ $\overset{def}{\iff} \varphi(\mathrm{J}(R)) \subseteq \mathrm{J}(S)$.

Poznámka. To, že $\hom(\mathsf{glRing})$ je uzavřené na skládání, je vidět snadno: Mějme $\varphi \in \mathsf{glRing}(R, S)$, $\psi \in \mathsf{glRing}(S, Q)$ a buď $r \in \mathrm{J}(R)$. Potom $\psi \circ \varphi(r) = \psi(\underbrace{\varphi(r)}_{\in \mathrm{J}(S)}) \in \mathrm{J}(Q)$.

Tvrzení 2.1.27. *Buď $\varphi \in \hom(\mathsf{gRing})$. Pokud je φ navíc isomorfismus, tak $\varphi \in \hom(\mathsf{glRing})$.*

Důkaz. Mějme $R, S \in \mathsf{glRing}$, kde $\varphi : R \to S$. Pro spor předpokládejme, že existuje $r \in \mathrm{J}(R)$ takové, že $\varphi(r) \notin \mathrm{J}(S)$. Dle věty 2.1.24 to je právě tehdy, když $\varphi(r) \in \mathcal{U}(S)$. Tedy $(\, \exists s \in S\,)\; (\, s\,\varphi(r) = 1\,)$. φ je surjektivní, existuje tedy $\tilde{r} \in R$ které se zobrazí na s. Dostáváme

$$1 = s\,\varphi(r) = \varphi(\tilde{r})\varphi(r) = \varphi(\tilde{r}r). \tag{2.17}$$

Z injektivnosti potom plyne, že $\tilde{r}r = 1$, tedy r má levou inverzi. Obdobně dostaneme, že má i pravou inverzi, tedy $r \in \mathcal{U}(R)$, což je spor, neboť podle 2.1.24 je $\mathcal{U}(R) = R \setminus \mathrm{J}(R)$. $\square$

Tvrzení 2.1.28. *Buďte R, S gradované okruhy, přičemž S je lokální. Nechť dále existuje $\varphi \in \mathsf{gRing}(R, S)$ izomorfismus. Potom R je nutně také lokální.*

Důkaz. Nechť pro spor R není lokální. Podle bodu 6 věty 2.1.24 to znamená, že

$$(\,\exists a,b \in \mathcal{U}(R), |a| = |b|\,)\;(\,a+b \in \mathcal{U}(R) \;\wedge\; a \notin \mathcal{U}(R) \;\wedge\; b \notin \mathcal{U}(R)\,). \tag{2.18}$$

Buď tedy $c \in R$ takové, že $c(a+b) = (a+b)c = 1_R$. Potom

$$1_S = \varphi(1_R) = \varphi(c)\,(\varphi(a) + \varphi(b)) = (\varphi(a) + \varphi(b))\,\varphi(c). \tag{2.19}$$

To ovšem znamená, že $\varphi(a) + \varphi(b) \in \mathcal{U}(S)$. Opět z bodu 6 věty 2.1.24 dostáváme, že potom $\varphi(a) \in \mathcal{U}(S) \vee \varphi(b) \in \mathcal{U}(S)$. Nechť BÚNO $\varphi(a) \in \mathcal{U}(S)$. Potom existuje $t \in S$ takové, že

$$t\varphi(a) = \varphi(a)t = 1_S \implies \varphi^{-1}(t)a = a\varphi^{-1}(t) = 1_R, \tag{2.20}$$

a tedy $a \in \mathcal{U}(R)$, což je spor s (2.18). □

2.2 Gradovaná tenzorová algebra

Cílem této podkapitoly bude definovat gradovanou tenzorovou algebru a nalézt vhodnou gradovanou algebru pro definici gradované domény. Přesto, že tuto algebru zavedeme v poměrně vysoké obecnosti, záhy po její definici se omezíme na takzvaný *nezáporně gradovaný* případ, který poté povede na definici nezáporně gradovaných variet, neboli N-variet (z angl. non-negatively graded manifold).

Na začátek je třeba uvést kategorii gradovaných vektorových prostorů a gradovaně komutativních algeber.

Definice 2.2.1. Gradovaným vektorovým prostorem V nazveme gradovanou množinu, jejíž komponentní množiny V_k mají strukturu vektorového prostoru nad stejným tělesem, což v tomto textu bude vždy těleso $\mathbb{R}$. Máme li dva gradované vektorové prostory V, W, řekneme, že V je **podprostorem** W, právě když V_k je podprostorem W_k pro všechna k.

Pro V, W dva gradované vektorové prostory, řekneme, že $\varphi : V \to W$ je **gradované lineární zobrazení** $\overset{def}{\iff}$ $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \wedge (\,\exists k \in \mathbb{Z}\,)\;(\forall i \in \mathbb{Z}\,)\;(\varphi : V_i \to W_{i+k}$ je lineární zobrazení$\,)$. Takové k potom nazýváme **stupněm** φ a značíme $|\varphi|$. Množinu všech gradovaných lineárních zobrazení stupně k z V do W značíme $\mathrm{Lin}_k(V,W)$. Dále zavádíme $\mathrm{Lin}(V,W) \in \mathsf{gVec}$ jako $\mathrm{Lin}(V,W)_k := \mathrm{Lin}_k(V,W)$. Vidíme, že při této definici je stupeň $\varphi \in \mathrm{Lin}(V,W)$ jakožto lineárního zobrazení stejný jako jeho stupeň jakožto prvku $\mathrm{Lin}(V,W)$, nedochází tedy ke konfliktu značení.

Kategorii gVec zavádíme jako kategorii, jejíž objekty jsou gradované vektorové prostory a jejíž morfismy jsou gradovaná lineární zobrazení stupně nula.

Poznámka. i. Pro $\varphi \in \mathrm{Lin}(V,W)$, $v \in V$, je tedy $\varphi(v) \in W_{|\varphi|+|v|}$.

ii. Skládání gradovaných lineárních zobrazení jakožto i skládání morfismů každé dále definované kategorie je, pokud nebude řečeno jinak, chápáno po složkách.

Poznámka 2.2.2. Máme-li V (negradovaný) vektorový prostor, lze z něj kanonicky vytvořit $V \in \mathsf{gVec}$ jednoduše tak, že $V_0 := V$, $V_{k \neq 0} := \{0\}$. Oba vektorové prostory, gradovaný i negradovaný, značíme V. Z kontextu bude vždy jasné, o který se jedná. (Zejména $\mathbb{R}$ budeme v tomto smyslu často chápat jako gradované.)

Definice 2.2.3. Pro každý gradovaný vektorový prostor V zavádíme jeho **duální prostor** $V^* \in \mathsf{gVec}$ po složkách jako

$$(V^*)_k := (V_{-k})^* \,. \tag{2.21}$$

Platí, že pro každé $V \in \mathsf{gVec}$ existuje kanonický izomorfismus mezi V^* a $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{R})$, kde $\mathbb{R}$ je chápáno jako gradované ve smyslu předchozí poznámky.

Definice 2.2.4. Mějme nyní $A \in \mathsf{gVec}$. Vektorové sčítání definuje na každém A_k přirozeným způsobem strukturu abelovské grupy. Nechť je tedy A zároveň gradovaným okruhem ve smyslu definice 2.1.3 s tím rozdílem, že zobrazení μ_{ij} jsou navíc všechna bilineární (tj. bi-$\mathbb{R}$-lineární). Takové A nazveme **gradovaná unitální asociativní algebra**.

Kategorii, jejíž objekty jsou gradované unitální asociativní algebry, nazýváme gAs. Morfismy této kategorie jsou gradovaná lineární zobrazení stupně nula zachovávající jedničku a součin. Formálně: $\forall A, B \in \mathsf{gAs}$, $\varphi \in \mathsf{gAs}(A, B) \overset{def}{\iff} \varphi \in \mathrm{Lin}_0(A, B)$ a zároveň platí:

$$\varphi(1_A) = 1_B, \tag{2.22a}$$

$$(\,\forall a, \tilde{a} \in A\,)\;(\,\varphi(a\tilde{a}) = \varphi(a)\varphi(\tilde{a})\,). \tag{2.22b}$$

Definice 2.2.5. Buď $n \in \mathbb{N}$. Pro $V^{(1)}, \dots, V^{(n)} \in \mathsf{gVec}$ definujeme $V^{(1)} \otimes \cdots \otimes V^{(n)} \in \mathsf{gVec}$ jako

$$(V^{(1)} \otimes \cdots \otimes V^{(n)})_k := \bigoplus_{k_1 + \cdots + k_n = k} V^{(1)}_{k_1} \otimes \cdots \otimes V^{(n)}_{k_n}. \tag{2.23}$$

Definice 2.2.6. Pro $V \in \mathsf{gVec}$, $p \in \mathbb{N}$ značíme

$$\mathrm{T}^p(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p-kr\acute{a}t}. \tag{2.24}$$

Pro každé V navíc klademe $\mathrm{T}^0(V) := \mathbb{R} \in \mathsf{gVec}$.
$\mathrm{T}^p(V)$ nazýváme **p-tá tenzorová mocnina** prostoru V.

Zkoumejme nyní $\mathrm{T}(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathrm{T}^p(V) \in \mathsf{gVec}$. Každý prvek $\mathrm{T}(V)_k$ je lineární kombinací prvků typu $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, kde $p \in \mathbb{N}, v_j \in V$ pro každé j a $\sum_{j=1}^{p} |v_j| = k$. Pokud je k rovno nule, v lineární kombinaci navíc figuruje ještě „absolutní člen“, tj. reálné číslo (z $\mathrm{T}^0(V)_0 = \mathbb{R}$).

Na $\mathrm{T}(V)$ dále zavedeme strukturu gradované algebry. Pro $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in \mathrm{T}(V)_k$, $w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \in \mathrm{T}(V)_j$ položíme jednoduše

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) * (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \in \mathrm{T}(V)_{k+j}, \tag{2.25a}$$

a pro $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathrm{T}^0(V)_0 \subseteq \mathrm{T}(V)_0$

$$1 * (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p. \tag{2.25b}$$

A požadavkem bilinearity $*$ rozšíříme definici na všechny prvky prostoru $\mathrm{T}(V)$. $\mathrm{T}(V)$ se nazývá **tenzorová algebra** nad gradovaným vektorovým prostorem V.

Poznámka. i. Roli neutrálního multiplikativního elementu v $\mathrm{T}(V)$ tedy hraje $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathrm{T}(V)_0$.

ii. Vidíme, že naše $*$ není nic jiného než obyčejný tenzorový součin, z čehož mimo jiné plyne asociativita.

Definice 2.2.7. O $A \in \mathsf{gAs}$ řekneme, že je **gradovaně komutativní**, pokud

$$(\forall a, b \in A)\ (a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a). \tag{2.26}$$

Kategorii gradovaně komutativních algeber gcAs definujeme jako plnou podkategorii kategorie gAs.

Definice 2.2.8. Buď $V \in \mathsf{gVec}$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}_0$ označme $M_k^{(p)}$ vektorový podprostor prostoru $\mathrm{T}^p(V)_k$, definovaný pro $p \geq 2$ jako

$$\begin{aligned} M_k^{(p)} := \operatorname{span}(\{\, & a \otimes (v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v) \otimes b \\ & \mid a \in \mathrm{T}^q(V), b \in \mathrm{T}^s(V),\ v, w \in V,\ |a| + |v| + |w| + |b| = k \,\}), \end{aligned} \tag{2.27}$$

kde $q + s = p - 2$, a pro $p \in \{1, 0\}$ jako

$$M_k^{(1)} := \{0\} \subseteq V_k, \quad M_k^{(0)} := \{0\} \subseteq \mathbb{R}_k. \tag{2.28}$$

Buď $M^{(p)} := \{M_k^{(p)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Potom **p-tou symetrickou mocninu** prostoru V definujeme jako

$$\mathrm{S}^p(V) := {}^{\mathrm{T}^p(V)}\big/_{M^{(p)}}, \tag{2.29}$$

myšleno po složkách. Označme

$$\mathrm{S}(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathrm{S}^p(V) \in \mathsf{gVec}. \tag{2.30}$$

Podobně jako u $\mathrm{T}(V)$ je každý prvek vektorového prostoru $\mathrm{S}(V)_k$ lineární kombinací prvků typu

$$[v_1 \otimes \cdots \otimes v_p], \text{ kde } p \in \mathbb{N},\ \forall j \in \hat{p} \text{ je } v_j \in V_j \ \wedge\ \sum_{j=1}^{p} |v_j| = k, \tag{2.31}$$

a pro $k = 0$ také prvku $[1] \in \mathrm{S}(V)_0$. Takovýmto prvkům budeme říkat generátory $\mathrm{S}(V)$. Na $\mathrm{S}(V)$ zavádíme operaci $*$ analogicky jako v definici 2.2.6, to jest požadavkem bilinearity a působením na generátory:

$$[v_1 \otimes \cdots \otimes v_p] * [w_1 \otimes \cdots \otimes w_q] := [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q] \in \mathrm{S}(V)_{k+j}, \tag{2.32a}$$

$$[1] * [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p] := [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]. \tag{2.32b}$$

Nezávislost definic (2.32a) a (2.32b) na výběru reprezentanta plyne snadno z definice $M^{(p)}$ a z bilinearity $\otimes$. Stejně tak asociativita $*$ plyne z asociativity $\otimes$. $\mathrm{S}(V)$ vybavené součinem $*$ se tedy stává gradovanou algebrou, kterou nazýváme **symetrická algebra** nad prostorem V.

Tvrzení 2.2.9. $\mathrm{S}(V)$ *je gradovaně komutativní.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že (2.26) platí pro součin generátorů. Pokud je jedním z generátorů prvek $[1]$, tvrzení je triviální, omezme se tedy na generátory tvaru (2.31). Buďte $v = [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]$,

$w = [w_1 \otimes \cdots \otimes w_q]$ dva takovéto generátory, potom

$$\begin{aligned}
v * w &= [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p] * [w_1 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&= [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&= [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \\
&\quad - (-1)^{|v_p||w_1|}\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes w_1 \otimes v_p \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q \\
&\quad + (-1)^{|v_p||w_1|}\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes w_1 \otimes v_p \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&= [\underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes (v_p \otimes w_1 - (-1)^{|v_p||w_1|}\, w_1 \otimes v_p) \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q}_{\in M^{(p+q)}}] \\
&\quad + [(-1)^{|v_p||w_1|}\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes w_1 \otimes v_p \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&= (-1)^{|v_p||w_1|}\, [v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes w_1 \otimes v_p \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q]. \qquad (2.33) \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^{(|v_p|+\cdots+|v_1|)|w_1|}\, [w_1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^{|v|(|w_1|+|w_2|)}\, [w_1 \otimes w_2 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_3 \otimes \cdots \otimes w_q] \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^{|v||w|}\, [w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p], \\
&= (-1)^{|v||w|}\, w * v.
\end{aligned}$$

Pro libovolné $a, b \in \mathrm{S}(V)$ existují generátory $a_i,\ |a_i| = |a|$ a $b_j,\ |b_j| = |b|$ spolu s reálnými koeficienty α_i a β_j tak, že $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i,\ b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Potom ale

$$\begin{aligned}
a * b = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i)\ (\sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (-1)^{|a_i||b_j|} \alpha_i \beta_j b_j a_i \\
= (-1)^{|a||b|}\, b * a.
\end{aligned} \qquad (2.34)$$

□

Symetrickou algebru nad gradovaným vektorovým prostorem je pro naše potřeby třeba ještě rozšířit.

Buďte $V \in \mathsf{gVec},\ A \in \mathsf{gcAs}$. Označme

$$\bar{\mathrm{S}}(V, A) := \prod_{p=0}^{\infty} A \otimes \mathrm{S}^p(V), \qquad (2.35)$$

myšleno po složkách. Libovolný prvek $a \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)$ je tedy tvaru $a = (a_0, a_1, \dots)$, kde $\forall j \in \mathbb{N}_0,\ a_j \in A \otimes \mathrm{S}^j(V),\ |a_j| = |a|$. Naším cílem je zavést na $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ strukturu gradovaně symetrické algebry.

Nejprve zavedeme zobrazení $(\hat{\cdot}) : A \otimes \mathrm{S}^p(V) \times A \otimes \mathrm{S}^q(V) \to A \otimes \mathrm{S}^{p+q}(V)$, pro každé $p, q \in \mathbb{N}_0$, definované na generátorech jako

$$(\alpha_1 \otimes \sigma_1)\,\hat{\cdot}\,(\alpha_2 \otimes \sigma_2) := (-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|}\, (\alpha_1 \cdot_A \alpha_2) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2). \qquad (2.36)$$

kde $\alpha_{1,2} \in A$, $\sigma_1 \in \mathrm{S}^p(V)$, $\sigma_2 \in \mathrm{S}^q(V)$, $(\cdot_A)$ je násobení v A a $*$ je násobení v $\mathrm{S}(V)$. Zobrazení $(\hat{\cdot})$ dále rozšíříme požadavkem bilinearity na celý definiční obor.

Lemma 2.2.10. *Buďte $x \in A \otimes \mathrm{S}^p(V)$, $y \in A \otimes \mathrm{S}^q(V)$, $z \in A \otimes \mathrm{S}^r(V)$. Potom*

1. $x \mathbin{\hat{\cdot}} y = (-1)^{|x||y|}\, y \mathbin{\hat{\cdot}} x$,
2. $(x \mathbin{\hat{\cdot}} y) \mathbin{\hat{\cdot}} z = x \mathbin{\hat{\cdot}} (y \mathbin{\hat{\cdot}} z)$.

Důkaz. Platnost stačí z bilinearity ověřit poze pro generátory. Přejmeme-li značení z (2.36), dostaneme

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \otimes \sigma_1) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_2 \otimes \sigma_2) &= (-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|}\, (\alpha_1 \cdot_A \alpha_2) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2) \\
&= (-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|}\, \big((-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|}\, \alpha_2 \cdot_A \alpha_1 \big) \otimes \big((-1)^{|\sigma_1||\sigma_2|}\, \sigma_2 * \sigma_1 \big) \\
&= \overbrace{(-1)^{(|\alpha_1|+|\sigma_1|)\,(|\alpha_2|+|\sigma_2|)}}^{(-1)^{|\alpha_1\otimes\sigma_1||\alpha_2\otimes\sigma_2|}}\, \underbrace{(-1)^{|\alpha_2||\sigma_1|}\, (\alpha_2 \cdot_A \alpha_1) \otimes (\sigma_2 * \sigma_1)}_{(\alpha_2\otimes\sigma_2) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_1\otimes\sigma_1)},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

kde poslední rovnost plyne z

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|+|\alpha_1||\alpha_2|+|\sigma_1||\sigma_2|} &= (-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|+|\alpha_1||\alpha_2|+|\sigma_1||\sigma_2|+2|\alpha_2||\sigma_1|} \\
&= (-1)^{(|\alpha_1|+|\sigma_1|)\,(|\alpha_2|+|\sigma_2|)+|\alpha_2||\sigma_1|}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Což dokazuje bod (1). Bod (2) se ukáže jednoduše:

$$\begin{aligned}
\big((\alpha_1 \otimes \sigma_1) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_2 \otimes \sigma_2) \big) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_3 \otimes \sigma_3) &= \big((-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|}\, (\alpha_1 \cdot_A \alpha_2) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2) \big) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_3 \otimes \sigma_3) \\
&= (-1)^{|\alpha_1||\sigma_2|+(|\alpha_1|+|\alpha_2|)|\sigma_3|}\, (\alpha_1 \cdot_A \alpha_2 \cdot_A \alpha_3) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3) \\
&= (-1)^{|\alpha_1|(|\sigma_2||\sigma_3|)+|\alpha_2|)|\sigma_3|}\, (\alpha_1 \cdot_A \alpha_2 \cdot_A \alpha_3) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3) \\
&= (\alpha_1 \otimes \sigma_1) \mathbin{\hat{\cdot}} \big((\alpha_2 \otimes \sigma_2) \mathbin{\hat{\cdot}} (\alpha_3 \otimes \sigma_3) \big).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

□

Nyní můžeme pro každé $a = (a_0, a_1, \dots)$, $b = (b_0, b_1, \dots)$ z $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ definovat jejich součin $a \cdot b \equiv ((a \cdot b)_0, (a \cdot b)_1, \dots) \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ jako

$$(a \cdot b)_j := \sum_{i=0}^{j} a_i \mathbin{\hat{\cdot}} b_{j-i} \in A \otimes \mathrm{S}^j(V). \tag{2.40}$$

Tvrzení 2.2.11. *Výše zavedená operace $\cdot$ je korektně definovaným gradovaně komutativním součinem na $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$.*

Důkaz. Roli neutrálního elementu pak hraje prvek $(1_A \cdot 1_{\mathbb{R}},\ 0,\ \dots) \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)_0$. Bilinearita snadno plyne z příslušných definic, a asociativita spolu s gradovanou komutativitou se obdrží aplikací lemmatu 2.2.10 na výraz (2.40). □

Definice 2.2.12. Výše zavedenou $\bar{\mathrm{S}}(V, A) \in \mathsf{gcAs}$ nazveme **rozšířená symetrická algebra** nad gradovaným vektorovým prostorem V s hodnotami v gradovaně komutativní algebře A.

2.3 Algebra $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ jako prostor formálních řad

V minulé podkapitole jsme zavedli $\bar{\mathrm{S}}(V, A) \equiv \prod_{p=0}^{\infty} A \otimes S^p(V)$ pro libovolné $V \in \mathsf{gVec}$ a $A \in \mathsf{gcAs}$. V tomto textu se však budeme setkávat výhradně s prostory V konečné dimenze (co přesně tím myslíme, upřesníme záhy) a algebrou A triviálně gradovanou, to jest gradovanou pouze ve smyslu poznámky 2.2.2. Ukazuje se totiž, že v takovém případě lze $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ považovat za prostor jistých formálních řad.

Nejprve poznamenáme, že požadavek triviální gradovanosti algebry A implikuje, že pro každé $q \in \mathbb{N}_0$ je

$$(A \otimes \mathrm{S}^q(V))_k = A_0 \otimes (\mathrm{S}^q(V)_k). \tag{2.41}$$

Definice 2.3.1. Buď $V \in \mathsf{gVec}$ takový, že každý jeho komponentní vektorový prostor má konečnou dimenzi. Potom posloupnost $\{\dim(V_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ nazveme **gradovanou dimenzí** prostoru V a značíme gdim$V$. Pokud navíc platí, že $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim(V_j) < +\infty$, řekneme, že V má **konečnou dimenzi** (nebo že je konečněrozměrný) a číslo $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim(V_j) \in \mathbb{N}_0$ nazveme **souhrnnou dimenzí** prostoru V.

Poznámka. Gradovaný vektorový prostor V je tak konečněrozměrný právě tehdy, když jsou všechny V_j konečněrozměrné a zároveň pouze pro konečně mnoho $j \in \mathbb{Z}$ platí $V_j \neq \{0\}$.

Definice 2.3.2. Buď V konečněrozměrný gradovaný vektorový prostor gradované dimenze (n_j) a souhrnné dimenze $\sum_{j \in \mathbb{Z}} n_j =: n_*$. Potom uspořádanou n_*-tici $(\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_*}\,)$ takovou, že pro každé $j \in \mathbb{Z}$ takové, že $V_j \neq \{0\}$, existuje báze $(\,\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{n_j}^{(j)}\,)$ prostoru V_j a platí:

$$(\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_*}\,) := (\,\{\,\xi_k^{(j)} \mid j \in \mathbb{Z},\ k = 1, \ldots, n_j\,\},\ \leq), \tag{2.42}$$

kde $\leq$ je libovolné uspořádání, nazveme **souhrnnou bází** gradovaného vektorového prostoru V.

Poznámka. Neformálně řečeno je tedy souhrnná báze tvořena „sesypáním dohromady“ všech bazických vektorů všech komponentních prostorů.

Značení 2.3.3. Mějme $V \in \mathsf{gVec}$ konečněrozměrný, $(\,\xi_1, \ldots, \xi_{n_*})$ jeho souhrnnou bázi, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Potom zavádíme značení

$$\mathbb{N}_k^* := \{\,(\,p_1, \ldots, p_{n_*}\,) \in \mathbb{N}_0^{n_*} \mid \sum_{j=1}^{n_*} p_j |\xi_j| = k \ \wedge\ p_j \in \{\,0, 1\,\} \text{ pro } |\xi_j| \text{ liché}\,\}. \tag{2.43}$$

Dále značíme

$$\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_q} := [\xi_{i_1}] * [\xi_{i_2}] * \ldots * [\xi_{i_q}] \in \mathrm{S}^q(V), \tag{2.44a}$$

$$\xi_j^0 := 1 \in \mathrm{S}^0(V)_0, \tag{2.44b}$$

$$\xi_j^m := \underbrace{\xi_j \xi_j \cdots \xi_j}_{m-kr\acute{a}t}. \tag{2.44c}$$

Obsah následujícího lemmatu je intuitivně téměř zjevný, jeho rigorózní důkaz je však netriviální a poměrně rozsáhlý, a tak jej zde neuvádíme.

Lemma 2.3.4. *Buď* $(\xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ *souhrnná báze prostoru* $V \in \mathsf{gVec}$*. Potom*

$$B_k^q := \{\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}} \mid p \in \mathbb{N}_k^* \ \wedge \ \sum_{j=1}^{n_*} p_j = q\} \tag{2.45}$$

je bází vektorového prostoru $\mathrm{S}^q(V)_k$.

Mějme nyní A komutativní algebru, $a \equiv (a_0,\ a_1, \dots) \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)$. Z předchozího lemmatu a rovnosti (2.41) vidíme, že pro každé $q \in \mathbb{N}_0$ lze a_q *jednoznačně* rozložit do tvaru

$$a_q = \sum_p \lambda_p \otimes \xi_1^{p_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}},\ p \in \mathbb{N}_k^* \ \wedge \ \sum_{j=1}^{n_*} p_j = q, \tag{2.46}$$

kde $\lambda_p \in A$, což opravňuje značení

$$a \equiv (a_0,\ a_1, \dots) =: \sum_{p \in \mathbb{N}_{|a|}^*} \lambda_p\, \xi_1^{p_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}}. \tag{2.47}$$

Vidíme, že každý prvek $a \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)$ je při zadané souhrnné bázi prostoru V jednoznačně určen koeficienty $\lambda_p,\ p \in \mathbb{N}_{|a|}^*$. Následující tvrzení shrnuje, že podobnost s formálními řadami je úplná, to jest, že součin (2.40) v algebře $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ je v tomto případě právě součinem formálních řad v gradovaně komutativních proměnných.

Tvrzení 2.3.5. *Buďte* A *komutativní algebra,* $(\xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ *souhrnná báze prostoru* $V \in \mathsf{gVec}$*. Potom pro každé dvě* $a \equiv \sum_{p \in \mathbb{N}_{|a|}^*} \alpha_p\, \xi_1^{p_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}},\ b \equiv \sum_{q \in \mathbb{N}_{|b|}^*} \beta_q\, \xi_1^{q_1}\cdots\xi_{n_*}^{q_{n_*}} \in \bar{\mathrm{S}}(V, A)$ *platí:*

$$\Big(\sum_{p \in \mathbb{N}_{|a|}^*} \alpha_p\, \xi_1^{p_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}}\Big)\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}_{|b|}^*} \beta_q\, \xi_1^{q_1}\cdots\xi_{n_*}^{q_{n_*}}\Big) = \sum_{r \in \mathbb{N}_{|a|+|b|}^*} \gamma_r\, \xi_1^{r_1}\cdots\xi_{n*}^{r_{n_*}}, \tag{2.48}$$
$$\text{kde } \gamma_r = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N}_{|a|}^* \\ p \le r}} \epsilon_{p,r-p}\, \alpha_p\, \beta_{r-p},$$

$\epsilon_{p,q}$ *je znaménko, které vznikne při přerovnání* $\xi_1^{p_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}}\xi_1^{q_1}\cdots\xi_{n_*}^{q_{n_*}} \mapsto \xi_1^{p_1+q_1}\cdots\xi_{n_*}^{p_{n_*}+q_{n_*}}$ *a* $p \le r \iff p_j \le r_j\ \forall j = 1, \dots, n_*$.

Poznámka. Důkaz předchozího tvrzení lze provést jednoduše tak, že se pro každé $q \in \mathbb{N}_0$ rozepíše (2.40) pomocí (2.46) a následný výraz se upraví přerovnáním (konečných) sum opět do tvaru (2.46). Jelikož jde však o poměrně zdlouhavý proces, který nám nepřináší nic nového, explicitně jej neuvádíme.

Poznámka 2.3.6. Uvažujme speciální případ, kdy pro V platí, že $V_j = \{0\}$ pro všechna $j \le 0$. Mějme $k \in \mathbb{Z}$. Potom $\forall p > k$ musí nutně platit, že $\mathrm{T}^p(V)_k = \{0\}$, tedy také $A \otimes \mathrm{S}^p(V)_k = \{0\}$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ lze tedy direktní součin v definičním vztahu 2.35 nahradit direktním součtem a na $\bar{\mathrm{S}}(V, A)$ pohlížet jako na prostor polynomů s koeficienty z A.

Kapitola 3

Zavedení N-variet

3.1 Gradované domény

Zavedení předsnopu na topologickém prostoru (to jest definice 1.2.2) bylo provedeno pro libovolnou kategorii C. V této kapitole, jakožto i po zbytek textu, budeme často pracovat s případem, kdy $\mathsf{C} = \mathsf{gcAs}$ nebo $\mathsf{C} = \mathsf{gVec}$. Potom například restrikce jsou morfismy těchto kategorií, které byly zavedeny v kapitole 2. Pro tyto „gradované“ kategorie budeme potřebovat i vhodnou definici snopu. Naštěstí i v tomto případě lze použít definici 1.2.3, jak vyjasňuje následující poznámka.

Poznámka 3.1.1. i. Buďte $M = \{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, N = \{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\varphi = \{\varphi_k\}_{ki\in\mathbb{Z}}$, kde pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $\varphi_k : M_k \to N_k$ nějaké zobrazení. Námi zavedený zápis $m \in M$ pro $m \in M_{|m|}$ a $\varphi(m)$ pro $\varphi_{|m|}(m)$ nám nyní umožňuje zavést snopy s hodnotami v gVec, resp. gcAs, a kategorie $\mathsf{Sh}(X, \mathsf{gVec})$, resp. $\mathsf{Sh}(x, \mathsf{gcAs})$ *formálně naprosto stejně* jako v podkapitole 1.2.

ii. Jinak řečeno, buďte X topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{gcAs})$[1]. Mějme pro každé $k \in \mathbb{Z}$ přiřazení $\mathcal{F}_k$, které každé množině $U \in \mathrm{Op}(X)$ přiřadí $\mathcal{F}_k(U) := \mathcal{F}(U)_k$ vektorový prostor a každé inkluzi $\imath^U_V$, pro nějaké $V \in \mathrm{Op}(U)$, přiřadí $\mathcal{F}_k(\imath^U_V) := \mathcal{F}(\imath^U_V)_k$ lineární zobrazení. Potom z příslušných definic je snadno vidět, že $\mathcal{F}_k \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{Vec})$, kde Vec značí kategorii vektorových prostorů (objekty jsou vektorové prostory a morfismy jsou lineární zobrazení). Potom $\mathcal{F}$ je snop $\iff$ $\mathcal{F}_k$ je snop pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

iii. V návaznosti na předchozí bod je vhodné zmínit, že pro $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{gcAs})$ je speciálně $\mathcal{F}(U)_0 \in \mathsf{cAs}$ pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ a $\mathcal{F}(\imath^U_V)_0 \in \hom(\mathsf{cAs})$ pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$. To znamená, že $\mathcal{F}_0$ se dá chápat jako predsnop na X s hodnotami v cAs.

Značení 3.1.2. Mějme $(n_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}_0$ posloupnost nezáporných celých čísel. Potom $\mathbb{R}^{(n_j)}$ značí gradovaný vektorový prostor, kde $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\mathbb{R}^{(n_j)}\right)_k := \mathbb{R}^{n_k} \tag{3.1}$$

a $\mathbb{R}^{(n_j)}_0$ značí gradovaný vektorový prostor, kde $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\mathbb{R}^{(n_j)}_0\right)_k := \begin{cases} \mathbb{R}^{n_k} & \text{pro } k \neq 0, \\ \{0\} & \text{pro } k = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

[1]Pro gVec analogicky.

Příklad 3.1.3. Buď $(n_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ posloupnost nezáporných celých čísel, přičemž $\sum_{j\in\mathbb{Z}} n_j < \infty$. Zaveďme přiřazení $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}$, které každé množině $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$ přiřadí gradovanou algebru $\bar{\mathrm{S}}\left(\mathbb{R}^{(n_j)}_0, \mathcal{C}^\infty_{n_0}(U)\right)$. Připomeňme, že $\mathcal{C}^\infty_{n_0}(U)$ značí „klasickou“ algebru hladkých funkcí na U. Buď $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_*})$ souhrnná báze $\mathbb{R}^{(n_j)}_0$, potom pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$ a každý prvek

$$s = \sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} s_p\, \xi_1^{p_1} \cdots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} \in \bar{\mathrm{S}}\left(\mathbb{R}^{(n_j)}_0, \mathcal{C}^\infty_{n_0}(U)\right), \tag{3.3}$$

kde $s_p \in \mathcal{C}^\infty_{n_0}(U)$, zavedeme restrikci

$$\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_V)(s) \equiv s|_V := \sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} \left(s_p|_V\right)\, \xi_1^{p_1} \cdots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} \in \bar{\mathrm{S}}\left(\mathbb{R}^{(n_j)}_0, \mathcal{C}^\infty_{n_0}(V)\right). \tag{3.4}$$

Potom $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}$ je snop na $\mathbb{R}^{n_0}$ s hodnotami v gradovaně komutativních algebrách, to jest $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)} \in \mathsf{Sh}(\mathbb{R}^{n_0}, \mathsf{gcAs})$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)} \in \mathsf{PSh}(\mathbb{R}^{n_0}, \mathsf{gcAs})$. Buďte $W, V, U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$, $W \subseteq V \subseteq U$. Z definice je ihned zřejmé, že

$$\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_U) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)}, \quad \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^V_W) \circ \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_V) = \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_W). \tag{3.5}$$

Stačí tedy ověřit, že $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_V) \in \hom(\mathsf{gcAs})$. Mějme tedy $s, t \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$, potom ze vztahu (2.48) dostáváme

$$\begin{aligned}
(st)|_V &= (\,(\sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} s_p\, \xi_1^{p_1} \cdots \xi_{n_*}^{p_{n_*}})\,(\sum_{q\in\mathbb{N}^*_{|t|}} t_q\, \xi_1^{q_1} \cdots \xi_{n_*}^{q_{n_*}})\,)|_V \\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}^*_{|s|+|t|}} (\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}\\ p\leq r}} \epsilon_{p,r-p}\, s_p\, t_{r-p}\,)|_V\ \xi_1^{r_1} \cdots \xi_{n*}^{r_{n*}} \\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}^*_{|s|+|t|}} (\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}\\ p\leq r}} \epsilon_{p,r-p}\ \ s_p|_V\ \ t_{r-p}|_V)\, \xi_1^{r_1} \cdots \xi_{n*}^{r_{n*}} \\
&= (\sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} s_p\, \xi_1^{p_1} \cdots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}\,)|_V\, (\sum_{q\in\mathbb{N}^*_{|t|}} t_q\, \xi_1^{q_1} \cdots \xi_{n_*}^{q_{n_*}}\,)|_V \\
&= s|_V\ t|_V\,.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Linearita a zachování neutrálního multiplikativního elementu by se ukázala obdobně, což z $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}$ dělá předsnop. Abychom ukázali, že jde o snop, musíme ověřit platnost axiomu lokality a lepícího axiomu. Z definice restrikcí $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\imath^U_V)$ a z jednoznačnosti vyjádření (3.3) je však jejich platnost zřejmá, neboť plyne z platnosti jejich protějšků pro jednotlivé koeficienty s_p, to jest „klasické“ hladké funkce. □

Definice 3.1.4. Buď (n_j) posloupnost nezáporných celých čísel, kde $\sum_{j\in\mathbb{Z}} n_j < \infty$. Buďte dále $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$ a $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)} \in \mathsf{Sh}(\mathbb{R}^{n_0}, \mathsf{gcAs})$ definované jako v předchozím příkladě. Potom uspořádanou dvojici $(U, \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}|_U)$ nazveme **gradovaná doména** a značíme ji jednoduše $U^{(n_j)}$.

Nyní bychom chtěli zavést gradovanou obdobu stonku a lokálně okruhového prostoru. Následuje gradovaná podoba definice 1.2.6, poznámky 1.2.7 a tvrzení 1.2.8.

Definice 3.1.5 (Gradovaná verze definice 1.2.6)**.** Mějme X topologický prostor a předsnop $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{gcAs})$. Potom pro každé $x \in X$ definujeme **stonek** předsnopu $\mathcal{F}$ v bodě x jako gradovaný vektorový prostor $\mathcal{F}_x$, kde pro každé $k \in \mathbb{Z}$

$$(\mathcal{F}_x)_k := \left(\coprod_{U \in \mathrm{Op}_x(X)} \mathcal{F}(U)_k \right) \Big/_{\sim}, \tag{3.7}$$

kde $\sim$ je ekvivalence definovaná následovně: mějme $U, V \in \mathrm{Op}_x(X), s \in \mathcal{F}(U)_k, r \in \mathcal{F}(V)_k$. Potom

$$s \sim r \overset{def}{\iff} (\, \exists W \in \mathrm{Op}_x(X),\, W \subseteq U \cap V \,)\, (\, s|_W = r|_W \,). \tag{3.8}$$

Prvek stonku $\mathcal{F}_x$, tj. třída ekvivalence $[s]$, se typicky značí jako $[s]_x$, kde máme $|[s]_x| = |s|$.

Poznámka 3.1.6 (Gradovaná verze poznámky 1.2.7)**.** Při stejném značení buď $s \in \mathcal{F}(U)$ pro $U \in \mathrm{Op}_x(X)$. Potom z definice stonku je jasné, že

$$[s]_x = [s|_V]_x\,, \tag{3.9}$$

pro každé $V \in \mathrm{Op}_x(U)$.

Tvrzení 3.1.7 (Gradovaná verze tvrzení 1.2.8)**.** *Mějme X topologický prostor a předsnop $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X, \mathsf{gcAs})$. Potom se pro každé $x \in X$ na stonku $\mathcal{F}_x \in \mathsf{gVec}$ přirozeně indukuje struktura gradovaně komutativní unitální asociativní algebry a pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ je přiřazení $s \in \mathcal{F}(U) \mapsto [s]_x \in \mathcal{F}_x$ morfismus gradovaných algeber.*

Důkaz. Zavedení operací na stonku a dokázání potřebných vlastností je naprosto analogické negradovanému případu, přičemž sčítání samozřejmě zavádíme pouze pro prvky stejného stupně. $\square$

Definice 3.1.8. Buďte X je topologický prostor, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a nechť pro každé $x \in X$ je stonek $\mathcal{F}_x$ lokální gradovaný okruh (když jej uvažujeme jako gradovaný okruh). Potom uspořádanou dvojici $(X, \mathcal{F})$ označíme za **lokálně gradovaně okruhový prostor**.

Pro zavedení kategorie lokálně gradovaně okruhových prostorů bychom potřebovali gradované obdoby tvrzení a definic 1.2.12 až 1.2.15. Opět ale platí, že všechny „gradované“ pojmy jsme zavedli tak, že skutečně formálně *jediná* změna ve znění těchto tvrzení a definic by byla nahrazení „$\mathsf{cAs} \mapsto \mathsf{gcAs}$“, „algebraický homomorfismus $\mapsto$ morfismus v gcAs“ a „lokálně okruhový prostor $\mapsto$ lokálně gradovaně okruhový prostor“. Pro stručnost je tedy neuvádíme a **kategorii lokálně gradovaně okruhových prostorů** značíme gLRS.

Shrnutí 3.1.9. Mějme $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ lokálně okruhové prostory a $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ jejich morfismus. To tedy znamená, že $\underline{\varphi}$ je spojité zobrazení $X \to Y$, φ^* je morfismus snopů $\mathcal{G} \to \underline{\varphi}_* \mathcal{F}$, přičemž pro každé $x \in X$ je jimi indukovaný morfismus stonků (tedy morfismus gradovaných algeber) $\varphi_x : \mathcal{G}_{\underline{\varphi}(x)} \to \mathcal{F}_x$ působící na každé $s \in \mathcal{G}(U)$ jako $\varphi_x\,[s]_{\underline{\varphi}(x)} = [\varphi_U^* s]_x$ současně také morfismem lokálních gradovaných okruhů (viz definice 2.1.26).

Pro $\varphi : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$, $\psi : (Y, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{H})$ dva morfismy gLRS je jejich složení $\psi \circ \varphi : (X, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{H})$ zavedeno jako $\underline{(\psi \circ \varphi)} = \underline{\psi} \circ \underline{\varphi}$ a pro každou množinu $W \in \mathrm{Op}(Z)$ je $(\psi \circ \varphi^*)_W = \varphi^*_{\underline{\psi}^{-1}(W)} \circ \psi^*_W$.

Všimněme si ještě, že φ je izomorfismus, právě když je $\underline{\varphi}$ homeomorfismus a φ^* izomorfismem příslušných snopů, tj. že pro každou množinu $U \in \mathrm{Op}(Y)$ je $\varphi^*_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(\underline{\varphi}^{-1}(U))$ izomorfismus gradovaných algeber, což mimo jiné znamená, že $(\varphi^*_U)_k : \mathcal{G}(U)_k \to \mathcal{F}\left(\underline{\varphi}^{-1}(U)\right)_k$ je pro každé $k \in \mathbb{Z}$ izomorfismem vektorových prostorů.

Dále je snadné se přesvědčit, že poznámka 1.2.18 platí ve stejném znění i pro snopy s hodnotami v gradovaných vektorových prostorech či gradovaných algebrách. Uveďme pro úplnost ještě gradovanou podobu tvrzení 1.2.19.

Tvrzení 3.1.10 (Gradovaná verze tvrzení 1.2.19)**.** *Buď $(X, \mathcal{F})$ lokálně gradovaně okruhový prostor. Potom pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ je $(U, \mathcal{F}|_U)$ také lokálně gradovaně okruhový prostor. Dále existuje morfismus* gLRS *$i : (U, \mathcal{F}|_U) \to (X, \mathcal{F})$, kde navíc pro každé $x \in U$ je i_x izomorfismus* gAs.

Důkaz. Důkaz se provede záměnou posledního odstavce důkazu věty 1.2.19 za následující: To, že se jedná o oboustrannou inverzi, potom plyne z poznámky 3.1.6. Pro každé $x \in U$ je tedy $i_x : \mathcal{F}_{\underline{i}(x)} \to (\mathcal{F}|_U)_x$ izomorfismus gAs a tedy i gradovaných okruhů, přičemž $\mathcal{F}_{\underline{i}(x)}$ je dle předpokladu lokální gradovaný okruh. Podle tvrzení 2.1.28 je potom $(\mathcal{F}|_U)_x$ také lokální gradovaný okruh, a tudíž $(U, \mathcal{F}|_U) \in \mathsf{gLRS}$. □

Tvrzení 3.1.11. *Buďte $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}) \in$* gLRS *a $\varphi : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ morfismus* gLRS. *Potom pro každé $V \in \mathrm{Op}(Y)$ je $\varphi|_V : (\underline{\varphi}^{-1}(V), \mathcal{F}|_{\underline{\varphi}^{-1}(V)}) \to (V, \mathcal{G}|_V)$ definované jako*

$$\underline{\varphi|_V} := \underline{\varphi}\big|_{\underline{\varphi}^{-1}(V)}, \tag{3.10a}$$

$$(\varphi|_V)^*_W := \varphi^*_W, \tag{3.10b}$$

pro každé $W \in \mathrm{Op}(V)$, dobře definovaný morfismus gLRS. *Navíc platí, že φ je izomorfismus právě tehdy, když $\varphi|_V$ je izomorfismus pro každé $V \in \mathrm{Op}(Y)$.*

Důkaz. Nejprve uveďme, že i přes poměrně složité značení je pro každé $W \in \mathrm{Op}(V)$ jednoduše

$$\underline{\varphi|_V}_* \, \mathcal{F}|_{\underline{\varphi}^{-1}(V)}(W) = \mathcal{F}(\underline{\varphi}^{-1}(W)), \tag{3.11}$$

což opravňuje zavedení (3.10b). Takto definované $(\varphi|_V)^*$ komutuje s restrikcemi a proto je jistě morfismem příslušných snopů. Stačí tedy ukázat, že $(\varphi|_V)_x$ je pro každé $x \in \underline{\varphi}^{-1}(V)$ morfismem lokálních gradovaných okruhů. Označme jako $i : (\underline{\varphi}^{-1}(V), \mathcal{F}|_{\underline{\varphi}^{-1}(V)}) \to (X, \mathcal{F})$, respektive $j : (V, \mathcal{G}|_V) \to (Y, \mathcal{G})$ příslušné „inkluzní" morfismy z tvrzení 3.1.10. Potom lze nahlédnout, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{G}|_V)_{\underline{\varphi}(x)} \arrow[r, "(\varphi|_V)_x"] \arrow[d, "(i_{\underline{\varphi}(x)})^{-1}"'] & \left(\mathcal{F}|_{\underline{\varphi}^{-1}(V)}\right)_x \\ \mathcal{G}_{\underline{\varphi}(x)} \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{F}_x, \arrow[u, "j_x"'] \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

neboli, že

$$(\varphi|_V)_x = j_x \circ \varphi_x \circ (i_{\underline{\varphi}(x)})^{-1}. \tag{3.13}$$

Složení morfismů glRing je ale opět morfismus glRing. Navíc, jelikož j_x a $i_{\underline{\varphi}(x)}$ jsou izomorfismy, tak φ_x je izomorfismus, právě když jím je $(\varphi|_V)_x$. $\square$

Tvrzení 3.1.12. *Mějme $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$, kde X, Y jsou topologické prostory, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$, $\mathcal{G} \in \mathsf{Sh}(Y, \mathsf{gcAs})$, přičemž $(Y, \mathcal{G}) \in \mathsf{gLRS}$. Nechť navíc existuje $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)$, kde $\underline{\varphi} : X \to Y$ je homeomorfismus a $\varphi^* : \mathcal{G} \to \underline{\varphi}_* \mathcal{F}$ je izomorfismus snopů. Potom $(X, \mathcal{F}) \in \mathsf{gLRS}$.*

Důkaz. Důkaz je přímou aplikací tvrzení 2.1.28 na izomorfismus stonků $\varphi_x : \mathcal{G}_{\underline{\varphi}(x)} \to \mathcal{F}_x$ pro každé $x \in X$. $\square$

Poznámka 3.1.13. Od tohoto bodu dále se budeme zabývat *výhradně nezáporně gradovanými doménami*, to jest takovými doménami $U^{(n_j)} \equiv (U, \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}|_U)$, kde $n_j = 0$ pro všechna $j < 0$. Splňují tak požadavky poznámky 2.3.6, což práci s nimi výrazně usnadňuje.

Pro zajímavost dodejme, že většina (ne všechna) tvrzení, které po zbytek textu vyslovíme o nezáporně gradovaných doménách a pomocí nich definovaných N-varietách, lze vyslovit v obecnějším tvaru pro všegradované domény a variety, což už však leží mimo rámec tohoto textu.

Poznámka 3.1.14.

i. Buď $U^{(n_j)} \equiv (U, \mathcal{C}^\infty_{(n_j)})$ nezáporně gradovaná doména. Potom speciálně pro všechna $k < 0$ a všechna $V \in \mathrm{Op}(U)$ je

$$(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(V))_k \equiv (\bar{\mathrm{S}}(\mathbb{R}_0^{(n_j)}, \mathcal{C}^\infty_{n_0}(V)))_k = \{0\}, \tag{3.14}$$

a pro k = 0

$$(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(V))_0 = \mathcal{C}^\infty_{n_0}(V) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathcal{C}^\infty_{n_0}(V), \tag{3.15}$$

kde $\simeq$ značí existenci kanonického izomorfismu.

ii. S ohledem na předchozí bod budeme odteď pro každé $V \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$ ztotožňovat $(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(V))_0$ a $\mathcal{C}^\infty_{n_0}(V)$ pro každou posloupnost nezáporných celých čísel (n_j), kde $\sum_{j \in \mathbb{Z}} n_j < \infty$ a $n_j = 0$ pro všechna $j < 0$.

Tvrzení 3.1.15. *Nezáporně gradovaná doména $U^{(n_j)}$ je lokálně gradovaně okruhový prostor.*

Důkaz. Pro $x \in U \subseteq \mathbb{R}^{n_0}$ tedy chceme ukázat, že $\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}$ je lokální gradovaný okruh. Naším cílem bude využít pátého bodu věty 2.1.24, to jest ukázat, že neinvertibilní prvky gradovaného okruhu $\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}$ tvoří gradovanou abelovskou grupu. Označme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}$ gradovanou množinu invertibilních prvků, to jest

$$\mathcal{U} = \{\, [s]_x \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j),x} \,|\, \exists\, [r]_x \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j),x},\ [s]_x\, [r]_x = [1]_x \,\}. \tag{3.16}$$

V $\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}$ se ale nevyskytují nenulové prvky záporných stupňů, což znamená že každý invertibilní element má nutně stupeň nula. S ohledem na poznámku 3.1.14 navíc vidíme, že

$$\left(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}\right)_0 \simeq \mathcal{C}^\infty_{n_0,x}, \tag{3.17}$$

a tyto stonky tak rovněž ztotožníme. Jsme nyní schopni využít příkladu 1.2.11 a říct, že $\mathcal{U} = \{\, [s]_x \in (\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x})_0 \,|\, s(x) \neq 0 \,\}$. Jinými slovy:

$$\left(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x} \setminus \mathcal{U}\right)_k = \begin{cases} (\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x})_k & \text{pro } k \neq 0, \\ \{\, [s]_x \in (\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x})_0 \,|\, s(x) = 0 \,\} & \text{pro } k = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Z toho je pak již snadné nahlédnout, že $\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x} \setminus \mathcal{U}$ tvoří gradovanou abelovskou grupu. □

Důsledek 3.1.16. *Z důkazu předchozího tvrzení plyne, že každá nezáporně gradovaná doména $U^{(n_j)}$ kanonickým způsobem indukuje negradovanou doménu $(U, \mathcal{C}^\infty_{n_0})$, kde pro stonky platí $(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x})_0 \simeq \mathcal{C}^\infty_{n_0,x}$. Doménu $(U, \mathcal{C}^\infty_{n_0})$ nazveme* ***podkladová doména*** *gradované domény $U^{(n_j)}$.*

Věta 3.1.17. *Mějme $U^{(n_j)}, V^{(m_j)}$ dvě nezáporně gradované domény a $\varphi \in \mathsf{gLRS}(U^{(n_j)}, V^{(m_j)})$. Potom vždy existuje kanonicky určený morfismus $\phi \in \mathsf{LRS}((U, \mathcal{C}^\infty_{n_0}), (V, \mathcal{C}^\infty_{m_0}))$ příslušných podkladových domén takový, že $\underline{\phi} = \underline{\varphi}$ a pro každé $W \in \mathrm{Op}(V)$ je $\phi^*_W = (\varphi^*_W)_0$.*

Důkaz. Zavedení $\phi^*_W := (\varphi^*_W)_0$, $\forall W \in \mathrm{Op}(V)$ je ospravedlněno ztotožněním $\left(\mathcal{C}^\infty_{(m_j)}(W)\right)_0$ s $\mathcal{C}^\infty_{m_0}(W)$. Stačí tedy ověřit, že $(\underline{\phi}, \phi^*) \in \mathrm{hom}(\mathsf{LRS})$. Jelikož jsme však také pro každé $x \in U$ ztotožnili $\left(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x}\right)_0$ a $\mathcal{C}^\infty_{n_0,x}$, resp. $\left(\mathcal{C}^\infty_{(m_j),\underline{\varphi}(x)}\right)_0$ a $\mathcal{C}^\infty_{m_0,\underline{\varphi}(x)}$, dostáváme

$$\phi_x = (\varphi_x)_0 \,. \tag{3.19}$$

Když nyní připomeneme tvar Jacobsonova radikálu stonku $\mathcal{C}^\infty_{(n_j),\underline{\varphi}(x)}$, to jest (3.18), zjišťujeme, že

$$\phi_x\left(J(\mathcal{C}^\infty_{m_0,\underline{\phi}(x)})\right) = \left(\varphi_x(J(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),\underline{\varphi}(x)}))\right)_0 \subseteq \left(J(\mathcal{C}^\infty_{(n_j),x})\right)_0 = J(\mathcal{C}^\infty_{n_0,x}), \tag{3.20}$$

čímž jsme ukázali, že ϕ_x je morfismem lokálních okruhů, a tudíž $\phi \in \mathrm{hom}(\mathsf{LRS})$. □

Důsledek 3.1.18. *Mějme $U^{(n_j)}$, $V^{(m_j)}$ nézaporně gradované domény a $\varphi \in \mathsf{gLRS}(U^{(n_j)}, V^{(m_j)})$. Potom $\underline{\varphi} : U \to V$ je nutně hladké zobrazení. Navíc pro každé $W \in \mathrm{Op}(V)$ a každé $s \in (\mathcal{C}^\infty_{(m_j)})_0$ platí*

$$(\varphi^*_W)_0(s) = s \circ \underline{\varphi}\big|_{\underline{\varphi}^{-1}(W)} \,. \tag{3.21}$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem předchozí věty a věty 1.2.17. □

Věta 3.1.19. *Buďte $U^{(n_j)}, V^{(m_j)} \in \mathsf{gLRS}$ dvě nezáporně gradované domény, $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ souhrnná báze prostoru $\mathbb{R}^{(m_j)}_0$. Potom každé $\varphi \in \mathsf{gLRS}(U^{(n_j)}, V^{(m_j)})$ je ve vztahu jedna ku jedné s uspořádanou dvojicí $(\underline{\varphi}, \{{}^*\eta_\mu\}_{\mu=1}^m)$, kde $\underline{\varphi} : U \to V$ je hladké zobrazení a $\{{}^*\eta_\mu\}_{\mu=1}^m$ je m-tice prvků ${}^*\eta_\mu \in \left(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)\right)_{|\eta_\mu|}$.*

Důkaz. Pokud máme $\varphi : U^{(n_j)} \to V^{(m_j)}$, pak stačí definovat ${}^*\eta_\mu =: \varphi^*_V(1_V \otimes \eta_\mu)$ pro každé $\mu = 1, \ldots, m$.

Pokud máme naopak určené hladké zobrazení $\underline{\varphi}$ a vhodnou m-tici $\{{}^*\eta_\mu\}_{\mu=1}^m$, pak pro libovolné $W \in \mathrm{Op}(V)$, $s \in \mathcal{C}^\infty_{(m_j)}(W)$ definujeme

$$\begin{aligned}\varphi^*_W(s) &= \varphi^*_W\big(\sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} s_p\, \eta_1^{p_1}\cdots\eta_m^{p_m}\big) \\ &:= \sum_{p\in\mathbb{N}^*_{|s|}} (s_p \circ \underline{\varphi}\big|_W)\ (({}^*\eta_1)^{p_1}\cdots({}^*\eta_m)^{p_m})\big|_W\,.\end{aligned} \tag{3.22}$$

S použitím definice součinu na $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$ by se snadno ukázalo, že takto definované gradované zobrazení φ^*_W je morfismem gAs a $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)$ dobře definovaným morfismem gLRS. $\square$

3.2 N-variety

Definice 3.2.1 (Definice N-variety)**.** Buď $\mathcal{M} := (M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})$ lokálně gradovaně okruhový prostor, kde M je Hausdorffův topologický prostor splňující druhý axiom spočetnosti. Buď dále (n_j) posloupnost nezáporných celých čísel, kde $\sum_{j\in\mathbb{Z}} n_j < \infty$ a $n_j = 0$ pro $j < 0$. Nechť navíc existuje $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ otevřené pokrytí M, kde pro každé α existuje nezáporně gradovaná doména $\hat{U}_\alpha^{(n_j)}$ a $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}|_{U_\alpha}) \to \hat{U}_\alpha^{(n_j)}$ izomorfismus lokálně gradovaně okruhovných prostorů.

Potom řekneme, že $\mathcal{M}$ je **N-varieta** (nebo také **nezáporně gradovaná varieta**) gradované dimenze (n_j). Soubor $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ nazveme **gradovaný atlas** na $\mathcal{M}$, a jednotlivé $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, stejně jako každou další dvojici (U, φ) kde $\varphi : (U, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}|_U) \to \hat{U}^{(n_j)}$ je izomorfismus gLRS pro nějaké $U \in \mathrm{Op}(M)$ a $\hat{U} \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$, nazveme **gradovaná mapa** na $\mathcal{M}$.

Kategorii, jejíž objekty jsou N-variety, značíme NMan^∞, a zavádíme ji jako plnou podkategorii kategorie gLRS. Morfismům kategorie NMan^∞, tedy morfismům lokálně okruhových prostorů mezi N-varietami, se také říká **gradovaná hladká zobrazení**. Speciálně izomorfismům se říká **gradované difeomorfismy**.

Tvrzení 3.2.2. *Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})$ N-varieta gradované dimenze (n_j) a na ní gradovaný atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. Potom $\{(U_\alpha, \underline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je „klasický“ hladký atlas na M, zavádějící na M strukturu hladké variety, kterou nazveme **podkladová varieta** N-variety $\mathcal{M}$. Tuto podkladovou varietu také někdy značíme jako $\underline{\mathcal{M}}$.*

Důkaz. S ohledem na body (ii) a (iii) poznámky 3.1.1 mějme $(\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})_0 \in \mathsf{Sh}(M, \mathsf{cAs})$. Dále mějme libovolnou gradovanou mapu (U, φ) na $\mathcal{M}$. Pro každou $V \in \mathrm{Op}(U)$ označme $\hat{V} := \underline{\varphi}(V)$. To, že φ je izomorfismus, mimo jiné znamená, že $\underline{\varphi} : U \to \hat{U}$ je homeomorfismus, a

$$(\varphi^*_{\hat{V}})_0 : (\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{V}))_0 \to (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(V))_0 \tag{3.23}$$

je pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$ algebraický izomorfismus. Nechť tedy

$$\varphi^*_0 : \mathcal{C}^\infty_{n_0}\big|_{\hat{U}} \to \underline{\varphi}_*\, (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})_0|_U \tag{3.24}$$

značí izomorfismus snopů, definovaný pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$ jako $(\varphi^*_0)_{\hat{V}} := (\varphi^*_{\hat{V}})_0$. Potom je již snadné nahlédnout, že $(\underline{\varphi}, \varphi^*_0)$ je izomorfismus LRS mezi $(U, (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})_0\big|_U)$ a $(\hat{U}, \mathcal{C}^\infty_{n_0}\big|_{\hat{U}})$, přičemž $(\hat{U}, \mathcal{C}^\infty_{n_0}\big|_{\hat{U}})$ není nic jiného, než podkladová doména gradované domény $\hat{U}^{(n_j)}$. Pokud nyní za (U, φ) budeme brát libovolné $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z gradovaného atlasu, zjistíme, že $(M, (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})_0)$ je podle věty 1.2.21 hladká varieta, přičemž z důkazu téže věty plyne, že $\{(U_\alpha, \underline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je na ní atlasem. $\square$

Značení 3.2.3. (i) Budeme-li mít nějaký topologický prostor X a na něm kolekci otevřených množin $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, potom pro každou trojici indexů $\alpha,\beta,\gamma\in I$ budeme psát $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ a $U_{\alpha\beta\gamma} := U_{\alpha\beta}\cap U_\gamma$.

(ii) Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ N-varieta. Potom budeme, jak je zvykem u negradovaných variet, znakem $\mathcal{M}$ také někdy, když to bude vhodné, značit příslušný podkladový topologický prostor M. To jest například zápis $x\in\mathcal{M}$, $x\in\underline{\mathcal{M}}$ a $x\in M$ má pokaždé stejný význam.

Poznámka 3.2.4. Mějme N-varietu $\mathcal{M}$ gradované dimenze (n_j) a na ní gradovaný atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, to jest pro každé $\alpha\in I$ je $\varphi_\alpha\in \mathsf{gLRS}((U_\alpha, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha}), \hat{U}_\alpha^{(n_j)})$, kde $\hat{U}_\alpha = \underline{\varphi}_\alpha(U_\alpha)$. Podívejme se blíže na „přechodové“ morfismy mezi doménami. Buďte $\alpha,\beta\in I$, potom s ohledem na tvrzení 3.1.11 mějme

$$\varphi_\alpha\big|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})} : (U_{\alpha\beta}, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_{\alpha\beta}}) \to \Big(\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})\Big)^{(n_j)}, \tag{3.25}$$

$$\varphi_\beta\big|_{\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})} : (U_{\alpha\beta}, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_{\alpha\beta}}) \to \Big(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})\Big)^{(n_j)} \tag{3.26}$$

dva izomorfismy gLRS. Potom **přechodovým morfismem** mezi gradovanými doménami $\hat{U}_\alpha^{(n_j)}$ a $\hat{U}_\beta^{(n_j)}$ rozumíme izomorfismus $\varphi_{\beta\alpha} : \Big(\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})\Big)^{(n_j)} \to \Big(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})\Big)^{(n_j)}$ definovaný jako

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta\big|_{\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})} \circ \Big(\varphi_\alpha\big|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})}\Big)^{-1}. \tag{3.27}$$

Připomeňme z definice skládání morfismů gLRS, že $\underline{\varphi}_{\beta\alpha} = \underline{\varphi}_\beta \circ \underline{\varphi}_\alpha^{-1}\Big|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})}$ a pro každou množinu $W\in \mathrm{Op}(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta}))$ je

$$\varphi^*_{\beta\alpha,W} = \big(\varphi_\alpha^{-1}\big)^*_{\underline{\varphi}_\beta^{-1}(W)} \circ \varphi^*_{\beta,W} = \Big(\varphi^*_{\alpha,\underline{\varphi}_{\beta\alpha}^{-1}(W)}\Big)^{-1} \circ \varphi^*_{\beta,W}. \tag{3.28}$$

Speciálně platí, že pokud bychom měli nějaké $s\in(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(W))_0$, tak bychom s pomocí důsledku 3.1.18 zjistili, že

$$\varphi^*_{\beta\alpha,W}(s) = s\circ \underline{\varphi}_{\beta\alpha}\Big|_{\underline{\varphi}_{\beta\alpha}^{-1}(W)} = s\circ\underline{\varphi}_\beta\circ\underline{\varphi}_\alpha^{-1}\Big|_{\underline{\varphi}_{\beta\alpha}^{-1}(W)}, \tag{3.29}$$

což jsou právě „klasické“ přechodové funkce na odpovídajících podkladových doménách.

Definice 3.2.5. Mějme N-varietu $\mathcal{M}$ gradované dimenze (n_j) a na ní gradovaný atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. Potom pro každé $U\in\mathrm{Op}(\mathcal{M})$, $f\in\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a každé $\alpha\in I$ značíme

$$f_\alpha := \Big(\varphi^*_{\alpha,\underline{\varphi}_\alpha(U\cap U_\alpha)}\Big)^{-1}(f|_{U\cap U_\alpha}), \tag{3.30}$$

a $f_\alpha\in\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(U\cap U_\alpha))$ nazveme **lokálním reprezentantem** prvku f při mapě $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$.

Poznámka 3.2.6. Buď $\mathcal{M}$ N-varieta gradované dimenze (n_j) a na ní dvě gradované mapy $(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)$. Mějme navíc $U\in\mathrm{Op}(M)$, $f\in\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a označme $V := U\cap U_{\alpha\beta}$. Potom v návaznosti na poznámku 3.2.4 vidíme, že

$$
\begin{aligned}
f_\alpha|_{\underline{\varphi}_\alpha(V)} &= \left(\varphi^*_{\alpha,\underline{\varphi}_\alpha(V)}\right)^{-1}(f|_V) \\
&= \left(\varphi^*_{\alpha,\underline{\varphi}_\alpha(V)}\right)^{-1} \circ \varphi^*_{\beta,\underline{\varphi}_\beta(V)} \circ \left(\varphi^*_{\beta,\underline{\varphi}_\beta(V)}\right)^{-1}(f|_V) \\
&= \varphi^*_{\beta\alpha,\underline{\varphi}_\beta(V)} \circ \left(\varphi^*_{\beta,\underline{\varphi}_\beta(V)}\right)^{-1}(f|_V) \\
&= \varphi^*_{\beta\alpha,\underline{\varphi}_\beta(V)}\, f_\beta|_{\underline{\varphi}_\beta(V)}\,.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Speciálně pro $|f| = 0$ tedy $f_\alpha|_{\underline{\varphi}_\alpha(V)} = f_\beta \circ \underline{\varphi}_\beta \circ \underline{\varphi}_\alpha^{-1}\Big|_{\underline{\varphi}_\alpha(V)}$.

Věta 3.2.7. *Pro každou N-varietu $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ gradované dimenze (n_j) a její podkladovou varietu $(M, \mathcal{C}^\infty_M)$ existuje kanonicky definovaný izomorfismus snopů mezi $(\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})_0$ a $\mathcal{C}^\infty_M$. Tyto dva snopy dále ztotožníme.*

Důkaz. Buď $U \in \mathrm{Op}(M)$ libovolná. Hledáme izomorfismus

$$\mathscr{N}_U : (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U))_0 \to \mathcal{C}^\infty_M(U). \tag{3.32}$$

Pro každé $\alpha \in I$ zaveďme značení $W_\alpha := U \cap U_\alpha$. Mějme $f \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U))_0$, potom jeho lokální reprezentant f_α je prvkem $(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha)))_0 \simeq \mathcal{C}^\infty_{n_0}(\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha))$. Označme tedy

$$\hat{f}_\alpha := f_\alpha \circ \underline{\varphi}_\alpha\Big|_{W_\alpha}, \tag{3.33}$$

kde f_α bereme jako prvek $\mathcal{C}^\infty_{n_0}(\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha))$. Chceme využít lepícího axiomu snopu $\mathcal{C}^\infty_M$ a říct, že $\hat{f}_\alpha$ „lepí dohromady“ jedinečnou funkci $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty_M(U)$. Jelikož $\{W_\alpha\}$ tvoří otevřené pokrytí množiny U, stačí ověřit, že pro všechna $W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ platí $\hat{f}_\alpha\Big|_{W_{\alpha\beta}} = \hat{f}_\beta\Big|_{W_{\alpha\beta}}$. Avšak

$$\hat{f}_\alpha\Big|_{W_{\alpha\beta}} = \hat{f}_\beta\Big|_{W_{\alpha\beta}} \iff f_\alpha|_{\underline{\varphi}_\alpha(W_{\alpha\beta})} = f_\beta \circ \underline{\varphi}_\beta \circ \underline{\varphi}_\alpha^{-1}\Big|_{\underline{\varphi}_\alpha(W_{\alpha\beta})}, \tag{3.34}$$

kde z poznámky 3.2.6 víme, že druhá rovnost platí. Můžeme tedy definovat $\mathscr{N}_U(f) := \hat{f}$. Takto definované zobrazení $\mathscr{N}_U$ je homomorfismus algeber, jak by se snadno ukázalo za použití jeho definice a axiomu lokality snopu $\mathcal{C}^\infty_M$. Že se jedná o izomorfismus ukážeme kontrukcí oboustranné inverze. Buď $g \in \mathcal{C}^\infty_M(U)$. Potom pro každé $\alpha \in I$ označme

$$g_\alpha := g \circ \underline{\varphi}_\alpha^{-1}\Big|_{\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha)} \in \mathcal{C}^\infty_{n_0}(\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha)) \simeq (\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha)))_0, \tag{3.35}$$

$$\hat{g}_\alpha := \varphi^*_{\alpha,\underline{\varphi}_\alpha(W_\alpha)} g_\alpha \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(W_\alpha))_0\,. \tag{3.36}$$

Opět tvrdíme, že $\{g_\alpha\}$ dohromady lepí prvek $\hat{g} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ Konkrétně je tedy třeba ověřit, že $\hat{g}_\alpha|_{W_{\alpha\beta}} = \hat{g}_\beta|_{W_{\alpha\beta}}$ což je však pravda opět podle poznámky 3.2.6. Definujeme tedy $\mathscr{N}_U^{-1}(g) := \hat{g}$. Pro každé $\alpha, \beta \in I$ je potom snadné nahlédnout, že

$$\left(\mathscr{N}_U^{-1}(\mathscr{N}_U(f))\right)\big|_{W_{\alpha\beta}} = \mathscr{N}_U^{-1}(\mathscr{N}_U(f|_{W_{\alpha\beta}})) = f|_{W_{\alpha\beta}}\,, \tag{3.37}$$

$$\left(\mathscr{N}_U(\mathscr{N}_U^{-1}(g))\right)\big|_{W_{\alpha\beta}} = \mathscr{N}_U(\mathscr{N}_U^{-1}(g|_{W_{\alpha\beta}})) = g|_{W_{\alpha\beta}}\,, \tag{3.38}$$

což spolu s axiomy lokality snopů $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$ a $\mathcal{C}^\infty_{M}$ dokazuje, že jde vskutku o izomorfismus. K dokázání věty bychom ještě měli ověřit, že takto zavedená zobrazení $\{\mathscr{N}_U\}_{U\in \mathrm{Op}(M)}$ komutují s kontrakcemi, což je však z jejich definice zřejmé. $\square$

Důsledek 3.2.8. *Mějme $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$ a $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$. Potom $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ je invertibilní právě tehdy, když $|f| = 0 \wedge (\forall x \in U)\,(f(x) \neq 0)$.*

Poznámka 3.2.9. Věta 3.2.7 nám umožňuje jednoduchým způsobem zavést na každé N-varietě rozklad jedničky a hladké bump-funkce[2]. Konkrétně, pro N-varietu $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ a její otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ řekneme, že soubor funkcí $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M))_0$ je **rozklad jedničky** na $\mathcal{M}$ příslušný pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ právě když je rozkladem jedničky na $\underline{\mathcal{M}}$ příslušným stejnému pokrytí. Stejně tak každou $\psi \in \mathcal{C}^\infty_{M}(M)$ hladkou bump-funkci na $V \in \mathrm{Op}(M)$ s nosičem v $U \in \mathrm{Op}(M)$ prohlásíme za hladkou bump-funkci na V s nosičem v U na $\mathcal{M}$.

Lemma 3.2.10 (Extenční)**.** *Uvažujme $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$. Potom pro každou množinu $V \in \mathrm{Op}(U)$, $\overline{V} \subset U$ existuje globální prvek $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$, pro kterou platí $\hat{f}|_V = f_V$.*

Důkaz. Nechť je ψ hladká bump-funkce na V s nosičem v U. Všimněme si, že $\{\mathrm{supp}(\psi)^{\mathrm{c}}, U\}$ tvoří otevřené pokrytí M. Definujeme $\hat{f}_1 := f\,\psi|_U \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a $\hat{f}_2 := 0 \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(\mathrm{supp}(\psi)^{\mathrm{c}}))_{|f|}$. Jelikož $\hat{f}_1|_{U\cap \mathrm{supp}(\psi)^{\mathrm{c}}} = 0 = \hat{f}_2|_{U\cap \mathrm{supp}(\psi)^{\mathrm{c}}}$, můžeme využít lepícího axiomu snopu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$ a označit jimi „slepený“ prvek jako $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$. Nakonec zjišťujeme, že

$$\hat{f}|_V = (\hat{f}|_U)|_V = (\hat{f}_1)|_V = f|_V \psi|_V = f|_V. \tag{3.39}$$

$\square$

Nyní uvedeme bez důkazu užitečnou větu, která říká, že každá N-varieta je plně určená přechodovými morfismy mezi „svými“ doménami. Mimo jiné nám tak dává další způsob konstrukce N-variet. Jde o speciální případ [9, Exercise II.8].

Věta 3.2.11. *Mějme (n_j) posloupnost nezáporných celých čísel, pro kterou platí $\sum_{j\in\mathbb{Z}} n_j < \infty$ a $n_j = 0$ pro $j < 0$. Mějme také M je hladkou n_0-rozměrnou varietu s atlasem $\{(U_\alpha, \underline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. Nechť pro každé $\alpha, \beta \in I$ existují gradované difeomorfismy*

$$\varphi_{\alpha\beta} : \left(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})\right)^{(n_j)} \to \left(\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})\right)^{(n_j)}, \tag{3.40}$$

přičemž $\underline{\varphi}_{\alpha\beta} = \underline{\varphi}_\alpha \circ (\underline{\varphi}_\beta)^{-1}\,|_{\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})}$, které pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in I$ splňují

$$\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}, \tag{3.41}$$

po restrikci na $\underline{\varphi}_\gamma(U_{\alpha\beta\gamma})$. Potom existuje N-varieta $\mathcal{M}$ gradované dimenze (n_j) s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ taková, že M je její podkladová varieta a $\varphi_{\alpha\beta}$ jsou přechodové morfismy mezi $\hat{U}^{(n_j)}_\beta$ a $\hat{U}^{(n_j)}_\alpha$. Tato N-varieta je navíc určená jednoznačně až na gradovaný difeomorfismus.

[2] Anglické ekvivalenty těchto termínů jsou "partitions of unity" a "smooth bump functions". Pro jejich korektní definici a mnohem víc, nechť čtenář nahlédne do [7].

Poznámka 3.2.12. Na závěr této podkapitoly se zmíníme o supervarietách a jejich vztahu k N-varietám. Cílem této poznámky je naznačit definici supervariety a ukázat, že supervariety nelze *a priori* chápat pouze jako speciální případ N-variet. Pro detailní úvod do supergeometrie, nechť je čtnenář odkázán na [10].

Supervarieta je opět topologický prostor (T_2, splňující 2. axiom spočetnosti), který je lokálně izomorfní (vhodným izomorfismem) k takzvaným superdoménám. Ilustrujme nyní rozdíl mezi gradovanou doménou a superdoménou. Připomeňme, že strukturní snop (nezáporně) gradované domény $U^{(n_j)}$ pro $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$, to jest snop[3] $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}$, přiřazuje každé množině $V \in \mathrm{Op}(U)$ rozšířenou symetrickou algebru $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U) \equiv \bar{\mathrm{S}}\left(\mathbb{R}^{(n_j)}_0, \mathcal{C}^\infty_{n_0}(U)\right)$.

Mějme nyní dvě čísla $p, q \in \mathbb{N}_0$ a $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^p)$. Potom strukturní snop superdomény $U^{p|q}$, který označíme jako $\mathcal{O}_{p|q}$, přiřazuje každé množině $V \in \mathrm{Op}(U)$ superalgebru $\mathcal{O}_{p|q}(V) \equiv \mathcal{C}^\infty_p(U) \otimes \bigwedge^\bullet \mathbb{R}^q$. To, že jde o superalgebru, v tomto případě znamená, že každý homogenní prvek, to jest prvek $f \in \mathcal{C}^\infty_p(U) \otimes \bigwedge^s \mathbb{R}^q$ pro nějaké $s \in \mathbb{N}_0$, je prohlášen za *sudý* či *lichý*, podle toho, zda s je sudé či liché. Nejenom to, paritu mají i nehomogenní prvky, které jsou lineární kombinací homogenních prvků stejné parity (tj. samých sudých nebo lichých). Po morfismech mezi superdoménami se potom požaduje zachovávání tohoto $\mathbb{Z}_2$-**gradování**, totiž parity.

Uveďme malý příklad. Mějme souřadnice $\{x^i\}_{i=1}^p$ na množině U a bázi $(\theta_1, \ldots, \theta_q)$ prostoru $\mathbb{R}^q$. Potom prvky $\mathcal{O}_{p|q}(U)$ jsou polynomy v antikomutujících proměnných θ_i s koeficienty v hladkých funkcích na U. Prostor $\mathcal{O}_{p|q}(U)$ se tak zdá velice podobný prostoru $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$ pro $n_0 = p$, $n_1 = q$ a $n_k = 0$ pro $k \neq 0, 1$. Samozřejmě očividným rozdílem je, že $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$ je zaveden jako *gradovaný* prostor, totiž posloupnost prostorů který „nepřipouští“ nehomogenní prvky, kdežto $\mathcal{O}_{p|q}(U)$ je zaveden jako direktní součet různých prostorů, ve kterém je $\mathbb{Z}_2$-gradování zavedeno „dodatečně“, totiž že některé prvky (i nehomogenní) jsou označeny za sudé či liché.

Další, možná na první pohled méně zřejmý, rozdíl se skrývá právě v připouštěných morfismech. Již bylo zmíněno, že po morfismech superdomén (a obecně supervariet) se požaduje pouze zachovávání parity. Je tak například možná existence endomorfismu[4] na $\mathcal{O}_{p|q}(U)$, který zobrazuje $\theta_1 \mapsto \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4$, ba dokonce $x^1 \mapsto 4x^1 + \theta_2 \wedge \theta_3$ což je pro endomorfismy na $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$ naprosto nemyslitelné.

3.3 Příklady N-variet

Existují různé způsoby kterými lze z gradovaného vektorového prostoru vyrobit N-varietu. Například již víme, jak z nezáporně gradovaného konečněrozměrného prostoru $\mathbb{R}^{(n_j)}$ vyrobit doménu $(\mathbb{R}^{n_0})^{(n_j)}$ (viz příklad 3.1.3, kde za množinu U bereme celé $\mathbb{R}^{n_0}$). Ukážeme si jednu další možnost.

Definice 3.3.1. Řekneme, že souhrnná báze $(e_1, \ldots, e_n)$ konečněrozměrného prostoru $\mathbb{R}^{(n_j)}$ je **standardní souhrnná báze** pro $\mathbb{R}^{(n_j)}$, právě pokud je „postavena ze vzestupně řazených standardních bází“. To jest

$$(e_1, \ldots, e_n) = \{\, e^i_j \mid \ \leq \}, \tag{3.42}$$

kde e^i_j je j-tý vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n_i}$, a $e^i_j \leq e^k_\ell \overset{def}{\iff} (\, i < k \,) \vee (\, i = k \wedge j \leq \ell \,)$.

[3] Samozřejmě zúžený na U, viz poznámka 1.2.18

[4] Zde užíváme endomorfismy pouze pro lepší přehlednost. Ilustrované koncepty se samozřejmě vztahují na všechny morfismy.

Definice 3.3.2. Pro každé $X \in \mathsf{gVec}$ a každé $\ell \in \mathbb{Z}$ definujeme prostor $X[\ell] \in \mathsf{gVec}$ zvaný **prostor X posunutý ve stupních** o ℓ jako

$$(X[\ell])_k := X_{k+\ell}. \tag{3.43}$$

Příklad 3.3.3 (N-varieta z nekladně gradovaného vektorového prostoru)**.** Mějme konečněrozměrný gradovaný vektorový prostor X, pro který navíc platí, že $X_k = 0$ pro všechna $k > 0$. Jeho duální prostor X^* je tedy nezáporně gradovaný. Naším cílem je sestrojit N-varietu $\mathcal{M}_X := (X_0, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}_X})$ o stejné gradované dimenzi (n_j), jako má X^*. Označme jako D gradovaný vektorový prostor, kde $D_0 = \{0\}$ a $D_k = (X^*)_k$ pro všechna $k \neq 0$. Snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}_X}$ definujeme pro každé $U \in \mathrm{Op}(X_0)$ jako

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}_X}(U) := \bar{\mathrm{S}}(D, \mathcal{C}^\infty_{X_0}(U)). \tag{3.44}$$

To, že $\mathcal{M}_X$ je N-varieta (a s ohledem na tvrzení 3.1.12 také lokálně gradovaně okruhový prostor) ověříme nalezením globální mapy, to jest izomorfismu gLRS $\varphi : \mathcal{M}_X \to (\mathbb{R}^{n_0})^{(n_j)}$. Stanovme si bázi $(v_1, \ldots, v_{n_0})$ prostoru X_0. Homeomorfismus $\underline{\varphi} : X_0 \to \mathbb{R}^{n_0}$ potom zavedeme jednoduše jako souřadnicový izomorfismus, to jest pro každé $x = x^i v_i \in X_0$ máme

$$\underline{\varphi}(x) = x^i e_i, \tag{3.45}$$

kde $(e_j)_{j=1}^{n_0}$ značí standardní bázi $\mathbb{R}^{n_0}$. Všimněme si, že $\underline{\varphi}$ je hladké. Dále nechť $(\eta_1, \ldots, \eta_{n_*})$ značí standardní souhrnnou bázi prostoru $\mathbb{R}^{(n_j)}_0$ a buď $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_*})$ souhrnná báze prostoru D, uspořádaná tak, že pro všechna $i, j = 1, \ldots, n_*$ platí $i \leq j \implies |\xi_i| \leq |\xi_j|$. Potom pro každé $U \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^{n_0})$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(U)$ definujeme

$$\varphi^*_U(f) = \varphi^*_U\left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} f_p\, \eta_1^{p_1} \ldots \eta_{n_*}^{p_{n_*}}\right) := \sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} f_p \circ \underline{\varphi}\big|_{\underline{\varphi}^{-1}(U)}\, \xi_1^{p_1} \ldots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}. \tag{3.46}$$

Snadno se nahlédne (podobně jako v důkazu věty 3.1.19), že takto definované φ^* je izomorfismus snopů, a tedy φ je globální mapa pro $\mathcal{M}_X$.

Podívejme se blíže na případ, kdy za X ve výše uvedené konstrukci vezmeme za $V[\ell]$ pro nějaké konečněrozměrné $V \in \mathsf{Vec}$ a $\ell \in \mathbb{N}$. Skutečně se jedná o nekladně gradovaný prostor, neboť jediný jeho nenulový komponentní vektorový prostor je $(V[\ell])_{-\ell} = V_0$. Buď $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ báze prostoru V^*, potom je také souhrnnou bází prostoru $X^* \equiv (V[\ell])^*$, až na to, že v tomto prostoru mají všechny stupeň ℓ. Jelikož nyní $X_0 = 0$ a pro prostor D z výše uvedené konstrukce platí $D = X^*$, dostáváme N-varietu $\mathcal{M}_{V[\ell]} = (\{0\}, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}_{V[\ell]}})$. Vidíme, že podkladová varieta variety $\mathcal{M}_{V[\ell]}$ je jednobodová množina $\{0\}$ a její jediná netriviální algebra gradovaných funkcí je

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}_{V[\ell]}}(\{0\}) \equiv \bar{\mathrm{S}}((V[\ell])^*, \mathcal{C}^\infty_{\{0\}}(\{0\})) \simeq \bar{\mathrm{S}}((V[\ell])^*, \mathbb{R}) \simeq \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathrm{S}^p((V[\ell])^*) \equiv \mathrm{S}((V[\ell])^*). \tag{3.47}$$

Dalším příkladem bude takzvaný vektorový fibrovaný prostor s posunutými stupni[5]. K jeho konstrukci využijeme větu 3.2.11, kde si přechodové morfismy v jistém smyslu „vypůjčíme“ z klasického vektorového fibrovaného prostoru.

[5]Degree shifted vector bundle.

Buď $\hat{\pi} : E \to M$ vektorový fibrovaný prostor s typickým vláknem V, $\dim(M) = n_0$, $\dim(V) = m$. Dále mějme na M atlas $\{(U_\alpha, \underline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ takový, že pro každé $\alpha \in I$ existuje lokální trivializace $\hat{\phi}_\alpha : U_\alpha \times V \to \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha)$. Označme $\hat{\phi}_\alpha(p) := \hat{\phi}_\alpha(p, \cdot) : V \to V$. Opět budeme pracovat s duálními objekty, a tedy nechť $\pi : E^* \to M$ je duální vektorový fibrovaný prostor s příslušnými lokálními trivializacemi $\phi_\alpha : U_\alpha \times V^* \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, které pro každé $\alpha \in I$ a každé $p \in U_\alpha$ splňují

$$\phi_\alpha(p) = \left(\hat{\phi}_\alpha(p)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{3.48}$$

kde $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ značí transpozici lineárního zobrazení. Mějme nyní $\alpha, \beta \in I$, $p \in U_{\alpha\beta}$. Potom pro přechodová zobrazení na vlákně $\hat{\tau}_{\alpha\beta}(p)$ a $\tau_{\alpha\beta}(p)$ platí

$$\tau_{\alpha\beta}(p) \equiv \phi_\alpha(p)^{-1}\phi_\beta(p) = \left(\hat{\phi}_\alpha(p)\right)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\phi}_\beta(p)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\hat{\phi}_\beta(p)^{-1}\hat{\phi}_\alpha(p)\right)^{\mathrm{T}} \equiv \hat{\tau}_{\beta\alpha}(p)^{\mathrm{T}}. \tag{3.49}$$

Zvolme nyní $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ bázi prostoru V^*. Jelikož $\tau_{\alpha\beta}(p)$ je operátor na V^*, označme

$$\tau_{\alpha\beta}(p)\,\eta_i =: (\tau_{\alpha\beta}(p))^j{}_i\,\eta_j, \tag{3.50}$$

to jest $(\tau_{\alpha\beta}(p))^j{}_i$, $i, j = 1, \dots, m$ jsou komponenty příslušné invertibilní matice. Jelikož pro všechna $p \in U_{\alpha\beta\gamma}$ platí, že $\tau_{\gamma\alpha}(p) = \tau_{\gamma\beta}(p)\tau_{\beta\alpha}(p)$, jednoduchým výpočtem dostaneme vztah

$$(\tau_{\gamma\alpha}(p))^j{}_i = (\tau_{\gamma\beta}(p))^j{}_\ell\,(\tau_{\beta\alpha}(p))^\ell{}_i. \tag{3.51}$$

Příklad 3.3.4 (Vektorový fibrovaný prostor s posunutými stupni)**.** Pokračujme v zavedeném značení. Nechť $\psi_{(\eta)} : V^* \to \mathbb{R}^m$ značí souřadnicový izomorfismus pro bázi $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ a pro každé $j = 1, \dots, m$ označme $\xi_j := \psi_{(\eta)}(\eta_j)$. Buď $q \in \mathbb{N}$ a nechť $(n_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ značí posloupnost, kde $n_0 = \dim(M)$, $n_q = m$ a $n_k = 0$ pro $k \neq 0, q$. Vidíme, že $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ lze chápat jako souhrnnou bázi prostoru $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$, přičemž $|\xi_j| = q$ pro každé j. Naším cílem je zde zkonstruovat N-varietu $E[q] = (M, \mathcal{C}^\infty_{E[q]})$ o gradované dimenzi právě (n_j).

$\forall \alpha, \beta \in I$ je tedy třeba definovat izomorfismy snopů $\varphi^*_{\alpha\beta} : \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}\Big|_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})} \to \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}\Big|_{\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})}$, které získáme z věty 3.1.19 určením m-tice $\{{}^*\xi_\ell\}_{\ell=1}^m \subset (\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\beta(U_{\alpha\beta})))_q$. V návaznosti na (3.50) volíme

$${}^*\xi_\ell := \left((\tau_{\beta\alpha})^i{}_\ell \circ \underline{\varphi}_\beta^{-1}\right)\xi_i. \tag{3.52}$$

Ověřme, že takto definované přechodové morfismy splňují podmínku (3.41). Stačí ověřit jejich platnost na prvcích ξ_ℓ:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma})^*\,\xi_\ell &= \varphi^*_{\beta\gamma}\,\varphi^*_{\alpha\beta}\,\xi_\ell \\
&= \varphi^*_{\beta\gamma}\left(\left((\tau_{\beta\alpha})^i{}_\ell \circ \underline{\varphi}_\beta^{-1}\right)\xi_i\right) \\
&= \left((\tau_{\beta\alpha})^i{}_\ell \circ \underline{\varphi}_\beta^{-1} \circ \underline{\varphi}_{\beta\gamma}\right)\left(\varphi^*_{\beta\gamma}\,\xi_i\right) \\
&= \left((\tau_{\beta\alpha})^i{}_\ell \circ \underline{\varphi}_\gamma^{-1}\right)\left((\tau_{\gamma\beta})^k{}_i \circ \underline{\varphi}_\gamma^{-1}\right)\xi_k \\
&= \left((\tau_{\gamma\alpha})^k{}_\ell \circ \underline{\varphi}_\gamma^{-1}\right)\xi_k \\
&= \varphi^*_{\alpha\gamma}\,\xi_\ell,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

kde jsme pro větší přehlednost poněkud zjednodušili zápis. Ověřili jsme všechny předpoklady věty 3.2.11 a tedy existuje N-varieta $E[q] = (M, \mathcal{C}^\infty_{E[q]})$, pro kterou mají $\varphi_{\alpha\beta} = (\underline{\varphi}_{\alpha\beta}, \varphi^*_{\alpha\beta})$ roli přechodových morfismů mezi příslušnými doménami.

Je možné ukázat, že tato N-varieta nezávisí na konkrétní volbě trivializací původního vektorového fibrovaného prostoru.

Poznámka 3.3.5. Podívejme se co vznikne, jestliže v předchozí konstrukci zvolíme $E = \mathrm{T}M$, totiž tečný fibrovaný prostor, a $q = 1$. Výsledná N-varieta $\mathrm{T}[1]M := \mathrm{T}M[1] = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]M})$ má gradovanou dimenzi (n_j), kde jediná potenciálně nenulová čísla jsou $n_0 = n_1$. Přeznačme nyní $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}) =: (\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^{n_0})$. Každý prvek $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]M}(U)$ potom vypadá lokálně jako polynom v $\mathrm{d}x^j$ s koeficienty v hladkých funkcích. Navíc pro všechna $i, j = 1, \ldots, n_0$ platí $\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^i$. Analogie s diferenciálními formami na M je úplná, když připomeneme, že pro transformace „1-forem“ $\mathrm{d}x^j$ platí vztahy (3.52) a (3.49). Můžeme tedy tvrdit, že $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]M}$ je izomorfní snopu diferenciálních forem na M.

Kapitola 4

Diferenciální počet

4.1 Snopy modulů

V kapitole 2 jsme definovali pojem levého modulu nad gradovaným okruhem.

Definice 4.1.1. Buďte $A \in \mathsf{gcAs}, V \in \mathsf{gVec}$. Řekneme, že V je levým A-modulem, pokud je V (brané jako gradovaná abelovská grupa) levým modulem nad A (braném jako gradovaný okruh), a navíc jsou zobrazení φ_{ij} z definice 2.1.5 bilineární pro všechna $i, j \in \mathbb{Z}$. Dále budeme opět využívat multiplikativního zápisu. Jelikož je A gradovaně komutativní, každý levý A-modul V je zároveň také pravým A-modulem, kde pro každé $a \in A,\ v \in V$ zavádíme

$$va := (-1)^{|v||a|} av. \tag{4.1}$$

Nemá tedy smysl mluvit o „strannosti“ a říkáme jednoduše, že V je **modulem nad** A (nebo také A-modulem).

Definice 4.1.2. Buďte X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gVec})$. Potom řekneme, že $\mathcal{F}$ je **snop $\mathcal{A}$-modulů** na X $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ platí

1. Pro každou $U \in \mathrm{Op}(X)$ je $\mathcal{F}(U)$ modulem nad $\mathcal{A}(U)$.

2. Kompatibilita s restrikcemi. To jest, že pro všechny $V, U \in \mathrm{Op}(X),\ V \subseteq U$ a pro každé $a \in \mathcal{A}(U),\ v \in \mathcal{F}(U)$ platí $(av)|_V = a|_V\ v|_V$.

Příklad 4.1.3. Mějme topologický prostor X, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a konečněrozměrný prostor $K \in \mathsf{gVec}$. Potom zavádíme $\mathcal{A} \otimes K \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gVec})$ následovně:

$$(\mathcal{A} \otimes K)(U) := \mathcal{A}(U) \otimes K, \tag{4.2a}$$
$$(\mathcal{A} \otimes K)(\imath_V^U) := \mathcal{A}(\imath_V^U) \otimes \mathrm{id}_K, \tag{4.2b}$$

pro každé $V, U \in \mathrm{Op}(X), V \subseteq U$. Že se skutečně jedná o snop potom plyne z faktu, že $\mathcal{A}$ je snop a že každý prvek $f \in \mathcal{A}(U) \otimes K$ lze jednoznačně rozložit jako $f = f^j \otimes k_j$, kde $\{k_j\}$ je nějaká pevně zvolená souhrnná báze prostoru K (přičemž $|f^j| + |k_j| = |f|$). Navíc pro všechna $a, b \in \mathcal{A}(U)$ a $k \in K$ definujeme

$$a(b \otimes k) := (ab) \otimes k, \tag{4.3}$$

a přirozeně rozšíříme linearitou na všechny prvky z $\mathcal{A}(U) \otimes K$, což na $\mathcal{A} \otimes K$ zavádí strukturu $\mathcal{A}(U)$ - modulu. Tato struktura je zjevně kompatibilní s restrikcemi, což z $\mathcal{A} \otimes K$ činí snop $\mathcal{A}$-modulů.

Definice 4.1.4. Buďte X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$, $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}$-modulů a $m \in \mathbb{N}_0$. Potom řekneme, že kolekce $\{r_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{F}(X)$ je **globální rám** na $\mathcal{F}$ $\overset{def}{\iff}$ pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ a $f \in \mathcal{F}(U)$ existuje jednoznačně určený soubor $\{f^j\} \subseteq \mathcal{A}(U)$ takový, že $f = f^j \, r_j|_U$.

Dále řekneme, že $\mathcal{F}$ je **volně a konečně generovaný**, právě pokud na něm existuje globální rám.

Poznámka 4.1.5. Mějme X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a $\mathcal{F}$ volně a konečně generovaný snop $\mathcal{A}$-modulů. Potom restrikcí globálního rámu zjistíme, že pro každou $U \in \mathrm{Op}(X)$ je $\mathcal{F}|_U$ volně a konečně generovaný snop $\mathcal{A}|_U$-modulů.

Definice 4.1.6. Mějme X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gVec})$ dva snopy $\mathcal{A}$-modulů. Řekneme, že morfismus snopů $\mathscr{N} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je zároveň **morfismem snopů $\mathcal{A}$-modulů** $\overset{def}{\iff}$ $\mathscr{N}_U$ je morfismem $\mathcal{A}(U)$-modulů pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$. To jest, že pro každé $a \in \mathcal{A}(U)$, $f \in \mathcal{F}(U)$ platí $\mathscr{N}_U(af) = a\mathscr{N}_U(f)$.

Tvrzení 4.1.7. *Buďte X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}$-modulů. Potom $\mathcal{F}$ je volně a konečně generovaný $\iff$ existuje konečněrozměrný prostor $K \in \mathsf{gVec}$ a izomorfismus snopů $\mathcal{A}$-modulů mezi $\mathcal{F}$ a $\mathcal{A} \otimes K$.*

Důkaz. ($\Longleftarrow$): Nechť $\mathscr{N} : \mathcal{A} \otimes K \to \mathcal{F}$ značí příslušný izomorfismus a nechť je $(k_1, \ldots, k_m)$ souhrnná báze prostoru K. Potom pro každé $j = 1, \ldots, m$ definujeme $r_j := \mathscr{N}_X(1 \otimes k_j)$, kde 1 je jednička v $\mathcal{A}(X)$. Ověřme, že $\{r_j\}_{j=1}^m$ je globální rám pro $\mathcal{F}$. Mějme $f \in \mathcal{F}(U)$ pro nějaké $U \in \mathrm{Op}(X)$. Označme $\hat{f} := \mathscr{N}_U^{-1} f \in \mathcal{A}(U) \otimes K$. Potom jistě $\hat{f} = f^j \otimes k_j$ pro jednoznačně určené $f^j \in \mathcal{A}(U)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f = \mathscr{N}_U(\hat{f}) = \mathscr{N}_U(f^j \otimes k_j) = \mathscr{N}_U\left(f^j (1|_U \otimes k_j)\right) &= f^j \mathscr{N}_U(1|_U \otimes k_j) \\ &= f^j \, (\mathscr{N}_X(1 \otimes k_j))|_U \equiv f^j \, r_j|_U \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

($\Longrightarrow$): Mějme tedy $\{r_j\}_{j=1}^m$ globální rám pro $\mathcal{F}$. Nechť je BÚNO uspořádán tak, že $i \leq j \implies |r_i| \leq |r_j|$. Pro každé $\ell \in \mathbb{Z}$ definujeme nezáporné číslo $m_\ell := \#\{j \mid |r_j| = \ell\}$ a za prostor K potom volíme $\mathbb{R}^{(m_\ell)}$. Nechť nyní $(k_1, \ldots, k_m)$ značí standardní souhrnnou bázi prostoru $\mathbb{R}^{(m_\ell)}$. Potom pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ a $f \in \mathcal{A}(U) \otimes K$ definujeme

$$\mathscr{N}_U(f) \equiv \mathscr{N}_U(f^j \otimes k_j) := f^j \, r_j|_U \,. \tag{4.5}$$

Je snadné se přesvědčit, že takto definované $\mathscr{N} : \mathcal{A} \otimes K \to \mathcal{F}$ je izomorfismus snopů. Navíc pro každé $a \in \mathcal{A}(U)$ platí $\mathscr{N}_U(af) = a \, f^j \, r_j|_U = a\mathscr{N}_U(f)$, což z $\mathscr{N}$ dělá izomorfismus snopů $\mathcal{A}$-modulů. $\square$

Lemma 4.1.8. *Buďte $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, $x \in \mathcal{M}$ a $U \in \mathrm{Op}_x(\mathcal{M})$. Označme jako $J_{(x)}(U) \subseteq \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(U)$ gradovaný ideál, definovaný takto:*

$$\left(J_{(x)}(U)\right)_k = \begin{cases} (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(U))_k & \text{pro } k \neq 0, \\ \{ \, f \in (\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(U))_0 \mid f(x) = 0 \, \} & \text{pro } k = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Potom existuje kanonický rozklad $\mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(U) = \mathbb{R} \oplus J_{(x)}(U)$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je chápána jako konstantní funkce na U.

Důkaz. Nejprve si všimněme, že $\mathbb{R}$ a $J_{(x)}(U)$ mají triviální průnik. Pro jiný než nultý stupeň je rozklad triviální, a pro $f \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U))_0$ máme $f = f(x) + (f - f(x))$, kde první člen je z $\mathbb{R}$ a druhý z $J_{(x)}(U)$. □

Tvrzení 4.1.9. *Mějme N-varietu $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ a dva konečněrozměrné gradované vektorové prostory K a L. Nechť navíc existuje $\mathscr{N} : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}} \otimes K \to \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}} \otimes L$ izomorfismus snopů $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů. Potom K a L mají stejnou gradovanou dimenzi.*

Důkaz. Nechť je $(k_1, \dots, k_n)$ souhrnná báze K a $(\ell_1, \dots, \ell_m)$ souhrnná báze L. Pro každé $a = 1, \dots, n$ platí $\mathscr{N}_M(1 \otimes k_a) = k^b{}_a \otimes \ell_b$ pro nějaké jednoznačně určené $k^b{}_a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$. Pro každé $U \in \mathrm{Op}(M)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U) \otimes K$ tedy máme

$$\mathscr{N}_U(f) \equiv \mathscr{N}_U(f^a \otimes k_a) = f^a \mathscr{N}_U(1_U \otimes k_a) = (f^a \, k^b{}_a \Big|_U) \otimes \ell_b. \tag{4.7}$$

Jelikož je $\mathscr{N}_U$ dle předpokladu izomorfismus $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$-modulů, lze se přesvědčit, že pro každý ideál $I \subset \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ je zobrazení $\hat{\mathscr{N}_U} : (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)/I) \otimes K \to (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)/I) \otimes L$ definované jako

$$\hat{\mathscr{N}_U}([f^a] \otimes k_a) := [f^a k^b{}_a] \otimes \ell_b \tag{4.8}$$

izomorfismus $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)/I$-modulů. Nyní stačí vzít za I ideál $J_{(x)}(U)$ z lemmatu 4.1.8, a podle stejného lemmatu dostaneme izomorfismus $\hat{\mathscr{N}_U} : \mathbb{R} \otimes K \to \mathbb{R} \otimes L$. Jelikož však $\mathbb{R} \otimes K \cong K$ a $\mathbb{R} \otimes L \cong L$, znamená to, že existuje gVec izomorfismus mezi K a L, a tudíž musejí mít stejnou gradovanou dimenzi. □

Poznámka 4.1.10. Podobně bychom mohli vyslovit následující tvrzení: mějme K, L dva konečněrozměrné gradované vektorové prostory, a nechť je $\chi : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M) \otimes K \to \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M) \otimes L$ izomorfismus $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$-modulů. Potom $\mathrm{gdim}(K) = \mathrm{gdim}(L)$.

Důkaz by probíhal analogicky k důkazu předchozího tvrzení pro volbu $U = M$.

Definice 4.1.11. Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}) \in \mathsf{NMan}^\infty$ a $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(M, \mathsf{gVec})$ volně a konečně generovaný snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů. Buď $K \in \mathsf{gVec}$ ten prostor, pro který platí, že $\mathcal{F}$ je izomorfní $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}} \otimes K$. Potom gradovanou dimenzi prostoru K nazveme **gradovanou hodností** snopu $\mathcal{F}$, a značíme $\mathrm{grnk}(\mathcal{F}) := \mathrm{gdim}(K)$. Podle předchozího tvrzení je tato definice nezávislá na konkrétním výběru prostoru K.

Definice 4.1.12. Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ N-varieta a $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(M, \mathsf{gVec})$ snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **lokálně volně a konečně generované**, právě když pro každé $x \in M$ existuje $U \in \mathrm{Op}_x(M)$ takové, že $\mathcal{F}|_U$ je volně a konečně generovaný snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_U$-modulů. Každému globálnímu rámu na $\mathcal{F}|_U$ se říká **lokální rám** na $\mathcal{F}$.

Definice 4.1.13. Pro topologický prostor X a $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gVec})$ zavádíme pojem **lineárního morfismu** stupně $k \in \mathbb{Z}$ z $\mathcal{F}$ do $\mathcal{G}$ a označujeme jím $\psi = \{\psi_U\}_{U \in \mathrm{Op}(X)}$, kde pro každé U je $\psi_U \in \mathrm{Lin}_k(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ a všechna ψ_U navíc komutují s restrikcemi. Rozšiřujeme tak pojem morfismu snopů s hodnotami v gradovaných vektorových prostorech, což jsou právě lineární morfismy stupně nula. Množinu všech lineárních morfismů stupně k z $\mathcal{F}$ do $\mathcal{G}$ značíme jako $\mathrm{Lin}_k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Nechť jsou $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ nyní snopy $\mathcal{A}$-modulů pro nějaké $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$. Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ zavádíme $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}_k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ jako podprostor $\mathrm{Lin}_k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, kde $\psi \in \mathrm{Lin}_k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ je zároveň prvkem $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}_k(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{def}{\iff}$ pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$, $a \in \mathcal{A}(U)$, $v \in \mathcal{F}(U)$ platí

$$\psi_U(av) = (-1)^{|\psi||a|} a \psi_U(v). \tag{4.9}$$

Rozšiřujeme tak pojem morfismu snopů $\mathcal{A}$-modulů, což jsou právě prvky $\mathrm{Lin}_0^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ potom značí gradovaný vektorový prostor, kde $\left(\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\right)_k := \mathrm{Lin}_k^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

Tvrzení 4.1.14. *Při značení z předchozí definice je $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ snopem $\mathcal{A}$-modulů.*

Důkaz. Nejprve je samozřejmě zapotřebí definovat příslušná přiřazení. Pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ tedy zavádíme $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) := \mathrm{Lin}^{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ a pro $V \in \mathrm{Op}(U)$, $\psi \in \mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ je jednoduše $(\psi|_V)_W := \psi_W$ pro všechna $W \in \mathrm{Op}(V)$. Že s takto definovanými přiřazeními jde o předsnop s hodnotami v gVec se ověří snadno, a stejně snadno by se ověřila platnost axiomů snopu (s využitím jejich ekvivalentu pro snop $\mathcal{G}$). Z důvodu stručnosti zde tato ověření provádět nebudeme.

Abychom z $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ dostali snop $\mathcal{A}$-modulů, musíme pro každé $U \in \mathrm{Op}(X)$ zavést na $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ strukturu $\mathcal{A}(U)$-modulu. To uděláme jednoduše tak, že pro $a \in \mathcal{A}(U)$ a pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$ definujeme $(a\psi)_V := a|_V\, \psi_V$. Pro tuto definici je zjevné, že $(a\psi)|_V = a|_V\, \psi|_V$. □

Definice 4.1.15. Buď X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}$-modulů. Potom $\mathrm{Lin}^{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{A}) =: \mathcal{F}^*$ nazveme **duálním snopem** snopu $\mathcal{F}$. V této definici přirozeně chápeme $\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \mathbb{R}$ jako volně a konečně generovaný snop $\mathcal{A}$-modulů, jehož gradovaná hodnost je (n_j), kde $n_0 = 1$ a $n_k = 0$ pro $k \neq 0$.

Definice 4.1.16. Buď V konečněrozměrný gradovaný vektorový prostor se souhrnnou bází $(v_1, \ldots, v_m)$. Řekneme, že souhrnná báze $(w^1, \ldots, w^m)$ prostoru V^* je k této bázi **duální** právě když platí $w^i(v_j) = \delta^i{}_j$ pro každé $i, j = 1, \ldots, m$.

Tvrzení 4.1.17. *Buď X topologický prostor, $\mathcal{A} \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{gcAs})$ a $\mathcal{F}$ volně a konečně generovaný snop $\mathcal{A}$-modulů o gradované hodnosti (m_j). Potom $\mathcal{F}^*$ je také volně a konečně generovaný, přičemž jeho gradovaná hodnost je (m_{-j}).*

Důkaz. Z předpokladu exstuje $K \in \mathsf{gVec}$ a izomorfismus $\hat{\phi} : \mathcal{F} \to \mathcal{A} \otimes K$. Mějme $(k_1, \ldots, k_m)$ souhrnnou bázi prostoru K a nechť $\{r_j\}_{j=1}^m$ značí globální rám na $\mathcal{F}$, kde pro každé $j = 1, \ldots, m$ je $r_j = (\hat{\phi}_X)^{-1}(1 \otimes k_j)$. Naším cílem je zkonstruovat izomorfismus $\phi : \mathcal{F}^* \to \mathcal{A} \otimes K^*$. Označme jako $(k^1, \ldots, k^m)$ příslušnou duální bázi prostoru K^*. Mějme libovolné $U \in \mathrm{Op}(X)$ a $\alpha \in \mathcal{F}^*(U)$, potom volíme

$$\phi_U(\alpha) := \left(\alpha_U(r_j|_U)\right) \otimes k^j \tag{4.10}$$

V prvé řadě je ϕ_U lineárním zobrazením stupně nula, což plyne z toho, že $|r_j| = |k_j| = -|k^j|$ pro každé $j = 1, \ldots, m$. Komutativita s restrikcemi je zjevná, navíc pro každé $a \in \mathcal{A}(U)$ platí $\phi_U(a\alpha) = a\phi_U(\alpha)$, což z ϕ činí morfismus snopů $\mathcal{A}$-modulů. Ověřme injektivitu. Buď $k \in \mathbb{Z}$ a předpokádejme, že $(\phi_U)_k\alpha = 0$. To jest, $\alpha_U(r_j|_U) = 0$ pro všechna j, což je však možné pouze pro $\alpha_U = 0 \implies \alpha_V = 0$ pro každou $V \in \mathrm{Op}(U) \implies \alpha = 0 \implies \ker((\phi_U)_k) = \{0\}$ a tedy ϕ_U je injektivní.

Pro ověření surjektivity mějme $g_j \otimes k^j \in \mathcal{A}(U) \otimes K^*$ a hledejme $\alpha \in \mathcal{F}^*(U)$ takové, že $\phi_U(\alpha) = \alpha_U(r_j|_U) \otimes k^j = g_j \otimes k^j$. Zjevně tedy chceme, aby $\alpha_U(r_j|_U) = g_j$, což mimo jiné znamená, že $|\alpha| = |g_j \otimes k^j| =: \ell$. Mějme $V \in \mathrm{Op}(U)$ a $v \in \mathcal{F}(U)$, $v = v^j\, r_j|_V$. Potom, jelikož chceme aby α_V splňovalo vztah 4.9, dostáváme $\alpha_V(v^j\, r_j|_V) = (-1)^{|\alpha||v^j|} v^j \alpha_V(r_j|_V)$. Ze všech těchto vztahů dostáváme kandidáta na definici

$$\alpha_V(v) := (-1)^{\ell(|v|-|k_j|)} v^j\, g_j|_V\,, \tag{4.11}$$

pro každé $V \in \mathrm{Op}(U)$ a $v = v^j\, r_j|_V \in \mathcal{F}(V)$. Takto definované α se však již snadno ukáže být dobře definovaným prvkem $\mathcal{F}^*(U)$, a tedy tím, co jsme hledali. $\square$

4.2 Vektorová pole

Definice 4.2.1. Mějme $A \in \mathsf{gcAs}$ a A-modul V. Řekneme, že $\delta \in \mathrm{Lin}(A, V)$ je **gradovanou derivací** stupně $|\delta|$ $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a, b \in A$ platí

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{|\delta||a|} a\delta(b). \tag{4.12}$$

Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ značíme jako $\mathrm{Der}_k(A, V)$ vektorový prostor gradovaných derivací stupně k, a jako $\mathrm{Der}(A, V)$ gradovaný vektorový prostor, kde $(\mathrm{Der}(A, V))_k := \mathrm{Der}_k(A, V)$.

Na N-varietě $\mathcal{M}$ chceme nyní zavést **snop vektorových polí** $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$, který bude snopem $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů. Analogicky k negradovanému případu definujeme pro každé $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$

$$\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U) := \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)) \equiv \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U), \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)). \tag{4.13}$$

Strukturu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$-modulu na $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ získáme tak, že pro všechna $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ položíme $(fX)h := f(Xh)$. Bilinearita je zjevná, stejně jako fakt, že $1X = X$. Navíc, pokud budeme mít další $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$, dostaneme

$$(fX)(hg) = f\,(X(hg)) = f(Xh)g + (-1)^{|X||h|} fhXg = ((fX)h)g + (-1)^{|fX||h|} h(fX)g, \tag{4.14}$$

a tedy $fX \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$.

Zaveďme nyní na $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ restrikce. Mějme $V, U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$, $V \subseteq U$ a $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$. Nejprve ukážeme, že X je lokální operátor, to jest uvažujeme $h \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ takové, že $h|_V = 0$, a ukážeme, že potom $(Xh)|_V = 0$. Pro každé $p \in V$ existuje $W_p \in \mathrm{Op}_p(V)$ takové, že $\overline{W_p} \subseteq V$. Nechť ψ značí hladkou bump-funkci na W_p s nosičem ve V (viz poznámka 3.2.9). Potom jistě $h = h(1-\psi)$ a dostáváme

$$Xh = X(h(1-\psi)) = (Xh)(1-\psi) + (-1)^{|X||h|} hX(1-\psi), \tag{4.15}$$

přičemž restrikce pravé strany na W_p dává nulu. Jelikož je $\{W_p\}_{p \in V}$ pokrytím V, z axiomu lokality pro snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$ dostáváme, že $(Xh)|_V = 0$.

Nyní chceme definovat $X|_V \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(V)$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(V)$, z extenčního lemmatu (lemma 3.2.10) potom víme, že pro každé $p \in V$ existuje $f_p \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ takové, že $f_p|_{W_p} = f|_{W_p}$. Pro každé $p \in V$ označíme $g_p := (Xf_p)|_{W_p}$. Pro dva různé body $p, q \in V$ vidíme, že $(f_p - f_q)|_{W_{pq}} = 0$ a tedy, jelikož X je lokální operátor, také

$$0 = X(f_p - f_q)|_{W_{pq}} = g_p|_{W_{pq}} - g_q|_{W_{pq}}. \tag{4.16}$$

Můžeme tedy využít lepícího axiomu a označit jako $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(V)$ prvek „slepený“ z prvků $\{g_p\}$. Pokládáme $X|_V\, f := g$. Máme-li jiný soubor vhodných množin $\tilde{W}_p$, vhodných prvků $\tilde{f}_p \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a jimi definované $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(V)$ snadno zjistíme, že $\tilde{f}_p|_{W_p \cap \tilde{W}_p} = f_p|_{W_p \cap \tilde{W}_p}$ a tedy také $\tilde{g}|_{W_p \cap \tilde{W}_p} = (X\tilde{f}_p)|_{W_p \cap \tilde{W}_p} = (Xf_p)|_{W_p \cap \tilde{W}_p} = g|_{W_p \cap \tilde{W}_p}$. Z axiomu lokality pro $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$ a faktu, že $\{W_p \cap \tilde{W}_p\}_{p \in V}$ je otevřeným pokrytím pro V, získáváme, že $g = \tilde{g}$. Uvedená definice $X|_V$ tak není závislá na konkrétním výběru $\{W_p\}$ a $\{f_p\}$.

Ověřme, že $X|_V \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(V)$. Konkrétně ukážeme pouze linearitu, splnění Leibnizova pravidla by se ukázalo obdobně. Mějme tedy $h, f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(V)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pro každé $p \in V$ dostaneme

$$\begin{aligned} (X|_V\,(f + \lambda h))|_{W_p} = X(f_p + \lambda h_p)|_{W_p} &= (Xf_p)|_{W_p} + \lambda\,(Xh_p)|_{W_p} \\ &= (X|_V\, f + \lambda\, X|_V\, g)|_{W_p}\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

a zbytek plyne z axiomu lokality snopu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$.

Podobným způsobem by se ukázalo, že pro $X, Y \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ platí

$$(X + \lambda Y)|_V = X|_V + \lambda\, Y|_V\,, \tag{4.18}$$

$$(gX)|_V = g|_V\, X|_V\,. \tag{4.19}$$

Povšimněme si také, že pro $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ a $f \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ platí $X|_V\, f|_V = (Xf)|_V$. Skutečně, stačí pro každé $p \in V$ volit $(f|_V)_p := f$.

Z toho mimo jiné plyne, že $X|_U = X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$. Jako poslední nám zbývá ověřit, že $(X|_V)|_W = X|_W$, kde $W \in \mathrm{Op}(V)$. Za tímto účelem nyní uvažujme $\overline{W_p} \subseteq W \subseteq V \subseteq U$ a $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(W)$. Nechť jsou dále $\{f_p\}_{p\in W} \subseteq \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ pro každé $p \in W$ prodlouženími f z W_p na U. Potom můžeme volit $\{f_p|_V\}_{p\in W}$ za prodloužení f z W_p na V, z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} \big((X|_V)|_W\, f\big)\big|_{W_p} = \big(X|_V\, f_p|_V\big)\big|_{W_p} = \big((Xf_p)|_V\big)\big|_{W_p} &= (Xf_p)|_{W_p} \\ &= (X|_W\, f)|_{W_p}\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

Restrikce jsou tedy vhodně definované, což z $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ dělá předsnop.

Ověřme, že $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ splňuje axiom lokality. Mějme $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ otevřené pokrytí množiny $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$ a $X, Y \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ takové, že $X|_{U_\alpha} = Y|_{U_\alpha}$ pro všechny $\alpha \in I$. Pro každé $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ potom platí $(Xf)|_{U_\alpha} = X|_{U_\alpha}\, f|_{U_\alpha} = Y|_{U_\alpha}\, f|_{U_\alpha} = (Yf)|_{U_\alpha}$. Z axiomu lokality pro $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$ tak dostáváme, že $Xf = Yf$ a tudíž $X = Y$.

Ověřme také platnost lepícího axiomu. Nechť je $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ opět otevřené pokrytí U a nechť máme pro každé $\alpha \in I$ vektorové pole $X_\alpha \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U_\alpha)$ tak, že $\forall \alpha, \beta \in I$ platí $X_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = X_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$. Pro každé $f \in U$ opět vidíme, že $(X_\alpha\, f|_{U_\alpha})|_{U_{\alpha\beta}} = (X_\beta\, f|_{U_\beta})|_{U_{\alpha\beta}}$ a tak definujeme Xf jako prvek „slepený“ z prvků $\{X_\alpha\, f|_{U_\alpha}\}_{\alpha\in I}$. Že takto definované X je vektorovým polem se ukáže opět demonstrací potřebných vlastností při restrikcích na U_α a následným použitím axiomu lokality snopu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$. Následující tvrzení shrnuje předchozí text.

Tvrzení 4.2.2. *Pro $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$ je snop vektorových polí na $\mathcal{M}$, značený jako $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ a definovaný výše, dobře definovaným snopem $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů.*

Důkaz. Že jde o dobře definovaný snop s hodnotami v gradovaných vektorových prostorech bylo ukázáno výše. Že jde navíc o snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů plyne ze zavedení struktury modulu na $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ pro každé $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$ a z (4.19). □

Značení 4.2.3. Buď $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^{n_0}, \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}) \in \mathsf{NMan}^\infty$, potom značíme $\mathscr{X}_{(n_j)} := \mathscr{X}_{\mathcal{M}}$.

Lemma 4.2.4. *Mějme $\hat{U}^{(n_j)}$ nezáporně gradovanou doménu a $X \in \mathscr{X}_{(n_j)}(\hat{U})$. Potom platí*

1. $X\lambda = 0$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Buďte $f, g \in (\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U}))_0$. Potom, pokud existuje $a \in \hat{U}$ takové, že $f(a) = g(a) = 0$, tak pro $X(fg) = \sum (X(fg))_r \, \xi_1^{r_1} \dots \xi_{n_*}^{r_{n_*}}$ platí $(X(fg))_r(a) = 0$ pro všechna $r \in \mathbb{N}^*_{|X|}$.

Důkaz. Z linearity a Leibnizova pravidla dostáváme $X\lambda = \lambda X1 = \lambda X(1 \cdot 1) = 2X\lambda$, což je možné pouze pro $X\lambda = 0$ (jedná se o nulu stupně $|X|$), což dokazuje bod 1. Bod 2 se ukáže snadno, neboť máme

$$\begin{aligned} X(fg) &= X(f)g + fXg \\ &= \sum_{r \in \mathbb{N}^*_{|X|}} \underbrace{((Xf)_r \, g + f(Xg)_r)}_{(X(fg))_r} \, \xi_1^{r_1} \dots \xi_{n_*}^{r_{n_*}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

□

Příklad 4.2.5. Následují důležité příklady vektorových polí. Buď $\hat{U}^{(n_j)}$ nezáporně gradovaná doména a nechť $(x^1, \dots, x^{n_0})$ značí souřadnice na $\hat{U}$ a $(\xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ značí souhrnnou bázi $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom pro každé $j = 1, \dots, n_0$ definujeme $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \left(\mathscr{X}_{(n_j)}(\hat{U})\right)_0$ jako

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} f_p \, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} \right) := \sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f_p \right) \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}, \tag{4.22}$$

pro každé $f = \sum f_p \, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U})$. Že jde o vektorové pole se zkontroluje snadno s využitím definice násobení na $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U})$. Mimo jiné tedy $\frac{\partial}{\partial x^i} \xi_\nu = 0$ pro každé $\nu = 1, \dots, n_*$.

Dále pro každé $\mu = 1, \dots, n_*$ definujeme $\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \in \left(\mathscr{X}_{(n_j)}(\hat{U})\right)_{-|\xi_\mu|}$ jeho působením na prvky $\xi_\nu \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U}),\ \nu = 1, \dots, n_*:$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \, \xi_\nu := \delta^\mu{}_\nu, \tag{4.23}$$

požadavkem linearity a splnění Leibnizova pravidla. Vidíme, že pro každé $g \in \left(\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U})\right)_0$ je $\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \, g = 0$, neboť má takový prvek nutně záporný stupeň.

Lemma 4.2.6. *Nechť je $\hat{U}^{(n_j)}$ nezáporně gradovaná doména, $(x^1, \dots, x^{n_0})$ souřadnice na $\hat{U}$ a $(\xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ souhrnná báze $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom pro $X, Y \in \mathscr{X}_{(n_j)}(\hat{U})$ platí, že $X = Y$ právě tehdy, když $X(x^j) = Y(x^j)$ a $X(\xi_\mu) = Y(\xi_\mu)$ pro všechna $j = 1, \dots, n_0$ a $\mu = 1, \dots, n_*$.*

Důkaz. Mějme $f = \sum f_p \, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U})$. Potom pro každé $a \in \hat{U}$ existuje $W_a \in \mathrm{Op}(\hat{U})$ hvězdicovité okolí bodu a. Na tomto okolí lze pro každé $p \in \mathbb{N}^*_{|f|}$ využít Taylorovy věty, a získat

$$f_p(x) = \underbrace{f_p(a) + \lambda_{p,i}(x^i - a^i)}_{:=T_p(x)} + \underbrace{(x^i - a^i)(x^j - a^j)\omega_{p,ij}(x)}_{:=R_p(x)}, \tag{4.24}$$

kde $\lambda_{p,i} = \frac{\partial f_p}{\partial x^i}(a)$ a $\omega_{p,ij}$ je pro každé $i,j = 1,\dots,n_0$ hladká funkce na W_a. Dostáváme tak

$$
\begin{aligned}
(Xf)|_{W_a} =& (X \sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} f_p\, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}})\, |_{W_a} \\
=& \left(\sum_p (Xf_p)\, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} + f_p\, X \left(\xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}\right) \right) |_{W_a} \\
=& \sum_p \left(X|_{W_a} (T_p + R_p) \right) \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} + (T_p + R_p)\, X|_{W_a} \left(\xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

S využitím této rovnosti, lemmatu 4.2.4 a definice T_p a R_p zjišťujeme, že pro všechna $q \in \mathbb{N}^*_{|Xf|}$ platí $(Xf)_q(a) = (XT)_q(a)$, kde $T \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\hat{U})$ je definováno jako

$$
T := \sum_{p \in \mathbb{N}^*_{|f|}} T_p\, \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}. \tag{4.26}
$$

Ze stejného důvodu také $(Yf)_q(a) = (YT)_q(a)$. Jelikož však $X(T_p) = X(f_p(a) + \lambda_{p,i}(x^i - a^i)) = \lambda_{p,i} X(x^i)$, dostáváme

$$
XT = \sum_p \left(\lambda_{p,i} X(x^i) \xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}} + T_p X(\xi_1^{p_1} \dots \xi_{n_*}^{p_{n_*}}) \right), \tag{4.27}
$$

a tedy z předpokladu vidíme, že $XT = YT$. Potom ale $(Xf)_q(a) = (XT)_q(a) = (YT)_q(a) = (Yf)_q(a)$ pro všechna $q \in \mathbb{N}^*_{|Xf|}$, přičemž $a \in \hat{U}$ bylo libovolné. To ale neznamená nic jiného, než že $Xf = Yf$ a tedy $X = Y$. □

Příklad 4.2.7. Uvažujme nyní $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, (U,φ) gradovanou mapu na $\mathcal{M}$ a označme $\hat{U} := \underline{\varphi}(U)$. Potom pro každé $\hat{X} \in \mathscr{X}_{(n_j)}(\hat{U})$ lze definovat vektorové pole $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ jako

$$
Xf := \varphi^*_{\hat{U}} \left(\hat{X} \left((\varphi^*_{\hat{U}})^{-1} f \right) \right). \tag{4.28}
$$

Že X je vektorové pole plyne z toho, že $\varphi^*_{\hat{U}}$ je izomorfismus gAs. Je také zřejmé, že toto přiřazení $\hat{X} \mapsto X$ je bijekce. S lehkým zneužitím značení budeme dále psát $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ a myslet tím jejich takto definované „pullbacky“ z příslušné domény $\hat{U}^{(n_j)}$.

Značení 4.2.8. Mějme N-varietu $\mathcal{M}$ a na ní gradovanou mapu (U,φ), přičemž $\{x^i\}_{i=1}^{n_0}$ jsou souřadnice na $\hat{U} := \underline{\varphi}(U)$ a $\{\xi_\mu\}_{\mu=1}^{n_*}$ je souhrnná báze pro $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom opět mírně zneužíváme značení a píšeme $x^i := \varphi^*_{\hat{U}} x^i \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ a $\xi_\mu := \varphi^*_U \xi_\mu \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$.

Tvrzení 4.2.9. *Mějme N-varietu $\mathcal{M}$ a na ní gradovanou mapu (U,φ) se souřadnicemi $\{x^i\}_{i=1}^{n_0}$ na $\underline{\varphi}(U)$ a souhrnnou bází $\{\xi_\mu\}_{\mu=1}^{n_*}$ pro $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom pro každé $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ platí*

$$
X = X(x^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i} + X(\xi_\mu)\, \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}. \tag{4.29}
$$

Důkaz. Důkaz stačí provést pro příslušnou gradovanou doménu $\hat{U}^{(n_j)}$. Podle lemmatu 4.2.6 navíc stačí porovnat působení obou stran na prvky $\{x^i\}_{i=1}^{n_0}$ a $\{\xi_\mu\}_{\mu=1}^{n_*}$, přičemž toto působení je, s ohledem na příklad 4.2.5, stejné. □

Důsledek 4.2.10. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^{n_0}$ *spolu s* $\{\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\}_{\mu=1}^{n_*}$ *tvoří lokální rám pro* $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ *na* U.

Příklad 4.2.11. Jednoduchým příkladem vektorového pole, které existuje na každé N-varietě $\mathcal{M}$, je takzvané **Eulerovo vektorové pole** $E \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$, $|E| = 0$, působící na každé $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ jako $Ef := |f|f$. Pro (U, φ) mapu na $\mathcal{M}$ potom v lokálních souřadnicích máme $E|_U = \sum_{\mu=1}^{n_*} |\xi_\mu| \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}$.

Definice 4.2.12. Pro $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$ a $X, Y \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ zavádíme **komutátor** vektorových polí X a Y jako

$$[X, Y] := XY - (-1)^{|X||Y|} YX. \tag{4.30}$$

Tvrzení 4.2.13. *Pro* $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, $V, U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$, $V \subseteq U$ *a* $X, Y \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ *platí*

1. $[X, Y] \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$.
2. $[X, Y] = -(-1)^{|X||Y|}[Y, X]$.
3. $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{|X||Y|}[Y, [X, Z]]$.
4. $[X, Y]|_V = [X|_V, Y|_V]$.

Důkaz. První tři body se ukáží přímým ověřením, ukážeme tedy pouze bod poslední. Mějme $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(V)$ a půjčme si $\{W_p\}_{p \in V}$ otevřené pokrytí množiny V a $\{f_p\}_{p \in V} \subseteq \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$ z definice restrikcí na $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(U)$ (viz text nad tvrzením 4.2.2). Pro každé $p \in V$ nyní označme $g_p := Y f_p$ a $g := Y|_V f$. Pak jistě $g_p|_{W_p} = g|_{W_p}$, a tedy $(X|_V Y|_V f)|_{W_p} = (X|_V g)|_{W_p} = (X g_p)|_{W_p} = (XY f_p)|_{W_p}$. Obdobně pro opačné pořadí X a Y. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}
([X, Y]|_V f)|_{W_p} &= ([X, Y] f_p)|_{W_p} \\
&= (XY f_p)|_{W_p} - (-1)^{|X||Y|} (YX f_p)|_{W_p} \\
&= (X|_V Y|_V f)|_{W_p} - (-1)^{|X||Y|} (Y|_V X|_V f)|_{W_p} \\
&= ([X|_V, Y|_V] f)|_{W_p},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

a tvrzení plyne z axiomu lokality pro $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$. □

Značení 4.2.14. Mějme $\hat{U}^{(n_j)}$ nezáporně gradovanou doménu, $(x^1, \ldots, x^{n_0})$ souřadnice na $\hat{U}$ a $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_*})$ souhrnnou bázi prostoru $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom také značíme $x^A := \xi_{A-n_0}$, pro všechna $A = n_0 + 1, \ldots, n_0 + n_*$. Soubor $\{x^A\}_{A=1}^n$, kde $n := n_0 + n_*$, nazýváme **gradované souřadnice** na $\hat{U}^{(n_j)}$.

Pokud budeme mít $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$ a na ní mapu (U, φ) potom říkáme, že $\{x^A\}_{A=1}^n$ jsou gradované souřadnice na U, nebo také že (U, φ) je mapa s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$, právě když jsou $\{x^A\}_{A=1}^n$ gradované souřadnice na $\big(\underline{\varphi}(U)\big)^{(n_j)}$. Pokud potom píšeme $x^A \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$, je to samozřejmě myšleno ve smyslu značení 4.2.8.

Příklad 4.2.15 (Transformace souřadnic)**.** Mějme N-varietu $\mathcal{M}$ gradované dimenze (n_j) a na ní dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β). Nechť $\{x^A\}_{A=1}^n$ značí gradované souřadnice na U_α a $\{y^B\}_{B=1}^n$ gradované souřadnice na U_β. Uvažujme vektorové pole $\frac{\partial}{\partial y^B} \in \mathscr{X}_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta}))$, které bylo

„přeneseno“ na doménu $(\underline{\varphi}_\alpha(U_\alpha))^{(n_j)}$ způsobem (4.28). V souřadnicích této domény bude mít, s ohledem na tvrzení 4.2.9, tvar

$$\frac{\partial}{\partial y^B} = (\frac{\partial}{\partial y^B} x^A) \frac{\partial}{\partial x^A} \equiv \left(\varphi^*_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y^B} (\varphi^*_{\beta\alpha})^{-1} x^A \right) \frac{\partial}{\partial x^A}, \tag{4.32}$$

což píšeme jednoduše jako

$$\frac{\partial}{\partial y^B} = \frac{\partial x^A}{\partial y^B} \frac{\partial}{\partial x^A}. \tag{4.33}$$

Kapitola 5

Diferenciální formy

5.1 Snop diferenciálních forem

V této podkapitole bude vždy $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ značit N-varietu gradované dimenze (n_j). Dále $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(M, \mathsf{gVec})$ bude vždy lokálně volně a konečně generovaný snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů s konstantní gradovanou hodností (m_j). To jest, všechna $\mathcal{F}|_U$, kde $U \in \mathrm{Op}(M)$ je takové, že $\mathcal{F}|_U$ je volně a konečně generovaný, mají gradovanou hodnost (m_j).

Lemma 5.1.1. *Vždy existuje $K \in \mathsf{gVec}$ a gradovaný atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na $\mathcal{M}$ takový, že pro každé $\alpha \in I$ také existuje $\phi_\alpha : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha} \otimes K \to \mathcal{F}|_{U_\alpha}$ izomorfismus snopů $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha}$-modulů.*

Důkaz. S použitím společného zjemnění. To jest: z předpokladu existuje pro každé $m \in \mathcal{M}$ okolí $V_m \in \mathrm{Op}_m(\mathcal{M})$, $K_m \in \mathsf{gVec}$ a izomorfismus $\tilde{\phi}_m : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{V_m} \otimes K \to \mathcal{F}|_{V_m}$. Jelikož má $\mathcal{F}$ konstantní hodnost, můžeme pro každé $m \in \mathcal{M}$ volit $K_m := K$ pro jeden pevný prostor K. Buď nyní $\{W_m, \tilde{\varphi}_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ libovolný atlas na $\mathcal{M}$ indexovaný body z $\mathcal{M}$. Potom stačí zvolit za indexovou množinu $I := M$, $U_m := V_m \cap W_m$, $\varphi_m := \tilde{\varphi}_m|_{U_m}$ a $\phi_m := \tilde{\phi}_m|_{U_m}$. □

Poznámka. Až do konce této podkapitoly budeme znakem K myslet právě gradovaný vektorový prostor z předchozího lemmatu.

Tvrzení 5.1.2. *Každé $\mathcal{F}$ indukuje na $\underline{\mathcal{M}}$ klasický vektorový fibrovaný prostor $\underline{\pi} : E \to \underline{\mathcal{M}}$ s typickým vláknem K_0. Tento vektorový fibrovaný prostor je jednoznačný až na izomorfismus.*

Důkaz. Hledaný vektorový fibrovaný prostor nalezneme určením přechodových zobrazení na vlákně K_0. Nechť $(k_1, \dots, k_m)$ značí souhrnnou bázi K, uspořádanou tak, že $(k_1, \dots, k_{m_0})$ je bází prostoru K_0. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ představuje právě to pokrytí M, kde pro každé $\alpha \in I$ existuje $\hat{\phi}_\alpha : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha} \otimes K \to \mathcal{F}|_{U_\alpha}$ izomorfismus snopů $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha}$-modulů. Potom pro všechny $\alpha, \beta \in I$ můžeme definovat přechodové izomorfismy $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_{\alpha\beta}}$-modulů $\hat{\tau}_{\beta\alpha} : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_{\alpha\beta}} \otimes K \to \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_{\alpha\beta}} \otimes K$ jako $\hat{\tau}_{\beta\alpha} := \hat{\phi}_\beta|^{-1}_{U_{\alpha\beta}} \circ \hat{\phi}_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}$. Pro každé $A = 1, \dots, m$ potom dostáváme

$$(\hat{\tau}_{\beta\alpha})_{U_{\alpha\beta}}(1 \otimes k_A) = (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A \otimes k_B, \tag{5.1}$$

pro jednoznačně určené $(\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U_{\alpha\beta}))_{|k_A|-|k_B|}$. Mimo jiné vidíme, že pro $|k_A| = 0$ je nutně $(\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A = 0$ pro všechna B taková, že $|k_B| \neq 0$. Přímo z definice je dále jasné, že

$\hat{\tau}_{\gamma\beta}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} \circ \hat{\tau}_{\beta\alpha}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} = \hat{\tau}_{\gamma\alpha}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}$, a tedy při zjednodušení zápisu dostáváme: $\hat{\tau}_{\gamma\beta}\hat{\tau}_{\beta\alpha}(1 \otimes k_A) = \hat{\tau}_{\gamma\beta}((\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A \otimes k_B) = (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A (\hat{\tau}_{\gamma\beta})^C{}_B \otimes k_C = \hat{\tau}_{\gamma\alpha}(1 \otimes k_A) = (\hat{\tau}_{\gamma\alpha})^C{}_A \otimes k_C$, pro každé $A = 1, \ldots, m$, z čehož dostáváme rovnost

$$(\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A (\hat{\tau}_{\gamma\beta})^C{}_B = (\hat{\tau}_{\gamma\alpha})^C{}_A. \tag{5.2}$$

Nyní stačí pro všechna $\alpha, \beta \in I$ a $i, j = 1, \ldots, m_0$ označit $(t_{\beta\alpha})^i{}_j := (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^i{}_j$ a získáme klasické přechodové funkce na vlákně K_0, definované pro každé $p \in U_{\alpha\beta}$ a $v = v^j k_j \in K_0$ jako

$$t_{\beta\alpha}(p, v) := v^j (t_{\beta\alpha}(p))^i{}_j k_i. \tag{5.3}$$

Existuje tak $\underline{\pi} : E \to \underline{\mathcal{M}}$, přičemž totální prostor E je dimenze $n_0 + m_0$, spolu s lokálními trivializacemi $t_\alpha : U_\alpha \times K_0 \to \underline{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ takovými, že $t_{\alpha\beta}$ jsou jim příslušná přechodová zobrazení. Prostor E je navíc jednoznačný až na izomorfismus (viz například [7, problem 10-6]). $\square$

Pokračujme ve značení z důkazu. Podle tvrzení 4.1.17 je $\mathcal{F}^*$ také lokálně volně a konečně generovaný snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů s konstantní gradovanou hodností (m_{-j}). Nechť pro každé $\alpha \in I$ značí $\phi_\alpha : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha} \otimes K^* \to \mathcal{F}^*|_{U_\alpha}$ příslušné izomorfismy snopů $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}|_{U_\alpha}$-modulů, a nechť je $(k^1, \ldots, k^m)$ báze K^*, duální k bázi $(k_1, \ldots, k_m)$. Obdobně jako pro snop $\mathcal{F}$ označme $\tau_{\beta\alpha} := \phi_\beta|^{-1}_{U_{\alpha\beta}} \circ \phi_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}$. Máme tedy analogii k (5.1), to jest $\tau_{\beta\alpha}(1 \otimes k^A) = (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A \otimes k^B$.

Lemma 5.1.3. *Při stejném značení platí pro všechna $A, B = 1, \ldots, m$ vztah*

$$(\tau_{\alpha\beta})_B{}^A = (-1)^{|k_B|(|k_B|+|k_A|)} (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^A{}_B. \tag{5.4}$$

Důkaz. Pro každé $\alpha \in I$, $A = 1, \ldots, m$ označme $r^{(\alpha)}_A := \hat{\phi}_\alpha(1 \otimes k_A)$. Máme tedy $\{r^{(\alpha)}_A\}^m_{A=1}$ lokální rám na $\mathcal{F}$, a pro každé $\alpha, \beta \in I$ máme při zjednodušeném zápisu

$$\begin{aligned} r^{(\alpha)}_A = \hat{\phi}_\alpha(1 \otimes k_A) = \hat{\phi}_\beta \hat{\phi}_\beta^{-1} \hat{\phi}_\alpha(1 \otimes k_A) = \hat{\phi}_\beta \hat{\tau}_{\beta\alpha}(1 \otimes k_A) &= (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A \hat{\phi}_\beta(1 \otimes k_B) \\ &= (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A r^{(\beta)}_B. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Pro $W \in \mathrm{Op}(U_{\alpha\beta})$ a $v = v^A_{(\alpha)} r^{(\alpha)}_A = v^B_{(\beta)} r^{(\beta)}_B \in \mathcal{F}(W)$ tedy platí $v^B_{(\beta)} r^{(\beta)}_B = v^B_{(\beta)} (\hat{\tau}_{\alpha\beta})^A{}_B r^{(\alpha)}_A$, z čehož máme

$$v^A_{(\alpha)} = v^B_{(\beta)} (\hat{\tau}_{\alpha\beta})^A{}_B. \tag{5.6}$$

Analogicky pro každé $\alpha \in I$, $A = 1, \ldots, m$ označme $r^A_{(\alpha)} := \phi_\alpha(1 \otimes k^A)$. Z konstrukce izomorfismů ϕ_α (viz tvrzení 4.1.17, kde jsme však zaměnili ϕ a ϕ^{-1}) lze zjistit, že pro každé $\alpha \in I$ platí $(r^A_{(\alpha)})_{U_\alpha} r^{(\alpha)}_B = \delta^A{}_B$, z čehož plyne $r^A_{(\alpha)}(v) = (-1)^{|r^A_{(\alpha)}||v^B_{(\alpha)}|} v^A_{(\alpha)} r^A_{(\alpha)}(r^{(\alpha)}_B) = (-1)^{|k^A|(|v|+|k^A|)} v^A_{(\alpha)}$. S pomocí tohoto vztahu zjišťujeme, že $(-1)^{|k^A|(|v|+|k^A|)} v^A_{(\alpha)} = r^A_{(\alpha)}(v) = (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A r^B_{(\beta)}(v) = (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A (-1)^{|k^B|(|v|+|k^B|)} v^B_{(\beta)}$, a tedy

$$\begin{aligned} v^A_{(\alpha)} &= (-1)^{-|k^A|(|v|+|k^A|)+|k^B|(|v|+|k^B|)+(|k^A|-|k^B|)(|v|+|k^B|)} v^B_{(\beta)} (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A \\ &= (-1)^{|k^A|(|k^B|-|k^A|)} v^B_{(\beta)} (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A \\ &= v^B_{(\beta)} (-1)^{|k_B|(|k_B|+|k_A|)} (\tau_{\beta\alpha})_B{}^A, \end{aligned} \tag{5.7}$$

a porovnáním (5.6) a (5.7) je důkaz u konce. $\square$

Věta 5.1.4. *Nechť pro (m_j) gradovanou hodnost $\mathcal{F}$ platí, že $m_j = 0$ pro všechny $j > 0$. Nechť dále $\underline{\pi} : E \to \underline{\mathcal{M}}$ značí vektorový fibrovaný prostor z tvrzení 5.1.2. Potom existuje N-varieta $\mathcal{E} = (E, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}})$ gradované dimenze $(N_j) = (n_j + m_{-j})$, spolu s gradovaným hladkým zobrazením $\pi = (\underline{\pi}, \pi^*) : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$.*

Důkaz. Nechť je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ atlas na $\mathcal{M}$ z lemmatu 5.1.1 a zvolme $(k_1, \dots, k_m)$ souhrnnou bázi prostoru K, kde $|k_j| = 0$ pro $j \leq m_0$. Pro každé $\alpha \in I$ dále označíme $\mathcal{U}_\alpha := \underline{\pi}^{-1}(U_\alpha)$. Na E tak máme atlas $\{\mathcal{U}_\alpha, \underline{\varrho}_\alpha\}$, kde $\underline{\varrho}_\alpha = (\underline{\varphi}_\alpha \times \psi_{(k)}) \circ t_\alpha^{-1} : \mathcal{U}_\alpha \to \underline{\varphi}_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{m_0}$, přičemž t_α jsou lokální trivializace E (viz důkaz tvrzení 5.1.2) a $\psi_{(k)} : K \to \mathbb{R}^{(m_j)}$ je souřadnicový izomorfismus příslušný bázi $\{k_A\}_{A=1}^m$. Pro $\lambda \in \underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})$ a $\nu \in \mathbb{R}^{m_0}$ tak dostáváme $\underline{\varrho}_{\beta\alpha}(\lambda, \nu) = \underline{\varrho}_\beta \circ \underline{\varrho}_\alpha^{-1}(\lambda, \nu)$ $= \Big(\underline{\varphi}_{\beta\alpha}(\lambda),\, \psi_{(k)} \circ t_{\beta\alpha}(\underline{\varphi}_\alpha^{-1}(\lambda)) \circ \psi_{(k)}^{-1}(\nu)\Big)$.

Naším cílem je, stejně jako v příkladu 3.3.4, využít ke konstrukci $\mathcal{E}$ věty 3.2.11. Hledáme tedy přechodové izomorfismy $\varrho_{\alpha\beta} = (\underline{\varrho}_{\alpha\beta}, \varrho^*_{\alpha\beta}) : (\underline{\varrho}_\beta(\mathcal{U}_{\alpha\beta}))^{(N_j)} \to (\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta}))^{(N_j)}$. Nechť $\psi_{(k^\dagger)} : K^* \to \mathbb{R}^{(m_{-j})}$ značí souřadnicový izomorfismus příslušný souhrnné bázi $(k^1, \dots, k^m)$, což je duální báze k bázi $(k_1, \dots, k_m)$, a nechť $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^m)$ značí souhrnnou bázi prostoru $\mathbb{R}^{(m_{-j})}$, kde pro každé $A = 1, \dots, m$ je $\vartheta^A := \psi_{(k^\dagger)}(k^A)$. Mějme navíc souhrnnou bázi $(\xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ prostoru $\mathbb{R}_0^{(n_j)}$. Potom $(\vartheta^{m_0+1}, \dots, \vartheta^m, \xi_1, \dots, \xi_{n_*})$ je souhrnnou bází pro $\mathbb{R}_0^{(N_j)}$, a tedy podle věty 3.1.19 definujeme

$$\left(\varrho^*_{\alpha\beta}\right)_{\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta})} \xi_\mu := \left(\varphi^*_{\alpha\beta}\right)_{\underline{\varphi}_\alpha(U_{\alpha\beta})} \xi_\mu, \tag{5.8}$$

pro každé $\mu = 1, \dots, n_*$, přičemž zde je třeba poznamenat že každý prvek $\mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(U_\alpha))$ se dá chápat jako prvek $\mathcal{C}^\infty_{(N_j)}(\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha))$. Dále definujeme

$$\left(\varrho^*_{\alpha\beta}\right)_{\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta})} \vartheta^A := \left((\varphi^*_\beta)^{-1}_{U_{\alpha\beta}}(\tau_{\beta\alpha})_B{}^A\right) \vartheta^B, \tag{5.9}$$

pro každé $A = m_0 + 1, \dots, m$. Platnost podmínky (3.41) stačí ověřit pro prvky $\{\vartheta^A\}_{A=m_0+1}^m$, přičemž toto ověření se provede formálně podobně jako v (3.53). Získáváme tak N-varietu $\mathcal{E}$.

Nakonec nalezněme gradované hladké zobrazení $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$. Hladké zobrazení $\underline{\pi}$ již máme, stačí nám tedy nalézt $\pi^* : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}} \to \underline{\pi}_* \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$, kde $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$. Potom pro každé $\alpha \in I$ máme $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(U \cap U_\alpha))$ lokálního reprezentanta prvku f při mapě $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, který se dá chápat také jako prvek $\mathcal{C}^\infty_{(N_j)}(\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha))$, kde $\mathcal{U} := \underline{\pi}^{-1}(U)$. Skutečně, je tomu tak proto, že $\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha) = \underline{\varphi}_\alpha(U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^{m_0}$. Potom však můžeme aplikovat lepící axiom snopu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}$ na soubor prvků $\{(\varrho^*_\alpha)_{\underline{\varrho}_\alpha(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha)} f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (snadno se ověří že tyto prvky mají potřebné vlastnosti) za vzniku prvku $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}(\mathcal{U})$. Nyní stačí vyhlásit $\pi^*_U(f) := g$. Není těžké nahlédnout, že π^* je potom morfismem snopů s hodnotami v gcAs. $\square$

Důsledek 5.1.5. *Při značení z předchozí věty je $\underline{\pi}_* \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}$ také snopem $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů.*

Důkaz. Pro každé $U \in \mathrm{Op}(\mathcal{M})$ zavádíme na $\underline{\pi}_* \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}$ strukturu $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U)$-modulu následovně. Pro $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(U), g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{E}}(\underline{\pi}^{-1}(U))$ definujeme

$$fg := \pi^*_U(f) g. \tag{5.10}$$

Že jde o správnou definici plyne z toho, že π^* je morfismem snopů s hodnotami v gcAs. $\square$

Definice 5.1.6. Říkáme, že $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ z předchozí věty je **gradovaný vektorový fibrovaný prostor** a varietu $\mathcal{E}$ nazýváme jeho **totálním prostorem**. Snopu $\mathcal{F}$ z konstrukce říkáme **snop řezů** prostoru $\mathcal{E}$.

Poznámka. Stejně jako v negradovaném případě budeme někdy psát $\mathcal{E}$ a myslet tím celý gradovaný vektorový fibrovaný prostor $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, přičemž π a $\mathcal{M}$ budou buď implicitně známy z kontexu a nebo nebudou v dané chvíli podstatné.

V kapitole 4 jsme na N-varietě $\mathcal{M}$ zavedli snop vektorových polí $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ a ukázali jsme, že jde o snop $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-modulů. Důsledek 4.2.10 nám navíc říká, že $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$ je lokálně volně a konečně generovaný, přičemž z konstrukce je zřejmé, že má „nepozitivně“ gradovanou hodnost, to jest, že splňuje předpoklady věty 5.1.4. Jsme tedy schopni vytvořit gradovaný vektorový fibrovaný prostor, jehož snopem řezů bude právě $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}$. Tento gradovaný vektorový fibrovaný prostor označíme jako $\mathrm{T}\mathcal{M}$ a nazveme **tečným fibrovaným prostorem** N-variety $\mathcal{M}$.

Z důvodů, které budou zjevné záhy, tento prostor ještě posuneme ve stupních.

Poznámka 5.1.7. Mějme topologický prostor X, $\mathcal{A} \in \mathsf{gcAs}$ a $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}$-modulů na X. Potom pro každé $\ell \in \mathbb{Z}$ lze zavést $\mathcal{F}[\ell]$, to jest snop $\mathcal{F}$ **posunutý ve stupních** o ℓ, jako $\mathcal{F}[\ell](U) := \mathcal{F}(U)[\ell]$ (viz definice 3.3.2).

Je-li $\mathcal{F}$ volně a konečně generovaný, potom $\mathcal{F}[\ell]$ je také volně a konečně generovaný. Konkrétně, pokud je $\mathcal{F}$ izomorfní $\mathcal{A} \otimes K$ pro nějaké $K \in \mathsf{gVec}$, potom $\mathcal{F}[\ell]$ je izomorfní $\mathcal{A} \otimes K[\ell]$.

Buď nyní $\mathcal{E}$ gradovaný vektorový fibrovaný prostor definovaný pomocí jeho snopu řezů $\mathcal{F}$. Jeho **posun ve stupních** o $\ell \in \mathbb{Z}$ potom definujeme jako gradovaný vektorový fibrovaný prostor definovaný pomocí snopu řezů $\mathcal{F}[\ell]$ a značíme jej jako $\mathcal{E}[\ell]$.

V tomto kontextu nyní zkoumejme prostor $\mathrm{T}[1]\mathcal{M} := \mathrm{T}\mathcal{M}[1]$. Nechť má N-varieta $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ gradovanou dimenzi (n_j). Gradovaná dimenze $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$ je $(N_j) = (n_j + n_{j-1})$ a jeho podkladová varieta je $\underline{\mathcal{M}}$, to jest $\mathrm{T}[1]\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}})$. Vraťme se nyní ke konstrukci $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$, to jest k důkazu věty 5.1.4 pro $\mathcal{F} = \mathscr{X}_{\mathcal{M}}[1]$. Za souhrnnou bázi tamního prostoru K bereme $(k_1, \dots, k_n) = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n_0}}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{n_*}})$ a odpovídající souhrnnou bázi $\{\vartheta^A\}_{A=1}^n$ prostoru $\mathbb{R}^{(n_{j-1})}$ přeznačíme sugestivně na

$$(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n) =: (\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^{n_0}, \mathrm{d}\xi_1, \dots, \mathrm{d}\xi_{n_*}), \tag{5.11}$$

kde $|\mathrm{d}x^j| = 1$ a $|\mathrm{d}\xi_\mu| = |\xi_\mu| + 1$ pro každé $j = 1, \dots, n_0$, $\mu = 1, \dots, n_*$. Máme-li tedy na $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$ mapu (U, ϱ), potom na $(\underline{\varrho}(U))^{(N_j)}$ máme gradované souřadnice $\{x^j\}_{j=1}^{n_0}$, $\{\xi_\mu\}_{\mu=1}^{n_0}$, $\{\mathrm{d}x^j\}_{j=1}^{n_*}$, a $\{\mathrm{d}\xi_\mu\}_{\mu=1}^{n_*}$, což také píšeme jako $\{x^A\}_{A=1}^n$ a $\{\mathrm{d}x^A\}_{A=1}^n$ (viz značení 4.2.14). Každý prvek $\mathcal{C}^\infty_{(N_j)}(\hat{V})$ pro $\hat{V} \in \mathrm{Op}(\underline{\varrho}(U))$ je tak polynomem v ξ_μ, $\mathrm{d}x^j$ a $\mathrm{d}\xi_\nu$ s koeficienty v hladkých funkcích na $\hat{V}$.

Před zavedením diferenciálních forem ještě poznamenejme, že pokud je $\mathcal{M}$ triviálně gradovaná, dostáváme $\mathrm{T}[1]\mathcal{M} = \mathrm{T}[1]M$ tečný fibrovaný prostor se stupni posunutými o 1 z poznámky 3.3.5. Připomeňme, že v téže poznámce je zmíněno, že $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]M}$ je izomorfní Ω_M, snopu diferenciálních forem na M. To nás vede k následující definici.

Definice 5.1.8. Na $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$ zavádíme **snop diferenciálních forem** $\Omega_{\mathcal{M}}$ jako

$$\Omega_{\mathcal{M}} := \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}}. \tag{5.12}$$

Poznámka. i. Dle důsledku 5.1.5 je $\Omega_{\mathcal{M}}$ také snopem $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{M}}$-modulů.

ii. Pro gradovanou doménu $(\mathbb{R}^{n_0})^{(n_j)}$ píšeme $\Omega_{(\mathbb{R}^{n_0})^{(n_j)}} =: \Omega_{(n_j)}$.

iii. Buď (U, φ) mapa na $\mathcal{M}$ s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$. Pro každé $A = 1, \dots, n$ potom nazveme prvek[1] $\mathrm{d}x^A \in \Omega_{\mathcal{M}}(U)$ **souřadnicovou** 1**-formou**.

Příklad 5.1.9 (Transformace souřadnic)**.** Mějme $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^{\infty}$ a na ní dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β) s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$, respektive $\{y^B\}_{B=1}^n$. Nyní jsme schopni explicitně nalézt „transformační funkce“ $(\hat{\tau}_{\beta\alpha})^B{}_A$ ze vztahu (5.1), konkrétně

$$(\hat{\tau}_{\beta\alpha})^A{}_B = \frac{\partial x^A}{\partial y^B}, \tag{5.13}$$

pro každé $A, B = 1, \dots, n$ (viz také příklad 4.2.15). Z (5.9) víme, že $\mathrm{d}x^A = (\tau_{\alpha\beta})_B{}^A \mathrm{d}y^B$, a tak s využitím lemmatu 5.1.3 získáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^A &= (\tau_{\alpha\beta})_B{}^A\, \mathrm{d}y^B \\ &= (-1)^{|k_B|(|k_B|+|k_A|)} (\hat{\tau}_{\beta\alpha})^A{}_B\, \mathrm{d}y^B \\ &= (-1)^{(|y^B|+1)(|y^B|+|y^A|)} \frac{\partial x^A}{\partial y^B}\, \mathrm{d}y^B, \end{aligned} \tag{5.14}$$

což lze, s využitím toho, že $|\frac{\partial x^A}{\partial y^B}| = |x^A| - |y^B|$, upravit do tvaru

$$\mathrm{d}x^A = \mathrm{d}y^B \frac{\partial x^A}{\partial y^B}. \tag{5.15}$$

Definice 5.1.10. Mějme $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{M}}) \in \mathsf{NMan}^{\infty}$, atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na $\mathcal{M}$ a k němu odpovídající (ve smyslu důkazu věty 5.1.4) atlas $\{(U_\alpha, \varrho_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$. Buďte navíc $U \in \mathrm{Op}(M)$ a $p \in \mathbb{N}_0$. Potom řekneme, že $\omega \in \Omega_{\mathcal{M}}(U)$ je **diferenciální** p**-forma** na U $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ každého jejího lokálního reprezentanta $\omega_\alpha \in \Omega_{(n_j)}(\underline{\varrho}_\alpha(U_\alpha \cap U))$ lze zapsat ve tvaru

$$\omega_\alpha = \sum_{q_1+\ldots+q_n=p} (\omega_\alpha)_{q_1,\ldots,q_n} (\mathrm{d}x^1)^{q_1} \ldots (\mathrm{d}x^n)^{q_n}, \tag{5.16}$$

kde $(\omega_\alpha)_{q_1,\ldots,q_n}$ jsou prvky $\mathcal{C}^{\infty}_{(n_j)}(\underline{\varphi}_\alpha(U_\alpha \cap U))$ a $\{x^A\}_{A=1}^n$ jsou gradované souřadnice na mapě $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Množinu všech p-forem na U značíme jako $\Omega^p_{\mathcal{M}}(U)$. Díky (5.15) je tato definice nezávislá na konkrétní volbě souřadnic.

Snop $\Omega^p_{\mathcal{M}} \in \mathsf{Sh}(M, \mathsf{gVec})$, který každé množině $U \in \mathrm{Op}(M)$ přiřadí množinu $\Omega^p_{\mathcal{M}}(U)$, přičemž restrikce jsou stejné jako u snopu $\Omega_{\mathcal{M}}$, nazveme **snop diferenciálních** p**-forem** na $\mathcal{M}$. Že jde skutečně o snop, a to dokonce o snop $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{M}}$-modulů, by se ověřilo přímočaře.

5.2 Derivace algebry diferenciálních forem

V této kapitole zavedeme dobře známé operátory na algebře diferenciálních forem: vnější derivaci, vnitřní součin a Lieovu derivaci, a to elegantně jako globální vektorová pole na gradovaném tečném fibrovaném prostoru posunutém o stupeň.

[1] Využíváme značení 4.2.8 pro N-varietu $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$.

V této podkapitole budeme vždy uvažovat N-varietu $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M})$, atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na $\mathcal{M}$ a k němu odpovídající atlas $\{(U_\alpha, \varrho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$.

Definice 5.2.1. **Vnější derivaci** $\mathrm{d} \in \left(\mathscr{X}_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}}(M)\right)_1$ definujeme s pomocí lepícího axiomu lokálně jako

$$(\mathrm{d})_\alpha := \mathrm{d}x^A \frac{\partial}{\partial x^A}, \tag{5.17}$$

kde $\{x^A\}_{A=1}^n$ jsou gradované souřadnice na mapě $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Tvrzení 5.2.2. *Tato definice vnější derivace dává smysl. Navíc platí*

1. $d^2 = 0$,
2. $(\,\forall U \in \mathrm{Op}(M), \forall p \in \mathbb{N}_0, \forall \omega \in \Omega^p_\mathcal{M}(U)\,)\ (\,\mathrm{d}\omega \in \Omega^{p+1}_\mathcal{M}(U)\,)$.

Důkaz. Mějme dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β) a s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$, resp. $\{y^B\}_{B=1}^n$. Potom vidíme

$$\begin{aligned}(\mathrm{d})_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} &= \left(\mathrm{d}x^A \frac{\partial}{\partial x^A}\right)\Bigg|_{U_{\alpha\beta}} = \left(\mathrm{d}y^B \frac{\partial x^A}{\partial y^B}\frac{\partial y^C}{\partial x^A}\frac{\partial}{\partial y^c}\right)\Bigg|_{U_{\alpha\beta}} \\ &= \left(\mathrm{d}y^B \frac{\partial}{\partial y^B}\right)\Bigg|_{U_{\alpha\beta}} = (\mathrm{d})_\beta\Big|_{U_{\alpha\beta}},\end{aligned} \tag{5.18}$$

což opravňuje použití lepícího axiomu. Body 1 a 2 potom stačí ověřit lokálně, přižemž bod 1 stačí podle lemmatu 4.2.6 ověřit na gradovaných souřadnicích $\{x^A\}_{A=1}^n$ a $\{\mathrm{d}x^A\}_{A=1}^n$, kde však jistě platí. Zbývá nám ukázat bod 2, nechť jsou tedy dány U, p a ω. Jelikož ω je p-forma, jistě platí rozklad $\omega|_{U_\alpha \cap U} = \sum \omega^\alpha_{q_1,\ldots,q_n} \left(\mathrm{d}x^1\right)^{q_1} \ldots (\mathrm{d}x^n)^{q_n}$ pro nějaké $\omega^\alpha_{q_1,\ldots,q_n} \in \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(U_\alpha \cap U)$. S použitím definice vnější derivace a Leibnizova pravidla dostáváme

$$(\mathrm{d}\omega)|_{U_\alpha \cap U} = \sum_{q_1+\ldots+q_n=p} \mathrm{d}x^A \left(\frac{\partial}{\partial x^A}\,\omega^\alpha_{q_1,\ldots,q_n}\right)\left(\mathrm{d}x^1\right)^{q_1} \ldots (\mathrm{d}x^n)^{q_n}, \tag{5.19}$$

a tedy zřejmě $\mathrm{d}\omega \in \Omega^{p+1}_\mathcal{M}(U)$. □

Poznámka. Vidíme, že skutečně $\mathrm{d}(x^A) = \mathrm{d}x^A$, což ospravedlňuje toto značení.

Definice 5.2.3. Buď $W \in \mathscr{X}_\mathcal{M}(M)$, potom **vnitřní součin** s vektorovým polem W značíme $i_W \in \left(\mathscr{X}_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}}(M)\right)_{|W|-1}$ a definujeme s pomocí lepícího axiomu lokálně jako

$$(i_W)_\alpha := W^A_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\,\mathrm{d}x^A}, \tag{5.20}$$

kde $\{x^A\}_{A=1}^n$ jsou gradované souřadnice na mapě $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a $W^A_{(\alpha)} := W|_{U_\alpha}(x^A)$.

Tvrzení 5.2.4. *Tato definice vnitřního součinu dává smysl. Navíc pro každé $V, W \in \mathscr{X}_\mathcal{M}(M)$ platí*

1. $[i_V, i_W] = 0$.
2. *Pro všechna $U \in \mathrm{Op}(M)$, $p \in \mathbb{N}_0$ a $\omega \in \Omega^p_\mathcal{M}(U)$ je $i_W\omega \in \Omega^{p-1}_\mathcal{M}(U)$, přičemž pro $p = 0$ se tím myslí, že $i_W\omega = 0$.*

Důkaz. Pro dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β) s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$ a $\{y^B\}_{B=1}^n$ dostáváme

$$\begin{aligned} (i_W)_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} &= \left(W^A_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{d}x^A} \right)\Big|_{U_{\alpha\beta}} = \left(W^B_{(\beta)} \frac{\partial x^A}{\partial y^B} \frac{\partial\, \mathrm{d}y^C}{\partial\, \mathrm{d}x^A} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{d}y^C} \right)\Big|_{U_{\alpha\beta}} \\ &= \left(W^B_{(\beta)} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{d}y^B} \right)\Big|_{U_{\alpha\beta}} = (i_W)_\beta\Big|_{U_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

kde jsme využili toho, že $\frac{\partial\, \mathrm{d}y^C}{\partial\, \mathrm{d}x^A} = \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{d}x^A}\left(\mathrm{d}x^B \frac{\partial y^C}{\partial x^B} \right) = \frac{\partial y^C}{\partial x^A}$. Použití lepícího axiomu tak bylo oprávněné. Pro bod 1 vidíme, že $[i_V, i_W]\, x^A = 0$ a také $[i_V, i_W]\, \mathrm{d}x^A = 0$, což s odkazem na lemma 4.2.6 znamená, že $[i_V, i_W] = 0$. Bod 2 plyne snadno z lokálního tvaru i_W a lokálního tvaru p-forem. □

Definice 5.2.5. Buď $W \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M)$, potom **Lieovu derivaci** podél vektorového pole W značíme $\mathcal{L}_W \in \left(\mathscr{X}_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}}(M) \right)_{|W|}$ a definujeme globálně jako

$$\mathcal{L}_W := [i_W, \mathrm{d}] \equiv i_W\, \mathrm{d} + (-1)^{|W|} \mathrm{d}\, i_W. \tag{5.22}$$

Podívejme se blíže na působení Lieovy derivace na některé vybrané formy. Mějme $f \in \Omega^0_{\mathcal{M}}(M)$ a $\{x^A\}_{A=1}^n$ gradované souřadnice na U_α. Potom

$$(\mathcal{L}_W f)|_{U_\alpha} = (i_W\, \mathrm{d}\, f)|_{U_\alpha} = \left(i_W (\mathrm{d}x^A \frac{\partial f}{\partial x^A}) \right)\Big|_{U_\alpha} = \left(W^A \frac{\partial f}{\partial x^A} \right)\Big|_{U_\alpha} = (Wf)|_{U_\alpha}. \tag{5.23}$$

Speciálně tak máme $\mathcal{L}_W x^A = W^A$.

Dále máme $\mathcal{L}_W\, \mathrm{d}x^A = (-1)^{|W|} \mathrm{d}\, i_W\, \mathrm{d}x^A = (-1)^{|W|} dW^A = (-1)^{|W|} \mathrm{d}x^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B}$. Spolu s předchozím odstavcem tak získáváme lokální tvar Lieovy derivace:

$$\mathcal{L}_W|_{U_\alpha} = W^A \frac{\partial}{\partial x^A} + (-1)^{|W|} \mathrm{d}x^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{d}x^A}. \tag{5.24}$$

Tvrzení 5.2.6. *Buď $V, W \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M)$. Potom platí:*

1. $[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_{[V,W]}$.
2. $[\mathcal{L}_V, \mathrm{d}] = 0$.
3. $[\mathcal{L}_V, i_W] = i_{[V,W]}$.

Důkaz. Ověření stačí provést lokálně s použitím mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ s gradovanými souřadnicemi $\{x^A\}_{A=1}^n$. Podle lemmatu 4.2.6 navíc stačí zkoumat působení na $\{x^A\}_{A=1}^n$ a $\{\mathrm{d}x^A\}_{A=1}^n$. Pro bod 1 máme

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W]\, x^A &= \mathcal{L}_V\, W^A - (-1)^{|V||W|} \mathcal{L}_W\, V^A \\ &= V^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B} - (-1)^{|V||W|} W^C \frac{\partial V^A}{\partial x^C} \\ &= [V, W]\, x^A = \mathcal{L}_{[V,W]}\, x^A. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dále vidíme, že

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V \mathcal{L}_W \, \mathrm{d}x^A &= \mathcal{L}_V \left((-1)^{|W|} \mathrm{d}W^A \right) \\ &= (-1)^{|V|+|W|} \mathrm{d}\, i_V \left(\mathrm{d}x^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B} \right) \\ &= (-1)^{|V|+|W|} \mathrm{d} \left(V^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B} \right).\end{aligned} \tag{5.26}$$

Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] \, \mathrm{d}x^A &= (-1)^{|V|+|W|} \mathrm{d} \left(V^B \frac{\partial W^A}{\partial x^B} - (-1)^{|V||W|} W^C \frac{\partial V^A}{\partial x^C} \right) \\ &= (-1)^{|V|+|W|} \mathrm{d}\, [V, W]^A = \mathcal{L}_{[V,W]} \, x^A,\end{aligned} \tag{5.27}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že pro každé $W \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M)$ platí $\mathrm{d}\,\mathcal{L}_W = \mathrm{d}\, i_W \, \mathrm{d} = (-1)^{|W|} \mathcal{L}_W \, \mathrm{d}$, což také ihned dokazuje bod 2. Bod 3 by se ukázal obdobně. □

5.3 Symplektické N- a NQ-variety a jejich příklady

K definici symplektické 2-formy na N-varietě potřebujeme vhodně zavést pojem nedegenerovanosti. Mějme N-varietu $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}})$ a globální 2-formu $\omega \in \Omega^2_{\mathcal{M}}(M)$. Potom lze definovat gradované lineární zobrazení $\omega^\flat : \mathscr{X}_{\mathcal{M}} \to \Omega^1_{\mathcal{M}}$ stupně $|\omega| - 1$ způsobem

$$\omega^\flat(W) := i_W \, \omega, \tag{5.28}$$

pro každé $W \in \mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M)$. Toho využijeme v následující definici.

Definice 5.3.1. Řekneme, že $\omega \in \Omega^2_{\mathcal{M}}(M)$ je **nedegenerovaná**, právě když je výše definované gradované lineární zobrazení $\omega^\flat$ izomorfismem. O nedegenerované 2-formě ω, pro kterou navíc platí, že $\mathrm{d}\omega = 0$, řekneme, že je **symplektická**.

Uspořádanou trojici $(M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega)$, kde ω je symplektická 2-forma, nazveme **symplektickou N-varietou**.

Poznámka 5.3.2. Požadavek nedegenerovanosti nám značným způsobem limituje možnou gradovanou dimenzi symplektických N-variet. Jak je vidět například z definice vnitřního součinu, tak $\omega^\flat(fX) = f\omega^\flat(X)$ pro každé $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ a tedy můžeme $\omega^\flat$ chápat jako izomorfismus $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$-modulů z $\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M)$ do $\Omega^1_{\mathcal{M}}(M)[|\omega| - 1]$. Pokud je tedy (n_j) gradovaná dimenze N-variety $\mathcal{M}$, potom $\operatorname{grnk}(\mathscr{X}_{\mathcal{M}}) = (n_{-j})$, $\operatorname{grnk}\left(\Omega^1_{\mathcal{M}}\right) = (n_{j-1})$ a z poznámky 4.1.10 tak plyne, že (n_j) musí splňovat

$$n_{-j} = n_{j+|\omega|-2}, \tag{5.29}$$

pro každé $j \in \mathbb{Z}$.

Existence netriviální symplektické N-variety je tak možná pouze pro $|\omega| \geq 2$, což není zrovna překvapivé, jelikož nenulová 2-forma stupně menšího než 2 neexistuje. Dále nám tento vztah říká, že pro $|\omega| = 2$ je $\mathcal{M}$ nutně triviálně gradovaná, a tudíž jde o klasickou symplektickou varietu.

Definice 5.3.3. Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega)$ symplektická N-varieta. Potom ke každému $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ existuje odpovídající **hamiltonovské vektorové pole** $X_f \in (\mathscr{X}_{\mathcal{M}}(M))_{|f|-|\omega|+2}$ definované implicitně vztahem

$$i_{X_f}\omega = (-1)^{|f|+|\omega|+1}\mathrm{d}f. \tag{5.30}$$

Skutečně se jedná o definici, neboť z předpokladu je $\omega^\flat$ bijekcí.

Definice 5.3.4. Na symplektické N-varietě $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega)$ zavádíme **gradovanou Poissonovu závorku** $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M) \times \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ jako

$$\{f, g\} := X_f(g). \tag{5.31}$$

Následující tvrzení ukazuje platnost některých vztahů známých z klasické symplektické geometrie.

Tvrzení 5.3.5. *Buď $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega)$ symplektická N-varieta. Potom všechna $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ platí:*

1. $\mathcal{L}_{X_f}\,\omega = 0$.
2. $X_{fg} = fX_g + (-1)^{|f||g|}gX_f$.
3. $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$.
4. $\{f, g\} = -(-1)^{(|f|-|\omega|)(|g|-|\omega|)}\{g, f\}$.
5. *Poissonova závorka je gradované bilineární zobrazení stupně* $(2 - |\omega|)$.
6. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{(|f|-|\omega|)|g|}g\{f, h\}$.
7. $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + (-1)^{(|f|-|\omega|)(|g|-|\omega|)}\{g, \{f, h\}\}$.

Důkaz. Ad 1: $\mathcal{L}_{X_f}\omega = i_{X_f}\,\mathrm{d}\,\omega + (-1)^{|X_f|}\mathrm{d}\,i_{X_f}\,\omega = 0 + (-1)^{|X_f|+|f|+|\omega|+1}\mathrm{d}\,\mathrm{d}f = 0$.

Ad 2: Využijeme injektivity zobrazení $\omega^\flat$. Máme tedy

$$\begin{aligned}\omega^\flat(X_{fg}) = i_{X_{fg}}\omega &= (-1)^{|fg|+|\omega|+1}\mathrm{d}(fg) = (-1)^{|g|+|\omega|+1}f\mathrm{d}g + (-1)^{|g||f|}g\mathrm{d}f \\ &= fi_{X_g}\omega + (-1)^{|f||g|}gi_{X_f}\omega = \omega^\flat(fX_g + (-1)^{|f||g|}gX_f),\end{aligned} \tag{5.32}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $\omega^\flat$ je $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$-lineární.

Ad 3: Za použití třetího bodu tvrzení 5.2.6 získáváme

$$\begin{aligned}i_{[X_f,X_g]}\omega = [\mathcal{L}_{X_f}, i_{X_g}]\omega &= (-1)^{|X_f|}\mathrm{d}i_{X_f}i_{X_g}\omega = (-1)^{|X_f|+|g|+|\omega|+1}\mathrm{d}i_{X_f}\mathrm{d}g \\ &= (-1)^{|f|+|g|+1}\mathrm{d}X_f g = (-1)^{|\{f,g\}|+|\omega|+1}\mathrm{d}\{f, g\} = i_{X_{\{f,g\}}}\omega.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Ad 4: Začneme-li z definice, dostaneme

$$\begin{aligned}\{f, g\} = X_f g = i_{X_f}\,\mathrm{d}g &= (-1)^{|\omega|+|g|+1}i_{X_f}i_{X_g}\omega \\ &= (-1)^{|\omega|+|g|+1}(-1)^{(|f|-|\omega|+1)(|g|-|\omega|+1)}i_{X_g}i_{X_f}\omega \\ &= -(-1)^{(|f|-|\omega|)(|g|-|\omega|)}\{g, f\},\end{aligned} \tag{5.34}$$

kde jsme využili prvního bodu tvrzení 5.2.4. Bod 5 plyne z bodu 4 a zjevné linearity v druhém argumentu. Bod 6 plyne snadno z definice.

Ad 7: S využitím již dokázaného bodu 3 získáváme

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} &= X_f X_g h = [X_f, X_g]h + (-1)^{|X_f||X_g|} X_g X_f h \\ &= X_{\{f,g\}} h + (-1)^{(|f|-|\omega|)(|g|-|\omega|)} X_g \{f,h\} \\ &= \{\{f,g\},h\} + (-1)^{(|f|-|\omega|)(|g|-|\omega|)} \{g,\{f,h\}\}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

□

Poznámka. Vidíme, že ve skutečnosti bylo znaménko v definici (5.30) zvoleno tak, aby uvedené tvrzení platilo v tomto relativně elegantním tvaru.

Definice 5.3.6. Uvažujme uspořádanou čtveřici $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}, \omega, Q)$, kde $(M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}, \omega)$ je symplektická N-varieta a $Q \in \mathscr{X}_\mathcal{M}(M)_1$ je vektorové pole stupně 1 splňující $Q^2 = 0$ a $\mathcal{L}_Q \, \omega = 0$. V takovém případě řekneme, že $\mathcal{M}$ je **symplektická NQ-varieta**.

Poznámka. Vidíme, že symplektická NQ-varieta je čistě gradovaný pojem v tom smyslu, že pro triviálně gradovanou varietu (což odpovídá tomu, že symplektická forma má stupeň 2) je jediná možnost volby $Q = 0$.

Jedním způsobem, jak získat na symplektické N-varietě $(M, \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}, \omega)$ vektorové pole Q z definice 5.3.6 je volba $Q = X_H$ pro nějaké $H \in \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(M), |H| = |\omega| - 1$ které navíc splňuje

$$\{H, H\} = 0. \tag{5.36}$$

Skutečně, z bodů 1 a 3 tvrzení 5.3.5 dostáváme $\mathcal{L}_{X_H} \omega = 0$, resp. $X_H^2 = \frac{1}{2}[X_H, X_H] = 0$. Dále ukážeme, že tato volba je dokonce *jediná možná.* K tomu potřebujeme následující lemma, jehož první bod je převzán z [12, lemma 2.2].

Lemma 5.3.7. *Mějme* $\mathcal{M} \in \mathsf{NMan}^\infty$, $\alpha \in \Omega^p_\mathcal{M}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty_\mathcal{M}(M)$. *Potom platí*

1. *Pokud je* $|\alpha| > p$, *potom* α *je uzavřená, právě když je exaktní.*
2. *Pokud je* $|f| > 0$, *potom platí* $\mathrm{d}f = 0 \iff f = 0$.

Důkaz. Ad 1: Důkaz provedeme lokálně v gradovaných souřadnicích $\{x^A\}_{A=1}^n$ na $\mathcal{M}$ a jim odpovídajícím gradovaným souřadnicím $\{x^A\}_{A=1}^n$, $\{\mathrm{d}x^A\}_{A=1}^n$ na varietě $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$. Připomeňme si definici Eulerova vektorového pole $E \in \mathscr{X}_\mathcal{M}(M)$ (příklad 4.2.11), které má v tomto případě lokálně tvar $E = |x^A| \, x^A \frac{\partial}{\partial x^A}$. Lieova derivace podél E potom lokálně vypadá, s odkazem na (5.24), jako

$$\mathcal{L}_E = |x^A| \, x^A \frac{\partial}{\partial x^A} + |x^B| \, \mathrm{d}x^B \frac{\partial}{\partial \, \mathrm{d}x^B}. \tag{5.37}$$

Což je podobné Eulerovu vektorovému poli na $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$ s tím rozdílem, že v druhém členu vystupuje $|x^B|$ a nikoliv $|\mathrm{d}x^B|$. Konkrétně, označíme-li jako $F \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}[1]\mathcal{M}}(M)$ Eulerovo vektorové pole na $\mathrm{T}[1]\mathcal{M}$, potom $\mathcal{L}_E = F - \mathrm{d}x^B \frac{\partial}{\partial \, \mathrm{d}x^B}$, z čehož vidíme, že pro každou p-formu $\alpha \in \Omega^p_\mathcal{M}(M)$ platí

$$\mathcal{L}_E \, \alpha = (|\alpha| - p) \, \alpha. \tag{5.38}$$

Je-li nyní α uzavřená p-forma, potom $\mathrm{d}\, i_E\, \alpha = \mathcal{L}_E\, \alpha = (|\alpha| - p)\, \alpha$ a pokud je navíc stupeň α ostře větší než p, dostáváme vztah

$$\alpha = \mathrm{d} \left(\frac{1}{|\alpha| - p}\, i_E\, \alpha \right). \tag{5.39}$$

Ad 2: Jedná se o přímý důsledek bodu 1 pro volbu $p = 0$. □

Věta 5.3.8. *Buď $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega, Q)$ symplektická NQ-varieta. Potom existuje $H \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ takové, že $Q = X_H$. Pro toto H navíc platí, že $\{H, H\} = 0$.*

Důkaz. Z příslušných definic zjistíme, že $0 = \mathcal{L}_Q\, \omega = \mathrm{d}\, i_Q\, \omega$. Jelikož $|i_Q \omega| = |\omega| > 1$, z předchozího lemmatu zjišťujeme, že $i_Q\, \omega$ je exaktní, a tedy existuje $H \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}(M)$ takové, že $i_Q\, \omega = \mathrm{d}H$, z čehož plyne, že $Q = X_H$.

K dokázání druhé části tvrzení využijeme toho, že $2Q^2 = [X_H, X_H] = 0$, což podle třetího bodu tvrzení 5.3.5 znamená, že $X_{\{H,H\}} = 0$, a tudíž také $0 = i_{X_{\{H,H\}}}\, \omega = -\mathrm{d}\{H, H\}$. Opět využijeme předchozího lemmatu, což můžeme, neboť $|\{H, H\}| = |\omega| > 0$ a zjistíme, že $\{H, H\} = 0$. □

Poznámka. Úloha nalézt na symplektické N-varietě vektorové pole vyhovující požadavkům v definici NQ-variety je tak ekvivalentní úloze nalézt gradovanou funkci H vhodného stupně splňující vztah 5.36.

Příklad 5.3.9. Tento příklad je konkrétním případem [12, Theorem 4.5] a ilustruje vztah mezi kvadratickými Lieovými algebrami (QLA) dimenze $m \in \mathbb{N}$ a symplektickými NQ-varietami $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}, \omega, Q)$, kde $|\omega| = 4$ a $\mathrm{gdim}(\mathcal{M}) = (n_j)$, přičemž $n_1 = m$ a $n_k = 0$ pro $k \neq 1$. Tento vztah je jedna ku jedné, přičemž je „kanonický až na příslušný izomorfismus“.

Nejprve připomeňme, že kvadratická Lieova algebra je vektorový prostor $\mathfrak{g}$, na němž je definována Lieova závorka, to jest antisymetrické bilineární zobrazení $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ splňující Jacobiho identitu, spolu se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tyto dvě přidané struktury jsou spolu navíc vzájemně spjaty vztahem

$$\langle [x, y], z \rangle + \langle y, [x, z] \rangle = 0, \tag{5.40}$$

pro všechna $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ukážeme jeden směr, to jest majíce symplektickou NQ-varietu z počátku příkladu, zavedeme na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$ dimenze m strukturu kvadratické Lieovy algebry. Nechť $\{\xi^\mu\}_{\mu=1}^m$ značí gradované souřadnice na $\mathcal{M}$ (jedná se o globální souřadnice, všechny stupně 1, neboť podkladová varieta je jednobodová) a $\{t_\nu\}_{\nu=1}^m$ nechť je pevně určená báze prostoru $\mathfrak{g}$. Symplektická forma ω má nutně tvar

$$\omega = \omega_{\varkappa\lambda}\, \mathrm{d}\xi^\varkappa \mathrm{d}\xi^\lambda, \tag{5.41}$$

kde $\omega_{\varkappa\lambda}$ jsou prvky reálné symetrické[2] nedegenerované matice $m \times m$. Podobně, jelikož $|Q| = 1$, Q musí být tvaru

$$Q = Q^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} = K^\mu{}_{\varkappa\lambda}\, \xi^\varkappa \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}, \tag{5.42}$$

[2] Matici $\omega_{\varkappa\lambda}$ volíme symetrickou BÚNO, neboť $\mathrm{d}\xi^\varkappa$ a $\mathrm{d}\xi^\lambda$ mají stupeň 2 a tedy spolu komutují.

kde $K^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ jsou reálné koeficienty, přičemž[3] $K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda} = -K^{\mu}{}_{\lambda\varkappa}$. Na prostoru $\mathfrak{g}$ potom zavedeme

$$\langle t_\varkappa, t_\lambda \rangle := \omega_{\varkappa\lambda}, \tag{5.43}$$

$$[t_\varkappa, t_\lambda] := K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}\, t_\mu, \tag{5.44}$$

a rozšíříme požadavkem bilinearity. Takto definovaná bilineární forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je jistě symetrická a nedegenerovaná. Zobrazení $[\cdot,\cdot]$ je zjevně antisymetrické, ale abychom jej mohli prohlásit za Lieovu závorku na $\mathfrak{g}$, musíme ověřit, že splňuje Jacobiho identitu. To, jak ukážeme, plyne právě z požadavku $Q^2 = 0$. Pro každé $\mu = 1, \ldots, m$ totiž dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = Q^2\,\xi^\mu = Q\left(K^{\nu}{}_{\varkappa\lambda}\,\xi^\varkappa\xi^\lambda \frac{\partial}{\partial\xi^\nu}\,(\xi^\mu)\right) &= K^{\beta}{}_{\rho\sigma}\,\xi^\rho\xi^\sigma \frac{\partial}{\partial\xi^\beta}\left(K^{\nu}{}_{\varkappa\lambda}\,\xi^\varkappa\xi^\lambda\delta^{\mu}{}_{\nu}\right) \\ = K^{\beta}{}_{\rho\sigma}\,\xi^\rho\xi^\sigma K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}\left(\delta^{\varkappa}{}_{\beta}\xi^\lambda - \xi^\varkappa\delta^{\lambda}{}_{\beta}\right) &= 2\,\underbrace{K^{\beta}{}_{\rho\sigma}K^{\mu}{}_{\beta\lambda}}_{=:D^{\mu}{}_{\rho\sigma\lambda}}\,\xi^\rho\xi^\sigma\xi^\lambda, \end{aligned} \tag{5.45}$$

z čehož dostáváme požadavek na nulovost úplné antisymetrizace koeficientů $D^{\mu}{}_{\rho\sigma\lambda}$ v dolních indexech, to jest

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{6!}\left(D^{\mu}{}_{\rho\sigma\lambda} - D^{\mu}{}_{\sigma\rho\lambda} + D^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} - D^{\mu}{}_{\lambda\sigma\rho} + D^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma} - D^{\mu}{}_{\rho\lambda\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{6!}\left(2D^{\mu}{}_{\rho\sigma\lambda} + 2D^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} + 2D^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma}\right) \\ &= \frac{2}{6!}\left(K^{\beta}{}_{\rho\sigma}K^{\mu}{}_{\beta\lambda} + \text{cykl.}(\rho,\sigma,\lambda)\right). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Pro bazické vektory t_ν tak dostáváme

$$\begin{aligned} [[t_\rho, t_\sigma], t_\lambda] + \text{cykl.}(\rho,\sigma,\lambda) &= [K^{\beta}{}_{\rho\sigma}t_\beta, t_\lambda] + \text{cykl.}(\rho,\sigma,\lambda) \\ &= \left(K^{\beta}{}_{\rho\sigma}K^{\mu}{}_{\beta\lambda} + \text{cykl.}(\rho,\sigma,\lambda)\right)t_\mu = 0. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Vidíme tedy, že jsme na $\mathfrak{g}$ vskutku zavedli vhodnou bilineární formu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a Lieovu závorku $[\cdot,\cdot]$. Zbývá nám ověřit jejich propojení vztahem (5.40), což bude tentokrát plynout z požadavku $0 = \mathcal{L}_Q\omega = -\mathrm{d}i_Q\omega$. Podívejme se nejprve, jak vypadá $i_{\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}}\omega$. Ze vztahů (5.41) a (5.20) získáme

$$i_{\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}}\omega = \frac{\partial}{\partial\,\mathrm{d}\xi^\mu}\left(\omega_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta\right) = \omega_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha}{}_{\mu}\mathrm{d}\xi^\beta + \mathrm{d}\xi^\alpha\,\delta^{\beta}{}_{\mu}\right) = 2\omega_{\mu\beta}\mathrm{d}\xi^\beta. \tag{5.48}$$

Z této rovnosti, tvaru vektorového pole Q a z $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{M}}$-linearity vnitřního součinu (ve „vektorovém“ argumentu) dostaneme

$$i_Q\omega = K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}\xi^\varkappa\xi^\lambda\left(i_{\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}}\omega\right) = 2\,\underbrace{K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}\omega_{\mu\beta}}_{=:R_{\varkappa\lambda\beta}}\,\xi^\varkappa\xi^\lambda\mathrm{d}\xi^\beta. \tag{5.49}$$

A tedy

$$0 = \mathrm{d}\,i_Q\omega = 2R_{\varkappa\lambda\beta}\left(\mathrm{d}\xi^\varkappa\xi^\lambda - \xi^\varkappa\mathrm{d}\xi^\lambda\right)\mathrm{d}\xi^\beta = -4R_{\varkappa\lambda\beta}\,\xi^\varkappa\mathrm{d}\xi^\lambda\mathrm{d}\xi^\beta. \tag{5.50}$$

Z toho tentokrát dostáváme požadavek na nulovost symetrizace $R_{\varkappa\lambda\beta}$ v posledních dvou indexech, to jest

$$0 = \frac{1}{2}\left(R_{\varkappa\lambda\beta} + R_{\varkappa\beta\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(K^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}\omega_{\mu\beta} + K^{\mu}{}_{\varkappa\beta}\omega_{\mu\lambda}\right). \tag{5.51}$$

[3] Z obdobných důvodů jako v předchozí poznámce pod čarou.

Pro bazické vektory t_ν tak dostaneme

$$\begin{aligned}\langle [t_\varkappa, t_\lambda], t_\beta\rangle + \langle t_\lambda, [t_\varkappa, t_\beta]\rangle &= \langle K^\sigma{}_{\varkappa\lambda} t_\sigma, t_\beta\rangle + \langle t_\lambda, K^\sigma{}_{\varkappa\beta} t_\sigma\rangle \\ &= K^\sigma{}_{\varkappa\lambda}\omega_{\sigma\beta} + K^\sigma{}_{\varkappa\beta}\omega_{\lambda\sigma} = 0,\end{aligned} \tag{5.52}$$

což z $(\,\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle, [\cdot,\cdot]\,)$ činí kvadratickou Lieovu algebru.

Opačný směr by se ukázal podobně, pouze bychom definitorické vztahy (5.43) a (5.44) použili opačně, to jest k definici symplektické formy ω a vektorového pole Q.

Příklad 5.3.10. Uvažujme hladkou varietu M a její kotečný fibrovaný prostor se stupni posunutými o jedna $\mathrm{T}^*[1]M$. Mějme souřadnice $\{x^i\}_{i=1}^n$ na M a k nim odpovídající (ve smyslu příkladu 3.3.4) gradované souřadnice $\{x^i\}_{i=1}^n$, $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ na $\mathrm{T}^*[1]M$. Při změně souřadnic $x^i \mapsto \tilde{x}^i$ máme pro odpovídající gradované souřadnice transformační vztah (3.52), který se v tomto případě zjednoduší[4] na $\tilde{\theta}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\theta_k$.

Jsme tedy schopni na N-varietě $\mathrm{T}^*[1]M$ definovat symplektickou formu stupně 3

$$\omega := -\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}x^i, \tag{5.53}$$

a to pro jakoukoliv podkladovou varietu M. Tato definice je sice v souřadnicích, avšak je na výběru souřadnic nezávislá, jak lze snadno ověřit právě díky výše uvedeným transformačním vztahům, a tudíž je kanonická. Jedná se samozřejmě o obdobu dobře známé kanonické (Poincarého) 2-formy na klasických kotečných fibrovaných prostorech. Ukazuje se ([12, Proposition 3.1.]), že „symplektická struktura“ na N-varietě $\mathrm{T}^*[1]M$ v jistém smyslu odpovídá vnější algebře vektorových polí na M, kde obdobu Poissonovy závorky hraje takzvaná Schoutenova-Nijenhuisova závorka. Tuto závorku nyní zadefinujeme (po vzoru [13]) a tento vztah podrobněji rozebereme.

Označme jako $A^p(M)$ prostor hladkých řezů prostorem $\bigwedge^p \mathrm{T}M$, totiž p-té vnější mocniny tečného fibrovaného prostoru. Označme dále $A^0(M) := \mathrm{C}^\infty(M)$, $A^k(M) := \{0\}$, pro $k < 0$ a $A(M) := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p(M)$. Potom **Schoutenova-Nijenhuisova závorka** je unikátní $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení

$$[\cdot,\cdot] : A(M) \times A(M) \to A(M), \tag{5.54}$$

splňující tyto čtyři vlastnosti:

1. $[f, g] = 0, \quad \forall f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$.
2. $[X, W] = \mathcal{L}_X W, \quad \forall X \in A^1(M), \forall W \in A(M)$.
3. $[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}\,[Q, P], \quad \forall P \in A^p(M), \forall Q \in A^q(M)$.
4. $[P, Q\wedge R] = [P, Q]\wedge R + (-1)^{(p-1)q}\,Q\wedge [P, R], \quad \forall P \in A^p(M), \forall Q \in A^q(M), \forall R \in A^r(M)$.

Prozkoumejme nyní, zda Poissonova závorka na výše zmíněné N-varietě nesplňuje podobné vztahy, když, neformálně řečeno, „zaměníme“ $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)_p \leftrightarrow A^p(M)$ a $\theta_i \leftrightarrow \partial_i$.

[4] Neformálně řečeno je tomu tak proto, že jsme při konstrukci $\mathrm{T}^*[1]M$ (to jest konstrukce v příkladu 3.3.4 pro $E = \mathrm{T}^*M$) přechodová zobrazení pro θ_i definovali jako transponované inverze k přechodovým zobrazením mezi souřadnicovými 1-formami.

Jelikož stupeň Poissonovy závorky je -1, ihned nahlédneme, že $\{f,g\}=0$ pro všechna $f,g\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)_0\equiv \mathrm{C}^\infty(M)\equiv A^0(M)$. To, že Poissonova závorka splňuje odpovídající obdobu vlastností 3 a 4 je zřejmé přímo z tvrzení 5.3.5. Pro prozkoumání vlastnosti 2 se musíme podívat jak vypadá hamiltonovské vektorové pole $X_{\theta_i}=: S^k\frac{\partial}{\partial x^k}+S_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}$. Podle (5.30) a (5.20) dostáváme

$$-\mathrm{d}\theta_i=i_{X_{\theta_i}}\omega=\left(S^k\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{d}x^k}+S_k\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{d}\theta_k}\right)\left(-\mathrm{d}\theta_j\,\mathrm{d}x^j\right)=-S^k\mathrm{d}\theta_k-S_k\mathrm{d}x^k, \tag{5.55}$$

z čehož nutně plyne, že $S_k=0$ a $S^k=\delta^k_{\ i}$ a tedy X_{θ_i} má jednoduchý tvar $X_{\theta_i}=\frac{\partial}{\partial x^i}$. Pro všechna $X=X^i\theta_i\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)_1\leftrightarrow A^1(M)$ a pro všechna $f\in\mathrm{C}^\infty(M)$ a $Y=Y^j\theta_j\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)_1$ tak s použitím již ukázaných vlastností dostaneme

$$\{X^i\theta_i,f\}=X^i\{\theta_i,f\}=X^i\,X_{\theta_i}f=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}f=X^if_{,i}\leftrightarrow[X^i\partial_i,f], \tag{5.56}$$

respektive

$$\begin{aligned}\{X^i\theta_i,Y^j\theta_j\}&=\{X^i\theta_i,Y^j\}\,\theta_j+Y^j\{X^i\theta_i,\theta_j\}=X^i\{\theta_i,Y^j\}\,\theta_j-Y^j\{\theta_j,X^i\}\,\theta_i\\&=\left(X^iY^j_{\ ,i}-Y^iX^j_{\ ,i}\right)\theta_j\leftrightarrow[X^i\partial_i,Y^j\partial_j],\end{aligned} \tag{5.57}$$

což však ukazuje, že Poissonova závorka splňuje příslušný ekvivalent vlastnosti 2. Neformálně bychom tedy mohli říct, že[5] $\left(\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)_p,\{\cdot,\cdot\}\right)$ a $(A(M),[\cdot,\cdot])$ jsou v podstatě „stejné matematické struktury“. Tento výrok nyní zpřesníme.

Uvažujme přiřazení $\mathcal{A}$, které každé množině $U\in\mathrm{Op}(M)$ přiřadí gradovaný vektorový prostor $\mathcal{A}(U)$, kde pro každé $k\in\mathbb{Z}$ je $\mathcal{A}(U)_k$ prostor hladkých řezů fibrace $\bigwedge^k\mathrm{T}U$, to jest, $\mathcal{A}(U)_k$ je prostor k-vektorových polí definovaných na U. Na $\mathcal{A}(U)$ intuitivním způsobem zavedeme strukturu gradovaně komutativní algebry, kde součin bude vnější součin, pouze zobrazující mezi komponentními vektorovými prostory $\mathcal{A}(U)_k$. Zavedením restrikcí, což bychom udělali podobně jako v podkapitole 4.2, se z $\mathcal{A}$ stává snop s hodnotami v gradovaně komutativních algebrách. Poněkud vágně formulované tvrzení z konce předchozího odstavce můžeme nyní vyslovit přesněji: snopy $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}$ a $\mathcal{A}$ jsou izomorfní jakožto snopy s hodnotami v gradovaně komutativních algebrách. Pokud navíc budeme uvažovat Schoutenovu-Nijenhuisovu závorku jako gradované bilineární zobrazení, pak následující diagram komutuje pro každé $U\in\mathrm{Op}(M)$.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(U)\times\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(U) \arrow[r, "\{\cdot,\cdot\}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\theta_i\leftrightarrow\partial_i"] & \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(U) \arrow[d, leftrightarrow, "\theta_i\leftrightarrow\partial_i"] \\ \mathcal{A}(U)\times\mathcal{A}(U) \arrow[r, "{[\cdot,\cdot]}"] & \mathcal{A}(U).\end{tikzcd} \tag{5.58}$$

Zmíníme další zajímavý vztah (viz [12, proposition 4.1.]), totiž že při uvedené korespondenci „$\theta_i\leftrightarrow\partial_i$“ odpovídají gradované funkce $H\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)$ stupně 2 splňující $\{H,H\}=0$ bivektorům $\pi\in A^2(M)$ splňujícím $[\pi,\pi]=0$. Tato identita však neznamená nic jiného[6], než že π je Poissonův bivektor. S odkazem na větu 5.3.8 tak můžeme tvrdit, že NQ-variety $(\mathrm{T}^*[1]M,\omega,X_H)$ odpovídají jedna ku jedné Poissonovým varietám (M,π).

[5]Chceme porovnávat $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{T}^*[1]M}(M)$ a $A(M)$, jenže jedno je zavedené jako gradovaná algebra a druhé jako „normální“ algebra, která je direktním součtem různých vektorových prostorů. Pro formální správnost tedy musíme buď gradované funkce direktně sečíst, přižemž operace se zachovávají a rozšiřují (bi)linearitou na nehomogenní prvky, nebo z multivektorových polí udělat snop s hodnotami v gradovaných algebrách. První alternativa je zmíněna zde, druhou rozvádí další odstavec.

[6]Viz například [14].

Závěr

V této práci jsme podrobným způsobem definovali N-variety pomocí jistých relativně nestandardních pojmů, explicitně jsme ukázali některé jejich vlastnosti a naznačili jejich vztah k supervarietám. Dále jsme na N-varietách zavedli vektorová pole a diferenciální formy a ověřili jsme, že splňují mnohé z vlastností, které by se od nich daly očekávat. Nakonec jsme na N-varietách definovali vhodným způsobem symplektickou strukturu a prozkoumali vztah této struktury a kompatibilního homologického vektorového pole. V průběhu práce i na konci jsme uváděli vybrané příklady probíraných pojmů.

Další směry zájmu mohou být například hlubší investigace korespondence symplektických N-variet s Courantovými algebroidy, která je zmíněna v [12], a kterou jsme nastínili v příkladu 5.3.9 speciálně pro jednobodovou podkladovou varietu.

Literatura

[1] M. Fairon: *Introduction to graded geometry*, Eur. J. of Math., 3(2):208-222, 2017.

[2] T. Y. Lam: *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag New York, 1991.

[3] J. L. Lagrange: *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*, Mémoires de la première classe de l'Institut de France, 771-805, 1808.

[4] A. Weinstein: *Symplectic Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., 5:1-13, 1981.

[5] I. Štoll, J. Tolar, I. Jex: *Klasická teoretická fyzika*, Karolinum, 2017.

[6] M. Fecko: *Diferenciálná geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, 2004.

[7] J. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag New York, 2012.

[8] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings, 1987.

[9] S. MacLane, I. Moerdijk: *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, 1992.

[10] C. Carmeli, L. Caston, R. Fioresi: *Mathematical Foundations of Supersymmetry*, European Mathematical Society, 2011.

[11] S. MacLane, G. Birkhoff: *Algebra*, American Mathematical Society, 1999.

[12] D. Roytenberg: *On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids*, Contemp. Math., 314:167-186, 2002.

[13] C.-M. Marle: *The Schouten-Nijenhuis bracket and interior products*, J. Geom. Phys., 23(3-4):350-359, 1997.

[14] A. Weinstein: *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differ. Geom., 18(3):523-557, 1983.