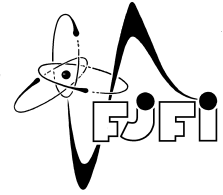




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Aukce: teorie a experiment

Auction: Theory and Experiment

Bakalářská práce

Autor: **Filip Mairinger**

Vedoucí práce: **Ing. René Levínský, Ph.D.**

Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Filip Mairinger
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Aukce: teorie a experiment
Název práce (anglicky):	Auction: Theory and Experiment

Pokyny pro vypracování:

1. Základní typy aukcí a jejich Nashovské rovnováhy a ekvivalence.
2. Optimální strategie v aukci a její souvislost s řešením odpovídajícího systému (stochastických) diferenciálních rovnic.
3. Popis standardních behaviorální anomálií v aukcích.
4. Do jaké míry ovlivňuje formulace (framing) aukce v kladném či záporném oboru chování subjektů v kontrolovaném experimentu?
5. Experiment a jeho statistické vyhodnocení v programovacím jazyku R.

Doporučená literatura:

1. J. C. Bernard, Finding and retaining the dominant strategy: The second-price, English and 'sealed offer' English auctions. *Journal of Economic Behavior and Organization* 60(4), 2006, 553–561.
2. G. Charness, D. Levin, The Origin of the Winner's Curse: A Laboratory Study. *American Economic Journal: Microeconomics* 1(1), 2009, 207-236.
3. J. H. Kagel, D. Levin, Independent Private Value Auctions: Bidder Behaviour in First-, Second- and Third-Price Auctions with Varying Numbers of Bidders. *The Economic Journal* 103, No. 419, 1993, 868-879.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. René Levínský, Ph.D.

CERGE-EI, Politických vězňů 936/7, 110 00 Praha - Nové Město

Jméno a pracoviště konzultanta:

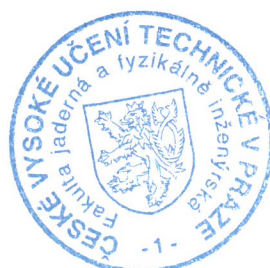
Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

.....
TB
garant oboru
.....
vedoucí katedry



.....
děkan

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne

.....
Filip Mairinger

Poděkování

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Renému Levínskému, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce.

Filip Mairinger

Název práce:

Aukce: teorie a experiment

Autor: Filip Mairinger

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. René Levínský, Ph.D., Národohospodářský ústav Akademie věd ČR

Abstrakt: Tato práce se zabývá statickými nekooperativními hrami. Na úvod je definována statická hra a statická Bayesova hra. Dále jsou představeny aukce prvních a druhých cen a jejich rovnovážné strategie. Na to navazuje teorém o ekvivalenci výnosů a definice von Neumann-Morgensternovi racionality. Poté již následuje samotná motivace a popis experimentu. Experiment se zabývá aukcemi druhých cen, konkrétně aukcí veřejných zakázek a klasickou aukcí. Cílem tohoto experimentu bylo vysvětlit rozdílné chování hráček na kladných a záporných hodnotách. Proto jsme zavedli *mezaninovou* aukci, kterou zkoumáme spojitost nabídkové funkce na okolí nuly. Poté už následuje statistické zpracování získaných dat. Z dat vyplynulo, že při aukci veřejných zakázek na kladných hodnotách hráčky *underbidují* a při klasické aukci na záporných hodnotách *overbidují*. V *mezaninové* aukci byl taktéž pozorován *overbidding*.

Klíčová slova: aukce, behaviorální ekonomie, experiment, nekooperativní teorie her

Title:

Auction: Theory and Experiment

Author: Filip Mairinger

Abstract: This thesis deals with static non-cooperative games. In the first part of this paper static games and static Bayesian games are defined. First-price and second-price auctions are introduced, followed by descriptions of their equilibrium strategies. Furthermore, revenue equivalence theorem and Von Neumann-Morgenstern rationality are discussed. In the second part experiment focusing on the procurement and buyer auctions is presented. Then a mezzanine auction is introduced in this thesis, in which continuity on some neighbourhood of zero is examined. Data analysis has shown that during the procurement auction on the positive values, the players underbid and during the buyer auction on the negative values the overbid. Overbidding was also observed in the mezzanine auction.

Key words: auction, behavioral economics, experiment, non-cooperative game theory

Obsah

Úvod	8
1 Teorie	9
1.1 Statická hra, strategie a rovnováha	9
1.2 Statická Bayesovská hra	13
1.3 Model aukce	14
1.4 Aukce prvních cen	15
1.4.1 Rovnováha při rovnoměrné distribuční funkci	19
1.5 Aukce druhých cen	19
1.6 Ekvivalence výnosů	20
1.6.1 Aukce prvních a druhých cen s rovnoměrným rozdělením	20
1.6.2 Teorém ekvivalence výnosů	21
1.7 Hráčka neutrální vůči riskování	23
2 Experiment	26
2.1 Motivace	26
2.2 Popis experimentu	27
2.3 Aukce veřejných nabídek - hot fáze	28
2.4 Aukce veřejných nabídek - cold fáze	33
2.5 Klasická negativní aukce - hot fáze	35
2.6 Klasická negativní aukce - cold fáze	39
2.7 Srovnání aukce veřejných zakázek a klasické negativní aukce	42
2.8 Klasická mezaninová aukce	43
2.8.1 Rozdělená klasická mezaninová aukce	47
2.9 Klasická mezaninová aukce - cold fáze	48
Závěr	53
Literatura	54

Úvod

Tato práce se zabývá teorií her a to konkrétně nekooperativními hrami. Teorie her je věda spadající do aplikované matematiky, která analyzuje strategické interakce mezi subjekty. Teorie her má uplatnění napříč ekonomickou, politickou, technologickou a sociální sférou. Za zakladatele této vědní disciplíny jsou považováni John von Neumann a Oskar Morgenstern, kteří v roce 1944 publikovali knihu Teorie her a ekonomické chování (von Neumann & Morgenstern, 2007). Mezi další významné postavy teorie her bychom mohli zařadit Johna Nashe, který obdržel společně s Johnem Harsanyim a Reinhardem Seltenem v roce 1994 za přínos v teorii her Nobelovu cenu za ekonomii. Dále stojí jistě za zmínku John Kagel a Dan Levin, kteří také velmi pomohli rozvoji teorie her, a mnozí další.

My se budeme zabývat pouze statickou nekooperativní teorií her, která studuje konfliktní situace mezi agenty. To tedy znamená, že studuje situace, kdy případné zisky či užitek daného agenta nezávisí pouze na jeho jednání, ale také na jednání ostatních agentů. Typickým příkladem takovéto situace jsou aukce, kterými se budeme dále zabývat.

V první části této práce se seznámíme s tím, co jsou to statické hry, podle jakých strategií mohou hráčky hrát a kdy jsou strategie všech hráček v rovnováze. Dále tyto statické hry rozšíříme na statické Bayesovské hry, jež jednou z mnoha interpretací je například právě aukce. Na to navážeme uvedením našeho aukčního modelu a pro aukce prvních a druhých cen ukážeme, jak vypadají jejich rovnovážné strategie. A tuto polovinu završíme tím, že si ukážeme ekvivalenci mezi různými aukčními formáty.

V druhé části se již budeme zabývat důvody, které nás vedly k provedení samotného experimentu a jeho nastavení. Získaná data následně statisticky zpracujeme pro jednotlivé aukce a výsledky interpretujeme. Dále také tyto výsledky porovnáme mezi jednotlivými aukcemi. Na závěr shrneme získané výsledky a navrhneme postup, jak dále analyzovat data na individuální úrovni.

Kapitola 1

Teorie

1.1 Statická hra, strategie a rovnováha

Teorii k sekci 1.1 a 1.2 jsme čerpali převážně z učebnic (Bonanno, 2015a; Bonanno, 2015b) a (Jackson, 2011).

Definice 1.1.1 (Statická hra). *Hru nazýváme statickou, pokud splňuje následující předpoklady:*

- účastní se jí $N = \{1, 2, \dots, n\}$ hráček, $n \in \mathbb{N}$
- každá hráčka $i \in N$ má neprázdnou množinu strategií S_i , ze které si vybírá právě jednu strategii $s_i \in S_i$ a $S := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$
- $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce hráčky i
- všechny hráčky učiní současně jednu strategii a žádná z hráček neví, jak se rozhodnou ostatní hráčky

Statická hra se obvykle značí $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$.

Definice 1.1.2 (Dominantní strategie). *Strategie $s_i \in S_i$ je dominantní ve hře $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$, pokud $u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{a \in S_i} u_i(a, s_{-i})$ pro všechna s_{-i} , kde $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.*

Na hře zvané věžňovo dilema si ukážeme příklad dominantní strategie.

	B mlčí	B spolupracuje
A mlčí	Oba odsoudí na 3 roky	A dostane 7 let, B je volný
A spolupracuje	A je volný, dostane 7 let	Oba dostanou 5 let

Tabulka 1.1: Věžňovo dilema

Dominantní strategie je v tomto případě pro každého z hráčů, aby spolupracovali, ačkoli to pro ně není nejlepší možné rozhodnutí, protože kdyby oba mlčeli, tak by byli odsouzeni pouze na 3 roky.

Hledání dominantní strategie probíhá následovně. Předpokládejme, že B mlčí. Potom pro A je lepší zvolit možnost spolupráce, protože je lepší být volný než být odsouzen. Pokud B spolupracuje, tak je pro A znovu lepší spolupracovat, protože je lepší být odsouzen na 5 let než na 7. Tento stejný postup bychom aplikovali i z pohledu B. Z čehož nám vyplyne, že oba budou spolupracovat a oba budou odsouzeni na 5 let. Tedy dominantní strategií je situace, kdy budou A i B spolupracovat.

Definice 1.1.3 (Nejlepší odezva). *Strategie $s_i \in S_i$ je nejlepší odezva k strategickému profilu s_{-i} právě tehdy, když $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ pro $\forall s'_i \in S_i$. Slovy: „Strategie je nejlepší odezvou, pokud hráčka nemůže získat více užitku přechodem ze své strategie k jiné vzhledem ke strategiím ostatních hráček.“*

Definice 1.1.4 (Nashova rovnováha). *Nashova rovnováha je množina strategií, jedna pro každou hráčku, taková, že žádná z hráček nemůže změnou svojí strategie zvýšit svůj užitek.*

Definice 1.1.5 (Nashova rovnováha (alternativní definice)). *Hra se nachází v Nashově rovnováze, pokud všechny hráčky hrají nejlepší odezvy vzhledem k ostatním hráčkám.*

Příklad nejlepší odezvy si ukážeme na hře dvou generálů. V této hře oba generálové současně vysílají 0 až 3 vojáky. Vyhrává ten, kdo poslal více vojáků. Pokud nastane situace, kdy oba vyslali stejný počet vojáků, tak nastane remíza. Oba generálové se snaží vyhrát. V případě, že není možné vyhrát, tak se pokusí alespoň o remízu. Pokud navíc nastane situace, že alespoň jeden z generálů nevyšle žádného vojáka, tak se bitva neuskuteční a jedná se automaticky o remízu. Ve hře budeme značit vítězství 1, remízu 0 a prohru -1. Navíc první ze dvou čísel bude vždy patřit červenému generálovi a druhé modrému generálovi. Hra tedy vypadá následovně:

	0 vojáků	1 voják	2 vojáci	3 vojáci
0 vojáků	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
1 voják	0, 0	0, 0	-1, 1	-1, 1
2 vojáci	0, 0	1, -1	0, 0	-1, 1
3 vojáci	0, 0	1, -1	1, -1	0, 0

Tabulka 1.2: Hra dvou generálů

Nyní odehrajeme pouze jednu část hry za modrého generála, protože odehrát celou hru by bylo zbytečně zdlouhavé, a navíc ostatní části hry se provedou analogicky.

Předpokládejme, že modrý generál se rozhodl vyslat 1 vojáka. Červený generál tedy vyhraje v případě, že vyšle 2 nebo 3 vojáky. Tyto dvě vítězné jedničky si v tabulce označíme hvězdičkou a obdobně bychom projeli všechny možné volby modrého a červeného generála. Finálová podoba tabulky by vypadala takto:

	0 vojáků	1 voják	2 vojáci	3 vojáci
0 vojáků	0*, 0*	0, 0*	0, 0*	0*, 0*
1 voják	0*, 0	0, 0	-1, 1*	-1, 1*
2 vojáci	0*, 0	1*, -1	0, 0	-1, 1*
3 vojáci	0*, 0*	1*, -1	1*, -1	0*, 0*

Tabulka 1.3: Hra dvou generálů s vyznačenými vítězstvími

Nejlepší odezvou je v této tabulce každý tah jednoho ze dvou generálů, který má u sebe hvězdičku. Tudiž máme 9 nejlepších odezev pro modrého generála a 9 pro červeného. A ve 4 případech vidíme, že oba generálové hrají současně svoji nejlepší odezvu. Tyto čtyři případy jsou Nashovy rovnováhy dle alternativní definice Nashovy rovnováhy.

Definice 1.1.6 (Silně dominantní strategie). Strategie $s_i \in S_i$ je silně dominantní ve hře $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$, pokud s_i je dominantní strategie a zároveň pro $\forall s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}$ a pro $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ platí, že $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$, kde $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ a $S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$.

Definice 1.1.7 (Silně dominovaná strategie). Strategie $s_i \in S_i$ je silně dominovaná ve hře $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$, pokud $\exists s'_i \in S_i$ taková, že pro $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ platí, že $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$. Strategie s'_i tedy silně dominuje strategii s_i .

Ukážeme si příklad hledání silně dominantní strategie, kde budou dva hráči - modrý a červený, z nichž každý bude moci zahrát 3 různé možnosti. Dále je potřeba na začátek zmínit, že každý z hráčů se snaží maximalizovat svůj užitek, a navíc každý z hráčů ví, že i jeho oponent se snaží maximalizovat svůj užitek. Navíc předpokládáme, že hráči jsou racionální, což znamená, že nikdy nebudou hrát dominovanou strategii a pokud mají možnost hrát silně dominantní strategii, tak ji zahrají.

	A	B	C
X	14, 4	2, 5	8, 4
Y	5, 2	4, 4	7, 3
Z	-2, 10	3, 9	9, -2

Tabulka 1.4: Eliminace silně dominovaných strategií - začátek

Pokud bychom se na tuto hru podívali z pohledu červeného hráče, tak pokud by modrý hráč zahrál A, tak pro červeného hráče je nejlepší zahrát X, protože 14 je větší než 5 nebo -2. Kdyby modrý zahrál B, tak červený by zahrál Y, a kdyby modrý zahrál C, tak červený by zahrál Z. Tudiž červený hráč má různé nejlepší odezvy podle toho, co zahraje modrý.

Nyní se podíváme na hru z pohledu modrého hráče. Když se zadíváme na možnosti modrého hráče, tak si můžeme všimnout, že je pro něj vždy lepší zahrát B než C, protože $5 > 4$, $4 > 3$, $9 > -2$. To znamená, že B striktně dominuje C, tudíž modrý hráč nikdy nebude hrát C, protože B bude vždycky lepší. Bude mít tedy na výběr pouze ze dvou možností. Tím se nám tabulka upraví na:

	A	B
X	14, 4	2, 5
Y	5, 2	4, 4
Z	-2, 10	3, 9

Tabulka 1.5: Eliminace silně dominovaných strategií - 1. krok

Nyní by měl být červený hráč schopen uvědomit si to, že modrý hráč ví, že je pro něj vždy nevýhodné zahrát C. Což ovlivní hru červeného hráče, protože pro něj je ze stejných důvodů vždy lepší zahrát Y než Z. Takže se nám znovu změní tabulka na:

	A	B
X	14, 4	2, 5
Y	5, 2	4, 4

Tabulka 1.6: Eliminace silně dominovaných strategií - 2. krok

Pokud je si modrý hráč vědom toho, že červený hráč ví, že pro modrého hráče je nevýhodné hrát C, kvůli čemuž červený hráč nebude hrát Z, tak modrý hráč bude znovu moci upravit svoji strategii. Modrý hráč si uvědomí, že B striktně dominuje A, protože z B bude mít vždy větší užitek. Proto modrý hráč nebude hrát A a zbude nám:

	B
X	2, 5
Y	4, 4

Tabulka 1.7: Eliminace silně dominovaných strategií - 3. krok

A pokud si červený hráč uvědomí všechny předchozí úvahy modrého hráče a tedy ví, že modrý nebude hrát A ani C, tak on sám zahraje Y, protože z něj bude mít větší užitek. Takže nám ve finále zbude z tabulky pouze:

	B
Y	4, 4

Tabulka 1.8: Eliminace silně dominovaných strategií - 4. krok

Takto jsme našli Nashovu rovnováhu díky odstraňování striktně dominovaných strategií. Tento postup se nazývá iterovaná eliminace striktně dominovaných strategií (anglicky *iterated elimination of strictly dominated strategies*).

Velká výhoda této metody spočívá v tom, že nás nikdy nepřipraví o žádnou Nashovu rovnováhu. Tento fakt zmiňujeme záměrně, protože u dalšího příkladu zjistíme, že u jiných metod to tak není.

Definice 1.1.8 (Slabě dominantní strategie). Strategie $s_i \in S_i$ je slabě dominantní ve hře $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$, pokud s_i je dominantní strategie a zároveň není silně dominantní.

Definice 1.1.9 (Slabě dominovaná strategie). Strategie $s_i \in S_i$ je slabě dominovaná ve hře $\Gamma = (N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$, pokud $\exists s'_i \in S_i$ takové, že pro $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ je $u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ a zároveň $\exists s'_{-i} \in S_{-i}$ takové, že $u_i(s'_i, s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i})$.

Ukážeme si příklad hledání slabě dominantní strategie opět na modrém a červeném hráči.

	A	B
X	4, 2	1, 1
Y	3, 3	3, 3

Tabulka 1.9: Eliminace slabě dominovaných strategií - začátek

Podíváme se na hru z pohledu modrého hráče. Pokud červený hráč zahraje X, tak pro modrého je lepší zahrát A, a pokud červený zahraje Y, tak je modrému jedno, jestli zahraje A nebo B. Z čehož tedy plyne, že pro modrého hráče je zahrát A alespoň stejně dobré nebo lepší než B. A je tedy slabě dominantní strategie a B, která je tedy slabě dominovaná strategie, můžeme vyřadit.

	A
X	4, 2
Y	3, 3

Tabulka 1.10: Eliminace slabě dominovaných strategií - 1. krok

Červený hráč samozřejmě zahraje X, protože $4 > 3$. A najdeme tedy Nashovu rovnováhu:

	A
X	4, 2

Tabulka 1.11: Hra se slabě dominujícími strategií - 2. krok

Nashova rovnováha je tedy zahrát A a X. Bohužel nás ale tento postup připravil o jednu další Nashovu rovnováhu, který by nastala, kdyby zahráli B a Y. Toto má za následek to, že každý z hráčů by preferoval jinou Nashovu rovnováhu, protože pro červeného hráče je lepší Y a B, zatímco pro modrého je lepší A a X.

1.2 Statická Bayesovská hra

Teď jsme probrali statickou hru, u které je podstata hráčky jasná. Nicméně v jistých situacích není hráčka přesně daná a má nějaký typ.

Každý aukční formát odpovídá nějaké Bayesovské hře. Tudiž je potřeba porozumět konceptu Bayesovské hry, abychom později mohli analyzovat aukce.

Definice 1.2.1 (Bayesovská hra). *Bayesovská hra splňuje následující předpoklady:*

- účastní se jí $N = \{1, 2, \dots, n\}$ hráček, $n \in \mathbb{N}$
- A_i je množina akcí každé hráčky $i \in N$ a $A := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
- T_i^1 je množina typů hráčky $i \in N$ a $T := T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n = \prod_{i=1}^n T_i$
- strategie každé hráčky $i \in N$ je zobrazení $s_i : T_i \rightarrow A_i$, S_i je množina strategií hráčky $i \in N$ a $S := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \prod_{i=1}^n S_i$
- $u_i : A \times T \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce hráčky i
- pro každou hráčku $i \in N$ je podmíněná distribuce typů ostatních hráček dána jejím vlastním typem, tj. $F_i(t_{-i}|t_i)$ pro všechna $t_i \in T_i$, $t_{-i} \in T_{-i}$, kde $T_{-i} = \prod_{j=1, j \neq i}^n T_j$

Bayesovská hra se standardně značí $\Gamma = (N, \{A_i, T_i, S_i, u_i, F_i\}_{i \in N})$.

Definice 1.2.2 (Strategický profil). *Sada strategií $s \equiv (s_1, \dots, s_n)$, kde každá hráčka má právě jednu strategii, se nazývá strategický profil.*

Definice 1.2.3 (Bayesova-Nashova rovnováha). *Strategický profil $s \equiv (s_1, \dots, s_n)$ je Bayesovou-Nashovou rovnováhou hry $\Gamma = (N, \{A_i, T_i, S_i, u_i, F_i\}_{i \in N})$, pokud pro každou hráčku $i \in N$ a každé $t_i \in T_i$ platí, že $U_i(t_i, s) \geq U_i(t_i, s'_i, s_{-i})$ pro $\forall s'_i \in S_i$, kde $U_i(t_i, s)^* := \int_{T_{-i}} u_i((t_i, t_{-i}), (s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}))) dF_i(t_{-i}|t_i)$.*

Už tedy víme, co to jsou Bayesovské hry a můžeme přejít k aukcím, které, jak jsme již zmínili, odpovídají právě nějaké Bayesovské hře.

1.3 Model aukce

Nyní si určíme strukturu, jak bude vypadat model našich aukcí. Každá aukce bude vypadat následovně:

- vždy se jí zúčastní n hráček, kde $n \in \mathbb{N}$
- každá hráčka má ocenění v_i prodávaného předmětu a pravděpodobnostní rozdělení na intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$, kde $\alpha > 0$
- ocenění v_i všech hráček jsou nezávislá

¹Prvkem této množiny je typ $t_i \in T_i$. Tento typ odráží soukromou informaci hráčky i .

*Jelikož je zde nejistota v typech ostatních hráček a jejich akcích, tak je nutné počítat očekávaný užitek jisté hráčky s ohledem na všechny možné typy a akce ostatních hráček. Tedy užitková funkce hráčky $i \in N$ s typem t_i za daného strategického profilu (s_i, s_{-i}) je $U_i(t_i, s)$.

- každá hráčka zná distribuci všech ostatních hráček, ale ne aktuální realizovanou hodnotu
- náhodné veličiny X_1, \dots, X_n , které definují hodnotu pro každou z hráček, jsou nezávislé a stejně rozdělené (*i.i.d.*)

My se především zaměříme na „symetrické“ případy, kdy distribuce všech hráček bude stejná. K označení distribuční funkce budeme používat F a hustoty pravděpodobnosti f . Navíc u distribuční funkce F budeme předpokládat, že je diferencovatelná, tj. $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Dále bude pro nás užitečné si definovat náhodné veličiny $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$, kde $Y_k^{(n)}$ popisuje k -tou nejvyšší nabídku mezi X_1, \dots, X_n . Pokud bychom vyřadili například j -tou hráčku, tak budeme k -tou nejvyšší hodnotu mezi zbývajících $n - 1$ hráčkami značit $Y_k^{(n \setminus \{j\})}$.

Než se pustíme do konkrétních aukcí a hledání jejich rovnováh, tak je třeba si vyjasnit poslední věc. Veškeré aukce, kterými se budeme zabývat, budou aukce soukromých hodnot, což jsou aukce, ve kterých má každá hráčka svou vlastní soukromou hodnotu pro dražený předmět. Na druhé straně stojí aukce společných hodnot, ve které má dražený předmět pro všechny hráčky stejnou cenu, ale každá hráčka má nějakou svoji informaci o této ceně.

1.4 Aukce prvních cen

V sekcích 1.4 a 1.5 jsme základy teorie čerpali z (Milgrom & Weber, 1982) a (Bonanno, 2015a; Bonanno, 2015b).

Aukcí prvních cen se rozumí taková aukce, kterou vyhraje hráčka s největší nabídkou a zároveň za dražený objekt zaplatí právě tolik, kolik nabídla.

Ukázali jsme si, že Bayesovské hry mohou mít rovnováhu. Nás tedy nyní zajímá, zdali i aukce prvních cen má Bayesovu-Nashovu rovnováhu. A pokud ano, tak jak bude vypadat rovnovážná nabídková strategie.

Nechť funkce $\hat{s} : \langle 0, \alpha \rangle \rightarrow \langle 0, \alpha \rangle$ pro $\forall i \in \hat{n}$ je rovnovážná nabídková strategie. Očekáváme, že $\hat{s}(x)$ je rostoucí funkce proměnné x . Předpokládejme navíc, že $\hat{s}(x)$ je diferencovatelná. Dále budeme BÚNO nahlížet na aukci z pohledu hráčky 1. Jaká bude její nabídka $b(x)$, pokud pro ni má předmět hodnotu x ? Hráčka 1 bude chtít mít z aukce užitek, pokud vyhraje. Nabídky ostatních hráček jsou $\hat{s}(X_2), \dots, \hat{s}(X_n)$ a jelikož je \hat{s} rostoucí, tak pro hráčku 1 je důležitá pouze nejvyšší nabídka, tj.

$$\begin{aligned} \max\{\hat{s}(X_2), \dots, \hat{s}(X_n)\} &= \max_{i \neq 1} \hat{s}(X_i) = \hat{s}(\max_{i \neq 1} (X_i)) \\ \max\{X_2, \dots, X_n\} &= \max_{i \neq 1} (X_i) = Y_1^{(n \setminus \{1\})} \end{aligned}$$

Pro snadnější zápis $Y_1^{(n \setminus \{1\})} \stackrel{\text{ozn.}}{=} Z$. Nechť G je distribuční funkce Z a g je hustota pravděpodobnosti Z . Hráčka 1 tedy vyhraje, pokud $b(x) > \hat{s}(Z)$, a její užitek bude $x - b(x)$.

Tudíž očekávaný užitek bude

$$\begin{aligned}(x - b(x)) \cdot P[x \text{ vyhraje}] &= (x - b(x)) \cdot P[\hat{s}(Z) < b(x)] \\ &= (x - b(x)) \cdot P[Z < \hat{s}^{-1}(b(x))] \\ &= (x - b(x)) \cdot G(\hat{s}^{-1}(b(x)))\end{aligned}$$

Hráčka 1 by ráda maximalizovala svůj užitek. Pro usnadnění si vezmeme libovolné pevné x a k němu příslušné $b(x)$. Potom očekávaný užitek bude

$$(x - b)G(\hat{s}^{-1}(b))$$

Užitek chceme maximalizovat, tudíž musíme tento výraz zderivovat podle b a položit roven nule.

$$\begin{aligned}(x - b)G'(\hat{s}^{-1}(b)) \cdot \frac{d\hat{s}^{-1}(b)}{db} - G(\hat{s}^{-1}(b)) &= 0 \\ (x - b)g(\hat{s}^{-1}(b)) \frac{1}{\hat{s}'(\hat{s}^{-1}(b))} - G(\hat{s}^{-1}(b)) &= 0\end{aligned}$$

Poněvadž jsme předpokládali symetrickou rovnováhu, tak bychom měli mít

$$\begin{aligned}b(x) &= \hat{s}(x) \\ \hat{s}^{-1}(b(x)) &= x \\ \hat{s}^{-1}(b) &= x\end{aligned}$$

Díky tomuto se naše rovnice zjednoduší na

$$\begin{aligned}(x - \hat{s}(x))g(x) \frac{1}{\hat{s}'(x)} - G(x) &= 0 \\ xg(x) &= G(x)\hat{s}'(x) + \hat{s}(x)g(x) \\ xg(x) &= \frac{d}{dx}(\hat{s}(x)G(x))\end{aligned}$$

Tuto rovnici stačí zintegrovat a uvědomit si, že $\hat{s}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\hat{s}(x)G(x) &= \int_0^x yg(y) dy \\ \hat{s}(x) &= \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y) dy \\ \hat{s}(x) &= \mathbb{E}[Z|Z < x]\end{aligned}$$

Z toho plyne, že hráčka 1 vyhraje tehdy, když $Z \leq x$. Tímto jsme ukázali tvar symetrické rovnováhy za předpokladu, že každá hráčka má stejnou nabídkovou strategii. A nyní formálně dokážeme, že se jedná o rovnováhu.

Teorém 1.4.1. *Funkce $s(x) = \mathbb{E}[Y_1^{(n \setminus \{i\})} | Y_1^{(n \setminus \{i\})} < x]$ je symetrická rovnovážná strategie v aukci prvních cen pro každou hráčku $i \in \hat{n}$.*

Důkaz. Abychom toto dokázali, tak předpokládejme, že všechny hráčky až na hráčku 1 nabízejí podle strategie s . My bychom tedy rádi ukázali, že i pro hráčku 1 je strategie s optimální.

Připomeňme si, že funkce s zobrazuje z intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ na interval $\langle 0, \alpha \rangle$. Tudíž hráčka 1 nikdy nenabídne více než $s(\alpha)$. Navíc hráčka 1 by vždycky mohla vyhrát aukce s nabídkou $s(\alpha)$, ale jelikož chce maximalizovat svůj užitek, tak předpokládejme, že hráčka 1 dává nabídku z intervalu $\langle 0, s(\alpha) \rangle$.

Vezměme si libovolné pevné $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Rádi bychom tedy ukázali, že hráčka 1 maximalizuje svůj užitek, když nabídne $s(x)$. Předpokládejme, že hráčka 1 nabídne jinou hodnotu $b \in \langle 0, s(\alpha) \rangle$. Jelikož je s spojitá, tak určitě existuje takové z , že $s(z) = b$. Nechť $u(x, t)$ je očekávaný užitek hráčky 1, když nabídne t , zatímco její hodnota je x . Pak tedy bude funkce užitku vypadat následovně:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (x - t)P[1 \text{ vyhraje při nabídnutí } t] \\ &= (x - t)G(s^{-1}(t)) \end{aligned}$$

Předpokládali jsme, že hráčka nabídne $s(z) = b$, takže nám pouze stačí dosadit a dostaneme

$$\begin{aligned} u(x, b) &= (x - s(z))G(z) \\ &= G(z)x - G(z)s(z) \\ &= G(z)x - \int_0^z yg(y) dy \\ &= G(z)x - [yG(y)]_0^z + \int_0^z G(y) dy \\ &= G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(y) dy \\ &= G(z) \cdot (x - z) + \int_0^z G(y) dy \end{aligned}$$

A pokud by hráčka 1 nabídla $s(x)$, tak by její užitková funkce vypadala

$$u(x, s(x)) = \int_0^x G(y) dy$$

Nyní od sebe tyto dvě různé užitkové funkce odečteme a budeme zjišťovat, zdali je větší nebo menší než nula, což by nám ukázalo, jestli bude mít hráčka 1 větší užitek, když nabídne $b = s(z)$ a nebo $s(x)$.

$$u(x, s(x)) - u(x, s(z)) = G(z)(z - x) + \int_x^z G(y) dy \stackrel{\text{ozn. } U}{=} U$$

Nyní si to rozdělíme na dva různé případy a pokusíme se to odhadnout.

$$\begin{aligned}
 \text{pro } z > x : U &= \int_0^x G(y) dy - G(z)(x-z) - \int_0^z G(y) dy \\
 &= - \int_x^z G(y) dy + G(z)(z-x) \\
 &= \int_z^x G(y) dy + G(z)(z-x) \\
 &\geq \inf_{y \in (x,z)} G(y) \int_z^x 1 dy + G(z)(z-x) \\
 &= G(x)(x-z) + G(z)(z-x) \\
 &= \underbrace{(z-x)}_{\geq 0} \underbrace{[G(z) - G(x)]}_{\geq 0} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Nezápornost rozdílu distribučních funkcí plyne z faktu, že distribuční funkce je neklesající.

$$\begin{aligned}
 \text{pro } z \leq x : U &= \int_0^x G(y) dy - G(z)(x-z) - \int_0^z G(y) dy \\
 &= \int_z^x G(y) dy - G(z)(x-z) \\
 &\geq \inf_{y \in (z,x)} G(y) \int_z^x 1 dy - G(z)(x-z) \\
 &= G(z)(x-z) - G(z)(x-z) \\
 &= \underbrace{(x-z)}_{\geq 0} \underbrace{[G(z) - G(z)]}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Odsud vidíme, že rozdíl našich užitkových funkcí je nezáporný, tudíž je lepší nabídnout $s(x)$ než $b = s(z)$.

Navíc také známe tvar $s(x)$, takže nám stačí pouze provést pár úprav

$$\begin{aligned}
 s(x) &= \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y) dy \\
 &= \frac{1}{G(x)} \left(xG(x) - \int_0^x G(y) dy \right) \\
 &= x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy
 \end{aligned}$$

Odsud vidíme, že $s(x) < x$. Kromě toho víme, jak vypadá distribuční funkce G .

$$\begin{aligned}
 G(y) &= F(y)^{n-1} \\
 \frac{G(y)}{G(x)} &= \left(\frac{F(y)}{F(x)} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pro } 0 \leq y < x
 \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že s rostoucím n jde $s(x)$ k x . □

1.4.1 Rovnováha při rovnoměrné distribuční funkci

Teorém 1.4.2. *Nechť F je distribuční funkce s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$. Potom nastane symetrická rovnováha právě tehdy, když každá hráčka nabízí podle strategie $s(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i$.*

Důkaz. Předpokládejme, že hráčka i nabízí podle strategie $s(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i$, kde $i \in \{2, \dots, n\}$. Uvažujme, že hráčka 1 nabídne b .

Pravděpodobnost, že nabídka hráčky i ($i \neq 1$) je menší než b je

$$P\left[\frac{n-1}{n}v_i < b\right] = P\left[v_i < \frac{n}{n-1}b\right] = F\left(\frac{n}{n-1}b\right) = \frac{\frac{n}{n-1}b}{100} = \frac{nb}{100(n-1)}$$

Toto implikuje, že pravděpodobnost vítězství hráčky 1 je $\left(\frac{nb}{100(n-1)}\right)^{n-1}$. Tudiž očekávaný užitek je

$$\left(\frac{nb}{100(n-1)}\right)^{n-1} (v_1 - b)$$

Rádi bychom užitek maximalizovali, takže tento výraz zderivujeme podle b a položíme roven nule.

$$\left(\frac{n}{100(n-1)}\right)^{n-1} \left((n-1)b^{n-2}v_1 - nb^{n-1}\right) = 0$$

$$(n-1)v_1 - nb = 0$$

Řešení je tedy $b = s(v_1) = \frac{n-1}{n}v_1$.

Pokud tedy všechny ostatní hráčky přihazují podle předpokládané strategie, potom nejlepší odezva hráčky 1 je stejná symetrická nabídková strategie. \square

1.5 Aukce druhých cen

Aukcí druhých cen se rozumí taková aukce, pro kterou platí:

- Z množiny hráček s nejvyšší nabídkou je náhodně vybrána jedna vítězka
- Vítězka zaplatí nejvyšší cenu mezi nevítězkami

Teorém 1.5.1. *Slabě dominantní strategií v aukci druhých cen je pro každou hráčku i nabídnout její hodnotu, tj. $s(v_i) = v_i$.*

Důkaz. Abychom toto dokázali, tak musíme ukázat, že pokud hráčka i nabídne $s_i(v_i) = v_i$, tak žádná změna její nabídky nezvýší její užitek bez ohledu na to, co nabídnou ostatní hráčky. Musíme tedy vzít v úvahu dva případy. Hráčka i buďto

zvýší a nebo sníží svoji nabídku. Důležité ale je, že v obou těchto případech tato změna v nabídce neovlivní částku, kterou v případě výhry by musela hráčka i zaplatit. Změna nabídky ovlivňuje pouze to, jestli hráčka i vyhraje nebo prohraje. Navíc vzhledem k tomu, že nabídky ostatních hráčů zůstanou stejné, tak i když hráčka i změni svoji nabídku, tak její užtková funkce se změní pouze tehdy, dojde-li ke změně výsledku, tj. že změnou nabídky by se z vítězství stala prohra a obráceně.

Uvažujme tedy tyto dva případy:

- Hráčka i místo nabídnutí v_i nabídne $b'_i > v_i$. Toto by vyvolalo nějakou změnu pouze v případě, že by hráčka i s nabídkou v_i prohrála, ale s b'_i by už vyhrála. To by nastalo v případě, že nejvyšší nabídky mezi ostatními hráčskými b_j by byla větší než v_i , ale menší než b'_i . Potom by ale užitek hráčky i byl $u_i = v_i - b_j \leq 0$, tudíž zvýšení nabídky na b'_i by jí nepřineslo zvýšení užitku.
- Hráčka i místo nabídnutí v_i nabídne $b''_i < v_i$. Tato změna by ovlivnila hráčku i pouze v případě, že by s nabídkou v_i vyhrála a s nabídkou b''_i prohrála. Tedy před změnou nabídky byla v_i vítězná nabídka a nejvyšší nabídka mezi ostatními hráčskými b_k musela být mezi v_i a b''_i . A tedy před změnou nabídky byl užitek hráčky i $v_i - b_k \geq 0$ a po změně 0, protože prohrála. Tudíž změna nabídky opět nepřinesla zvýšení užitku.

Tímto jsme ukázali, že nabídnout svoji hodnotu je slabě dominantní strategie, protože je nejlepší takto nabízet bez ohledu na to, jak nabízejí ostatní hráčky, neboť nabídka určité hráčky neovlivňuje částku, kterou v případě výhry bude muset zaplatit, ale pouze to, zdali aukci vyhraje či ne.

□

1.6 Ekvivalence výnosů

V této sekci jsme používali poznatky z (Vickrey, 1961; Myerson, 1981; Riley & Samuelson, 1981), kde také lze najít vyslovený teorém v plné obecnosti.

Nyní se dostáváme k otázce, zdali je rozdíl v tom, jestli se použije aukce prvních cen nebo aukce druhých cen. Nejdříve si ale ukážeme příklady obou těchto aukcí s rovnoměrným rozdělením a poté se případně pokusíme vyslovit teorém, který by nám případně ukázal nějaký vztah mezi těmito aukcemi.

1.6.1 Aukce prvních a druhých cen s rovnoměrným rozdělením

Předpokládejme, že máme aukci prvních cen s rovnoměrnou distribuční funkcí F na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$. V jedné z předešlých sekcí jsme již zjistili, jak vypadá symetrická rovnovážná nabídková strategie a to $s(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i$. Potom tedy očekávané

výnosy budou

$$\begin{aligned}
 \frac{n-1}{n} \mathbb{E}[v_i] &= \frac{n-1}{n} \int_0^{100} v f(v) dv \\
 &= \frac{n-1}{n} \int_0^{100} v \frac{nv^{n-1}}{100^n} dv \\
 &= (n-1) \int_0^{100} \frac{v^n}{100^n} dv \\
 &= \frac{n-1}{100^n} \left[\frac{v^{n+1}}{n+1} \right]_0^{100} \\
 &= \frac{n-1}{n+1} \cdot 100
 \end{aligned}$$

Nyní za stejných předpokladů zjistíme předpokládaný výnos v aukci druhých cen, kde symetrická rovnovážná nabídková strategie je $s(v_i) = v_i$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[V_i] &= \int_0^{100} v f(v) dv \\
 &= \int_0^{100} vn(n-1) \left(\frac{v^{n-2}}{100^{n-1}} - \frac{v^{n-1}}{100^n} \right) dv \\
 &= n(n-1) \int_0^{100} \left(\frac{v^{n-1}}{100^{n-1}} - \frac{v^n}{100^n} \right) dv \\
 &= n(n-1) \left(\left[\frac{v^n}{n100^{n-1}} \right]_0^{100} - \left[\frac{v^n}{(n+1)100^n} \right]_0^{100} \right) \\
 &= n(n-1) \left(\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right) \cdot 100 \\
 &= \frac{n-1}{n+1} \cdot 100
 \end{aligned}$$

Z obou těchto příkladů plyne, že očekávaný výnos bude stejný jak v aukci prvních cen, tak v aukci druhých cen. To nás tedy vede k myšlence vyslovit teorém, který by se zabíral ekvivalentností použití různých typů aukcí.

1.6.2 Teorém ekvivalence výnosů

Doteď jsme se zabývali pouze aukcemi prvních a druhých cen. Nyní obecněji ukážeme, že i mezi jinými aukcemi je ekvivalence mezi výnosy, a to dokonce nemusejí mít ani rovnoměrné rozdělení.

Na začátek si definujeme, co to jsou *standardní* aukce. *Standardní* aukcí nazveme každou aukci, která splňuje následující podmínky:

- dražený objekt je prodán hráčce s nejvyšší nabídkou

- jestliže má pro hráčku prodáváný objekt hodnotu 0, pak její očekávaná platba bude 0

My navíc ještě budeme předpokládat, že všechny hráčky jsou neutrální vůči riskování² a jejich hodnoty jsou nezávislé a stejně rozdělené vzhledem k distribuční funkci F .

Teorem 1.6.1. *Každá symetrická rovnováha jakékoli standardní aukce s ostře rostoucí nabídkovou funkcí přináší prodejci stejný očekávaný výnos.*

Důkaz. Předpokládejme, že máme libovolnou standardní aukci A . Nechť $s(\cdot)$ je symetrická rovnovážná strategie aukce A a nechť $m^A(x)$ je očekávaná platba hráčky (BÚNO hráčka 1) v aukci A za předpokladu, že všechny ostatní hráčky nabízejí dle s . V rovnováze by hráčka 1 měla nabídnout x . Předpokládejme, že místo toho nabídne jinou hodnotu z .

Mějme užitkovou funkci $u^A(z, x)$ hráčky 1, pokud nabídne $s(z)$ za předpokladu, že její hodnota objektu je x . Z vlastnosti standardní funkce víme, že je objekt prodán hráčce s nejvyšší nabídkou. Díky tomu máme:

$$u^A(z, x) = x \cdot P[\text{hráčka 1 vyhraje s nabídkou } s(z)] - m^A(z) \\ x \cdot F(z) - m^A(z),$$

kde F je distribuční funkce.

Hráčka 1 chce maximalizovat svůj užitek, tudíž tento výraz zderivujeme podle z a položíme roven nule.

$$\frac{\partial}{\partial z} u^A(z, x) = xg(z) - \frac{d}{dz} m^A(z) = 0$$

Navíc v rovnováze je optimální položit $z = x$, díky čemuž budeme mít

$$x \cdot f(x) - \frac{dm^A(x)}{dx} = 0$$

Dostáváme diferenciální rovnici, jejíž řešení je

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x \xi \cdot f(\xi) d\xi \\ = 0 + \int_0^x \xi \cdot f(\xi) d\xi \\ = F(x) \int_0^x \xi \frac{f(\xi)}{F(x)} d\xi \\ = F(x) \mathbb{E}[y|y < v]$$

Z vlastnosti standardní aukce je $m^A(0)$ rovno nule, neboť očekávaná platba hráčky s hodnotou nula je nula. A tímto jsme s důkazem u konce, protože pravá strana nezávisí na aukci A a také očekávaná platba a výnos nezávisí na konkrétním formátu aukce A . □

²Tento pojem si vysvětlíme v nadcházející sekci

1.7 Hráčka neutrální vůči riskování

Nyní bychom rádi přiblížili pojem neutrální vůči riskování, který jsme použili jako předpoklad u teorému ekvivalence výnosů. Tento pojem se zavádí na loteriích, proto musíme začít nejdříve definicemi loterií.

Definice 1.7.1 (Jednoduchá loterie). *Jednoduchá loterie L je vektor $L = (p_1, \dots, p_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ a pro $\forall i \in \hat{n}$ platí, že $p_i \geq 0$.*

Definice 1.7.2 (Množina jednoduchých loterií). *Mějme konečnou množinu možných výsledků X . Potom množinu \mathcal{L} nad množinou X nazýváme množinou všech jednoduchých loterií.*

Nyní je třeba zavést relaci, která by dokázala porovnat dvě loterie. Tuto relaci definovali John von Neumann a Oskar Morgenstern.

Definice 1.7.3 (Von Neumannova-Morgensternova racionalita). *Binární relaci \geq na prostoru jednoduchých loterií \mathcal{L} nazveme racionální preferenční relací, pokud splňuje následující axiomy:*

- **Úplnost:**
Pro každé dvě libovolné loterie $L, M \in \mathcal{L}$ platí právě jedna relace z následujících:

$$L \geq M \quad L \leq M$$

Slovy: „Loterie L je lepší nebo stejně dobrá jako loterie M , loterie M je lepší nebo stejně dobrá jako loterie L .“

Dále je možné ještě zavést relace $>$, $<$, \sim , které se definují následovně:

- * $L > M \Leftrightarrow L \geq M \wedge \neg M \geq L$ (preferovat L před M)
 - * $L < M \Leftrightarrow \neg L \geq M \wedge M \geq L$ (preferovat M před L)
 - * $L \sim M \Leftrightarrow \neg L \geq M \wedge \neg M \geq L$ (L a M jsou stejně preferované)
- **Tranzitivita:**
Mějme loterie $L, M, N \in \mathcal{L}$. Pokud $L < M$ a $M < N$, potom $L < N$. Analogicky pro $>$ a \sim .
 - **Spojitosť:**
Mějme loterie $L, M, N \in \mathcal{L}$ takové, že $L > M$. Potom $\exists p, q \in (0, 1)$ takové, že $pL + (1-p)N > M \wedge qM + (1-q)N < L$
 - **Nezávislost:**
Mějme loterie $L, M \in \mathcal{L}$. Potom pro libovolnou loterii $N \in \mathcal{L}$ a $p \in (0, 1)$ platí, že $L \leq M$ právě tehdy, když $pL + (1-p)N \leq pM + (1-p)N$.

Když už máme zavedenou relaci na porovnávání loterií, tak by bylo vhodné zavést i funkci, která by nám ukazovala, jaký užitek může mít hráčka z dané loterie.

Definice 1.7.4 (Reprezentace preferenční relace). Užitková funkce $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentuje preferenční relaci \succeq , pokud pro $\forall x, y \in X$ platí, že $x \succeq y$ právě tehdy, když $u(x) \geq u(y)$.

Definice 1.7.5 (Očekávaný užitek). Užitková funkce $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ má očekávanou užitkovou formu právě tehdy, když $\exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro $\forall L \in \mathcal{L}$ je $U(L) = \sum_{i=1}^n u_i p_i$. Tuto užitkovou funkci s očekávanou užitkovou formou se nazývá von Neumannova-Morgensternova očekávaná užitková funkce.

Jinými slovy by se dalo říci, že užitková funkce $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ má očekávanou užitkovou formu právě tehdy, když je lineární, tj.

$$U\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U(L_i)$$

pro $\forall L_i \in \mathcal{L}, i \in \hat{n}$ a pravděpodobnosti $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ pro $i \in \hat{n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Definice 1.7.6 (Peněžní loterie). Nechť x je spojitá proměnná vyjadřující peněžní částku. Potom peněžní loterii můžeme popsat distribuční funkcí $F : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$.

Očekávaná užitková forma peněžní loterie je dána vztahem

$$U(F) = \int u(x) dF(x),$$

kde $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ a $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Bernoulliho užitková funkce.

Definice 1.7.7 (Averzní vůči riskování). Hráčka je averzní vůči riskování právě tehdy, když

$$(\forall F \in \mathcal{L}) \left(U(F) \leq u(\mu_F) \right),$$

kde $\mu_F = \int x dF(x)$.

Odsud už můžeme jednoduše říci, že hráčka je neutrální vůči riskování právě tehdy, když pro $\forall F \in \mathcal{L}$ platí, že $U(F) = u(\mu_F)$.

Vztah vůči riskování si ukážeme konkrétně na následujícím příkladě. Mějme dvě různé loterie. V první loterii je šance 50%, že hráčka nevyhraje nic, a šance 50%, že vyhraje 1 milion korun. V druhé loterii má 100% šanci, že vyhraje částku x korun.

A nyní přichází na řadu zásadní otázka, která určí, zdali je hráčka neutrální vůči riskování či není. Kolik korun by muselo být x , aby hráčka upřednostnila druhou loterii před první? Podle odpovědi lze hráčku rozřadit do tří různých kategorií:

- averzní vůči riskování, pokud $x < 500\,000$ korun
- neutrální vůči riskování, pokud $x = 500\,000$ korun

- milující riskování, pokud $x > 500\,000$ korun

Částka 500 000 korun je rozhodující, protože v první loterii získá hráčka průměrně právě 500 000 korun. My teď dokonce můžeme říci, jak bude vypadat sklon nabídkové funkce pro jednotlivé typy:

- averzní vůči riskování: $s(x) = ax$ pro $0 < a < 1$
- neutrální vůči riskování: $s(x) = ax$ pro $a = 1$, tedy $s(x) = x$
- milující riskování: $s(x) = ax$ pro $a > 1$

Kapitola 2

Experiment

2.1 Motivace

Ukázali jsme tedy, jak by se teoreticky měly hráčky chovat, nicméně se nabízí otázka, zdali by se takto chovaly i ve skutečnosti. V reálném světě to nelze ověřit, protože neznáme typy lidí a jejich hodnoty. Lze to ale ověřit v kontrolovaném experimentu, kde můžeme každé hráčce přiřadit její hodnotu a sledovat její chování. A jelikož jsou již od 60. let 20. století, kdy William Vickrey přišel s Vickreyovou aukcí (Vickrey, 1961), experimenty s aukcemi velmi populární díky jejich jednoduchosti a dobré struktuře hry, tak máme k dispozici tisíce experimentů. My si dovolíme jich pár uvést. K *overbiddingu* dospěly tyto experimenty (Kagel, Harstad *et al.*, 1987; Kagel & Levin, 1993; Cooper & Fang, 2008) a k *underbiddingu* (Bernard, 2006; Coppinger *et al.*, 1980; Cox *et al.*, 1991). Ačkoli ve všech těchto experimentech nebyly prováděny totožné aukce, tak díky teorému o ekvivalenci výnosů si i tak byly ekvivalentní.

Jedním typem aukce, kterému se budeme věnovat, je aukce veřejných zakázek (anglicky *procurement auction*). Tato aukce nese svůj název dle situace, kdy se s ní můžeme nejčastěji setkat. V této aukci vítězí ta hráčka, která dá nejnižší nabídku, což koresponduje s reálnou situací, kdy se firmy snaží nabídnout co nejnižší částku, za kterou jsou schopni zrealizovat danou zakázku. Částka, kterou vítězka dostane, se odvíjí od toho, jestli daná aukce proběhla jako aukce prvních či druhých cen. Nás budou zajímat pouze aukce druhých cen, tudíž vítězka na zrealizování zakázky dostane částku ve výši druhé nejnižší nabídky. Pokud by nastala situace, kdy dvě nebo více hráček nabídlo stejnou nejnižší částku, tak by se náhodně z nich vybrala jedna vítězka a ta by obdržela částku ve výši nejnižší nabídky mezi nevítězkami. Touto aukcí se již před námi zabýval například John C. Bernard, který ve svém experimentu došel k závěru, že v této aukci dochází nejvíce u *underbiddingu* (Bernard, 2006).

Dalším typem aukce bude klasická aukce (anglicky *buyer auction*). Tento typ aukce je nejvíce používaný. Vítězí hráčka, která nabídne nejvyšší cenu a v případě, že se jedná o aukci druhých cen, tak zaplatí druhou nejvyšší nabídku, případně nejvyšší nabídku mezi nevítězkami. Tuto aukci jsme zvolili záměrně,

jelikož z námi vyslovenému teorému ekvivalence výnosů totiž plyne, že pokud proběhne klasická aukce na záporných hodnotách a aukce veřejných zakázek na kladných hodnotách, tak si jsou tyto dvě aukce ekvivalentní. Experiment s touto aukcí zrealizovali John. H. Kagel a Dan Levin, kteří pozorovali *overbidding* (Kagel & Levin, 1993).

Nyní tedy nastává otázka, jak se tedy hráčky chovají, když ze dvou ekvivalentních aukcí vycházejí naprosto odlišné výsledky. Pokud máme tedy na záporných číslech *overbidding* a na kladných *underbidding*, tak se nabízí otázka, jak se tedy chovají hráčky mezi těmito hodnotami, tj. na okolí nuly. Proto zkoumáme *mezaninovou* aukci, což je vlastně klasická aukce, ve které mají hráčky jak záporné, tak kladné hodnoty.

Stanovíme si tedy hypotézy, které se pokusíme potvrdit nebo vyvrátit:

- **Hypotéza 1:** V aukci veřejných zakázek bude docházet k *underbiddingu* - replikace experimentu (Bernard, 2006)
- **Hypotéza 2:** V klasické aukci se zápornými hodnotami bude docházet k *overbiddingu* - replikace experimentu (Kagel & Levin, 1993)
- **Hypotéza 3:** Nabídková funkce mezaninové aukce bude spojitá v nule

Zatímco u aukce veřejných zakázek a klasické aukce na záporných hodnotách se jedná o replikování experimentů, tak mezaninová aukce bude spíše explorativního charakteru.

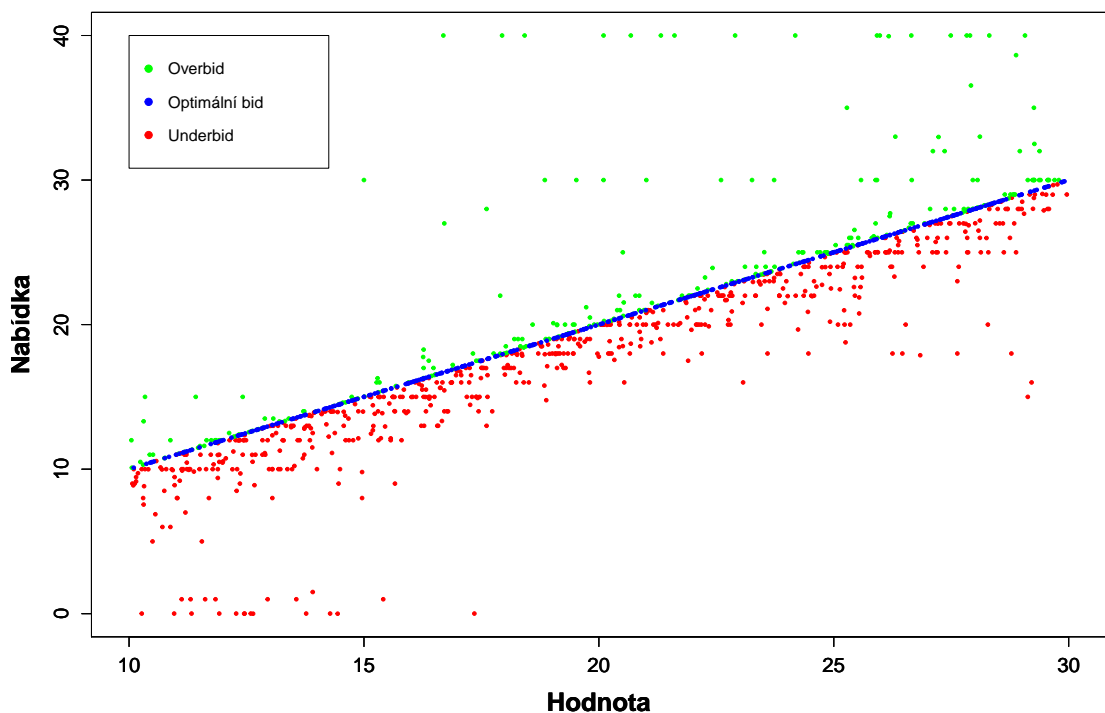
2.2 Popis experimentu

Experiment se uskutečnil v experimentální laboratoři ústavu Maxe Plancka pro ekonomii v Jeně. Zúčastnilo se ho 384 studentů, kteří byli rozděleni do 24 kohort po 16 hráčích. Každá z těchto kohort byla navíc rozdělena na 4 skupiny po 4 hráčích. Následně byl každý student náhodně přidělen do jedné ze tří aukcí. Tyto tři aukce byly aukce veřejných zakázek s hodnotami na intervalu $\langle 10, 30 \rangle$, klasická negativní aukce na intervalu $\langle -30, 10 \rangle$ a klasická mezaninová aukce na intervalu $\langle -14, 6 \rangle$, kde všechny hodnoty byly v eurech. Ve všech třech případech se navíc jednalo o aukce druhých cen. Než začali hráči hrát, tak jim byla detailně vysvětlena jejich aukce, kterou si vyzkoušeli na 5 testovacích hrách, kdy po každé aukci dostal každý hráč kompletní informace o právě proběhlém kole, což zahrnovalo hodnoty zbylých hráčů, jejich nabídky, kdo vyhrál, kolik zaplatil a kolik vydělal. Poté následovalo 20 kol naostro, kdy po každém kole se náhodně proházeli hráči ve skupinách v rámci své kohorty. Navíc po každém kole obdrželi i částečné informace o tom, jestli vyhráli nebo prohráli, a pokud vyhráli, tak kolik za daná objekt zaplatili a kolik vydělali či prodělali. Tímto způsobem proběhlo 20 kol ve všech třech aukcích. Tuto část našeho experimentu budeme nadále nazývat hot fází. Po této fázi dostal ještě každý hráč 10 hodnot a měl k nim pouze napsat svoji nabídku. Těchto 10 hodnot se lišilo podle typu aukce. V aukci veřejných

zakázek byly tyto hodnoty 12, 13, ..., 21, v klasické negativní aukci byly hodnoty -21, -20, ..., -12 a v klasické mezaninové aukci -14, -13, ..., 6. Tuto fázi budeme nadále nazývat cold fáze.

2.3 Aukce veřejných nabídek - hot fáze

Začneme charakteristikou dat z aukce veřejných zakázek. Této aukce se zúčastnily 4 kohorty po 16 hráčcích, jejichž hodnoty se nacházely na intervalu $\langle 10, 30 \rangle$. Graf jejich nabídek v této fázi vypadá následovně:



Obrázek 2.1: Nabídky v aukci veřejných zakázek - hot fáze

Z grafu je patrné, že největší procento nabídek je pod rovnovážnou nabídkou. Tento typ nabídky budeme nadále označovat jako *underbid*. Pokud je nabídka nad rovnovážnou nabídkou, tak ji budeme označovat jako *overbid*, a pokud by se nabídka shodovala s rovnovážnou nabídkou, tak ji budeme označovat jako *optimální bid*.

Konkrétní rozvržení nabídek v této aukci vypadá následovně:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ¹ [%]		
	>	=	<
1. kohorta	10,00	36,25	53,75
2. kohorta	14,69	37,81	47,50
3. kohorta	14,06	48,44	37,50
4. kohorta	12,18	52,19	35,63
Celkově	12,73	43,67	43,60

Tabulka 2.1: Zastoupení typů nabídek v aukci veřejných zakázek - hot fáze

A průměrná odchylka μ od Nashovy rovnováhy se směrodatnou odchylkou σ :

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ²	
	μ	σ
1. kohorta	-0,9165	2,0186
2. kohorta	0,0317	5,9910
3. kohorta	-2,1339	4,1895
4. kohorta	-0,5471	2,8666
Celkově	-0,8550	4,1672

Tabulka 2.2: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v aukci veřejných zakázek - hot fáze

Z těchto tabulek můžeme názorně vidět, že nejčastěji docházelo k *underbiddingu*, případně k nabídnutí *optimálního bidu*. Malá anomálie nastala u 2. kohorty, jejíž průměrná odchylka je kladná, ačkoli v této aukci mluvíme o *underbiddingu*. Tato kladná hodnota je ale způsobena tím, že dvě hráčky nabízely mnohem více, než byla jejich optimální nabídka, a zároveň ostatní hráčky nabízely spíše lehce pod rovnovážnou nabídku. My jsme předem toto chování očekávali, neboť John. C. Bernard uskutečnil podobný experiment a dospěl k závěru, že v tomto typu aukce dochází nejčastěji právě k *underbiddingu* (Bernard, 2006). Vypadá to tedy, že náš experiment byl dobře nastaven pro tuto aukci.

Skutečnost, že trend je opravdu nabídnout méně než je optimální nabídka, si ještě ověříme následujícími statistickými testy. Nejdříve ale potřebujeme zjistit, jestli budeme muset použít parametrický nebo neparametrický test, což znamená, že musíme otestovat normalitu dat. Ideálně nám poslouží Kolmogorův-Smirnovův test, jehož hypotézy jsou:

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0,$$

kde F je naše distribuční funkce a F_0 je distribuční funkce normálního rozdělení. P-hodnota tohoto testu nám vychází na hladině $\alpha = 0,05$ pro jednotlivé kohorty i

¹Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

²I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

pro celou aukci v řádu 10^{-20} a nebo ještě méně. Tudiž naše data nemají normální rozdělení a budeme muset použít neparametrický test. Požijeme Wilcoxonův test a stanovíme si naše hypotézy si na hladině $\alpha = 0,05$ následovně:

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs. } H_1 : \mu < 0$$

Bylo by dobré zmínit, že námi ověřovaný medián je mediánem náhodného vektorového výběru Z , který jsme si definovali jako rozdíl nabídek a hodnot, tj. $Z_i = B_i - V_i$. Při takto nastaveném testu dostáváme p-hodnotu zhruba 10^{-45} , takže zamítáme hypotézu H_0 . Odsud tedy plyne, že se opravdu jedná o *underbidding*, jelikož z hypotézy H_1 nám vychází, že medián je záporný.

Dále si zavedeme několik pojmů, které budeme dále používat. První z nich bude efektivita aukce, což bude hodnota, která bude vyjadřovat, kolik procent vítězek vyhrálo aukci, pokud dražený předmět pro ně měl nejnižší hodnotu. Další pojem bude cenová diference, což je rozdíl mezi skutečnou zaplacenou cenou a cenou, kdyby všechny hráčky nabídly optimální cenu, tj. cenu rovnou jejich nákladům. A poslední je nabídková diference, což je rozdíl nabídky a hodnoty pro danou hráčku.

Nyní si tyto hodnoty spočteme pro všechny kohorty, které navíc ještě rozdělíme po pěti kolech:

Kohorta	Kolo	Efektivita	Cenová diference		Nabídková diference	
			μ	σ	μ	σ
1. kohorta	1-5	85,00	-0,6800	1,5681	-0,5689	2,1182
	6-10	90,00	-0,7305	0,9589	-0,5530	0,9236
	11-15	95,00	-0,8235	1,4539	-0,5784	2,0231
	16-20	85,00	-0,7110	1,1245	-0,6327	1,3517
	Celkem	88,75	-0,7363	1,2759	-0,5833	1,6701
2. kohorta	1-5	80,00	-0,5160	1,7218	0,0283	4,3373
	6-10	90,00	-0,1065	2,1770	-0,0659	4,6153
	11-15	75,00	-0,4420	1,3858	-0,3486	4,8133
	16-20	95,00	-0,6540	0,8901	0,4624	5,1318
	Celkem	85,00	-0,4296	1,5957	0,0190	4,7200
3. kohorta	1-5	85,00	-1,1185	2,4748	-0,7959	2,3691
	6-10	85,00	-0,5255	1,2863	-1,4107	3,8825
	11-15	80,00	-1,1125	1,6237	-0,9532	3,2530
	16-20	85,00	-0,9460	1,2099	-1,2294	3,0939
	Celkem	83,75	-0,9256	1,7076	-1,0973	3,1892
4. kohorta	1-5	95,00	-0,4830	0,8108	-0,1513	2,7044
	6-10	75,00	-0,6915	0,9642	-0,6391	2,0929
	11-15	95,00	-0,5400	0,7196	-0,1870	1,7354
	16-20	95,00	-0,3015	0,5398	-0,0743	1,0993
	Celkem	90,00	-0,5040	0,7720	-0,2629	1,9975
Dohromady	1-5	86,25	-0,6994	1,7322	-0,3719	3,0130
	6-10	85,00	-0,5135	1,4298	-0,6672	3,2461
	11-15	86,25	-0,7295	1,3410	-0,5168	3,1938

	16-20	90,00	-0,6531	0,9852	-0,365	3,190
	Celkem	86,88	-0,6489	1,3935	-0,4811	3,1554

Tabulka 2.3: Efektivita, cenová diference, nabídková diference pro aukci veřejných zakázek - hot fáze

Podíváme-li se na efektivitu aukcí, tak lze říci, že po celou dobu byla poměrně vysoká. Nicméně někdo by mohl očekávat, že s přibývajícimi koly, které hráčka odehraje, se bude zvyšovat efektivita. Jak je ale patrné, efektivita se nezvyšovala, tudíž se nedá říci, že by se hráčky během hraní učily a zlepšovaly. Co se týče cenové a nabídkové diference, tak zde nepozorujeme žádné významné či překvapivé hodnoty. Avšak tyto hodnoty se nám ještě budou hodit při porovnání s ostatními aukcemi.

Dále by nás určitě zajímalo, jak tedy vypadá nabídková funkce. Náš tip je, že tato funkce bude lineární. Tuto domněnku si můžeme ověřit použitím t-testu. Stanovíme si hypotézy na hladině významnosti $\alpha = 0,05$:

$$H_0 : \rho = 0 \text{ vs. } H_1 : \rho \neq 0,$$

kde ρ je koeficient korelace populace. Pokud by platilo H_0 , tak by to znamenalo, že data nemají lineární charakter. Začneme tedy tím, že si spočítáme t_0 , kde r značí koeficient korelace vzorku:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{0,96 \cdot \sqrt{318}}{\sqrt{0,0784}} \\ &\doteq 61,14 \end{aligned}$$

V tabulkách si najdeme hodnotu kvantilu $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Studentova rozdělení pro 318 stupňů volnosti:

$$t_{1-0,025} = t_{0,975} \doteq 1,97$$

Odtud tedy vidíme, že $t_0 > t_{0,975}$. Zamítáme tedy hypotézu H_0 , což znamená, že naše data mají lineární charakter. Toto ověření jsme provedli pouze pro 1. kohortu, ale pro ostatní kohorty by byl postup analogický se stejným výsledkem, tedy že zamítáme H_0 .

Nyní tedy použijeme lineární regresi, za jejíž pomoci budeme hledat koeficienty a a b z rovnice $s(x) = ax + b$. Zároveň si spočítáme koeficient determinace R^2 , který vyjadřuje podíl, jakým je rozptyl závislé proměnné veličiny vysvětlen změnami nezávislé proměnné. Dostaneme tedy:

Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R ²
1. kohorta	1,006	-0,692	0,9214
2. kohorta	1,160	-3,196	0,6746
3. kohorta	1,054	-2,190	0,7692
4. kohorta	1,085	-1,978	0,9119
Celkově	1,076	-2,011	0,7922

Tabulka 2.4: Lineární regrese pro aukci veřejných zakázek - hot fáze

My víme, že v aukci druhých cen je rovnovážná nabídková funkce rovna $s(x) = x$. Hráčky by tedy měly nabízet tolik, kolik je jejich hodnota pro daný předmět. To nás tedy vede k tomu otestovat hypotézu, zdali by mohlo být $a = 1$ a $b = 0$. Začneme s tím, že si na hladině $\alpha = 0,05$ stanovíme hypotézy:

$$H_0 : a = 1 \text{ vs. } H_1 : a \neq 1$$

Nejprve si spočítáme T statistiku dle vzorce:

$$T = (\hat{a} - a) \sqrt{\frac{(n-2)\sigma_x^2}{\hat{\sigma}^2}}, \text{ kde } \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 - \bar{v}_n^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i - \hat{b} - \hat{a}v_i)^2$$

Na začátek si vysvětlíme, co znamenají uvedené výrazy. V našem vzorci je \hat{a} odhad sklonu a z lineární regrese, \hat{b} odhad interceptu b z lineární regrese, n je počet dat, v_i je i -tá hodnota, b_i je i -tá nabídka a \bar{v}_n je průměr přes všechny hodnoty. Při testování těchto hypotéz platí, že zamítáme H_0 , pokud $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$. Pokud bychom dopočítali T a $t_{0,975}$, tak bychom dostali, že $T \doteq 4,96$ a $t_{0,975} \doteq 1,97$. Hypotézu H_0 tedy zamítáme. Obdobně bychom postupovali při testování hypotézy, zdali by mohla být $b = 0$. I v tomto případě bychom tuto hypotézu zamítli. Tyto výsledky se dají lehce ověřit tím, že si spočítáme pro oba odhady 95% intervaly spolehlivosti. Pro a a b platí, že:

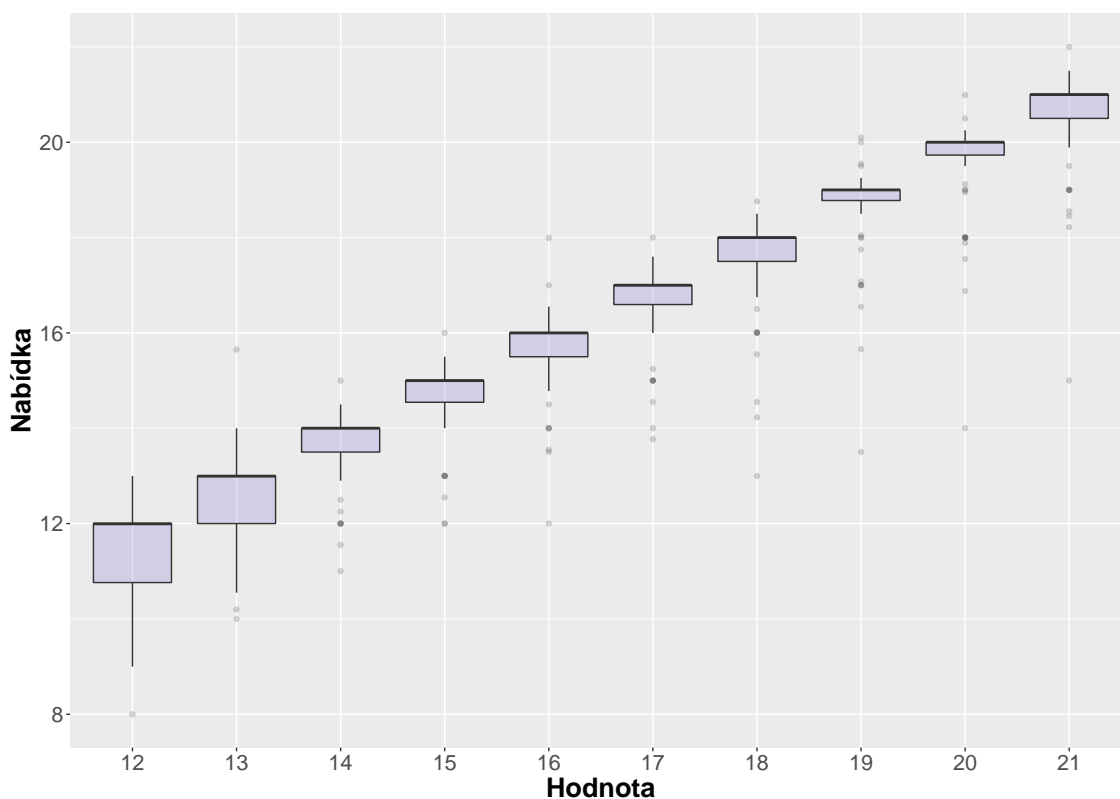
$$\hat{a} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(n-2)\sigma_x^2}} \leq a \leq \hat{a} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(n-2)\sigma_x^2}}$$

$$\hat{b} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2}\right) \frac{\hat{\sigma}^2}{n-2}} \leq b \leq \hat{b} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{\sigma_x^2}\right) \frac{\hat{\sigma}^2}{n-2}}$$

Po dosazení nám 95% intervaly spolehlivosti vychází pro a (1,046, 1,107) a pro b (-2,641, -1,382). Tyto intervaly nám potvrzují, že jsme obě hypotézy zamítli správně.

2.4 Aukce veřejných nabídek - cold fáze

Co se týče cold fáze, tak ta dopadla následovně:



Obrázek 2.2: Boxplot aukce veřejných zakázek - cold fáze

A procentuálně:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ³ [%]		
	>	=	<
1. kohorta	9,37	55,00	35,63
2. kohorta	13,75	48,12	38,13
3. kohorta	13,13	44,37	42,50
4. kohorta	11,25	67,50	21,25
Celkově	11,87	53,75	34,38

Tabulka 2.5: Zastoupení typů nabídek v aukci veřejných zakázek - cold fáze

³Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

A průměrné odchylky od Nashovy rovnováhy:

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ⁴	
	μ	σ
1. kohorta	-0,4879	1,1585
2. kohorta	-0,4476	6,8232
3. kohorta	-1,7096	2,2620
4. kohorta	-0,3263	0,7562
Celkově	-0,8155	3,9035

Tabulka 2.6: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v aukci veřejných zakázek - cold fáze

V porovnání s hot fází vidíme jistý nárůst v nabídnutí *optimálního bidu*. Nicméně pořad je zde značné procento hráček, které *overbiddovaly*. Je důležité také zmínit, že nebyť naši odchylky $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy, tak by vyšlo, že největší podíl by měl *overbidding*. Což by mohlo značit jistou konzistenci v chování hráček v obou fázích. Tuto domněnku se pokusíme ověřit následujícími statistickými testy. Nejprve ověříme normalitu dat za pomoci Shapirova-Wilkova testu. Konzistenci v obou fázích budeme zkoumat skrze odchylky od Nashovy rovnováhy, tudíž budeme mít náhodné vektorové výběry $Z^{(H)}$ a $Z^{(C)}$, kde $Z^{(H)}$ bude definovaný rozdíly nabídek a hodnot v hot fázi a $Z^{(C)}$ rozdíly v cold fázi. Naše hypotézy na hladině $\alpha = 0,05$ budou následující:

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0,$$

kde F je naše distribuční funkce a F_0 je distribuční funkce normálního rozdělení. Nami zvolený test nám dává p-hodnoty pro oba výběry menší, než 10^{-16} , tudíž zamítáme hypotézu H_0 a musíme použít neparametrický test. Pro srovnávání dvou populací se nejčastěji používá Mann-Whitney-Wilcoxon test, který zkoumá, zdali mají tyto dvě populace stejný medián. Tudíž naše hypotézy na hladině $\alpha = 0,05$ jsou:

$$H_0 : \mu_{Z^{(H)}} = \mu_{Z^{(C)}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{Z^{(H)}} \neq \mu_{Z^{(C)}}$$

Z testu dostáváme p-hodnotu 0,0739, tudíž hypotézu H_0 nezamítáme a můžeme tedy tvrdit, že se hráčky chovaly v obou fázích konzistentně.

I v této fázi bychom chtěli znát, jak vypadá nabídková funkce. Pokud bychom použili t-test a zjišťovali bychom, zdali je koeficient korelace nulový, tak by nám opět vyšlo, že koeficient korelace není nulový a že nabídková funkce je lineární. Následně bychom udělali lineární regresi a získali bychom koeficienty a a b v lineární funkci $s(x) = ax + b$:

⁴I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

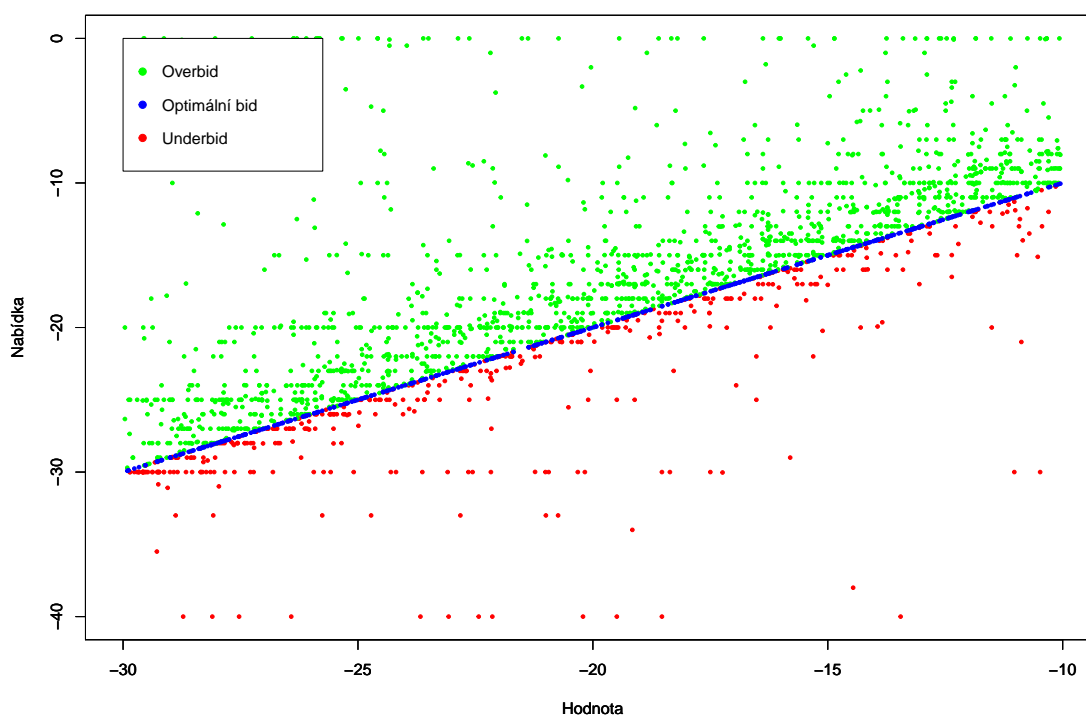
Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R^2
1. kohorta	1,005	-0,305	0,9273
2. kohorta	1,461	-7,843	0,4429
3. kohorta	1,002	-0,979	0,7007
4. kohorta	1,042	-0,805	0,9791
Celkově	1,128	-2,483	0,5979

Tabulka 2.7: Lineární regrese pro aukci veřejných zakázek - cold fáze

Pokud bychom si chtěli ověřit, zdali může být $a = 1$ a $b = 0$, tak pomocí 95% intervalu spolehlivosti bychom zjistili, že $a \neq 1$ a $b \neq 0$.

2.5 Klasická negativní aukce - hot fáze

Této aukce se zúčastnilo 8 kohort po 16 hráčkách na intervalu $\langle -30, -10 \rangle$ a graf jejich nabídek v hot fázi vypadá následovně:



Obrázek 2.3: Nabídky v klasické negativní aukci - hot fáze

Zde už lze na první pohled, na rozdíl od předchozí aukce veřejných zakázek, vidět masivní *overbidding*. Přesné zastoupení nabídek je:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ⁵ [%]		
	>	=	<
1. kohorta	62,81	25,00	12,19
2. kohorta	56,25	23,13	20,62
3. kohorta	63,75	21,88	14,37
4. kohorta	68,13	22,81	9,06
5. kohorta	54,06	28,75	17,19
6. kohorta	57,50	35,63	6,87
7. kohorta	62,19	30,63	7,18
8. kohorta	43,13	31,87	25,00
Celkově	58,48	27,46	14,06

Tabulka 2.8: Zastoupení typů nabídek v klasické záporné aukci - hot fáze

S průměrnými nabídkami a směrodatnými odchylkami:

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ⁶	
	μ	σ
1. kohorta	2,2909	3,8804
2. kohorta	2,3663	3,7548
3. kohorta	3,0122	8,7881
4. kohorta	4,0915	5,5918
5. kohorta	1,9196	5,5812
6. kohorta	3,4077	3,8350
7. kohorta	2,6448	4,2685
8. kohorta	1,7260	5,1956
Celkově	2,6918	5,4419

Tabulka 2.9: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v klasické negativní aukci - hot fáze

Vypadá to tedy, že docházelo především k *overbiddingu*, což by se znovu shodovalo s naším očekáváním, neboť ke stejnému závěru došli i ve své práci John H. Kagel a Dan Levin (Kagel & Levin, 1993).

To, že je v této aukci trendem nabídnout více než je optimální nabídka, si opět ověříme statistickými testy. Začneme ověřením normality pomocí Kolmogorova-Smirnova test, kde si stanovíme hypotézy:

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0$$

⁵Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

⁶I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

na hladině $\alpha = 0,05$. Výsledná p-hodnota pro jednotlivé kohorty i celou aukci začínala na hodnotě 10^{-14} a nebo ještě menší. Tudíž zamítáme hypotézu H_0 a budeme muset použít neparametrický test. Znovu použijeme Wilcoxonův test na hladině $\alpha = 0,05$ pro hypotézy:

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs. } H_1 : \mu > 0$$

Náhodný vektorový výběr Z je jako u minulé aukce rozdíl nabídek a hodnoty, tedy $Z_i = B_i - V_i$. Tentokrát nám vychází p-hodnota okolo 10^{-166} , tudíž zamítáme H_0 a jsme si tedy jisti, že je jedná o *overbidding*.

Dále si zjistíme jako u minulé aukce, jaká byla efektivita, cenová diference a nabídková diference. Tyto pojmy mají stále stejný význam s výjimkou efektivity, která na rozdíl od minulé aukce, kde měl pro hráčku předmět nejnižší hodnotu, tak nyní má dražený předmět pro hráčku nejvyšší hodnotu. Tato úprava je logická, protože zatímco v aukci veřejných zakázek vítězila nejnižší nabídka, tak v klasické aukci vítězí ta nejvyšší.

Kohorta	Kolo	Efektivita	Cenová diference		Nabídková diference	
		[%]	μ	σ	μ	σ
1. kohorta	1-5	75,00	1,5360	3,1779	1,5760	4,9015
	6-10	70,00	1,9920	3,0031	1,7641	3,1732
	11-15	80,00	1,9840	2,4309	1,6986	2,8216
	16-20	75,00	1,5200	1,9904	1,8361	2,7275
	Celkem	75,00	1,7580	2,6506	1,7187	3,5023
2. kohorta	1-5	75,00	3,0890	3,1465	2,6673	3,9202
	6-10	75,00	2,4905	2,3681	1,8301	3,5716
	11-15	80,00	1,7870	2,4205	1,6671	3,0495
	16-20	80,00	1,0340	2,5147	1,1134	3,0116
	Celkem	77,50	2,1001	2,6942	1,8195	3,4388
3. kohorta	1-5	45,00	3,9625	6,0600	2,6841	8,9183
	6-10	30,00	2,4625	3,7530	2,8736	7,1130
	11-15	60,00	2,1970	3,1866	2,0014	6,3634
	16-20	45,00	1,6895	3,5509	1,8591	8,8486
	Celkem	45,00	2,5779	4,2918	2,3546	7,8634
4. kohorta	1-5	50,00	5,3595	4,9121	4,5870	6,5471
	6-10	50,00	4,1610	4,4634	3,5629	5,6576
	11-15	65,00	2,5855	2,7945	2,8823	5,0095
	16-20	65,00	1,5110	1,7959	1,5989	2,1394
	Celkem	57,50	3,4043	3,9292	3,1578	5,2031
5. kohorta	1-5	80,00	0,9285	2,8814	1,3671	6,0471
	6-10	60,00	2,0615	2,4596	1,8544	5,4412
	11-15	55,00	1,5010	2,4326	1,1891	3,7369
	16-20	85,00	1,1110	1,5240	1,0608	3,4726
	Celkem	70,00	1,4005	2,3716	1,3678	4,7878
6. kohorta	1-5	70,00	3,1900	4,9105	3,1644	4,9848
	6-10	80,00	2,2530	2,4898	1,9980	3,0470

	11-15	80,00	1,6265	1,8724	1,8272	2,6373
	16-20	75,00	2,0920	1,9472	1,7960	2,5551
	Celkem	76,25	2,2904	3,0614	2,1964	3,4801
7. kohorta	1-5	55,00	3,2035	2,9897	2,8645	5,1066
	6-10	50,00	1,6370	2,3929	2,2134	4,0828
	11-15	55,00	1,8060	1,7781	1,1449	3,0451
	16-20	75,00	1,4440	1,5469	1,1162	1,6578
	Celkem	58,75	2,0226	2,3130	1,8348	3,7568
8. kohorta	1-5	40,00	2,3935	4,7012	2,0221	6,6352
	6-10	70,00	1,0235	1,8841	1,3821	4,1733
	11-15	70,00	0,8490	1,8732	0,9280	2,9619
	16-20	75,00	0,4560	1,5178	0,3665	2,2521
	Celkem	63,75	1,1805	2,8472	1,1747	4,3606
Dohromady		65,47	2,0918	3,1461	1,9530	4,7876

Tabulka 2.10: Efektivita, cenová a nabídková difference pro klasickou negativní aukci - hot fáze

Oproti aukci veřejných zakázek vidíme znatelný pokles v efektivitě. Pokles je dokonce o 20 %. Toto náhlé snížení efektivity by mohlo mít spojitost s úvahou, že lidé pracují obecně hůře se zápornými čísly nežli s kladnými. Tímto fenoménem se už dávno před námi zabývali Daniel Kahneman a Amos Tversky, kteří společně publikovali prospektovou teorii, která popisuje systematické volby a rozhodování lidí v nejistotě (Kahneman & Tversky, 1979). U cenové a nabídkové difference nepozorujeme žádné významné anomálie, ale opět tyto hodnoty využijeme až později.

Jako u minulé aukce bychom rádi zjistili, jak vypadá nabídková funkce. Opět očekáváme, že by měla být lineární, proto použijeme t-test a podíváme se, zdali koeficient korelace bude různý od nuly na 1. kohortě. Veličina t_0 v tomto případě je:

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \doteq 30,71$$

Jsme na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ a hodnotu kvantilu $t_{0,975} \doteq 1,97$ již známe. Opět tedy platí, že $t_0 > t_{0,975}$ a zamítáme hypotézu H_0 , tedy nabídková funkce je lineární. Obdobně bychom tento test provedli i pro ostatní kohorty a pokaždé bychom zamítli hypotézu H_0 .

Můžeme tedy použít lineární regrese a najít koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ rovnice $s(x) = ax + b$.

Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R ²
1. kohorta	1,057	2,830	0,7479
2. kohorta	1,056	2,955	0,7580
3. kohorta	0,854	-0,599	0,2629
4. kohorta	0,836	-0,150	0,4676
5. kohorta	1,009	1,544	0,5894
6. kohorta	0,909	0,373	0,6976
7. kohorta	0,935	0,515	0,6541
8. kohorta	0,934	-0,148	0,6038
Celkově	0,948	0,907	0,5582

Tabulka 2.11: Lineární regrese pro klasickou negativní aukci - hot fáze

Stále bychom se rádi přiblížili rovnovážné nabídkové funkci $s(x) = x$, proto zkusíme otestovat hypotézy pro $a = 1$ a $b = 0$. Začneme se sklonem a , kde

$$H_0 : a = 1 \text{ vs. } H_1 : a \neq 1$$

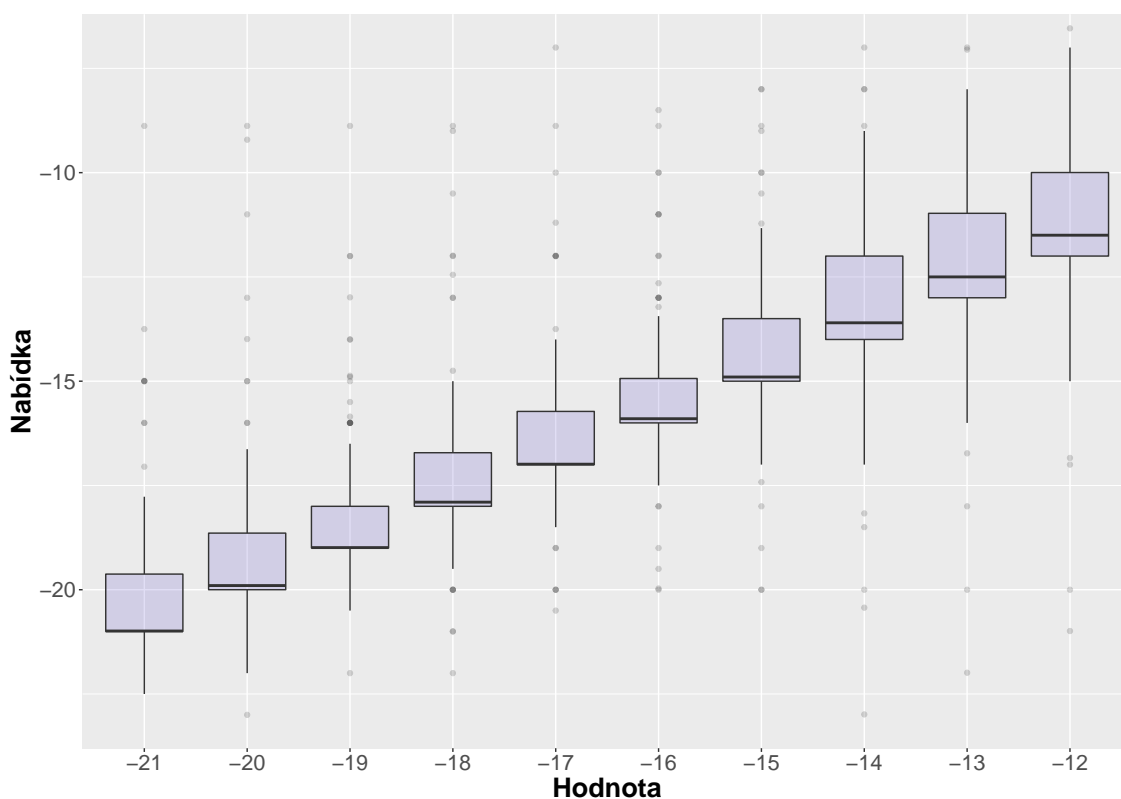
na hladině $\alpha = 0,05$. Dle již známého vzorce si spočítáme T statistiku:

$$T = (\hat{a} - a) \sqrt{\frac{(n-2)\sigma_x^2}{\hat{\sigma}^2}} \doteq -2,22$$

V porovnání s $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{0,975}(2558) \doteq 1,97$ nám vyjde, že $|T| > t_{0,975}(2558)$, tudíž zamítáme hypotézu H_0 . Analogickým postupem bychom otestovali i to, zdali $b = 1$. I v tomto případě bychom H_0 zamítli. A pokud bychom si chtěli ověřit naše výsledky a spočítali bychom 95% intervaly spolehlivosti, tak bychom dostali pro a (0,915; 0,9804) a pro b (0,227; 1,587), tudíž naše výpočty byly správné.

2.6 Klasická negativní aukce - cold fáze

Nyní se podíváme na to, jak vypadaly nabídky hráček v cold fázi:



Obrázek 2.4: Boxplot klasické negativní aukce - cold fáze

Z boxplotu jde již patrně vidět, že opět docházelo především k *overbiddingu*. Přesné zastoupení nabídek je následující:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ⁷ [%]		
	>	=	<
1. kohorta	56,88	24,37	18,75
2. kohorta	45,63	29,37	25,00
3. kohorta	57,50	36,88	5,62
4. kohorta	58,13	34,37	7,50
5. kohorta	56,25	33,13	10,62
6. kohorta	58,13	35,00	6,87
7. kohorta	46,25	47,50	6,25
8. kohorta	25,00	36,25	38,75
Celkově	50,47	34,61	14,92

Tabulka 2.12: Zastoupení typů nabídek v klasické negativní aukci - cold fáze

⁷Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

S odchylkami od Nashovy rovnováhy:

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ⁸	
	μ	σ
1. kohorta	1,4688	4,8827
2. kohorta	1,5383	4,9637
3. kohorta	1,5609	3,7444
4. kohorta	1,2637	3,7637
5. kohorta	1,0758	3,4839
6. kohorta	1,6109	3,7114
7. kohorta	1,8822	3,4722
8. kohorta	1,4087	3,3805
Celkově	1,4749	3,9571

Tabulka 2.13: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v klasické negativní aukci - cold fáze

Tudíž i zde v porovnání s hot fází vidíme konzistenci v chování hráček. Opět si tuto hypotézu ověříme za pomoci náhodných vektorových výběrů $Z^{(H)}$ a $Z^{(C)}$, které budou vyjadřovat rozdíly nabídek v hot a cold fázi. Nejprve si ale zvlášť ověříme normalitu použitím Shapirova-Wilkova testu na hladině $\alpha = 0,05$ s hypotézami

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0,$$

kde F je naše distribuční funkce a F_0 je distribuční funkce normálního rozdělení. Provedením testu získáme pro oba náhodné výběry p-hodnotu nižší než 10^{-16} . Zamítáme tedy hypotézu H_0 a porovnáme tyto dvě populace neparametrickým Mann-Whitney-Wilcoxon testem na hladině $\alpha = 0,05$ s hypotézami

$$H_0 : \mu_{Z^{(H)}} = \mu_{Z^{(C)}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{Z^{(H)}} \neq \mu_{Z^{(C)}}$$

Z testu dostáváme p-hodnotu 10^{-10} , což znamená, že zamítáme hypotézu H_0 . Toto pro nás může být překvapením, protože to znamená, že se hráčky nechovaly stejně v hot a cold fázi.

Pokud bychom provedli t-test za cílem zjistit, zdali i tentokrát má nabídková funkce lineární charakter, tak bychom zjistili, že má. Následně bychom provedli lineární regresi a získali bychom koeficienty a a b lineární funkce $s(x) = ax + b$:

⁸I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R ²
1. kohorta	1,039	1,172	0,4498
2. kohorta	1,038	1,533	0,5967
3. kohorta	1,090	3,722	0,1926
4. kohorta	1,055	2,030	0,6020
5. kohorta	1,028	1,178	0,8025
6. kohorta	0,997	1,633	0,5787
7. kohorta	0,927	-0,122	0,6139
8. kohorta	0,976	-0,942	0,6492
Celkově	1,019	1,276	0,4442

Tabulka 2.14: Lineární regrese pro klasickou negativní aukci - cold fáze

2.7 Srovnání aukce veřejných zakázek a klasické negativní aukce

Nyní si budeme zabývat takzvaným *framing* efektem. Z již vysloveného a dokázaného teorému o ekvivalenci výnosů plyne, že aukce veřejných zakázek je ekvivalentní s klasickou aukcí na záporných hodnotách. Pokud bychom totiž vzali z našeho experimentu klasickou negativní aukci a všechny hodnoty bychom překlápili na kladná čísla, tak bychom dostali aukci, ve které by vítězila nejnižší nabídka, což je právě aukce veřejných zakázek. To by tedy mělo znamenat, že se hráčky chovají v těchto aukcích stejně.

Tuto myšlenku bude třeba ověřit. K tomu použijeme již výše zmíněné cenové a nabídkové diference. Budeme tedy porovnávat dvakrát dvě populace. K tomuto účelu slouží Mann–Whitney–Wilcoxon test, který na hladině $\alpha = 0,05$ testuje hypotézy:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs. } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$

kde μ_1 je medián populace z aukce veřejných zakázek a μ_2 je medián populace z klasické negativní aukce. Provedením toho testu pro cenovou a nabídkovou diferenci získáme tyto p-hodnoty:

Kolo	Cenová diference p-hodnota	Nabídková diference p-hodnota
1-5	10^{-6}	10^{-8}
6-10	10^{-8}	10^{-9}
11-15	10^{-4}	10^{-6}
15-20	10^{-3}	10^{-6}
Celkem	10^{-16}	10^{-26}

Tabulka 2.15: Porovnání hot fází aukcí - Mann–Whitney–Wilcoxon test

Z tabulky je tedy jasně vidět, že ve všech případech zamítáme hypotézu H_0 , což znamená, že se hráčky chovají odlišně v každém z typů aukce.

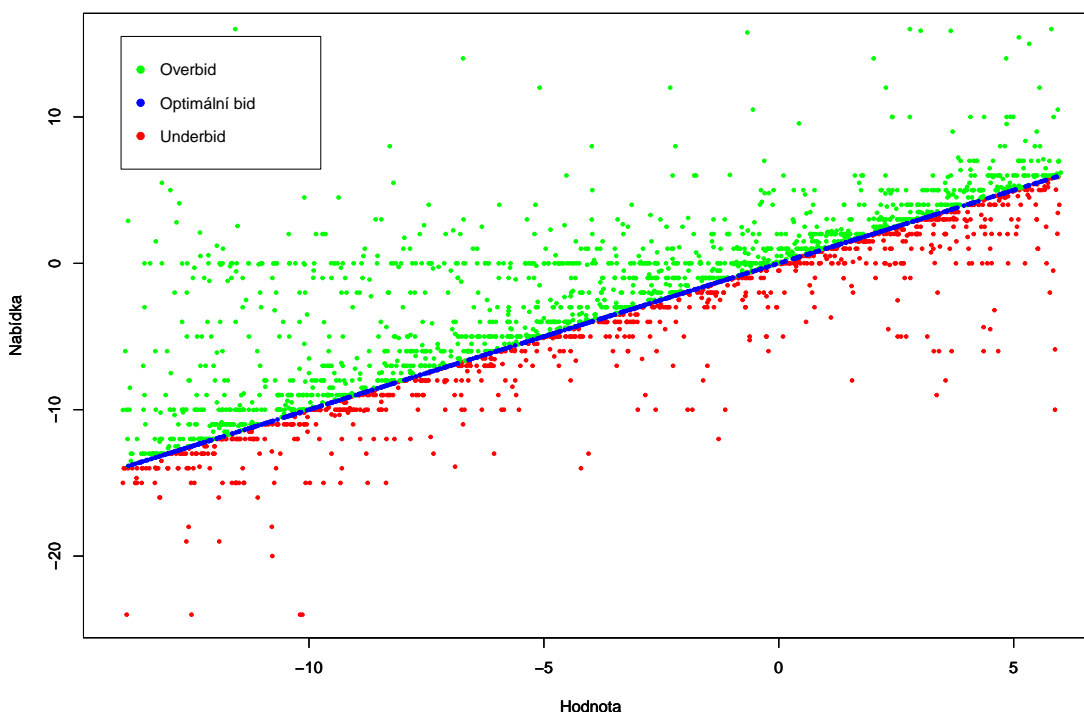
Porovnali jsme hot fáze a ještě nám zbývá porovnat cold fáze. V nich budeme porovnávat populace odchylek od Nashovy rovnováhy a k tomu opět použijeme Mann–Whitney–Wilcoxon test na hladině $\alpha = 0,05$ s hypotézami:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs. } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

I v tomto případě máme p-hodnotu řádu 10^{-7} , tudíž se opravdu hráčky chovají odlišně na kladných a záporných hodnotách navzdory tomu, že aukce si jsou vzájemně ekvivalentní.

2.8 Klasická mezaninová aukce

Nyní přichází na řadu naše mezaninová aukce, která by právě měla ukázat, jak se hráčky chovají na okolí nuly. Této aukce se původně zúčastnilo 12 kohort po 16 hráčkách. Naneštěstí u prvních dvou kohort byl chybně nastaven interval hodnot, tudíž jsme museli měření z těchto dvou kohort vyřadit. Vyřazení těchto kohort nebude pro nás mít žádný zásadní negativní dopad, protože i bez nich máme dostatek dat. Graf vypadá následovně:



Obrázek 2.5: Nabídky v klasické mezaninové aukci - hot fáze

Z grafu lze opět vyčíst, že převažuje *overbidding*. Podíváme se ještě na procentuální zastoupení nabídek vzhledem k Nashově rovnováze:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ⁹ [%]		
	>	=	<
3. kohorta	50,94	35,63	13,44
4. kohorta	39,69	38,44	21,88
5. kohorta	49,69	31,88	18,44
6. kohorta	19,06	69,38	11,56
7. kohorta	39,38	16,56	44,06
8. kohorta	46,25	24,06	29,69
9. kohorta	48,13	33,13	18,75
10. kohorta	43,75	34,38	21,88
11. kohorta	47,50	29,38	23,13
12. kohorta	36,88	40,94	22,19
Celkově	42,13	35,37	22,50

Tabulka 2.16: Zastoupení typů nabídek v klasické mezaninové aukci - hot fáze

A průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy:

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ¹⁰	
	μ	σ
3. kohorta	2,2529	3,7444
4. kohorta	1,2297	3,2497
5. kohorta	1,0232	2,3614
6. kohorta	0,3506	2,7660
7. kohorta	0,4375	4,0464
8. kohorta	1,5438	4,2052
9. kohorta	1,4806	4,1664
10. kohorta	0,9555	3,0761
11. kohorta	1,5137	3,6374
12. kohorta	0,8258	4,1260
Celkově	1,950	3,6773

Tabulka 2.17: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v klasické mezaninové aukci - hot fáze

Overbidding si ověříme. Nejdříve zjistíme, zdali je náhodný vektorový výběr Z , což je rozdíl nabídek a hodnot, normálně rozdělený na hladině $\alpha = 0,05$ pomocí Kolmogorova-Smirnova testu s hypotézami:

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0$$

⁹Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

¹⁰I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

P-hodnota toho testu vychází pro všechny kohorty i celou akci mnohem menší, než je α . Zamítáme tedy H_0 a Z nemá normální rozdělení. V tomto případě použijeme Wilcoxonův test s hladinou $\alpha = 0,05$ na otestování hypotéz:

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs. } H_1 : \mu > 0$$

I v tomto testu vychází p-hodnota hluboko pod α , tudíž máme potvrzené, že se jedná o *overbidding*. Dále si spočítáme efektivitu, cenovou a nabídkovou diferenci pro případné srovnání s předchozími aukcemi.

Kohorta	Kolo	Efektivita	Cenová diference		Nabídková diference	
		[%]	μ	σ	μ	σ
3. kohorta	1-5	85,00	1,5795	2,5543	1,2695	3,5102
	6-10	80,00	1,2460	2,3403	1,4230	3,3418
	11-15	90,00	2,2605	2,6317	1,7959	3,1933
	16-20	75,00	0,7295	1,0556	1,3248	2,6844
	Celkem	82,50	1,4539	2,2655	1,4533	3,1889
4. kohorta	1-5	75,00	0,7605	2,1647	0,7155	3,2064
	6-10	80,00	0,3495	2,0549	0,8441	2,7190
	11-15	70,00	0,6310	2,4173	0,7248	2,6660
	16-20	95,00	1,4865	2,2893	0,7390	1,6929
	Celkem	80,00	0,8069	2,2331	0,7558	2,6172
5. kohorta	1-5	85,00	1,0365	1,4413	0,4889	1,4096
	6-10	95,00	1,1600	2,6838	1,0626	2,7044
	11-15	80,00	0,5815	1,9666	0,5422	1,8551
	16-20	80,00	0,6490	1,1341	0,6875	1,8174
	Celkem	85,00	0,8568	1,8796	0,6953	2,0060
6. kohorta	1-5	90,00	0,2500	1,2663	0,0897	1,7457
	6-10	90,00	0,1850	0,4473	0,1990	0,8182
	11-15	100,00	0,1205	0,5796	0,1773	1,0969
	16-20	85,00	-0,4075	2,3306	-0,0296	2,1323
	Celkem	91,25	0,0370	1,3747	0,1091	1,5338
7. kohorta	1-5	75,00	1,3245	2,6343	1,1538	3,6142
	6-10	55,00	-0,4875	3,7829	0,2488	5,0552
	11-15	65,00	-0,2540	1,8977	0,0240	3,0375
	16-20	85,00	0,3035	2,0150	0,0280	2,5540
	Celkem	70,00	0,2216	2,7290	0,3636	3,6988
8. kohorta	1-5	70,00	2,7110	3,2894	1,8372	4,0496
	6-10	55,00	0,9755	2,2884	1,1052	3,6388
	11-15	90,00	1,4415	2,6306	1,2080	3,8502
	16-20	85,00	0,7720	3,3352	0,5375	3,2577
	Celkem	75,00	1,4750	2,9626	1,1720	3,7220
9. kohorta	1-5	75,00	0,9980	2,5914	1,2457	4,2123
	6-10	80,00	0,2065	1,9503	0,8681	3,2391
	11-15	70,00	1,1120	1,7888	1,1714	3,9869
	16-20	80,00	1,0345	2,0590	0,6743	2,1041
	Celkem	76,25	0,8378	2,1108	0,9899	3,4754

10. kohorta	1-5	80,00	0,5010	1,9948	0,4679	2,7037
	6-10	85,00	0,6255	1,8694	0,5994	2,4236
	11-15	85,00	1,2745	2,0994	0,4226	2,4942
	16-20	85,00	1,4730	2,1787	1,0262	2,4946
	Celkem	83,75	0,9685	2,0426	0,6290	2,5306
11. kohorta	1-5	90,00	1,5110	2,0443	1,3459	3,4702
	6-10	70,00	1,3555	2,6253	1,1332	2,4133
	11-15	70,00	1,3730	3,3596	0,8894	3,7980
	16-20	90,00	0,7855	1,4427	0,9099	2,6780
	Celkem	80,00	1,2563	2,4406	1,0696	3,1317
12. kohorta	1-5	75,00	2,0540	2,7993	1,3565	3,7374
	6-10	85,00	1,0790	2,4200	0,5106	3,0669
	11-15	70,00	0,3010	1,5052	0,2463	2,5665
	16-20	85,00	-0,4955	3,4545	-0,1625	3,1571
	Celkem	78,75	0,7346	2,7586	0,4877	3,1935
Dohromady		80,25	0,8648	2,3528	0,7725	3,0107

Tabulka 2.18: Efektivita, cenová a nabídková diference pro klasickou mezaninovou aukci - hot fáze

Oproti klasické negativní aukci vidíme značný nárůst v efektivitě, která se téměř přiblížila k hodnotě v aukci veřejných zakázek.

Rádi bychom i tentokrát zjistili, jak vypadá nabídková funkce. Nejprve zjistíme, zdali je lineární. K tomu použijeme t-test na hladině $\alpha = 0,05$ a otestujeme koeficient korelace hypotézami:

$$H_0 : \rho = 0 \text{ vs. } H_1 : \rho \neq 0$$

Začneme tím, že si spočítáme $t : 0$ ze vzorce:

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\doteq 96,6$$

Z tabulky Studentova rozdělení si zjistíme, že $t_{0,975} \doteq 1,97$. Z toho tedy plyne, že $t_0 > t_{0,975}$ a zamítáme hypotézu H_0 . Nabídková funkce je tedy lineární a můžeme provést lineární regresi, díky které najdeme koeficienty a a b funkce $s(x) = ax + b$.

Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R^2
3. kohorta	0,862	0,907	0,7012
4. kohorta	0,880	0,277	0,7921
5. kohorta	0,957	0,541	0,8818
6. kohorta	0,946	-0,115	0,9291
7. kohorta	0,836	-0,336	0,6218
8. kohorta	0,852	0,563	0,6444
9. kohorta	0,863	0,443	0,6761
10. kohorta	0,924	0,317	0,8011
11. kohorta	0,951	0,896	0,7502
12. kohorta	0,876	-0,024	0,7233
Celkově	0,896	0,360	0,7448

Tabulka 2.19: Lineární regrese pro klasickou mezaninovou aukci - hot fáze

Pokud bychom si dopočítali 95% intervaly spolehlivosti, tak bychom dostali pro a interval (0,8733; 0,9746) a pro b interval (-0,0286; 0,6624). Tudíž bychom ve výsledku mohli intercept b považovat za nulový a rozdíl mezi naší výslednou funkcí a rovnovážnou nabídkovou funkcí je tedy pouze ve sklonu a .

Tímto jsme dokončili analýzu této fáze jakožto celku. V předchozích sekcích jsme si ukázali chování hráček zvláště jak na kladných, tak záporných hodnotách. Jelikož v této aukci mají hráčka kladné i záporné hodnoty, tak by bylo ještě přínosné se podívat, jak se zvláště chovaly, když měly právě kladnou či zápornou hodnotu.

2.8.1 Rozdělená klasická mezaninová aukce

Při rozdělení nabídek je rozdělení nabídek vzhledem k Nashově rovnováze následující:

Hodnoty	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ¹¹ [%]			Počet hodnot
	>	=	<	
Kladné	35,48	36,64	27,88	947
Záporné	44,92	34,84	20,24	2253

Tabulka 2.20: Klasická mezaninová aukce s rozdělením kladných a záporných hodnot - nabídky vzhledem k Nashově rovnováze

Vidíme, že na záporných hodnotách stále dochází nejvíce k *overbiddingu*, ale na kladných číslech můžeme vidět, že část hráček přešla z *overbiddingu* na *underbidding*.

¹¹Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

Dále se ještě povídáme na odchylky od Nashovy rovnováhy:

Hodnoty	Odchylka od Nashovy rovnováhy ¹²	
	μ	σ
Kladné	0,0630	2,8820
Záporné	1,6577	3,8631

Tabulka 2.21: Klasická mezaninová aukce s rozdělením kladných a záporných hodnot - průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy

U záporných hodnot jasně vidíme, že *overbidding* je pro tyto hodnoty jasně převládající. Zatímco u kladných hodnot jsme blízko nuly, což značí menší odchylku nabídek od Nashovy rovnováhy v porovnání se zápornými hodnotami.

Pokud bychom provedli pro oba případy lineární regresi, tak by dopadla takto:

Hodnoty	Lineární regrese		
	a	b	R ²
Kladné	0,9105	0,2954	0,3315
Záporné	0,9010	0,4025	0,5585

Tabulka 2.22: Klasická mezaninová aukce s rozdělením kladných a záporných hodnot - lineární regrese

Pro kladné a záporné hodnoty vyšly 95% intervaly spolehlivosti:

Hodnoty	95% intervaly spolehlivosti	
	a	b
Kladné	(0,8241; 0,9969)	(0,0081; 0,5827)
Záporné	(0,8679; 0,9341)	(0,1401; 0,6648)

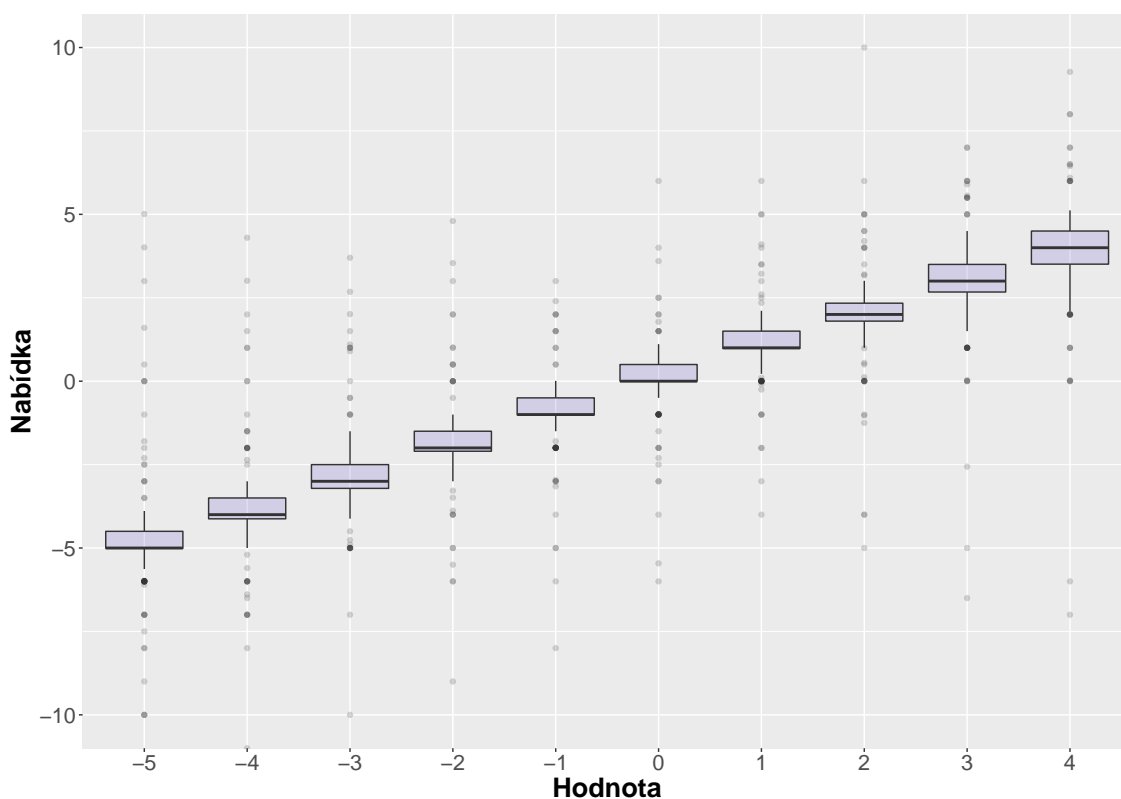
Tabulka 2.23: Klasická mezaninová aukce s rozdělením kladných a záporných hodnot - intervaly spolehlivosti

Podíváme-li se na výsledné hodnoty koeficientů z lineární regrese, tak obě nabídkové funkce jsou téměř totožné, tudíž to vypadá, že na okolí nuly je nabídková funkce spojitá. Nicméně je důležité brát v potaz, že koeficient korelace vyšel v obou případech nízký.

2.9 Klasická mezaninová aukce - cold fáze

Nyní se ještě podíváme na cold fázi naší klasické mezaninové aukce, jejíž boxplot vypadá následovně:

¹²I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$



Obrázek 2.6: Boxplot klasické mezaninové aukce - cold fáze

A nabídky s procentuálním zastoupením vzhledem k Nashově rovnováze:

Kohorta	Nabídky vzhledem k Nashově rovnováze ¹³		
	>	=	<
3. kohorta	32,50	46,25	21,25
4. kohorta	31,88	43,13	25,00
5. kohorta	31,88	41,25	26,88
6. kohorta	33,75	40,63	25,63
7. kohorta	34,38	42,50	23,13
8. kohorta	27,50	55,00	17,50
9. kohorta	30,63	45,00	24,38
10. kohorta	29,38	43,75	26,88
11. kohorta	30,00	42,50	27,50
12. kohorta	28,75	40,63	30,63
Celkově	31,06	44,06	24,88

Tabulka 2.24: Zastoupení typů nabídek v klasické mezaninové aukce - cold fáze

Překvapivě zde pozorujeme, že nejvíce hráček dalo *optimální bid*. Je tu významný nárůst v porovnání s hot fází, který by stál za bližší prozkoumání.

¹³Nabídky rozdílné o $\pm 0,1$ od Nashovy rovnováhy jsme brali jako rovnovážné nabídky, tj. $|b(x) - v| \leq 0,1$

Podíváme se ještě na tabulku průměrných odchylek od Nashovy rovnováhy:

Kohorta	Odchylka od Nashovy rovnováhy ¹⁴	
	μ	σ
3. kohorta	0,4867	2,7927
4. kohorta	0,3163	2,3389
5. kohorta	0,3028	2,0099
6. kohorta	0,2265	1,9528
7. kohorta	0,1222	1,7079
8. kohorta	0,2954	2,6697
9. kohorta	0,3101	2,1583
10. kohorta	0,0567	2,3758
11. kohorta	-0,0082	2,4681
12. kohorta	-0,0140	2,8268
Celkově	0,2050	2,401

Tabulka 2.25: Průměrná odchylka od Nashovy rovnováhy v klasické mezaninové aukci - cold fáze

Dle výsledků hot fáze jsme očekávali, že bude nadále převažovat *overbidding*. K našemu překvapení tomu ale tak není. Největší procento nabídek spadá do Nashovy rovnováhy, a navíc i odchylky od Nashovy rovnováhy v jednotlivých kohortách nejsou příliš daleko od nuly. Tušíme tedy, že trend je tentokrát nabízet spíše *optimální bid*, ale není to úplně jednoznačné. Proto staticky otestujeme, zdali se v jednotlivých kohortách jedná o *overbidding*. Nejprve zkontrolujeme normalitu dat za pomoci Shapiro-Wilkova testu. Budeme zkoumat na hladině $\alpha = 0,05$ pro náhodný vektorový výběr Z , který je definovaný jako rozdíl nabídek a hodnot, hypotézy:

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0$$

Pro všechny kohorty i celou aukci vychází p-hodnota menší než 10^{-16} , tudíž náš výběr nemá normální rozdělení. Proto musíme použít neparametrický test. Zvolíme Wilcoxonův test na hladině $\alpha = 0,05$ s hypotézami:

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs. } H_1 : \mu > 0,$$

kde μ je medián náhodného vektorového výběru Z . Z testu nám vyšly následující p-hodnoty:

¹⁴I zde jsme vynechávali nabídky, které se lišily od Nashovy rovnováhy o méně než $\pm 0,1$

Kohorta	p-hodnota
3. kohorta	0,0111
4. kohorta	10^{-4}
5. kohorta	10^{-6}
6. kohorta	0,3284
7. kohorta	0,9984
8. kohorta	0,1502
9. kohorta	0,0668
10. kohorta	0,2392
11. kohorta	0,9234
12. kohorta	0,1273
Celkově	10^{-4}

Tabulka 2.26: P-hodnoty Wilcoxonova testu klasické mezaninové aukce - cold fáze

Jak tedy názorně vidíme z tabulky, tak *overbidding* byl pouze v prvních třech kohortách a ve zbylých kohortách docházelo nejvíce k nabídnutí *optimálního bidu*. Což je při nejmenším zajímavý výsledek v tom, že to vypadá, že hráčky nabízejí blíže Nashově rovnováze, když se pohybují zároveň na záporných i kladných hodnotách než pouze na záporných. Porovnáme tedy ještě konzistenci v chování mezi hot a cold fází. Pro větší přehlednost si označíme náhodný vektorový výběr rozdílů nabídek a hodnot pro hot fázi jako $Z^{(H)}$ a pro cold fázi $Z^{(C)}$. Normalitu $Z^{(C)}$ jsme si již ověřili a pro $Z^{(H)}$ by vyšla stejně. Použijeme tedy neparametrická Mann-Whitney-Wilcoxon test na hladině $\alpha = 0,05$ s hypotézami:

$$H_0 : \mu_{Z^{(H)}} = \mu_{Z^{(C)}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{Z^{(H)}} \neq \mu_{Z^{(C)}}$$

Po provedení testu se nám podařilo potvrdit konzistenci v chování pouze u 4., 5., 6. a 12. kohorty. A pro celou aukci, kde vyšla p-hodnota 10^{-12} , se nám také nepodařilo prokázat konzistenci v chování.

Zbývá nám zjistit koeficienty a a b nabídkové funkce $s(x) = ax + b$, jež má lineární charakter z t-testu provedeným na koeficientu korelace. Potom tedy z lineární regrese získáme:

Kohorta	Lineární regrese		
	a	b	R^2
3. kohorta	0,997	0,384	0,7294
4. kohorta	1,022	0,302	0,8991
5. kohorta	0,876	0,555	0,7085
6. kohorta	0,948	-0,069	0,9654
7. kohorta	0,973	-0,429	0,6735
8. kohorta	0,990	0,035	0,7455
9. kohorta	1,063	0,478	0,6018
10. kohorta	0,942	0,057	0,7673
11. kohorta	1,003	-0,178	0,8038
12. kohorta	0,930	-0,111	0,5559
Celkově	0,974	0,103	0,7188

Tabulka 2.27: Lineární regrese pro klasickou mezaninovou aukci - cold fáze

Závěr

Naším cílem v této práci bylo seznámit čtenáře s úvodem do statických nekooperativních her. V první kapitole jsme popsali dominantní strategii a Nashovu rovnováhu, které jsme vysvětlili na jednoduchých příkladech. Na to jsme navázali Bayesovskými hrami, díky kterým jsme se dostali až k aukcím. Definovali jsme aukce prvních a druhých cen, jejich rovnovážné strategie a tyto strategie jsme si ukázali na příkladech s rovnoměrnou distribuční funkcí. Dále jsme vyslovili a dokázali teorém o ekvivalenci výnosů, po kterém jsme ještě dodefinovali pojmy averzní a neutrální vůči riskování.

V druhé kapitole jsme uvedli vědecké publikace a myšlenky, které nás vedly k uskutečnění experimentu. Na to jsme navázali popisem aukcí, které jsme se rozhodli použít v experimentu, a stanovili jsme si hlavní hypotézy. Čtenáře jsme dále seznámili s nastavením experimentu a přešli jsme do statistického zpracovávání dat. U aukce veřejných zakázek v *hot* fázi jsme replikovali výsledky J. C. Bernarda a dospěli jsme ke stejnému závěru, tedy k *underbiddingu*. V *cold* fázi jsme sice zaznamenali nárůst optimálních nabídek, ale i přes to byl trend stále spíše *underbidding*. A také jsme si potvrdili, že se hráčky v obou těchto fázích chovaly konzistentně. Tímto jsme potvrdili naši hlavní hypotézu 1.

U klasické negativní aukce v *hot* fázi jsme pozorovali *overbidding* a také významné snížení efektivity. I v tomto případě jsme dospěli ke stejným závěrům jako J. H. Kagel a D. Levin. v jejich experimentu. Překvapivé bylo, že ačkoli v *cold* fázi jsme také hlavně zaznamenali *overbidding*, tak se nepotvrdila konzistence v chování hráček. Potvrdili jsme tedy i hlavní hypotézu 2. Při porovnání *hot* a *cold* fází aukce veřejných zakázek a klasické negativní aukce jsme dospěli k závěru, že ačkoli jsou si tyto dvě aukce ekvivalentní, tak se hráčky v každé z nich chovaly odlišně. Proto jsme analyzovali za pomoci klasické mezaninové aukce okolí nuly. V této aukci nám opět vyšel *overbidding* v *hot* fázi, ale na rozdíl od klasické negativní aukce, jsme zde mohli pozorovat nárůst v efektivitě. V *cold* fázi jsme překvapivě zaznamenali největší podíl optimálních nabídek. Hlavní hypotéza 3 je pravděpodobně platí, ale bude ještě ověřena.

Tímto jsme završili globální analýzu dat. Na tomto experimentu budeme nadále pokračovat ve statistickém zpracovávání těchto dat na individuální úrovni, kde se budeme snažit rozřadit jednotlivé hráčky do skupin podle jejich chování. Závěrem naší práce by potom mělo být objasnění rozdílného chování hráček na kladných a záporných hodnotách.

Literatura

1. Bernard, J. C. Finding and retaining the dominant strategy. The second-price, English and ‘sealed offer’ English auctions. *Journal of Economic Behavior & Organization* **60**, 553–561. ISSN: 01672681. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167268105001307> (2020) (2006).
2. Bonanno, G. *Game Theory: Volume 1: Basic Concepts* ISBN: 9781983604638. <https://books.google.nl/books?id=bI-UswEACAAJ> (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015).
3. Bonanno, G. *Game Theory: Volume 2: Advanced Topics* ISBN: 978-1985862517. http://faculty.econ.ucdavis.edu/faculty/bonanno/PDF/GT_book.pdf (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015).
4. Cooper, D. J. & Fang, H. Understanding Overbidding in Second Price Auctions. An Experimental Study. *The Economic Journal* **118**, 1572–1595. ISSN: 0013-0133. <https://academic.oup.com/ej/article/118/532/1572-1595/5088810> (2020) (2008).
5. Coppinger, V. M., Smith, V. L. & Titus, J. A. Incentives and Behavior in English, Dutch and Sealed-Bid Auctions. *Economic Inquiry* **18**, 1–22. ISSN: 00952583. <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1465-7295.1980.tb00556.x> (2020) (1980).
6. Cox, J. C., Roberson, B. & Smith, V. L. in *Papers in Experimental Economics* 537–579 (Cambridge University Press, 1991).
7. Jackson, M. A Brief Introduction to the Basics of Game Theory. *SSRN Electronic Journal* (pros. 2011).
8. Kagel, J. H., Harstad, R. M. & Levin, D. Information Impact and Allocation Rules in Auctions with Affiliated Private Values. A Laboratory Study. *Econometrica* **55**, 1275–1304. ISSN: 00129682. <https://www.jstor.org/stable/1913557?origin=crossref> (2020) (1987).
9. Kagel, J. H. & Levin, D. Independent Private Value Auctions. Bidder Behaviour in First-, Second- and Third-Price Auctions with Varying Numbers of Bidders. *The Economic Journal* **103**, 868–879. ISSN: 00130133. <https://academic.oup.com/ej/article/103/419/868-879/5157332> (2020) (1993).

10. Kahneman, D. & Tversky, A. in *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making* 99–127 (World Scientific, 1979). ISBN: 978-981-4417-34-1. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814417358_0006 (2020).
11. Milgrom, P. R. & Weber, R. J. A Theory of Auctions and Competitive Bidding. *Econometrica* **50**, 1089–1122. ISSN: 00129682. <https://www.jstor.org/stable/1911865?origin=crossref> (2020) (1982).
12. Myerson, R. B. Optimal Auction Design. *Mathematics of Operations Research* **6**, 58–73. ISSN: 0364-765X. <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/moor.6.1.58> (2020) (1981).
13. Riley, J. G. & Samuelson, W. F. Optimal Auctions. *The American Economic Review* **71**, 381–392. ISSN: 00028282. <http://www.jstor.org/stable/1802786> (1981).
14. Vickrey, W. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance* **16**. ISSN: 00221082. <https://www.jstor.org/stable/2977633?origin=crossref> (2020) (1961).
15. Von Neumann, J. & Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior* [60th anniversary ed.] ISBN: 978-0-691-13061-3 (Princeton University Press, Princeton, 2007).