Posudek školitele bakalářské práce Lukáše Heribana
Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů

Matěj Tušek

28. července 2020

Předložená bakalářská práce sestává ze dvou částí. První část (sekce 2 a 3) je teoretická a pojednává o omezených operátorech s důrazem na Hilbertovy-Schmidtovy operátory, dále potom o operátorech neomezených a operátorech k nim sdruženým. Student si tak v předstihu vůči studijnímu programu osvojil potřebné vybrané partie funkcionální analýzy. Řada zavedených pojmů je demonstrována na příkladě operátoru násobení maticovou funkcí na jistém L^2-prostoru. Speciálně jsou připomenuty vlastnosti *Diracova operátoru*, který je samosdružený a unitárně ekvivalentní právě maticovému operátoru násobení.

Druhá část (sekce 4 a 5) je věnována aproximacím tzv. jednorozměrných relativistických bodových interakcí. Tyto bodové interakce jsou matematicky popsány samosdruženými rozšířeními operátoru, který se dostane z jednorozměrného Diracova operátoru zúžením jeho definičního oboru na funkce, které jsou ve vybraném (interakčním) bodě rovny nule. Hledané aproximace potom mají podobu hermitovské poruchy Diracova operátoru. Nejprve jsou připomenuty výsledky pro poruchy, které nabývají tvaru škálovaného operátoru násobení. Následují vlastní výsledky pro poruchy, které obsahují projekci na pevně zvolený škálovaný vektor. Takovéto aproximace byly dosud studovány jen pro dva speciální typy bodových interakcí P. Šebou v roce 1989. Student byl schopen jeho výsledek zobecnit pro takřka libovolný typ bodové interakce.

Všechny body pokynů pro vypracování tak byly zcela naplněny. Kladně hodnotím i vlastní úspěšné formulace některých důkazů klasických výsledků. Samotná práce je dobře strukturovaná, množství překlepů je přijatelné, nicméně autor by mohl ještě vylepšit srozumitelnost některých argumentů a zapracovat–zde se sám puštím na tenký led–na diakritice. Na konec posudku připojuji několik kokrétních postřehů a připomínek.

Jako školitel navíc oceňuji, že Lukáš Heriban pracoval po celý rok svědomitě, organizovaně a zejména s nevšední mírou samostatnosti a porozumění. I proto navrhuji bakalářskou práci hodnotit známkou **A (výborně)**.

Drobné připomínky[1]

- str. 1: zápis $H^{\Lambda} = H_m$ by značil i rovnost definičních oborů

[1] Není nutno číst při obhajobě.

- V 2.0.1: rozšíření by bylo vhodné značit jinak než výchozí operátor; chybí uvedeny vlastnosti posloupnosti (f_n)
- Př. 3.0.1: lze použít i škálovanou po částech lineární funkci
- str. 8: pojem *hustota operátoru* se mi jeví nestandardní
- V 3.1.1: pro přesnost bych před "symetrické rozšíření" doplnil *netriviální*
- V 3.1.2 (DK): bylo by dobré poznamenat, že $\psi = \varphi$ plyne z předpokladu $\mathrm{Ran}(A+z) = \mathcal{H}$
- Pozn. 3.2.2: argument "ze spojitosti identity" mi přijde nadbytečný
- V 3.2.2: volba notace v důkaze může být trochu zavádějící, neboť φ se používá i v připomenutí definice grafu
- V 3.2.3 (DK): formulace, že funkcionál $f_\varphi(\psi)$ je bodově omezený, je mi nejasná; navrhuji např. "množina funkcionálů $\{f_\varphi : \varphi \in \mathrm{Dom}(A^*), \|\varphi\| = 1\}$ je bodově *stejně* omezená"
- V 3.3.1 (DK): fakt, že $\varphi_n \in \mathrm{Dom}(A)$ plyne z toho, že $(\forall n)(R_n : \mathcal{H} \to \mathrm{Dom}(A))$
- V 3.3.2: v druhé části důkazu je patrně omylem obrácená nerovnost
- V 3.3.4: v druhé části důkazu se ukazuje implikace $z \notin R_{ess}(T_\mathbb{A}) \Rightarrow z \in \rho(T_\mathbb{A})$ (DK obměnou), předpoklad $z \in \sigma(T_\mathbb{A})$ je nadbytečný
- V 3.4.1: při důkazu implikace 2. $\Rightarrow$ 3. vycházíme již z toho, že U je všude definované, dále z $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ dostáváme prostotu U a tedy i existenci inverze U^{-1}, která je všude definována díky surjektivitě U
- str. 19: výraz $\mathrm{d}x$ se běžně nepoužívá pro derivaci
- str. 20: ve vztahu pod (53) by mělo stát φ místo ψ
- str. 21: ve vztahu pod (55) by H^Λ mělo působit na ψ
- str. 22: $v \notin L^2 \otimes \mathbb{C}^2$, projektuje se jen na L^2, aproximace má potom tvar tenzorového součinu této projekce s maticí 2×2-tato nepřesnost se opakuje i jinde; nesrozumitelné vysvětlení akce $\mathbb{A}R_z v_\varepsilon$
- str. 23: v matici (63) chybí člen E_ε
- str. 27: B_ε a další nenabývají hodnot v $\mathbb{C}^2$ ale v 2×2 maticích, nelze tak psát $B_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ atd.; v závěru odhadu (86) by bylo vhodné odkázat se na dříve odvozené limity pro E_ε a S_ε, s tím souvisí připomínka, že by bylo dobré uvést, odkud pochází limita pro $\langle v_\varepsilon | \mathbb{A}R_z v_\varepsilon \rangle$-jelikož se napočetla jako matice limit jednotlivých maticových elementů máme přeci nakonec automaticky konvergenci v libovolné maticové normě

V Praze dne 28.7. 2020 Ing. Matěj Tušek, Ph.D.