



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Vlastnosti distribuční rodiny GIG s negativní hodnotou parametru

Properties of distribution family GIG with negative value of parameter

Bakalářská práce

Autor: **Anežka Lhotáková**
Vedoucí práce: **Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Anežka Lhotáková
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Vlastnosti distribuční rodiny GIG s negativní hodnotou parametru
Název práce (anglicky):	Properties of distribution family GIG with negative value of parameter

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s distribuční rodinou GIG a analyzujte přípustné hodnoty jejich parametrů. Odvoďte podobu všech příslušných momentů a hustotu normalizujte a škálujte. Odvoďte vztah mezi parametry plynoucí z jednotkové hodnoty prvního momentu.
2. Odvoďte vlastní aproximativní formuli pro závislost škálovací konstanty na prvních dvou parametrech distribuční rodiny.
3. Sestavte vlastní generátor pseudonáhodných čísel z rodiny GIG a statistickými metodami ho porovnejte s existujícím generátorem RNDGIG.
4. Realizujte původní měření dopravních dat zacílené na studii časové evoluce THD (Time Headway Distribution).
5. Proveďte přehled odhadovacích metod vhodných pro rodinu GIG a vybrané metody aplikujte při analýze empirických dat.
6. Studujte časovou evoluci THD těchto dat.

Doporučená literatura:

1. B. Jorgensen, Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Lecture Notes in Statistics 9, New York: Springer-Verlag, 1982.
2. J. Vacková, Multi-headway statistika systémů s kombinovanými potenciály. Výzkumný úkol FJFI ČVUT, Praha, 2016.
3. M. Krbálek, M. Krbálková, 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling. Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice, 2018.
4. K. Zvára, Pravděpodobnost a matematická statistika. Matfyzpress, 2012.
5. M. Virius, Metoda Monte Carlo. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2010.
6. B. Efron, Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. The Annals of Statistics 7 (1), 1979, 1-26.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

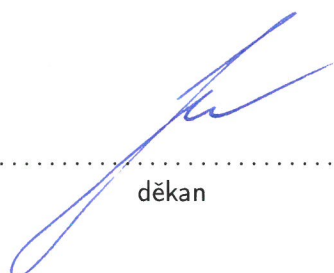
Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019


.....
garant oboru

.....
vedoucí katedry




.....
děkan

Poděkování:

Chtěla bych zde poděkovat svému školiteli doc. Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D. nejen za jeho odbornost, ochotu a smysl pro detail, ale hlavně za jeho nadšení a pozitivní přístup, díky kterému mi nikdy nechyběla motivace a radost z psaní této práce. Velký dík patří také mé rodině za neustálou podporu během celého studia.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a uvedla jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 21. července 2020

Anežka Lhotáková

Název práce:

Vlastnosti distribuční rodiny GIG s negativní hodnotou parametru

Autor: Anežka Lhotáková

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D., České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá škálováním Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení a jeho dalšími vlastnostmi pro negativní hodnotu parametru na třídě balancovaných hustot. Tyto nabyté znalosti jsou následně využity ke konstrukci generátoru pseudonáhodných čísel z uvedené distribuce. Část práce je věnována porovnání a testování vytvořeného generátoru společně s již existujícím generátorem z roku 2017, který ovšem taktéž nebyl testován. K porovnání jsou využity metody pro bodové odhady parametrů, konkrétně metoda momentů, metoda maximální věrohodnosti a metoda minimální vzdálenosti. Závěr práce demonstruje užitečnost Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení při zpracování dopravních dat.

Klíčová slova: balancovaná hustota, dopravní data, generátor pseudonáhodných čísel, Macdonaldova funkce, metoda maximální věrohodnosti (MLE), metoda minimální vzdálenosti (MDE), metoda momentů (ME), škálování, Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (GIG)

Title:

Properties of distribution family GIG with negative value of parameter

Author: Anežka Lhotáková

Abstract: In this thesis we assume Generalized inverse Gaussian distribution (GIG) is a balanced density and we discuss other properties of distribution family GIG with negative value of parameter. We examine the normalizing constant and the approximation of scaling constant. In compliance with discovered properties we construct pseudorandom number generator and statistically compare it with generator designed in 2017. For the statistical comparison we use method of moments, maximum likelihood estimation and minimum distance estimation. In the last part we show the usefulness of GIG distribution by conducting an analysis of the traffic data.

Key words: balanced density, Generalized inverse Gaussian distribution (GIG), Macdonalds function, maximum likelihood estimation, method of moments, minimum distance estimation, pseudorandom number generator, scaling, traffic data

Obsah

Úvod	11
1 Třída balancovaných hustot	13
1.1 Zavedení pojmů	13
1.2 Příklady balancovaných hustot	17
1.2.1 Gamma rozdělení	17
1.2.2 Erlangovo rozdělení	18
1.2.3 Exponenciální rozdělení	18
1.2.4 Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (GIG)	19
2 Škálování	23
2.1 Exponenciální rozdělení	23
2.2 Erlangovo rozdělení	23
2.3 Gamma rozdělení	24
2.4 GIG rozdělení	24
2.4.1 Normovací rovnice	24
2.4.2 Škálovací rovnice	25
2.4.3 Aproximace škálovací podmínky	25
3 Statistické porovnání generátorů pseudonáhodných čísel	37
3.1 Metody pro hledání bodových odhadů	38
3.1.1 Metoda momentů (ME)	38
3.1.2 Metoda maximální věrohodnosti (MLE)	40
3.1.3 Metoda minimální vzdálenosti (MDE)	42
3.2 Konstrukce NewRNDGIG	42
3.3 Představení OldRNDGIG	45
3.4 Statistické porovnání NewRNDGIG a OldRNDGIG	47
3.4.1 Aplikace metody momentů (ME)	47
3.4.2 Aplikace metody maximální věrohodnosti (MLE)	50
3.4.3 Aplikace metody minimální vzdálenosti (MDE)	53
3.4.4 Shrnutí	53
4 Zpracování dopravních dat	57
Závěr	63

Úvod

V této práci se seznámíme s vlastnostmi Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení (dále zkráceně GIG), které se v posledním desetiletí ukázalo jako přínosné zejména v dopravním modelování. Při modelování částicových systémů se zpravidla pracuje s balancovanými hustotami, najdeme proto takovou parametrizaci GIG rozdělení, aby splňovalo požadavky této třídy. Následně navážeme na výzkumný úkol Ing. Jany Vackové [2] a na této třídě vyšetříme normovací konstantu a pokusíme se aproximovat škálovací vztah pro zápornou hodnotu parametru α . Během výpočtu narazíme na jistá omezení a bude nutné se zabývat i otázkou samotné existence řešení škálovací rovnice.

Ve druhé části sestavíme generátor pseudonáhodných čísel, který bude generovat čísla z GIG distribuce a pomocí statistických metod tento generátor porovnáme s již existujícím, avšak taktéž netestovaným generátorem z roku 2017. K porovnání použijeme metody pro bodové odhady parametrů, konkrétně metodu momentů, metodu maximální věrohodnosti a metodu minimální vzdálenosti. V této části také získáme představu o tom, které metody jsou pro odhad parametrů GIG distribuce vhodné, a bude je tak možné v této práci využít i při analýze dopravních dat.

V poslední části zpracujeme data z rychlého dálničního pruhu holandské dálnice A9. Analýzou těchto dat ukážeme, že časové rozestupy dvou vozidel v rychlém pruhu lze popsat pomocí GIG hustoty se zápornou hodnotou parametru α .

Kapitola 1

Třída balancovaných hustot

Tato kapitola je věnována třídě balancovaných hustot, konkrétně jejímu zavedení a pokročilejším reprezentacím. Ačkoliv oproti obecné třídě hustot zúžíme náš okruh adeptů, přilepšíme si o několik významných vlastností, které nám následně pomohou při zkoumání Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení.

1.1 Zavedení pojmů

Definice 1.1 (Hustota a balancovaná hustota). Bud' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce splňující následující axiomy

- (1) $\text{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$
- (2) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- (3) $f(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$, čímž rozumíme, že funkce $f(x)$ má konečně mnoho bodů nespojitosti, je spojitá zleva všude v \mathbb{R} a všechny nespojitosti jsou tzv. skoky konečné délky, kdy

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \in \mathbb{R}.$$

- (4) $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, čímž rozumíme, že integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ existuje a je konečný.
- (5) $\text{supp}(f) \subset (0, +\infty)$, tj. $f(x) = \Theta(x)f(x)$, kde $\Theta(x)$ je Heavisideova funkce definovaná jako

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

- (6) balanční axiom: $\exists \varkappa \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\alpha > \varkappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{\alpha x} = +\infty,$$

$$\alpha < \varkappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{\alpha x} = 0.$$

Potom funkci $f(x)$ prohlásíme za *hustotu*, resp. za *balancovanou hustotu*, splňuje-li axiomy (1) – (4), resp. (1) – (6). Značíme $f(x) \in \mathcal{H}$, resp. $f(x) \in \mathcal{B}$.

POZNÁMKA 1.2. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, potom definujeme *nosič* funkce $f(x)$ jako množinu

$$\text{supp}(f) := \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \neq 0\}.$$

Jak je zřejmé z definice, balancované hustoty se od obecných hustot liší zavedením balančního axiomu a také tím, že vlevo od nuly jsou striktně nulové. Platí vztah $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Je pro nás výhodou, že můžeme nadále využívat věty známé pro \mathcal{H} a balanční axiom i kladný nosič nám umožní přidat nová, silnější tvrzení, která ovšem budou platit pouze pro \mathcal{B} .

K definici balancované hustoty se občas (zejména v dopravních aplikacích) přidává 7. axiom, který požaduje aby $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(0) = 0$, nebo-li že funkce $f(x)$ má v nule takzvané *plató*. Pro naše účely však postačí axiomy (1) – (6).

Pokud bychom chtěli definovat *hustotu pravděpodobnosti*, musí platit axiomy (1) – (5) a axiom (4) musí být specifikován na $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Tím je ošetřena nejen integrabilita na celém \mathbb{R} , ale také zaručena normovanost hustoty.

V šestém axiomu jsme pro každou $f(x) \in \mathcal{B}$ našli číslo κ takové, že splňuje balanční axiom. Toto $\kappa > 0$ budeme nadále nazývat *balančním indexem* funkce $f(x)$ a označíme $\text{inb}(f) = \kappa$. K hledání balančního indexu můžeme také využít *balančního kritéria*:

$$f(x) \in \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Limita vpravo pak představuje vzorec pro výpočet záporně vzatého balančního indexu. Vyslovme a dokažme si nyní dva body z věty o rozsáhlosti soustavy \mathcal{B} , neboť se na ně budeme dále v textu odkazovat.

Věta 1.3 (O rozsáhlosti soustavy \mathcal{B}). Necht' $f(x) \in \mathcal{B}, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- a) $x^\alpha f(x) \in \mathcal{B}$ a platí $\text{inb}(x^\alpha f) = \text{inb}(f)$.
- b) Pokud $\beta < \text{inb}(f)$, potom $f(x)e^{\beta x} \in \mathcal{B}$ a platí $\text{inb}(f e^{\beta x}) = \text{inb}(f) - \beta$.

Důkaz. Je třeba ověřit platnost 6 axiomů z definice 1.1 za předpokladu, že $f(x) \in \mathcal{B}$.

- a) $x^\alpha f(x), \alpha > 0$

Funkce $x^\alpha (\alpha > 0)$ je spojitá funkce definovaná na celém \mathbb{R} . Díky Heavisideově funkci uvnitř $f(x)$ i po přenásobení x^α zůstane $\text{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$ a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Vynásobíme-li po částech spojitou funkci funkcí spojitou, bude výsledek nadále po částech spojitou funkcí a tedy $x^\alpha f(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$.

Vyšetření integrability rozdělíme na případy $x \in (-\infty, x_0)$ a $x \in (x_0, +\infty)$.

- Funkce $x^\alpha f(x)$ je nulová na $(-\infty, 0)$ a na $\langle 0, x_0 \rangle$ je po částech spojitá. Označme body nespojitosti $\xi_1, \dots, \xi_k \in (0, x_0)$. Necht' platí $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k < x_0$. Integrál od 0 do x_0 lze z linearit rozdělit na součet $k+1$ integrálů. V těchto dílčích integrálech integrujeme spojitou funkci na kompaktním intervalu a získáme tak součet $k+1$ konečných integrálů. Odtud již plyne $x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}((-\infty, x_0))$.
- Jelikož $f(x) \in \mathcal{B}$, potom lze zvolit $\gamma \in \mathbb{R}$ takové, aby $0 < \gamma < \text{inb}(f)$. Z balančního axiomu známe hodnotu limity $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{\gamma x} = 0$. Odtud vyplývá, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}^+ : |f(x)e^{\gamma x}| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon e^{-\gamma x}. \quad (1.1)$$

Nyní už snadno najdeme integrabilní majorantu na $(x_0, +\infty)$ pro $x^\alpha f(x)$:

$$|x^\alpha f(x)| < |x^\alpha \varepsilon e^{-\gamma x}| \in \mathcal{L}((x_0, +\infty)).$$

Ukázali jsme, že $x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Nosič je díky $f(x) \in \mathcal{B}$ taktéž podmnožinou \mathbb{R}^+ . V posledním kroku zbývá ověřit 6. axiom.

Nejdříve zkusíme pomocí balančního kritéria najít $\text{inb}(x^\alpha f)$ a s touto znalostí poté překontrolujeme splnění balančního axiomu:

$$\text{inb}(x^\alpha f) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^\alpha f(x))}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \frac{\ln(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}}_{=\text{inb}(f)} = 0 + \text{inb}(f) = \text{inb}(f).$$

Odtud pro $\gamma \in \mathbb{R}$ plyne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) e^{\gamma x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \gamma < \text{inb}(f), \\ +\infty & \text{pro } \gamma > \text{inb}(f). \end{cases}$$

Tím jsme ověřili, že $x^\alpha f(x) \in \mathcal{B}$ pro $\alpha > 0$ a $\text{inb}(x^\alpha f) = \text{inb}(f)$.

b) $e^{\beta x} f(x)$ pro $\beta \in \mathbb{R} \wedge \beta < \text{inb}(f)$

Funkce $e^{\beta x}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) je spojitá a definovaná na celém \mathbb{R} , navíc je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kladná. Proto i součin $f(x)e^{\beta x}$ má nadále $\text{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$ a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Vynásobíme-li po částech spojitou funkci funkcí spojitou, bude nadále po částech spojitá a tedy $e^{\beta x} f(x) \in \mathcal{P}\mathcal{C}(\mathbb{R})$. K důkazu integrability nám stačí využít odhad (1.1) z bodu a) a volme γ tak, aby platilo $\beta < \gamma < \text{inb}(f)$. Potom

$$|e^{\beta x} f(x)| < |e^{\beta x} \varepsilon e^{-\gamma x}| < \varepsilon e^{(\beta-\gamma)x} \in \mathcal{L}(\langle 0, +\infty \rangle).$$

Na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce nulová, a tudíž také integrabilní. Proto $e^{\beta x} f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Nosič je díky $f(x) \in \mathcal{B}$ taktéž podmnožinou \mathbb{R}^+ . Nakonec překontrolujeme balanční axiom:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{(\beta+\gamma)x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta + \gamma < \text{inb}(f), \\ +\infty & \text{pro } \beta + \gamma > \text{inb}(f). \end{cases}$$

Vidíme, že $\text{inb}(e^{\beta x} f) = \text{inb}(f) - \beta$. Ukázali jsme tedy, že $x^\alpha f(x) \in \mathcal{B}$ pro $\beta \in \mathbb{R}$ a zároveň $\beta < \text{inb}(f)$.

□

Věta jest dokázána a může být v dalších úvahách použita. Máme-li funkci $f(x) \in \mathcal{H}$ a pro $n \in \mathbb{N}_0$ je výraz $x^n f(x)$ integrabilní na celém \mathbb{R} , potom číslo

$$\mu_n := \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx \tag{1.2}$$

nazveme *n-tým obecným momentem* a posloupnost $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ *momentovým kódem* hustoty $f(x)$, který značíme symbolem $\vec{\mu}$. Z prvního bodu věty 1.3 víme, že pokud $f(x) \in \mathcal{B}$, potom $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $x^n f(x) \in \mathcal{B}$, čímž je zaručena integrabilita na celém \mathbb{R} pro všechna n . Z toho plyne, že každá balancovaná hustota má všechny momenty. Užitečnost tohoto tvrzení můžeme demonstrovat na teorii Laplaceovských transformací.

Laplaceovu transformaci na \mathcal{B} zavádíme předpisem

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-sx} dx, \tag{1.3}$$

kde $f(x) \in \mathcal{B}$. Chtěli bychom vyšetřit $\text{Dom}(F(s))$, proto budeme hledat $s \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x)e^{-sx}$ integrabilní. Odkážeme se opět na větu 1.3, konkrétně na druhý bod, ze kterého plyne, že pro

$\beta < \text{inb}(f)$ je $f(x)e^{\beta x} \in \mathcal{B}$, a tudíž musí být $f(x)e^{\beta x} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Převedeme-li to na náš případ, pak pro $-s < \text{inb}(f)$ musí být $f(x)e^{-sx} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Pak zjevně

$$\text{Dom}(F(s)) = (-\text{inb}(f), +\infty).$$

Zjistili jsme, že pro $f(x) \in \mathcal{B}$, $\text{inb}(f) > 0$ existuje okolí, které celé leží v definičním oboru $F(s)$:

$$U_{\text{inb}(f)}(0) \subset \text{Dom}(F).$$

Uveďme zde další vlastnosti, které přísluší obrazu balancované hustoty:

- $F(s) \in \mathcal{C}^\infty(\text{Dom}(F))$.
- $F(s)$ je nezáporná na $\text{Dom}(F)$.
- $F(s)$ je klesající na $\text{Dom}(F)$, což plyne z faktu, že $\forall s \in \text{Dom}(F) : F'(s) < 0$.
- $F(0) = \mu_0$.
- $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.
- $F(s)$ je omezená na $\langle 0, +\infty \rangle$.

V definičním oboru $F(s)$ leží okolí nuly o poloměru rovném $\text{inb}(f)$. $F(s)$ je třídy $\mathcal{C}^\infty(\text{Dom}(F))$ a v nule jí odpovídá nulý moment. Prohlédněme si ostatní její derivace v nule:

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) e^{-sx} dx,$$

odkud dostáváme, že

$$F^{(k)}(0) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = (-1)^k \mu_k.$$

Využijme nyní teorii Maclaurinových rozvoju a sestavme řadu pro $F(s)$:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_k}{k!} s^k. \quad (1.4)$$

Lze ověřit, že $F(s)$ je v nule analytická a pro poloměr konvergence R platí $R \geq \text{inb}(f)$. Díky vlastnostem balancovaných hustot jsme tedy schopni sestavit Maclaurinův rozvoj Laplaceova obrazu $F(s)$ a stačí nám k tomu znát momentový kód vzoru $f(x)$. Funkce $f(x)$ je navíc svým momentovým kódem určena jednoznačně.

Pomocí nulových a prvních momentů jsou zavedeny podtřídy \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_{11} . Necht' $f(x) \in \mathcal{B}$ a μ_0, μ_1 jsou momenty $f(x)$. Potom definujeme

- $f(x) \in \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow \mu_0 = 1$. O $f(x) \in \mathcal{B}_1$ prohlásíme, že je normovaná,
- $f(x) \in \mathcal{B}_{11} \Leftrightarrow \mu_0 = \mu_1 = 1$. O $f(x) \in \mathcal{B}_{11}$ prohlásíme, že je normovaná a škálovaná.

Přejdeme-li do řeči statistiky, lze z momentů vypočítat *střední hodnotu* a *rozptyl* náhodné veličiny \mathcal{X} při rozdělení $f(x)$ pomocí známých vztahů:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{X}) &= \mu_1, \\ \text{VAR}(\mathcal{X}) &= \mu_2 - \mu_1^2. \end{aligned}$$

Příbuznými pojmy ke střední hodnotě jsou *medián* \bar{x} a *modus* $\text{Mod}(X)$. Medián \bar{x} náhodné veličiny X popsané hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ definujeme jako

$$\bar{x} := \inf \left\{ c \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^c f(x) dx = \frac{1}{2} \right\}.$$

Modusem rozumíme $\text{Mod}(X) = \text{argmax} f(x)$. Řekneme, že $f(x)$ je *unimodální hustotou*, pokud existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)$ je pro $x < c$ neklesající a pro $x > c$ nerostoucí. Pro unimodální hustotu je $\text{Mod}(x)$ právě bod c .

Zadefinujme ještě pomezí a rozpětí. Necht' $f(x) \in \mathcal{B}$. Potom *pravým*, resp. *levým pomezím* funkce $f(x)$ rozumíme $\text{amb}_R := \sup \{\text{supp}(f(x))\}$, resp. $\text{amb}_L := \inf \{\text{supp}(f(x))\}$. Rozdíl $\text{amb}_R - \text{amb}_L$ nazýváme *rozpětím* a značíme $\text{marg}(f)$. Označení pochází z anglického *ambit* a *margin*. Je-li pro $f(x) \in \mathcal{H}$ levé pomezí různé od nuly, jedná se o tzv. *posunutou hustotu*.

1.2 Příklady balancovaných hustot

Víme, že $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Pojd' me se podívat, jestli do \mathcal{B} budou spadat i učebnicová rozdělení, jako jsou Gamma, Erlangovo a Exponenciální, případně jak to ovlivní volbu jejich parametrů. Hustoty budeme uvádět v alternativní fyzikálně motivované parametrizaci, která vzešla z dopravního (fyzikálního) modelu. Názorně provedeme určování parametrů u Gamma rozdělení. U Erlangova a Exponenciálního by byl postup obdobný, neboť jak si ukážeme, jedná se o speciální případy Gamma rozdělení. A protože předmětem této práce je zejména GIG rozdělení, tak jeho vlastnosti a parametry budeme rozebírat velmi podrobně.

1.2.1 Gamma rozdělení

V souladu s touto prací zavedeme Gamma rozdělení předpisem

$$g_{\Gamma}(x) = A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\lambda x}, \quad (1.5)$$

kde α je tzv. tenze a λ tzv. koncentrace. Volbu parametrů $\alpha, \lambda, A \in \mathbb{R}$ nyní chceme provést tak, aby $g_{\Gamma}(x) \in \mathcal{B}$, tzn. aby byly splněny axiomy z definice 1.1.

Díky Heavisideově funkci nám bez velkých obtíží platí axiomy (1), (2), (5), budeme-li uvažovat $A \geq 0$, abychom zaručili nezápornost oboru hodnot. Funkce $g_{\Gamma}(x)$ je nezáporná a na \mathbb{R}^+ nenulová.

Důsledněji vyšetříme po částech spojitost z axiomu (3) v $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} L^- &= \lim_{x \rightarrow 0_-} A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\lambda x} = |\Theta(x) = 0| = 0, \\ L^+ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\lambda x} = A \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\alpha}e^{-\lambda x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ A & \text{pro } \alpha = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{pro } \alpha < 0, \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ L^+ - L^- &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ A & \text{pro } \alpha = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{pro } \alpha < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Po částech spojitost nám dovoluje pouze konečný počet skoků konečné délky. Proto

$$g_{\Gamma}(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \text{ pro } \alpha \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, A \geq 0.$$

Axiom (5) také nebude obtížné ověřit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} dx = A \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = |\lambda dx = t| = \frac{A}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}, \quad \lambda > 0, \alpha \geq 0.$$

Tedy pro $\lambda > 0, \alpha \geq 0$ je $g_\Gamma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Odsud vidíme (díky splnění (1) – (4)), že $g_\Gamma(x) \in \mathcal{H}$ pro $A \geq 0, \lambda > 0, \alpha \geq 0$. Finální formu parametrů pro příslušnost do \mathcal{B} ovlivní balanční axiom (6). Hledáme $\varkappa > 0$ takové, aby pro $\omega \in \mathbb{R}$ platilo

$$\begin{aligned} \omega > \varkappa &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{\omega x} = +\infty, \\ \omega < \varkappa &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{\omega x} = 0. \end{aligned}$$

Přímým výpočtem získáme (pro $A \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{\omega x} = A \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{(\omega-\lambda)x} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \omega > \lambda, \\ 0 & \text{pro } \omega < \lambda. \end{cases}$$

Tím jsme našli takové $\varkappa = \lambda$, pro které axiom platí a z definice pak dostáváme $\text{inb}(g_\Gamma) = \lambda$. Závěrem můžeme souhrnně psát:

$$\begin{aligned} g_\Gamma(x) &\in \mathcal{H} \text{ pro volbu parametrů } A \geq 0, \lambda > 0, \alpha \geq 0, \\ g_\Gamma(x) &\in \mathcal{B} \text{ pro volbu parametrů } A > 0, \lambda > 0, \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

1.2.2 Erlangovo rozdělení

Erlangovo rozdělení je speciálním případem rozdělení Gamma, kdy za α volíme $n \in \mathbb{N}_0$. Jeho obecný předpis je

$$g_E(x) = A\Theta(x)x^n e^{-\lambda x}, \quad (1.6)$$

kde n je řád Erlangova rozdělení a λ koncentrace. Vyšetřování parametrů by proběhlo stejným postupem jako v 1.2.1 a došli bychom k závěru, že

$$\begin{aligned} g_E(x) &\in \mathcal{H} \text{ pro volbu parametrů } A \geq 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0, \\ g_E(x) &\in \mathcal{B} \text{ pro volbu parametrů } A > 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

1.2.3 Exponenciální rozdělení

Provedeme-li pro Gamma rozdělení volbu $\alpha = 0$, získáme tím Exponenciální rozdělení

$$g_{exp}(x) = A\Theta(x)e^{-\lambda x}, \quad (1.7)$$

kde λ je tzv. koncentrace. Z předchozích úvah není těžké domyslet, že volba parametrů bude opět rozdílná pouze u parametru A .

$$\begin{aligned} g_{exp}(x) &\in \mathcal{H} \text{ pro volbu parametrů } A \geq 0, \lambda > 0, \\ g_{exp}(x) &\in \mathcal{B} \text{ pro volbu parametrů } A > 0, \lambda > 0. \end{aligned}$$

1.2.4 Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (GIG)

Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení, které nadále budeme označovat zkráceně GIG (z anglického *Generalized Inverse Gaussian Distribution*), není sice typickým učebnicovým příkladem hustoty, ale právě jeho vlastnosti budeme v této práci zkoumat velmi důkladně. Rozumíme jím funkci

$$g_{GIG}(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}, \quad (1.8)$$

kde α je tenze, β intenzita a λ koncentrace. Parametry $\alpha, \beta, \lambda, A \in \mathbb{R}$ si opět určíme tak, aby $g_{GIG} \in \mathcal{H}$, resp. $g_{GIG} \in \mathcal{B}$.

Je-li $\beta \neq 0$, potom se jedná o ryzí GIG-hustotu. Vylučujeme v této chvíli možnost $\beta = 0$, jelikož touto volbou přejdeme ke Gamma rozdělení.

Pro určování parametrů je následující číslování sladěno s číslováním v definici 1.1 tak, že bod (1) odpovídá prvnímu axiomu, (2) druhému atd.

(1)+(2) Stejně jako tomu bylo u Gamma rozdělení, Heavisideova funkce $\Theta(x)$ a nezápornost výrazu $x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}$ na \mathbb{R}^+ i v případě GIG zajišťuje $\text{Ran}(g_{GIG}) \subset \mathbb{R}_0^+$ a $\text{Dom}(g_{GIG}) = \mathbb{R}$. To je splněno pro $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$.

(3) Vyšetřování částečné spojitosti rozdělíme na dva případy: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\alpha = 0$. V obou máme podezření, že by mohl nastat problém v bodě $x_0 = 0$:

$\alpha > 0$:

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 0_-} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} = |\Theta(x) = 0| = 0.$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 0_+} A \underbrace{\Theta(x)}_{\rightarrow 1} \underbrace{x^\alpha}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\rightarrow 1} e^{-\frac{\beta}{x}} = \left| e^{-\frac{\beta}{x}} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ pro } \beta = 0 \\ 0 \text{ pro } \beta > 0 \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0 \end{cases} \right| = \begin{cases} 0 \text{ pro } \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0, \lambda \geq 0. \end{cases}$$

$$L^+ - L^- = \begin{cases} 0 \text{ pro } \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0, \lambda \geq 0, \end{cases}$$

tedy pro $\alpha > 0, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ je GIG spojitá funkce.

$\alpha = 0$:

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 0_-} A\Theta(x)e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} = |\Theta(x) = 0| = 0.$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 0_+} A \underbrace{\Theta(x)}_{\rightarrow 1} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\rightarrow 1} e^{-\frac{\beta}{x}} = \left| e^{-\frac{\beta}{x}} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ pro } \beta = 0 \\ 0 \text{ pro } \beta > 0 \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0 \end{cases} \right| = \begin{cases} A \text{ pro } \beta = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ 0 \text{ pro } \beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$L^+ - L^- = \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ pro } \beta = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ 0 \text{ pro } \beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ +\infty \text{ pro } \beta < 0, \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

aneb pro $\alpha = 0, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ je po částech spojitou funkcí.

$\alpha < 0$:

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} = |\Theta(x) = 0| = 0.$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} A\Theta(x) \underbrace{x^\alpha}_{\rightarrow \infty} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\rightarrow 1} e^{-\frac{\beta}{x}} = \begin{cases} \stackrel{|t=\frac{1}{x}|}{=} A \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\Theta(t^{-1})}_{\rightarrow 0} \underbrace{t^{-\alpha} e^{-\beta t}}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{-\frac{\beta}{t}}}_{\rightarrow 1} = 0 \text{ pro } \beta > 0, \lambda \geq 0, \\ +\infty \text{ pro } \beta \leq 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$L^+ - L^- = \begin{cases} 0 \text{ pro } \beta > 0, \lambda \geq 0, \\ +\infty \text{ pro } \beta \leq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tudíž pro $\alpha < 0, \beta > 0, \lambda \geq 0$ je GIG spojitá funkce.

Příslušnost do třídy $\mathcal{P}\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vyžaduje konečně mnoho skoků konečné délky. Z toho vyplývá, že zamítáme všechny případy, kde nám skok $L^+ - L^-$ vyšel nekonečný. Přípustné hodnoty parametrů zůstaly $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda \geq 0, A \geq 0$, tedy pokud se omezujeme pouze na ryzí GIG.

(4) Integrabilitu budeme zkoumat pro ryzí GIG s parametry $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}, A \geq 0$. Vidíme, že

$$\int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = A \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} dx.$$

Využijeme toho, že pro $\beta > 0$ je funkce $f(x) \stackrel{\text{ozn.}}{=} x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}$ spojitá na $(0, +\infty)$, a budeme zkoumat limitu $x \rightarrow 0^+$ a $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} = |\text{viz (3)}| = \begin{cases} 0 \text{ pro } \alpha \neq 0, \\ 1 \text{ pro } \alpha = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} \underbrace{e^{-\frac{\beta}{x}}}_{\rightarrow 1} = \begin{cases} \text{pro } \alpha > 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \lambda > 0, \\ +\infty & \text{pro } \lambda \leq 0, \end{cases} \\ \text{pro } \alpha < 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}} e^{-\lambda x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \lambda \geq 0, \\ +\infty & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases} \\ \text{pro } \alpha = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \lambda > 0, \\ +\infty & \text{pro } \lambda < 0, \\ 1 & \text{pro } \lambda = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Zjevně, pokud půjde funkce v nekonečno do nekonečna nebo do jedničky, nebudeme schopni získat konečný integrál. Proto pro další účely uvažujme pouze $\lambda > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ stále zůstává libovolným parametrem. Nyní, když víme, že funkce začíná v nule (případně v 1), a do nuly se vytrácí, můžeme se pokusit najít integrabilní majorantu. Vyšetřování rozdělíme na případy, kdy $\alpha = 0, \alpha > 0$ a $\alpha < 0$.

$\alpha < 0$: Pokusíme se o následující odhad:

$$|f(x)| = \underbrace{|x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}|}_{\text{ozn. } h_1(x)} e^{-\lambda x} \leq |e^{-\lambda x} h_1(x_{\max})| \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}((0, +\infty))$$

Zkusme nalézt globální maximum funkce $h_1(x) = x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}$ na $(0, +\infty)$. Derivací funkce $h_1(x)$ získáváme rovnost

$$h_1'(x) = (x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}})' = \alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}} + \beta x^{\alpha-2} e^{-\frac{\beta}{x}} \stackrel{!}{=} 0,$$

kterou řeší hodnota

$$x_{max} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Protože čítec ve zlomku je kladný a jmenovatel záporný, bude bod $x_{max} = -\frac{\beta}{\alpha}$ náležet do $(0, +\infty)$. Typ extrému můžeme ověřit z druhé derivace:

$$\begin{aligned} h_1''(x) &= (\alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}} + \beta x^{\alpha-2} e^{-\frac{\beta}{x}})' \\ &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} e^{-\frac{\beta}{x}} + \alpha\beta x^{\alpha-3} e^{-\frac{\beta}{x}} + (\alpha-2)\beta x^{\alpha-3} e^{-\frac{\beta}{x}} + \beta^2 x^{\alpha-4} e^{-\frac{\beta}{x}} < 0. \end{aligned}$$

Dosadíme x_{max} a vyšetříme znaménko druhé derivace

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)x_{max}^2 + (2\alpha\beta-2\beta)x_{max} + \beta^2 &< 0 \\ \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha} - 2\beta^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha} + \beta^2 &< 0 \\ \frac{\beta^2}{\alpha} < 0 &\Leftrightarrow \beta^2 > 0 \text{ a } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Protože je druhá derivace v bodě x_{max} záporná, tj. $h_1''(x_{max}) < 0$, je bod $x_{max} = -\frac{\beta}{\alpha}$ maximem pro $\alpha < 0, \beta > 0$. Lze provést odhad:

$$|f(x)| = |x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}| \leq \left| \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha e^\alpha e^{-\lambda x} \right| \leq K e^{-\lambda x} \in \mathcal{L}((0, +\infty)),$$

kde K je konstanta. Tím jsme ukázali, že $g_{GIG} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ pro parametry $\alpha < 0, \beta > 0, \lambda > 0$.

$\alpha = 0$: Tento případ bude velmi jednoduchý. Víme, že $\forall x \in (0, +\infty)$ je $e^{-\frac{\beta}{x}} \leq 1$. Tudíž

$$|e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}| \leq |e^{-\lambda x}| \in \mathcal{L}((0, +\infty)),$$

tedy i pro $\alpha = 0$ je $g_{GIG} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

$\alpha > 0$: Znovu zužitkujeme fakt, že $\forall x \in (0, +\infty)$ je $e^{-\frac{\beta}{x}} \leq 1$, a odhad povedeme ve stejném duchu.

$$|x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}| \leq |x^\alpha e^{-\lambda x}| \in \mathcal{L}((0, +\infty)).$$

Našli jsme zde integrabilní majorantu i pro $\alpha > 0$.

Shrňme si, čeho jsme v bodě (4) dosáhli. Dokázali jsme najít dvě možné kombinace parametrů, pro které je GIG integrabilní funkcí. Jedna možnost byla převést GIG na Gamma rozdělení s výsledkem volby $\beta = 0, \alpha \geq 0, \lambda > 0, A \geq 0$ a druhá projít kompletní postup vyšetření integrace pro ryzí GIG, která je zaručena dokonce pro $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0, A \geq 0$.

Nadále tedy uvažujeme rozmanitější volbu parametrů $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0, A \geq 0$ pro ryzí GIG rozdělení a v tomto okamžiku můžeme prohlásit, že právě pro tyto parametry splňuje $g_{GIG}(x)$ axiomy (1) – (4) a můžeme ho nazvat hustotou.

(5) Platí triviálně ze zavedení GIG.

(6) Poslední axiom odhalí, pro které parametry je GIG balanční hustotou, tzn. $g_{GIG}(x) \in \mathcal{B}$. Vyzkoušejme opět přímý výpočet a uvažujme $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0, A > 0$:

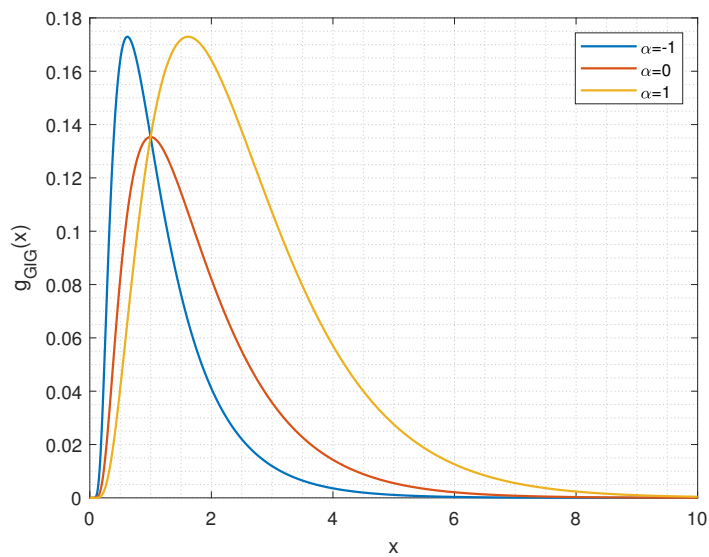
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} e^{\omega x} = A \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{(\omega-\lambda)x} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \omega > \lambda, \\ 0 & \text{pro } \omega < \lambda. \end{cases}$$

Právě jsme tedy našli $\text{inb}(g_{GIG}) = \lambda$ a dokázali jsme, že

$$g_{GIG}(x) \in \mathcal{H} \text{ pro volbu parametrů } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0, A \geq 0,$$

$$g_{GIG}(x) \in \mathcal{B} \text{ pro volbu parametrů } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0, A > 0.$$

Odted' už víme, pro jaké parametry je GIG balancovanou hustotou, proto v následujícím textu uvažujme jen a pouze tuto ryzí volbu, nebude-li řečeno jinak.



Obrázek 1.1: Ukázka GIG rozdělení pro parametry $A = \beta = \lambda = 1$ a $\alpha = -1, 0, 1$.

Kapitola 2

Škálování

V předchozím textu jsme zavedli třídy \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_{11} . V této kapitole budeme vyšetřovat tvar normovacích a škálovacích konstant pro $g_\Gamma(x)$, $g_E(x)$ a $g_{exp}(x)$. Ke škálování GIG rozdělení přistoupíme aproximativně.

Budeme řešit rovnice pro balancovanou hustotu $f(x) \in \mathcal{B}$ takové, aby $f(x) \in \mathcal{B}_{11}$. Tvary těchto rovnic jsou následující:

$$\begin{aligned} \text{normovací rovnice: } \mu_0(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \stackrel{f(x) \in \mathcal{B}}{=} \int_0^{+\infty} f(x) dx \stackrel{!}{=} 1, \\ \text{škálovací rovnice: } \mu_1(f) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \stackrel{f(x) \in \mathcal{B}}{=} \int_0^{+\infty} x f(x) dx \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Každá z rovnic eliminuje jeden parametr na normovací, resp. škálovací konstantu.

2.1 Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení (1.7) je z třídy \mathcal{B} pro parametry $A > 0, \lambda > 0$. Normovací rovnice je tvaru

$$\mu_0(g_{exp}) = A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = A \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1,$$

z něhož plyne, že normovací konstanta musí mít hodnotu $A(\lambda) = \lambda$.

Škálovací rovnice má tvar

$$\mu_1(g_{exp}) = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \stackrel{P.P.}{=} \lambda \left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1, \text{ odtud dosáváme } \lambda = 1.$$

Tvar škálovaného a normovaného Exponenciálního rozdělení je tudíž $g_{exp}(x) = \Theta(x)e^{-x}$.

2.2 Erlangovo rozdělení

Erlangovo rozdělení (1.6) je z třídy \mathcal{B} pro parametry $A > 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0$. Normovací rovnice má tvar

$$\mu_0(g_E) = A \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} dx = \left. \begin{matrix} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{matrix} \right| = \frac{A}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y} = \frac{A \Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} \stackrel{!}{=} 1.$$

Z něj plyne, že $A(\lambda, n) = \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}$. Škálovací rovnice

$$\mu_1(g_E) = \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{array} \right| = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{n+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda \Gamma(n+1)} \stackrel{*}{=} \frac{n+1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1$$

pak vede k hodnotě $\lambda(n) = n + 1$. Tvar škálovaného a normovaného Erlangova rozdělení je

$$g_E(x) = \Theta(x) \frac{(n+1)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-(n+1)x}. \text{ Symbol } \star \text{ ve výpočtu značí využití vztahu } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2.3 Gamma rozdělení

Gamma rozdělení (1.5) je z třídy \mathcal{B} pro parametry $A > 0, \lambda > 0, \alpha \geq 0$. Normovací rovnice

$$\mu_0(g_\Gamma) = A \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{array} \right| = \frac{A}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha e^{-y} dy = \frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} \stackrel{!}{=} 1$$

dává $A(\lambda, \alpha) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$ a škálovací rovnice

$$\mu_1(g_\Gamma) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{array} \right| = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda \Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha+1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1$$

vede na $\lambda(\alpha) = \alpha + 1$.

Tvar škálovaného a normovaného Gamma rozdělení je $g_\Gamma(x) = \Theta(x) \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha+1)x}$.

2.4 GIG rozdělení

Ryzí GIG rozdělení (1.8) je z třídy \mathcal{B} pro parametry $A > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \beta > 0$. Než začneme s normováním a škálováním, představme zde Macdonaldovu funkci (modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu) a její vlastnosti. Jde o funkci, která řeší modifikované Besselovy obyčejné diferenciální rovnice známé z [1] jako

$$x^2 \mathcal{H}_\alpha''(x) + x \mathcal{H}_\alpha'(x) - (x^2 + \alpha^2) \mathcal{H}_\alpha(x) = 0 \quad (2.1)$$

a má následující integrální tvar:

$$\mathcal{H}_\alpha(x) = \frac{2^{\alpha-1}}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy. \quad (2.2)$$

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí vztahy:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha-1}(x) - \mathcal{H}_{\alpha+1}(x) &= -\frac{2\alpha}{x} \mathcal{H}_\alpha(x), \\ \mathcal{H}_\alpha(x) &= \mathcal{H}_{-\alpha}(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.4.1 Normovací rovnice

$$\begin{aligned} \mu_0(g_{GIG}) &= A \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{array} \right| = \frac{A}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+1-1} e^{-y} e^{-\frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^2}{4y}} dy = \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{A}{\lambda^{\alpha+1}} \frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^{\alpha+1}}{2^\alpha} \mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) = 2A \left(\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}\right)^{\alpha+1} \mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Z ní vyplývá, že

$$A(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}.$$

2.4.2 Škálovací rovnice

$$\begin{aligned} \mu_1(g_{GIG}) &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda dx = dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+2-1} e^{-y} e^{-\frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^2}{4y}} dy = \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \frac{1}{\lambda^{\alpha+2}} \frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}} \mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) = \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Z tohoto výpočtu se nám nepodaří explicitně vyjádřit $\lambda(\alpha, \beta)$. Pokusíme se tuto závislost najít pomocí aproximativních metod.

POZNÁMKA 2.1. Uvažujeme-li ryzí normovaný GIG, potom je k -tý obecný moment tvaru

$$\mu_k(g_{GIG}) = \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+1+k}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}. \quad (2.5)$$

2.4.3 Aproximace škálovací podmínky

Škálováním GIG hustoty pro α nezáporné se zabývala ve svém výzkumném úkolu [2] Ing. Vacková. My chceme dopočítat škálovací podmínku pro záporné α . Klademe důraz na druhý vztah zmíněný v (2.3), dle kterého je $\mathcal{K}_\alpha(x) = \mathcal{K}_{-\alpha}(x)$. Díky této rovnosti se můžeme inspirovat postupem v [2] a provést obdobné výpočty.

Existence řešení škálovací rovnice

Než se začneme zabývat aproximací škálovací podmínky, prozkoumejme nejdříve, pro jaká α lze škálovací rovnici řešit. Díky výsledkům uvedeným v [2] víme, že škálovací rovnici lze řešit pro každou dvojici parametrů $\alpha \geq 0, \beta > 0$. Ovšem pro $\alpha < 0$ tomu tak vždy být nemusí. Demonstrujme si tento problém na druhém obecném momentu μ_2 .

Předpokládejme normovanou a škálovanou GIG hustotu, tzn. $\mu_0 = \mu_1 = 1$. Máme platnou škálovací podmínku (2.4)

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = 1,$$

odkud získáme rovnost

$$\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) = \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}). \quad (2.6)$$

Druhý moment je roven

$$\begin{aligned} \mu_2 &\stackrel{(2.5)}{=} \frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{2(\alpha+2)}{2\sqrt{\beta\lambda}} \mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{\beta}{\lambda} + \frac{(\alpha+2)\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

S ohledem na definici druhého momentu (1.2) musí platit, že

$$\mu_2 = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx > 0,$$

odkud pro nalezený výsledek plyne

$$\frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} > 0.$$

Právě jsme narazili na omezení, které muselo vzejít ze škálovací podmínky, a to aby $\alpha + \beta + 2 > 0$. Zkontrolujme proto, pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existuje řešení škálovací rovnice

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}} \stackrel{!}{=} 1.$$

Uvažujme fixní α a zaved' me funkci $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\Phi(\beta, \lambda) = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}} - 1. \quad (2.8)$$

Využijeme nyní teorii implicitních funkcí. Myšlenkou následujícího postupu je ukázat, že najdeme-li vhodnou množinu \mathbb{M} všech možných voleb β , pro které funkce $\Phi(\beta, \lambda)$ splňuje, že

$$\Phi(\beta, \lambda) = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{M}, \quad (2.9)$$

potom $\Phi(\beta, \lambda)$ generuje jednoznačně implicitní funkci $\lambda(\beta)$, tzn. existuje řešení škálovací rovnice. Vyšetřme nyní průběh funkce $\Phi(\beta, \lambda)$. Dívejme se na ni jako na funkci jedné proměnné $\Phi(\lambda)$ s parametrem $\beta > 0$ a pro zjednodušení označme $z = 2\sqrt{\beta\lambda}$. Tedy zkoumejme funkci

$$\Phi(z) = \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(z)} - 1.$$

Pro definiční obor a obor hodnot platí $\text{Dom}(\Phi) = (0, +\infty)$, $\text{Ran}(\Phi) \subset (-1, +\infty)$. Nás bude zajímat maximum/supremum funkce $\Phi(z)$, protože se chceme ujistit, zda funkce $\Phi(z)$ vůbec nabývá nulové hodnoty. Škálovací rovnice má totiž po reformátování tvar $\Phi(z) = 0$. Jako první zkusme najít stacionární body pomocí první derivace

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{-2\beta \mathcal{K}_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}_{\alpha+2}(z) + 2z\beta \left(\mathcal{K}_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}'_{\alpha+2}(z) - \mathcal{K}'_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}_{\alpha+2}(z) \right)}{z^2 \mathcal{K}_{\alpha+1}^2(z)} \stackrel{!}{=} 0.$$

Řešení rovnice

$$\mathcal{K}_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}_{\alpha+2}(z) = z \left(\mathcal{K}_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}'_{\alpha+2}(z) - \mathcal{K}'_{\alpha+1}(z) \mathcal{K}_{\alpha+2}(z) \right)$$

by ovšem bylo zdlouhavé a nemuselo by vůbec existovat. Pokračujme proto dalším bodem a k tomuto stacionárnímu bodu se vrátíme krátkým komentářem v dalším textu. Dalším bodem podezřelým z extrému je hraniční bod definičního oboru $\text{Dom}(\Phi)$, kterým je $z = 0$. Vyšetřme limitní hodnotu funkce

$\Phi(z)$ pro $z \rightarrow 0^+$ a respektujeme vztah (2.3), kvůli kterému se nám situace pro $\alpha < -2$ změní. Jedná se tedy o limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1.$$

Využijeme odvozený vztah pro aproximace Macdonaldovy funkce pro malé x z [2]

$$x^\alpha \mathcal{H}_\alpha(x) \approx 2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) (2\alpha-1)^{\frac{1}{2}-\alpha} (2x+2\alpha-1)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-x} = \frac{1}{2} 2^\alpha \Gamma(\alpha) \left[1 + \frac{2x}{2\alpha-1}\right]^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (2.10)$$

Výpočet rozdělíme na více případů

1) $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1 &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z^2} \frac{z^{\alpha+2} \mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{z^{\alpha+1} \mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{4\beta}{z^2} \frac{\Gamma(\alpha+2) \left[1 + \frac{2z}{2\alpha+3}\right]^{\alpha+\frac{3}{2}}}{\Gamma(\alpha+1) \left[1 + \frac{2z}{2\alpha+1}\right]^{\alpha+\frac{1}{2}}} - 1 \stackrel{\boxtimes}{=} \\ &\stackrel{\boxtimes}{=} 4\beta(\alpha+1) \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z^2} \frac{\left[1 + \frac{2z}{2\alpha+3}\right]^{\alpha+\frac{3}{2}}}{\left[1 + \frac{2z}{2\alpha+1}\right]^{\alpha+\frac{1}{2}}} - 1 \stackrel{*}{=} +\infty, \end{aligned}$$

2) $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_1(z)}{\mathcal{H}_0(z)} - 1 &\stackrel{(2.3)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta \mathcal{H}_1(z)}{z \mathcal{H}_2(z) - 2\mathcal{H}_1(z)} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta [1+2z]^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(2) \left[1 + \frac{2z}{3}\right]^{\frac{3}{2}} - 2[1+2z]^{\frac{1}{2}}} - 1 = \\ &= \beta \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{[1+2z]^{\frac{1}{2}} \left(\left[1 + \frac{2z}{3}\right]^{\frac{3}{2}} + [1+2z]^{\frac{1}{2}} \right)}{\left[1 + \frac{2z}{3}\right]^3 - [1+2z]} - 1 = \\ &= \beta \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+4z + \frac{16}{3}z^2 + \frac{80}{27}z^3 + \frac{16}{27}z^4} + 1 + 2z}{\frac{4}{3}z^2 + \frac{8}{27}z^3} - 1 = +\infty, \end{aligned}$$

3) $\alpha \in (-1, -2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1 &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z^2} \frac{z^{\alpha+2} \mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{z^{-\alpha-1} \mathcal{H}_{-\alpha-1}(z)} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\beta 2^{2(\alpha+2)} \Gamma(\alpha+2) \left[1 + \frac{2z}{2\alpha+3}\right]^{\alpha+\frac{3}{2}}}{z^{2(\alpha+2)} \Gamma(-\alpha-1) \left[1 - \frac{2z}{2\alpha+3}\right]^{-\alpha-\frac{3}{2}}} - 1 = \\ &= \beta \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2^{2(\alpha+2)} \Gamma(\alpha+2) \left(\left[1 + \frac{2z}{2\alpha+3}\right] \cdot \left[1 - \frac{2z}{2\alpha+3}\right] \right)^{\alpha+\frac{3}{2}}}{z^{2(\alpha+2)} \Gamma(-\alpha-1)} - 1 = \\ &= \beta \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2^{2(\alpha+2)} \Gamma(\alpha+2) \left(1 - \frac{4z^2}{(2\alpha+3)^2}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}}}{\underbrace{\Gamma(-\alpha-1)}_{>0} z^{2(\alpha+2)}} - 1 = +\infty, \end{aligned}$$

4) $\alpha = -2$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_0(z)}{\underbrace{\mathcal{H}_{-1}(z)}_{\stackrel{(2.3)}{=} \mathcal{H}_1(z)}} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{2\beta \mathcal{H}_0(z)}{(1+2z)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{\lim_{z \rightarrow 0^+} 2\beta \mathcal{H}_0(z)}{\lim_{z \rightarrow 0^+} (1+2z)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{\lim_{z \rightarrow 0^+} 2\beta \mathcal{H}_0(z)}{1} - 1 = +\infty,$$

5) $\alpha < -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1 &\stackrel{(2.3)}{=} 2\beta \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{z^{-\alpha-2} \mathcal{H}_{-\alpha-2}(z)}{z^{-\alpha-1} \mathcal{H}_{-\alpha-1}(z)} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} \beta \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{\Gamma(-\alpha-2) \left[1 + \frac{2z}{-2\alpha-5}\right]^{-\alpha-\frac{5}{2}}}{\Gamma(-\alpha-1) \left[1 + \frac{2z}{-2\alpha-3}\right]^{-\alpha-\frac{3}{2}}} - 1 \stackrel{\boxtimes}{=} \\ &\stackrel{\boxtimes}{=} -\beta \lim_{z \rightarrow 0_+} \frac{\left[1 + \frac{2z}{-2\alpha-5}\right]^{-\alpha-\frac{5}{2}}}{(\alpha+2) \left[1 + \frac{2z}{-2\alpha-3}\right]^{-\alpha-\frac{3}{2}}} - 1 \stackrel{\star}{=} -\frac{\beta}{\alpha+2} - 1, \end{aligned}$$

kde v krocích označených \boxtimes byl využit vztah $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ a v \star limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x^\kappa} \frac{\left[1 + \frac{2x}{2\alpha+3}\right]^{\alpha+\frac{3}{2}}}{\left[1 + \frac{2x}{2\alpha+1}\right]^{\alpha+\frac{1}{2}}} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \kappa = 0, \\ +\infty & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} x^\kappa \frac{\left[1 - \frac{2x}{2\alpha+3}\right]^{\alpha+\frac{3}{2}}}{\left[1 - \frac{2x}{2\alpha+1}\right]^{\alpha+\frac{1}{2}}} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \kappa = 0, \\ 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fakt, že pro $\alpha \geq -2$ se funkce limitně blíží k nekonečnu, znamená, že funkce $\Phi(z)$ má supremum na pravém okolí nuly. Výsledek pro $\alpha < -2$ nám říká, že funkce v nule zprava nabývá konečné hodnoty. Zkusme spočítat, jestli může hodnota $\Phi(z)$ pro $z > 0$ a $\alpha < -2$ převýšit nebo nabýt hodnoty, které se blíží pro $z \rightarrow 0^+$. Dosad' me

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{\alpha+2} - 1 &\stackrel{?}{>} \frac{2\beta}{z} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)} - 1, \\ -\frac{\beta}{\alpha+2} &\stackrel{?}{>} \frac{2\beta(\alpha+2)}{z(\alpha+2)} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(z)}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)}, \\ -\frac{\beta}{\alpha+2} &\stackrel{?}{>} -\frac{\beta}{\alpha+2} + \underbrace{\frac{\beta \mathcal{H}_{\alpha+3}(z)}{(\alpha+2)\mathcal{H}_{\alpha+1}(z)}}_{<0}, \\ \Phi(0_+) &> \Phi(z). \end{aligned}$$

Právě jsme odhalili, že supremem $\Phi(z)$ jsou v závislosti na α hodnoty

$$\sup(\Phi)_{\alpha \geq -2} = +\infty \quad \text{a} \quad \sup(\Phi)_{\alpha > -2} = -\frac{\beta}{\alpha+2} - 1.$$

Z tohoto důvodu pro nás nemá smysl vracet se k výpočtu stacionárního bodu, protože i kdyby v něm funkce nabývala lokálního maxima, nevyrovná se globálnímu supremu. Ze zavedení označení $z = 2\sqrt{\beta\lambda}$ je zřejmé, že $\sup(\Phi(z)) = \sup(\Phi(\beta, \lambda))$ a v následujícím textu přejdeme zpět k proměnným β, λ .

Nyní, když jsme spočetli supremální hodnoty, vrať me se k původní myšlence postupu. Snažíme se nalézt β , pro které je splněna podmínka (2.9) a odvodit podobu množiny \mathbb{M} . Pokud supremum funkce bude menší nebo rovno 0, potom podmínka nebude nikdy splněna. Tudíž aby podmínka platila, musí být $\sup(\Phi) > 0$. Pro $\alpha \geq -2$ je situace jednoduchá, neboť

$$\sup(\Phi)_{\alpha \geq -2} = +\infty > 0 \quad \forall \beta > 0.$$

Pro $\alpha < -2$ získáme požadavek

$$\sup(\Phi)_{\alpha < -2} = -\frac{\beta}{\alpha+2} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta + 2 > 0.$$

Tedy aby mohla platit rovnost (2.9), pro $\alpha < -2$ je třeba splnit požadavek na β , čímž zformulujeme hledanou množinu

$$\mathbb{M} = \{\beta \in \mathbb{R}^+ : \alpha + \beta + 2 > 0\}.$$

Tím se dostáváme k závěru této sekce. Našli jsme vhodnou množinu \mathbb{M} všech možných voleb β , pro které funkce $\Phi(\beta, \lambda)$ splňuje podmínku (2.9). Z definice implicitní funkce potom $\Phi(\beta, \lambda)$ jednoznačně generuje implicitní funkci $\lambda(\beta)$, což znamená, že existuje řešení škálovací rovnice. Aneb abychom v praxi byli schopni řešit škálovací rovnici, musí mezi α a β platit vztah

$$\alpha + \beta + 2 > 0. \quad (2.11)$$

Tento vztah navíc garantuje také fakt, že vzorec (2.7) dává skutečně kladnou hodnotu.

Aproximace Macdonaldovy funkce pro malé hodnoty x

V celé této podkapitole budiž $\alpha < 0$. Další nezbytný krok, který musíme vyšetřit před samotnou aproximací škálovacího vztahu, je odvození aproximace Macdonaldovy funkce pro malé hodnoty x . Zaved' me novou funkci $y(x)$ předpisem

$$y(x) = x^{-\alpha} e^x \mathcal{K}_\alpha(x) \stackrel{(2.3)}{=} x^{-\alpha} e^x \mathcal{K}_{-\alpha}(x). \quad (2.12)$$

Z této funkce vyjádříme $\mathcal{K}_{-\alpha}(x)$ a napočítáme první a druhou derivaci podle x . Naším cílem je výsledky dosadit do (2.1) a převést tak diferenciální rovnici do řeči $y(x)$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{-\alpha}(x) &= x^\alpha e^{-x} y(x), \\ \mathcal{K}'_{-\alpha}(x) &= x^{\alpha-1} e^{-x} y(x)(\alpha - x) + x^\alpha e^{-x} y'(x), \\ \mathcal{K}''_{-\alpha}(x) &= x^{\alpha-2} e^{-x} y(x)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \alpha) + x^{\alpha-1} e^{-x} y'(x)(-2x + 2\alpha) + x^\alpha e^{-x} y''(x). \end{aligned}$$

Takto získáme diferenciální rovnici

$$x^2 y''(x) + (-2x + 2\alpha + 1)y'(x) - (2\alpha + 1)y(x) = 0. \quad (2.13)$$

K naší nové diferenciální rovnici (2.13) dopočítáme v dalším textu počáteční podmínky $y(0_+)$ a $y'(0_+)$, čímž získáme Cauchyho úlohu. Snadno

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} y(x) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{-\alpha} e^x \mathcal{K}_{-\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{-\alpha} \frac{2^{-\alpha-1}}{x^{-\alpha}} \int_0^{+\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy = \\ &\stackrel{\star}{=} 1 \cdot 2^{-\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy = 2^{-\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} dy = 2^{-\alpha-1} \Gamma(-\alpha). \end{aligned}$$

Symbol \star značí aplikaci věty o limitě integrálu s parametrem. Musíme tedy ověřit předpoklady této věty vyslovené a dokázané v [4].

- Pro skoro všechna $y \in \langle 0, +\infty \rangle$ existuje $\lim_{x \rightarrow 0_+} y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} = y^{-\alpha-1} e^{-y}$, což jsme právě splnili.
- Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ musí být $y \mapsto y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ měřitelná (při klasické míře). Ale máme-li funkci spojitou pro všechny $y \in (0, +\infty)$, potom je dle věty o měřitelnosti z [4] měřitelná v klasickém prostoru s úplnou mírou.

- V posledním předpokladu musíme najít integrabilní majorantu nezávislou na parametru x . Protože

$$|y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}}| \leq |y^{-\alpha-1} e^{-y}| \in \mathcal{L}(\langle 1, +\infty \rangle),$$

$$|y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}}| \stackrel{x_0 > |x|}{\leq} |y^{-\alpha-1} e^{-\frac{x_0^2}{4y}}| \in \mathcal{L}(\langle 0, 1 \rangle),$$

a uvedené nerovnosti platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vyřešili jsme tím integrabilitu na \mathbb{R}^+ . Předpoklady jsme splnili a naše užití věty ve výpočtu je v pořádku.

Spočtěme druhou Cauchyho podmínku $y'(0^+)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x (x^{-\alpha} \mathcal{K}_{-\alpha}(x))' = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} \left(2^{-\alpha-1} \int_0^{+\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy \right) = \\ &\stackrel{\blacktriangledown}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \right) dy = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-\alpha-2} \int_0^{+\infty} xy^{-\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy = \\ &\stackrel{\blacksquare}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) - \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} xy^{-\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 2^{-\alpha-1} \Gamma(-\alpha). \end{aligned}$$

Symbols \blacktriangledown a \blacksquare opět značí použití vět z [4], které je třeba ukázat. Jako první ukážeme splnění předpokladů u \blacktriangledown , který značí větu o derivaci integrálu podle parametru. Označme

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} dy \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} f(y, x) dy \right) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

- $F(x)$ konverguje pro alespoň jedno $x \in \mathbb{R}$. Volme například $x = 0$, potom $F(0)$ jistě konverguje a předpoklad je splněn.
- Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ musí být $y \mapsto f(y, x)$ měřitelná. To už jsme vyřešili v limitě integrálu s parametrem \star .
- Najdeme integrabilní majorantu derivace integrandu nezávislou na parametru $x \in \mathbb{R}$. Snadno

$$\left| \frac{df(y, x)}{dx} \right| = \left| \frac{1}{2} xy^{\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \right| \stackrel{x_0 > |x|}{\leq} |x_0 y^{\alpha-2} e^{-y}| \in \mathcal{L}(\langle 1, +\infty \rangle),$$

$$\left| \frac{1}{2} xy^{\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \right| \stackrel{x_0 > |x|}{\leq} |x_0 y^{\alpha-2} e^{-\frac{x_0^2}{4y}}| \in \mathcal{L}(\langle 0, 1 \rangle).$$

Předpoklady jsou splněny a můžeme provést derivaci. Nyní ověříme opět předpoklady z věty o limitě integrálu s parametrem v kroku označeném \blacksquare .

- Pro všechna $y \in \langle 0, +\infty \rangle$ existuje $\lim_{x \rightarrow 0^+} xy^{-\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}} = 0$ a předpoklad je tak splněn.
- Funkce $y \mapsto xy^{-\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ je měřitelná na \mathbb{R}^+ .
- Integrabilní majorantu jsme našli již při ověřování derivace integrálu s parametrem \blacktriangledown .

Poslední úprava ve výpočtu limity je ospravedlněna a tím jsme našli tvar Cauchyových podmínek pro rovnici (2.13).

Ještě před tím, než se pustíme do řešení diferenciální rovnice, se podívejme, jak vypadá člen $x^2 y''(x)$ pro velmi malé hodnoty x . Vidíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x^{-\alpha} e^x \mathcal{K}_{-\alpha}(x))'' = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^x (x^{-\alpha} \mathcal{K}_{-\alpha}(x) + 2(x^{-\alpha} \mathcal{K}_{-\alpha}(x))' + (x^{-\alpha} \mathcal{K}_{-\alpha}(x))'') = 0.$$

V poslední rovnosti je zahrnuto více kroků, které jsou analogické k těm, které jsme již provedli, nebudeme je proto nadále rozvádět.

Můžeme nyní začít řešit rovnici (2.13), a protože pro malé hodnoty x je $x^2 y''(x) \rightarrow 0$, tak tento člen zanedbáme. Dostáváme novou diferenciální rovnici

$$(-2x + 2\alpha + 1)y'(x) - (2\alpha + 1)y(x) = 0$$

s podmínkami $y(0^+) = y'(0^+) = 2^{-\alpha-1}\Gamma(-\alpha)$. Použijeme metodu integračního faktoru. Najdeme integrační faktor $e^{P(x)}$, kde

$$P(x) = \int \frac{2\alpha + 1}{2x - 2\alpha - 1} dx = \frac{1}{2}(2\alpha + 1) \ln(2x - 2\alpha - 1) = \ln(2x - 2\alpha - 1)^{\frac{2\alpha+1}{2}},$$

odtud

$$e^{P(x)} = (2x - 2\alpha - 1)^{\frac{2\alpha+1}{2}}.$$

Obecné řešení po aplikaci integračního faktoru je

$$y(x) = K \cdot (2x - 2\alpha - 1)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}.$$

Dosadíme-li počáteční podmínku

$$y(0^+) = K \cdot (-2\alpha - 1)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 2^{-\alpha-1}\Gamma(-\alpha),$$

dostáváme, že $K = 2^{-\alpha-1}\Gamma(-\alpha)(-2\alpha - 1)^{\alpha+\frac{1}{2}}$. Získali jsme řešení

$$y(x) = 2^{-\alpha-1}\Gamma(-\alpha)(-2\alpha - 1)^{\alpha+\frac{1}{2}}(2x - 2\alpha - 1)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}.$$

Výsledek dosadíme do (2.12) a získáme chtěnou aproximaci $\mathcal{K}_\alpha(x)$ pro malá x a $\alpha < 0$. Ta je tvaru:

$$\mathcal{K}_{-\alpha}(x) = \mathcal{K}_\alpha(x) \approx 2^{-\alpha-1}\Gamma(-\alpha)(-2\alpha - 1)^{\alpha+\frac{1}{2}}(2x - 2\alpha - 1)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} x^\alpha e^{-x}. \quad (2.14)$$

Škálování pro malé hodnoty y

Opět se v této kapitole soustředíme na případ $\alpha < 0$. Škálovací konstanta pro $\alpha \geq 0$ již byla odvozena v [2] a její asymptota je popsána rovnicí $\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2}$.

Jako první se pokusme odvodit škálovací rovnici pro malé hodnoty y . Pro následující výpočty přejdeme od klasického značení ke značení $\alpha \leftrightarrow -\alpha$, abychom ve výpočtech zdůraznili zápornost α , názorně např.

$$1 + \underbrace{(-10)}_{\alpha} = \underbrace{1 + \alpha}_{<0} \quad \leftrightarrow \quad 1 + \underbrace{-(-10)}_{-\alpha} = \underbrace{1 - \alpha}_{>0}.$$

Stále chceme vyřešit škálovací rovnici, ale tentokrát zvolíme jiný postup. Požadujeme, aby pro každé α byla splněna rovnost

$$A \int_0^{+\infty} x^{-\alpha+1} e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} dx \stackrel{!}{=} 1, \quad (2.15)$$

kde za A volíme normovací konstantu $A = \frac{\left(\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}$. Označme pro následující výpočty

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}, \\ \lambda &= \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}}, \\ \mathbf{I}(y, \kappa) &= \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} e^{-\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{x}} e^{-\kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} x} dx \stackrel{(2.2)}{=} \frac{y}{\kappa} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Přenásobíme-li integrál $\mathbf{I}(y, \kappa)$ konstantou $\tilde{A}(y, \kappa) = A(\beta, \lambda)$, zjevně bude platit $\tilde{A} \cdot \mathbf{I}(y, \kappa) = 1$. Proved' me derivaci integrálu podle parametru κ

$$\frac{\partial \mathbf{I}(y, \kappa)}{\partial \kappa} \stackrel{\nabla}{=} -\frac{2\kappa^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{-\alpha+1} e^{-\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{x}} e^{-\kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} x} dx}_{\stackrel{!}{=} \tilde{A}^{-1} \text{ z podmínky (2.15)}}$$

přičemž podmínky pro ∇ reprezentující větu o derivaci integrálu s parametrem nebudeme znovu ověřovat, neboť jsme tak již učinili v předešlé sekci, kde je operace označena symbolem \blacktriangledown a postup by byl obdobný. Z derivace podle parametru plyne, že

$$-\frac{1-\alpha}{2} \kappa^{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}} \frac{\partial \mathbf{I}(y, \kappa)}{\partial \kappa} = \tilde{A}^{-1} = \mathbf{I}(y, \kappa),$$

čímž získáváme diferenciální rovnici

$$\mathbf{I}(y, \kappa) + \frac{1-\alpha}{2} \kappa^{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}} \frac{\partial \mathbf{I}(y, \kappa)}{\partial \kappa} = 0.\tag{2.17}$$

Zderivujme také pravou stranu integrálu $\mathbf{I}(y, \kappa)$

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \left[\frac{y}{\kappa} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \right] = -\frac{y}{\kappa^2} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \frac{y^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}{\kappa^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}} 2^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \frac{\mathcal{K}'_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)}{1-\alpha}.$$

Dosadíme-li do diferenciální rovnice (2.17) příslušné pravé strany, vyjde

$$\begin{aligned}& \frac{y}{\kappa} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \kappa^{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}} \left[-\frac{y}{\kappa^2} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \frac{y^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}{\kappa^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}} 2^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \frac{\mathcal{K}'_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)}{1-\alpha} \right] = \\ & = \left[1 - \frac{1-\alpha}{2} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} \right] \frac{y}{\kappa} \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \frac{y^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}{2^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}} \mathcal{K}'_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) = 0,\end{aligned}$$

což lze po přenásobení výrazem $\frac{2\kappa^{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)y}$ upravit na tvar

$$\left[\frac{2}{1-\alpha} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right] \mathcal{K}_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \frac{1}{1-\alpha} (2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathcal{K}'_{-\alpha+1} \left((2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) = 0.\tag{2.18}$$

Do tohoto okamžiku byl postup obecný a platí pro malé i velké hodnoty y . Teprve nyní se začneme zaměřovat na malé hodnoty y a použijeme aproximaci pro malá y funkce $\mathcal{K}_{-\alpha}(x)$. Z (2.14) získáme vztah pro $\mathcal{K}_{-\alpha+1}(x)$ a jeho derivaci $\mathcal{K}'_{-\alpha+1}(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{-\alpha+1}(x) &\approx 2^{-\alpha} \Gamma(-\alpha+1) (-2\alpha+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} (2x-2\alpha+1)^{-\frac{2\alpha-1}{2}} x^{\alpha-1} e^{-x}, \\ \mathcal{K}'_{-\alpha+1}(x) &\approx 2^{-\alpha} \Gamma(-\alpha+1) (-2\alpha+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} (2x-2\alpha+1)^{-\frac{2\alpha-1}{2}-1} x^{\alpha-2} e^{-x} \left[-2x^2 - 2x(1-\alpha) + 3\alpha - 2\alpha^2 \right].\end{aligned}$$

Aproximace $\mathcal{K}_{-\alpha+1}$ a $\mathcal{K}'_{-\alpha+1}$ dosad' me do diferenciální rovnice (2.18) a prozatím z důvodu přehlednosti ponechme označení $(2^{-\alpha}y\kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} = x$. Tím získáváme rovnost

$$\left[\frac{2}{1-\alpha} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right] (2x - 2\alpha + 1) + \frac{1}{1-\alpha} \left[-2x^2 - 2x(1-\alpha) + 3\alpha - 2\alpha^2 \right] = 0.$$

Následně, provedeme-li sérii úprav a dosadíme-li za x argument Macdonaldovy funkce $(2^{-\alpha}y\kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, dojdeme ke škálovací rovnici pro malé hodnoty y

$$2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 4\alpha \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} + 2\kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} + 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} \alpha y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} - 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} - 3\alpha - 4\alpha^2 - 1 = 0, \quad (2.19)$$

kde $\kappa = \kappa(y)$.

Předpokládejme, že $\kappa(y)$ je popsána asymptotou $\kappa(y) = ky$, kde reálné číslo k je směrnici asymptoty této funkce. Dosad' me tento vztah do rovnice (2.19), čímž vznikne

$$2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{4}{1-\alpha}} k^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{4}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} - 4\alpha y^{\frac{2}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} + 2y^{\frac{2}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} + 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} \alpha y^{\frac{2}{1-\alpha}} k^{\frac{1}{1-\alpha}} - 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} k^{\frac{1}{1-\alpha}} - 3\alpha - 4\alpha^2 - 1 = 0.$$

Dále, vydělíme-li tuto rovnici výrazem $y^{\frac{4}{1-\alpha}}$, dojdeme k rovnosti

$$2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} - \frac{4\alpha k^{\frac{2}{1-\alpha}}}{y^{\frac{2}{1-\alpha}}} + \frac{2k^{\frac{2}{1-\alpha}}}{y^{\frac{2}{1-\alpha}}} + \frac{2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} \alpha k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{y^{\frac{2}{1-\alpha}}} - \frac{2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}}}{y^{\frac{2}{1-\alpha}}} - \frac{3\alpha - 4\alpha^2 - 1}{y^{\frac{4}{1-\alpha}}} = 0$$

přičemž nás bude zajímat situace, kdy $y \rightarrow +\infty$. Ačkoliv se v této kapitole zabýváme malými hodnotami y , tak díky práci [2] směřujeme náš výpočet záměrně touto cestou a k této nejasnosti se vrátíme na konci Kapitoly 2 (označme si ji symbolem \otimes , aby bylo možné se na ni později odkázat). Aby měla naše úloha smysl, vyvstává nám po provedení limitního přechodu rovnost

$$2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} = 0.$$

Po snadné úpravě získáme stejnou podmínku jako v [2], a to

$$k = \frac{1}{2}, \quad \text{tzn.} \quad \frac{\kappa(y)}{y} = \frac{1}{2}. \quad (2.20)$$

Než dosadíme nalezený poměr (2.20) do škálovací rovnice (2.19), převed' me ji přenásobením výrazem $(y\kappa)^{-\frac{1}{1-\alpha}}$ na tvar

$$2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} - 4\alpha y^{-\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2y^{-\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} \alpha - 2^{\frac{2-3\alpha}{1-\alpha}} = 0,$$

přičemž člen $\frac{-3\alpha-4\alpha^2-1}{(y\kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$ zanedbáváme. Nyní dosad' me vztah (2.20) a rovnici upravme do podoby

$$4\kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2\alpha - 3 = 0. \quad (2.21)$$

Proved' me substituci $\xi(y) = \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}}$, která převede rovnici (2.21) na rovnici kvadratickou

$$4\xi^2 - 2^{\frac{-2\alpha+1}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \xi - (-2\alpha + 3) = 0.$$

Kořeny lze nalézt známým způsobem přes diskriminant D , přičemž díky zavedení ξ , resp. κ budeme uvažovat pouze kladný kořen. Odtud

$$D = 2^{\frac{-4\alpha+2}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} - 32\alpha + 48$$

$$\xi(y) = \frac{2^{\frac{-2\alpha+1}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} + \sqrt{2^{\frac{-4\alpha+2}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} - 32\alpha + 48}}{8} = 2^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} + \sqrt{2^{\frac{2\alpha-4}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}}.$$

Po aplikaci inverzní substituce $\beta = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}$ dojdeme ke vztahu

$$\xi(\beta) = \frac{\sqrt{\beta}}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}},$$

odkud následně ze zavedení $\xi(\beta) = \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} \stackrel{(2.16)}{=} \sqrt{\lambda}$ plyne

$$\lambda(\beta) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{\beta}{4}(\beta - 2\alpha + 3)}.$$

V samotném závěru výpočtu zbývá už jen použít definici asymptoty funkce $\lambda(\beta)$ v nekonečnu danou vztahem

$$\lambda = k\beta + q_0,$$

kde k je směrnice a q_0 absolutní člen. Vypočtěme nejdříve směrnici

$$k = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{3}{4\beta} + \sqrt{\frac{1}{4\beta}(\beta - 2\alpha + 3)} = 1,$$

poté absolutní člen q_0

$$\begin{aligned} q_0 &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\lambda(\beta) - k\beta) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\beta(\beta - 2\alpha + 3)} = \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\beta(\beta - 2\alpha + 3)} - \beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta - 2\alpha + 3)} - 1}{\frac{1}{\beta}} \stackrel{L'H}{=} \\ &\stackrel{L'H}{=} -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2\alpha}{2\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta - 2\alpha + 3)}} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3 - 2\alpha}{4} = -\alpha + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li k a q_0 do definice asymptoty, tak pro malá y (malá β) získáváme asymptotický vztah

$$\lambda(\alpha, \beta) = \beta - \alpha + \frac{3}{2}. \quad (2.22)$$

Vrátíme-li nyní naše přeznačení $\alpha \leftrightarrow -\alpha$, docházíme k totožnému výsledku jako v [2]

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2}, \quad (2.23)$$

k čemuž jsme směřovali. Jediný rozdíl, na který je třeba upozornit, je podmínka existence řešení škálovací rovnice (2.11). A protože prozatím se nám plní předtucha, že pro záporné α platí stejná pravidla jako pro kladné, ověříme i škálování pro velké hodnoty y .

Škálování pro velké hodnoty y

Opět se budeme zabývat pouze úlohou pro $\alpha < 0$ a stejně jako v předchozí sekci, zaměňme značení $\alpha \leftrightarrow -\alpha$. Pro velké hodnoty y nebudeme odvozovat vlastní aproximaci Macdonaldovy funkce, ale použijeme aproximaci uvedenou v [5], která platí pro libovolné α . Uvažujme tedy dle [5]

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \mathcal{K}_{-\alpha}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x}\right). \quad (2.24)$$

Spočtěme derivaci $\mathcal{H}'_{-\alpha}(x)$

$$\mathcal{H}'_{-\alpha}(x) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[\frac{1}{2x} \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x} \right) + \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x} \right) + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x^2} \right].$$

Dosaď me $\mathcal{H}_{-\alpha}$ a $\mathcal{H}'_{-\alpha}$ do rovnice (2.18), která v této formě ještě nebyla ovlivněna aproximací pro malá y . Stejně jako v minulé sekci ponechme pro přehlednost v tomto mezivýpočtu označení argumentu Macdonaldovy funkce jako $(2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}} = x$. Získáme tak rovnici

$$\left[\frac{2}{1-\alpha} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right] \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x} \right) - \frac{x}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2x} + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{16x^2} + 1 + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x} + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x^2} \right] = 0,$$

kteřou po dosazení argumentu $x = (2^{-\alpha} y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ upravíme na finální tvar škálovací rovnice pro velké hodnoty y

$$2^{\frac{5-6\alpha}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{3}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} + (16\alpha^2 - 32\alpha + 12) \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - (4\alpha^2 - 16\alpha + 15) 2^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} - 2^{\frac{4-6\alpha}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} y^{\frac{2}{1-\alpha}} + 8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15 = 0. \quad (2.25)$$

Předpokládejme opět, že $\kappa(y) = ky$, kde reálné číslo k představuje směrnici asymptoty této funkce. Dosaď me vztah pro $\kappa(y)$ a celou rovnici vydělme výrazem $y^{\frac{4}{1-\alpha}}$

$$\left[2^{\frac{5-6\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{4-6\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} \right] + \frac{\left[4(4\alpha^2 - 8\alpha + 3) k^{\frac{2}{1-\alpha}} - (4\alpha^2 - 16\alpha + 15) 2^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]}{y^{\frac{2}{1-\alpha}}} + \frac{8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15}{y^{\frac{4}{1-\alpha}}} = 0.$$

Protože pro $y \rightarrow +\infty$ se druhý a třetí člen blíží k 0, dovolíme si je zanedbat a zůstane rovnost

$$2^{\frac{5-6\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{3}{1-\alpha}} - 2^{\frac{4-6\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{2}{1-\alpha}} = 0,$$

kteřá musí platit, aby naše škálovací úloha měla smysl. Snadou úpravou se dostaneme k výsledku

$$k = \frac{1}{2},$$

z něhož plyne poměr $\frac{\kappa(y)}{y} = \frac{1}{2}$. Jako v předchozí sekci se opět vrátíme ke škálovací rovnici (2.25), podělíme ji výrazem $(y \kappa)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ a dosadíme poměr. Vyjde rovnice

$$4\kappa^{\frac{2}{1-\alpha}} - 2^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{1}{1-\alpha}} \kappa^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2\alpha - 3 = 0, \quad (2.26)$$

přičemž člen $\frac{8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15}{y^{\frac{4}{1-\alpha}}}$ byl zanedbán.

Podíváme-li se zpět do sekce *Škálování pro malé hodnoty y* , zjistíme, že jsme našli naprosto totožnou rovnici k (2.21) pro malé hodnoty y . Hledání asymptotického vztahu by tudíž proběhlo stejně a došli bychom k výsledku (2.23). Tím se nám ospravedlňuje i nejasnost \otimes , protože, ačkoli jsme si dovolili převést limitu do nekonečna, nenarušilo nám to správnost řešení, neboť i pro velká y platí stejný vztah.

V této kapitole jsme navázali na výzkumný úkol [2], ve kterém byl nalezen asymptotický vztah pro $\alpha \geq 0$, a to

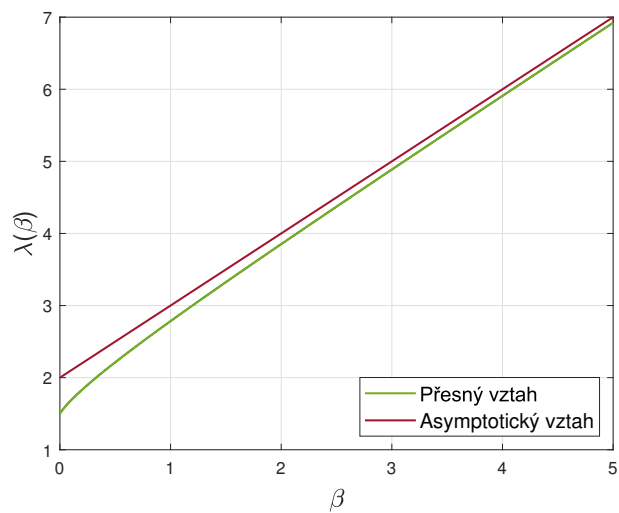
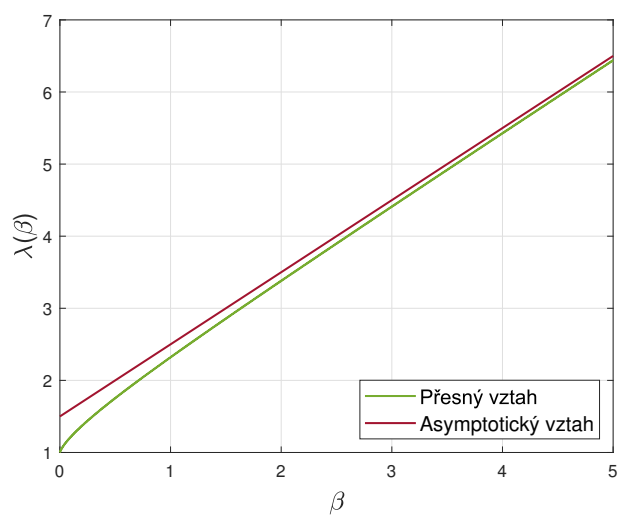
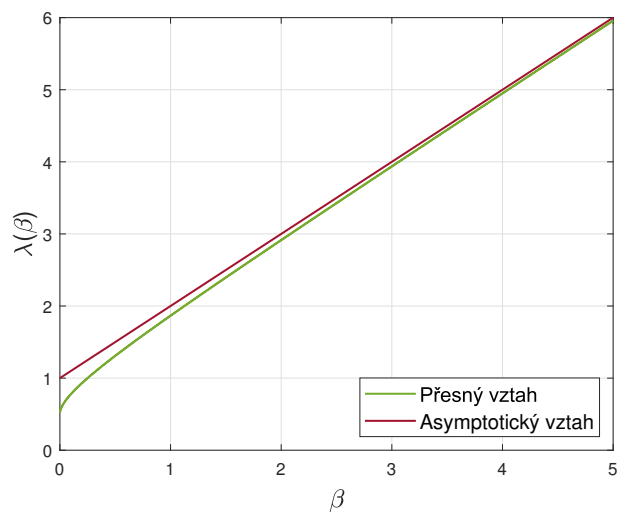
$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2}.$$

My jsme nyní ukázali, že pro $\alpha < 0$ je asymptotický vztah úplně stejný. Spojíme-li nalezený vztah s podmínkou existence řešení (2.11), můžeme prohlásit, že asymptotický vztah škálovací konstanty λ pro GIG distribuci s parametry $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0$ je dán předpisem

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2},$$

pokud je splněna podmínka existence řešení $\alpha + \beta + 2 > 0$.

Obrázek 2.1: Porovnání asymptotického výsledku škálovací konstanty s jejím přesným chováním

(a) $\alpha = 0,5$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha = -0,5$

Kapitola 3

Statistické porovnání generátorů pseudonáhodných čísel

Nabyté znalosti o Zobecněném inverzním Gaussově rozdělení využijeme k sestavení vlastního generátoru pseudonáhodných čísel z této distribuce. Tento nový generátor (říkejme mu dále NewRNDGIG) budeme chtít statistickými metodami porovnat s již existujícím (ale neověřeným a netestovaným) generátorem (dále OldRNDGIG). V tomto experimentu nám každý generátor vygeneruje n náhodných čísel a my budeme statistickými metodami hledat, dle jaké parametrizace hustoty byla čísla vygenerována. Protože zadaná parametrizace je známá, můžeme porovnat kvalitu odhadovaného parametru s reálným zadáním a posoudit tak účinnost/kvalitu generátoru.

Budeme mít k dispozici výsledky experimentu (tzv. *realizace náhodného výběru* x_1, \dots, x_n) a budeme zkoumat jejich původ. Za *náhodný výběr* \mathbf{X} označujeme n -tici nezávislých náhodných veličin X_1, \dots, X_n se stejným rozdělením f . Najdeme funkci onoho náhodného výběru, jejíž předpis nezávisí na parametrech příslušného rozdělení. Takovou funkci označujeme za *statistiku* a jejími příklady jsou

- výběrový průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,
- výběrový rozptyl $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$,
- r -tý výběrový obecný moment $m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$, nebo také
- r -tý výběrový centrální moment $m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^r$.

Abychom našli původ, resp. v našem případě původní rozdělení $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta)$, ze kterého vzešly výsledky, potřebujeme nalézt tzv. *bodový odhad* parametru $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, kde Θ nazýváme *parametrickým prostorem* a symbol \mathbf{X} reprezentuje vektorovou funkci. Tímto odhadem je statistika $T_n(\mathbf{X})$ zobrazující z populace Ω^n do prostoru \mathbb{R}^k a k jejímu nalezení nám slouží metody pro hledání bodových odhadů. O tom, jak užitečný je nalezený odhad, vypovídají jeho vlastnosti. Například fakt, že nalezený odhad parametru není nadhodnocený ani podhodnocený, vyjadřuje tzv. *nestrannost* odhadu. Jedná se o vlastnost, při které je střední hodnota odhadu rovna přímo hledanému parametru, formálně zapsáno

$$\mathbb{E}_{\theta}(T_n(\mathbf{X})) = \theta \quad \forall \theta \in \Theta, \forall n \in \mathbb{N},$$

přičemž symbolem \mathbb{E}_{θ} rozumíme střední hodnotu vzhledem k rozdělení $\mathbb{P}_{\theta}^{\mathbf{X}}$. Pokud není odhad nestranný, ale jeho střední hodnota alespoň konverguje k hledanému parametru, tj. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\theta}(T_n(\mathbf{X})) = \theta$, pak se

jedná o slabší formu nestrannosti, kterou nazýváme *asymptotickou nestranností*. Naskytne-li se nestranných odhadů parametru více, budeme muset rozhodnout, který si vybereme. V takovém případě budeme chtít odhad $T_n(\mathbf{X})$ s nejmenším rozptylem, tedy aby

$$\forall \tilde{T}_n, \forall \theta \in \Theta : \mathbb{E} \left[(T_n(\mathbf{X}) - \theta)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[(\tilde{T}_n(\mathbf{X}) - \theta)^2 \right].$$

Této vlastnosti se odborně říká *eficience* (vydatnost) odhadu. Žádané také je, aby se odhad zpřesňoval s nárůstem rozsahu náhodného výběru, tj.

$$T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{\mathbb{P}/s.j.} \theta \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Potom se jedná o *konzistentní* odhad. Stejně jako nestrannost i konzistence má slabší a silnější podobu. Konverguje-li odhad k parametru podle pravděpodobnosti \mathbb{P} , resp. skoro jistě, jedná se o slabší, resp. o silnější formu. Jako poslední příklad vlastnosti uved' me asymptotickou normalitu, která je užitečná zejména díky možnosti přechodu od libovolného rozdělení k normálnímu rozdělení. Odhad je *asymptoticky normální* právě tehdy, když $\forall \theta \in \Theta : T_n(\mathbf{X}) \sim \mathcal{N} \left(\theta, \frac{1}{n} \sigma^2(\theta) \right)$, což lze také přepsat jako

$$\sqrt{n} \frac{T_n(\mathbf{X}) - \theta}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

kde symbolem \mathcal{D} značíme konvergenci v distribuci.

3.1 Metody pro hledání bodových odhadů

Ačkoliv jsme vyšetřili škálovací vztah, budeme v následující sekci opět uvažovat neškálované GIG rozdělení. Připomeňme si tvar ryzí GIG hustoty

$$g_{GIG}(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \right)^{\alpha+1}}{2 \mathcal{K}_{\alpha+1}(2 \sqrt{\beta \lambda})} \Theta(x) x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}.$$

Máme tedy celkem tři parametry α, β, λ , ke kterým budeme v této sekci hledat jejich příslušné bodové odhady $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\lambda}$. V souladu s výše uvedenou teorií je v našem případě $\theta = (\alpha, \beta, \lambda) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, kde $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

3.1.1 Metoda momentů (ME)

Jak je naznačeno v názvu, metoda momentů je založená na užití výběrových momentů, pomocí kterých sestavíme takzvanou soustavu momentových rovnic (ozn. ME_q). Výhodou této metody je zohlednění všech dat z výběru. K vytvoření soustavy potřebujeme na zvolené třídě hustot zavést regulární a prosté zobrazení

$$\boldsymbol{\mu}(\theta) = (\mu_1(\theta), \dots, \mu_s(\theta)) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s,$$

ke kterému v dané třídě existuje inverzní zobrazení $\boldsymbol{\mu}^{-1}$. Toto zobrazení nazýváme momentovým sub-kódem délky s a je definováno vztahem

$$\mu_r = \mu_r(\theta) = \mathbb{E} X^r, \quad r \in \widehat{s}.$$

Uvědomme si nyní rozdíly mezi definicemi momentového kódu (1.2) a momentového sub-kódu. Momentový kód $\vec{\boldsymbol{\mu}} = (\mu_n)_{n=0}^\infty$ přiřazuje balancované hustotě nekonečnou posloupnost čísel, tedy v našem

případě zobrazuje z třídy GIG distribucí do třídy posloupností nezáporných čísel. Naproti tomu momentový sub-kód je vektor konečné délky s a zobrazuje z parametrického prostoru dané třídy. Tedy laicky řečeno, momentový kód se v případě GIG distribucí vztahuje k hustotě (1.8) a je nekonečný, zatímco momentový sub-kód přiřazuje trojici parametrů $\theta = (\alpha, \beta, \lambda)$ konečný vektor $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ a zobrazuje tedy z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^s .

Prostřednictvím momentového sub-kódu $\boldsymbol{\mu}(\theta)$ můžeme zavést momentový odhad $\hat{\theta}_M$ parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$ jako

$$\hat{\theta}_M := \hat{\theta}_M(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}^{-1}(m'_1(\mathbf{X}), \dots, m'_k(\mathbf{X})),$$

kde m'_r představuje r -tý výběrový obecný moment. Odhad $\hat{\theta}_M$ je řešením ME_q rovnic tvaru

$$\mu_r(\theta) = m'_r(\mathbf{X}) \quad \forall r \in \widehat{s}. \quad (3.1)$$

Pokud soustava ME_q není jednoznačně řešitelná, nebo některý z momentů nezávisí na θ , pak můžeme přidat další rovnici ve tvaru $\mu_{s+1}(\theta) = m'_{s+1}(\mathbf{X})$. V této metodě lze také alternativně použít centrální momenty $m_r(\mathbf{X})$, přičemž $\mu_r(\theta) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^r$.

Nalezneme nyní odhady parametrů $\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M, \hat{\lambda}_M$, budeme-li mít vygenerovaných X_1, \dots, X_n náhodných čísel z GIG distribuce. Tedy v souladu se zavedenou teorií máme $\theta = (\alpha, \beta, \lambda) \in \Theta$, kde $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ a $k = 3$. Podle (3.1) sestavíme ME_q :

$$\begin{aligned} \mu_1(\alpha, \beta, \lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ \mu_2(\alpha, \beta, \lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \\ \mu_3(\alpha, \beta, \lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3, \end{aligned}$$

kde za μ_1, μ_2, μ_3 pomocí (2.5) dosadíme

$$\begin{aligned} \mu_1(\alpha, \beta, \lambda) = \mathbb{E}X &= \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}, \\ \mu_2(\alpha, \beta, \lambda) = \mathbb{E}X^2 &= \frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}, \\ \mu_3(\alpha, \beta, \lambda) = \mathbb{E}X^3 &= \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+4}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}. \end{aligned}$$

Získáme tak soustavu 3 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ \frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \\ \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha+4}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3, \end{aligned}$$

ze které ovšem neplyne jednoznačné řešení, protože tři po sobě následující Macdonaldovy funkce jsou, jak plyne ze vztahu (2.3), závislé. Přidáme proto další rovnici pro $\mu_4(\alpha, \beta, \lambda)$ tvaru

$$\frac{\beta^2 \mathcal{H}_{\alpha+5}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda^2 \mathcal{H}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4.$$

Jedním ze způsobů, jak tuto soustavu rovnic vyřešit, je převedení všech řádů Macdonaldovy funkce na řády $\mathcal{H}_{\alpha+1}$ a $\mathcal{H}_{\alpha+2}$ pomocí vzorce (2.3) a postupným dosazováním rovnic eliminovat neznámé proměnné α, β, λ . Řešením jsou následující odhady

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_M &= \frac{4n \left[\sum_{i=1}^n X_i^3 \right]^2 - 6 \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n X_i^3 - 3n \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n X_i^4 + 3 \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 \right]^3 + 2 \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]^2 \sum_{i=1}^n X_i^4}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n X_i^4 - \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 \right]^3 - \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]^2 \sum_{i=1}^n X_i^4 - n \left[\sum_{i=1}^n X_i^3 \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n X_i^3}, \\ \hat{\beta}_M &= \frac{1}{n} \hat{\lambda}_M \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} (\hat{\alpha}_M + 2) \sum_{i=1}^n X_i, \\ \hat{\lambda}_M &= \frac{n(\hat{\alpha}_M + 3) \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\hat{\alpha}_M + 2) \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^3 - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Metoda maximální věrohodnosti (MLE)

Tato metoda spočívá ve snaze maximalizovat sdruženou hustotu experimentu vzhledem k parametru obsaženém v navrženém rozdělení. Získáme tak věrohodnostní funkci $L(\theta)$. Maximální věrohodný odhad (MLE) je pak zaveden jako

$$\hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}) = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argsup}}(L(\theta)),$$

je-li $\hat{\theta}_{MLE}$ borelovsky měřitelná, jednoznačná a závisí na \mathbf{X} . Máme-li *i.i.d.* veličiny (nezávislé a se stejným rozdělením - *identically independently distributed*) s rozdělením $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta)$, potom lze zapsat věrohodnostní funkci jako

$$L(\theta) = f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta).$$

Častěji se k samotnému výpočtu používá tzv. logaritmická věrohodnostní funkce

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_{X_i}(x_i, \theta).$$

Soustavu sestavenou z parciálních derivací

$$\frac{\partial \ell(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0 \quad \forall i \in \widehat{k},$$

nazveme systémem věrohodnostních rovnic (LE_q). Obecně se odhady získané touto metodou vyznačují dobrými statistickými vlastnostmi.

Mějme tedy opět vygenerovaných X_1, \dots, X_n náhodných čísel z GIG distribuce (1.8). Zapišme věrohodnostní i logaritmicou věrohodnostní funkci:

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{2 \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} x_i^\alpha e^{-\lambda x_i} e^{-\frac{\beta}{x_i}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{n(\alpha+1)}{2}}}{2^n \mathcal{K}_{\alpha+1}^n(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \prod_{i=1}^n x_i^\alpha, \quad (3.3)$$

$$\ell(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{n(\alpha+1)}{2} [\ln \lambda - \ln \beta] - n \ln 2 - n \ln \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \alpha \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

Spočtěme parciální derivace $\ell(\alpha, \beta, \lambda)$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{2} [\ln \lambda - \ln \beta] - n \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} + \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} = -\frac{n(\alpha+1)}{2\beta} - n \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \mathcal{K}'_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i},$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n(\alpha+1)}{2\lambda} - n \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \mathcal{K}'_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Protože hledáme supremum funkce $\ell(\alpha, \beta, \lambda)$, využijeme nutnou podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných, podle které má-li v bodě $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ diferencovatelná funkce $\ell(\alpha, \beta, \lambda)$ extrém, pak musí být

$$\frac{D\ell}{D(\alpha, \beta, \lambda)}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = 0.$$

Jinak řečeno $\text{grad} \ell(\hat{\theta}) = \vec{0}$. Tím dospějeme k soustavě rovnic LE_q

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} [\ln \lambda - \ln \beta] - n \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} + \sum_{i=1}^n \ln x_i &\stackrel{!}{=} 0, \\ -\frac{n(\alpha+1)}{2\beta} - n \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \mathcal{K}'_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} &\stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{n(\alpha+1)}{2\lambda} - n \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} \mathcal{K}'_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} - \sum_{i=1}^n x_i &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou odhady $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}$. Pokud bychom chtěli mít jistotu, že nalezený stacionární bod logaritmicou věrohodnostní funkce je skutečně bodem maxima, bylo by nutné zkoumat definitnost Hessovy matice

$$\mathbb{H}(\hat{\theta}) = \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\hat{\theta}) \right)_{i,j=1}^3.$$

To se ale v praktických aplikacích neprovádí s odvoláním se na běžnou praxi. Zkoumání definitnosti uvedené Hessovy matice bude nicméně námětem navazujících prací.

3.1.3 Metoda minimální vzdálenosti (MDE)

Metoda minimální vzdálenosti se hodí především při hledání konzistentních odhadů, avšak oproti metodě maximální věrohodnosti je méně eficientní. Její princip je založen na minimalizaci vzdálenosti mezi parametrizovanou distribuční funkcí a empirickou distribuční funkcí získanou z dat. Pokud máme nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením X_1, \dots, X_n , pak zavádíme empirickou distribuční funkci $F_n(x)$ jako

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty, x)}(X_i),$$

kde \mathbb{I} značí charakteristickou funkci. Můžeme ji také chápat tak, že pro jednotlivé x_i je $F_n(x_i)$ počet prvků menší nebo roven x_i a podělen celkovým počtem prvků. Mějme tedy náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, a empirickou distribuční funkci $F_n(x)$. Existuje-li $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ takový, že

$$d[F(x, \hat{\theta}), F_n(x)] = \inf\{d[F(x, \theta), F_n(x)], \theta \in \Theta\},$$

nazveme ho odhadem s minimální vzdáleností. Zobrazení $d(\cdot, \cdot)$ z třídy funkcí do prostoru reálných čísel chápeme jako obecnou funkcionální metriku, která splňuje axiomy metriky na vhodných prostorech funkcí. V této práci použijeme konkrétně Kolmogorovu vzdálenost definovanou pro funkce $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$K := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|. \quad (3.4)$$

Pro každý generátor budeme zvlášť zkoumat, jestli empirická distribuční funkce odpovídá distribuční funkci GIG rozdělení.

Alternativně lze metodu MDE aplikovat také na hustoty pravděpodobnosti (empirickou a teoretickou), ale pro systémy s menším rozsahem datových vzorků není tato metoda vhodná, neboť její výsledky ovlivňuje volba dělení osy x (tzv. binování).

3.2 Konstrukce NewRNDGIG

V této sekci představíme princip programu NewRNDGIG, který byl naprogramován v prostředí MATLAB (verze R2019a) za účelem demonstrace statistických metod uvedených v textu výše. Princip vychází z následující věty vyslovené a dokázané v [8].

Věta 3.1. Je-li $\xi \sim F$, kde F je její distribuční funkce, a má-li tato náhodná veličina hustotu f , je náhodná veličina $\gamma = F(\xi)$ rovnoměrně rozdělena v intervalu $(0, 1)$, tj. $\gamma \sim U(0, 1)$.

Dle této věty je třeba ke konstrukci generátoru nalézt distribuční funkci GIG rozdělení a funkci k ní inverzní. Distribuční funkce balancované hustoty $f(x) \in \mathcal{B}$ je obecně definovaná jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \Theta(x) \int_0^x f(t) dt.$$

Přímo z této definice lze distribuční funkci GIG hustoty zapsat ve tvaru

$$G_{GIG}(x) = \Theta(x) \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^x t^\alpha e^{-\lambda t} e^{-\frac{\beta}{t}} dt.$$

Protože je GIG rozdělení unimodální, nabízí se možnost numerického výpočtu distribuční funkce přes teorii Riemannova integrálu. Zaved' me dělení intervalu $\langle 0, x \rangle$ (značíme \mathcal{D}) a velikost kroku Δ_x . Poté

$$\mathcal{D} = \{\underbrace{\langle 0, \Delta_x \rangle}_{S_1}; \underbrace{\langle \Delta_x, 2\Delta_x \rangle}_{S_2}; \underbrace{\langle 2\Delta_x, 3\Delta_x \rangle}_{S_3}; \dots; \underbrace{\langle x - \Delta_x, x \rangle}_{S_m}\},$$

přičemž je zřejmé, že sjednocením $\cup_{i=1}^m S_i$ získáme interval $\langle 0, x \rangle$. Označme

$$v_i = \inf_{x \in S_i} g_{GIG}(x), \quad V_i = \sup_{x \in S_i} g_{GIG}(x).$$

Dolním Riemannovým integrálem $L(\mathcal{D}, g_{GIG})$, resp. horním Riemannovým integrálem $U(\mathcal{D}, g_{GIG})$ rozumíme

$$L(\mathcal{D}, g_{GIG}) = \Delta_x \sum_{i=1}^m v_i, \quad \text{resp.} \quad U(\mathcal{D}, g_{GIG}) = \Delta_x \sum_{i=1}^m V_i.$$

Hodnotu hledané distribuční funkce $G_{GIG}(x)$ v bodě x lze získat odhadem pomocí horního a dolního Riemannova integrálu jako

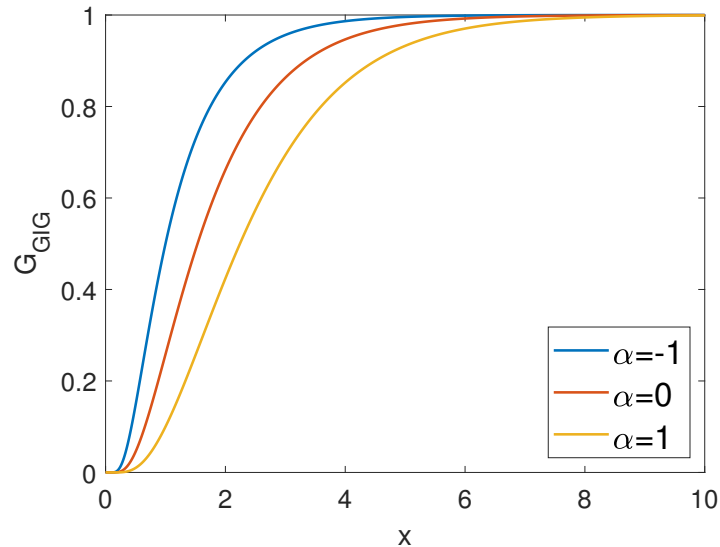
$$L(\mathcal{D}, g_{GIG}) \leq G_{GIG}(x) \leq U(\mathcal{D}, g_{GIG}).$$

Zjevně, čím jemnější dělení intervalu volíme (čím větší je m), tím přesněji bude hodnota distribuční funkce určena (viz Obrázek 3.2). Maximální chyba tohoto odhadu je $|U(\mathcal{D}, g_{GIG}) - L(\mathcal{D}, g_{GIG})|$. V programu NewRNDGIG je k určení aproximativní hodnoty distribuční funkce v bodě x_i využit aritmetický průměr hodnot horního a dolního integrálu

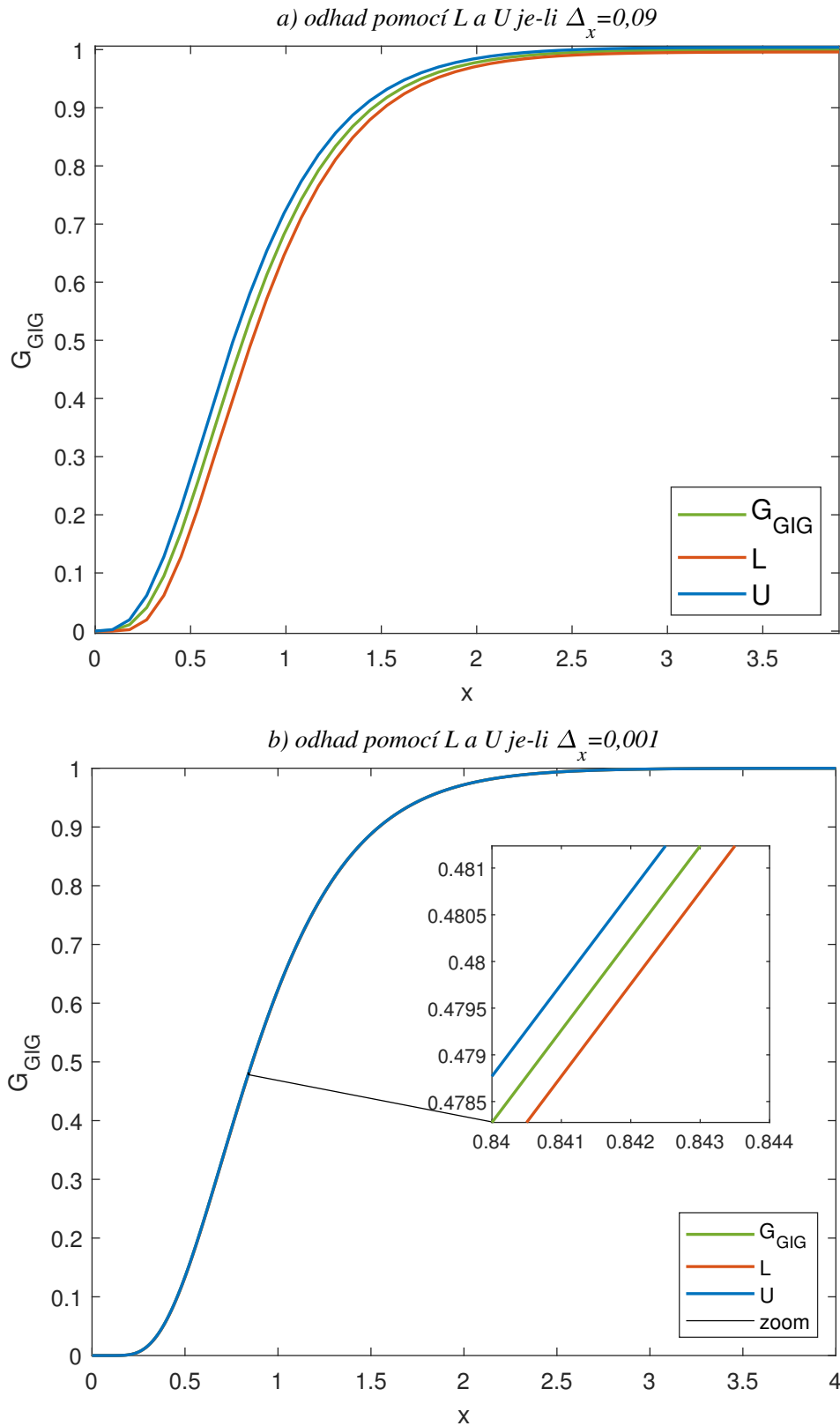
$$\hat{G}_{GIG}(x_i) = \frac{U(\mathcal{D}, g_{GIG}(x_i)) + L(\mathcal{D}, g_{GIG}(x_i))}{2}.$$

Navíc, aby byla numericky spočtená distribuční funkce spojitá, byla provedena jednoduchá lineární interpolace. K našim účelům je v NewRNDGIG nastaveno dělení intervalu $\Delta_x = 0,0001$, čímž získáme přesnost řádu 10^{-4} . Pokud bychom chtěli ještě přesnější výsledky a nezáleželo by nám na času výpočtu, lze jemnějším dělením dosáhnout ještě větší přesnosti.

Obrázek 3.1: Ukázka distribuční funkce GIG rozdělení pro různé α při volbě $\beta = 1, \lambda = 1$.



Obrázek 3.2: Odhad distribuční funkce pomocí horního a dolního Riemannova integrálu pro dělení intervalu s různými velikostmi kroků Δ_x .



Nyní, když je sestrojena distribuční funkce $G_{GIG}(x)$, je třeba najít funkci k ní inverzní. Využijeme faktu, že už z definice je distribuční funkce neklesající, v našem případě dokonce rostoucí. Dle věty 3.1 v této fázi vygenerujeme náhodná čísla ξ_1, \dots, ξ_n z rovnoměrného rozdělení $U(0, 1)$. Tedy pro distribuční funkci v bodě x_i , $i \in \widehat{n}$ platí

$$G_{GIG}(x_i) = \xi_i.$$

Neznáme ovšem x_i . Chceme-li nálezt inverzní hodnotu $G_{GIG}^{-1}(\xi_i)$, lze zvolit postup, při kterém v prvním kroku nalezneme množinu $M_i = \{x \in \mathbb{R} : G_{GIG}(x) < \xi_i\}$ a číslo $x^{(i)} := \sup M_i$. Pak

$$G_{GIG}^{-1}(\xi_i) = x^{(i)}.$$

Tento aproximativní postup aplikujeme pro všechna ξ_i, \dots, ξ_n a nalezené inverzní hodnoty $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ jsou nově vygenerovaná pseudonáhodná čísla z GIG distribuce.

Výhodou kódu sestaveného pomocí tohoto postupu je jeho snadná čitelnost, možnost nastavení požadované přesnosti a zároveň díky volbě tohoto přímého postupu použití minima předvytvořených funkcí v MATLABu, tudíž kód není zatížen nadbytečnými požadavky externích funkcí. Zároveň je tento kód aplikovatelný i na jiné unimodální hustoty.

3.3 Představení OldRNDGIG

OldRNDGIG je program sestrojený v roce 2017 na základě článku [9] Luce Devroye a je možné ho stáhnout z webových stránek MathWorks [10]. Jedná se o aplikaci Devroyova algoritmu pro vzorkování dat z GIG rozdělení parametrizovaného parametry $p \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$ ve tvaru

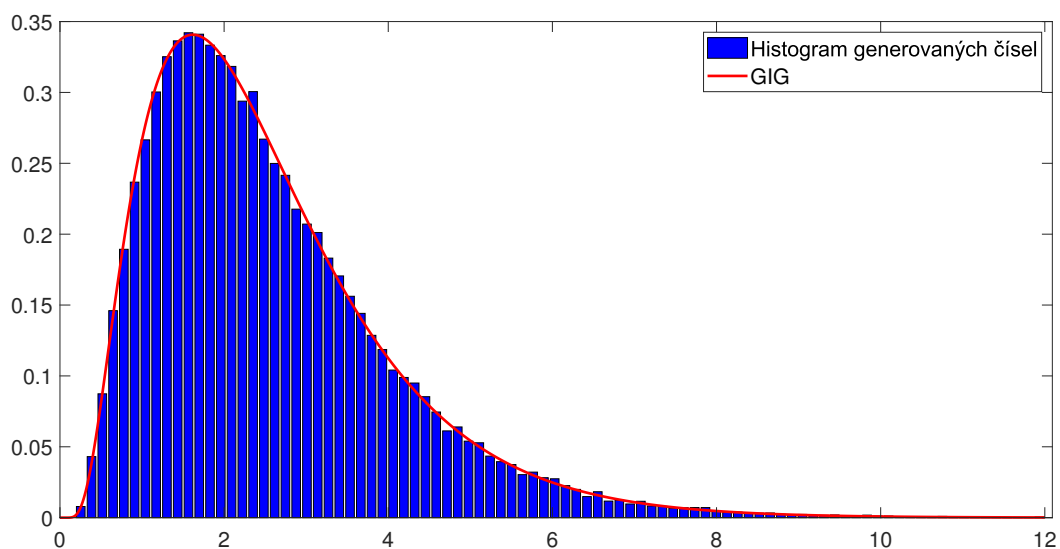
$$g_{GIG}(x) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{2}}}{2\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)}.$$

K námi zvolené parametrizaci (1.8) pak lze jednoduše přejít pomocí vztahů

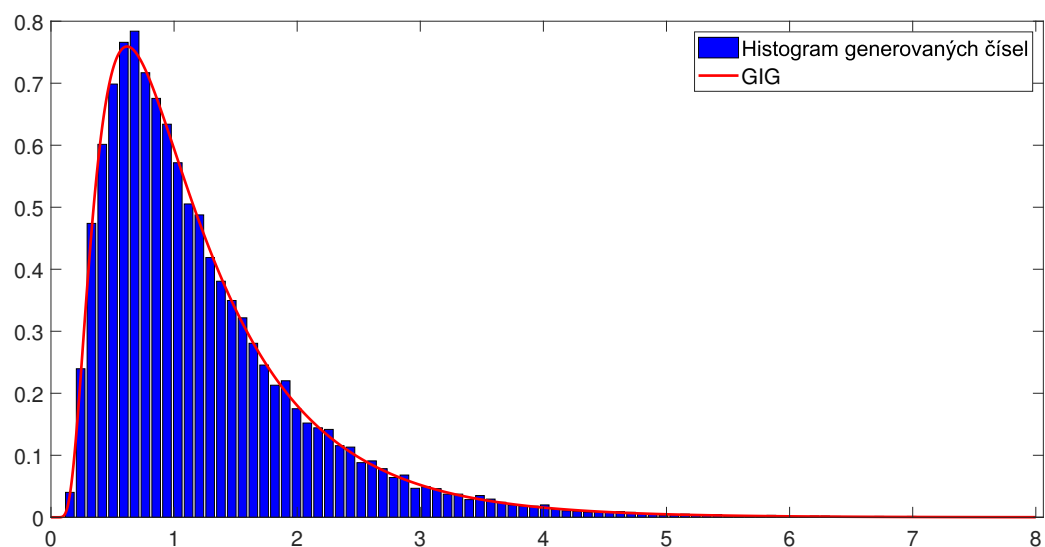
$$p = \alpha + 1,$$

$$a = 2\lambda,$$

$$b = 2\beta.$$



Obrázek 3.3: Histogram čísel generovaných z NewRNDGIG pro $\beta = 1, \lambda = 1$ a $\alpha = 1$.



Obrázek 3.4: Histogram čísel generovaných z NewRNDGIG pro $\beta = 1, \lambda = 1$ a $\alpha = -1$.

3.4 Statistické porovnání NewRNDGIG a OldRNDGIG

Oba generátory jsme si tedy popsali v sekci výše a ani jeden z těchto generátorů ještě nebyl statisticky testován. Protože se v této práci zabýváme především negativní hodnotou parametru α , zvolme pro následující postup fixní $\alpha = -1$, $\beta \in (0, 4)$ a pro λ využijme škálovací vztah (2.23), který pro zafixovanou hodnotu parametru α nabývá tvaru $\lambda = \beta + \frac{1}{2}$. Vykreslené grafy budou znázorňovat odhady zvoleného parametru pro různé volby β . Každý zobrazený odhad parametru v grafu je ve skutečnosti aritmetický průměr získaný z 10 nezávisle provedených experimentů. Například

$$\alpha^* = \frac{\alpha^{*(1)} + \alpha^{*(2)} + \dots + \alpha^{*(10)}}{10},$$

tzn. na jeden odhad bylo využito 10 datových sad náhodně vygenerovaných čísel. Jeden experiment zahrnuje vygenerování 5 000 pseudonáhodných čísel (dat) z NewRNDGIG a OldRNDGIG a následně vypočtení odhadu z vygenerovaných dat dle požadované metody. Stejný postup zopakujeme i pro 20 000 pseudonáhodných čísel. Získané výsledky jsou zakresleny do grafů a pro porovnání je přidána i křivka reprezentující přesnou hodnotu parametru. Kvůli symbolice MATLABu budou v této kapitole odhady parametrů $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}$ označeny jako $\alpha^*, \beta^*, \lambda^*$.

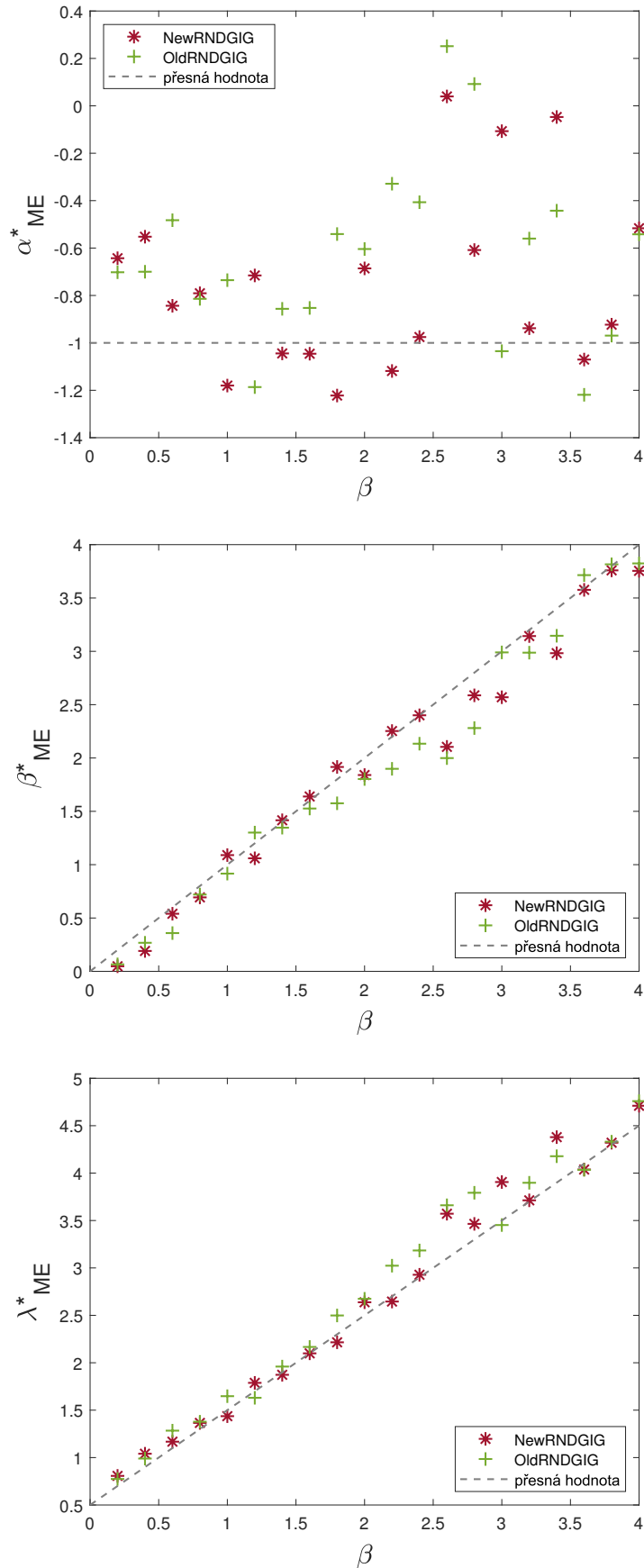
3.4.1 Aplikace metody momentů (ME)

K výpočtu odhadů pomocí metody momentů byly použity odvozené odhady (3.2). Výsledky lze vidět na obrázcích 3.5 a 3.6. V následující tabulce je přehled aritmetických průměrů odchylek $s_{\alpha^*}, s_{\beta^*}, s_{\lambda^*}$ od skutečné hodnoty parametrů pro experimenty čítající 5 000 a 20 000 dat:

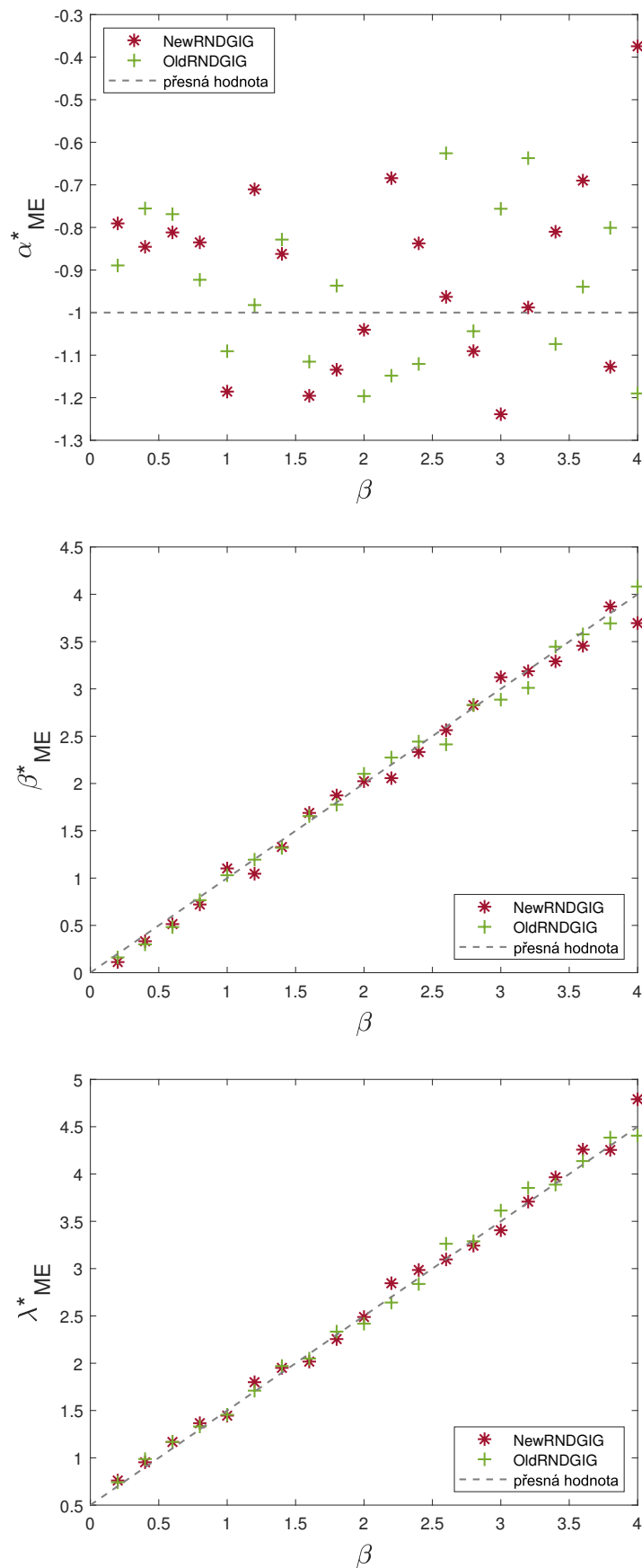
5 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG	20 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG
s_{α^*}	0,3187	0,4123	s_{α^*}	0,1905	0,1568
s_{β^*}	0,1533	0,1896	s_{β^*}	0,0938	0,0741
s_{λ^*}	0,1346	0,1841	s_{λ^*}	0,0771	0,0655

Podle očekávání pozorujeme, že odhady z obou generátorů se zvýšením počtu dat zpřesnily, tedy můžeme o nich prohlásit, že jsou konzistentní. V prvním experimentu s 5 000 daty byl jednoznačně lepší NewRNDGIG, čímž máme na mysli, že data z něj generovaná lépe odpovídala zobecněnému inverznímu Gaussovu rozdělení. Odhady byly celkově blíže přesné hodnotě, o čemž vypovídá průměrná směrodatná odchylka. Také si můžeme všimnout, že ve všech třech případech v experimentu s 5 000 daty mají odhady získané z dat vygenerovaných pomocí OldRNDGIG větší maximální odchylku než odhady získané z NewRNDGIG. V experimentu s 20 000 daty naopak vykazoval přesnější hodnoty OldRNDGIG.

Obrázek 3.5: Porovnání odhadů získaných metodou momentů s přesnou hodnotou pro 5 000 dat.



Obrázek 3.6: Porovnání odhadů získaných metodou momentů s přesnou hodnotou pro 20 000 dat.



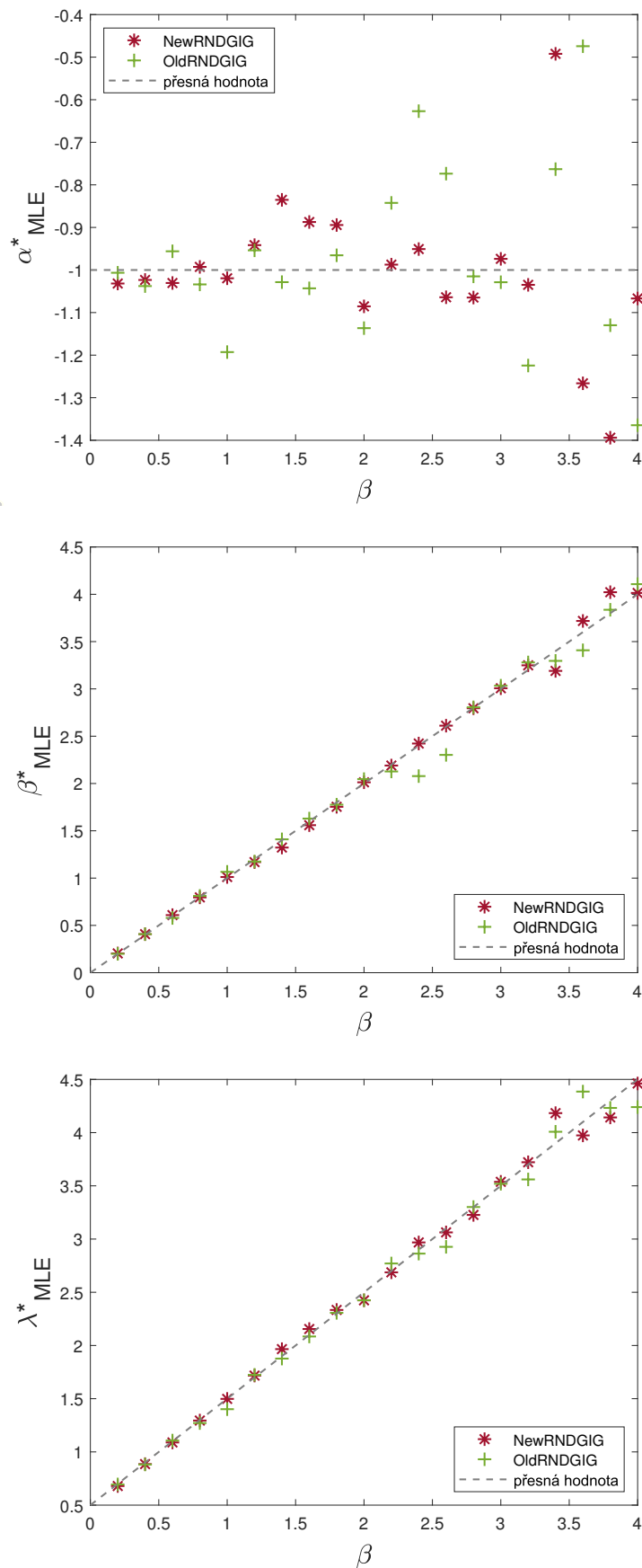
3.4.2 Aplikace metody maximální věrohodnosti (MLE)

Grafy na obrázcích 3.7 a 3.8 znázorňují porovnání NewRNDGIG a OldRNDGIG pomocí metody maximální věrohodnosti. K výpočtu těchto odhadů byla využita logaritmická věrohodnostní funkce (3.3) a matlabovská funkce „*fminsearch*“. V následující tabulce jsou zapsány hodnoty aritmetického průměru směrodatných odchylek pro příslušné odhady parametrů:

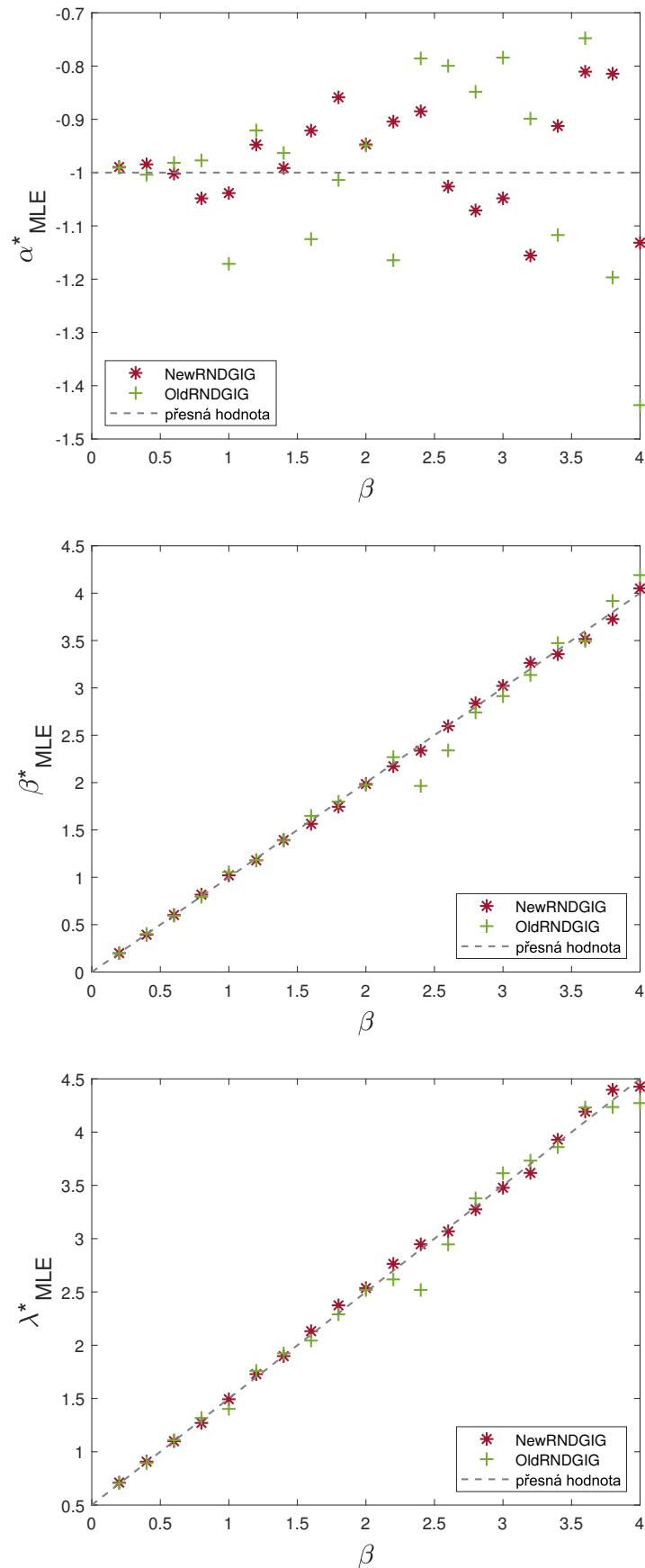
5 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG	20 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG
s_{α^*}	0,1063	0,1443	s_{α^*}	0,0777	0,1291
s_{β^*}	0,0456	0,0746	s_{β^*}	0,0325	0,0819
s_{λ^*}	0,0578	0,0732	s_{λ^*}	0,0396	0,0805

Opět jsme zvýšením počtu dat dosáhli zpřesnění odhadů. MLE metoda výrazně lépe odhadla většinu parametrů oproti ME a zejména u odhadu α^* pro malé hodnoty β zaznamela dobré výsledky. Bohužel u odhadu α^* v obou experimentech pozorujeme tendenci nárůstu odchylky se zvětšujícím se β . Překvapivý a potěšující je fakt, že odhady získané MLE metodou jsou v obou experimentech přesnější pro NewRNDGIG.

Obrázek 3.7: Porovnání odhadů získaných metodou MLE s přesnou hodnotou pro 5 000 dat.



Obrázek 3.8: Porovnání odhadů získaných metodou MLE s přesnou hodnotou pro 20 000 dat.



3.4.3 Aplikace metody minimální vzdálenosti (MDE)

K metodě MDE bychom potřebovali empirickou distribuční funkci získanou z dat a distribuční funkci hustoty GIG, ke které ovšem neznáme její analytický předpis. Použijeme proto metodu minimální vzdálenosti v upravené formě pro hustotu. Z hlediska numerického přístupu to tedy znamená napočítat z vygenerovaných dat histogram a následně hledat takovou volbu parametrů, aby byl minimalizován rozdíl mezi grafem GIG hustoty a vrcholy histogramu. Stejně jako v metodě MLE zde uplatníme matlabovskou funkci „*fminsearch*“. Bohužel, sami tímto postupem vneseme do kódu chybu, neboť budeme nuceni uměle navolit počet sloupců v histogramu (binovat), proto by byla empirická distribuční funkce vhodnější.

Výsledky získané MDE metodou jsou k nahlédnutí na obrázcích 3.9 a 3.10 a stejně jako v předchozích případech jsme do tabulky zaznamenali průměrné směrodatné odchylky odhadů:

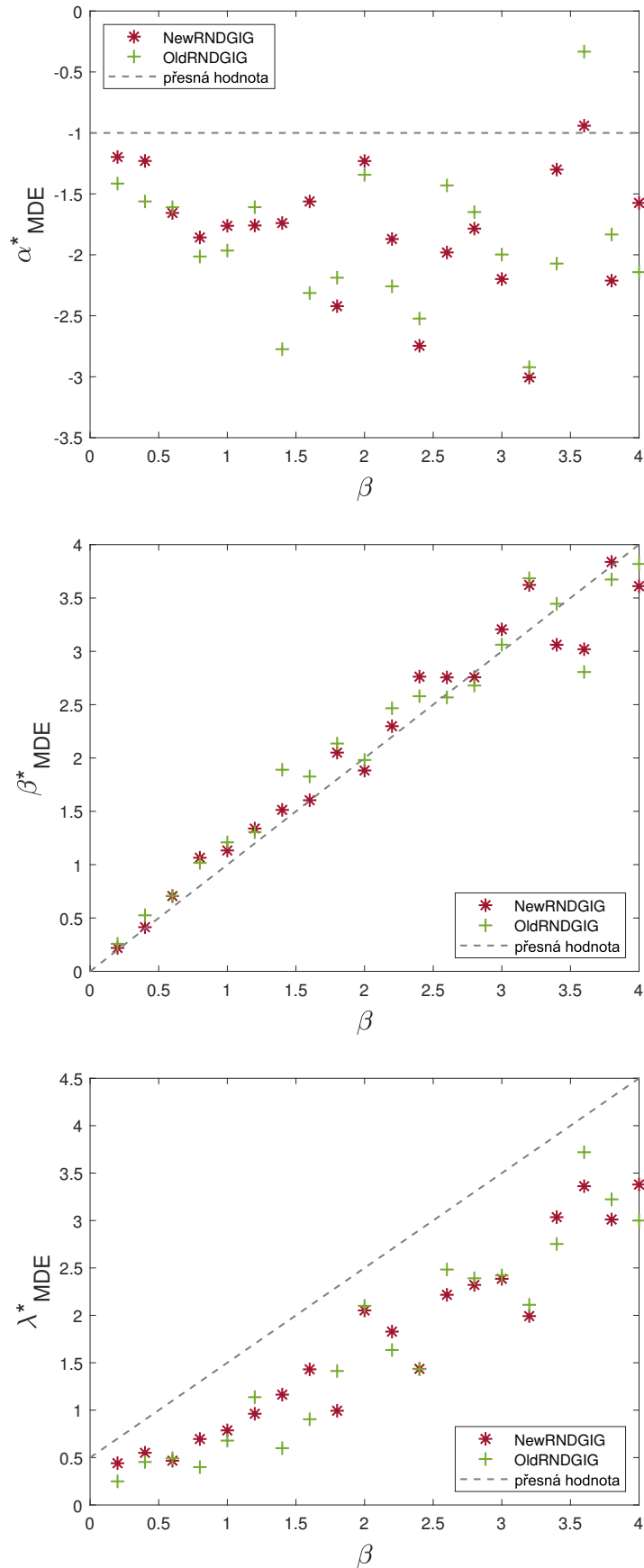
5 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG	20 000 dat	NewRNDGIG	OldRNDGIG
s_{α^*}	0,8075	0,9644	s_{α^*}	0,6198	0,5908
s_{β^*}	0,1897	0,2092	s_{β^*}	0,1381	0,1448
s_{λ^*}	0,8746	0,9202	s_{λ^*}	0,5349	0,5134

Ze všech použitých metod je již od pohledu jasné, že MDE je nejméně vhodnou metodou, i když za její nepřesnost je částečně zodpovědný postup zmíněný výše. Odhady α^* a λ^* jsou v obou variantách výrazně podhodnocené a β^* naopak nadhodnocený. S narůstající hodnotou β také narůstá odchylka odhadů α^* a λ^* . Stejně jako u předchozích metod došlo nárůstem počtu dat ke zpřesnění. NewRNDGIG vykazoval menší průměrnou odchylku v prvním experimentu, ale pro set s 20 000 daty se prokázal lepší OldRNDGIG.

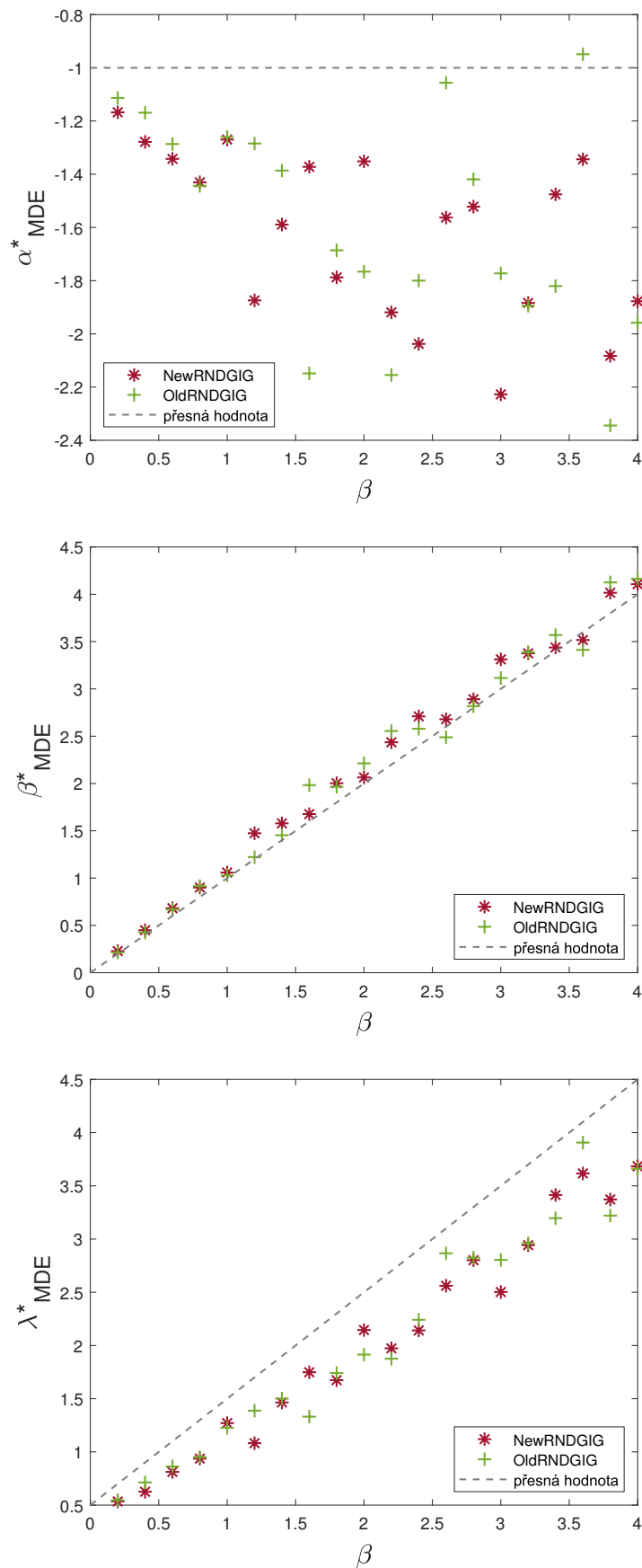
3.4.4 Shrnutí

Závěrem můžeme s jistotou tvrdit, že nejlepší metodou zde zmíněnou pro odhad parametrů GIG distribuce je metoda maximální věrohodnosti MLE, která pro oba dva generátory spočetla odhady, jež se v průměru lišily maximálně o 15 setin od přesné hodnoty původní parametrizace. Co se týče porovnání generátorů, OldRNDGIG se všeobecně prokázal jako lepší generátor při práci s větším počtem dat. Na druhou stranu data z něj generovaná nepřinesla tak dobré výsledky při použití metody MLE, jako data generovaná z NewRNDGIG. Docházíme tím tedy k závěru, že při použití metody MLE byl jednoznačně lepší NewRNDGIG, ale pro obecné použití v praxi a adaptaci na různé úlohy je vhodnější OldRNDGIG.

Obrázek 3.9: Porovnání odhadů získaných metodou MDE s přesnou hodnotou pro 5 000 dat.



Obrázek 3.10: Porovnání odhadů získaných metodou MDE s přesnou hodnotou pro 20 000 dat.



Kapitola 4

Zpracování dopravních dat

Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení se v posledním desetiletí ukázalo jako vhodné zejména v dopravním modelování. V této práci budeme analyzovat data pořízená na holandské dálnici A9. Jedná se o měření časových rozestupů dvou po sobě jedoucích vozidel v rychlém pruhu. V dřívějších výzkumech (viz [13]) bylo ověřeno, že časové rozestupy naměřené v pomalejším pruhu odpovídají GIG hustotě s nezápornou hodnotou parametru. V rychlém pruhu ovšem vznikají anomálie a naší predikcí je tvrzení, že právě tyto anomálie lze popsat použitím Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení se záporným parametrem α .

Poskytnutá data jsou předupravená tak, že z nich lze vyčíst, jaké byly rozestupy mezi vozidly při různé hustotě provozu. Data jsou sortována podle rozsahu hustot v intervalech $\rho \in \langle 4 + k, 9 + k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$. Takto předupravená data jsme očistili od záporných hodnot (časový rozestup nabývá kladné hodnoty), od outlierů (tj. od velkých časových rozestupů) a přeškálovali.

Jako první jsme na naměřené rozestupy v daném hustotním intervalu použili metodu momentů a metodu maximální věrohodnosti. Metodu minimální vzdálenosti v této kapitole vynecháme, jelikož se její použití kvůli neznalosti analytického předpisu distribuční funkce ukázalo již v předchozí kapitole jako nevhodné. Po provedení obou metod zjistíme, že odhady získané metodou momentů porušují požadavek na kladnost parametrů β a λ , proto k analýze dat použijeme pouze metodu maximální věrohodnosti MLE, podle které se jednotlivé parametry odhadnuté z naměřených dat pohybují v následujícím rozsahu

$$-6,7643 \leq \alpha \leq 0,4068,$$

$$0,1977 \leq \beta \leq 5,8786,$$

$$0,1259 \leq \lambda \leq 4,3632.$$

Na obrázku 4.1 jsou zobrazeny GIG hustoty s parametry získanými metodou maximální věrohodnosti, přičemž pro přehlednost grafů jsme vykreslení rozdělili do tří částí, kde každá křivka vždy odpovídá jednomu hustotnímu pásmu. Na první pohled jistě zaujmou křivky v grafu *a*) reprezentující hodnoty, o kterých máme tušení, že by je GIG distribuce mohla vysvětlovat velmi dobře. O tom, jak moc GIG distribuce odhadnutá metodou maximální věrohodnosti prokládá data s nízkou hustotou provozu se lze přesvědčit na obrázku 4.2, kde jsme GIG hustotou proložili histogram získaný z časových rozestupů vozidel v daném hustotním pásmu. Zároveň jsme se přesvědčili, že GIG hustota dostatečně prokládá i data při vyšší hustotě provozu. Zde je vhodné zdůraznit, že s narůstající hustotou provozu rapidně ubylo naměřených dat, podle čehož jsou upravovány počty sloupců v histogramu. Pozorování, jak dobře distribuce prokládá histogram naměřených hodnot, bylo provedeno pomocí Kolmogorovy a L_1 vzdálenosti. Kolmogorova vzdálenost K byla zavedena v předchozí kapitole (viz (3.4)) a L_1 vzdáleností μ nazýváme

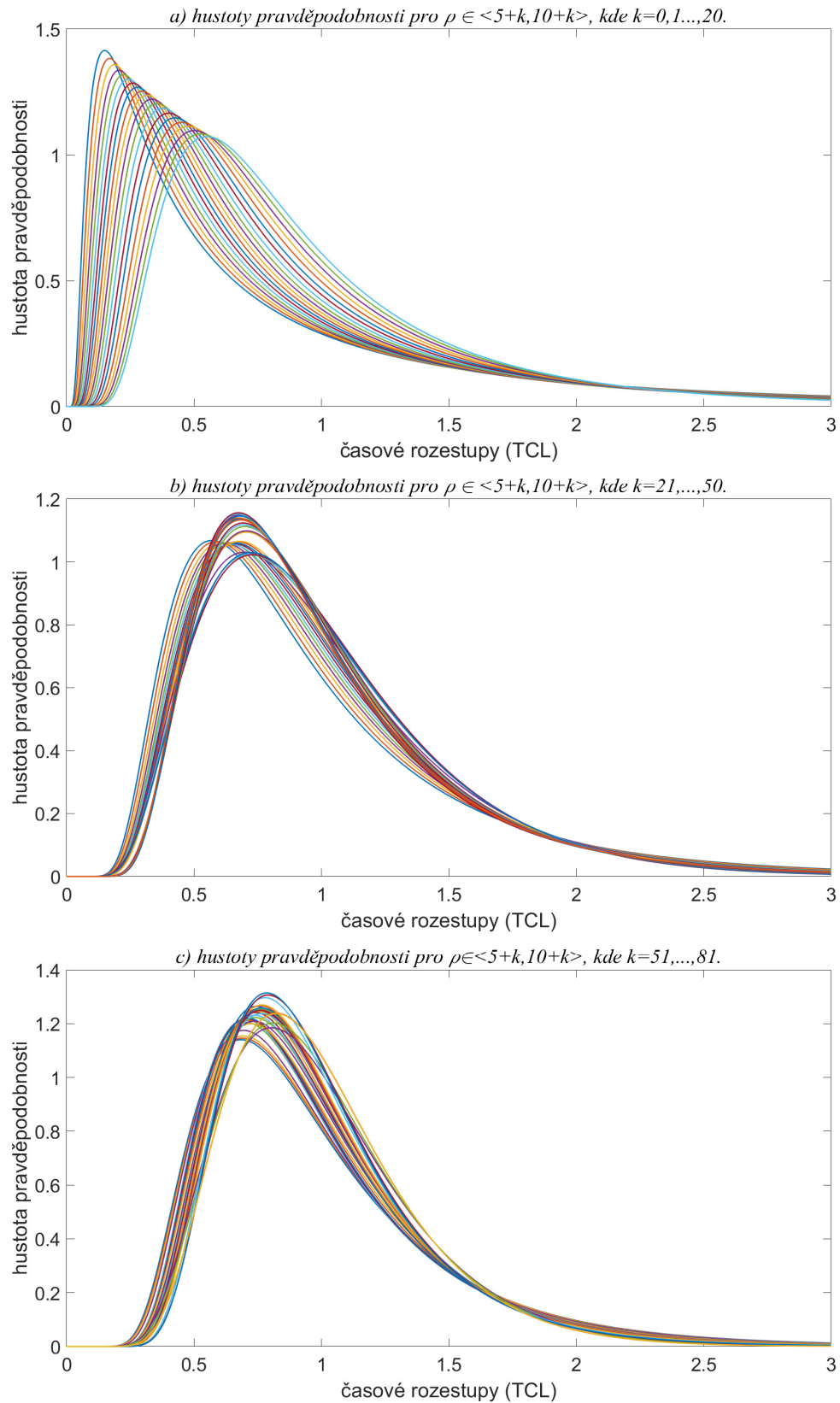
metriku zavednou předpisem

$$\mu(f, g) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx}.$$

Zmíněné vzdálenosti histogramu a GIG distribuce jsou vyobrazeny na obrázcích 4.3 a 4.4. Výsledky vypovídají o tom, že přibližně do hustoty provozu $\rho = 70 \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$ GIG hustota dobře prokládá příslušné histogramy, pro hustoty vyšší než $84 \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$ už zaznamenáváme velké odchylky. Na obrázku 4.5 jsou zakresleny hodnoty logaritmické věrohodnostní funkce vyčíslené v bodě maxima, je tedy možné nahlédnout jakého maxima jsme maximalizací dosáhli. V poslední sérii obrázků 4.6, 4.7 sledujeme vývoj odhadu parametrů α a β s rostoucí hustotou provozu. Zejména pro hustoty do $34 \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$ pozorujeme, že zvolení záporného α se prokazuje za vhodné.

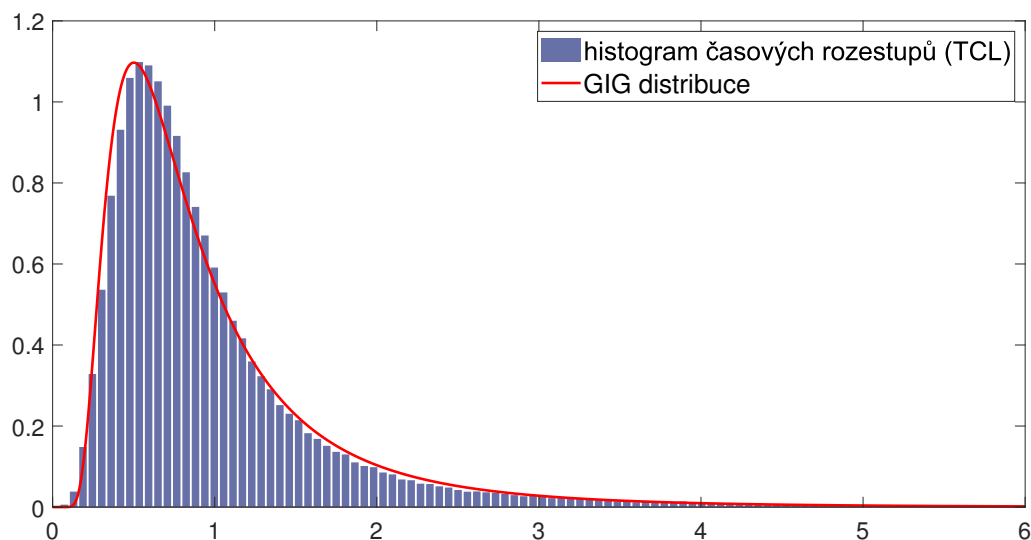
Shrňme si nyní zásadní poznatky z provedené analýzy časových rozestupů. Cílem bylo potvrdit predikci o tom, že GIG distribuce je vhodná hustota k popisu časových rozestupů vozidel jedoucích v rychlém dálničním pruhu. K odhadu parametrů jsme využili metodu maximální věrohodnosti a podle prvotního náhledu na vykreslené odhadnuté GIG distribuce jsme nabyli podezření, že by GIG distribuce se zápornou hodnotou α mohla dobře popisovat zejména rozestupy naměřené v hustotním pásmu $\rho \in \langle 5, 30 \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$. Při bližším zkoumání odhalujeme, že ačkoliv méně zdárně, ale stále dostatečně dobře vysvětluje GIG hustota i data s vyššími hustotami provozu. První velké nepřesnosti zaznamenáváme až pro data s hustotou $80 \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$.

Obrázek 4.1: Ukázka GIG distribucí získaných odhadem metodou maximální věrohodnosti MLE.

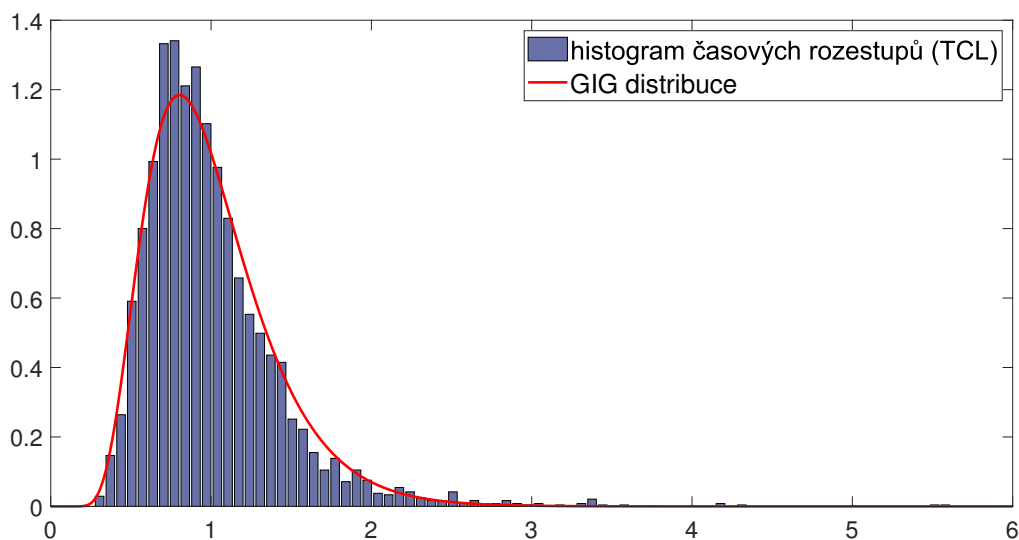


Obrázek 4.2: Prokládání GIG distribuce naměřenými daty.

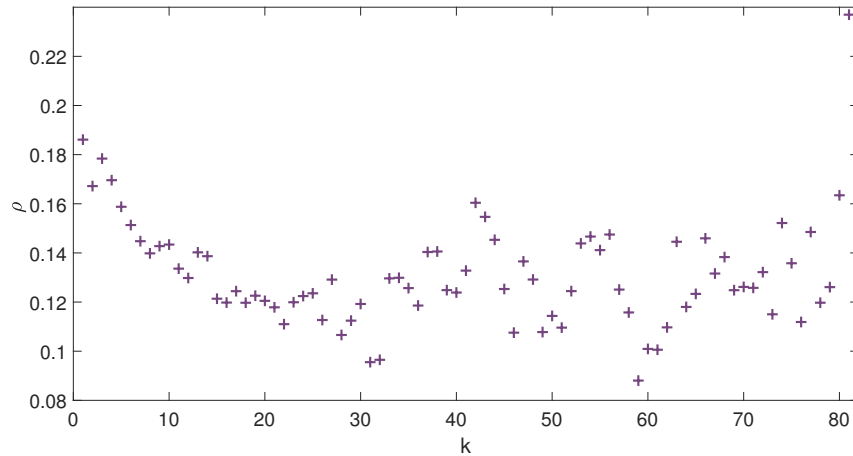
(a) Proložení histogramu rozestupů při hustotě $\rho \in (22, 27) \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$ GIG distribucí získanou metodou MLE s odhadnutými parametry $\alpha^* = -3,2205, \beta^* = 1,6854, \lambda^* = 0,2839$.



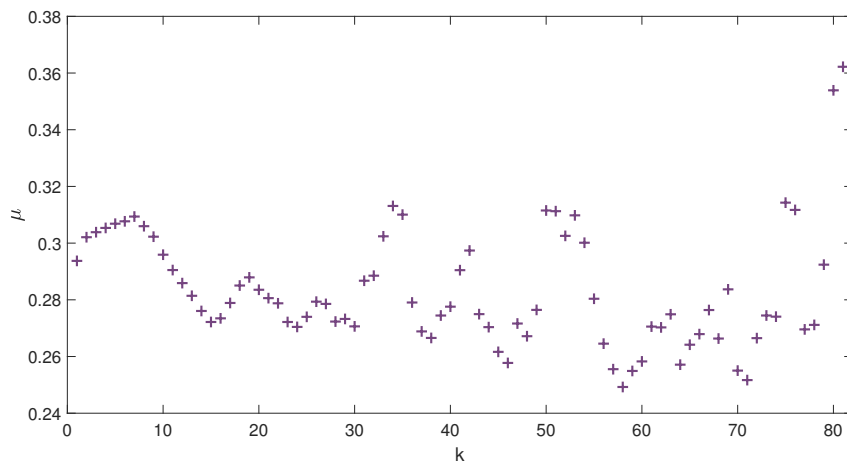
(b) Proložení histogramu rozestupů při hustotě $\rho \in (79, 84) \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$ GIG distribucí získanou metodou MLE s odhadnutými parametry $\alpha^* = -0,0166, \beta^* = 2,5616, \lambda^* = 3,9451$.



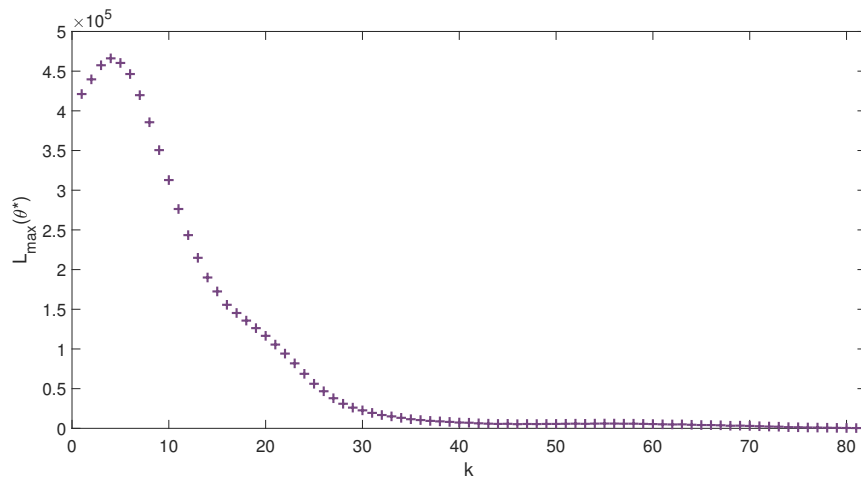
Obrázek 4.3: Kolmogorova vzdálenost ρ histogramu a prokládané GIG distribuce pro každé hustotní pásmo $\rho \in \langle 4 + k, 9 + k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$.



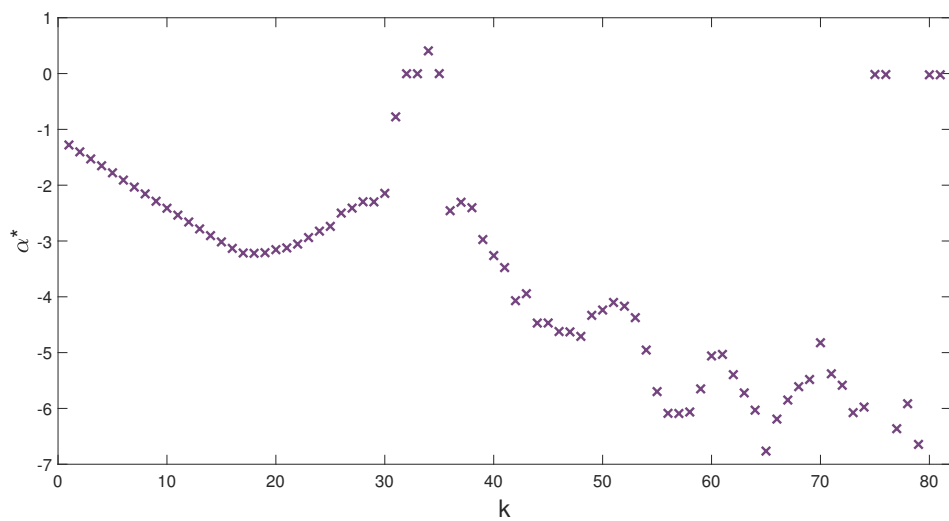
Obrázek 4.4: L_1 vzdálenost μ histogramu a prokládané GIG distribuce pro každé hustotní pásmo $\rho \in \langle 4 + k, 9 + k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$.



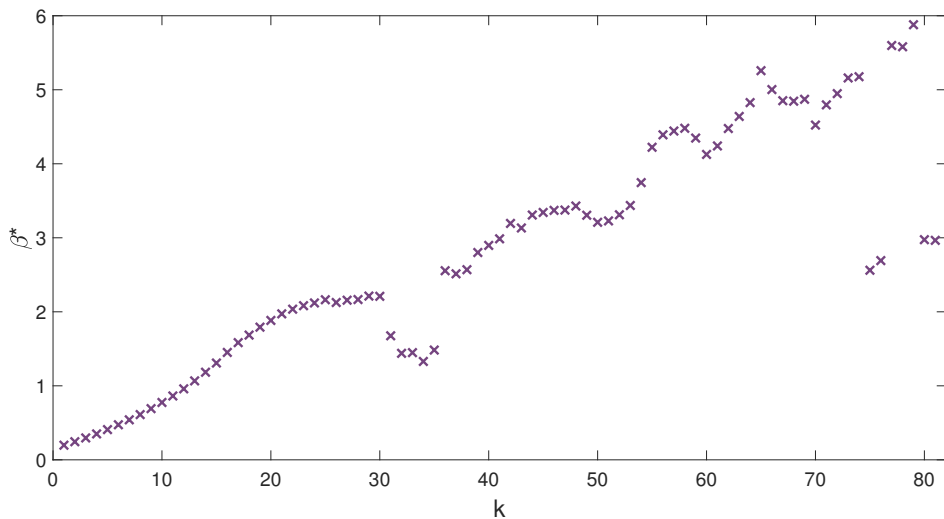
Obrázek 4.5: Hodnota logaritmicke věrohodnostní funkce vyčíslená v bodě maxima pro každé hustotní pásmo $\rho \in \langle 4 + k, 9 + k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$.



Obrázek 4.6: Závislost odhadu parametru α na hustotě provozu $\rho \in \langle 4+k, 9+k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$.



Obrázek 4.7: Závislost odhadu parametru β na hustotě provozu $\rho \in \langle 4+k, 9+k \rangle \frac{\text{vozidel}}{\text{km}}$, kde $k = 1, 2, \dots, 81$.



Závěr

Tato práce byla rozdělena do tří hlavních částí. V první části jsme se seznámili se třídou balancovaných hustot \mathcal{B} a vyšetřili vlastnosti Zobecněného inverzního Gaussova rozdělení pro negativní hodnotu parametru α . Navázali jsme tak na práci [2] a našli asymptotický škálovací vztah GIG hustoty pro $\alpha < 0$ tvaru

$$\lambda = \alpha + \beta + \frac{3}{2},$$

který je shodný s asymptotickým škálovacím vztahem pro nezáporný parametr. Zároveň jsme také formulovali existenční podmínku řešitelnosti škálovací rovnice GIG distribuce, podle které lze GIG hustotu škálovat pouze tehdy, je-li $\alpha + \beta + 2 > 0$.

Ve druhé části jsme představili základní statistické metody pro bodové odhady parametrů a sestrojili vlastní generátor pseudonáhodných čísel NewRNDGIG, který jsme posléze pomocí uvedených metod porovnali s OldRNDGIG, tj. generátorem sestaveným podle článku Luce Devroye [9]. Pomocí těchto statistických metod jsme došli k závěru, že OldRNDGIG je vhodnější pro práci s větším množstvím dat, nicméně pro malé datové sady vykazoval lepší výsledky NewRNDGIG.

Poslední část byla zaměřená na zpracování dat z dopravního měření z holandské dálnice A9. K tomu jsme využili metodu maximální věrohodnosti MLE. Výsledky potvrdily naši teoretickou predikci o tom, že data naměřená v rychlém pruhu do určité hranice hustoty provozu odpovídají GIG distribuci se zápornou hodnotou parametru α .

Během psaní této práce jsme narazili i na problémy, které sice nebyly pro tuto práci významné, avšak jejich dalším zkoumáním by bylo možné na tuto práci navázat. Jedná se například o vyšetření analytického předpisu distribuční funkce GIG hustoty, čímž by se v numerických výpočtech uvedených v této práci snížila chyba výpočtu. Dále bychom se, stejně jako Ing. Vacková ve své práci [2], mohli pokusit o vylepšení vztahu pro závislost škálovací konstanty λ na zbylých parametrech α a β . V neposlední řadě je námětem do budoucna také zkoumání definitnosti Hessovy matice vypočtené z logaritmické věrohodnostní funkce GIG hustoty ve stacionárním bodě při výpočtu v metodě maximální věrohodnosti (MLE), čímž jsme se nezabývali, neboť nám k výpočtům stačil numerický postup.

Součástí práce je CD s programem NewRNDGIG a souborem s daty, která byla taktéž zpracována v prostředí MATLABu.

Literatura

- [1] KRBÁLEK, Milan: *Úlohy matematické fyziky*, 1. vydání, V Praze: České vysoké učení technické, 285 s., ISBN 9788001050002, 2012.
- [2] VACKOVÁ, Jana: *Multi-headway statistika systémů s kombinovanými potenciály*, Výzkumný úkol FJFI ČVUT, 2016.
- [3] JORGENSEN, Bent: *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution, Lecture Notes in Statistics 9*, New York: Springer-Verlag, 188 s., ISBN 9780387906652, 1982.
- [4] KRBÁLEK, Milan: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, 1. vydání, V Praze: České vysoké učení technické, 154s., ISBN 9788001050002, 2014.
- [5] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, [online, dostupné z: http://people.math.sfu.ca/cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf], str. 378, 1970 [cit. 2020-04-01].
- [6] Virius, Milan: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, 1. vydání, V Praze: České vysoké učení technické, 154s., ISBN 9788001050002, 2014.
- [7] KRBÁLEK, Milan: *Matematická analýza IV*, 2. vydání, V Praze: České vysoké učení technické, 252 s., ISBN 9788001043158, 2009.
- [8] Virius, Miroslav: *Metoda Monte Carlo*, 1. vydání, V Praze: České vysoké učení technické, 233 s., ISBN 9788001045954, 2010.
- [9] Devroye, Luc: *Random variate generation for the generalized inverse Gaussian distribution Statistics and Computing*, Vol. 24, pp. 239-246, 2014.
- [10] Statovic (2017): *gigrnd(P, a, b, sampleSize)*, MATLAB Central File Exchange, [cit. 2020-06-30] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/53594-gigrnd-p-a-b-samplesize>.
- [11] TRUSINA, Jakub: *Aplikace statistického testování hypotéz na data z experimentu ATLAS*, Bakalářská práce FJFI ČVUT, 2016.
- [12] KRBÁLEK M., KRBÁLKOVÁ M.: *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*, Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice, 2018.
- [13] KRBÁLEK M., HELBING D.: *Determination of interaction potentials in freeway traffic from steady-state statistics*, Physica A 333, str. 370-378, 2004.