České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů

Approximations of one-dimensional relativistic point interactions by non-local potentials

Bakalářská práce

Autor: **Lukáš Heriban**

Vedoucí práce: **Ing. Matěj Tušek, Ph.D.**

Akademický rok: 2019/2020

Katedra: matematiky

Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Lukáš Heriban
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů
Název práce (anglicky):	Approximations of one-dimensional relativistic point interactions by non-local potentials

Pokyny pro vypracování:

1. Osvojit si základní pojmy a výsledky pro neomezené samosdružené operátory na Hilbertových prostorech.
2. Seznámit se s různými typy operátorových konvergencí a užitečnými resolventními formulemi (Krein, Kato).
3. Seznámit se s aktuálními výsledky ohledně regulárních aproximací jednorozměrných relativistických bodových interakcí.
4. Pokusit se aproximovat širokou množinu jednorozměrných relativistických bodových interakcí nelokálními potenciály v duchu článku P. Šeby (viz reference číslo 3).

Doporučená literatura:

1. G. Teschl, Mathematical Methods in Quantum Mechanics. AMS, Providence, 2014.
2. J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, Lineární operátory v kvantové fyzice. Karolinum, Praha, 1993.
3. P. Šeba, Klein's Paradox and the Relativistic Point Interaction. Letters in Mathematical Physics 18, 1989, 77-86.
4. M. Tušek, Approximation of one-dimensional relativistic point interactions by regular potentials revised. arXiv:1904.01061 (preprint), 2019.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Matěj Tušek, Ph.D.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

garant oboru

vedoucí katedry

děkan

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-1-

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Mateji Tuškovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Tímto bych chtěl také poděkovat Alexandře Elbakjanové za její přínos vědecké komunitě a studenstvu.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 20. července 2020 Lukáš Heriban

Název práce:

Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů

Autor: Lukáš Heriban

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Matěj Tušek, Ph.D., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT

Abstrakt: Tato bakalářská práce řeší problematiku aproximací jednorozměrných relativistických bodových interakcí za použití nelokálních potenciálů. Za tento nelokální potenciál volíme projekci na pevně zvolený škálovaný vektor v na prostoru $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$. Pro tento nelokální potenciál dokážeme uniformní konvergenci v resolventě k jistému operátoru, který popisuje relativistickou bodovou interakci. Následně je zde řešena otázka renormalizace vazebných konstant, tj. otázka zda se shoduje formální limita použité aproximace s formálním zápisem operátorové limity.

Klíčová slova: bodové interakce, Diracův operátor, lokální potenciály, nelokální potenciály, neomezené operátory

Title:

Approximations of one-dimensional relativistic point interactions by non-local potentials

Author: Lukáš Heriban

Abstract: This thesis deals with approximations of one-dimensional relativistic point interactions by non-local potentials. We will study exclusively the case when the non-local potential is given by the projection on a fixed scaled vector (in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$). Norm resolvent convergence to some operator of the relativistic point interaction is proved for this non-local potential. Furthermore, the formal expression for the norm resolvent limit is compared to the formal limit of non-local potential. In other words, renormalization of the coupling constant in case of non-local potential is discussed in this thesis.

Key words: Dirac operator, local potentials, non-local potentials, point interactions, unbounded operators

Obsah

1 Úvod

Tato bakalářská práce je zaměřena na použití nelokálních potenciálů v podobě projekce u volného Diracova operátoru

$$\begin{aligned} H_m &= -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes \sigma_1 + m \otimes \sigma_3 \\ \mathrm{Dom}(H_m) &= W^{1,2}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

na prostoru $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$. Cílem této práce je zkoumat tyto nelokální potenciály coby aproximace relativistických bodových interakcí. Relativistické bodové interakce patří k důležitým explicitně řešitelným modelům kvantové mechaniky. Matematicky je zavádíme pomocí zúžení definičního oboru volného Diracova operátoru na množinu $\{\varphi \in \mathrm{Dom}(H_m) \mid \varphi(0) = 0\}$ a následným samosdruženým prodloužením takto definovaného operátoru na operátor H^Λ, $H^\Lambda = H_m$ s definičním oborem

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, H^\Lambda = \{\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \otimes \mathbb{C}^2 \mid \varphi(0+) = \Lambda\varphi(0-)\}, \\ \Lambda = \omega \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\gamma & \delta \end{pmatrix}, \\ \omega = \mathrm{e}^{i\varphi},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ a } \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Fyzikální smysl tomuto modelu můžeme dodat právě za pomoci různých typů aproximací.

Hlavním cílem této práce je zobecnit výsledek P.Šeby [3], který pro dva speciální případy nelokálního potenciálu ukázal shodu mezi formální limitou a operátorovou limitou na rozdíl od lokálního potenciálu, kde k této shodě nedochází. Chceme tedy ukázat pro nelokální potenciály shodu mezi formální a operátorovou limitu i v obecnějším případě. Za tímto účelem bude nejdříve probraná problematika neomezených operátorů na Hilbertově prostoru a následně představíme Diracův diferenciální operátor. Následně se budeme zabývat jednorozměrnými relativistickými bodovými interakcemi a výsledky pro lokální aproximace těchto bodových interakcí. Poté představíme vlastní výsledek této bakalářské práce pro nelokální potenciály v podobě projekce

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^{\mathbb{A}} &= H_m + W_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A} \\ W_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2}|v(x/\varepsilon)\rangle\langle v(x/\varepsilon)|. \end{aligned} \tag{3}$$

Naším úkolem bude dokázat nejsilnější typ konvergence pro tento případ nelokálních potenciálů, tedy uniformní konvergenci v resolventě, k operátoru popisujícímu bodovou interakci. Za tímto účelem napočítáme resolventu Diracova operátoru s potenciálem v podobě projekce a dokážeme konvergenci v operátorové normě k resolventě operátoru bodové interakce, kterou napočítáme za pomoci Kreinovy formule. Tento výsledek následně porovnáme s formální limitou akce operátoru s nelokálním potenciálem. Naším cílem je ukázat, že formální limita se shoduje s formálním výrazem pro operátorovou limitu a tím poukázat na nelokální charakter relativistických bodových interakcí. Tyto porovnání limit budeme dělat způsobem, který uvádíme v následujícím přehledu.

Použité aproximace $\underset{\text{(konvergence uniformně v resolventě)}}{\overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow}}$ **Bodové interakce**

$H_\varepsilon^{\mathbb{A}} = H_m + \mathcal{V}_\varepsilon \otimes \mathbb{A}$, kde $\mathcal{V}_\varepsilon$ je škálovaný normovaný potenciál na jedničku. — H^Λ, kde $\Lambda = \Lambda(\mathbb{A})$

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \begin{cases} i)\ V_\varepsilon \ \text{- lokální potenciál} \\ \ (V_\varepsilon \text{ je skalární potenciál } \frac{1}{\varepsilon}h(\frac{x}{\varepsilon})) \\ ii)\ W_\varepsilon \ \text{- nelokální potenciál} \\ \ (W_\varepsilon \text{ je projekce } \frac{1}{\varepsilon^2}|v(x/\varepsilon)\rangle\langle v(x/\varepsilon)|) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i) \quad \Lambda = \exp(-i\sigma_1\mathbb{A}) \quad \text{(viz [4], [6], [7])} \\ ii) \quad \Lambda = (2iI - \sigma_1\mathbb{A})^{-1}(2iI + \sigma_1\mathbb{A}) \quad \text{(viz kapitola 5)} \end{cases}$$

$\mathcal{V}_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} \delta$, V_ε jde přímo k δ-funkci v distribucích a W_ε jde k δ-funkci ve smyslu uvedeném v (87).

$$\Rightarrow H_\varepsilon^{\mathbb{A}} \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} H_m + \mathbb{A}\delta \tag{4}$$

Tato formální limita operátoru $H_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ by se zdála jako dobrý kandidát pro operátorovou konvergenci. Abychom zjistili, zda se tato formální limita shoduje s operátorovými limitami, porovnáme operátorové limity s formálním výrazem pro H^Λ tvaru

$$H^\Lambda = H_m + \mathbb{B}\delta.$$

Kde pro nespojité funkce z Dom H^Λ dodefinujeme Diracovu δ-funkci následovně.

$$\psi(0) := \frac{\psi(0+) + \psi(0-)}{2}$$

Této formální podoby operátoru H^Λ můžeme dosáhnout dvěma způsoby.

1. Dle článku R.J.Hughes [6],[7], kde začne s podmínkou pro bodové interakce z definičního oboru operátoru H^Λ, dostává formální výraz tvaru
$$H^\Lambda = H_m + 2i\sigma_1(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1}\delta. \tag{5}$$
Tento způsob je blíže rozveden v kapitole 4.

2. Začneme s výrazem $H_m + \mathbb{B}\delta$. Najdeme dále maximální definiční obor, kde takto definovaný výraz funguje jako operátor na $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$.
   (a) Spočteme $H_m\psi = -i\sigma_1\{\frac{d\psi}{dx}\} - i\sigma_1(\psi(0+) - \psi(0-))\delta + m\sigma_3\psi$, kde $\{\frac{d\psi}{dx}\}$ značí derivaci funkce ψ tam, kde je možné ji derivovat.
   (b) Chceme, aby se odečetly singulární členy v $(H_m + \mathbb{B}\delta)\psi$.
$$\Rightarrow -i\sigma_1(\psi(0+) - \psi(0-)) + \mathbb{B}\frac{\psi(0+) + \psi(0-)}{2} = 0$$
$$(2i\sigma_1 + \mathbb{B})\psi(0-) = (2i\sigma_1 - \mathbb{B})\psi(0+)$$
$$\psi(0+) = \underbrace{(2i\sigma_1 - \mathbb{B})^{-1}(2i\sigma_1 + \mathbb{B})}_{\Lambda}\psi(0-) \tag{6}$$
$$\Rightarrow \Lambda = (2i\sigma_1 - \mathbb{B})^{-1}(2i\sigma_1 + \mathbb{B})$$
$$\Rightarrow 2i\sigma_1(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1} = \mathbb{B}$$

Očekávání bylo takové, že při použití libovolného škálovaného potenciálu po dosazení $\Lambda(\mathbb{A})$ dostaneme $\mathbb{A} = 2i\sigma_1(\Lambda(\mathbb{A}) - I)(\Lambda(\mathbb{A}) + I)^{-1}$. Připomeneme výsledky článků [[3],[4],[6],[7]], které ukazují, že tomu tak obecně není. Tento fenomén nazýváme renormalizací vazebných konstant. Následně dokážeme, že pro nelokální potenciál použitý v této práci, k této rovnosti dochází, tj. nedochází k renormalizaci.

2 Omezené operátory

Nechť A je lineární zobrazení mezi dvěma normovanými prostory X a Y

$$A : \mathrm{Dom}\, A \subseteq X \to Y.$$

Množinu $\mathrm{Ker}\, A = \{f \in \mathrm{Dom}\, A \mid Af = 0\}$ nazveme jádrem zobrazení A.
Množinu $\mathrm{Ran}\, A = \{Af \mid f \in \mathrm{Dom}\, A\}$ nazveme obrazem zobrazení A .

Definice 2.0.1 (Omezené zobrazení)**.** *A nazveme omezeným zobrazením právě tehdy, když* $\sup_{\|f\|_X=1} \|Af\|_Y =: \|A\|$ *je konečné číslo.*

Množinu omezených zobrazení značíme $\mathcal{B}(X, Y)$. Jedná se o lineární prostor s operacemi sčítání a násobení definovanými následovně.

$$\begin{aligned} &A, B \in \mathcal{B}(X, Y), z \in T \\ &\forall f \in \mathrm{Dom}(A + B) := \mathrm{Dom}\, A \cap \mathrm{Dom}\, B, (A + B)(f) := A(f) + B(f) \\ &\forall f \in \mathrm{Dom}\, A, (zA)(f) = zA(f) \end{aligned} \tag{7}$$

Navíc, pokud je vybaven $\|A\|$, je tento prostor normovaný.

Poznámka 2.0.1. *Pro omezené operátory platí* $\|Af\|_Y \leq \|A\|\|f\|_X$.

Poznámka 2.0.2. *Následující výroky jsou ekvivalentní.*

1. *Zobrazení A je omezené.*
2. *Zobrazení A je spojité.*
3. *Zobrazení A je spojité v jednom bodě.*

Poznámka 2.0.3. *Pokud Y je pre-Hilbertův prostor, pak pro* $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ *platí*

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle g|Af\rangle|$$

Věta 2.0.1 (O spojitém rozšíření omezených operátorů)**.** *Nechť* $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ *a nechť Y je Banachův prostor. Pokud DomA je hustý na X, tak potom* $\exists^1$ *spojité rozšíření A na X se stejnou operátorovou normou.*

Důkaz. Protože omezený operátor je zároveň spojitý, může existovat pouze jediné spojité rozšíření. Kdyby existovala dvě rozšíření A_1 a A_2 tak, že se shodují na husté podmnožině celého topologické prostoru, pak se nutně shodují na celém prostoru. Tudíž hledané rozšíření může být dáno pouze jako

$$Af = \lim_{n\to+\infty} Af_n, f_n \in \mathrm{Dom}\, A, f \in X.$$

Stačí ukázat, že definice je nezávislá na výběru f_n. Nechť $f_n \to f$ a $g_n \to f$.

$$\|Af_n - Ag_n\| = \|A(f_n - g_n)\| \leq \|A\|\|f_n - g_n\| \to 0$$

Ze spojitosti sčítání vektorů a násobení prvky tělesa je prodloužení lineární a ze spojitosti normy dostaneme zachování normy. □

Věta 2.0.2 (Princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhaus)**.** *Nechť máme $\mathcal{X}$ Banachův prostor, Y normovaný vektorový prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}, Y)$. Potom nastane právě jedna z následujících možností.*

- $\sup_{A\in\mathcal{A}} \|A\| < +\infty$ *(stejnoměrně omezené)*
- $\exists G \subset \mathcal{X}, \overline{G} = \mathcal{X}$ *tak, že* $\forall x \in G, \sup_{A\in\mathcal{A}} \|Ax\| = +\infty$

Důkaz. Důkaz lze dohledat například v [1]. □

Pokud $A \in \mathcal{B}(X, X) =: \mathcal{B}(X)$, nazveme takové zobrazení omezeným operátorem na X.
Uvedeme ještě typy konvergencí pro omezené operátory.

Definice 2.0.2 (Konvergence omezených operátorů)**.** *Nechť $(A_n) \subset \mathcal{B}(X)$ a $A \in \mathcal{B}(X)$ kde X je normovaný prostor pak definujeme*

1. *A_n konverguje uniformě k A (ozn. $A_n \xrightarrow{u} A$), pokud platí*
   $\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$.
2. *A_n konverguje silně k A (ozn. $A_n \xrightarrow{s} A$), pokud platí*
   $\forall f \in X \lim_{n\to+\infty} \|A_n f - Af\| = 0$.
3. *Pokud X je Hilbertův, pak A_n konverguje slabě k A (ozn. $A_n \xrightarrow{w} A$), pokud platí*
   $\forall f, g \in X \lim_{n\to+\infty} |\langle A_n f|g\rangle - \langle Af|g\rangle| = 0$.

2.1 Hilbert-Schmidtovy operátory (přehled)

Tato kapitola je čerpána z přednášek funkcionální analýzy P. Šťovíčka, které proběhly v akademickém roce 2019/2020. [11]

$\mathcal{H}$ značí v této kapitole separabilní, nekonečně rozměrný Hilbertův prostor.

Věta 2.1.1. *Nechť $(f_n)_{n>0}, (g_n)_{n>0}$ jsou dvě ortonormální báze v $\mathcal{H}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Af_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|A^* g_n\|^2 \tag{8}$$

Speciálně vidíme, že součet řad nezávisí na výběru ortonormální báze.

Důkaz.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|A^* g_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle f_k|A^* g_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle Af_k|g_n\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle g_n|Af_k\rangle|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \|Af_k\|^2 \tag{9}$$

□

Definice 2.1.1. *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je Hilbert-Schmidtův, jestliže pro nějakou ortonormální bázi $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ na prostoru $\mathcal{H}$ platí*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Af_n\|^2 < +\infty. \tag{10}$$

Pro všechny Hilbert-Schmidtovy operátory A definujeme jejich Hilbert-Schmidtovu normu následovně

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|Af_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Věta 2.1.2. *Nechť A je Hilbert-Schmidtův operátor. Pak A splňuje nerovnost $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$.*

Důkaz.

$$\|Af\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f_n|Af\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle A^* f_n|f\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|A^* f_n\|^2\|f\|^2 = \|A^*\|_{HS}^2\|f\|^2 = \|A\|_{HS}^2\|f\|^2 \tag{12}$$

□

Věta 2.1.3. *Nechť A, B jsou Hilbert-Schmidtovi operátory, $(f_n)_{n>0}, (g_n)_{n>0}$ jsou dvě ortonormální báze prostoru $\mathcal{H}$. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\langle Af_n|Bf_n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle A^* g_n|B^* g_n\rangle. \tag{13}$$

Přičemž obě sumy konvergují absolutně.

Důkaz.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle Af_n|Bf_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|Af_n\|\|Bg_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|Af_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|Bf_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_{HS}\|B\|_{HS} < +\infty \tag{14}$$

Obdobně pro druhou řadu.

Dále platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\langle Af_n|Bf_n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\langle Af_n|g_k\rangle\langle g_k|Bf_n\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\langle f_n|A^* g_k\rangle\langle B^* g_k|f_n\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle B^* g_k|A^* g_k\rangle. \tag{15}$$

□

Poznámka 2.1.1. *Buď M měřitelný prostor s mírou μ, $\mathcal{H} := L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ a nechť $\mathcal{H}$ je separabilní. Dále $\mathcal{K} \in L^2(M \times M, \mathrm{d}\mu \times \mathrm{d}\mu)$. Definujeme na $\mathcal{H}$ integrální operátor K s integrálním jádrem $\mathcal{K}$ vztahem $\forall \psi \in \mathcal{H}, K\psi(x) := \int_M \mathcal{K}(x, y)\psi(y)\,\mathrm{d}y$. Pak operátor K je dobře definovaný omezený Hilbert-Schmidtův operátor na $\mathcal{H}$ a platí $\|K\|_{HS} = \|\mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)}$.*

3 Neomezené operátory

Většina základních pojmů a vět v této kapitole o neomezených operátorech jsou převzaté z knihy G. Teschla [1] a z knihy J. Blanka, P. Exnera a M. Havlíčka [2]. Pojmy týkající se operátorů násobení jsou čerpány z článku M. Fialové [10].

Dál budeme uvažovat všechny lineární operátory na komplexním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Množinu těchto zobrazení označíme $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pokud $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$, řekneme, že operátor A je hustě definován. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pokud platí $\forall \psi \in \operatorname{Dom} A \subset \operatorname{Dom} B, A\psi = B\psi$, pak značíme $A \subseteq B$.

Definice 3.0.1 (Součin a součet neomezených operátorů)**.** *Zadefinujeme několik operací na neomezených operátorech.*

- *Součin neomezených operátorů je definován* $\forall \psi \in \operatorname{Dom} AB := \{\psi \in \operatorname{Dom} B \mid B\psi \in \operatorname{Dom} A\}, AB\psi := A(B\psi)$
- *Součet neomezených operátoru je definován* $\forall \psi \in \operatorname{Dom}(A + B) := \operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B, (A + B)\psi := A\psi + B\psi$
- $A = B \Leftrightarrow \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} B \wedge \forall \psi \in \operatorname{Dom} A, A\psi = B\psi$

Příklad 3.0.1 (Operátor derivování)**.** *Nechť máme operátor* $D := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *na prostoru* $L^2(\mathbb{R})$*, kde*

$$\operatorname{Dom} D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid Df \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Pak ukážeme, že tento operátor je neomezený.

Důkaz. Pokud najdeme posloupnost $f_n, \|f_n\| = 1$ tak, že $\lim_{n\to+\infty} \|Df_n\| = +\infty$, pak je hotovo. Nechť tedy $f_n := C_n \exp\left(-\frac{1}{1-nx^2}\right)$ na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}})$, jinak je dodefinovaná nulou. Lze ukázat, že takto definovaná funkce je z C^∞. Spočítáme nejprve normu těchto funkcí.

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 \,\mathrm{d}x = C_n^2 [x\mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}}]_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + C_n^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{4nx^2}{(1-nx^2)^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}} \,\mathrm{d}x = \\ = C_n^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{4nx^2}{(1-nx^2)^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}} \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16}$$

Konstantu C_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně.

$$\frac{1}{C_n} = \sqrt{\int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{4nx^2}{(1-nx^2)^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}} \,\mathrm{d}x}$$

Tím jsou všechny funkce f_n normované na jedničku. Teď se koukneme na normu funkcí Df_n.

$$\begin{aligned} \|Df_n\|^2 = C_n^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{4n^2x^2}{(1-nx^2)^4} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}} \,\mathrm{d}x \\ \geq nC_n^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{4nx^2}{(1-nx^2)^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{1-nx^2}} \,\mathrm{d}x = n\|f_n\|^2 = n \end{aligned} \tag{17}$$

Zde již vidíme, že $\lim_{n\to+\infty} \|Df_n\| = +\infty$ a tedy operátor D je neomezený. □

Definice 3.0.2 (Symetrický operátor)**.** *Hustě definovaný operátor* A *nazveme symetrickým právě tehdy, když* $\forall \varphi, \psi \in \operatorname{Dom} A, \langle\psi|A\varphi\rangle = \langle A\psi|\varphi\rangle$.

3.1 Sdružené operátory

Definice 3.1.1 (Sdružený operátor)**.** *K hustě definovanému operátoru A definujeme sdružený operátor* A^* *tak, že* $\operatorname{Dom} A^* = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists \tilde{\psi}, \forall \varphi \in \operatorname{Dom} A, \langle \psi | A\varphi \rangle = \langle \tilde{\psi} | \varphi \rangle\}$.
Potom $A^*\psi := \tilde{\psi}$.
Pokud $A \subseteq A^*$, *pak je A symetrickým operátorem.*
Pokud $A = A^*$, *nazveme A samosdruženým operátorem.*

Takto definovaný operátor je jednoznačně definován. Kdyby existoval $\tilde{\psi}_1$ tak, že $\forall \varphi \in \operatorname{Dom} A, \langle \psi | A\varphi \rangle = \langle \tilde{\psi}_1 | \varphi \rangle$ pak dostaneme $\forall \varphi \in \operatorname{Dom} A, \langle \tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi} | \varphi \rangle = 0$. Tedy platí $\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi} \in \operatorname{Dom} A^\perp = \overline{\operatorname{Dom} A}^\perp = \{0\}$ z hustoty operátoru.

Dále z definice ihned můžeme vidět $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ran} A)^\perp$.

Definice 3.1.2 (Normální operátor)**.** *Operátor A nazveme normálním operátorem právě tehdy, když*

$$\forall \psi \in \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A^*, ||A\psi|| = ||A^*\psi||.$$

Poznámka 3.1.1. *Nechť operátor A je normální, potom* $\forall z \in \mathbb{C}, (A - z)$ *je normální operátor.*

Důkaz.

$$\operatorname{Dom}(A - z) = \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A^* = \operatorname{Dom}(A - z)^*$$

Potom dostáváme následující.

$$\langle (A - z)\varphi | (A - z)\varphi \rangle = \langle A\varphi | A\varphi \rangle - z^* \langle \varphi | A\varphi \rangle - z \langle A\varphi | \varphi \rangle + zz^* \langle \varphi | \varphi \rangle = \\ = \langle A^*\varphi | A^*\varphi \rangle - z^* \langle A^*\varphi | \varphi \rangle - z \langle \varphi | A^*\varphi \rangle + zz^* \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle (A^* - z^*)\varphi | (A^* - z^*)\varphi \rangle \quad (18)$$

□

Poznámka 3.1.2. *Vlastnosti sdružených operátorů:*

- $(\alpha A)^* = \alpha^* A^*, \alpha \in \mathbb{C}$
- $(A + B)^* \subseteq A^* + B^*$
- $A \subseteq B \Rightarrow B^* \subseteq A^*$

Věta 3.1.1. *Samosdružené operátory jsou maximální ve smyslu toho, že nemají žádné symetrické rozšíření.*

Důkaz. A je samosdružený a B symetrické rozšíření. Pak pomocí třetího bodu poznámky 3.1.2 dostáváme.

$$A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^* = A \Rightarrow A = B$$

□

Pokud A^* je hustě definovaný, pak můžeme uvažovat A^{**}. Pak je vidět, že platí $A \subseteq A^{**}$. Pokud navíc A budeme uvažovat symetrickým, pak platí $A \subseteq A^* \Rightarrow A^{**} \subseteq A^*$. To znamená, že pro symetrický operátor jeho A^{**} "leží"mezi A a A^*.

Věta 3.1.2. *Nechť A je symetrický operátor tak, že* $\exists z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \operatorname{Ran}(A + z) = \operatorname{Ran}(A + z^*) = \mathcal{H}$. *Poté platí, že A je samosdružený.*

Důkaz. Nechť

$$\psi \in \operatorname{Dom}(A^*), A^*\psi = \tilde{\psi}, \operatorname{Ran}(A + z^*) = \mathcal{H} \Rightarrow \exists\varphi \in \operatorname{Dom} A \tag{19}$$

tak, že

$$(A + z^*)\varphi = \tilde{\psi} + z^*\psi.$$

Pak dostáváme $\forall\rho \in \operatorname{Dom} A$, $\langle\psi|(A + z)\rho\rangle = \langle\tilde{\psi} + z^*\psi|\rho\rangle = \langle(A + z^*)\varphi|\rho\rangle =$ (ze symetrie) $= \langle\varphi|(A + z)\rho\rangle$ $\Rightarrow \psi = \varphi \in \operatorname{Dom} A$. Tedy platí $\operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A^*$ a ze symetrie operátoru dostáváme i rovnost akcí. □

Příklad 3.1.1 (Operátor násobení)**.** *Nechť máme operátor násobení $T_{\mathbb{A}}\psi := \mathbb{A}(x)\psi(x)$,*

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}(x),$$

definovaný na prostoru $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^n$, kde a_{ij} jsou měřitelné funkce a definiční obor je definován následovně.

$$\operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}} := \{\psi \mid \psi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^n, \mathbb{A}\psi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^n\}$$

Dále ztotožníme $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^n$ s $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$.

Věta 3.1.3. $(T_{\mathbb{A}})^* = T_{\mathbb{A}^*}$

Důkaz. Budeme potřebovat ověřit rovnost definičních oborů a akcí jednotlivých operátorů.

$$\operatorname{Dom}(T_{\mathbb{A}})^* = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}), \langle\psi|T_{\mathbb{A}}\varphi\rangle = \langle\tilde{\psi}|\varphi\rangle, \forall\varphi \in \operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}}\}$$

Lze rovnou vidět, že $(T_{\mathbb{A}})^* \supset T_{\mathbb{A}^*}$, jelikož pro $\forall\psi \in \operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}^*}, \forall\varphi \in \operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}}$ platí $\langle\psi|T_{\mathbb{A}}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle\psi|\mathbb{A}\varphi\rangle_{\mathbb{C}^n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\langle\mathbb{A}^*\psi|\varphi\rangle_{\mathbb{C}^n}(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{\mathbb{A}^*}\psi|\varphi\rangle$.

Nyní ukážeme i opačnou inkluzi $\operatorname{Dom}(T_{\mathbb{A}})^* \subset \operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}^*}$ a rovnost akcí. K tomu si definujeme pomocnou posloupnost množin $\Omega_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \max_{i,j\in\hat{n}} |a_{ij}(x)| \leq n\}$, která roste k $\mathbb{R}$ ve smyslu inkluze. Pro takto definované množiny dostáváme, že pro všechny funkce $\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^n$ můžeme definovat posloupnost $\varphi_n := \chi_{\Omega_n}\varphi$, což je posloupnost funkcí, o kterých víme, že leží v $\operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}}$.

Nechť $\psi \in \operatorname{Dom}(T_{\mathbb{A}})^*$.

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}}\langle\psi|\mathbb{A}\chi_{\Omega_n}\varphi\rangle_{\mathbb{C}^n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\langle\tilde{\psi}|\chi_{\Omega_n}\varphi\rangle_{\mathbb{C}^n}(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_{\mathbb{R}}\langle(\mathbb{A}^*\psi - \tilde{\psi})\chi_{\Omega_n}|\varphi\rangle_{\mathbb{C}^n}(x)\,\mathrm{d}x = \langle(\mathbb{A}^*\psi - \tilde{\psi})\chi_{\Omega_n}|\varphi\rangle = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

Tedy dostáváme, že $(\mathbb{A}^*\psi - \tilde{\psi})\chi_{\Omega_n} = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}$ a pro všechny n. Potom tedy musí platit

$$\mathbb{A}^*\psi - \tilde{\psi} = 0$$

$$\mathbb{A}^*\psi = \tilde{\psi} \Rightarrow \psi \in \operatorname{Dom} T_{\mathbb{A}^*} \text{ a } T_{\mathbb{A}^*}\psi = (T_{\mathbb{A}})^*\psi$$

□

Pomocí věty výše ihned vidíme, že pokud pro všechny $x \in \mathbb{R}$ matice $\mathbb{A}$ splňuje $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}^*(x)$, potom je příslušný operátor násobení $T_{\mathbb{A}}$ samosdružený.

3.2 Uzavřené operátory

Jedna možnost rozšíření operátoru A je vzít uzávěr jeho grafu

$$\Gamma(A) = \{(\psi, A\psi) \mid \psi \in \operatorname{Dom} A\} \subset \mathcal{H}^2.$$

Pokud $(\psi_n, A\psi_n) \to (\psi, \tilde{\psi})$ pak definujeme $\overline{A}\psi = \tilde{\psi}$. Aby byla definice $\overline{A}\psi$ korektní, je potřeba, aby $(\psi_n, A\psi_n) \to (0, \tilde{\psi})$ implikovalo $\tilde{\psi} = 0$. Pokud tomu tak je, pak říkáme, že operátor A je uzavíratelný na jednoznačný operátor $\overline{A}$, který bude splňovat $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Definice 3.2.1 (Uzavřený operátor)**.** *Pokud platí $A = \overline{A}$, říkáme, že operátor A je uzavřený. A je tedy uzavřený právě tehdy, když $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$.*

Věta 3.2.1. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ je hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$. Potom sdružený operátor A^* je uzavřený.*

Důkaz. Zvolíme si libovolně posloupnost $(\varphi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Dom} A^*$ tak, že $\varphi_n \to \varphi$ a $A^*\varphi_n \to z$. Pro všechny $\psi \in \operatorname{Dom} A$ víme, že platí

$$\langle \varphi_n | A\psi \rangle = \langle A^*\varphi_n | \psi \rangle$$

V limitě tak dostáváme

$$\langle \varphi | A\psi \rangle = \langle z | \psi \rangle \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Dom} A^* \wedge z = A^*\varphi.$$

□

Poznámka 3.2.1. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ je uzavřený a invertibilní. Potom A^{-1} je uzavřený.*

Důkaz.

$$\Gamma(A) = \{(\psi, A\psi) \mid \psi \in \operatorname{Dom} A\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma(A^{-1}) = \{(\varphi, A^{-1}\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Dom} A^{-1}\} = \{(\varphi, A^{-1}\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Ran} A\} = \\ = \{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \operatorname{Dom} A\} \end{aligned} \tag{21}$$

□

Poznámka 3.2.2. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ je uzavřený a pro $z \in \mathbb{C}, (A - z)$ je invertibilní. Potom $(A - z)^{-1}$ je uzavřený operátor.*

Důkaz. Z předchozí poznámky stačí dokázat, že je $(A - z)$ uzavřený operátor.

$$\Gamma(A - z) = \{(\psi, (A - z)\psi) \mid \psi \in \operatorname{Dom}(A - z) = \operatorname{Dom} A\}$$

Nechť $\psi_n \to \psi, (A - z)\psi_n \to \rho$. Pak ze spojitosti identity víme, že $z\psi_n \to z\psi$. Tedy dostáváme

$$A\psi_n \to z\psi + \rho,$$

kde dál z uzavřenosti A dostaneme $z\psi + \rho = A\psi$. Dohromady tedy $\rho = (A - z)\psi$. □

Definice 3.2.2 (Normální operátor)**.** *Operátor A nazveme normálním právě tehdy, když platí $\forall \varphi \in \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A^*, \|A\varphi\| = \|A^*\varphi\|$.*

Věta 3.2.2. *Normální operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ je uzavřený.*

Důkaz.
$$\Gamma(A) = \{(\varphi, A\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Dom} A\}$$
Z věty 3.2.1 víme, že $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A^*)}$. Nechť $\varphi_n \in \operatorname{Dom} A, \varphi_n \to \varphi \wedge A\varphi_n \to \rho$.

Z normálnosti A je posloupnost $A^*\varphi_n$ cauchyovská. Pak z uzavřenosti A^* dostáváme
$$A^*\varphi_n \to A^*\varphi.$$
Tedy z normálnosti A máme $\varphi \in \operatorname{Dom} A$. Dále stačí ověřit rovnost $A\varphi$ a ρ.
$$\|A(\varphi - \varphi_n)\| = \|A^*(\varphi - \varphi_n)\| \to 0 \Rightarrow \rho = A\varphi$$
□

Připomeňme si ještě spojitost mezi uzavřeným operátorem a sdruženým operátorem.

Poznámka 3.2.3. *Nechť A je hustě definovaný operátor. Pak A je uzavíratelný právě tehdy, když* $\operatorname{Dom} A^*$ *je hustý. Pokud je A uzavíratelný, pak platí* $\overline{A} = A^{**}$.

Věta 3.2.3 (Věta o uzavřeném grafu)**.** *Nechť* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *je operátor definovaný všude na* $\mathcal{H}$. *Potom* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$.

Důkaz.

- Nechť A je omezený operátor $\Rightarrow A$ je uzavřený, ze spojitosti A.
- $\Gamma(A)$ je uzavřený a máme i dobře definovaný A^*. Pro všechny jednotkové vektory $\varphi \in DomA^*$ definujeme lineární funkcionál $f_\varphi(\psi) := \langle A^*\varphi|\psi\rangle$, který je bodově omezený $\|f_\varphi(\psi)\| = |\langle\varphi|A\psi\rangle| \leq \|A\psi\|$. Pak za použití Banachovy-Steinhausovy věty 2.0.2 dostáváme $\exists C > 0, \|f_\varphi\| = \|A^*\varphi\| \leq C \Rightarrow A^*$ je omezený a tedy i $A = A^{**}$ z poznámky 3.2.3.

□

Věta 3.2.4 (Hellinger-Toeplitz)**.** *Symetrický operátor definovaný na celém* $\mathcal{H}$ *je omezený.*

Důkaz. Věta je přímým důsledkem věty 3.2.1 a věty o uzavřeném grafu 3.2.3. □

Věta 3.2.5. *Nechť A je samosdružený operátor,* $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \neq 0$. *Potom* $\operatorname{Ran}(A-z)$ *je uzavřená množina.*

Důkaz. Z věty 3.2.2 je A uzavřený operátor. Vezmeme $(\varphi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Ran}(A - z)$ tak, že $\varphi_n \to \varphi$. Protože $\varphi_n \in \operatorname{Ran}(A - z) \Rightarrow \exists \psi_n \in \operatorname{Dom}(A - z)$ tak, že $\varphi_n = (A - z)\psi_n$. Dál ze samosdruženosti plyne
$$|\operatorname{Im}(z)\|\psi_n\|^2| = |\operatorname{Im}\langle(A - z)\psi_n|\psi_n\rangle|.$$

Dostáváme tedy
$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(z)|\|\psi_n\|^2 &\leq |\langle(A-z)\psi_n|\psi_n\rangle| \leq \|(A - z)\psi_n\|\|\psi_n\| \\ |\operatorname{Im}(z)|\|\psi_n\| &\leq \|(A - z)\psi_n\| = \|\varphi_n\| \end{aligned} \tag{22}$$

ψ_n je tedy cauchyovská. To znamená, že $\exists\psi = \lim_{n\to+\infty} \psi_n$. Jelikož $(\psi_n, \varphi_n) \in \Gamma(A - z)$ a obě složky konvergují, pak z uzavřenosti operátoru A dostáváme $\varphi \in \operatorname{Ran}(A - z)$. □

3.3 Resolventa a spektrum

Definice 3.3.1 (Resolventa operátoru)**.** *Nechť A je hustě definovaný uzavřený operátor. Resolventní množina A je množina $\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid (A - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$.*
$R_A(z) := (A - z)^{-1}$ pro $z \in \rho(A)$ se nazve resolventní funkcí operátoru A a omezený operátor $R_A(z)$ nazveme resolventou operátoru A v $z \in \mathbb{C}$.

Za pomoci kapitoly 3.2 o uzavřeném operátoru vidíme, že platí

$$\{z \in \mathbb{C} \mid (A - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (A - z) \text{ je bijekce na celý } \mathcal{H}\}.$$

Věta 3.3.1. *Resolventní množina je otevřená.*

Důkaz. $z, z_1 \in \rho(A)$ potom

$$\begin{aligned}(A - z)^{-1} - (z - z_1)(A - z)^{-1}(A - z_1)^{-1} &= (A - z)^{-1}(1 - (z - A + A - z_1)(A - z_1)^{-1}) \\ &= (A - z)^{-1}(A - z)(A - z_1)^{-1} = (A - z_1)^{-1}.\end{aligned} \tag{23}$$

Tím dostáváme Hilbertovu identitu

$$(A - z)^{-1} - (A - z_1)^{-1} = (z - z_1)R_A(z)R_A(z_1). \tag{24}$$

Rekurzivním použitím Hilbertovy identity dospějeme ke vztahu

$$R_A(z) = \sum_{j=0}^{n}(z - z_1)^j R_A(z_1)^{j+1} + (z - z_1)^{n+1} R_A(z_1)^{n+1} R_A(z).$$

Nechť dále $z \in \mathbb{C}, z_0 \in \rho(A)$. Pak $R_n := \sum_{j=0}^{n}(z - z_0)^j R_A(z_0)^{j+1}$ konverguje uniformně k omezenému operátoru, pokud platí

$$|z - z_0| < \|R_A(z_0)\|^{-1}.$$

Položíme $R_\infty := \lim_{n\to+\infty} R_n, \varphi_n := R_n\psi, \varphi := R_\infty\psi$ pro $\psi \in \mathcal{H}$.
Potom dostáváme

$$A\varphi_n = AR_n\psi = (A - z_0)R_n\psi + z_0\varphi_n = \psi + (z - z_0)\varphi_{n-1} + z_0\varphi_n = \psi + z\varphi_{n-1} + z_0(\varphi_n - \varphi_{n-1}).$$

Tedy z podoby operátoru AR_n dostáváme $\varphi_n \in \operatorname{Dom} A$. Dále platí $(\varphi_n, A\varphi_n) \to (\varphi, \psi + z\varphi) \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Dom} A$ z toho, že je A uzavřený a $(A - z)R_\infty\psi = \psi$ pro $\psi \in \operatorname{Dom} A$. Stejně pak pro $R_n A\psi = \psi + (z - z_0)\varphi_{n-1} + z_0\varphi_n$. Dohromady dostáváme $R_\infty = R_A(z)$. Z čehož plyne $z \in \rho(A)$.

□

Definice 3.3.2 (Spektrum operátoru)**.** *Spektrem operátoru A rozumíme množinu $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$. Spektrum dále dělíme následovně*

1. *$z \in \sigma_p(A)$ pokud $(A - z)$ není prostý. Množinu $\sigma_p(A)$ nazýváme bodové spektrum.*

2. *Pokud $(A - z)$ je prostý, ale není surjektivní*

   (a) *Pokud platí $\overline{Ran(A - z)} = \mathcal{H}$, potom $z \in \sigma_c(A)$ tzv. spojité spektrum.*

   (b) *Pokud platí $\overline{Ran(A - z)} \neq \mathcal{H}$, potom $z \in \sigma_r(A)$ tzv. reziduální spektrum.*

Definice 3.3.3 (Oblast regularity)**.** *Nechť A operátor. Množinu*

$$\pi(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists C(z) > 0, \forall \varphi \in \operatorname{Dom} A, \|(A - z)\varphi\| \geq C(z)\|\varphi\|\}$$

nazveme oblastí regularity operátoru A.

Věta 3.3.2. *Nechť A normální operátor, potom platí $\rho(A) = \pi(A)$.*

Důkaz.

- $z \in \rho(A)$ pak

$$\|(A - z)\varphi\| \geq \|R_A(z)\|^{-1}\|R_A(z)(A - z)\varphi\| = \|R_A(z)\|^{-1}\|\varphi\| \Rightarrow C(z) = \|R_A(z)\|^{-1}. \tag{25}$$

- $z \in \pi(A)$
  Dostáváme $\operatorname{Ker}(A - z) = \{0\} \Rightarrow (A - z)$ je prosté zobrazení.
  Z poznámky 3.1.1 víme, že $(A - z)$ je normální operátor. Pak tedy

$$\{0\} = \operatorname{Ker}(A - z) = \operatorname{Ker}(A^* - z^*) \Rightarrow \overline{\operatorname{Ran}(A - z)} = \mathcal{H}$$

  Stačí ověřit, že $\operatorname{Ran}(A - z)$ je uzavřená množina.

  Nechť $(\xi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Ran}(A - z)$ a $\xi_n \to \xi$. Tedy existuje $(\varphi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Dom} A$ tak, že $(A - z)\varphi_n = \xi_n$. Posloupnost ξ_n konverguje, tedy je cauchyovská. Pak z

$$\|(A - z)(\varphi_n - \varphi_m)\| \leq C(z)\|\varphi_n - \varphi_m\|$$

  je i posloupnost (φ_n) cauchyovská, tedy konverguje k $\varphi \in \mathcal{H}$.
  Pak z uzavřenosti operátoru A dostáváme $\xi = (A - z)\varphi \in \operatorname{Ran}(A - z)$. Tedy $\operatorname{Ran}(A - z)$ je uzavřená množina.

□

Věta 3.3.3 (Weylovo kritérium)**.** *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hustě definovaný uzavřený operátor. Nechť $\exists(\psi_n)_{n>0} \subset$ $\operatorname{Dom} A$ tak, že $\|\psi_n\| = 1$ a pro $z \in \mathbb{C}$, $\|(A - z)\psi_n\| \to 0$ (tzv. weylovská posloupnost), potom $z \in \sigma(A)$. Pro A normální platí i opačná implikace, tj. pokud $z \in \sigma(A)$ potom platí, že existuje weylovská posloupnost pro z.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy $z \in \rho(A)$ poté, ale dostáváme

$$1 = \|\psi_n\| = \|R_A(z)(A - z)\psi_n\| \leq \|R_A(z)\|\|(A - z)\psi_n\| \to 0. \tag{26}$$

Druhou implikaci pro normální operátory dostaneme za pomoci věty 3.3.2.

$$z \in \sigma(A) = \mathbb{C}/\pi(A) \Rightarrow (\forall K > 0)(\exists \varphi \in \operatorname{Dom} A)(\|(A - z)\varphi\| < K\|\varphi\|)$$

Kde můžeme předpokládat $\|\varphi\| = 1$. Potom volbou posloupnosti $K_n = \frac{1}{n}$ generujeme weylovskou posloupnost. □

Definice 3.3.4. *Nechť $T_{\mathbb{A}}$ je operátor násobení (viz příklad 3.1.1). Definujeme následující množiny.*

$$\begin{gathered} M_\varepsilon(z) := \{p \in \mathbb{R} \mid (\exists x_p \in \mathbb{C}^n, \|x_p\|_{\mathbb{C}^n} = 1)(\|(\mathbb{A}(p) - z)x_p\|_{\mathbb{C}^n} < \varepsilon)\} \\ R_{ess}(T_{\mathbb{A}}) := \{z \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0; \mu(M_\varepsilon(z)) > 0\} \end{gathered} \tag{27}$$

Věta 3.3.4. *Nechť $T_{\mathbb{A}}$ je samosdružený operátor násobení. Pak platí $R_{ess}(T_{\mathbb{A}}) = \sigma(T_{\mathbb{A}})$.*

Důkaz.

- $R_{ess}(T_{\mathbb{A}}) \subset \sigma(T_{\mathbb{A}})$

$$\begin{gathered} \forall z \in R_{ess}(T_{\mathbb{A}}); \varphi_\varepsilon(p) := \frac{\chi_N(p)}{\mu(N)^{\frac{1}{2}}} x_p \\ N \subseteq M_\varepsilon(z), 0 < \mu(N) < +\infty, \end{gathered} \tag{28}$$

kde x_p je vektor z definice množiny $M_\varepsilon(z)$. Je vidět, že platí $\|\varphi_\varepsilon(p)\|_{L^2} = 1$.

$$\begin{gathered} \|(T_{\mathbb{A}} - z)\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \|(\mathbb{A}(p) - z)\frac{\chi_N(p)}{\mu(N)^{\frac{1}{2}}} x_p\|_{\mathbb{C}^n}^2 \,\mathrm{d}p = \\ = \int_N \frac{1}{\mu(N)} \|(\mathbb{A}(p) - z)x_p\|_{\mathbb{C}^n}^2 \,\mathrm{d}p < \varepsilon^2 \int_N \frac{1}{\mu(N)} \,\mathrm{d}p = \varepsilon^2 \end{gathered} \tag{29}$$

Poté zvolením $\varepsilon := \frac{1}{n}$, dostáváme weylovskou posloupnost. Tedy platí $z \in \sigma(T_{\mathbb{A}})$.

- $R_{ess}(T_{\mathbb{A}}) \supset \sigma(T_{\mathbb{A}})$ (obměnou)
  $\exists z \in \sigma(T_{\mathbb{A}})$ tak, že $z \notin R_{ess}(T_{\mathbb{A}})$

$$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mu(M_\varepsilon(z)) = 0) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(s.v.p \in \mathbb{R})(\forall x_p \in \mathbb{C}^n : \|(\mathbb{A}(p) - z)x_p\| \geq \varepsilon \|x_p\|) \tag{30}$$

Nechť $\psi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, \psi(p) \in \mathbb{C}^n$ a dostáváme

$$\|(T_{\mathbb{A}} - z)\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\|(\mathbb{A}(p) - z)\psi(p)\|_{\mathbb{C}^n}^2}_{\geq \varepsilon^2 \|\psi(p)\|_{\mathbb{C}^n}^2} \,\mathrm{d}p \geq \varepsilon^2 \|\psi\|_{L^2}^2 \tag{31}$$

$\Rightarrow z \in \pi(T_{\mathbb{A}})$ z věty 3.3.2 tedy dostáváme $z \in \rho(T_{\mathbb{A}})$.

□

Definice 3.3.5. *Nechť $T_{\mathbb{A}}$ operátor násobení. Pak pro pevné $p \in \mathbb{R}$ dostáváme spektrum matice $\mathbb{A}(p)$, $\sigma(\mathbb{A}(p))$. Definujeme množinu*

$$\Sigma(T_{\mathbb{A}}) := \bigcup_{p \in \mathbb{R}} \sigma(\mathbb{A}(p)).$$

Lemma 3.3.1. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), A = A^*$. Nechť dále $z \in \mathbb{C}$ tak, že $A - z$ je bijekce na celé $\mathcal{H}$. Pak platí*

1. $\sigma((A - z)^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A) - z} = \{\frac{1}{\lambda - z} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$
2. $(A - z)^{-1}$ *je normální operátor.*
3. $r_B := \sup_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$ *(tzv. spektrální poloměr) poté* $r_{(A-z)^{-1}} = \|(A - z)^{-1}\|$.

Důkaz.

1.
   - $\underline{\sigma(A-z)=\sigma(A)-z}$
     Z rovnosti $(A-z)-\lambda=(A-(\lambda+z))$
     dostáváme $\lambda\in\sigma(A-z)\Leftrightarrow\lambda+z\in\sigma(A)$.
   - $\underline{\lambda\neq 0,\lambda\in\sigma((A-z)^{-1})\Leftrightarrow\lambda^{-1}\in\sigma(A-z)}$
     Dokážeme ekvivalentní tvrzení $\lambda\neq 0,\lambda\in\rho((A-z)^{-1})\Leftrightarrow\lambda^{-1}\in\rho(A-z)$

     (:$\Rightarrow$) $(A-z)-\lambda^{-1}=(\lambda-(A-z)^{-1})\lambda^{-1}(A-z)$
     Kde na pravé straně dostáváme bijektivní zobrazení z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}$. Tedy $\lambda^{-1}\in\rho(A-z)$.

     (:$\Leftarrow$) $(A-z)^{-1}-\lambda=(\lambda^{-1}-(A-z))\lambda(A-z)^{-1}$
     Kde na pravé straně dostáváme opět bijekci na $\mathcal{H}$, tudíž platí $\lambda\in\rho(A-z)^{-1}$.
   - $\underline{0\notin\sigma((A-z)^{-1})}$
     Kdyby 0 byla ve spektru operátoru, pak $((A-z)^{-1}-0)^{-1}=A-z$ není bijekcí, což je spor.

2. Pro $(A-z)$ bijekci, kde A je uzavřený operátor, dostáváme z věty o uzavřeném grafu, že $(A-z)^{-1}$ je omezený operátor. Pak pro sdružení platí $((A-z)^{-1})^*=((A-z)^*)^{-1}$. Jelikož sdružený operátor k omezenému operátoru je opět omezený operátor dostáváme následující

$$\begin{aligned}(A-z)^*(A-z)&=(A-z)(A-z)^*\\(A-z)^{-1}((A-z)^*)^{-1}&=((A-z)^*)^{-1}(A-z)^{-1}\\(A-z)^{-1}((A-z)^{-1})^*&=((A-z)^{-1})^*(A-z)^{-1}.\end{aligned}\tag{32}$$

3. Pro spektrální poloměr platí $r_B=\lim_{n\to+\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}}$. Pak pro normální omezený operátor B dostáváme $r_B=\|B\|$. Za použití 2. bodu a položením $B=(A-z)^{-1}$ dostáváme dokazované tvrzení.

□

Věta 3.3.5. *Nechť $T_{\mathbb{A}}$ operátor násobení. Nechť dále $T_{\mathbb{A}}=(T_{\mathbb{A}})^*$ a $a_{ij}=a_{ij}(p)$ jsou spojité funkce. Pak platí*

$$\overline{\Sigma(T_{\mathbb{A}})}=\sigma(T_{\mathbb{A}})\tag{33}$$

Důkaz.

- $\overline{\Sigma(T_{\mathbb{A}})}\subset\sigma(T_{\mathbb{A}})$
  Ukážeme postačující podmínku $p\in M_\varepsilon(z)\Rightarrow\exists U_\delta(p)\subset M_\varepsilon(z)$, kde $U_\delta(p)$ je δ okolí p.

  Ze spojitosti $a_{ij}(p)$ dostáváme $\forall p\in\mathbb{R}$ a $\forall i,j\in\hat{n}$

$$(\forall\gamma>0)(\exists\delta_{ij}(p))(\forall p_0\in U_{\delta_{ij}}(p))(|a_{ij}(p)-a_{ij}(p_0)|<\gamma)\tag{34}$$

  Nyní předpokládejme $z\in\sigma(\mathbb{A}(p))$ pro $p\in\mathbb{R}$. Potom

$$\exists x_p\in\mathbb{C}^n,\|x_p\|_{\mathbb{C}^n}=1,(\mathbb{A}(p)-z)x_p=0$$

  Dále definujeme $\|\mathbb{A}(p)\|_\infty:=\sup_{i,j\in\hat{n}}|a_{ij}(p)|$ a $\delta(p):=\min_{i,j\in\hat{n}}\delta_{ij}(p)$.
  Z ekvivalence norem na konečně rozměrném prostoru máme navíc $\exists K>0,\|\mathbb{A}(p)\|_{\mathbb{C}^n}\le K\|\mathbb{A}(p)\|_\infty$.

$$\Rightarrow\|(\mathbb{A}(p_0)-z)x_p\|_{\mathbb{C}^n}\le\underbrace{\|(\mathbb{A}(p)-z)x_p\|_{\mathbb{C}^n}}_{=0}+K\underbrace{\|\mathbb{A}(p_0)-\mathbb{A}(p)\|_\infty}_{<\gamma}\|x_p\|_{\mathbb{C}^n}<\gamma K,\forall p_0\in U_\delta(p)\tag{35}$$

Pro fixní p dostáváme

$$(\forall\gamma > 0)(\exists U_\delta(p))(\forall p_0 \in U_\delta(p))(\exists x_p \in \mathbb{C}^n)(\|(\mathbb{A}(p_0) - z)x_p\|_{\mathbb{C}^n} < K\gamma) \tag{36}$$

$\Rightarrow \forall p \in M_{K\gamma}(z)$ je p v $M_{K\gamma}(z)$ i se svým okolím

$$\Rightarrow (z \in \sigma(\mathbb{A}(p)) \Rightarrow \forall\gamma > 0, \mu(M_{K\gamma}(z)) > 0)$$

$\Rightarrow z \in R_{ess}(T_\mathbb{A}) \Rightarrow$ (z věty 3.3.4) $\Sigma(T_\mathbb{A}) \subset \sigma(T_\mathbb{A})$. Dále víme z věty 3.3.1, že spektrum je uzavřená množina, tedy dostáváme $\overline{\Sigma(T_\mathbb{A})} \subset \sigma(T_\mathbb{A})$.

- $\overline{\Sigma(T_\mathbb{A})} \supset \sigma(T_\mathbb{A})$

Důkaz provedeme obměnou. To jest budeme dokazovat tvrzení $z \notin \overline{\Sigma(T_\mathbb{A})} \Rightarrow z \in \rho(T_\mathbb{A})$. Budeme dokazovat $z \notin R_{ess}(T_\mathbb{A})$. Lze vidět, že platí

$$z \notin \overline{\Sigma(T_\mathbb{A})} \Leftrightarrow (\exists\delta_z > 0)(\forall p \in \mathbb{R})(\mathrm{dist}(z, \sigma(\mathbb{A}(p))) > \delta_z) \tag{37}$$

a

$$\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \|(\mathbb{A}(p) - z)^{-1}(\mathbb{A}(p) - z)x\|_{\mathbb{C}^n} \leq \|(\mathbb{A}(p) - z)^{-1}\|\|(\mathbb{A}(p) - z)x\|_{\mathbb{C}^n}. \tag{38}$$

Dále za pomoci lemma 3.3.1 dostaneme

$$\|(\mathbb{A}(p) - z)^{-1}\| = \sup_{\lambda\in\sigma((\mathbb{A}(p)-z)^{-1})} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(\mathbb{A}(p))} \frac{1}{|\lambda - z|} = \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(\mathbb{A}(p)))}. \tag{39}$$

Pak z (38) a z (39) plyne

$$\|(\mathbb{A}(p) - z)x\|_{\mathbb{C}^n} \geq \mathrm{dist}(z, \sigma(\mathbb{A}(p)))\|x\|_{\mathbb{C}^n}.$$

Dohromady tedy

$$(\text{s.v. } p \in \mathbb{R})(\forall x_p \in \mathbb{C}^n, \|x_p\|_{\mathbb{C}^n} = 1)(\|(\mathbb{A}(p) - z)x_p\|_{\mathbb{C}^n} \geq \mathrm{dist}(z, \sigma(\mathbb{A}(p))) > \delta_z). \tag{40}$$

Což znamená, že $z \notin R_{ess}(T_\mathbb{A})$.

□

Věta 3.3.6. *Nechť A samosdružený operátor. Potom platí $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Důkaz.

$$\varphi \in \mathrm{Ker}(A - z) \setminus \{0\} \Rightarrow (A\varphi = z\varphi) \Rightarrow z\|\varphi\|^2 = \langle z\varphi|\varphi\rangle = \langle A\varphi|\varphi\rangle = \langle A\varphi|\varphi\rangle^* \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{R} \tag{41}$$

Nechť $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ pak z (41) plyne

$$\mathrm{Ker}(A - z) = \mathrm{Ker}(A^* - z) = \{0\}.$$

Tedy operátor $(A - z)$ je prostý. Jelikož $\mathrm{Dom}\, A = \mathrm{Dom}(A - z) \Rightarrow A - z$ je hustě definovaný.

$$\mathrm{Ran}(A - z)^\perp = \mathrm{Ker}((A - z)^*) = \mathrm{Ker}(A - z^*) = \{0\} \tag{42}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ran}(A - z)$ je hustý a z věty 3.2.5 dostáváme $\mathrm{Ran}(A - z) = \overline{\mathrm{Ran}(A - z)} = \mathcal{H}$. $A - z$ je tedy bijekcí. □

Dále by se hodilo rozhodnout o konvergenci neomezených samosdružených operátorů. Zde můžeme použít resolventu operátoru, která je z definice omezený operátor.

Definice 3.3.6. *Nechť* $(A_n)_{n>0}$ *a A jsou samosdružené operátory pak*

- A_n *konverguje k A uniformně v resolventě, pokud* $\exists z$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ *resolventy* $R_{A_n}(z)$ *konvergují uniformně k resolventě* $R_A(z)$.
- A_n *konverguje k A silně v resolventě, pokud* $\exists z$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ *resolventy* $R_{A_n}(z)$ *konvergují silně k resolventě* $R_A(z)$.

3.4 Unitární zobrazení

Definice 3.4.1. *Omezený operátor* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *který je izomorfismem, nazveme unitárním operátorem. Jedná se tedy o operátor, který splňuje* $\mathrm{Dom}\, U = \mathrm{Ran}\, U = \mathcal{H}$ *a* $\forall \varphi \in \mathcal{H}, ||U\varphi|| = ||\varphi||$.

Pokud je $U : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ *omezené zobrazení, které je izomorfismem, nazveme toto zobrazení unitárním zobrazením. Splňuje tedy* $\mathrm{Dom}\, U = \mathcal{H}, \mathrm{Ran}\, U = \tilde{\mathcal{H}}$ *a* $\forall \varphi \in \mathcal{H}, ||U\varphi||_2 = ||\varphi||_1$.

Věta 3.4.1. *Následující výroky jsou ekvivalentní.*

1. *U je unitární operátor na* $\mathcal{H}$.
2. *Operátor* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *je surjektivní a* $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ *platí* $\langle U\varphi | U\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$.
3. $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathrm{Dom}\, U = \mathcal{H}$ *a platí* $U^{-1} = U^*$.

Důkaz.

- 1. $\Leftrightarrow$ 2. Implikace 2. $\Rightarrow$ 1. je triviální a 1. $\Rightarrow$ 2. dostáváme z polarizační identity.

$$\begin{aligned}\langle U\varphi | U\psi \rangle &= \frac{1}{4}(||U(\varphi + \psi)||^2 - ||U(\varphi - \psi)||^2 + i||U(\varphi - i\psi)||^2 - i||U(\varphi + i\psi)||^2) = \\ &= \frac{1}{4}(||(\varphi + \psi)||^2 - ||(\varphi - \psi)||^2 + i||(\varphi - i\psi)||^2 - i||(\varphi + i\psi)||^2) = \langle \varphi | \psi \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

- 2. $\Rightarrow$ 3.

$$||U\varphi||^2 = \langle U\varphi | U\varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle = ||\varphi||^2 \Rightarrow U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathrm{Dom}\, U = \mathcal{H}$$

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \langle \varphi | \psi \rangle = \langle U\varphi | U\psi \rangle = \langle U^* U\varphi | \psi \rangle \quad (44)$$

  Ze surjektivity vidíme, že platí $\mathrm{Dom}\, U^{-1} = \mathcal{H}$ a

$$\forall U\varphi \in \mathrm{Dom}\, U^*, U^* = U^{-1}$$

  Kde díky omezenosti operátoru U víme z Rieszovy věty, že platí $\mathrm{Dom}\, U^* = \mathcal{H}$.

- 3. $\Rightarrow$ 1.

  Z věty 3.2.1 vidíme, že operátor U^{-1} je uzavřený. Potom z poznámky 3.2.1 je i operátor U uzavřený. Pak z věty o uzavřeném grafu 3.2.3 máme $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$$||U\varphi||^2 = \langle U\varphi | U\varphi \rangle = \langle U^* U\varphi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle, \forall U\varphi \in \mathrm{Dom}\, U^*$$

  Dál víme $\mathrm{Dom}\, U^{-1} = \mathrm{Dom}\, U^* = \mathrm{Ran}\, U$. Kde $\mathrm{Dom}\, U^* = \mathcal{H}$ z Rieszovy věty.

□

Poznámka 3.4.1. *U je unitární zobrazení z $\mathcal{H}$ do $\tilde{\mathcal{H}}$ je opět ekvivalentní požadavku, aby operátor U byl surjektivní a $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \langle U\varphi | U\psi \rangle_2 = \langle \varphi | \psi \rangle_1$.*

Důkaz. Lze opět lehce nahlédnout z polarizační identity a z definice unitárního zobrazení. □

Definice 3.4.2 (Unitární ekvivalence)**.** *$\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ je unitárně ekvivalentní s $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ právě tehdy, když $\exists U : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ unitární operátor tak, že $\tilde{A} = UAU^{-1}$.*

Poznámka 3.4.2. *Nechť $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jsou hustě definované operátory. S je invertibilní a $S^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Potom TS je hustě definovaný operátor a platí $(TS)^* = S^*T^*$.*

Poznámka 3.4.3. *Nechť $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tak, že TS je hustě definovaný. Pak platí $(TS)^* = S^*T^*$.*

Věta 3.4.2. *Nechť $A, \tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jsou unitárně ekvivalentní. Potom platí*

1. $\operatorname{Dom} A = U(\operatorname{Dom} \tilde{A})$
2. *$\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$ a zachovává se i rozdělení spektra z definice 3.3.2.*
3. *A samosdružený $\Leftrightarrow$ $\tilde{A}$ samosdružený*

Důkaz.

1. Z toho, že U je bijekce, lze vidět $\operatorname{Dom} \tilde{A} = \operatorname{Dom}(UAU^{-1}) = U(\operatorname{Dom} A)$.
2. (a) Nechť $(A - z)$ není prosté. To nastane právě tehdy, když $\exists \psi \in \mathcal{H}, (A - z)\psi = 0$. Potom $(\tilde{A} - z)\varphi = U(A - z)U^{-1}\varphi$. Stačí tedy zadefinovat $\varphi := U\psi$.

   (b) Nechť $A - z$ je prosté, ale $\operatorname{Ran}(A - z) \neq \mathcal{H}$ tak, že $\overline{\operatorname{Ran}(A - z)} = \mathcal{H}$. Chceme dostat $\operatorname{Ran}(\tilde{A} - z) \neq \mathcal{H}$ a $\overline{\operatorname{Ran}(\tilde{A} - z)} = \mathcal{H}$. Sporem $\forall \xi \in \mathcal{H}, \exists \psi \in \mathcal{H}, (\tilde{A} - z)\psi = \xi$ dostáváme

   $$(\tilde{A} - z)\psi = U(A - z)U^{-1}\psi = \xi.$$

   $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ položíme $\xi := U\varphi$. Tím dostáváme $\operatorname{Ran}(A - z) = \mathcal{H}$.
   Dále máme předpoklad $\overline{\operatorname{Ran}(A - z)} = \mathcal{H}$, který je ekvivalentní s

   $$(\forall \varphi \in \mathcal{H})(\exists (\psi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Dom} A)((A - z)\psi_n \to \varphi).$$

   Pak za použití spojitosti a bijektivity zobrazení U dostáváme

   $$(\tilde{A} - z)U\psi_n = U(A - z)\psi_n \to U\varphi.$$

   Tedy skutečně $\overline{\operatorname{Ran}(\tilde{A} - z)} = \mathcal{H}$.

   (c) Nechť $\operatorname{Ran}(A - z) \neq \mathcal{H}$ a $\overline{\operatorname{Ran}(A - z)} \neq \mathcal{H}$. Chceme ukázat, že $\operatorname{Ran}(\tilde{A} - z) \neq \mathcal{H}$ a $\overline{\operatorname{Ran}(\tilde{A} - z)} \neq \mathcal{H}$. První bod dostaneme stejně jako v (b). Druhý bod dokážeme sporem.
   Nechť tedy platí

   $$(\forall \varphi \in \mathcal{H})(\exists (\psi_n)_{n>0} \subset \operatorname{Dom} \tilde{A})((\tilde{A} - z)\psi_n \to \varphi)$$

   poté, ale z (b) dostáváme $\overline{\operatorname{Ran}(A - z)} = \mathcal{H}$.
3. Nechť A samosdružený. Pak díky omezenosti unitárního zobrazení a jeho inverze dostáváme z poznámek 3.4.2 a 3.4.3

   $$\tilde{A}^* = (UAU^{-1})^* = UAU^{-1} = \tilde{A}. \tag{45}$$

□

Poznámka 3.4.4. *Z provedeného důkazu věty 3.4.2 je patrné, že věta platí i pro operátory $\tilde{A}, A$ na různých Hilbertových prostorech.*

Poznámka 3.4.5 (Fourier-Plancherelův operátor)**.** *Příklad unitárního operátoru je Fourier-Plancherelův operátor $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.*

$$\mathcal{F} f := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{ipx} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

Složením tohoto operátoru s operátorem derivování dostaneme operátor násobení novou proměnnou.

$$\mathcal{F}(-i\,\mathrm{d}x)\mathcal{F}^{-1} = p \tag{47}$$

Příklad 3.4.1 (Diracův operátor)**.** *Nechť máme H_m jednodimenzionální Diracův operátor s hmotovým členem m definovaný na dvou-komponentovém spinoru Hilbertova prostoru $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ následovně.*

$$\begin{aligned} H_m &= -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes \sigma_1 + m \otimes \sigma_3 \\ \mathrm{Dom}(H_m) &= W^{1,2}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2 \end{aligned} \tag{48}$$

Kde $W^{k,p}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in L^p(\mathbb{R}) \mid D^\alpha\varphi \in L^p(\mathbb{R}), |\alpha| \le k\}$ je Sobolevův prostor a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

jsou Pauliho matice.
Jedná se o samosdružený operátor se spektrem $\sigma(H_m) = (-\infty, -m\rangle \cup \langle m, +\infty)$.

Důkaz. Za pomoci poznámky 3.4.5 vidíme, že H_m je unitárně ekvivalentní s operátorem násobení tvaru

$$\mathbb{A}(p) := \begin{pmatrix} m & p \\ p & -m \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Dom}(\mathbb{A}(p)) = \{\psi \mid \psi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2), \mathbb{A}(p)\psi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)\}.$$

Bodově má tento operátor spektrum $\pm\sqrt{m^2 + p^2}$. Tedy z věty 3.3.5 dostáváme

$$(-\infty, -m\rangle \cup \langle m, +\infty) = \overline{\Sigma(\mathbb{A}(p))} = \sigma(\mathbb{A}(p)).$$

Operátor násobení $\mathbb{A}(p)$ je samosdružený. Tedy v věty 3.4.2 i původní Diracův operátor je samosdružený a má shodné spektrum s $\mathbb{A}(p)$. □

Integrální jádro resolventy Diracova operátoru $R_z = (H_m - z)^{-1}, z \in \rho(H_m)$ je dáno $R_z(x, y) = R_z(x-y)$, kde

$$\begin{aligned} R_z(x) &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \zeta(z) & \mathrm{sgn}(x) \\ \mathrm{sgn}(x) & \zeta^{-1}(z) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ik(z)|x|}, \\ \zeta(z) &= \frac{z+m}{k(z)},\ k(z) = \sqrt{z^2 - m^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

4 Relativistické bodové interakce a lokální aproximace

Jedny z důležitých řešitelných matematických modelů v relativistické kvantové mechanice v jedné dimenzi jsou takzvané relativistické bodové interakce koncentrované v jednom bodě (bez újmy na obecnosti uvažujme v bodě $x = 0$). Lze je zavést následujícím způsobem. Nejprve volný operátor H_m zúžíme na operátor $\tilde{H} = H_m$ s definičním oborem

$$\mathrm{Dom}(\tilde{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Dom}(H_m) \mid \varphi(0) = 0\}. \tag{50}$$

Jak bylo popsáno v článku S.Benvegnua a L.Dabrowského [5], pro takto definovaný operátor $\tilde{H}$ existuje čtyř-parametrická množina samosdružených rozšíření. Tyto rozšíření jsou popsány za pomoci matice

$$\Lambda = \omega \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{51}$$

kde parametry $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ splňují následující podmínky

$$\omega = \mathrm{e}^{i\varphi}, \;\; \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ a } \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

Poté jsou samosdružená rozšíření operátoru $\tilde{H}$ dána jako operátory H^Λ s definičním oborem

$$\mathrm{Dom}(H^\Lambda) = \{\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \otimes \mathbb{C}^2 \mid \varphi(0+) = \Lambda\varphi(0-)\} \tag{53}$$

tak, že

$$\forall\varphi \in \mathrm{Dom}(H^\Lambda), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, (H^\Lambda\psi)(x) = (H_m\psi)(x).$$

Nejedná se o všechna samosdružená rozšíření, nicméně ostatní lze získat jako limitní případ výše uvedených.

Další důležitou otázkou zůstává, jak aproximovat tyto bodové potenciály. Touto otázkou se zabíráme ze dvou hlavních důvodů. První důvod je, že posloupnosti konvergující k operátoru bodové interakce nám můžou mnohé napovědět o fyzikální podstatě daného operátoru. Druhým důvodem je, že za pomoci bodových interakcí, které jsou explicitně analyticky řešitelné, můžeme aproximovat řadu lokalizovaných interakcí.

Jednou z prvních prací zaobírající se matematicky rigorózně relativistickým případem bodových interakcí byl článek P.Šeby [3], který pojednává exkluzivně o elektrostatických a Lorentzových bodových interakcích popsaných maticemi

$$\Lambda = \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{4}} \begin{pmatrix} 1-\frac{\alpha^2}{4} & -i\alpha \\ -i\alpha & 1-\frac{\alpha^2}{4} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \Lambda = \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{4}} \begin{pmatrix} 1+\frac{\beta^2}{4} & -i\beta \\ i\beta & 1+\frac{\beta^2}{4} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

V článku jsou dále ukázány dvě možnosti aproximací takto definovaných operátorů. První taková možnost je Diracův operátor s potenciálem $1/\varepsilon\, h(x/\varepsilon) \otimes \mathbb{A} = h_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A} = I$, resp. σ_3. V témže článku bylo dokázáno, že takto definované operátory konvergují uniformně v resolventě k operátorům popsaným (54) jen za dodatečných netriviálních podmínek na parametry α resp. β, závislých na funkci h, přestože formální limita Diracova operátoru se skalárním potenciálem ve smyslu distribucí dává operátory popsané (54). Tento fenomén byl nazván renormalizací vazebných konstant a byl připsán lokálnímu chování použitého potenciálu.

R.J.Hughes následně ukázala silnou konvergenci v resolventě pro širší množinu těchto lokálních potenciálů ([6],[7]) a M.Tušek [4] dále zobecnil tento výsledek za pomoci následující věty.

Věta 4.0.1. *Nechť $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tak, že $\int_{\mathbb{R}} |h| = 1$. Nechť dále $\lambda_k := \frac{1}{(2k+1)\pi}$, $\tilde{H}_\varepsilon^{\mathbb{A}} := H_m + h_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A}$ a nechť matice $\mathbb{A}$ je v jedné z následujících podob*

- $\mathbb{A} := -\varphi\sigma_1, \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0, \lambda_k^{-1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} a & -ib \\ ib & -d \end{pmatrix}$, $a, b, d \in \mathbb{R}$, $\det \mathbb{A} \notin \{\lambda_k^{-2} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Pak operátor $\tilde{H}_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ konverguje uniformně v resolventě k bodové interakci s maticí $\Lambda = \exp(-i\sigma_1\mathbb{A})$.

Pro posouzení zda bude docházet k renormalizaci vazebných konstant při použití tohoto lokálního potenciálu stačí tento výsledek porovnat s formální limitou lokálního potenciálu. Této formální limity dosáhneme limitou akce operátoru $\tilde{H}_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ ve smyslu distribucí. Ta má následující tvar

$$H_m\psi + \mathbb{A}\psi(0)\delta,$$

kde δ značí jednodimenzionální Diracovu δ-funkci.

Formální limitu následně porovnáme s výsledkem R.J.Hughes [7], kde pro libovolnou bodovou interakci, pro kterou existuje inverze $\Lambda + I$, vypadá akce operátoru H^Λ ve smyslu distribucí následovně

$$\begin{aligned} H^\Lambda\psi &= -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes \sigma_1\psi + m \otimes \sigma_3\psi + 2i\sigma_1(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1}\psi(0)\delta, \\ \psi(0) &:= \frac{\psi(0+) + \psi(0-)}{2}. \end{aligned} \tag{55}$$

Tuto formální podobu operátoru H^Λ dostaneme dle článku [7] z hraniční podmínky z definičního oboru bodové interakce $\psi(0+) = \Lambda\psi(0-)$ následujícím způsobem. Nejdříve v článku [7] dostáváme formální podobu H^Λ tvaru

$$H^\Lambda = H_m\psi + \sigma_1(\psi(0+) - \psi(0-))\delta.$$

Dále máme z hraniční podmínky a definice δ-funkce $2\psi(0) = (I + \Lambda^{-1})\psi(0+)$. Tedy dostáváme

$$\begin{aligned} (\Lambda + I)(\psi(0+) - \psi(0-)) &= (\Lambda + I)(I - \Lambda^{-1})\psi(0+) \\ &= (\Lambda - \Lambda^{-1})\psi(0+) \\ &= 2(\Lambda - I)\psi(0). \end{aligned} \tag{56}$$

Tím dostáváme formální podobu operátoru H^Λ (55).

Pak při normované funkci h dostáváme nutnou a postačující podmínku, aby nedocházelo k renormalizaci pro potenciál $h_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A}$, tj. právě tehdy, když platí

$$\mathbb{A} = 2i\sigma_1(\exp(-i\sigma_1\mathbb{A}) - I)(\exp(-i\sigma_1\mathbb{A}) + I)^{-1}.$$

Na tomto výsledku je zajímavé, že na pravé straně této podmínky ve skutečnosti vychází matice $\mathbb{A}$ [7], ale je vynásobená výrazem závislým na parametrech matice $\mathbb{A}$ a tento výraz typicky není roven jedné. Tím docházíme k výsledku, že za použití skalárního potenciálu, dochází k renormalizaci vazebných konstant, až na speciální případy.

5 Nelokální potenciály

Naskýtá se tedy otázka, zda existuje potenciál, který nebude způsobovat renormalizaci vazebných konstant. V článku P.Šeby [3] je navrhnuta druhá možnost jak aproximovat bodové interakce a to za pomoci takzvaných nelokálních potenciálů. Zejména se článek zabývá nelokálním potenciálem v podobě projekce na pevně zvolený škálovaný vektor v v $L^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon^{\mathbb{A}} &= H_m + W_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A} \\
W_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} |v(x/\varepsilon)\rangle\langle v(x/\varepsilon)| =: |v_\varepsilon(x)\rangle\langle v_\varepsilon(x)|
\end{aligned}
\tag{57}
$$

V témže článku je následně dokázána uniformní konvergence v resolventě tohoto operátoru, pro speciální případy $\mathbb{A} = I$, resp. σ_3, k bodové interakci a je ukázáno, že tato bodová interakce se shoduje s formální limitou, tedy nedochází k renormalizaci. To nás přivádí k možnému zobecnění tohoto výsledku pro libovolnou hermitovskou matici $\mathbb{A}$.

Připomeňme si ještě, že uniformní konvergence v resolventě je stabilní vůči přidání konstantní omezené poruchy [[9], věta IV 2.23 c) & IV 2.25]. Můžeme tedy uvažovat bez újmy na obecnosti $m = 0$. Poté (49) přechází do tvaru

$$
\begin{gathered}
R_z(x, y) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \zeta(z) & \operatorname{sgn}(x-y) \\ \operatorname{sgn}(x-y) & \zeta(z) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|}, \\
\text{kde } \zeta(z) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z)).
\end{gathered}
\tag{58}
$$

Nyní napočítejme resolventu operátoru $H_\varepsilon^{\mathbb{A}}$,

$$
\text{kde } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}, \ a, d \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}.
$$

Z resolventní formule dostáváme

$$
R_\varepsilon^{\mathbb{A}} = (H_\varepsilon^{\mathbb{A}} - z)^{-1} = R_z(I + (|v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon| \otimes \mathbb{A})R_z)^{-1}.
\tag{59}
$$

Kde I značí identické zobrazení na $L^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Dále akci $\mathbb{A}R_z v_\varepsilon$ myslíme tak, že v_ε působí na jednotlivé prvky operátoru $\mathbb{A}R_z$ jako na integrální operátory s příslušnými integrálními jádry. Výsledný objekt má tedy maticovou strukturu. Podobně pak $\langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle$, kde skalárním součinem myslíme skalární součin v_ε s jednotlivými prvky matice $\mathbb{A}R_z v_\varepsilon$ na $L^2(\mathbb{R})$. Výsledkem této operace je opět objekt s maticovou strukturou.

1) Najdeme inverzi operátoru $(I + (|v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon| \otimes \mathbb{A})R_z)$

$$
\begin{aligned}
\psi + \underbrace{\langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z\psi\rangle}_{\mathbb{K}} v_\varepsilon = g \Rightarrow \mathbb{K} + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon \otimes \mathbb{K}\rangle &= \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z g\rangle \\
\mathbb{K} + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle\mathbb{K} &= \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z g\rangle \\
\mathbb{K} &= (I + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle)^{-1}\langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z g\rangle
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \psi = g - (I + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle)^{-1}\langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z g\rangle v_\varepsilon \\
&\Rightarrow (I + (|v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon| \otimes \mathbb{A})R_z)^{-1} = I - (I + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle)^{-1}(|v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon| \otimes \mathbb{A})R_z \\
&\Rightarrow R_\varepsilon^{\mathbb{A}} = R_z - R_z \underbrace{(I + \langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle)^{-1}}_{2)}(|v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon|\mathbb{A})R_z
\end{aligned}
\tag{61}
$$

2) Najdeme inverzi operátoru $(I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} R_z v_\varepsilon &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta(z)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y & \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\ \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-y) v_\varepsilon(y)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|}\,\mathrm{d}y & \zeta(z)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} bS + a\zeta(z)E & aS + b\zeta(z)E \\ dS + b^*\zeta(z)E & b^*S + d\zeta(z)E \end{pmatrix}, \text{ kde} \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\ S &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-y) v_\varepsilon(y)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle &= \begin{pmatrix} bS_\varepsilon + a\zeta(z)E_\varepsilon & aS_\varepsilon + b\zeta(z)E_\varepsilon \\ dS_\varepsilon + b^*\zeta(z) & b^*S_\varepsilon + d\zeta(z)E_\varepsilon \end{pmatrix} \\ E_\varepsilon &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(x)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ S_\varepsilon &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(x-y) v_\varepsilon(x)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-y|} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)^{-1} = &\frac{1}{(1 + d\zeta(z)E_\varepsilon + b^*S_\varepsilon)(1 + a\zeta(z)E_\varepsilon + bS_\varepsilon) - (b\zeta(z)E_\varepsilon + aS_\varepsilon)(b^*\zeta(z)E_\varepsilon + dS_\varepsilon)} \cdot \\ &\begin{pmatrix} 1 + b^*S_\varepsilon + d\zeta(z)E_\varepsilon & -aS_\varepsilon - b\zeta(z)E_\varepsilon \\ -dS_\varepsilon - b^*\zeta(z)E_\varepsilon & 1 + bS_\varepsilon + a\zeta(z)E_\varepsilon \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{64}$$

kde bodové limity E_ε a S_ε jsou

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &\overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} \frac{i}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} v\right)^2 =: \frac{i}{2}C, \\ S_\varepsilon &\overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0. \end{aligned}$$

Tedy dostáváme bodovou limitu celé matice

$$(I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)^{-1} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} \frac{1}{1 + \frac{i}{2}C\zeta(z)(a+d) - \frac{1}{4}C^2 \det \mathbb{A}}\begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2}C\zeta(z)d & -\frac{i}{2}C\zeta(z)b \\ -\frac{i}{2}C\zeta(z)b^* & 1 + \frac{i}{2}C\zeta(z)a \end{pmatrix} =: \mathbb{U}. \tag{65}$$

Pak integrální jádro operátoru $R_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ je tvaru

$$\begin{aligned} R_\varepsilon^{\mathbb{A}}(x,y) =& R_z(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} R_z(x,t_1)(I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)^{-1} |v_\varepsilon\rangle\langle v_\varepsilon|(t_1,t_2)\mathbb{A} R_z(t_2,y)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 = \\ =& R_z(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} R_z(x,\varepsilon t_1)(I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)^{-1} |v\rangle\langle v|(t_1,t_2)\mathbb{A} R_z(\varepsilon t_2,y)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2. \end{aligned} \tag{66}$$

Tedy bodová limita tohoto integrálního jádra je

$$R^{\mathbb{A}}_{\varepsilon} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} R^{\mathbb{A}} := R_z(x,y) - R_z(x,0)\underbrace{C\mathbb{U}\mathbb{A}}_{M^{\mathbb{A}}} R_z(0,y), \text{ kde} \tag{67}$$

$$M^{\mathbb{A}} := \frac{C}{1+\frac{i}{2}C\zeta(z)(a+d) - \frac{1}{4}C^2 \det\mathbb{A}} \begin{pmatrix} a + \frac{i}{2}\zeta(z)C\det\mathbb{A} & b \\ b^* & d+\frac{i}{2}\zeta(z)C\det\mathbb{A} \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Lemma 5.0.1. *Nechť máme matici*

$$\begin{gathered} \Lambda := \frac{iC\mathrm{Re}b - \rho}{\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2} \begin{pmatrix} C\mathrm{Im}b - 2 + \rho & iCd \\ iCa & -C\mathrm{Im}b - 2 + \rho \end{pmatrix} \\ \rho := 1 + C^2\frac{\det\mathbb{A}}{4}, \textit{ kde} \end{gathered} \tag{69}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \textit{ tak, že } \rho^2 + (\mathrm{Re}b)^2 \neq 0.$$

Pak platí $\mathbb{A} = \frac{2i}{C}\sigma_1(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \Lambda - I = {} & \frac{1}{\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2} \cdot \\ & \begin{pmatrix} -C^2b^*\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho(1-\rho) & idC(iC\mathrm{Re}b - \rho) \\ iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho) & -C^2b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho(1-\rho) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} \Lambda + I = {} & \frac{1}{\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2} \cdot \\ & \begin{pmatrix} C^2b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho & idC(iC\mathrm{Re}b - \rho) \\ iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho) & C^2b^*\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} (\Lambda + I)^{-1} = {} & \frac{\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2}{\mu} \cdot \\ & \begin{pmatrix} C^2b^*\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho & -idC(iC\mathrm{Re}b - \rho) \\ -iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho) & C^2b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{72}$$

kde

$$\mu = \underbrace{(C^2b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho)}_{k}\underbrace{(C^2b^*\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho)}_{l} + adC^2(iC\mathrm{Re}b - \rho)^2$$

$$kl = C^4|b|^2\mathrm{Re}^2b - 4iC^3\mathrm{Re}^3b + 2i\rho C^3|b|^2\mathrm{Re}b + 8\rho C^2\mathrm{Re}^2b - 4C^2\mathrm{Re}^2b - 8i\rho C\mathrm{Re}b - \rho^2C^2|b|^2 + 4i\rho^2C\mathrm{Re}b + 4\rho^2 \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu = {} & kl + adC^2(-C^2\mathrm{Re}^2b - 2iC\rho\mathrm{Re}b + \rho^2) = \\ & = C^4|b|^2\mathrm{Re}^2b - 4iC^3\mathrm{Re}^3b + 2i\rho C^3|b|^2\mathrm{Re}b + 8\rho C^2\mathrm{Re}^2b - 4C^2\mathrm{Re}^2b - 8i\rho C\mathrm{Re}b - \\ & \quad - \rho^2C^2|b|^2 + 4i\rho^2C\mathrm{Re}b + 4\rho^2 - adC^4\mathrm{Re}^2b - adC^3 2i\rho\mathrm{Re}b + adC^2\rho^2 = \\ & = -4(i\rho^2C\mathrm{Re}b - \rho^3 + iC^3\mathrm{Re}^3b - \rho C^2\mathrm{Re}^2b) = -4(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)(iC\mathrm{Re}b - \rho) \end{aligned} \tag{74}$$

- $(\mu(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1})_{11}$:

$$\begin{aligned}
&(-C^2 b^* \mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho(1-\rho))l + adC^2(iC\mathrm{Re}b - \rho)^2 = \\
&= (-C^2 b^* \mathrm{Re}b - C^2 b\mathrm{Re}b - 2\rho^2 + k)l + adC^2(iC\mathrm{Re}b - \rho)^2 = \\
&= (-C^2 b^* \mathrm{Re}b - C^2 b\mathrm{Re}b - 2\rho^2)l + \mu = \\
&= -2(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)l - 4(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)(iC\mathrm{Re}b - \rho) = \\
&= -(2l + 4(iC\mathrm{Re}b - \rho))(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2) = 2ib^*C(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)(iC\mathrm{Re}b - \rho) = -\frac{i}{2}Cb^*\mu
\end{aligned} \tag{75}$$

- $(\mu(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1})_{21}$:

$$\begin{aligned}
&iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho)l - iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(-C^2 b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho(1-\rho)) = \\
&= iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(C^2 b^*\mathrm{Re}b + C^2 b\mathrm{Re}b + 2\rho^2) = \\
&= 2iaC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2) = -\frac{i}{2}Ca\mu
\end{aligned} \tag{76}$$

- $(\mu(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1})_{12}$:

$$\begin{aligned}
&- idC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(-C^2 b^*\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb + 2\rho(1+\rho)) + idC(iC\mathrm{Re}b - \rho)k = \\
&= idC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(C^2 b^*\mathrm{Re}b + C^2 b\mathrm{Re}b + 2\rho^2) = \\
&= 2idC(iC\mathrm{Re}b - \rho)(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2) = -\frac{i}{2}Cd\mu
\end{aligned} \tag{77}$$

- $(\mu(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1})_{22}$:

$$\begin{aligned}
&(-C^2 b\mathrm{Re}b - 2iC\mathrm{Re}b + i\rho Cb^* + 2\rho(1-\rho))k + adC^2(iC\mathrm{Re}b - \rho)^2 = \\
&= (-C^2 b\mathrm{Re}b - C^2 b^*\mathrm{Re}b - 2\rho^2 + l)k + adC^2(iC\mathrm{Re}b - \rho)^2 = \\
&= (-C^2 b\mathrm{Re}b - C^2 b^*\mathrm{Re}b - 2\rho^2)k + \mu = \\
&= -2(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)k - 4(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)(iC\mathrm{Re}b - \rho) = \\
&= -(2k + 4(iC\mathrm{Re}b - \rho))(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2) = 2ibC(\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)(iC\mathrm{Re}b - \rho) = -\frac{i}{2}Cb\mu
\end{aligned} \tag{78}$$

Tedy skutečně platí $\mathbb{A} = \frac{2i}{C}\sigma_1(\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1}$. □

Věta 5.0.1. *Nechť operátor $H_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ je samosdružený operátor daný vztahem (57), $v \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix},$$

$\rho = 1 + (C^2 \det \mathbb{A})/4$ *a nechť platí* $\rho^2 + (\mathrm{Re}b)^2 \neq 0$. *Pak operátor $H_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ konverguje uniformně v resolventě k operátoru H^Λ bodové interakce popsané maticí*

$$\Lambda = \left(\frac{2i}{C}I - \sigma_1\mathbb{A}\right)^{-1}\left(\frac{2i}{C}I + \sigma_1\mathbb{A}\right). \tag{79}$$

Důkaz. Výchozím bodem důkazu je bodová limita jádra resolventy v (67). Tento výsledek porovnáme s resolventou bodové interakce, kterou dostaneme z Kreinovy formule (viz [4] a [5]).

$$(H^\Lambda - z)^{-1}(x,y) = R_z(x,y) - R_z(x,0)M^\Lambda R_z(0,y),$$

$$M^\Lambda = \frac{1}{i(\alpha+\delta)+\zeta(z)(\beta-\gamma)}\begin{pmatrix} 2i\gamma + \zeta(z)(\alpha+\delta-2\cos\varphi) & \alpha-\delta-2i\sin\varphi \\ \delta-\alpha-2i\sin\varphi & -2i\beta+\zeta(z)(\alpha+\delta-2\cos\varphi)\end{pmatrix} \tag{80}$$

Tento operátor má stejnou strukturu jako náš odhad pro limitní operátor v (67). Stačí tedy porovnat matice $M^{\mathbb{A}}$ a M^Λ a zjistit zda náš odhad popisuje nějakou bodovou interakci. Upravíme ještě matici $M^{\mathbb{A}}$ do tvaru

$$M^{\mathbb{A}} = \frac{1}{RC\zeta(z)(a+d)+\frac{i}{2}RC^2\det\mathbb{A}-2iR}\begin{pmatrix} -2iaRC+\zeta(z)RC^2\det\mathbb{A} & -2ibRC \\ -2ib^*RC & -2idRC+\zeta(z)RC^2\det\mathbb{A}\end{pmatrix}. \tag{81}$$

Kde R je konstanta, kterou určíme z podmínek pro bodové interakce (52).

Porovnáním matic $M^{\mathbb{A}}$ a M^Λ dostáváme parametry Λ v řeči matice $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \beta &= dRC \\ \gamma &= -aRC \\ \alpha &= R(C\mathrm{Im}b-2+\rho) \\ \delta &= R(-C\mathrm{Im}b-2+\rho) \\ \omega &= R(iC\mathrm{Re}b-\rho) \end{aligned} \tag{82}$$

Aby ω byla normovaná na jednotku musí platit $R = (\rho^2 + (C\mathrm{Re}b)^2)^{-\frac{1}{2}}$. Tím splníme i podmínku

$$\alpha\delta - \beta\gamma = R^2\underbrace{((C\mathrm{Im}b-2+\rho)(-C\mathrm{Im}b-2+\rho)+C^2ad)}_{\frac{1}{R^2}} = 1.$$

Tedy bodová limita $R_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ je resolventou bodové interakce popsané maticí

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \frac{iC\mathrm{Re}b-\rho}{\rho^2+(C\mathrm{Re}b)^2}\begin{pmatrix} C\mathrm{Im}b-2+\rho & iCd \\ iCa & -C\mathrm{Im}b-2+\rho\end{pmatrix}, \\ \rho &:= 1 + C^2\frac{\det\mathbb{A}}{4} \end{aligned} \tag{83}$$

o které z lemma 5.0.1 víme, že splňuje vztah (79).

Jak resolventa $R_\varepsilon^{\mathbb{A}}$, tak operátor popsaný bodovou limitou jejího integrálního jádra jsou Hilbert-Schmidtovi operátory z poznámky 2.1.1. Ukážeme, že tyto tyto operátory k sobě konvergují v Hilbert-Schmidtově normě. Jelikož konvergence v Hilbert-Schmidtově normě z věty 2.1.2 implikuje uniformní konvergenci, dostaneme tímto postupem důkaz věty.

Vzhledem k tomu, že všechny maticové normy jsou ekvivalentní, budeme dále používat pro matice Frobeniovu normu $\|\cdot\|_2$.

$$\|\mathbb{B}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|b_{ij}|^2}$$

Resolventy můžeme rozepsat následovně.

$$R_\varepsilon^{\mathbb{A}}(x,y) = R_z(x,y) - B_\varepsilon \mathbb{U}_\varepsilon \mathbb{A} T_\varepsilon \qquad R^{\mathbb{A}}(x,y) = R_z(x,y) - B\mathbb{U}\mathbb{A}T$$

$B_\varepsilon := R_z(x,\varepsilon y)\vartheta(y)\eta(x)$ $\quad B := R_z(x,0)\vartheta(y)\eta(x)$ $\quad \vartheta := \sqrt{|v|}$

$\mathbb{U}_\varepsilon := (I + \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle)^{-1}$ $\quad T := R_z(0,y)\vartheta(x)\eta(y)$ $\quad \eta := \mathrm{sgn}(v)\sqrt{|v|}$

$T_\varepsilon := R_z(\varepsilon x, y)\vartheta(x)\eta(y)$ $\quad$ a $\mathbb{U}$ je dáno (65)

$B_\varepsilon, T_\varepsilon, B, T \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ jelikož,

B_ε: $\|\frac{i}{2}(\zeta(z)I + \mathrm{sgn}(x-\varepsilon y)\sigma_1)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-\varepsilon y|}\vartheta(y)\eta(x)\|_2^2 = 2|v(x)||v(y)||\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-\varepsilon y|}|^2 \leq 2|v(x)||v(y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)$

T_ε: obdobně

B: $\|\frac{i}{2}(\zeta(z)I + \mathrm{sgn}(x)\sigma_1)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x|}\vartheta(y)\eta(x)\|_2^2 \leq 2|v(x)||v(y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)$

T: obdobně

$$\begin{aligned}\|B_\varepsilon - B\|_2^2 &= \frac{1}{2}\|(\zeta(z)I + \mathrm{sgn}(x-\varepsilon y)\sigma_1)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x-\varepsilon y|} - (\zeta(z)I + \mathrm{sgn}(x)\sigma_1)\mathrm{e}^{iz\zeta(z)|x|}\|_2^2|v(x)||v(y)| \leq \\ &\leq (2|\mathrm{e}^{-|\mathrm{Im}z||x-\varepsilon y|}|^2 + 2|\mathrm{e}^{-|\mathrm{Im}z||x|}|^2)|v(x)||v(y)| \leq 4|v(x)||v(y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)\end{aligned} \tag{84}$$

obdobně pak

$$\|T_\varepsilon - T\|_2^2 \leq 4|v(y)||v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^2) \tag{85}$$

$\Rightarrow$ z Lebesgueovy věty $B_\varepsilon, T_\varepsilon$ konvergují k B, T v Hilbert-Schmidtově normě.

$\mathbb{U}_\varepsilon \xrightarrow{u} \mathbb{U} \Leftrightarrow \langle v_\varepsilon | \mathbb{A} R_z v_\varepsilon \rangle \xrightarrow{u} \frac{iC\zeta(z)}{2}\mathbb{A}$ z [[9], věta IV 1.16].

$$\begin{aligned}\|\langle v_\varepsilon|\mathbb{A}R_z v_\varepsilon\rangle - \frac{iC\zeta(z)}{2}\mathbb{A}\|^2 &\leq M^2 \left\| \begin{matrix} a\zeta(z)(E_\varepsilon - \frac{iC}{2}) + bS_\varepsilon & b\zeta(z)(E_\varepsilon - \frac{iC}{2}) + aS_\varepsilon \\ b^*\zeta(z)(E_\varepsilon - \frac{iC}{2}) + dS_\varepsilon & d\zeta(z)(E_\varepsilon - \frac{iC}{2}) + b^*S_\varepsilon \end{matrix} \right\|_2^2 \leq \\ &\leq M^2\|\mathbb{A}\|_2^2(|E_\varepsilon - \frac{iC}{2}|^2 + |S_\varepsilon|^2) \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0\end{aligned} \tag{86}$$

$\Rightarrow R_z - B_\varepsilon \mathbb{U}_\varepsilon \mathbb{A} T_\varepsilon = R_\varepsilon^{\mathbb{A}} \xrightarrow{u} R_z - R_z(x,0)M^\Lambda R_z(0,y)$ □

Přímým důsledkem předchozí věty je odpověď na otázku, zda nedochází k renormalizaci vazebných konstant v tomto obecném případě nelokálního potenciálu.

Důsledek 5.0.1 (Renormalizace vazebných konstant)**.** *Za stejných předpokladů jako z věty 5.0.1 nedochází pro operátor $H_\varepsilon^{\mathbb{A}}$ k renormalizaci vazebných konstant.*

Důkaz. Nejdříve položme

$$\psi(0) := \frac{\psi(0+) + \psi(0-)}{2}.$$

Tím rozšíříme δ distribuci na funkce s nespojitostí v nule.

Pak formální limitu potenciálu $W_\varepsilon \otimes \mathbb{A}$ dostaneme limitou akce tohoto potenciálu ve smyslu distribucí.

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \langle v_\varepsilon(y) | \mathbb{A}\psi(y) \rangle v_\varepsilon(x) f(x)\, \mathrm{d}x &\overset{\varepsilon \to 0^+}{\to} C \otimes \mathbb{A}\psi(0) f(0) \\ \Rightarrow W_\varepsilon \otimes \mathbb{A}\psi &\overset{\varepsilon \to 0^+}{\to} C \otimes \mathbb{A}\psi(0)\delta. \end{aligned} \tag{87}$$

Připomeňme ještě jednou výsledek Hughes [7], kde ukázala, že ve smyslu distribucí můžeme zapsat akci operátoru H^Λ jako

$$H^\Lambda \psi = -i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes \sigma_1 \psi + m \otimes \sigma_3 \psi + 2i \otimes \sigma_1 (\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1} \psi(0)\delta.$$

Tedy spolu s tímto výsledkem, pro to aby nedocházelo k renormalizaci, dostáváme následující podmínku

$$C\mathbb{A} = 2i\sigma_1 (\Lambda - I)(\Lambda + I)^{-1}. \tag{88}$$

Kde inverze matice $(\Lambda + I)$, pro Λ z věty 5.0.1, existuje právě tehdy, když platí podmínka $\rho^2 + (\mathrm{Re} b)^2 \neq 0$. Pro toto Λ dostáváme rovnost (88) z lemma 5.0.1.

Tudíž při použití nelokálního potenciálu $W_\varepsilon \otimes \mathbb{A}$ skutečně k renormalizaci vazebných konstant nedochází. □

6 Závěr

V této bakalářské práci jsme probrali základní výsledky pro neomezené operátory na Hilbertově prostoru, představili jsme volný Diracův operátor a ukázali jsme jeho základní vlastnosti. Dále jsme se zajímali o jednorozměrné relativistické bodové interakce a probrali jsme možnosti aproximací těchto bodových interakcí za pomoci lokálních a nelokálních potenciálů. V této práci se nám podařilo zobecnit výsledek P.Šeby [3] pro širší množinu nelokálních potenciálů ve tvaru

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^{\mathbb{A}} &= H_m + W_\varepsilon(x) \otimes \mathbb{A} \\ W_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} |v(x/\varepsilon)\rangle\langle v(x/\varepsilon)|, \end{aligned} \tag{89}$$

kde H_m značí volný Diracův operátor. Pro tuto větší množinu nelokálních potenciálů jsme dokázali uniformní konvergenci v resolventě k jistému operátoru popisující relativistickou bodovou interakci $H^\Lambda = H_m$, kde

$$\mathrm{Dom}(H^\Lambda) = \{\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \otimes \mathbb{C}^2 \mid \varphi(0+) = \Lambda\varphi(0-)\}. \tag{90}$$

Výsledku jsme dosáhli výpočtem resolventy nelokálního potenciálu. Pro tuto resolventu jsme získali její limitu v operátorové normě a tu jsme následně porovnali s podobou resolventy bodové interakce z Kreinovy formule. Zjistili jsme, že uniformní limita v resolventě operátoru s potenciálem v podobě projekce skutečně konverguje k operátoru relativistické bodové interakce, popsané maticí

$$\Lambda = \left(\frac{2i}{C} I - \sigma_1 \mathbb{A}\right)^{-1} \left(\frac{2i}{C} I + \sigma_1 \mathbb{A}\right). \tag{91}$$

Náš výsledek jsme následně porovnali s formální limitou. Na rozdíl od lokálních potenciálů jsme zjistili, že formální limita nelokálního potenciálu se skutečně shoduje s operátorovou limitou a nedochází k tzv. renormalizaci vazebných konstant. Můžeme tedy říci, že použití nelokálních potenciálů je přirozenější pro tento případ relativistických bodových interakcí a může nám říci více o podstatě těchto bodových interakcí.

Práce může být dále rozšířena o použití jiného nelokálního potenciálu, například obecnějšího integrálního operátoru, a může být prozkoumáno zda má stejné vlastnosti, jako speciální případ v podobě projekce. Další možností je podívat se na relativistické bodové interakce ve vyšších dimenzích, kde bychom následně rádi dostali podobný výsledek. Také je možné důkladně projít možné důvody renormalizace vazebných konstant v případě lokálního potenciálu. V článku P.Šeby [3] je tento fenomén odůvodněn Kleinovým paradoxem, nicméně tato odpověď postrádá detailnější matematické zdůvodnění a může tedy být námětem další diskuze.

Reference

[1] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics.* AMS, Providence, 2014.

[2] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice.* Karolinum, Praha, 1993.

[3] P. Šeba, *Klein's Paradox and the Relativistic Point Interaction.* Letters in Mathematical Physics 18, 1989, 77-86.

[4] M. Tušek, *Approximation of one-dimensional relativistic point interactions by regular potentials revised.* arXiv:1904.01061 (preprint), 2019.

[5] S. Benvegnu, L. Dabrowski, *Relativistic point interaction in one dimension.* Letters in Mathematical Physics 30, 1994, 159-167.

[6] R.J. Hughes, *Relativistic point interactions: approximation by smooth potentials.* Reports on Mathematical Physics 39, 1997.

[7] R.J. Hughes, *Finite-rank perturbations of the Dirac operator.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 238, 1999.

[8] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics.* Academic Press Inc, San Diego, 1980.

[9] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[10] M. Fialová, *Spectral analysis of the Dirac operator as a tool for studying Graphene.* Research Project CTU FNSPE, 2016/2017.

[11] P. Šťovíček, *Přednášky z funkcionální analýzy v akademickém roce 2019/2020.* CTU FNSPE, 2019/2020.