

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY
A MECHATRONIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Návrh vypružení kolejových vozidel s definovanou
osovou a příčnou tuhostí

Bc. Ondřej Ježek
Praha 2020

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Ježek** Jméno: **Ondřej** Osobní číslo: **437287**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Návrh vypružení kolejových vozidel s definovanou osovou a příčnou tuhostí

Název diplomové práce anglicky:

Design of suspension of rail vehicles with defined axial and transverse stiffness

Pokyny pro vypracování:

- 1) Proveďte rešerši druhů vypružení kolejových vozidel a zvláště pružícího prvku flexi-coil zahrnující požadavky na jeho funkci, způsoby návrhu, výpočtů tuhosti a namáhání. Dále uveďte jeho možné aplikace v kolejových vozidlech.
- 2) Proveďte analytické a numerické výpočty tuhosti a namáhání pružícího prvku flexi-coil pro stávající zadané provedení. Zohledněte vliv okrajových podmínek i diskretizace u numerických simulací.
- 3) Optimalizujte geometrii pružícího prvku flexi-coil s ohledem na zadané požadavky.
- 4) Srovnajte a diskutujte analytické výpočetní postupy s výsledky numerických analýz, zhodnoťte navrženou optimální konstrukci z hlediska kladených požadavků.

Seznam doporučené literatury:

- Vehicle Suspension Systems [on-line]. Dostupné z <http://www.railway-technical.com/archive/vehicle-suspension-systems.pdf>
- Railway suspension [on-line]. Dostupné z <https://the-contact-patch.com/book/rail/r1114-railway-suspension>

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Ctirad Novotný, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Ing. Tomáš Heptner, ústav automobilů, spalovacích motorů a kolejových vozidel FS


Datum zadání diplomové práce: **22.04.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **07.08.2020**

Platnost zadání diplomové práce:


Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

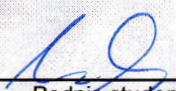

doc. Ing. Miroslav Španěl, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

24.6.2020
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem „Návrh vypružení kolejových vozidel s definovanou osovou a příčnou tuhostí“ vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené literatury a pramenů. Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 9. srpna 2020

.....
Ondřej Ježek

Jméno autora (Author): Bc. Ondřej Ježek

Vedoucí práce (Thesis supervisor): Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.

Název diplomové práce (Title): Návrh vypružení kolejových vozidel s definovanou osovou a příčnou tuhostí
(Design of suspension of rail vehicles with defined axial and transverse stiffness)

Univerzita (University): České vysoké učení technické v Praze
(Czech Technical University in Prague)

Fakulta (Faculty): Fakulta strojní (Faculty of Mechanical Engineering)

Ústav (Department): 12105 Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
(Department of Mechanics, Biomechanics and Mechatronics)

Počet stran (Number of pages): 111

Počet obrázků (Number of figures): 49

Počet tabulek (Number of tables): 16

Přílohy (Extras): 0

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá problematikou návrhu sekundárního vypružení podvozku Y 0270. V úvodu práce jsou popsány nejčastěji používané pružící prvky nákladních i osobních kolejových vozidel. Dále jsou zde uvedené aplikace šroubovitých pružin typu flexi-coil v podvozcích kolejových vozidel. V praktické části jsou popsány vlastnosti zmíněného typu pružin. Jsou zde využity analytické i numerické výpočty pro stanovení osově a příčné tuhosti. Další část práce se zabývá optimalizací těchto pružících prvků za účelem zvýšení poměru příčných tuhostí. Na konec je provedena analýza namáhání navržených šroubovitých pružin.

Klíčová slova: Vypružení, flexi-coil, podvozek Y 0270, osová tuhost, příčná tuhost, MKP, optimalizace, namáhání.

Abstract: This diploma thesis deals with the design of the secondary suspension of the bogie Y 0270. In the introduction is described the most used flexible elements in freight and passenger rail vehicles. Other applications of flexi-coil springs in bogies are presented here. In the practical part is described the mechanical behavior of the spring. Analytical and numerical calculations for determining axial and transverse stiffness are available here. The next part of the thesis deals with the optimization of these spring elements in order to increase the ratio of transverse stiffness. Finally, the stress analysis of the presented coil springs is performed.

Key words: Suspension, flexi-coil, bogie Y 0270, axial stiffness, transversal stiffness, FEM, optimization, stress.

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Ctiradovi Novotnému, Ph.D. za odborné rady a konstruktivní připomínky při vypracování této práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Tomáši Heptnerovi za odborné rady z oboru kolejových vozidel. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat mé rodině a přátelům za jejich podporu během celého studia a psaní této diplomové práce.

Obsah

Anotační list	ii
Poděkování	iv
Symboly	x
1 Úvod	1
2 Cíl práce	2
3 Vypružení kolejových vozidel	3
3.1 Základní druhy pružících prvků	4
3.1.1 Vinuté válcové pružiny	4
3.1.2 Pružnice	5
3.1.3 Vzduchová pružina	6
3.1.4 Pryžo-kovové pružiny	7
3.2 Podvozky lokomotiv	8
3.2.1 Škoda 109E	8
3.2.2 Vectron	9
3.2.3 Traxx	11
3.3 Podvozky osobních vozů	11
3.3.1 Podvozky Y 32	11
3.3.2 Podvozky SGP 300	13
3.4 Podvozky nákladních vozů	15
3.4.1 Podvozky Y 25	15
3.4.2 Podvozky Diamond	17
4 Návrh pružiny sekundárního vypružení	20
4.1 Parametry pružiny flexi-coil z podvozku Y 0270	21
4.1.1 Výpočet maximální boční deformace pružiny	23
4.2 Analytický výpočet osově tuhosti	25
4.3 Analytický výpočet příčné tuhosti	27
4.3.1 Výpočet příčné tuhosti podle Wahla	28

4.3.2	Výpočet příčné tuhosti podle Timošenka a Ponomareva	30
4.3.3	Výpočet příčné tuhosti dle normy ČSN EN 13906-1	31
4.3.4	Porovnání výsledků	31
4.4	Výpočet namáhání	32
5	Numerický model	35
5.1	Výběr vhodného elementu	36
5.1.1	Některé nežádoucí efekty při použití různých elementů	38
5.2	Parametrický model	39
5.2.1	Síť tvořícího profilu	40
5.2.2	Kopírování profilu po trajektorii	41
5.2.3	Závěrné části	45
5.2.4	Definování kontaktů	47
5.3	Citlivostní analýza	50
5.4	Výsledky získané numericky	53
5.4.1	Osová tuhost	53
5.4.2	Příčná tuhost	55
5.4.3	Vyhodnocení namáhání	62
6	Uložení pružin flexi-coil	64
6.1	Podvozek s jedním párem sekundárních pružin flexi-coil	65
6.2	Důsledky nevhodného uložení pružin	67
6.2.1	Relativní posuv podvozku a skříně	67
6.2.2	Moment mezi podvozkem a skříní	67
7	Optimalizace	69
7.1	Optimalizace 1	71
7.2	Optimalizace 2	75
7.3	Výsledky optimalizace	78
8	Analýza namáhání	84
8.1	Výpočet namáhání	85
8.2	Kontrola přípustného torzního namáhání	88
9	Závěr	90

Seznam tabulek

4.1	Parametry pružícího prvku	21
4.2	Mechanické vlastní oceli 51CrV4	22
4.3	Parametry pro výpočet maximální boční deformace [23]	23
4.4	Maximální deformace válcové pružiny v rovině xy	24
4.5	Výsledky osových tuhostí	27
4.6	Parametry pro výpočet příčné tuhosti	28
4.7	Vypočtené příčné tuhosti	31
4.8	Vypočtené namáhání	34
5.1	Příklad definice uzlů a elementů pro program Abaqus	45
5.2	Porovnání osových tuhostí	53
5.3	Předzatížení šroubovitě pružiny	58
5.4	Předzatížení šroubovitě pružiny s umožněním příčného srovnání	59
5.5	Vypočtené výsledky MKP	62
5.6	Ekvivalentní napětí analyticky a numericky	63
7.1	Výsledky optimalizace	79
8.1	Únavová pevnost	87

Seznam obrázků

3.1	Uložení pružiny flexi-coil [7]	5
3.2	Pětistavá parabolická pružnice [9]	6
3.3	Vzduchová pružina [1]	7
3.4	Pryžo-kovová pružina [9]	7
3.5	Umístění pružin v podvozku lokomotivy 109E [24]	9
3.6	Podvozek Vectron [30]	10
3.7	Typový výkres podvozku Y 32 [8]	13
3.8	Typový výkres podvozku SGP 300 [8]	15
3.9	Podvozek Y 25 Lsdi [29]	17
3.10	Typový výkres podvozku Y 25 Ls-K [28]	17
3.11	Schéma podvozku Diamond s detailem vypružení [11] [34]	19
4.1	Typový výkres podvozku Y 0270-S [13]	20
4.2	Detail konce pružiny	22
4.3	Schéma natočení podvozku při průjezdu vozu obloukem [13]	24
4.4	Pružina pro současném působení osových a příčných sil	25
4.5	Určení parametru U z grafu [14]	29
4.6	Závislost součinitelů na poměru vinutí i	33
4.7	Rozložení ekvivalentního napětí po průřezu	33
5.1	Druhy integrace osmiuzlového elementu [6]	37
5.2	Hourglass efekt [33]	38
5.3	Volba sítě profilu	40
5.4	Kinematická tvorba sítě	43
5.5	Číslování uzlů a stěn u 2D elementů [31]	44
5.6	Číslování uzlů a stěn u 3D elementů [31]	44
5.7	Schéma ořezání sítě	46
5.8	Pružina po ořezání závěrných závitů	46
5.9	Číslování stěn elementů [31]	47
5.10	Model pružiny sekundárního vypružení z podvozku Y 0270	49
5.11	Citlivostní analýza – osově zatížení	51
5.12	Citlivostní analýza – příčné zatížení	52
5.13	Rozložení ekvivalentního napětí v závěrném závitě	55

5.14	Polární diagram tuhosti pružiny (a) - zatíženo posuvem	57
5.15	Polární diagram tuhosti dvou pružin (a) - zatíženo posuvem	58
5.16	Polární diagram tuhosti pružiny (a) - zatíženo silou	60
5.17	Polární diagram tuhosti dvou pružin (a) - zatíženo silou	61
6.1	Uložení pružin sekundárního vypružení v podvozku Y32	66
6.2	Nevhodné uložení pružin sekundárního vypružení v podvozku Y32	68
7.1	Princip optimalizační metody <i>Patternsearch</i> [15]	71
7.2	Vývojový diagram optimalizace 1	73
7.3	Hodnoty CF_1 v průběhu optimalizace 1	74
7.4	Lokální extrém CF_1	75
7.5	Vývojový diagram optimalizace 2	77
7.6	Vývoj CF_2 v průběhu optimalizace 2	78
7.7	Polární diagram tuhosti pružiny (b)	81
7.8	Polární diagram tuhosti dvou pružin (b)	81
7.9	Polární diagram tuhosti pružiny (c)	82
7.10	Polární diagram tuhosti dvou pružin (c)	82
8.1	Ekvivalentní napětí jako funkce osové deformace	85
8.2	Smykové napětí jako funkce osové deformace	87

Symbols

CF_1	Cílová funkce v optimalizaci 1 [1]
CF_2	Cílová funkce v optimalizaci 2 [N]
D	Střední průměr pružiny [mm]
D_{max}	Maximální průměr obálky pružiny [mm]
D_{opt}	Optimalizační parametr střední průměr vinutí [mm]
D_{start}	Výchozí hodnota optimalizace středního průměru vinutí [mm]
E	Modul pružnosti v tahu [N/mm ²]
G	Modul pružnosti ve smyku [N/mm ²]
H	Výška zatížené pružiny [mm]
H_0	Výška nezatížené pružiny [mm]
H_1	Výška zatížené pružiny silou 31kN [mm]
H_k	Rozchod koleje [mm]
H_p	Rozteč pružin [m]
I	Kvadratický moment setrvačnosti průřezu drátu [mm ⁴]
K	Korekční součinitel podle Sopwitha [1]
L_v	Vzdálenost středů podvozků [m]
M_p	Moment mezi podvozkem a skříní [Nm]
M_z	Moment vznikající při osovém stlačení pružiny [Nm]
N	Celkový počet závitů [1]
P	Boční síla [N]

Q_1	Osová síla [N]
R	Poloměr pružiny [mm]
R_o	Poloměr oblouku [m]
R_x	Reakce ve směru osy x [N]
R_{xy}	Boční reakce [N]
R_y	Reakce ve směru osy y [N]
R_z	Reakce ve směru osy z [N]
S_k	Maximální ekvivalentní napětí HMM od kombinovaného zatížení [N/mm ²]
S_o	Maximální ekvivalentní napětí HMM od osového zatížení [N/mm ²]
T_x	Transformační matice pro rotaci kolem osy x
T_y	Transformační matice pro rotaci kolem osy y
U	Parametr pro Wahlův vztah [1]
d	Průměr drátu [mm]
d_{opt}	Optimalizační parametr průměr drátu [mm]
d_{start}	Výchozí hodnota optimalizace průměr drátu [mm]
i	Poměr vinutí [1]
k_{xy}	Boční tuhost [N/mm]
$k_{y_{max}}$	Maximální příčná tuhost [N/mm]
$k_{y_{min}}$	Minimální příčná tuhost [N/mm]
k_{yn}	Příčná tuhost podle normy [N/mm]
$k_{y_{prum}}$	Průměrná příčná tuhost [N/mm]
$k_{y_{TP}}$	Příčná tuhost podle Timošenska - Ponomareva [N/mm]
$k_{y_{Wahl}}$	Příčná tuhost podle Wahla [N/mm]
k_z	Svislá tuhost pružiny [N/mm]
k_{z_d}	Osová tuhost dle zadaných parametrů [N/mm]

$k_{z_{mkp}}$	Osová tuhost dle MKP [N/mm]
$k_{z_{mkp4}}$	Osová tuhost dle MKP 4 závity [N/mm]
k_{z_o}	Osová tuhost z komplexního vztahu [N/mm]
k_{z_s}	Osová tuhost pro modifikovaný průměr drátu [N/mm]
m	Poměr příčných tuhostí [1]
n_1	Počet činných závitů [1]
$n_{1_{start}}$	Výchozí hodnota optimalizace počet činných závitů [1]
n_2	Počet závitů v závěrné části pružiny [1]
p	Stoupání závitů [mm/ot]
p_1	Stoupání činných závitů [mm/ot]
p_2	Stoupání závěrných závitů [mm/ot]
r	Vektor optimalizačních parametrů
s	Boční deformace [mm]
t	Parametr rovnice šroubovice [1]
x_1	Posuv ve směru osy x [mm]
x_{max}	Maximální deformace (výchylka) v podélném směru [mm]
y_1	Posuv ve směru osy y [mm]
y_{max}	Maximální deformace (výchylka) v příčném směru [mm]
z_1	Posuv ve směru osy z [mm]
z_{ampl}	Amplituda deformace ve směru osy z [mm]
z_{max}	Maximální deformace ve směru osy z [mm]
z_{min}	Minimální deformace ve směru osy z [mm]

Řecké symboly

α	Stoupání činných závitů [rad]
----------	-------------------------------

β	Štíhlostní poměr zatížené pružiny [1]
β_0	Štíhlostní poměr nezatížené pružiny [1]
δ	Rotace kolem osy pružiny [rad]
γ	Pomocná veličina Timošenko - Ponomareva vztahu [1]
λ	Poddajnost [mm/N]
ψ	Konstanta zohledňující způsob uložení pružiny [1]
σ_{HMH}	Ekvivalentní napětí dle HMH [N/mm ²]
σ_k	Maximální ekvivalentní napětí HMH od kombinovaného zatížení [N/mm ²]
σ_o	Maximální ekvivalentní napětí HMH od osového zatížení [N/mm ²]
τ	Maximální smykové napětí při osovém zatížení [N/mm ²]
τ_{czul}	Smykové napětí při pevné dálce [N/mm ²]
τ_d	Smykové napětí při dynamickém zatížení horní [N/mm ²]
τ_h	Smykové napětí při dynamickém zatížení spodní [N/mm ²]
τ_k	Maximální smykové napětí při kombinovaném zatížení [N/mm ²]
τ_s	Maximální smykové napětí podle Sopwitha [N/mm ²]
τ_{st}	Smykové napětí při statickém zatížení [N/mm ²]
τ_w	Maximální smykové napětí podle Wahla [N/mm ²]
ξ	Poměr svislé deformace k nezdeformované výšce pružiny [1]

Seznam zkratek

2D	dvourozměrný
3D	trojrozměrný
CF	Cílová funkce
MKP	Metoda konečných prvků

1 Úvod

Vypružení typu flexi-coil je v dnešní době hojně využívané v konstrukci nejen u lokomotiv a také u vozů kolejové dopravy. Hlavní výhodou tohoto pružícího prvku je možnost vypružení v příčném, respektive v podélném směru. Pro návrh a aplikaci těchto pružin je třeba znát jejich vlastnosti. V minulosti byl návrh prováděn pomocí analytických vztahů a následně probíhalo ověření prostřednictvím experimentů. Pro výpočet osově a příčné tuhosti je možné využít různé vztahy, např. podle normy [10]. Tyto analytické vztahy ale nejsou schopné popsat reálné – nelineární chování těchto pružin, zejména u výpočtů příčné tuhosti jsou výsledky jen přibližné. V dnešní době lze využít pro návrh těchto pružin pokročilejší metody, jako je například metoda konečných prvků (dále MKP). Právě pomocí MKP je možné simulovat jejich chování při různých okrajových podmínkách, čímž získáme větší množství informací o jejich vlastnostech. Podmínkou použití MKP je nutnost verifikace simulací. Bližší pochopení vlastností šroubovitých pružin a jejich vhodnou aplikací lze přispět ke zlepšení jízdních vlastností kolejových vozidel. MKP je možno využít i v rámci optimalizace a navrhnout tak pružící prvek dle specifických požadavků.

2 Cíl práce

Cílem této práce je optimalizace geometrie pružícího prvku flexi-coil ze sekundárního vypružení podvozku Y 0270. Úvodem jsou v rámci rešerše popsány možnosti vypružení kolejových vozidel. Detailněji je popsáno vypružení pomocí šroubových pružin. Dále jsou zde uvedeny aplikace šroubových pružin flexi-coil v podvozcích kolejových vozidel. Praktická část se hlouběji zaměřuje na návrh a vlastnosti šroubových flexi-coil pružin. Jsou zde uvedeny analytické výpočty osově tuhosti, příčné tuhosti a výpočty namáhání. V další části je popsána tvorba parametrického MKP modelu a jsou zde uvedeny numericky vypočtené výsledky pro různé druhy okrajových podmínek. Rovněž je zde uvedeno srovnání analytických a numerických výsledků pro zadaný pružící prvek. Zvláštní kapitola je věnována využití specifických vlastností šroubových pružin v podvozku Y 0270. Ke konci práce je provedena optimalizace šroubovitě pružiny pro zlepšení jízdních vlastností této podvozku. Výsledná geometrie pružícího prvku je také ověřena z hlediska namáhání.

3 Vypružení kolejových vozidel

Vypružení má spolu s tuhostí rámu podvozku významný podíl na výsledných vlastnostech vozidla, jako jsou dynamické účinky na trať a s tím související jízdní komfort. U kolejových vozidel je vypružení realizováno ve třech osách, kdy pro konstrukci kolejových vozidel zavádíme souřadný systém, kde osa x je v podélném směru vozidla, osa y v příčném a osa z ve svislém směru. Úkolem vypružení je zejména:

- Snížit dynamické účinky mezi vozidlem a tratí při jízdě po nerovnostech.
- Zajistit dostatečný komfort cestujícím a ochranu pro převážený náklad.
- Zajistit rovnoměrné zatížení všech kol vozidla.
- Umožnit vzájemné pohyby dvojkolí vůči rámu podvozku a rámu vůči skříni.
- Udržovat výšku nárazníků a spřáhel ve stanoveném rozmezí.

Do soustavy vypružení kolejových vozidel lze dále zahrnout tlumiče, různé závěsy, zarážky ohraňující pracovní prostor pružin atd. Mezi hlavní pružící prvky je možno zařadit šroubovitě pružiny, pružnice, pryžo-kovové elementy a pružiny vzduchové. Nákladní vozy využívají jednostupňového vypružení, lokomotivy a vozidla pro osobní dopravu dvoustupňového vypružení. První stupeň vypružení je umístěn mezi ložiskovou skříň a rám podvozku. Druhý stupeň vypružení je umístěn mezi rám podvozku a skříni vozidla, ten bývá realizován vzduchovými pružinami, nebo šroubovitými pružinami typu flexi-coil.

3.1 Základní druhy pružících prvků

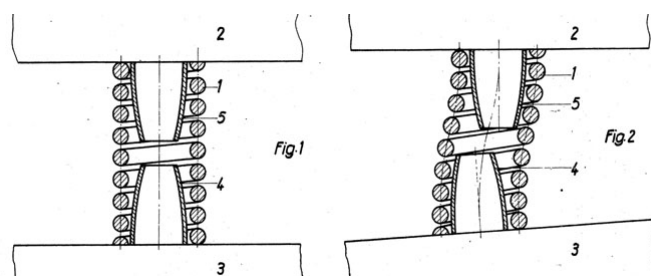
3.1.1 Vinuté válcové pružiny

Vinuté válcové pružiny neboli také šroubovitě pružiny jsou v dnešní době hojně využívané při konstrukci kolejových vozidel. Obecnou výhodou jsou malé zastavovací rozměry, nenáročná údržba a dobré využití materiálu, které zajišťuje jejich nízkou hmotnost. Vypružení prvního stupně bývá realizováno pomocí dvojice šroubovitých pružin umístěných po stranách ložiskové skříně a tlumení může být zajištěno paralelními tlumiči, nebo například třecím uzlem (jako je tomu u podvozku Y 25). V druhém stupni vypružení se využívají šroubovitě pružiny s efektem flexi-coil. Zde se jedná o masivní pružiny s větším počtem činných závitů jejichž pomocí lze navíc realizovat nejen svislé vypružení, ale také příčné, respektive podélné vypružení. Podélná tuhost pak určuje hodnotu momentu proti natáčení podvozku například v průjezdu obloukem. Pružiny flexi-coil se uplatňují nejen v sekundárním vypružení, ale i v primárním vypružení. Konstrukce uložení těchto pružin musí být přizpůsobena tak, aby nedošlo k překročení maximální míry příčného a podélného vybočení, při kterém by mohlo dojít ke ztrátě stability pružin. [12] [14]

Na pružiny tohoto typu jsou kladeny velké nároky na jejich přesnost a kvalitu. Vyrábí se z tyče kruhového průřezu, která je za tepla navíjena na trn. Závěrné části závitů jsou přihnuty, tak aby došlo ke kontaktu mezi koncem pružiny a činným závitem. Konce závěrných závitů jsou zabroušeny v rovině kolmé k ose pružiny. Nejčastějším materiálem pro výrobu šroubovitých pružin jsou oceli 51CrV4, 50CrV4 a 51CrMoV4 ve zušlechtěném stavu. Tyto oceli se vyznačují vysokou prokalitelností a vysokými hodnotami meze únavy při střídavém namáhání a také mají příznivý poměr pevnosti k mezi kluzu. Mez únavy můžeme navíc zvýšit vhodnou úpravou povrchu jako je

kuličkování. [26] [17]

Na obrázku 3.1 je vidět uložení pružiny flexi-coil, která je zatížena osovou i příčnou silou.



Obrázek 3.1: Uložení pružiny flexi-coil [7]

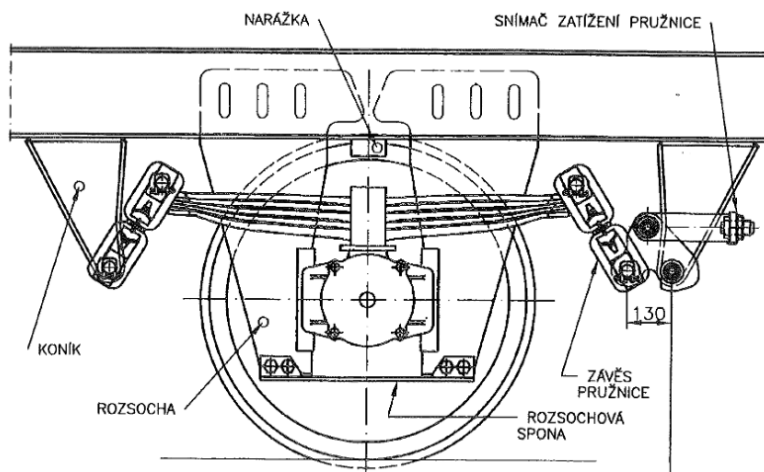
Návrhem těchto pružin se detailně zabývá norma ČSN EN 13906-1 [10].

3.1.2 Pružnice

Pružnice je v současné době často využívaný prvek pro první i druhý stupeň vypružení. Existuje více druhů pružnic. Obvykle se můžeme setkat s pětistými pružnicemi parabolického typu, ty se vyznačují úzkým parabolickým průřezem jednotlivých listů. Výhodou je pak konstantní ohybové napětí po celé délce pružnice. K mezilistovému tření a tedy k tlumení svislých kmitů dochází v oblastech na konci listů, kdy tlumící účinek je silně závislý na jejich stavu. Při zanedbání údržby a vzniku koroze dochází k velkému nárůstu tření, které může vést až k takzvanému zamrznutí pružnice což je stav, kdy pružnice ztrácí svůj pružící efekt. Při jízdě vozidla pak vznikají velké dynamické rázy, které poškozují prvky vozidla i tratě. Další nevýhody pružnic jsou větší nároky na zástavbový prostor a jejich velká hmotnost. S rostoucí hmotností pružícího prvku roste i množství nevypružené hmoty vozidla.

Uložení pružnice v prvním stupni vypružení, tj. mezi ložiskovou skříní a dvojkolím, je provedeno pomocí závěsů (obrázek 3.2). Dvojkolí je vedeno rozsochami. Tíhová

reakční síla vozidla pak působí skrze pružnici na závěsy a následně na koníky, které jsou součástí rámu podvozku.



Obrázek 3.2: Pětistavá parabolická pružnice [9]

[9] [34]

3.1.3 Vzduchová pružina

Pružící prvek používaný v druhém stupni vypružení zejména v konstrukci osobních vozů, kde je kladen velký důraz na pohodlí cestujících. Existují dva typy těchto pružin, vlnovcové a membránové. Ve vypružení kolejových vozidel se můžeme setkat pouze s pružinami membránového typu. Principem této pružiny je pohyb pístu ve velkém válci. Prostor mezi pístem a válcem je uzavřen membránou, která se při zatížení pružícího prvku deformuje a odvaluje. Změnou objemu vzduchu v pístu se zajišťuje konstantní výška podlahy od temene kolejnice. Při poruše membrány a úniku vzduchu, přebírá pružící efekt sériově zapojená pryžo-kovová pružina. Je však nutné tomuto stavu přizpůsobit jízdu vozidla. Vzduchové vypružení nemá téměř žádné vnitřní tření a je tedy vyžadováno paralelního zařazení tlumiče. [9] [34]



Obrázek 3.3: Vzduchová pružina [1]

3.1.4 Pryžo-kovové pružiny

Jedná se o pružící prvky šípového profilu. Skládají se z několika vrstev pryže prokládané ocelovými pláty. Často jsou využívány v prvním stupni vypružení kolejových vozidel společně s rámem podvozku poddajné konstrukce. Poddajnost pružících prvků je do značné míry dána způsobem uložení. Při smykovém zatížení má pryž větší poddajnost než při tlakovém. Tuhost vypružení lze tedy dimenzovat volbou materiálu, výškou pryžových bloků a způsobem uložení pružícího prvku. Pryž má velmi dobré tlumící vlastnosti a není třeba řadit do uzlu prvotního vypružení tlumící členy. Nevýhodou je náchylnost na stárnutí materiálu a také její postupné sesedání. [9] [34]

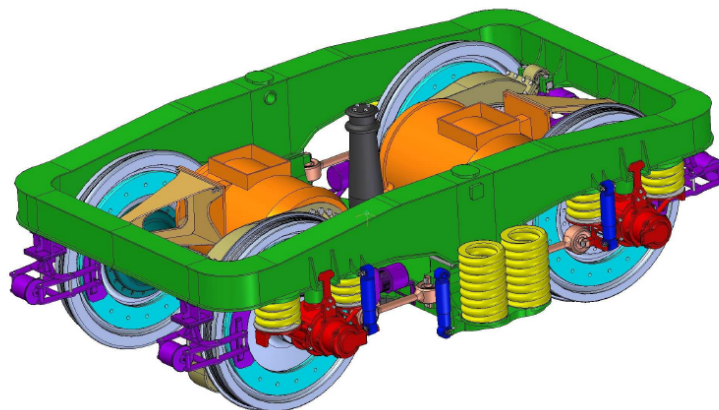


Obrázek 3.4: Pryžo-kovová pružina [9]

3.2 Podvozky lokomotiv

3.2.1 Škoda 109E

Konstrukční provedení lokomotivy 109E koncepčně vychází z podvozku Škoda 85E, který má bezkolébkový dvounápravový podvozek s dvojitým vypružením. Jeho výhodou je nízká hmotnost, malé nevypružené hmoty a nízko položený přenos tažných sil. Rám tohoto podvozku je svařované konstrukce, který je tvořený dvěma podélníky, dvěma čelníky a jedním dolním příčnickem, který je navařen na podélníky. Konce dolního příčnicku zasahují mimo podvozek a tvoří konzoly, které slouží pro umístění sekundárního vypružení a také pro upevnění ojnicek vedení dvojkolí (je vidět na obrázku 3.5). Spodní příčník má ve střední části otvor, kterým prochází otočný čep přes který lemniskátový mechanismus přenáší tažné síly ze skříně na rám podvozku. Mezi čelníky a spodním příčnickem jsou pomocí pryžo-kovových silentbloků uchyceny do konzol dva bloky pohonů. Skříně vozu je usazena přes dva páry sekundárních pružin na rámu podvozku. Tyto pružiny využívají efektu flexi-coil a zajišťují kromě svislého vypružení i možnost příčného pohybu mezi podvozkem a skříní. Podélný pohyb podvozku vůči skříně je vymezen vypruženými nárazkami. Absence kolébkky v této sestavě zvyšuje napětí v pružinách, které jsou více deformovány při natočení skříně kolem svislé osy vůči podvozkem. Primární vypružení podvozku tvoří čtyři páry vinutých válcových pružin rovněž v provedení flexi-coil. Tyto pružiny jsou umístěny mezi rám podvozku a ložiskové skříně. Podélný pohyb ložiskových skříní vůči rámu je vymezen pomocí ojnicek, které přenášejí podélné síly. [24]



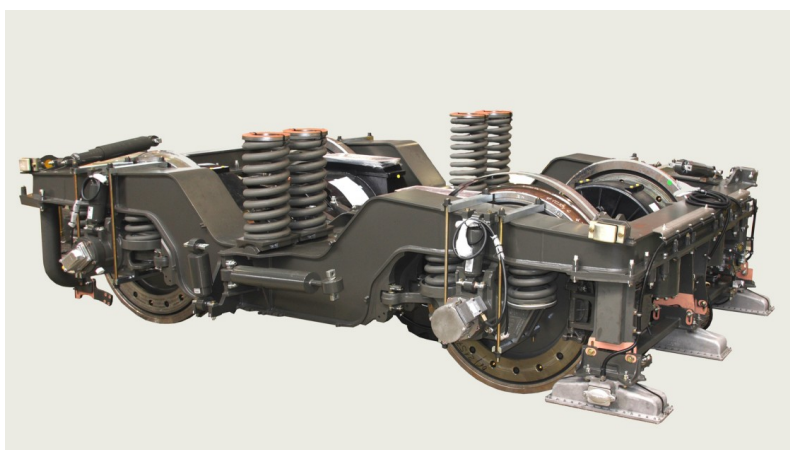
Obrázek 3.5: Umístění pružin v podvozku lokomotivy 109E [24]

3.2.2 Vectron

Lokomotivy Vectron vychází koncepčně z lokomotiv Europrinter ES64 a Eurorunner ER20 od společnosti SIEMENS a jsou vybaveny dvěma kabinami. Při návrhu skříně byl kladen důraz na bezpečnost a modularitu při zachování jednoduchosti konstrukčního řešení. Podobně jako u lokomotivy Škoda 109E, je rám podvozku svařované konstrukce a pro pohon je zde použit dutý hřídel. Výhodou je opět nízká hmotnost, malé nevypružené hmoty a nízko položený přenos tažných sil. Rám podvozku je tvořený ze svařovaných profilů, konkrétně ze dvou podélníků, středového nosníku, dvou koncových čelníků a z plechů dna. Tento rám je kompletně svařovaný automatickou technikou. Střed rámu obsahuje vedení pro tažný čep a pohon lokomotivy zajišťuje střídavé asynchronní motory. Přenos krouticího momentu je veden přes bezúdržbovou spojku s ocelovými lamelami, dále přes jednostupňovou převodovku na dvojkolí vozidla. Převodovka je uložena na nápravě a je zavěšena pomocí závěsky přenášející reakci točivého momentu do rámu podvozku. Převodovka je situována, co neblíže ke spojce pro snížení relativních pohybů mezi převodovkou a motorem. Tento typ pohonu má malé nevypružené hmoty, což příznivě ovlivňuje jízdní vlastnosti a

KAPITOLA 3. VYPRUŽENÍ KOLEJOVÝCH VOZIDEL

snižuje opotřebení od vibrací. Dvojkolí je z monoblokových kol a kované duté nápravy. Primární vypružení podvozku je tvořeno pomocí vinutých pružin, kde podélný pohyb ložiskových skříní vůči rámu je vymezen pomocí příčně-podélných ojnic. Sekundární vypružení je tvořeno vinutými pružinami, které využívají efektu flexi-coil. Na těchto pružinách jsou uloženy vrstvené pryžokovové prvky, které slouží jako izolační vrstva. Tyto pryžokovové prvky také tlumí přenos vibrací a dokážou převzít část příčné deformace, čímž snižují namáhání pružin flexi-coil. Pro zajištění tlumení a tím pádem bezpečný pohyb vozidla jsou zde použity dva typy tlumičů.



Obrázek 3.6: Podvozek Vectron [30]

Přenos podélných sil z podvozku na skřín vozidla zajišťují svislé čepy, které zasahují co nejbližší ke spojnicí temen kolejnic z důvodu eliminace klopných momentů vznikajících při přenosu tažných sil. Konstrukce podvozku lokomotivy Vectron můžeme vidět na obrázku 3.6. [30] [25]

3.2.3 Traxx

Rodina lokomotiv TRAXX od výrobce, firmy Bombardier je jedna z nejrozšířenějších typů lokomotiv na světě. Název TRAXX vznikl ze zkratky anglického výrazu „Locomotive Platform for Transnational Railway Applications with eXtreme fleXibility“. Firma Bombardier nabízí hned několik základních variant těchto lokomotiv – střídavé elektrické, stejnosměrné elektrické, vícesystémové elektrické a motorové diesel-elektrické lokomotivy. Jednou z verzí je elektrická lokomotiva TRAXX P160 AC, která je učená pro dopravu vozů osobní přepravy. Rám podvozku této lokomotivy se skládá ze dvou podélníků, dvou čelníků a středního příčnicku, na kterém jsou uchyteny asynchronní motory. Na jednom čelníku je umístěna tažně-tlačná tyč pro přenos podélných sil. Pohon lokomotivy zajišťuje střídavé asynchronní motory s využitím dutého kloubového hřídele. Dvojkolí je z monoblokových kol a duté nápravy, kde každé kolo je vybaveno dvěma brzdovými disky. Primární vypružení je zajištěno vinutými pružinami, které jsou umístěny mezi ložiskovými domky a podélníky. Ložiskové skříně dvojkolí jsou vedeny v podélném směru ojnicemi a v příčném směru účinkem flexi-coil pružin primárního vypružení. Sekundární vypružení je zajištěno pomocí vinutých pružin využívající efektu flexi-coil, které jsou umístěny mezi skříní lokomotivy a podélníky rámu podvozku. [27] [4]

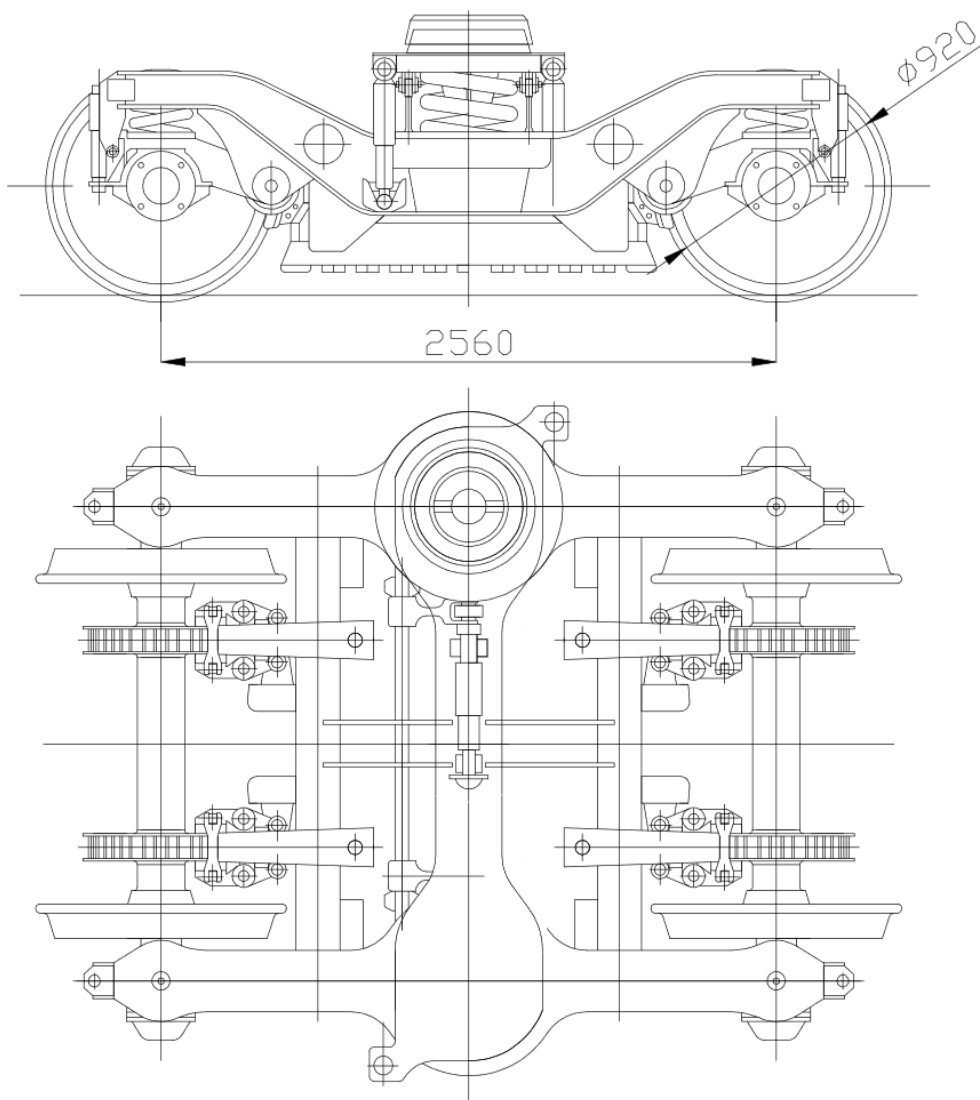
3.3 Podvozky osobních vozů

3.3.1 Podvozky Y 32

Podvozek typu Y 23 byl vyvinut v 70. letech minulého století ve Francii. Podvozky obdobné konstrukce byly použity v konstrukci rychlovlaků TGV. Jelikož se v praxi velmi osvědčily jsou ve zdokonalené variantě využívány i v konstrukci moderních

rychlovlaků.

Podvozek je bezkolébkového typu. Rám je svařovaný, tvoří písmeno „H“ a je složen ze dvou podélníků se sníženou střední částí, jednoho příčnicku a dvou menších trubkový příčnicků. Dvojkolí jsou vedena pomocí kyvných ramen a jsou uložena přes vinuté pružiny primárního vypružení na rám podvozku. Sekundární vypružení je realizováno za pomoci mohutných flexi-coil pružin, které jsou usazeny do dutin na střední snížené části podélníků. K primárnímu i sekundárnímu vypružení jsou paralelně umístěny hydraulické tlumiče. Skříň vozu je za pomoci nosníku uložena přímo na druhý stupeň vypružení. Velikost vůle v příčném směru mezi podvozkem a skříní se pohybuje v rozmezí 20 mm až 60 mm a je vymezena pomocí pryžových nárazek. Velikosti těchto vůlí jsou závislé na směru oblouku a jeho poloměru. Každá náprava také obsahuje dva brzdové kotouče. Čelisti těchto kotoučových brzd jsou upevněny na konzolách, které vybíhají z příčnicku trubkového profilu. Tyto příčnický také slouží společně s táhly k přenosu podélných sil mezi skříní vozu a rámem podvozku. Podvozek je také vybaven jednostrannou špalíkovou brzdou a magnetickou kolejnicovou brzdou sloužící pro nouzové brždění. Typový výkres podvozku Y 32 je na obrázku 3.7. [8]

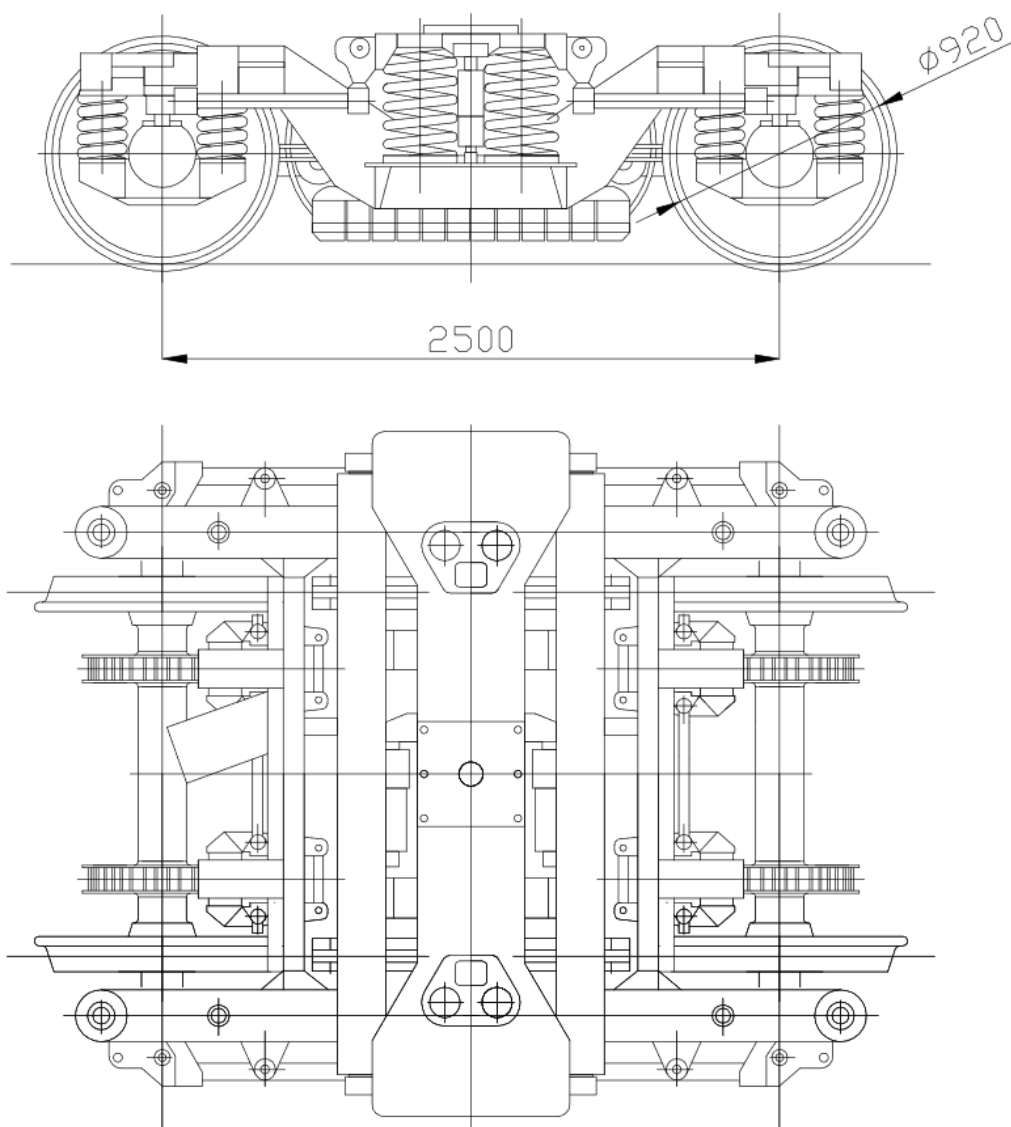


Obrázek 3.7: Typový výkres podvozku Y 32 [8]

3.3.2 Podvozky SGP 300

Podvozek typu SGP 300 byl vyvinut v 80. letech minulého století v Rakousku, kde se stal později velmi rozšířeným. V České republice jej využívají České dráhy a.s. u vozů řad WRmz, Ampz a Bmz. Podvozek SGP 300 se vyrábí ve 3 variantách, které se od sebe liší počtem brzdových kotoučů na nápravě a také tuhostí vedení

dvojkolí. Jedná se o dvounápravové podvozky s dvoustupňovým vypružením. Základem podvozku je svařovaný rám tvořící písmeno „H“, který je složen ze dvou podélníků se sníženou střední částí, jednoho hlavního příčnicku umístěného ve středu snížené části a dvou pomocných příčnicků nesoucích brzdové jednotky. Ve snížené části jsou z vnější strany rámu přivařeny nosiče pružin druhého stupně vypružení. Dvojkolí jsou vedena pomocí osmi vodících trnů, které jsou nalisovány v pouzdrech podélníků rámu a prochází vnitřkem vinutých pružin prvního stupně vypružení až do dutin v konzolách ložiskových skříní, kde jsou speciální kluzná pouzdra. Sekundární vypružení je realizováno prostřednictvím pružin typu flexi-coil, které zajišťují svou příčnou deformací také příčné vypružení. Tyto pružiny jsou uloženy na obou koncích na pryžových podložkách. Tlumení pohybů kolébky vůči rámu umožňují hydraulické tlumiče. Pružina typu flexi-coil je namáhána osovou a příčnou silou. K zabránění ztrátě stability tohoto pružícího prvku je třeba vymezení jeho příčné pohyby. Vymezení příčných pohybů je realizováno pomocí pryžových narážek. Skříň vozu je uložena na kolébce podvozku pomocí dvojice samomazných kluznic a otočeného čepu. Každé dvoukolí obsahuje tři jednotky kotoučových brzd a mezi koly podvozku jsou navíc umístěny elektromagnetické kolejnicové brzdy pro případ nouzového brždění. [8] [34]



Obrázek 3.8: Typový výkres podvozku SGP 300 [8]

3.4 Podvozky nákladních vozů

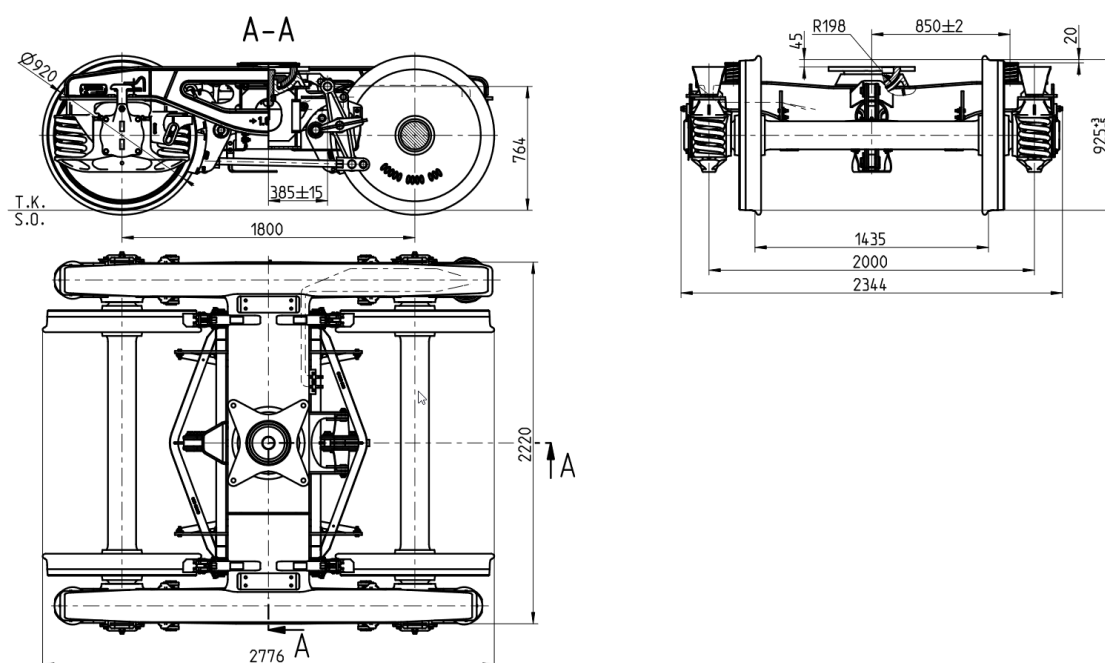
3.4.1 Podvozky Y 25

Mezinárodní železniční unii byl na přelomu 60. a 70. let přijat požadavek na zavedení standartního podvozku pro čtyřnápravové nákladní vozy. Po dlouhé době nezávisle

probíhajících výzkumů byl vybrán francouzský podvozek Y 25 C. Tímto byl přijat unifikovaný nákladní podvozek podle vyhlášky UIC 510-1. Tento podvozek se v Československu začal vyrábět kolem roku 1980. Podvozky typu Y 25 existují v několika provedeních, kde například doplňkové písmeno C značí, že se jedná o podvozek s nosností 20 tun na nápravu. Rám je svařované konstrukce, jehož výhodou je jeho nízká hmotnost a poměrně nízká tuhost která zvyšuje bezpečnost proti vykolejení. Tento rám je tvořen dvěma podélníky profilu „I“, příčnickem skříňového průřezu, dvěma čelníky profilu „U“ a dále 4 podélnými výztuhami. Skříň vozu je uložena na rámu podvozku za pomoci kulové torny a dvou vypružených předepjatých kluznic. Kulová torna je umístěna na středu příčnicku a zajišťuje přenos sil mezi podvozkem a skříňí vozu. Kluznice jsou umístěny na stranách příčnicku a slouží k stabilizaci vozové skříně. Předpětím kluznic vzniká tření (moment), které stabilizuje vrtivé pohyby podvozku vznikající při jízdě vyšší rychlostí. Dvojkolí jsou vedena pomocí rozsoch a jsou uložena přes vinuté pružiny na rám podvozku. Z každé strany ložiskové skříně jsou dva páry do sebe vložených pružin, jejichž polohu vymezuje vedení. Na jednom dvojkolí je tedy 8 pružin, čtyři vnitřní a čtyři vnější. Tyto pružiny zajišťují svislé vypružení a svým flexi-coil účinkem (deformace ve směru $y \pm 10\text{mm}$) i příčné vypružení. Vnitřní pružiny jsou kratší a jsou v činnosti až po dosažení určitého zatížení vozu. Dané uspořádání dává vzniknout lomené charakteristice vypružení. Tlumení podvozku Y 25 se liší od systémů které byly zmíněny v této kapitole. Principem tlumení je tření, jenž vzniká přitlačování pístu k ložiskové skříni přes talíř pružiny a velikost tření je úměrné osově síle pístu. Tato síla vzniká v závěsce transformováním tažné síly a je závislá na deformaci pružin. Každé dvojkolí podvozku Y 25 je vybaveno špalíkovou brzdou. [34] [5]



Obrázek 3.9: Podvozek Y 25 Lsdi [29]



Obrázek 3.10: Typový výkres podvozku Y 25 Ls-K [28]

3.4.2 Podvozky Diamond

První typ podvozku Diamond s označením Archbar, byl vyvinut v druhé polovině 19. století v USA. Jedná se o univerzální nákladní podvozek. Jelikož není patentově chráněn existuje v různých modifikacích v mnoha zemích světa. Jde tedy pravděpodobně o nejrozšířenější nákladní podvozek. Je nasazován do extrémních podmínek

dálkových tratí v USA, Kanadě, Číně, Rusku zejména kvůli své jednoduché a spolehlivé konstrukci. Na obrázku 3.11 je uveden novější typ tohoto podvozku, který se používá dodnes.

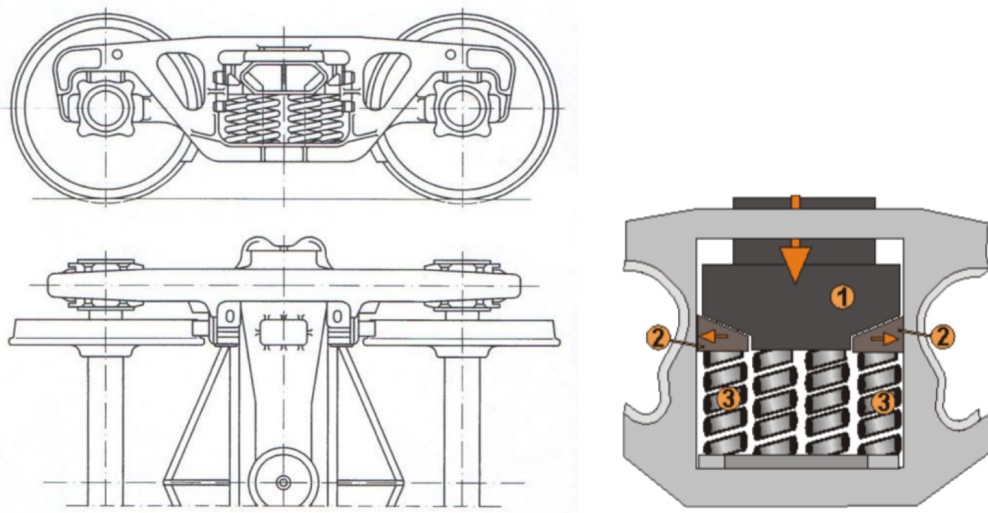
Rám podvozku je charakteristický tím, že zde nejsou čelníky ani klasický příčník, který je obvykle pevně svázán s podélníky. Rám obsahuje dvě lité postranice příhradové konstrukce. Postranice jsou mezi sebou pevně provázány dvojkolími skrze vazbou v ložiskových skříních. Příčník je uložen přes válcové pružiny na středu postranic a není součástí rámu podvozku. Jeho funkce je obdobná jako kolébka u podvozků s dvojitým vypružením. Výhoda tohoto rámu je schopnost přizpůsobit se nerovnostem koleje. Tato vlastnost ovšem nepříznivě ovlivňuje maximální rychlost vozidla, která se pohybuje kolem 100km/h. Ložiskové skříně jsou uloženy nepružně do výřezů v postranicích a jsou zajištěné šrouby. Nepružné uložení nápravy má za následek vznik velkých nevypružených hmot, které negativně působí na trať i na samotný vůz. Vozová skříň je uložena na příčníku za pomoci ploché torny a dvou nevypružených kluznic. Ve snížené části postranic je vytvořena plocha pro uložení svislého vypružení, na kterém je uložen příčník. Svislé vypružení je realizováno válcovými pružinami. Pružiny svým flexi-coil účinkem zajišťují i příčné vypružení a umožňují i náklon postranic vůči příčníku. Tímto je zvýšena bezpečnost proti vykolejení i přes pevné uložení dvojkolí v postranicích. Počet válcových pružin se u různých typů podvozků může lišit v závislosti na hmotnostních parametrech vozu.

Na obrázku 3.11 je schéma podvozku Diamond, které obsahuje čtyři válcové pružiny v postranici. Na vrchu krajních pružin jsou umístěny klínové tlumiče. Při zatížení pružin osovou silou vzniká od nosníku na šikmých plochách klínových tlumičů síla kolmá k zatěžující síle. Tato příčná síla tlačí klínové tlumiče do třecích podložek umístěných na bočních stranách výřezu postranic. Zmíněné konstrukční řešení dává

KAPITOLA 3. VYPRUŽENÍ KOLEJOVÝCH VOZIDEL

vzniknout progresivnímu tlumení. Jeho velikost je úměrná intenzitě osového zatížení pružin. [34] [11]

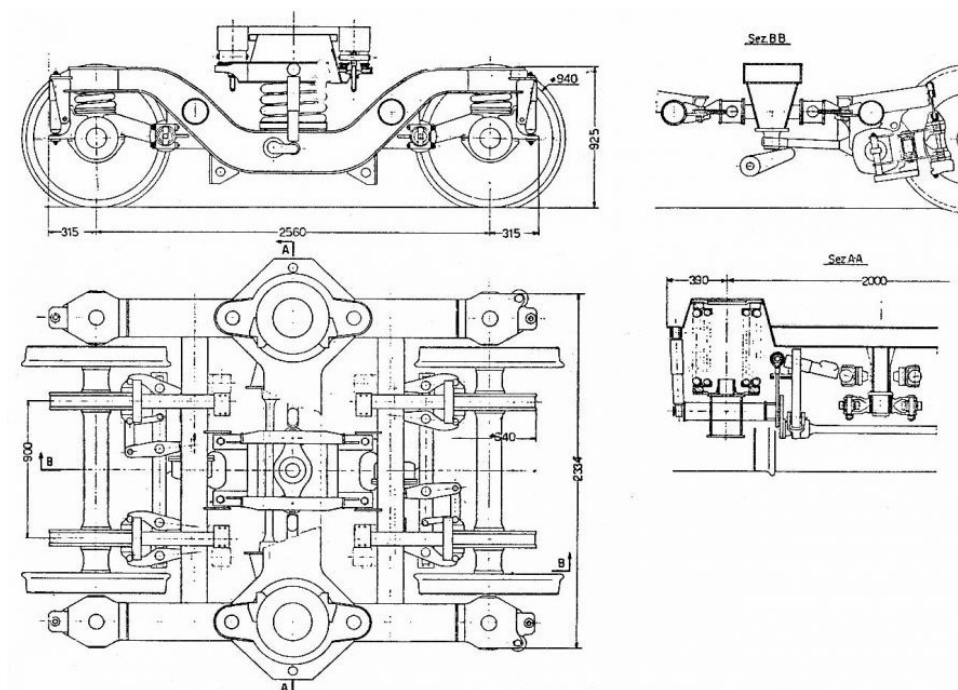
Na závěr je nutno zmínit, že i když v České republice nese tento podvozek označení Diamond, ve světě je spíše označován jako three piece bogie. [19]



Obrázek 3.11: Schéma podvozku Diamond s detailem vypružení [11] [34]

4 Návrh pružiny sekundárního vypružení

Tato část práce je věnována popisu a návrhu pružícího prvku flexi-coil. Konkrétně se jedná o pružící prvek ze sekundárního vypružení podvozku Y 0270. Typový výkres podvozku Y 0270 je uveden na obrázku 4.1. Konstrukčně je velmi podobný podvozku Y 32 (viz 3.3.1), avšak je třeba poukázat na jeden rozdíl. Druhý stupeň vypružení u tohoto typu podvozku obsahuje navíc dva pryžové prstence mezi které je uložena mohutná pružina flexi-coil. Pryžové prstence jsou vidět v řezu A-A na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Typový výkres podvozku Y 0270-S [13]

4.1 Parametry pružiny flexi-coil z podvozku Y 0270

Pružiny typu flexi-coil druhého stupně vypružení se od pružin primárního vypružení konstrukčně liší. U osobního vozu s podvozkem Y 0270, je skříň nesena pouze dvěma páry pružin sekundárního vypružení. Z tohoto důvodu jsou pružiny velmi masivní. Dále se vyznačují větším počtem činných závitů, a tedy jejich větší štíhlostí. V praxi je osová tuhost těchto pružin ověřována mezi hodnotami Q_1 a Q_2 , kdy při zatížení Q_1 výška pružiny dosahuje tolerované hodnoty H_1 .

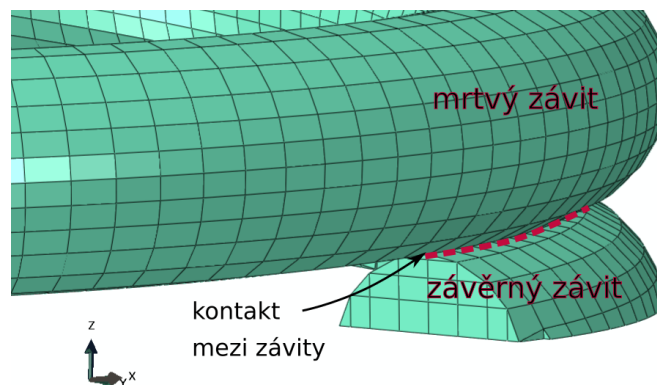
Tabulka 4.1: Parametry pružícího prvku

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Průměr drátu	d	41	[mm]
Střední průměr vinutí	D	255	[mm]
Počet činných závitů	n_1	6,75	[1]
Počet závěrných závitů	n_2	2,25	[1]
Celkový počet závitů	N	9	[1]
Výška nezatížené pružiny	H_0	630	[mm]
Výška při zatížení 31kN	H_1	507,5	[mm]
Maximální osově zatížení	Q_{1max}	60	[kN]
Maximální boční deformace	s	65	[mm]
Smysl vnutí		levý/pravý	[1]

Závěrné závity na obou koncích pružiny jsou v kontaktu s podložkou. Z tohoto důvodu musí být zabroušeny do roviny. Z tabulky 4.1 lze vidět, že celkový počet závěrných závitů přesahuje hodnotu dvě. To znamená, že určité části závěrného závitu jsou ve vzájemném kontaktu a již při velmi malém osovém zatížení je vytvořen čárový dotek. Kontakt mezi závity je naznačen na obrázku 4.2. Závěrné závity se do analytického výpočtu osově tuhosti nezahrnují. Do podvozku se montují na pravý a levý bok pružiny s rozdílným smyslem vinutí z důvodu kompenzace momentu M_z , který vzniká při stlačování.

Pro úplný geometrický popis této pružiny je třeba doplnit hodnotu zabroušení

závěrných závitů. Velikost zabroušení dosahuje hodnoty 2/3 průměru tyče na konci závěrného závitu. To lze vidět na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Detail konce pružiny

Vlastnosti oceli 51CrV4

Oceli 51CrV4 se vyznačují vysokou mezí únavy při střídavém namáhání. Jsou tedy vhodné pro výrobu zušlechtěných pružin a velmi namáhaných strojních dílů. V zušlechtěném stavu mají příznivý poměr pevnosti k mezi kluzu. Kalení se převážně provádí do oleje. Mechanické vlastnosti této oceli jsou uvedeny v tabulce 4.2.

Pro pružiny navíjené z tyčí vyšších průměrů (standardně $d > 40\text{mm}$) se využívá ocel **51CrMoV4**. Prokalitelnost této oceli je vyšší než u 51CrV4. Mechanické vlastnosti jsou obdobné.

Tabulka 4.2: Mechanické vlastnosti oceli 51CrV4

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Modul pružnosti v tahu	E	206000	$[\text{N}/\text{mm}^2]$
Modul pružnosti ve smyku	G	78500	$[\text{N}/\text{mm}^2]$

Z hodnot uvedených v tabulce je možno dopočítat Poissonovo číslo. To bude zapotřebí pro materiálový popis v prostředí programu Abaqus.

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (4.1)$$

Vyjádřením μ z rovnice (4.1) dostáváme:

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1 \quad (4.2)$$

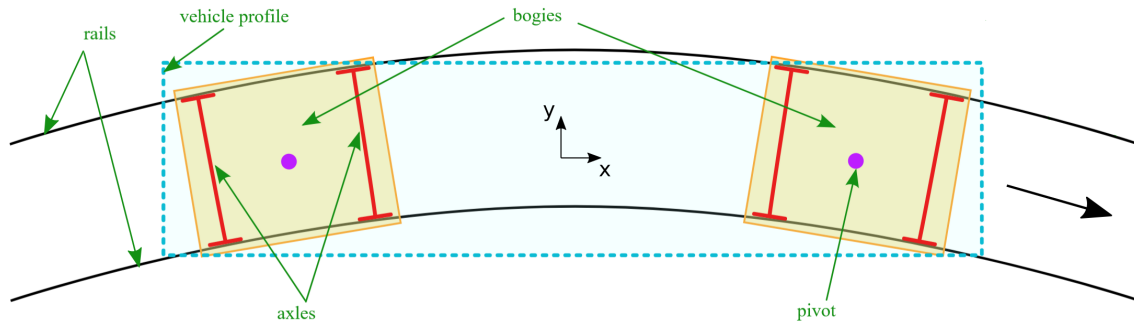
Dosazením materiálových hodnot do vztahu (4.2) vychází hodnota Poissonova čísla pro ocel 51CrV4 $\mu \doteq 0,3$.

4.1.1 Výpočet maximální boční deformace pružiny

Při jízdě vozu obloukem jsou pružiny typu flexi-coil deformovány v podélném i příčném směru tj. kolmo na jejich hlavní osu. Deformace pružiny v podélném směru je dána relativním natočením skříně a podvozku. Toto natočení je závislé na poloměru oblouku tratě, délkou vozu resp. vzdáleností otočných čepů podvozků vozu a velikostí rozchodu koleje. Dosazením maximálních hodnot dle [23] do vztahu (4.3) lze získat maximální možnou podélnou deformaci flexi-coil pružin, která může v oblouku minimálního poloměru nastat. Zmíněné parametry jsou uvedeny v tabulce 4.3.

Tabulka 4.3: Parametry pro výpočet maximální boční deformace [23]

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Poloměr oblouku	R_o	150	[m]
Vzdálenost středů podvozků	L_v	19	[m]
Rozchod koleje	H_k	1435	[mm]
Rozteč pružin	H_p	2000	[mm]
Příčná deformace	y_{max}	50,0	[mm]



Obrázek 4.3: Schéma natočení podvozku při průjezdu vozu obloukem [13]

Příčné deformování těchto pružin vzniká působením setrvačných sil od skříňě vozidla. Tyto síly vznikají kvazistaticky - účinkem odstředivé síly a dynamicky - reakcí vozidla na nerovnosti koleje v příčném směru. Velikost příčné deformace je omezena nárazkami, aby nedošlo ke ztrátě stability pružícího prvku. U podvozku Y 0270 bude uvažována maximální příčná deformace flexi-coil pružiny 50 mm.

$$x_{max} \doteq \frac{H_p \cdot L_v}{2 \cdot R_o} \quad (4.3)$$

Sečtením maximální podélné a maximální příčné deformace ve čtverci podle vztahu (4.4), získáme maximální boční deformaci, kterou je pružina v rovině xy zatěžována.

$$s_{max} = \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2} \quad (4.4)$$

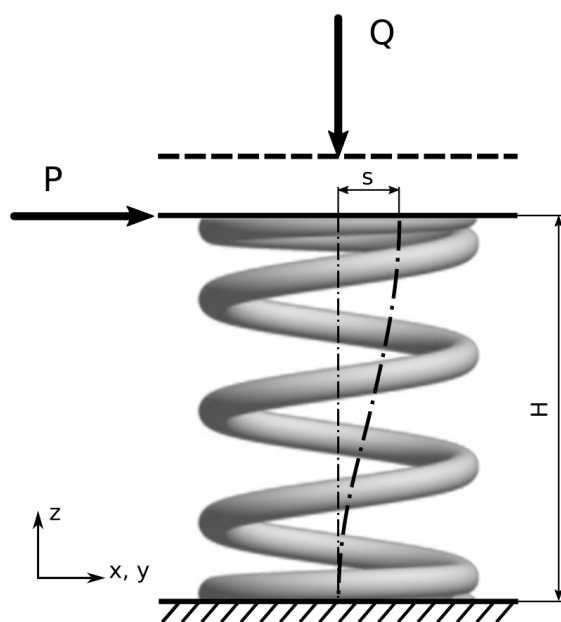
Tabulka 4.4: Maximální deformace válcové pružiny v rovině xy

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Podélná deformace	x_{max}	63,3	[mm]
Příčná deformace	y_{max}	50,0	[mm]
Celková deformace	s_{max}	80,7	[mm]

Maximální boční deformace pružiny s_{max} , která byla vypočtena na základě

parametrů tratě a vozidla, dosahuje vyšší hodnoty než maximální přípustná deformace s pro pružinu flexi-coil podvozku Y 0270 (tabulka 4.1). K zabránění ztráty stability pružícího prvku je tedy nutné použití nárážek v konstrukci vozidla.

Na obrázku 4.4 je znázorněna pružina flexi-coil za současného působení sil v podélném směru osy pružiny a ve směru k ní kolmém.



Obrázek 4.4: Pružina pro současném působení osových a příčných sil

4.2 Analytický výpočet osové tuhosti

Na výpočet osové tuhosti válcové pružiny můžeme nahlížet dvěma způsoby. Prvním je uvažování pružiny s těsně vinutými závitů. Drát těsně vinuté pružiny je namáhán kroutícím momentem a posouvající silou. Namáhání od posouvající síly lze zanedbat z důvodu malého poměru d/D . Výsledný vztah (4.5) pro výpočet tuhosti je pak

velmi jednoduchý a je detailně odvozen v literatuře [22].

$$k_z = \frac{Q_1}{z_1} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n_1} \quad (4.5)$$

Druhou možností je zahrnutí do výpočtu osově tuhosti reálné stoupání činných závitů. V tomto případě není pružina namáhána pouze na krut, ale je třeba zahrnout i další namáhání. Vztah (4.7) popisuje poddajnost pružiny, což je převrácená hodnota k tuhosti. Lze si všimnout, že tento vztah je definován jako součet poddajností od jednotlivých namáhání. Členy v tomto vztahu jsou srovnány podle míry vlivu na poddajnost. První člen je podobný vztahu (4.5). Jedná se pouze o jeho převrácenou hodnotu a určuje vliv kroutícího momentu. Druhý člen určuje vliv ohybového momentu. Třetí člen zahrnuje vliv posouvající síly a čtvrtý zahrnuje vliv deformace tlakem. Člen určující vliv posouvající síly je bez opravného součinitele nestejnoměrnosti rozložení tečných napětí po průřezu. Každý člen v rovnici obsahuje úhel α , který představuje stoupání činných závitů. [2]

$$\lambda = \frac{D \cdot n_1}{4 \cdot G \cdot d^2} \cdot \left(32 \cdot \frac{D^2}{d^2} \cdot \cos^2 \alpha + 64 \cdot \frac{G \cdot D^2}{E \cdot d^2} \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{G}{E} \cdot \sin^2 \alpha \right) \quad (4.6)$$

$$k_{zo} = \frac{1}{\lambda} \quad (4.7)$$

Pokud porovnáme výsledky tuhostí z těchto vztahů lze zjistit, že při malých stoupání činných závitů jsou výsledky téměř totožné (standardně v praxi využívané úhly stoupání spadají do této kategorie). Do stoupání kolem 10° je odchylka mezi těmito vztahy menší než 1% [16]. Z tohoto důvodu se používá jednodušší vztah. Ten je také uveden v normě pro návrh pružin v aplikaci kolejových vozidel [10].

Tuhost k předepsané hodnotě dle zadání:

$$k_{zd} = \frac{Q_1}{z_1} = \frac{Q_1}{H_0 - H_1} \quad (4.8)$$

Tabulka 4.5: Výsledky osově tuhosti

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Vztah pro těsně vinout pružinu (4.5)	k_z	250,9	[N/mm]
Obecný vztah (4.7)	k_{zo}	251,3	[N/mm]
Tuhost dle vztahu (4.8)	k_{zd}	253,1	[N/mm]

4.3 Analytický výpočet příčné tuhosti

V polovině minulého století bylo odvozeno a experimentálně ověřeno několik empirických vztahů pro výpočet příčné tuhosti pružin flexi-coil. Za nejvýznamnější je možno označit práce od autorů Timošenka a Ponomareva, Wahla, Grosse, Sparinga. Je třeba poznamenat, že vztahy jenž tyto práce obsahovaly byly odvozeny a experimentálně ověřeny pro pružiny, které svým rozměrem odpovídají sekundárnímu vypružení. V dnešní době je možno použít pokročilejší výpočetní metody pro stanovení parametrů pružin. Ovšem tyto vztahy zůstávají i nadále velmi užitečné, zvláště pro jejich jednoduchost. Mohou sloužit jako návrhový výpočet základních rozměrů pružin. Pro přesnější stanovení parametrů je třeba použít metodu konečných prvků. Vypočtené výsledky je třeba verifikovat experimentem. [14]

V této podkapitole jsou popsány tři vztahy pro výpočet příčné tuhosti. Vztah od autorů Timošenka a Ponomareva, Wahlův vztah a vztah dle normy [10]. Ve všech výpočtech je příčná tuhost závislá na osově tuhosti a na velikosti předzatěžující síly, která působí v osovém směru prvku. S konstantní příčnou tuhostí je možno počítat

zhruba do $P = 0,1 \cdot Q_1$, kde P je příčná síla. Pro větší násobky, než je 0.1, tuto tuhost významně ovlivňuje vliv ohybového momentu od síly Q_1 .

Výpočet potřebných parametrů:

$$\text{Štíhlostí poměr nezatížené pružiny: } \beta_0 = \frac{H_0}{D} \quad (4.9)$$

$$\text{Štíhlostí poměr zatížené pružiny: } \beta = \frac{H}{D} \quad (4.10)$$

$$\text{Deformace vyvolaná osovou silou: } z_1 = \frac{Q_1}{k_z} \quad (4.11)$$

$$\text{Výška zatížené pružiny: } H = H_0 - z_1 \quad (4.12)$$

Tabulka 4.6: Parametry pro výpočet příčné tuhosti

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Osové zatížení pružiny	Q_1	31	[kN]
Výška zatížené pružiny	H	507,5	[mm]
Deformace vyvolaná osovou silou	z_1	122,5	[mm]
Štíhlostí poměr nezatížené pružiny	β_0	2,47	[1]
Štíhlostí poměr zatížené pružiny	β	1,99	[1]
Konstanta volby uložení	ψ	0,50	[1]

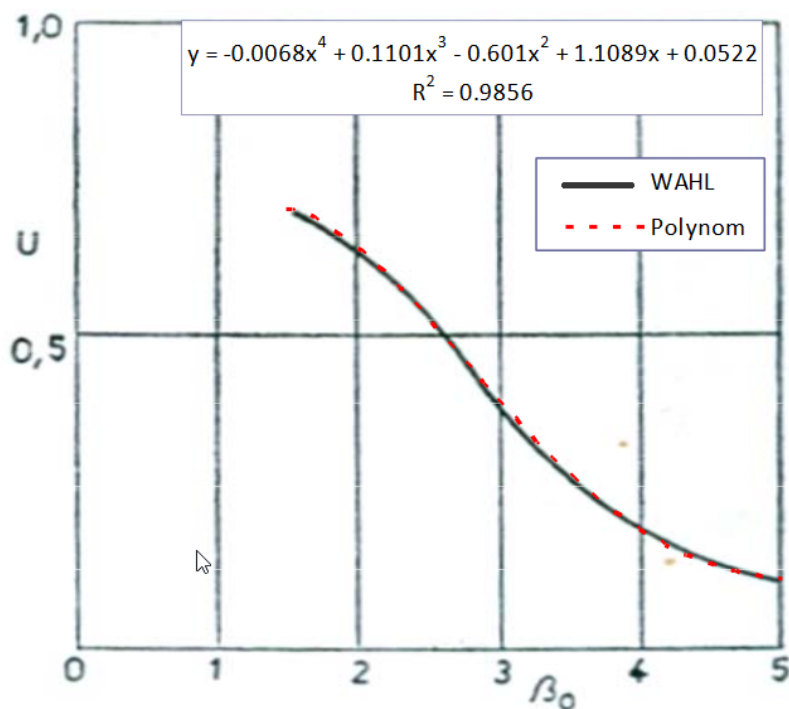
4.3.1 Výpočet příčné tuhosti podle Wahla

Ve výpočtu příčné tuhosti podle Wahla je důležitým parametrem konstanta U , která je dána graficky pomocí štíhlostního poměru nezatížené pružiny β_0 . Graf průběhu závislosti $U = f(\beta_0)$ je uveden na obrázku 4.5 . Tento průběh byl nahrazen regresním

polynomem 4. řádu v následujícím tvaru:

$$U = -0.0068\beta_0^4 + 0.1101\beta_0^3 - 0.601\beta_0^2 + 1.1089\beta_0 + 0.0522 \quad (4.13)$$

Hodnota spolehlivosti regrese pro provedenou náhradu je $R^2 = 0,9856$. Můžeme tedy konstatovat, že náhrada je dostatečně spolehlivá. Jedinou nepřesností je odečet z grafu. [14]



Obrázek 4.5: Určení parametru U z grafu [14]

Příčná tuhost podle Wahla je dána následujícím vztahem:

$$k_{y_{Wahl}} = \frac{2,6 \cdot k_z}{1 + 0,77 \cdot \beta^2} \cdot \left(1 - \frac{Q_1}{U \cdot H_0 \cdot k_z}\right) \quad (4.14)$$

Udávaná přesnost tohoto vztahu ve srovnání s experimentem se pohybuje kolem 10%. [12]

4.3.2 Výpočet příčné tuhosti podle Timošenka a Ponomareva

Výpočet příčné tuhosti flexi-coil pružin od autorů Timošenka a Ponomareva je jednou z nejlépe podložených metod. Výsledky získané tímto vzorcem vykazují odchylky menší než 10% od hodnot naměřených.

$$k_{y_{TP}} = k_z \cdot \frac{D^2 \cdot (1 - \gamma)}{0,2936 \cdot \frac{(H-\psi \cdot d)^3}{(H-1,5 \cdot d)} + 0,381 \cdot D^2} \quad (4.15)$$

Ve výše uvedeném vzorci se vyskytují dvě pomocné bezrozměrné konstanty. První pomocnou veličinou je γ , kterou lze dopočítat jedním z následujících vztahů. Volba výpočtového vztahu je dána velikostí štíhlostního poměru nezatížené pružiny.

$$\gamma = 0,357 \cdot \frac{Q_1}{k_z \cdot H} \cdot \beta \cdot \left(\beta - 1,5 \cdot \frac{d}{D}\right) \quad \text{pro } \beta_0 < 2,62 \quad (4.16a)$$

$$\gamma = \frac{\frac{Q_1}{k_z \cdot H} \cdot \beta}{0,813 \cdot \left(\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - 6,87}\right)} \quad \text{pro } \beta_0 \geq 2,62 \quad (4.16b)$$

Druhou pomocnou veličinou je ψ . Ta zohledňuje způsob uložení závěrných závitů (kloubové nebo tuhé uložení). V našem případě je tato konstanta rovna hodnotě 0,5, což odpovídá tuhému uložení. [12] [14]

4.3.3 Výpočet příčné tuhosti dle normy ČSN EN 13906-1

Jako poslední je zde uveden vztah dle normy [10]. Tato norma detailně pojednává o návrhu válcových pružin pro aplikaci v kolejových vozidel. Výpočet příčné tuhosti dle normy bude sloužit k porovnání výsledků z předešlých vztahů.

$$k_{y_n} = \frac{\xi \cdot k_z}{\xi - 1 + \frac{\frac{1}{\beta_o}}{\frac{1}{2} + \frac{G}{E}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1-\xi}{\xi}\right)} \cdot \tan\left(\beta_o \cdot \xi \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1+\xi}{\xi}\right)}\right)} \quad (4.17)$$

Výše uvedený vztah využívá pomocný parametr relativní stlačitelnosti pružiny. Jedná se o bezrozměrný parametr, který je definován jako velikost osové deformace k nezdeformované výšce pružiny.

$$\xi = \frac{z_1}{H_o} \quad (4.18)$$

4.3.4 Porovnání výsledků

V tabulce 4.7 jsou uvedeny výsledky příčných tuhostí vypočtených pomocí výše uvedených analytických vztahů. Z výsledků je vidět, že rozptyl vypočtených hodnot je velký.

Tabulka 4.7: Vypočtené příčné tuhosti

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Konstanta U	U	0,530	[1]
Konstanta γ	γ	0,302	[1]
Konstanta ξ	ξ	0,196	[1]
Příčná tuhost Wahl	$k_{y_{Wahl}}$	101,8	[N/mm]
Příčná tuhost Tim-Pon	$k_{y_{TP}}$	113,3	[N/mm]
Příčná tuhost z (4.17)	k_{y_n}	95,9	[N/mm]

4.4 Výpočet namáhání

Zatížením těsně vinuté pružiny osovou silou je činná část vinutí namáhána kroutícím momentem a posouvající silou. Vlivem zakřivení drátu není napětí od kroutícího momentu rovnoměrně rozloženo po obvodu drátu. Maximální napětí je na vnitřní straně průřezu vinutí. Tento efekt zohledňuje první člen v závorce ve vzorci (4.19). Druhý člen v závorce pak zahrnuje vliv posouvající síly. Jejich součtem získáme vztah pro výpočet maximálního napětí. Podrobným odvozením se věnuje literatura [20].

$$\tau = \frac{8Q_1 \cdot D}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(\frac{4i - 1}{4i - 4} + \frac{0,615}{i} \right) \quad (4.19)$$

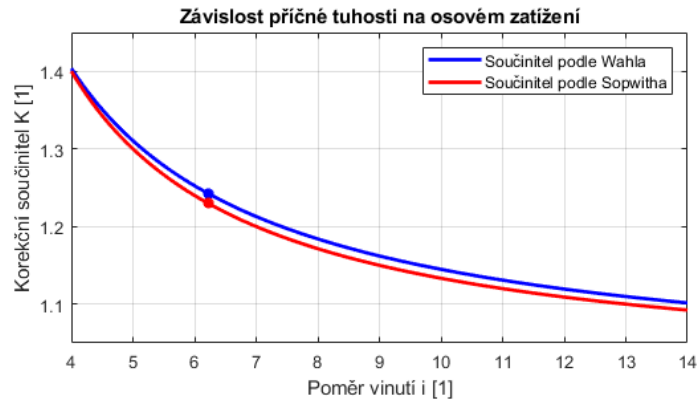
Kde i je poměr vinutí:

$$i = \frac{D}{d} \quad (4.20)$$

Obsah závorky ze vztahu (4.19) se nazývá Wahlův korekční součinitel koncentrace napětí a je možno jej nahradit jednodušším součinitelem podle Sopwitha:

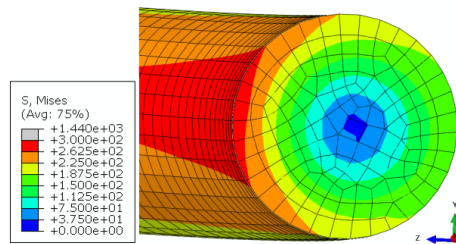
$$K = \frac{i + 0,2}{i - 1} \quad (4.21)$$

Z grafu 4.6 je patrné, že oba součinitele mají velmi podobnou charakteristiku. V oblasti nejpoužívanějších poměrů vinutí, Wahlův součinitel nabývá lehce vyšších hodnot a je tedy na straně bezpečnosti při návrh vinutých pružin. Dále je v grafu vyznačen poměr vinutí i pro zadanou pružinu jenž nabývá hodnotu 6,22.



Obrázek 4.6: Závislost součinitelů na poměru vinutí i

Na obrázku 4.7 je barevně znázorněno rozložení ekvivalentního napětí podle hypotézy HMH. Lze vidět, že maximální napětí vzniká na vnitřní straně vinutí.



Obrázek 4.7: Rozložení ekvivalentního napětí po průřezu

Maximální namáhání při kombinovaném zatížení:

Vztah pro výpočet maximálního torzního namáhání je uveden v normě [10]. Pro výpočet je třeba navíc znát velikost osově deformace S_P a velikost příčné síly P .

$$\tau_k = \frac{8}{\pi \cdot d^3} \cdot (Q_1 \cdot (D + s) + P \cdot (H - d)) \quad (4.22)$$

[10]

Tabulka 4.8: Vypočtené namáhání

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Osové zatížení	Q_1	31	[kN]
Boční vybočení	s	25	[mm]
Boční síla	P	2,5	[kN]
Maximální napětí od osového zatížení Wahl	τ_W	362,9	[MPa]
Maximální napětí od osového zatížení Sopwith	τ_S	359,2	[MPa]
Maximální napětí od kombinovaného zatížení	τ_k	375,1	[MPa]

5 Numerický model

V předešlé kapitole bylo ukázáno, že analytické vztahy pro výpočet tuhostí nedokáží zcela popsat reálné – nelineární chování vinutých pružin. Z tohoto důvodu se nabízí jako vhodný matematický nástroj metoda konečných prvků (dále MKP). Zásadní výhodou této metody je možnost modelování kontaktů, které budou v modelu pružiny hrát důležitou roli. Nevýhodou pak může být časová náročnost přípravy modelu a následného numerického řešení. Pro účely optimalizace je nutné, aby zmíněný model byl parametrický.

Pro samotný MKP výpočet byl zvolen program Abaqus 2019 [31]. Z tohoto důvodu by se jevilo jako vhodné použít tento program i pro tvorbu parametrického modelu a generování MKP sítě. To však není možné. V grafickém prostředí tento program postrádá nástroj pro tvorbu šroubovic. Dále je zde možnost selhání tvorby sítě modelu pružiny. Z těchto důvodů bylo rozhodnuto využít výpočetní program Matlab R2019a [21] pro generování sítě a všech součástí parametrického modelu. Vstupní soubor pro MKP řešič (Abaqus) je tedy generován externím algoritmem v programu Matlab. O metodě konečných prvků pojednává například literatura [3].

5.1 Výběr vhodného elementu

Princip metody konečných prvků spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého konečného počtu elementů. Hustota a kvalita sítě má přímý vliv na přesnost numerického řešení. Lze říci že s rostoucí hustotou sítě se zvyšuje přesnost výsledků, ale současně roste i časová náročnost numerického výpočtu. Proto je důležité pro výpočet v rámci preprocessingu zvolit druh použitých elementů a jejich hustotu.

Tato podkapitola je věnována problematice výběru vhodných elementů pro různé aplikace v MKP.

Volba mezi čtyřstěny a šestistěny

Čtyřstěny (čtyř-uzlové prostorové elementy) jsou geometricky univerzální a jsou používány v mnoha automatických síťovacích algoritmech. Jejich použití je vhodné u tvarově složitých objektů. Kvalitní síť z šestistěnnů (osmi-uzlových elementů) poskytuje obdobnou nebo lepší přesnost než síť tvořená z čtyřstěnnů. Navíc tato síť tvořená z šestistěnnů má menší výpočetní náročnost. Šestistěny vykazují rychlejší konvergenci při stejném počtu elementů než elementy čtyřstěnné, ale mají větší geometrickou citlivost. To znamená, že elementy se stávají mnohem méně přesnými, pokud je jejich počáteční tvar zkreslený – délka jedné strany je výrazně větší než u stran zbývajících. Čtyřstěnné elementy jsou obvykle velmi tuhé a pro získání přesných výsledků je vyžadována velmi jemná síť.

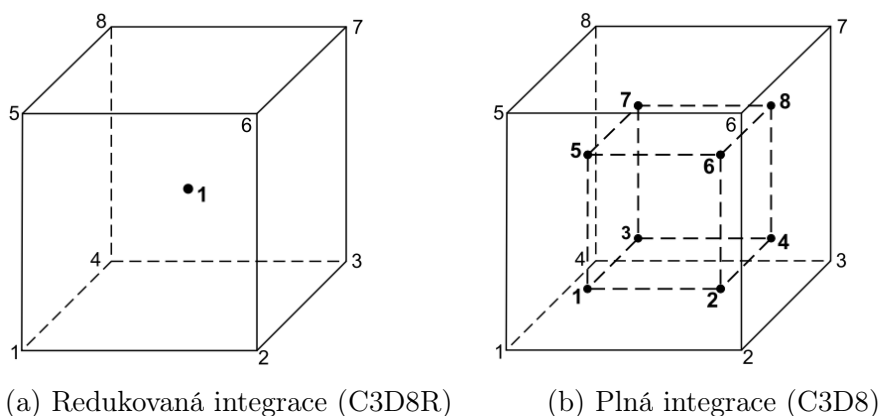
Obecně platí, že čtyřstěny prvního řádu je třeba co nejvíce omezit. Pokud je objekt velmi tvarově složitý a není možné na něj aplikovat šestistěny, je vhodné využít čtyřstěny druhého řádu (kvadratické).

Elementy prvního a druhého řádu

Kvadratické elementy poskytují větší přesnost než elementy lineární. Účinněji dokáží popsat koncentrace napětí a jsou lepší pro modelování geometricky složitějších součástí. Mohou modelovat zakřivený povrch za použití menšího počtu elementů. Lineární elementy mají menší náchylnost na jejich *zamykání*, kdy jsou téměř nestlačitelné.

Redukované a plně integrované elementy

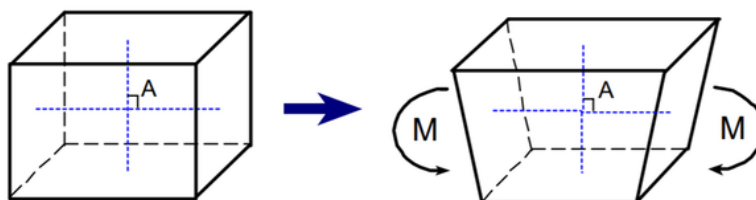
Redukovaná integrace používá integraci nižšího řádu pro výpočet tuhosti elementu. Snižuje náročnost řešení. U matice hmotnosti a distribuční matice zatížení se používá plná integrace. Elementy s redukovanou integrací v programu Abaqus obecně poskytují přesnější výsledky než jim odpovídající plně integrované elementy. Avšak u elementů prvního řádu je dosažená přesnost (plně integrovaných a redukovaných elementů) do značné míry závislá na povaze problému. Integrační body jsou na obrázcích 5.1a a 5.1b znázorněny pomocí teček.



Obrázek 5.1: Druhy integrace osmiuzlového elementu [6]

5.1.1 Některé nežádoucí efekty při použití různých elementů

Hourglassing může nastat u elementů prvního řádu s redukovanou integrací (C3D8R). Tyto elementy mají pouze jeden integrační bod 5.1a. Při výpočtu může dojít k nefyzikálnímu zkreslení, které způsobí nulové napětí v integračním bodě a dojde k ovlivnění sítě. *Hourglass* efekt lze minimalizovat dostatečně jemnou sítí, rozložením okrajových podmínek na několik sousedních uzlů. U kvadratických elementů k tomuto efektu nedochází.



Obrázek 5.2: Hourglass efekt [33]

U plně integrovaných elementů nedochází k efektu *Hourglass*, ale může dojít k jejich *zamykání*. Smykové *uzamčení* nastává u plně integrovaných lineárních elementů, které jsou vystaveny ohybu. Numerickou formulací vzniknou parazitní smyky. Elementy se pak jeví jako velmi tuhé. Tento efekt může vzniknout, pokud délka elementu je stejného nebo vyššího řádu, než je tloušťka stěny objektu. Objemové *zamykání* elementu znamená, že materiál je téměř nestlačitelný. V integračních bodech vzniká parazitní tlakové napětí. U redukováných lineárních elementů dochází k zamykání pouze při velké deformaci. Objemové zamykání je často doprovázeno efektem *Hourglass*.

[32]

5.2 Parametrický model

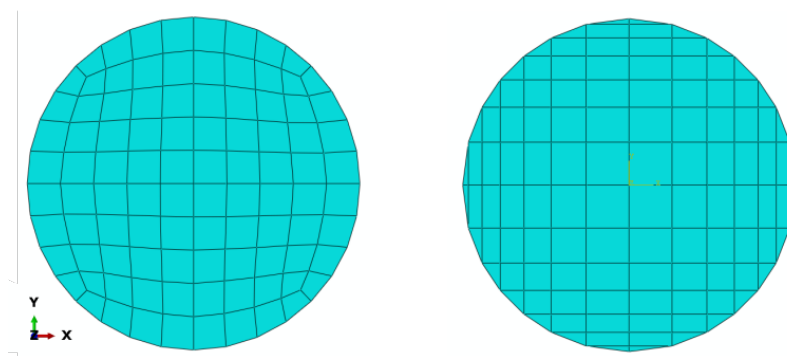
V této podkapitole je popsána tvorba plně parametrického modelu vinuté pružiny. Prvním krokem pro získání parametrického modelu je tvorba geometrie tělesa – v tomto případě pružiny. Možným postupem by bylo definování matematického popisu hranic tělesa a následnou aplikací automatických síťovacích algoritmů, v objemu definovaném touto hranicí, vytvořit síť. O problematice síťování pro aplikaci v MKP pojednává například literatura [18]. Automatické síťovací algoritmy většinou používají pro tvorbu prostorové sítě čtyřstěny díky jejich schopnosti efektivně vyplnit prostor jakéhokoliv objektu. Čtyřstěny nesou označení v programu Abaqus C3D4. Jak již bylo zmíněno v předchozí podkapitole, elementy typu C3D4 nejsou v MKP preferovány z důvodu pomalé konvergence a nutnosti velmi jemné sítě pro dosažení přesných výsledků. Na základě této úvahy se uvedený postup jeví jako časově náročný na přípravu i na řešení, avšak je univerzální pro různě složitě tvary objektů za předpokladu znalosti obálky.

Pro řešení této problematiky byl zvolen jiný přístup. V rámci zjednodušení je možné využít program Abaqus pro generování sítě průřezu drátu ze kterého je pružina navinuta. Hlavní myšlenka je taková, že tato tvořící síť se bude po určitém kroku transformovat po křivce šroubovice. Tímto způsobem vznikne pružina složená z velkého počtu řezů (tvořících profilů), které jsou kolmé na trajektorii. Dále je nutné vhodně propojit uzly sousedních tvořících profilů čímž vzniknou 3D elementy sítě. Pro dokončení tvaru pružiny je ještě třeba upravit závěrné závity, tak aby vznikly plochy kolmé na osu pružiny. Pro upravení závěrných závitů je třeba navrhnout takový algoritmus, který dokáže posunout uzly sítě na rovinu řezu a eliminovat nadbytečné, tak aby vznikla hladká plocha. Dalším krokem je definování kontaktu mezi závity a v uložení pružiny. Pro všechny tyto operace je možno využít program Matlab. Další

části MKP modelu jako je například volba uložení, zatížení a parametry kontaktu je možno definovat přes program Abaqus. Níže jsou detailněji popsány jednotlivé kroky při tvorbě modelu.

5.2.1 Síť tvořícího profilu

Pružina je navinutá z drátu kruhového průřezu. Vysíťováním průřezu požitého drátu je možno získat tvořící profil, který dále slouží pro kinematickou tvorbu sítě. Následným propojováním sousedních tvořících profilů lze získat 3D elementy. V této části tvorby modelu pružiny je třeba vhodně zvolit tvar sítě tvořícího profilu. Hlavním parametrem volby je možnost následné modifikace elementů pro dosažení hladkých ploch závěrných závitů. Snahou je, aby ořezávací algoritmus byl co nejjednodušší. Z tohoto důvodu byla zvolena síť ze stejně orientovaných elementů. Tuto síť můžeme vidět na obrázku 5.3. Je složena primárně ze čtyř-uzlových elementů. Po obvodu jsou pak elementy tří-uzlové. Vytažením této sítě do prostoru vzniknou šesti-uzlové a osmi-uzlové elementy.



Obrázek 5.3: Volba sítě profilu

Na levém obrázku 5.3 je síť, která nebyla pro tento model použita. Ovšem od sítě vpravo má mnohem lepší vlastnosti, které je třeba zmínit. Je složena pouze z jednoho druhu elementu – elementy čtyř-uzlové. Velikosti jednotlivých elementů se

příliš nemění. Samozřejmě existuje mnoho variant této sítě. Pro daný případ byla snaha dosáhnout pokud možno stejné orientace sítě, zachování typu a přibližně stejné velikosti elementů. Při zdokonalení algoritmu modifikace elementů by bylo možné tuto síť použít a využít tak její pozitivní vlastnosti pro celý model.

5.2.2 Kopírování profilu po trajektorii

Trajektorie osy drátu má tvar šroubovice. Stoupání šroubovice se mění v závislosti na tom, o jakou část pružiny se jedná. Závěrné části mají zpravidla menší stoupání než část činná. Reálná pružina je po celé své trajektorii diferencovatelná, tudíž nedochází ke skokové změně stoupání. Pro daný případ je možné model zjednodušit a tento plynulý přechod mezi jednotlivými částmi nebude uvažován. Dále trajektorie osy drátu musí respektovat podmínku, která zajišťuje kontakt mezi koncem profilu závěrné části s profilem činné části pružiny. Tato podmínka je uvedena v rovnicích (5.1a) a (5.1b).

$$d = n_2 \cdot p_2 + (1 - n_2) \cdot p_1 \quad (5.1a)$$

$$H_0 + d/3 = 2 \cdot n_2 \cdot p_2 + n_1 \cdot p_1 \quad (5.1b)$$

Rovnice (5.2) reprezentují matematický popis šroubovice v kartézských souřadnicích. Hodnota R znázorňuje poloměr pružiny a t je parametr rovnice. Pro tento parametr je vhodné dobře definovat jednotlivé kroky po kterých se bude tvořící profil průřezu drátu transformovat. Tudíž při zvolení jemnějšího kroku získáme i jemnější

síť modelu.

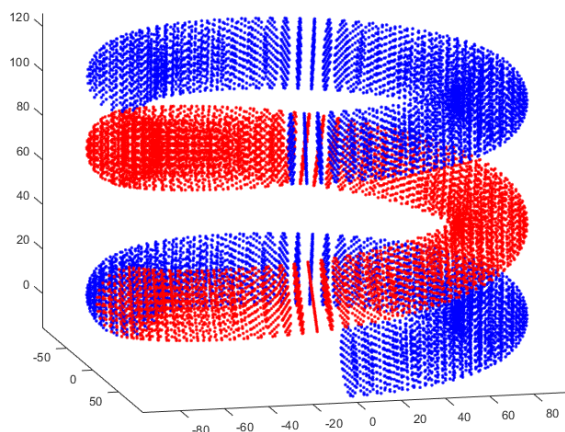
$$x = R \cdot \cos(t) \quad (5.2a)$$

$$y = R \cdot \sin(t) \quad (5.2b)$$

$$z = p \cdot t \quad (5.2c)$$

Středy tvořícího profilu se shodují s diskrétním popisem šroubovice. Pro získání finálního tvaru pružiny je třeba vyřešit rotaci tvořícího profilu. Profil průřezu drátu je vždy kolmý na trajektorii šroubovice. To lze zajistit aplikací transformačních matic T_x a T_z (5.3). Transformační matice T_x určuje rotaci profilu kolem osy x , což v tomto případě znamená natočení reagující na stoupání závitů. Transformační matice T_z určuje rotaci kolem osy z . Osa z je totožná s osou šroubovice. Aplikací T_z lze docílit, že rovina tvořícího profilu bude vždy obsahovat střed pružiny – osu z . Pozice znaménka mínus v maticích transformace definuje směr otočení. Tyto transformační matice jsou uvedeny níže. Profil je transformován od spodu pružiny a tudíž je použita pravotočivá rotace transformace. Na obrázku 5.4 je výsledek transformace profilů, respektive výsledek transformace jednotlivých uzlů sítě po křivce. Červené body znázorňují uzly sítě činných závitů a modré body jsou uzly sítě závěrných závitů. Je možno si také všimnout kontaktu mezi koncem závěrné části s činnou částí, který byl popsán rovnicemi (5.1a) a (5.1b).

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}; \quad T_z = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$



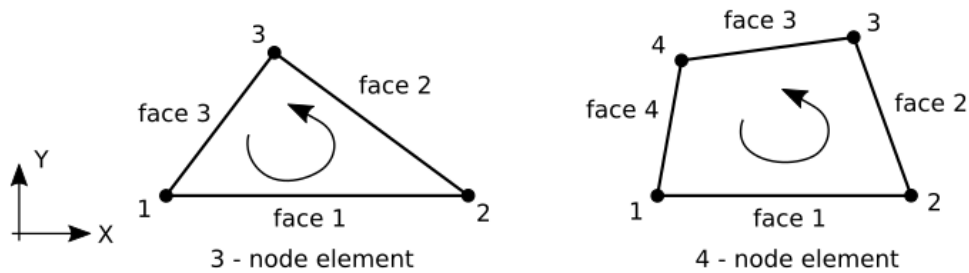
Obrázek 5.4: Kinematická tvorba sítě

Tvorba elementů

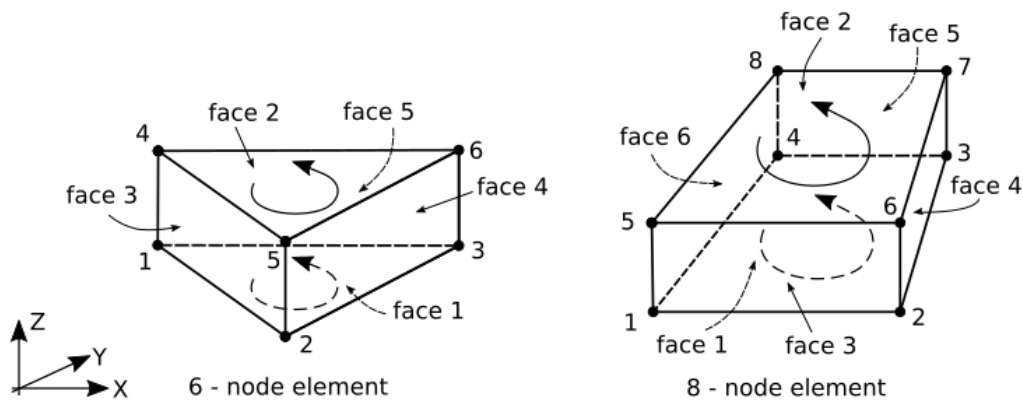
V předešlé části byla řešena pouze transformace jednotlivých uzlů sítě. Nyní je možné z těchto uzlů definovat elementy MKP sítě a vytvořit tak těleso.

Na obrázcích 5.5 a 5.6 jsou různé typy elementů, které mají očíslovány jednotlivé uzly. Pomocí šipek jsou naznačeny směry číslování těchto uzlů. Lze si všimnout, že rotace uzlů u 2D elementů je pravotočivá, ovšem u 3D elementů je rotace uzlů levotočivá (pouze jen díváme-li se na element z jeho přední stěny – face 1). Nedodržením této notace vzniknou elementy se záporným objemem, což není MKP řešičem tolerováno a vede k selhání výpočtu.

Soubor s koncovkou .inp slouží jako vstup pro samotný MKP výpočet v programu Abaqus. V tomto souboru je kompletní popis připraveného modelu tudíž je možné v něm dohledat jakým způsobem jsou definovány uzly a elementy. V tabulkách níže lze vidět, že jednotlivé uzly sítě jsou popsány pomocí souřadnic. Každý uzel má navíc



Obrázek 5.5: Číslování uzlů a stěn u 2D elementů [31]



Obrázek 5.6: Číslování uzlů a stěn u 3D elementů [31]

svoje identifikační číslo. V tabulce vpravo je reálný příklad, jakým způsobem jsou popsány elementy. Každý element má svoje identifikační číslo a je definován pomocí identifikačních čísel uzlů. Zde jsou popsány osmi-uzlové elementy. Matice elementů pak obsahuje 9 sloupců. Propojením sousedních tvořících profilů vzniknou ze čtyř-uzlových elementů osmi-uzlové 3D elementy. Tudíž pro tvorbu 3D elementů stačí znát jakým způsobem jsou popsány elementy tvořícího profilu. 3D element je definován tak, že první čtyři sloupce (vynechán je sloupec nesoucí ID elementů) obsahují identifikační číslo uzlů příslušné vrstvy a další čtyři sloupce obsahují identifikační číslo uzlů následující vrstvy. Toto lze dobře vidět v tabulce 5.1. V první vrstvě jsou identifikační čísla s menší hodnotou než ve vrstvě následující. Je možné pak snadno dopočítat počet uzlů v tvořícím profilu (v tomto případě 2D profil obsahuje 181 uzlů).

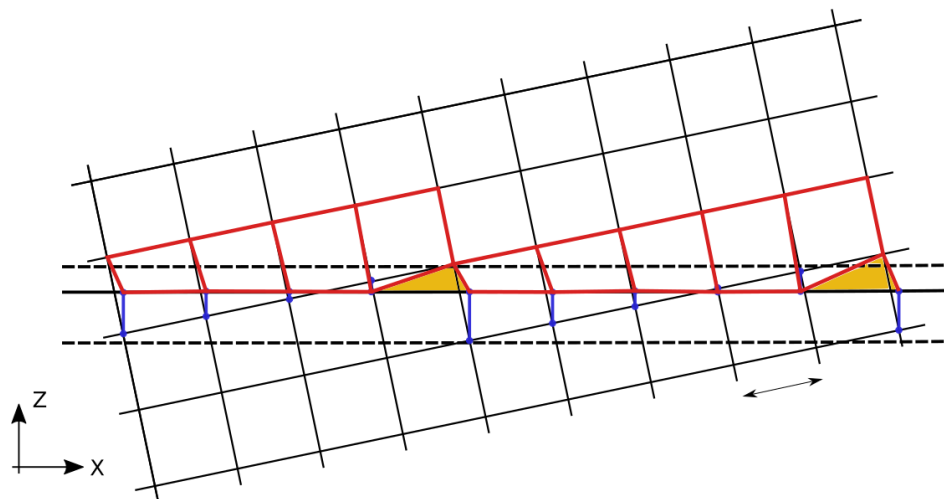
Tabulka 5.1: Příklad definice uzlů a elementů pro program Abaqus

Souřadnice				Sloupce obsahující ID uzlů								
ID uzlu	x	y	z	ID elementu	1	2	3	4	5	6	7	8
1	81.5	0.67	-14.6	1	12	16	15	14	193	197	196	195
2	78.5	0.67	-14.6	2	15	19	18	17	196	200	199	198
3	78.5	0.67	-15.5	3	18	22	21	20	199	203	202	201

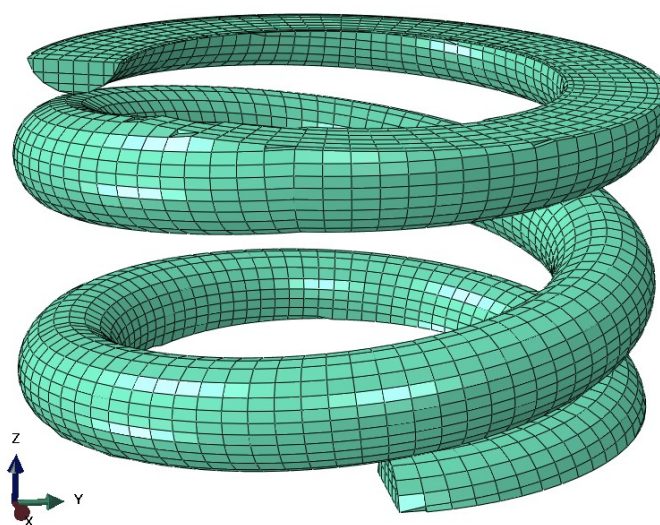
5.2.3 Závěrné části

Nyní je tvar pružiny téměř hotov. Zbývá upravit závěrné závity tak, aby bylo možné pružinu uložit mezi dvě desky. Nejjednodušším způsobem, jak tyto závěrné části upravit je vymazání všech uzlů a elementů, které se nenachází v oblasti mezi dvěma rovinami. Tyto roviny jsou kolmé na osu z . Využít zmíněný způsob ovšem není možné, protože v okolí rovin by na tělese vznikly zářezy a tím by došlo ke značné ztrátě materiálu. Je tedy třeba přistoupit na návrh algoritmu, který dokáže každý element zvlášť posoudit a v případě potřeby jej modifikovat. Cílem je získat hladké plochy po rovinách řezu. V sekci 5.2.1 byla provedena volba tvořícího profilu. Tento profil je složen z rovnostranných elementů, což velmi zjednoduší zarovnávací algoritmus. Na obrázku 5.7 je část sítě pružiny. Tato část sítě je rozvinutá do roviny. Kóta v tomto obrázku značí délku kroku, po kterém byl tvořící profil transformován. Pohled je tedy ze strany na jednotlivé tvořící profily. Vodorovná čára značí rovinu řezu a dvě čerchované čáry značí oblast, kde dochází k posuvu uzlů. Uzel, který je v této oblasti, bude posunut na rovinu řezu. Je nežádoucí, aby došlo k posuvu více jak dvou uzlů daného elementu (uvažujeme-li teď 2D síť), tak jak je naznačena na obrázku. Výška oblasti je z tohoto důvodu rovna výšce elementu. V případě prostorových elementů tento princip funguje obdobně. Uzly a elementy, které nejsou mezi rovinami řezu, je nyní možno smazat. Modifikované elementy jsou v obrázku vyznačeny červenou barvou. Vzniklé trojúhelníkové díry, které jsou na obrázku vyznačeny oranžově, je možno vyplnit tří-uzlovými elementy. V případě 3D prostoru se jedná o šesti-uzlové

elementy. Výsledná pružina se zabroušenými závěrnými závitů je vyobrazena na obrázku 5.8.



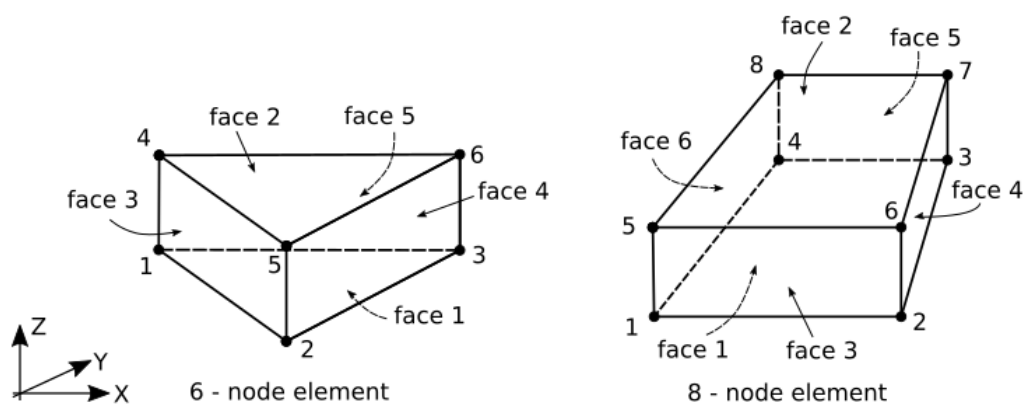
Obrázek 5.7: Schéma ořezání sítě



Obrázek 5.8: Pružina po ořezání závěrných závitů

5.2.4 Definování kontaktů

Model pružiny obsahuje dva typy kontaktů. První je v uložení – kontakt mezi modifikovanou částí závěrného závitu a deskou. Druhý kontakt je mezi jednotlivými závity pružiny. Kontakty jsou definovány v .inp souboru pomocí elementů s upřesněním jaká strana elementu do kontaktu přichází. Co se týče kontaktu závěrný závit – deska, zde platí jednoduché pravidlo: Všechny elementy pružiny, které se dotýkají desky jsou v kontaktu. Dále podle rotace uzlů je možno zjistit jaká stranu elementu je v kontaktu. Popis jednotlivých stran elementů a také číslování uzlů je uvedeno na obrázku 5.9. Kontakt mezi závity je možno nalézt dvěma způsoby. Matematickým popisem, nebo již při tvorbě tvořícího profilu. Oba způsoby mají své výhody a nevýhody. Matematický přístup spočívá v tom, že jsou hledány uzly na povrchu drátu, ze kterého je pružina navinuta. Uzel ležící na obálce tohoto navinutého drátu náleží elementu, který bude zahrnut do kontaktu. Tento způsob je univerzální pro všechny profily, ale je výpočetně náročnější. Druhý způsob využívá znalosti tvořícího profilu. Již při tvorbě sítě tohoto profilu je možno zjistit, které elementy přijdou do kontaktu. To lze pak aplikovat na celý model. Druhý způsob je jednodušší, ale je vázán na konkrétní profil a nefunguje tedy univerzálně.

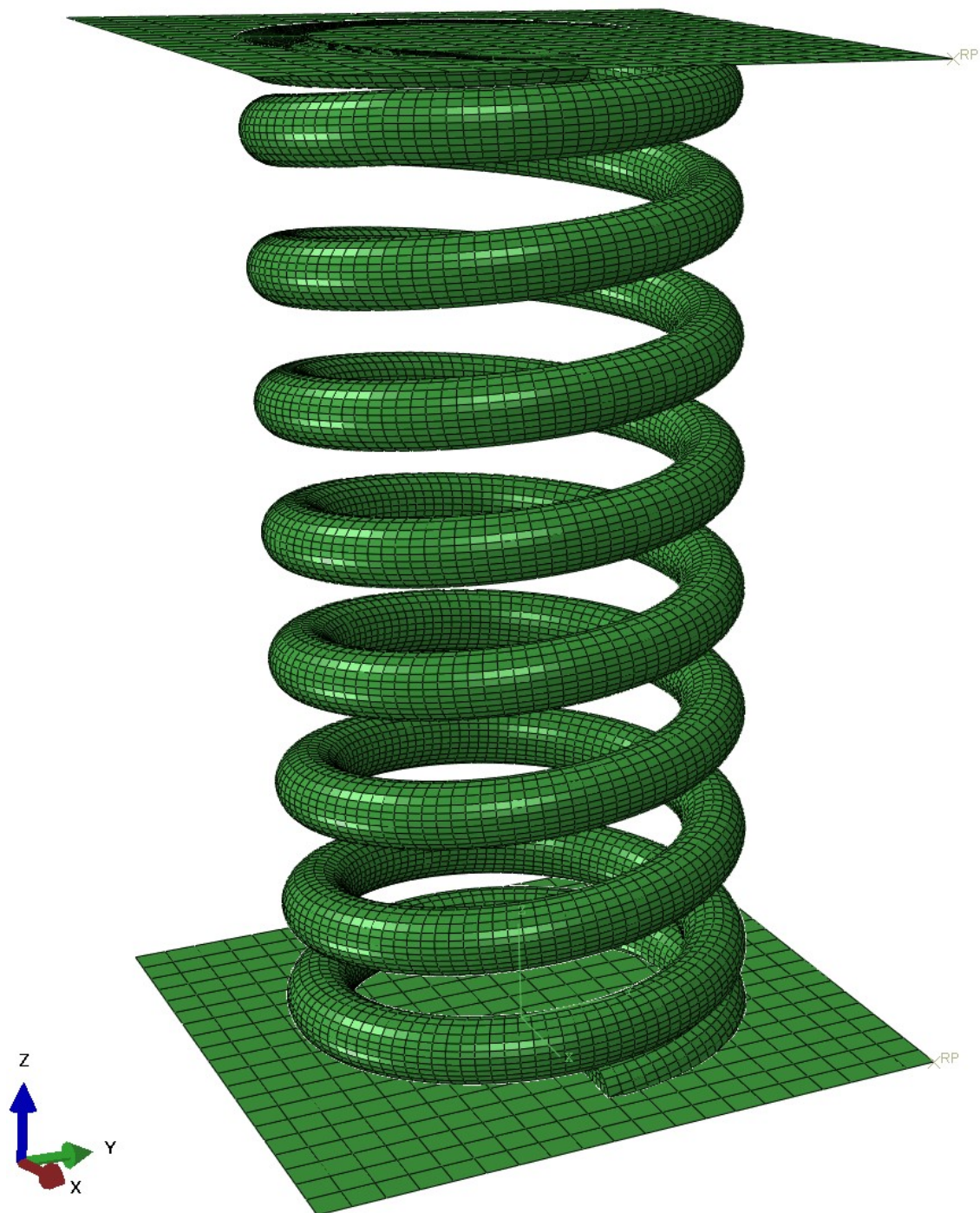


Obrázek 5.9: Číslování stěn elementů [31]

Celkový model pružiny pro analýzu metodou konečných prvků musí obsahovat:

- Matice uzlů a elementů pro jednotlivé objekty
- Popis sestavy – poloha jednotlivých objektů
- Materiálové parametry
- Definici kontaktů
- Okrajové podmínky – zatížení a uložení
- Parametry samotného výpočtu

Výše popsaným algoritmem jsou vygenerovány jednotlivé části parametrického modelu pružiny. Popis těchto částí je uložen v textových souborech. Na tyto soubory je odkazováno v rámci vstupu MKP výpočtu.



Obrázek 5.10: Model pružiny sekundárního vypružení z podvozku Y 0270

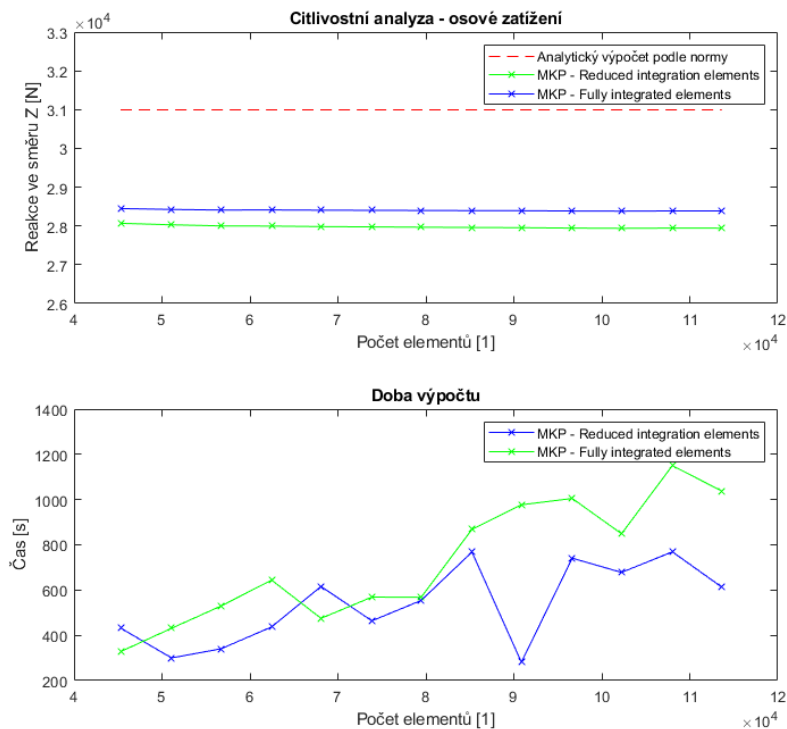
5.3 Citlivostní analýza

Přesnost výsledků výpočtu MKP je závislá na hustotě sítě a druhu použitých elementů. Z tohoto důvodu je třeba provést analýzu, jejímž účelem je optimalizace sítě pro danou úlohu. Obecně platí, že s jemnější sítí je možno dosáhnout přesnějších výsledků. Ovšem s rostoucím počtem elementů roste i časová náročnost výpočtu a je tedy nutné zvolit optimální poměr mezi přesností výpočtu a jeho časovou náročností. [14] V sekci 5.2.1 byla vytvořena síť tvořícího profilu. V rámci citlivostní analýzy není možné již tento profil nadále modifikovat. Jediný parametr, který lze upravovat a tím ovlivňovat počet elementů v modelu pružiny, je velikost kroku posuvu tvořící sítě. Další možností je změna integrace šestistěnnů. Obecně je doporučována redukováná integrace pro dosažení přesnějších výsledků, ale záleží na povaze problému.

Pro účely citlivostní analýzy byly uvažovány dva způsoby zatížení pružiny. Osové zatížení a kombinované zatížení. Pro oba případy byla hustota sítě ovládána délkou kroku posuvu tvořícího profilu. Dále byl výpočet proveden pro dva druhy elementů – šestistěny s redukovanou integrací (C3D8R) a šestistěny s plnou integrací (C3D8).

Osové zatížení v rámci citlivostní analýzy

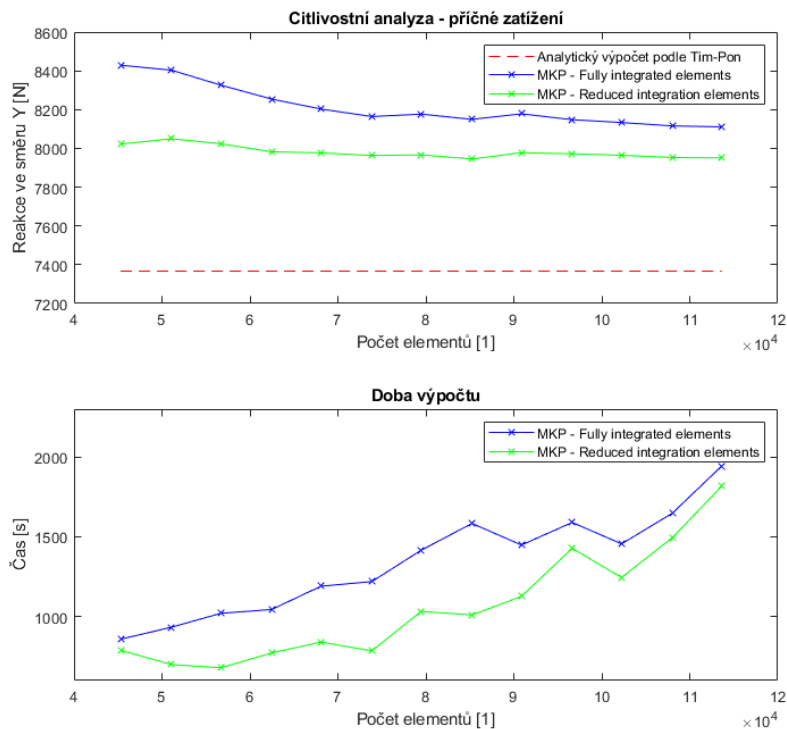
Model pružiny byl zatížen na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy. Pro danou hustotu sítě a použitý druh integrace elementů byla vypočítána reakce ve směru osy z . Výsledky citlivostní analýzy jsou na obrázku 5.11. Ve spodní části je graf znázorňující časovou náročnost numerických výpočtů (ta je důležitá především z pohledu optimalizace).



Obrázek 5.11: Citlivostní analýza – osové zatížení

Kombinované zatížení v rámci citlivostní analýzy

Model pružiny byl předzatížen na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy a následně byl zatížen na maximální přípustnou boční deformaci o hodnotě 65mm. Pro danou hustotu sítě a použitý druh integrace elementů byla vypočítána reakce ve směru osy y . Výsledky citlivostní analýzy jsou na obrázku 5.12. Ve spodní části je graf znázorňující časovou náročnost numerických výpočtů.



Obrázek 5.12: Citlivostní analýza – příčné zatížení

Z výsledků uvedených na obrázcích 5.11 a 5.12 lze vidět, že plně integrované elementy vykazují vyšší tuhost ve srovnání s použitím redukováných elementů a výpočet s plně integrovanými elementy je také časově náročnější. Dále z obrázku 5.11 je vidět, že změna počtu elementů v modelu nemá příliš velký vliv na výsledkovou reakci R_z . Pravděpodobným důvodem je to, že vepsaný mnohoúhelník v průřezu drátu zůstává zachován i při změně počtu elementů v modelu pružiny. Počet použitých elementů má minimální vliv na objem celého modelu při použití dostatečného množství elementů pro zachování hladkosti povrchu modelu.

Na obrázku 5.12 je vidět, že příčná reakce se mění do hodnoty $7,4 \cdot 10^4$ elementů, poté zůstává tato příčná reakce přibližně stejná. S rostoucím počtem elementů roste časová náročnost výpočtu, proto byla zvolena síť s $7,4 \cdot 10^4$ elementy. Současně

byly na základě výsledků vybrány elementy s redukovanou integrací (C3D8R). Tato zvolená síť bude nadále používána pro další výpočty.

5.4 Výsledky získané numericky

5.4.1 Osová tuhost

Za účelem získání osově tuhosti byl model pružiny zatížen na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy. Tato hodnota posuvu odpovídá výšce pružiny H_1 (viz tabulka 4.1). Modelu pružiny bylo dovoleno příčné vychýlení při dané hodnotě posuvu, toto boční vychýlení (srovnání) snižuje reakce v uložení R_x a R_y na nulovou hodnotu a reakce ve směru hlavní osy R_z se také nepatrně sníží. Výsledky osových tuhostí jsou uvedeny v tabulce 5.2.

Tabulka 5.2: Porovnání osových tuhostí

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Osová tuhost analyticky (4.5)	k_z	250,9	[N/mm]
Osová tuhost analyticky (1)	k_{z_s}	244,6	[N/mm]
Osová tuhost MKP	$k_{z_{mkp}}$	221,3	[N/mm]
Osová tuhost MKP (2)	$k_{z_{mkp4}}$	240,3	[N/mm]

Osová tuhost k_z získaná z analytického vztahu (4.5) dosahuje vyšší hodnoty, než tuhost získaná numericky. Tento rozdíl je dán dvěma faktory:

- Kruhový průřez drátu pružiny byl v rámci diskretizace nahrazen mnohoúhelníkem, který byl do kruhového profilu vepsán a tím tak došlo ke ztrátě materiálu. Dopotítáním plochy mnohoúhelníku je možné zjistit, jak diskretizace ovlivňuje výsledek osově tuhosti pružiny. Níže je uveden vztah pro výpočet kvadratického

momentu plochy:

$$I_k = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (5.4)$$

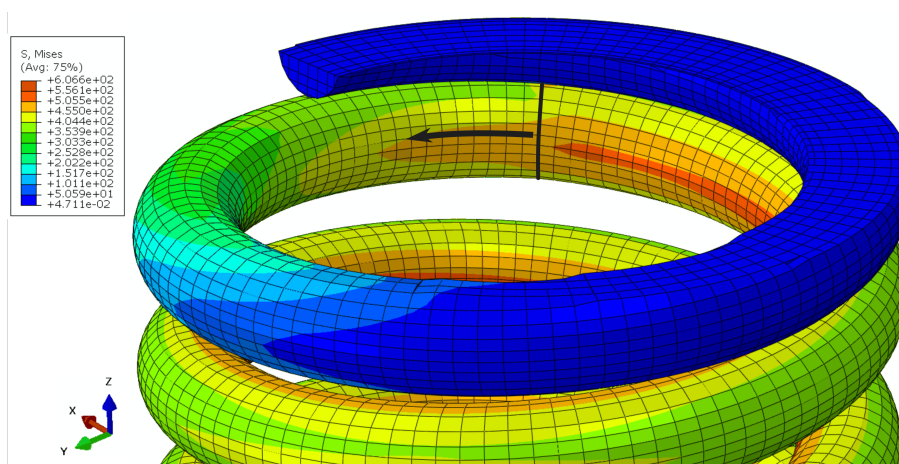
Byla vypočtena plocha mnohoúhelníku, který byl nahrazen kruhem s odpovídající plochou. Níže je srovnání kvadratických momentů plochy původního kruhu a kruhu odpovídající ploše mnohoúhelníku.

$$I_{k0} = 2,7742 \cdot 10^5 \quad I_{k1} = 2,7043 \cdot 10^5$$

Nově vzniknutý kruh má průměr o hodnotě $d_1 = 40,74$ mm. Po dosazení do vzorce pro výpočet tuhosti těsně vinuté pružiny dostáváme tuhost k_{zs} , která je uvedena v tabulce 5.2 (1). Tuhost pružiny pro nový průměr drátu poklesla o 2,5%. Tento rozdíl je možno v MKP modelu kompenzovat pomocí jemnější sítě, nebo úpravou materiálových parametrů (mesh-dependent material parameters). Pro exaktní modifikaci materiálových parametrů jsou třeba experimentálně získaná data z reálné pružiny. Není proto možné upravovat materiálové parametry jen za základě analytických výsledků osové tuhosti, protože by mohlo dojít k nárůstu odchylky u numerického výpočtu příčné tuhosti. Z tohoto důvodu nebyly změněny materiálové parametry vzhledem k hustotě sítě.

- Druhým faktorem který způsobuje nižší osovou tuhost, než udává analytický vztah (4.5) je rozložení napětí v závěrném závitě. Na obrázku 5.13 je MKP model konce pružiny po zatížení osovou silou. Barevně je naznačeno rozložení ekvivalentního napětí, kde ve směru šipky dochází k jeho snižování. Dále je zde vyznačen přechod mezi činným a závěrným závitěm. Analytický vztah pro výpočet osové tuhosti popisuje pouze namáhání činných závitů, neuvažuje tedy rozložení napětí v závěrné části, což neodpovídá skutečnosti. Výsledná

tuhost je vyšší než tuhost vypočtená numericky. Za účelem získání tuhosti pouze činné části byla změřena relativní deformace mezi čtyřmi činnými závity a přes poměr $\eta = 6,75/4$ byla dopočtena tuhost celé činné části. Tato tuhost je uvedena v tabulce 5.2 (2) a nese označení $k_{z_{mkp4}}$.



Obrázek 5.13: Rozložení ekvivalentního napětí v závěrném závitu

Z výsledků uvedených v tabulce 5.2 je možné říci, že došlo k dobré shodě mezi analytickým a numerickým výpočtem osové tuhosti. Tuhosti k_{z_s} a $k_{z_{mkp4}}$ by ideálně měly vyjít totožné, ale jejich nepatrný rozdíl je možné přičíst na vrub kvalitě sítě modelu.

5.4.2 Příčná tuhost

V této části je popsáno chování šroubovitě pružiny při bočním zatěžování. K určení příčné tuhosti je možno přistupovat dvěma způsoby. Po předzatížení modelu pružiny osovou deformací lze dále pružinu zatěžovat příčnou deformací, nebo příčnou silou. Způsob bočního zatížení má vliv na výslednou příčnou tuhost.

Výpočet příčné tuhosti při zatížení boční deformací

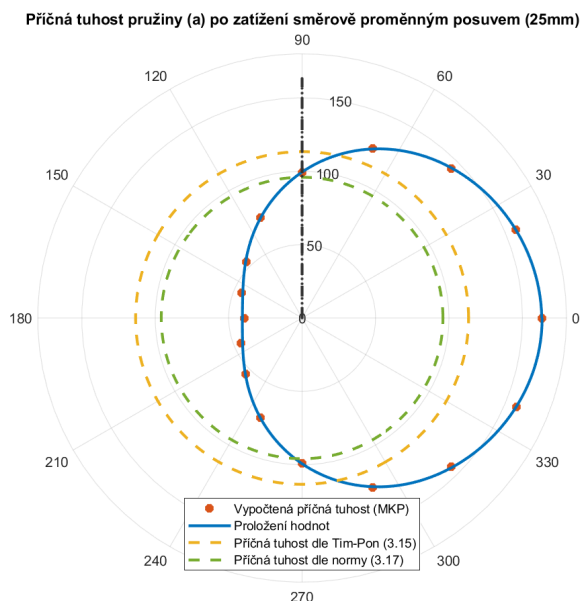
Za účelem získání příčné tuhosti byl model pružiny předzatížen na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy. Tato hodnota posuvu odpovídá výšce pružiny H_1 . Pružině nebylo dovoleno boční srovnání tudíž reakce v uložení (R_x , R_y a R_z) nejsou v tomto okamžiku nulové. Následně byla zavedena postupně v různých směrech boční deformace v rovině kolmé na osu z horní desky s hodnotou posuvu 25mm (směrově proměnná deformace je zavedena kvůli předpokladu nelineárního chování příčné tuhosti). Model pružiny je s deskou v kontaktu přičemž se zatížení přenáší v rámci tření (celá sestava je na obrázku 5.10). Pro dané okrajové podmínky výpočtem MKP dostáváme hodnoty reakcí v uložení.

$$R_{xy} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (5.5)$$

Z reakce R_{xy} a bočního posuvu s lze dopočítat tuhost k_{xy} následujícím způsobem:

$$k_{xy} = \frac{R_{xy}}{s} \quad (5.6)$$

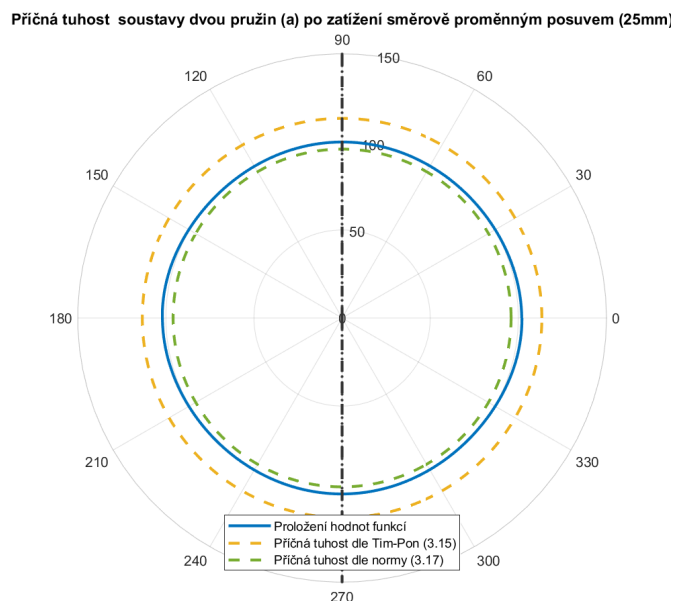
Příčná tuhost je vypočtena celkem pro 16 případů orientace boční deformace a je zaznamenána do polárního diagramu, který je na obrázku 5.14.



Obrázek 5.14: Polární diagram tuhosti pružiny (a) - zatíženo posuvem

V polárním diagramu je vidět, že MKP výpočet proběhl pro orientaci boční deformace na intervalu $0 - 360^\circ$ s krokem $22,5^\circ$. Výsledky jsou znázorněny červenými body. Těmito body je proložena křivka – polynom 8. řádu. Pro porovnání jsou zde uvedeny výsledky ze dvou analytických vztahů. Vztah pro výpočet příčné tuhosti z normy (4.17) a vztah od pánů Timošenka a Ponomareva (4.15). Dále jsou v grafu zobrazeny dvě čáry – čárkovaná a tečkovaná. Slouží pro znázornění polohy konců závěrných závitů. Lze vidět, že tyto čáry splývají. Znamená to, že konce závěrných závitů jsou přesně nad sebou.

Na obrázku 5.15 je uveden polární diagram příčné tuhosti pro soustavu dvou pružin. Tyto pružiny jsou k sobě otočeny tak, že závěrné závity směřují k sobě. Jinak řečeno, první pružina je ve výchozí pozici a druhá stejně orientovaná pružina je následně otočená kolem hlavní osy o 180° . Vstupní data pro tento diagram jsou z předchozího diagramu (nebyl tedy tvořen MKP model obsahující dvě pružiny). Výsledná tuhost soustavy je zprůměrovaná, jako by se jednalo o jeden pružící prvek.



Obrázek 5.15: Polární diagram tuhosti dvou pružin (a) - zatíženo posuvem

Z polárního diagramu je vidět, že se zprůměrovaná tuhost soustavy pružin je téměř konstantní. V praxi se s tímto způsobem zatížení šroubových pružin spíše nesetkáme. Tento výpočet je zde uveden jako demonstrace vlivu závěrných závitů na příčnou tuhost, zvláště pak pokud pružině není dovoleno boční srovnání. V tabulce 5.3 jsou hodnoty reakcí v uložení, když je pružina předzatížena na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy. Z výsledků je vidět, že boční reakce R_x a R_y nejsou zanedbatelné. Celková boční reakce dosahuje hodnoty kolem 5% reakce ve směru hlavní osy pružiny R_z .

Tabulka 5.3: Předzatížení šroubovitě pružiny

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Reakce v uložení ve směru x	R_x	2.7	[N/mm]
Reakce v uložení ve směru y	R_y	1390.0	[N/mm]
Reakce v uložení ve směru z	R_z	27340.9	[N/mm]

Výpočet příčné tuhosti při zatížení boční silou

Model pružiny je předzatížen na hodnotu posuvu 122,5mm ve směru hlavní osy. V tomto případě je však dovoleno boční srovnání pružiny. Výchozí pozice pro další zatížení je při nulové boční reakci R_x a R_y . Při bočním srovnání dochází k posuvu horní desky. V tabulce 5.4 jsou uvedeny posuvy horní desky vůči souřadnému systému.

Tabulka 5.4: Předzatížení šroubovitě pružiny s umožněním příčného srovnání

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Posuv ve směru x	x_1	-0.09	[mm]
Posuv ve směru y	y_1	-10.82	[mm]
Posuv ve směru z	z_1	-122.50	[mm]

Pro získání příčné tuhosti byla zavedena směrově proměnná boční síla. Pohyb této síly je obdobný s pohybem, který byl popsán v předchozí sekci. V intervalu 0 - 360° se natáčí s krokem 22,5°. Síla je zavedena na horní desku sestavy a v rámci tření je přenesena dále na model pružiny. Z výpočtu MKP dostáváme hodnoty deformací v jednotlivých složkách souřadného systému. Celkovou boční deformaci lze vypočítat z následujícího vztahu.

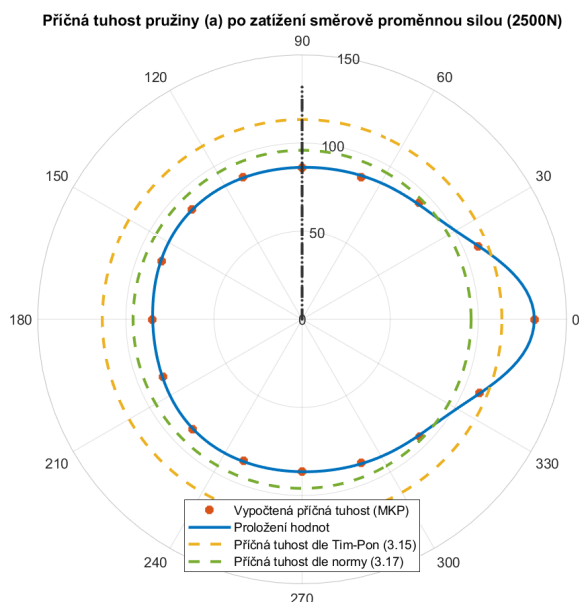
$$s = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (5.7)$$

Je nutno zmínit, že vypočtená deformace není přesně ve směru bočního zatížení. Jedná se tedy o odezvu pružiny na boční zatížení. Předpokládá se však, že odchylka mezi směrem deformace a směrem působící síly bude malá. Vztah pro výpočet příčné tuhosti je uveden níže.

$$k_{xy} = \frac{Q}{s} \quad (5.8)$$

V polárním diagramu na obrázku 5.16 je vidět, že příčná tuhost pružiny není konstantní. Pokud je model pružiny zatížen silou v místě natočení 0°, tak se pružina

chová jako nejvíce tuhá. V souřadném systému modelu sestavy tomu odpovídá směr y . Model se souřadným systémem je na obrázku 5.10.

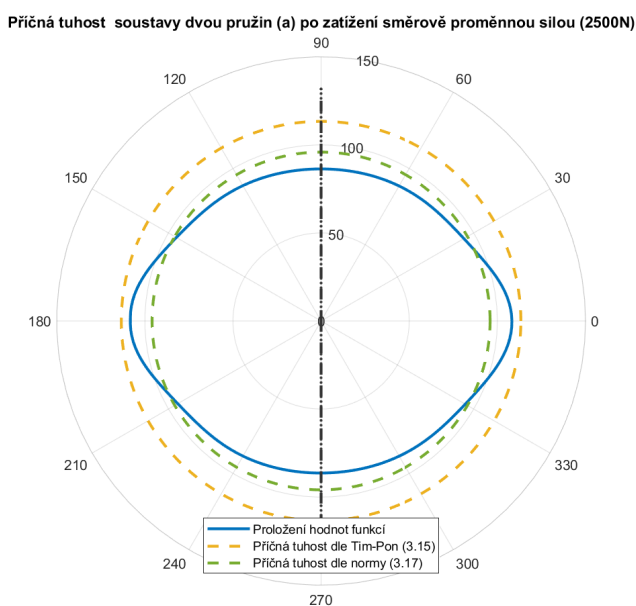


Obrázek 5.16: Polární diagram tuhosti pružiny (a) - zatíženo silou

Prvotní předpoklad byl takový, že se maximum příčné tuhosti bude nacházet ve směru x . V případě boční deformace ve směru x dojde ke zvýšení tlaku mezi činným a koncem závěrného závitu tudíž se bude pružina chovat jako více tuhá. Tento předpoklad však platí jen pro spodní část pružiny. Zde opravdu dojde ke zvýšení tlaku mezi činným a závěrným závitem. V případě horní části modelu je situace naprosto obrácená. Nedojde ke zvýšení tlaku mezi závity, ale dojde k jejich odlehčení. Výsledkem je, že se zmíněné efekty navzájem vyruší. Je třeba v modelu hledat takové místo, kde při boční zátěži dojde k opření činného závitu o závěrný. Takové místo se nachází na předělu činného a závěrného závitu. Při zatížení boční silou ve směru y dojde k opření činného závitu o závěrný na obou koncích pružiny. Pružina má v tomto směru největší příčnou tuhost.

Dále byl vytvořen polární diagram příčné tuhosti pro soustavu dvou pružin. Tyto

pružiny jsou vzájemně otočeny tak, že konce závěrných závitů směřují k sobě. Výsledná tuhost soustavy je následně zprůměrována, jako by se jednalo o jeden pružící prvek. Výsledek je znázorněn na obrázku 5.17.



Obrázek 5.17: Polární diagram tuhosti dvou pružin (a) - zatíženo silou

V polárním diagramu na obrázku 5.17 je vidět, že tuhost sestavy dvou pružin se nechová konstantně, jako tomu je v polárním diagramu na obrázku 5.15.

Příčná tuhost závěrem:

Na základě vypočtených výsledků příčné tuhosti šroubovitě pružiny typu flexi-coil lze říci, že způsob a směr zatížení má velký vliv na výslednou tuhost. V konstrukci vozidla je tedy důležité, aby byly pružiny uloženy ve vhodné orientaci pro dosažení co nejlepších jízdních vlastností. Naopak při nevhodném uložení pružin může dojít například ke změně velikosti vůlí v dorazech vymezující pohyby skříně vůči podvozku, nebo vzniku momentu mezi podvozkem a skříní v přímé koleji.

V tabulce 5.5 jsou uvedené výsledky příčné tuhosti pro případ zatížení modelu směrově proměnnou boční silou. Příčná tuhost modelu šroubovitě pružiny je maximální při zatížení boční silou ve směru osy y . Minimální příčná tuhost je pak ve směru kolmém na osu y . Existují tedy dvě minima. Celý model sestavy se souřadným systémem je na obrázku 5.10.

Tabulka 5.5: Vypočtené výsledky MKP

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Příčná tuhost Tim-Pon (4.15)	k_{yTP}	113,3	[N/mm]
Příčná tuhost podle normy [10] (4.15)	k_{y_n}	95,9	[N/mm]
Průměrná příčná tuhost	k_{yprum}	93,4	[N/mm]
Maximální příčná tuhost	$k_{y_{max}}$	131,7	[N/mm]
Minimální příčná tuhost	$k_{y_{min}}$	86,2	[N/mm]

5.4.3 Vyhodnocení namáhání

Z analýzy MKP je možno určit rozložení ekvivalentního napětí v celém modelu pružiny. V podkapitole 4.4 byl proveden analytický výpočet namáhání pružiny při osovém i kombinovaném zatížení. Výsledky smykového napětí jsou uvedeny v tabulce 4.8. Pro porovnání analytických výsledků s výsledky MKP je třeba dopočítat ekvivalentní napětí. Vztah pro výpočet ekvivalentního napětí podle hypotézy HMM někdy označováno jako Mises:

$$\sigma_{HMH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)} \quad (5.9)$$

[22]

Dosažením pouze smykové složky napětí do výše uvedeného vztahu dostáváme hodnoty uvedené v první polovině tabulky 5.6. V druhé polovině tabulky se nacházejí

hodnoty ekvivalentního napětí z výpočtu MKP. V tomto případě byl model předzatížen na hodnotu H_1 s umožněním bočního srovnání, následně byla zavedena směrově proměnná boční síla o velikosti 2500N. Na celém intervalu 0 - 360° byly zjištěny dvě maxima ekvivalentního napětí. Nacházejí se ve směrech největší příčné poddajnosti pružiny tj. na ose x .

Tabulka 5.6: Ekvivalentní napětí analyticky a numericky

Veličina	Označení	Hodnota	Jednotky
Maximální napětí HMH od osového zatížení Wahl	σ_o	628,6	[MPa]
Maximální napětí HMH od kombinovaného zatížení	σ_k	649,7	[MPa]
Maximální napětí Mises od osového zatížení MKP	S_o	580,5	[MPa]
Maximální napětí Mises od kombinovaného zatížení	S_k	695,0	[MPa]

K výsledkům z tabulky 5.6 je třeba uvést, že pokud je model pružiny zatěžován ve směru jeho největší příčné tuhosti, napětí S_k dosahuje hodnoty 644,9. Ekvivalentní napětí S_k je pak nižší, než výsledek z analytického vztahu.

6 Uložení pružin flexi-coil

V předchozí kapitole bylo zjištěno, že příčná tuhost šroubových pružin je značně nelineární. Tohoto efektu lze v podvozcích kolejových vozidel využít. Natočením jednotlivých pružících prvků kolem hlavní osy je možno ladit boční tuhost celé soustavy sekundárního vypružení. V následujících bodech jsou uvedeny požadavky na příčnou tuhost soustavy vypružení.

- Při průjezdu vozidla obloukem, dochází k relativnímu natočení podvozku vůči skříně. Šroubovitě pružiny druhého stupně vypružení jsou deformovány ve směru jízdy vozidla (osa x). Míra deformace je úměrná relativnímu natočení. Deformací pružin ve směru x vzniká moment, jehož snahou je srovnání podvozku vůči skříně. Pro zlepšení jízdních vlastností je většinou třeba tento moment minimalizovat.
- Příčné deformování těchto pružin vzniká působením setrvačných sil od skříně vozidla. Je snahou tuto příčnou deformaci minimalizovat. To lze docílit zvýšením příčné tuhosti soustavy sekundárního vypružení.

Z výše uvedených bodů vyplývá, že soustava sekundárního vypružení má mít v podélném směru vysokou poddajnost a v příčném směru vysokou tuhost. To je možné docílit vhodným natočením jednotlivých pružících prvků kolem hlavní osy. V této

kapitole jsou popsané možnosti vhodného uložení šroubovitých pružin.

6.1 Podvozek s jedním párem sekundárních pružin flexi-coil

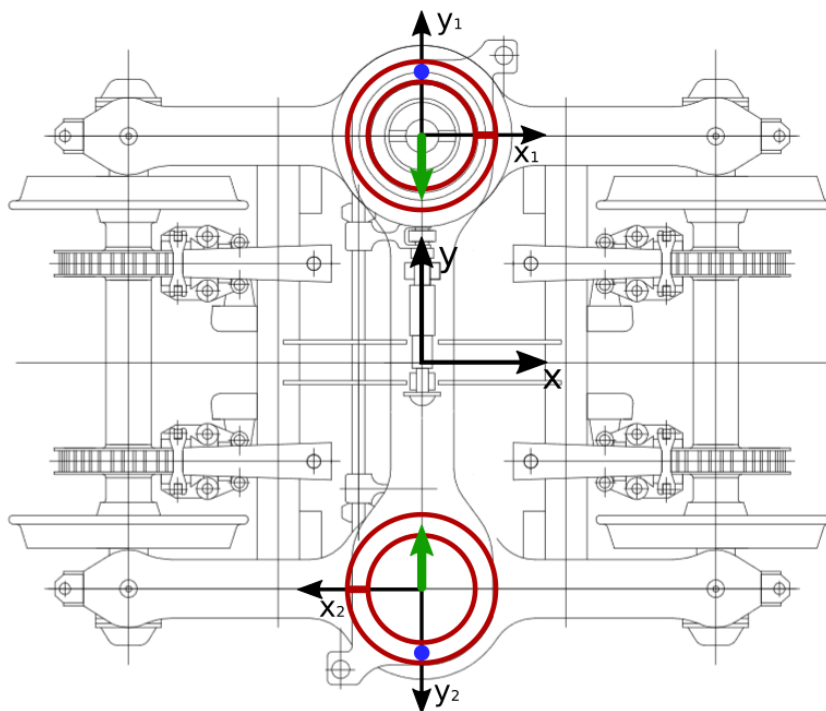
V této podkapitole je popsáno uložení šroubovitých pružin v rámci sekundárního vypružení. Pro demonstraci uložení flexi-coil pružin byl vybrán podvozek Y 32. Tento podvozek je velmi podobný podvozku Y 0270 a zde uvedené principy platí pro oba typy podvozků.

Na obrázku 6.1 je typový výkres podvozku Y 32. Do výkresu jsou doplněna schémata páru pružin sekundárního vypružení. Tyto pružiny mají vyznačenou polohu konců závěrných závitů. Oba dva konce závěrných závitů jsou přesně nad sebou, proto je v mezikruží pouze jedna čára znázorňující polohu konců závěrných závitů. Dále schéma pružin obsahují šípky a modré puntíky. Šípky znázorňují směr posuvu horní části pružiny, pokud dojde k jejímu předzatížení ve směru hlavní osy a je umožněno boční srovnání. Modrý puntík určuje v jakém směru má pružina největší příčnou tuhost.

Při ukládání šroubových pružin do podvozků je důležitá jejich orientace, tj. natočení kolem jejich hlavní osy. Vhodným natočením pružin je nutné zajistit, aby při předzatížení pružin nedocházelo ke vzniku momentu mezi podvozkem a skříní (v přímé koleji). Dále nesmí dojít k bočním relativním posuvům mezi podvozkem a skříní se změnou hmotnosti, kterou nese sekundární vypružení. Tyto relativní pohyby ovlivňují velikost vůlí v dorazech vymezující pohyby skříně vůči podvozku.

Na obrázku 6.1 je ukázána jedna z variant vhodného uložení šroubových pružin. Pružiny jsou uloženy tak, že jejich maximální tuhost je v ose y podvozku. Zároveň

při jejich předzatížení nedochází k relativnímu posuvu podvozku a skříně, protože se tyto posuvy mezi sebou vyruší. Druhým možným uložením těchto pružin je jejich natočení o 180° .



Obrázek 6.1: Uložení pružin sekundárního vypružení v podvozku Y32

Z výše uvedeného postupu lze vyvodit obecný princip pro ukládání šroubových pružin. Pružiny mají být uloženy, tak aby byla zachována souměrnost podle osy podvozku x . Dále při předzatížení vzniklé příčné reakce v pružinách musí směřovat vně, nebo na střed podvozku.

Vlastnosti soustavy sekundárního vypružení

Soustava sekundárního vypružení z obrázku 6.1 při zatížení silou od hmotnosti skříně nekoná žádný příčný pohyb, když příčné reakce v jednotlivých pružinách nejsou nulové. Při jízdě vozidla na soustavu působí boční síly. Rozbor zatížení na jednu pružinu ze soustavy je tedy následující – pružina je zatížena osovou silou bez možnosti

bočního srovnání, následně na tento pružící prvek působí boční síly. Uvedený způsob zatěžování nebyl v předchozí kapitole uvažován a nejsou tedy vypočteny hodnoty pro polární diagramy tuhosti. Předpoklad je však takový, že tyto diagramy budou podobné diagramům ze sekce 5.4.2.

6.2 Důsledky nevhodného uložení pružin

6.2.1 Relativní posuv podvozku a skříně

Relativní posuv mezi podvozkem a skříní nastává, pokud jsou do podvozku uloženy pružiny se stejnou orientací. Tento efekt se projeví, již při umístění skříně na pružiny sekundárního vypružení. Pružící prvky jsou zatíženy osovou silou a jejich boční vyhnutí není nijak omezeno. Například při zatížení pružin sekundárního vypružení v podvozku Y 32 na hodnotu H_1 , odpovídá vybočení (relativní posuv podvozku a skříně) hodnotě 10,8mm. Orientace pružin, a tedy směr příčného vybočení ovlivňuje velikost vůlí v příčných a podélných dorazech.

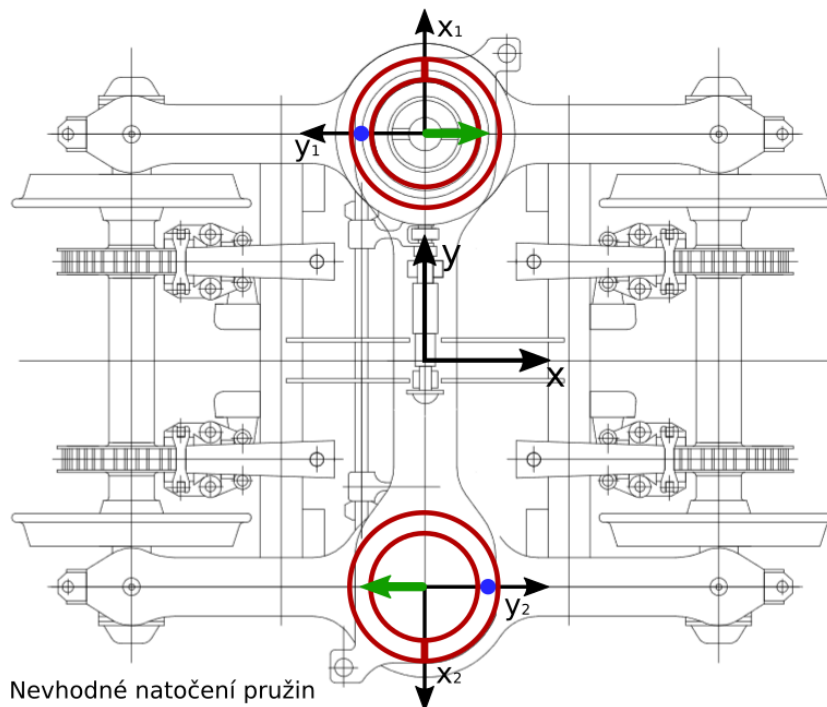
6.2.2 Moment mezi podvozkem a skříní

Moment mezi podvozkem a skříní v přímé koleji vznikne, pokud jsou pružiny sekundárního vypružení uloženy jako je na obrázku 6.2. Pružiny jsou natočené tak, že při osovém zatížení vznikne boční deformace v podélném směru podvozku. Boční deformace horní pružiny je ve směru jízdy vozidla a spodní pružina natočená tak, aby deformace měla opačný směr. Z hodnot v tabulkách 4.3 a 5.3 je možno dopočítat velikost momentu, při zatížení druhého stupně vypružení na hodnotu H_1 .

$$M_p = H_p \cdot R_y \quad (6.1)$$

KAPITOLA 6. ULOŽENÍ PRUŽIN FLEXI-COIL

Pro tento typ uložení nabývá moment M_p hodnoty 2780Nm.



Obrázek 6.2: Nevhodné uložení pružin sekundárního vypružení v podvozku Y32

7 Optimalizace

V rámci optimalizace je řešen návrh pružiny ze sekundárního vypružení podvozku Y 0270. Cílem je nalezení optimální geometrie pružícího prvku pro zadané požadavky:

- Tuhost ve směru hlavní osy pružiny k_z má být zachována.
- Poměr příčných tuhostí $\frac{k_y}{k_x}$ musí být maximální.
- Dodržení zástavbového prostoru (výška a průměr válcové obálky).

Výše uvedený požadavek na boční tuhost vyplývá z předchozí kapitoly. Snížením tuhosti pružiny v podélném směru k_x dojde ke snížení momentu, který vzniká mezi podvozkem a skříní při průjezdu obloukem. Naopak zvýšená tuhost v příčném směru k_y sníží velikost relativních výchylek podvozku a skříně při působení dynamických sil. Pro dosažení maximálního poměru příčných tuhostí, při zachování osově tuhosti, byly vybrány následující optimalizační parametry:

$$r = \{d, D, n_1\},$$

kde d je průměr drátu, D je střední průměr vinutí a n_1 je počet činných závitů. Poměr příčných tuhostí pravděpodobně ovlivňuje i počet závěrných závitů n_2 , avšak tato hodnota nebyla zařazena mezi optimalizační parametry. Důvodem je zachování čárového styku mezi závěrnými závity. Část závitu, kde k čárovému styku dochází se

nazývá „mrtvý závit“ a byl ukázán v kapitole 4 na obrázku 4.2.

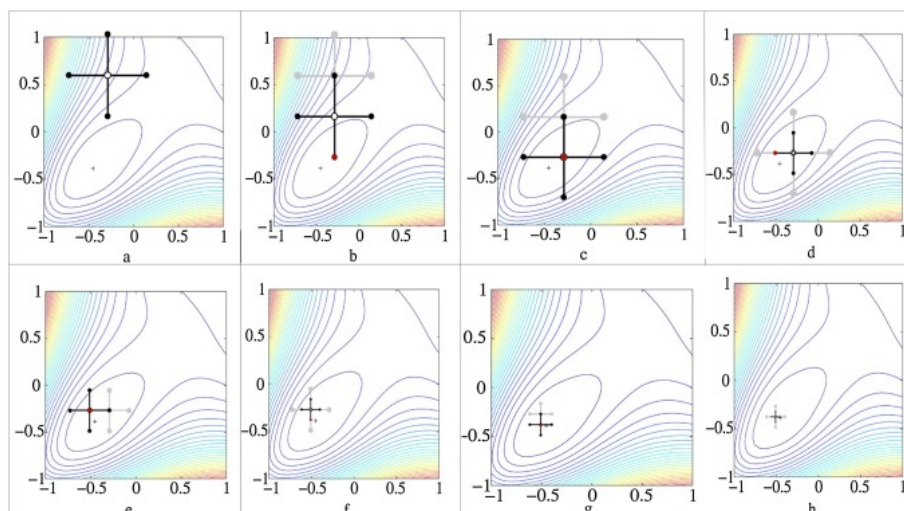
Časová náročnost jednoho MKP výpočtu zatížení pružiny se pohybovala v rozmezí 10 až 20 minut (použit procesor AMD Ryzen 5 3600). Obecně platí, že při zatížení modelu pružiny silou je časová náročnost výpočtu vyšší než při zatížení posuvem. Pro zkrácení doby „hledání“ optimální geometrie pružiny bylo rozhodnuto, že návrh pružiny vzejde ze dvou na sebe navazujících optimalizací. Cílem první optimalizace je dosažení maximálního poměru příčných tuhostí k_x a k_y . Optimalizačním parametrem v této části je počet činných závitů n_1 , ostatní parametry d a D nemají na tento poměr příčných tuhostí vliv a vystupují zde jako konstanty. Cílem druhé optimalizace je dosažení stejné osově tuhosti k_z s výchozím pružícím prvkem. Optimalizačními parametry v této části jsou d a D . Počet činných závitů n_1 zde vystupuje jako konstanta z předchozí optimalizace.

Volba optimalizační metody

Předpokladem optimalizačního algoritmu je rychlé a spolehlivé nalezení extrému cílové funkce. Vlastnosti cílové funkce (dále CF) určují požadavky na metodu optimalizace. V tomto případě vstupují do výpočtu CF hodnoty vypočtené z kontaktní MKP úlohy, proto není možné cokoli říci o její vlastnosti. Je třeba vybrat robustní optimalizační metodu, která nemá velké nároky na vlastnosti CF jako je například spojitost, hladkost a monotónnost. Z tohoto důvodu byl vybrán optimalizační algoritmus *Patternsearch*.

Optimalizační algoritmus *Patternsearch* je výhodný pro danou úlohu z těchto důvodů:

- nepotřebuje gradient CF
- kompromis mezi lokální a globální metodou
- lze nastavit velikost počátečního kroku (velikost obrazce v první iteraci)

Obrázek 7.1: Princip optimalizační metody *Patternsearch* [15]

Základním principem tohoto optimalizačního algoritmu je pohyb obrazce v prostoru CF. Pro případ dvou optimalizačních parametrů je obrazec optimalizačního algoritmu naznačen na obrázku 7.1. Hodnoty CF jsou vypočteny v krajních bodech obrazce a na středu obrazce. Pokud hodnota CF je v některém z krajních bodů nejnižší, střed obrazce se posune do tohoto bodu. Druhým případem, který může nastat je, že hodnota CF je nejmenší na středu obrazce. V tomto případě dojde ke zmenšení obrazce v určitém měřítku a jsou vypočteny hodnoty CF v krajních bodech obrazce. Tento algoritmus se opakuje, dokud není dosažena předem definovaná přesnost výpočtu, nebo byl překročen předem definovaný počet iterací.

7.1 Optimalizace 1

První optimalizace je zaměřena na úpravu geometrie šroubovitě pružiny za účelem dosažení maximálního poměru bočních tuhostí k_x a k_y . Optimalizačním parametrem v této části je počet činných závitů n_1 .

Model MKP pro optimalizaci 1

Pro účely optimalizace byl vytvořen plně parametrický MKP model šroubovitě pružiny. Postup tvorby modelu je vysvětlen v kapitole 5. V této optimalizaci je použit pouze jeden parametr n_1 a ostatní parametry jsou zvoleny jako konstanty podle tabulky 4.6. Model pružiny je předzatížen osovou deformací na hodnotu H_1 . Je dovoleno boční srovnání pružiny. Příčné reakce R_x a R_y jsou v tomto okamžiku nulové. Zatížení modelu pružiny probíhá ve dvou krocích. Nejprve je zavedena síla ve směru osy x působící na horní desku sestavy. Skrze tření mezi deskou a závěrným závitem je zatížení dále přenášeno na model pružiny. Je vyhodnocena relativní výchylka horní desky mezi stavem, kdy je pružina předzatížena s umožněním bočního vyhnutí a stavem, kdy je zavedena boční síla. V dalším kroku síla ve směru x přestává působit a je zavedena síla ve směru osy y působící taktéž na horní desku sestavy. Obdobným způsobem je vypočtena relativní výchylka vrchní desky pro zatížení ve směru y . Obě boční síly mají velikost 2500N. Výstupem z numerického výpočtu je tedy relativní posuv horní desky při působení síly ve směru x a relativní posuv horní desky při působení síly ve směru y .

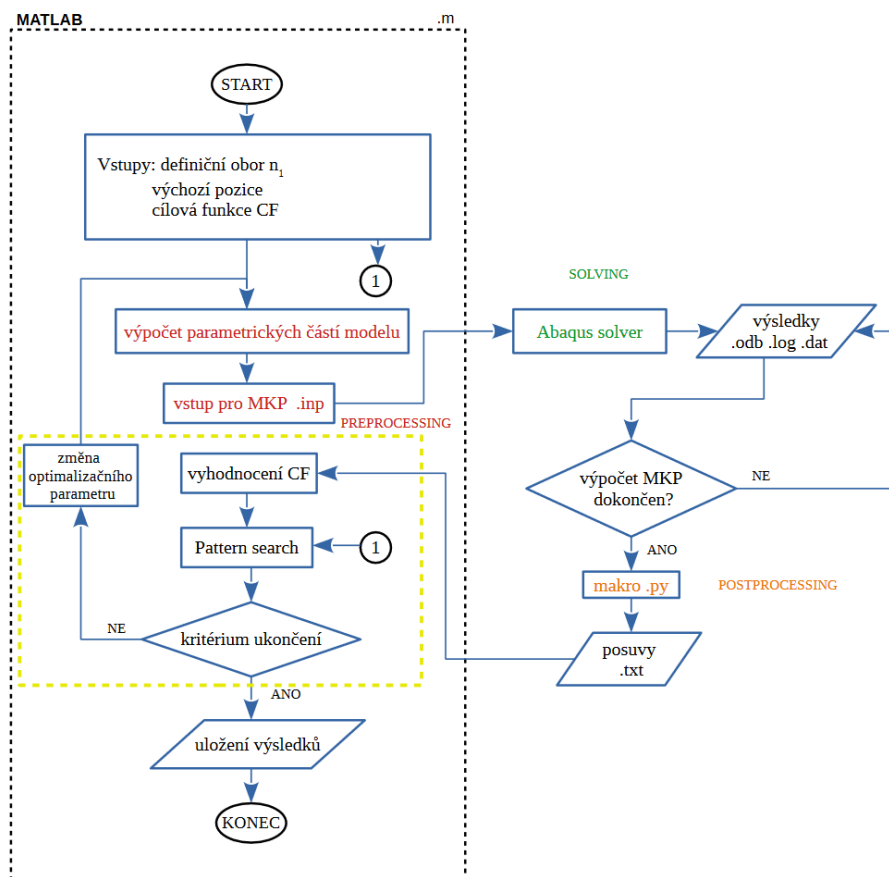
Cílová funkce byla zvolena tak, aby minimalizací její hodnot bylo dosaženo co největšího poměru mezi příčnými tuhostmi k_x a k_y . Dále je důležité, aby funkce nenabývala záporných hodnot.

$$CF_1 = \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^2 \quad (7.1)$$

Vývojový diagram optimalizace je znázorněn na obrázku 7.2. Celý optimalizační proces je ovládán Matlab programem. Uživatel zvolí výchozí bod, ze kterého optimalizace následně startuje. Výchozím bodem v tomto případě je počet činných závitů. Dále je třeba určit definiční obor optimalizačního parametru. Vstupní parametry pro

optimalizaci byly zvoleny následujícím způsobem:

- výchozí bod optimalizace $n_{1_{start}} = 6,75$
- definiční obor optimalizačního parametru $n_1 \in (6,25; 7,25)$



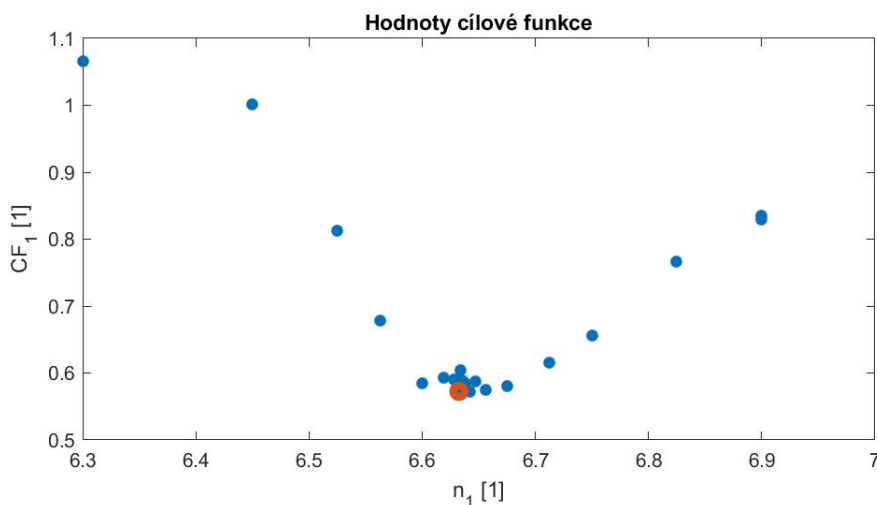
Obrázek 7.2: Vývojový diagram optimalizace 1

Popis vývojového diagramu

Počáteční parametry optimalizace jsou zadány uživatelem. Z těchto parametrů je vypočten model pružiny se všemi částmi, které slouží jako vstup pro MKP výpočet. Spuštění MKP řešiče. Po startu numerického výpočtu jsou vygenerovány soubory s koncovkou .odb a .log. Algoritmus kontroluje soubor s koncovkou .log a čeká

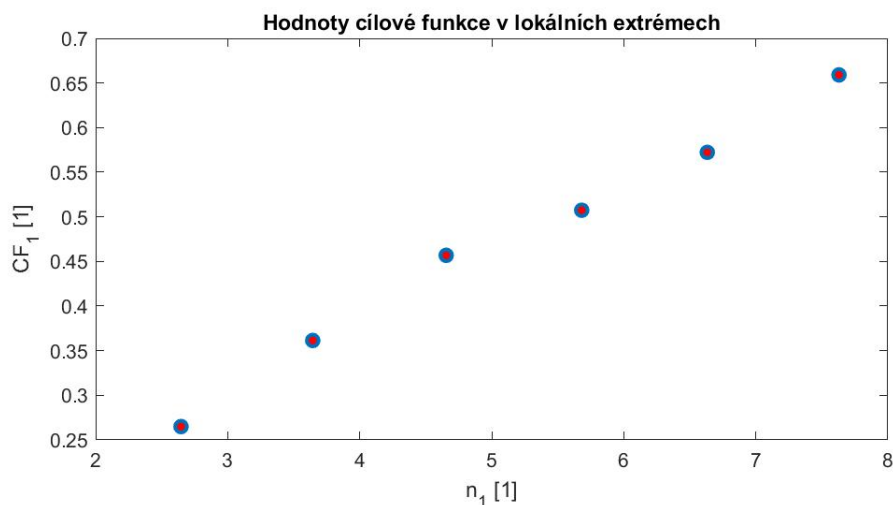
dokud MKP výpočet neproběhne. Po úspěšném výpočtu je spuštěno makro, které automaticky vyhledá potřebné výsledky ze souboru s koncovkou .odb. Získané výsledky slouží pro výpočet cílové funkce. Optimalizační algoritmus posoudí CF, navrhne nové parametry modelu a výpočet je opakován. Výpočet je ukončen v případě, pokud je dosaženo požadované přesnosti výsledků, nebo byl překročen maximální počet iterací. V posledním kroku dojde k uložení výsledků.

Na obrázku 7.3 je znázorněn průběh cílové funkce s vyznačením hodnoty lokálního minima (červený bod). Ze získaných hodnot CF je vidět, že v daném intervalu existuje jen jedno lokální minimum a jedno lokální maximum. Protože lokální maximum není tak významné, nebylo zahrnuté do výsledků. Poloha lokálního minima CF je dána počtem činných závitů n_1 a odpovídá hodnotě 6,63.



Obrázek 7.3: Hodnoty CF_1 v průběhu optimalizace 1

Z obrázku 7.3 lze vidět, že v daném intervalu je cílová funkce nediferencovatelná. Při použití gradientní optimalizační metody by došlo k nalezení pseudo-lokálního minima. Navíc je pravděpodobné, že toto minimum by leželo v místě výchozí pozice. Volba negradientního optimalizačního algoritmu byla tedy správná.

Obrázek 7.4: Lokální extrémy CF_1

Zvolená optimalizační metoda je metodou lokální. V rámci jedné optimalizace není možné určit polohu globálního extrému CF. Řešením je opakované spouštění lokální optimalizační metody z různých počátečních poloh. V případě této optimalizace byla výchozí poloha určena počtem činných závitů, upravena vždy o jeden celý závit. Nalezené lokální extrémy jsou znázorněny na obrázku 7.4. Je vidět, že s klesajícím počtem činných závitů se zvyšuje poměr příčných tuhostí. Výška pružiny se změnou počtu závitů zůstává neměnná a mění se tedy stoupání činných závitů.

7.2 Optimalizace 2

Druhá optimalizace je zaměřena na úpravu geometrie šroubovitě pružiny za účelem dosažení požadované tuhosti ve směru hlavní osy k_z . Parametry pro optimalizaci jsou zde průměr drátu d a střední průměr vinutí D . Počet činných závitů n_1 zde vystupuje jako konstanta a její hodnota byla vypočtena v předchozí optimalizaci. Zbýlé hodnoty pro úplný geometrický popis šroubovitě pružiny jsou z tabulky 4.6.

Model MKP pro optimalizaci 2

Parametrický model pružiny pro tuto optimalizaci je totožný s modelem v první optimalizaci.

Optimalizačními parametry v této části jsou průměr drátu d a střední průměr vinutí D . Ostatní parametry pružiny zde vystupují jako konstanty. Model pružiny je zatížen osovou deformací na hodnotu H_1 . Je dovoleno boční srovnání pružiny. Boční reakce R_x a R_y jsou v tomto okamžiku nulové. Výstupem z numerického výpočtu je reakce ve směru hlavní osy R_z .

Cílová funkce byla zvolena tak aby její minimalizací bylo dosaženo potřebné reakce ve směru hlavní osy. Z reakce a hodnoty posuvu lze dopočítat průměrnou tuhost při daném zatížení. Dále bylo ošetřeno, aby funkce 7.2 nenabývala záporných hodnot. Reakce ve směru hlavní osy R_z odpovídá hodnotě 27108N a jedná se o referenční hodnotu pro optimalizaci. Reakce R_z byla vypočtena v sekci 5.4.1, kdy model pružiny (sekundárního vypružení z podvozku Y 0270) byl předzatížen na hodnotu H_1 s umožněním příčného srovnání. Reakce $R_{z_{opt}}$ je výsledek z numerické zpětné vazby.

$$CF_2 = (R_z - R_{z_{opt}})^2 \quad (7.2)$$

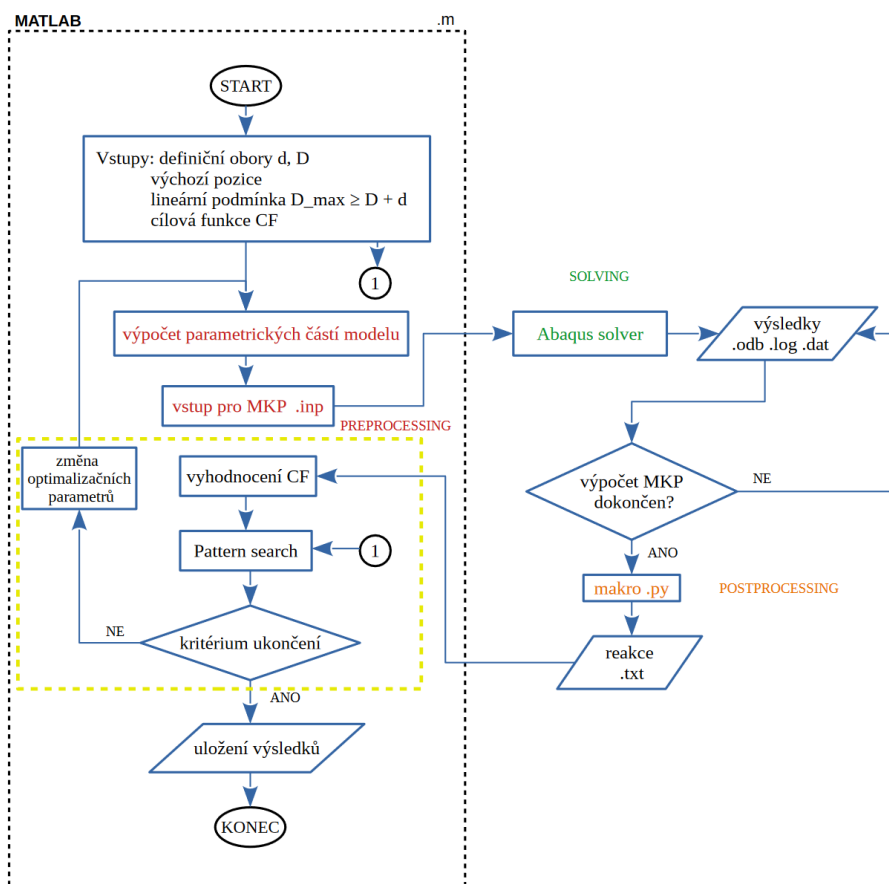
Podmínka pro dodržení zástavbového prostoru:

$$D_{max} \geq D_{opt} + d_{opt} \quad (7.3)$$

V průběhu první i druhé optimalizace výška pružiny zůstává konstantní. Maximální průměr válcové obálky D_{max} je dán parametry výchozí pružiny. D_{opt} a d_{opt} jsou parametry v průběhu optimalizace.

Vývojový diagram optimalizace je znázorněn na obrázku 7.5. Celý optimalizační proces je ovládán Matlab programem. Uživatel zvolí výchozí bod, ze kterého optimalizace následně startuje. Výchozím bodem v tomto případě je průměr drátu d a střední průměr vinutí D . Dále je třeba určit definiční obor optimalizačních parametrů. Vstupní parametry pro optimalizaci byly zvoleny následujícím způsobem:

- výchozí bod optimalizace $d_{start} = 41$, $D_{start} = 255$
- definiční obor optimalizačního parametru $d_{opt} \in (36; 45)$, $D_{opt} \in (220; 275)$

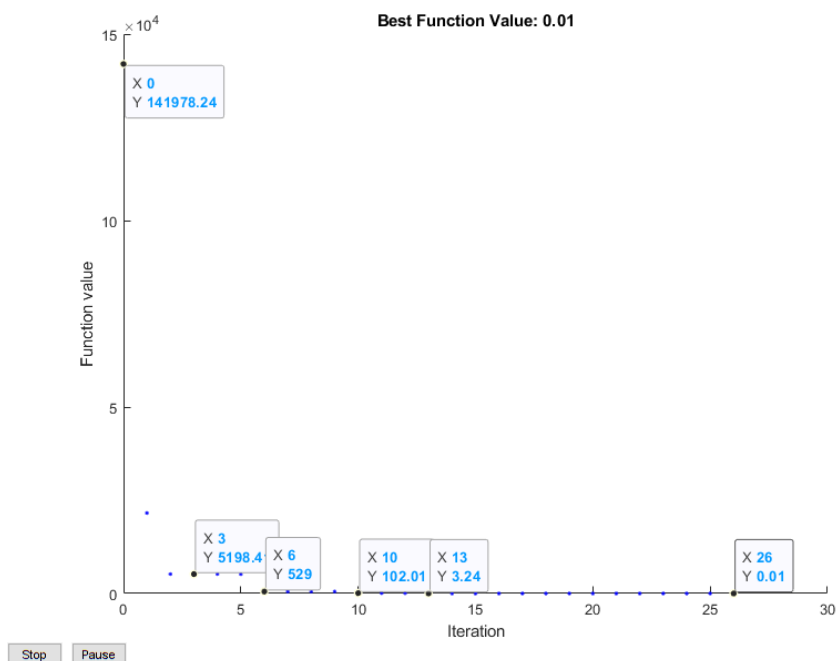


Obrázek 7.5: Vývojový diagram optimalizace 2

Vývojový diagram uvedený na obrázku 7.5 je velmi podobný diagramu 7.2, proto zde nebude znovu popisován. Rozdílem je počet optimalizačních parametrů, výstup

z numerické zpětné vazby a cílová funkce.

Na obrázku 7.6 je záznam hodnot cílové funkce v průběhu optimalizace. Je třeba zmínit že jde pouze o kroky které vedly ke snížení cílové funkce, nebo k udržení stejné hodnoty.



Obrázek 7.6: Vývoj CF_2 v průběhu optimalizace 2

Z obrázku je vidět, že bylo dosaženo velmi dobré shody reakcí ve směru hlavní osy pružiny. Optimalizace byla zastavena při hodnotě $CF_2 = 0,01$.

7.3 Výsledky optimalizace

V rámci optimalizace byly vypočteny parametry dvou šroubových pružin. Parametry těchto pružin jsou v tabulce 7.1. Pružina (a) nese parametry sekundárního vypružení z podvozku Y 0270 a je zde uvedena pro srovnání s pružícími prvky vypočtené pomocí optimalizace. Parametry pružiny (b) byly vypočteny v rámci optimalizace

uvedené v předchozí podkapitole. Výchozí geometrií pro pružinu (b) byla pružina (a). Počáteční parametr pro pružinu (c) byl počet činných závitů vypočtený v rámci optimalizace pružiny (b), avšak byla odebrána jedna otáčka činného závitu. Důvodem odebrání jedné činné otáčky u pružiny (c) byl předpoklad nárůstu poměru příčných tuhostí.

Tabulka 7.1: Výsledky optimalizace

Veličina	Označení	Pružina (a)	Pružina (b)	Pružina (c)	Jednotky
Počet činných závitů	n_1	6,75	6,63	5,69	[1]
Průměr drátu	d	41	40,86	39,50	[mm]
Střední průměr vinutí	D	255	255,03	255,45	[mm]
Tuhost ve směru X	k_x	86,18	84,56	74,04	[N/mm]
Tuhost ve směru Y	k_y	131,74	138,53	132,72	[N/mm]
Tuhost ve směru Z	k_z	221,29	221,30	221,40	[N/mm]
Ekvivalentní napětí HMH (1)	S_o	580,51	581,50	645,46	[MPa]
Ekvivalentní napětí HMH (2)	S_k	695,00	700,67	785,12	[MPa]
Poměr příčných tuhostí	m	1,53	1,64	1,79	[1]
Počet závěrných závitů	n_2	2,25	2,25	2,25	[1]
Výška nezatížené pružiny	H_0	630	630	630	[mm]

(1) Ekvivalentní napětí HMH při osovém zatížení

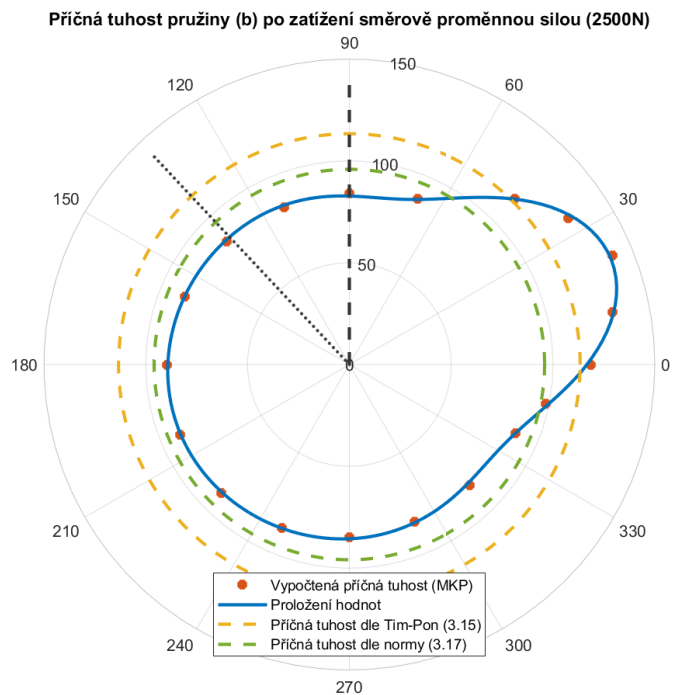
(2) Ekvivalentní napětí HMH při kombinovaném zatížení

Výsledky uvedené v tabulce 7.1 vycházejí z předzatížení pružiny ve směru hlavní osy na hodnotu posuvu 122,5mm a bylo dovoleno boční srovnání pružiny. V tomto stavu byla změřena osová tuhost k_z a hodnota ekvivalentního napětí S_o . Dále byla pružina zatěžována směrově proměnnou boční silou o velikosti 2500 N. Z celého intervalu natočení bylo vybráno maximální ekvivalentní napětí a také byla určena maximální a minimální příčná tuhost. Podmínkou minimální příčné tuhosti je kolmost na směr maximální příčné tuhosti.

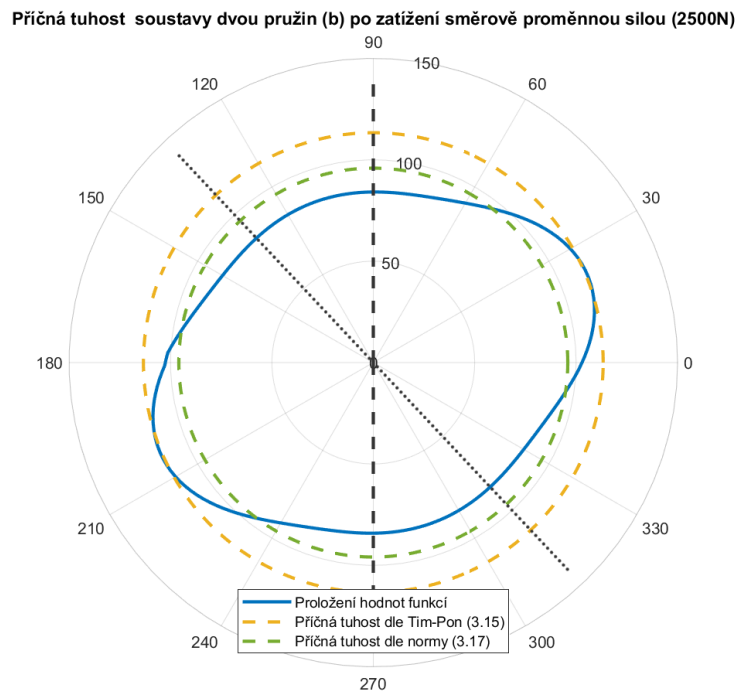
Polární diagramy příčných tuhostí

Níže jsou uvedeny polární diagramy příčných tuhostí. Červené body v diagramech představují příčnou tuhost v závislosti na úhlu zatěžující síly. Tyto tuhosti byly získány numerickým výpočtem. Pro lepší názornost je červenými body proložena funkce. Dále jsou zde uvedeny výsledky příčných tuhostí z analytických vztahů. Poloha konců závěrných závitů je vyznačena čárkovanou a tečkovanou černou čarou. Poloha spodního konce závěrného závitu se nemění (čárkovaná čára) a poloha horního konce (tečkovaná čára) je závislá na počtu činných závitů.

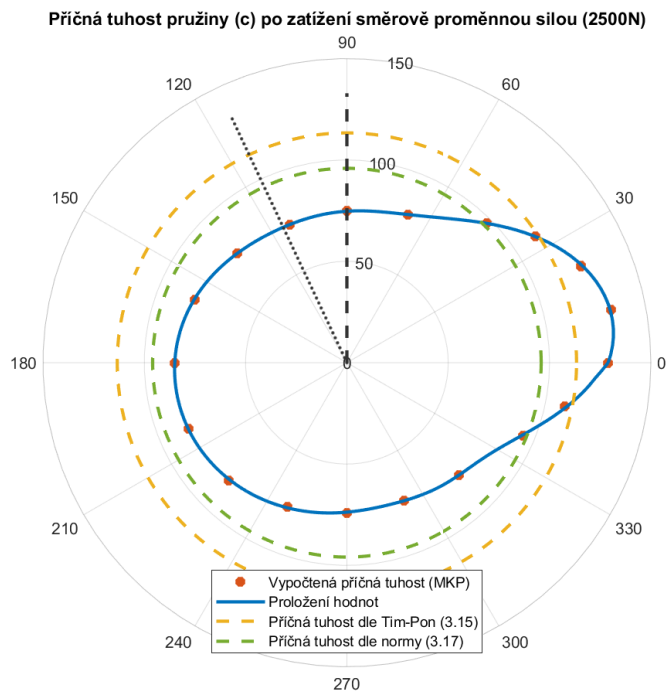
Polární diagramy dvou pružin vznikly na základě výsledků příčných tuhostí jedné pružiny. Nebyl vytvořen model s dvěma pružícími prvky. Jde pouze o natočení předchozího diagramu o 180° a sečtením s tentýž digramem nenatočeným. Následně došlo k zprůměrování, jako by se jednalo o jeden prvek. Měřítka příčné tuhosti pak zůstává stejné.



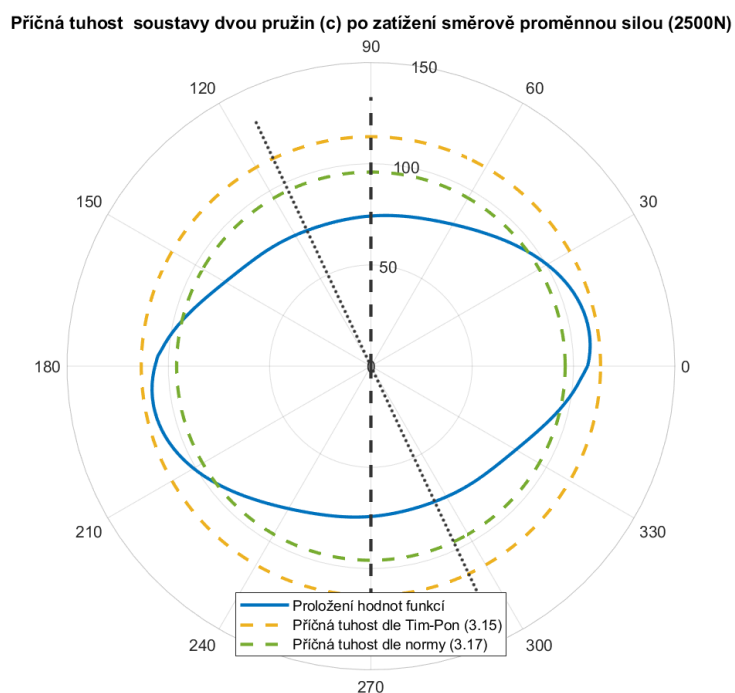
Obrázek 7.7: Polární diagram tuhosti pružiny (b)



Obrázek 7.8: Polární diagram tuhosti dvou pružin (b)



Obrázek 7.9: Polární diagram tuhosti pružiny (c)



Obrázek 7.10: Polární diagram tuhosti dvou pružin (c)

Zhodnocení výsledků optimalizace

Z diagramů uvedených výše a z tabulky 7.1 je vidět, že optimalizací bylo dosaženo většího poměru příčných tuhostí při konstantní tuhosti ve směru hlavní osy pružiny. Obecně lze říci, že v intervalu jedné činné otáčky pro libovolný počet činných závitů pružiny se nachází jeden významný extrém poměru příčných tuhostí. Při konstantní výšce šroubovité pružiny se se snižujícím počtem činných závitů dochází k růstu poměru příčných tuhostí, pokud jsou uvažovány pouze extrémy v intervalech jedné otáčky. Na obrázku 7.4 jsou vidět polohy lokálních extrémů.

V případě pružiny (b) bylo řešení optimalizace blízko parametrům výchozí pružiny (a). Poměr příčných tuhostí vzrostl zhruba o 7% při snížení počtu činných závitů o hodnotu 0,12. Výhodou je, že došlo pouze k malému nárůstu ekvivalentního napětí S_o a S_K .

Výchozí parametry pro pružinu (c) byly parametry pružiny (a), avšak byl odebrán jeden činný závit. Výsledkem optimalizace bylo snížení počtu činných závitů o 1,06 a nárůst poměru příčných tuhostí asi o 17% ve srovnání s pružinou (a). Aby si pružina zachovala požadovanou poddajnost muselo dojít ke snížení průměru drátu ze kterého je pružina navinuta. Snížením počtu činných závitů a průměru drátu došlo ke zvýšení ekvivalentního napětí S_o a S_K .

8 Analýza namáhání

Poslední část této práce je zaměřena na analýzu únavové pevnosti pružin jejichž parametry byly získány v rámci optimalizace. Pro níže uvedené postupy byla využita norma [10].

V této normě jsou uvedeny dva přístupy pro kontrolu namáhání šroubových pružin vinutých za tepla. Prvním je kontrola přípustného torzního namáhání při pevné délce τ_{czul} . V této kontrole je uvedena závislost mezi průměrem drátu, nebo tyče a maximálním torzním namáháním. Druhá kontrola využívá Goodmanovy diagramy pro stanovení mezí únavové pevnosti.

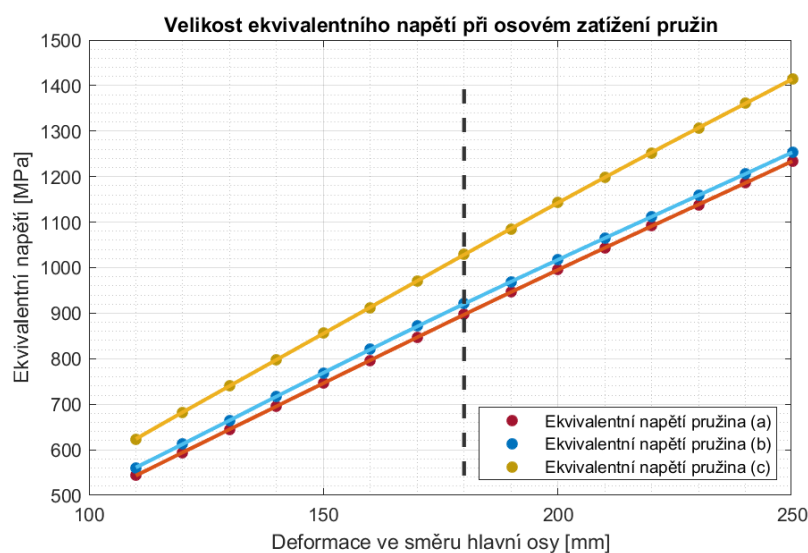
Určení statické hodnoty zatížení

Pro stanovení mezí únavové pevnosti byl model pružiny zatížen silou ve směru hlavní osy, který odpovídá zatížení plně obsazeným vozem. Toto zatížení má velikost 45kN. Deformace pružiny pak byla vypočtena z parametrů pružiny druhého stupně vypružení podvozku Y 0270 (tabulka 4.6). Hodnota této deformace je 177,9 mm a byla zaokrouhlena na velikost 180 mm.

Při jízdě vozidla dochází k cyklickému zatěžování s neznámou amplitudou kolem zmíněné statické hodnoty deformace. Cílem výpočtů je určení maximální amplitudy, při které je ještě dodržena stálá životnost pružícího prvku.

8.1 Výpočet namáhání

Pro určení maximálního ekvivalentního napětí byla využita metoda konečných prvků. Modely pružin byly zatěžovány proměnnou silou ve směru hlavní osy. Při tomto osovém zatížení nebylo dovoleno boční srovnání modelů. Výsledkem těchto numerických simulací je určení maximálního ekvivalentního napětí v modelu při daném zatížení.



Obrázek 8.1: Ekvivalentní napětí jako funkce osové deformace

Vypočtené hodnoty získané numerickou simulací byly proloženy funkcí. Závislost ekvivalentního napětí na osové deformaci je uvedena na obrázku 8.1. V obrázku je také znázorněna čárkovanou čarou osová deformace o hodnotě 180 mm.

Goodmanovy diagramy z normy sloužící pro kontrolu únavové pevnosti využívají smyková napětí. Pro stanovení smykového napětí (krut + posouvající síla) je možno využít následující postupy:

- V předchozí části byla provedena numerická simulace zatěžování pružin za účelem získání maximálního ekvivalentního napětí při daném zatížení. Z vý-

sledků těchto simulací je možno určit i jednotlivé složky namáhání vzhledem ke globálnímu souřadnému systému. Jednotlivé elementy v modelu pružiny mají však jinou orientaci a není tedy možné určit potřebné smykové napětí. Řešením je transformace jednotlivých složek napětí z globálního souřadného systému do lokálních souřadných systémů jednotlivých elementů a následně pak vybrat maximální smykové napětí ze všech elementů. Pro tuto transformaci je nutné znát orientaci všech elementů v modelu pružiny vzhledem ke globálnímu souřadnému systému.

- V sekcích 4.4 a 5.4.3 bylo zjištěno, že smykové napětí od krutu a posouvající síly při osovém zatížení modelu pružiny převládá. Ostatní složky namáhání jistě nejsou nulové, ale v porovnání se zmíněným smykovým napětím budou tyto složky zanedbatelné. Potřebné smykové napětí je možno vypočítat (s určitou nepřesností) ze vztahu 5.9, který slouží pro výpočet ekvivalentního napětí HMH . Výsledné smykové napětí bude v sobě obsahovat i další složky namáhání a jeho hodnota bude lehce vyšší než hodnota smykového napětí získaná z předchozího postupu.

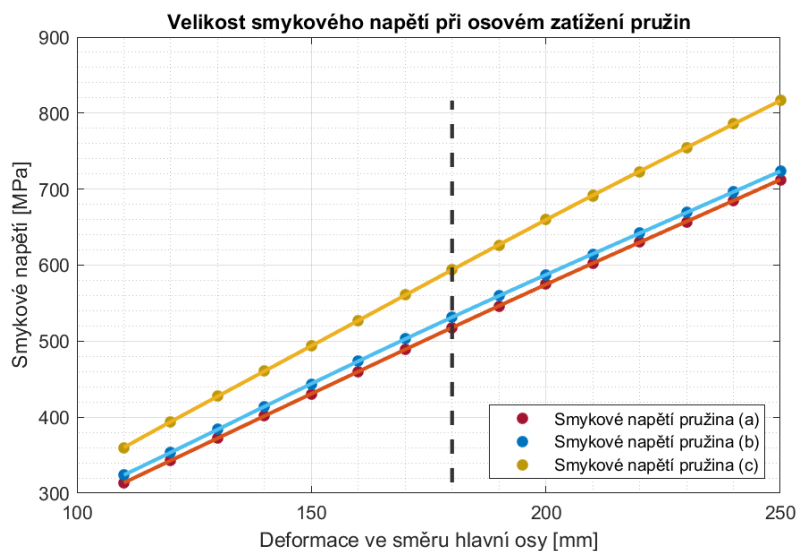
Z výše uvedených postupů byl vybrán druhý případ, kdy z ekvivalentního napětí je vypočítáno napětí smykové. Tato varianta byla zvolena z důvodu jednoduchosti a splněním jejího předpokladu malého vlivu ostatních složek napětí.

Smykové napětí τ je tedy odvozeno ze vztahu 5.9, kde ostatní složky napětí jsou uvažovány jako nulové.

$$\tau = \frac{\sigma_{HMH}}{\sqrt{3}} \quad (8.1)$$

Využitím výše uvedeného vztahu a hodnot ekvivalentního napětí je možno určit závislost smykového napětí na osově deformaci. Tato závislost je uvedena na obrázku

8.2. Z Goodmanových diagramů a hodnot z tohoto grafu je možno určit maximální amplitudy zatížení pro jednotlivé pružiny.



Obrázek 8.2: Smykové napětí jako funkce osově deformace

V Goodmanově digramu je hledán takový bod, kdy smykové napětí τ dosahuje maximální možné amplitudy. Střední hodnota napětí (1) pak odpovídá zatížení šroubovitě pružiny od plně obsazeného vozu a její hodnota odpovídá osově deformaci o velikosti 180 mm. V tabulce 8.1 jsou uvedeny hodnoty odečtené z Goodmanova diagramu.

Tabulka 8.1: Únavová pevnost

Veličina	Označení	Pružina (a)	Pružina (b)	Pružina (c)	Jednotky
Smykové napětí (1)	τ_{st}	518	531	594	[MPa]
Smykové napětí (2)	τ_d	395	410	475	[MPa]
Smykové napětí (3)	τ_h	660	670	720	[MPa]
Deformace minimální	z_{min}	138	139	145	[mm]
Deformace maximální	z_{max}	231	230	219	[mm]
Amplituda deformace	z_{ampl}	46,5	45,5	37,0	[mm]

(1) Smykové napětí při statickém zatížení modelu pružiny na hodnotu 180mm

(2) Smykové napětí při dynamickém zatížení - maximální hodnota

(3) Smykové napětí při dynamickém zatížení - minimální hodnota

Hodnoty minimální a maximální deformace (tab 8.1) byly odečteny z grafu 8.2.

Amplituda deformace byla vypočtena následujícím způsobem:

$$z_{ampl} = \frac{z_{max} - z_{min}}{2} \quad (8.2)$$

Z výsledků uvedených v tabulce je vidět, že rozdíl amplitud u pružin (a) a (b) je zhruba 2%. Lze tedy říct, že pružina (b) má téměř identický rozsah zatížení jako výchozí pružící prvek – pružina (a). Ovšem u pružin (a) a (c) se rozdíl amplitud pohybuje kolem 20%. Tudíž pro použití pružiny (c) v podvozku Y 0270 je nutné, aby jízdou vozidla nebyl překročen povolený rozsah namáhání tohoto pružícího prvku.

K vypočteným výsledkům je třeba ještě uvést, že velikosti amplitud byly ovlivněny nejméně dvěma faktory:

- Hodnoty smykového napětí byly vypočteny z napětí ekvivalentního. To způsobilo, že velikosti maximálních amplitud vyšly lehce nižší. Ovšem je nutné podotknout, že tento výpočet je na straně bezpečnosti při určení maximální amplitudy zatížení, při kterém je ještě dodržena únavová pevnost pružícího prvku.
- Druhý a pravděpodobně významnější faktor ovlivňující velikost amplitud namáhání je nepřesné odečtení hodnot z Goodmanových diagramů.

8.2 Kontrola přípustného torzního namáhání

V normě [10] se pro tuto kontrolu využívá digram popisující závislost mezi nekorigovaným torzním namáháním τ_{czul} a průměrem drátu nebo tyče. Skutečné torzní

namáhání nesmí překročit hodnoty nekorigovaného přípustného torzního namáhání. Hodnota nekorigovaného přípustného torzního namáhání s rostoucím průměrem drátu klesá.

Ze zmíněného grafu byla odečtena hodnota τ_{czul} jež odpovídá průměru drátu $d = 41\text{mm}$.

$$\tau_{czul} = 750 \text{ MPa}$$

Porovnáním hodnoty τ_{czul} a hodnot smykových napětí z tabulky 8.1 je vidět, že reálné smykové napětí nepřesahuje hodnotu nekorigovaného přípustného torzního namáhání ani v případě maximální hodnoty amplitudy. Výsledky vypočtené v předchozí kapitole je možno považovat za správné.

9 Závěr

V rámci rešerše jsou popsány základní typy vypružení podvozků kolejových vozidel. Zvláště je pak popsáno vypružení pomocí šroubových pružin a efekt flexi-coil. Dále jsou v rešerši uvedeny aplikace šroubových pružin typu flexi-coil v podvozcích kolejových vozidel. Jsou zde popsány konstrukce podvozků lokomotiv, osobních i nákladních vozů.

Praktická část práce je zaměřena na návrh a výpočet mechanických vlastností šroubovité pružiny typu flexi-coil ze sekundárního vypružení podvozku Y 0270. Na začátku této části je uvedena tabulka s parametry zmíněného pružícího prvku včetně rozsahu zatížení. Výpočtem bylo zjištěno, že při jízdě obloukem o poloměru 150m může dojít k překročení maximální povolené boční deformaci pružiny a je tedy nutné, aby konstrukce podvozku obsahovala narážky. Tyto narážky dokážou zabránit ztrátě stability pružícího prvku. V této kapitole je dále popsán návrh šroubovité pružiny pomocí analytických vztahů a slouží především pro validaci numerických výpočtů.

V rámci této práce byl vytvořen program generující model šroubovité pružiny pro analýzu MKP. Zmíněný model je plně parametrický a je vhodný pro optimalizaci parametrů šroubových pružin vinutých za tepla ve vypružení podvozků kolejových vozidel.

Další část se zabývá srovnáním analytických a numericky vypočtených výsledků. Osová

tuhost vypočtená numericky se liší zhruba o 12% v porovnání s výsledkem z analytického vztahu. Tento rozdíl je dán hned několika důvody, které jsou seřazeny podle vlivu na velikost odchylky:

- Analytický výpočet nedokáže zohlednit rozložení napětí v závěrných závitech.
- Úbytek materiálu v rámci diskretizace (kruhový průřez \rightarrow mnohoúhelník).
- Síť použitá v modelu není dostatečně kvalitní.

Porovnáním výsledků příčné tuhosti bylo zjištěno, že jejich hodnoty jsou v dobré shodě s ohledem na přesnost analytických vztahů. Analytické vztahy nedokážou popsat reálné nelineární chování šroubových pružin, zvláště pak vliv polohy závěrných závitů na příčnou tuhost. Z výpočtů bylo navíc zjištěno, že příčná tuhost je velmi závislá na směru a způsobu zatížení. Porovnáním výsledků namáhání bylo zjištěno, že hodnoty získané numericky se pohybují kolem hodnot vypočtených analyticky, zvláště v případě bočního zatěžování pružícího prvku. Velikost namáhání ovlivňuje směr boční síly a lze tedy usoudit, že byla dosažena dobrá shoda mezi analytickým a numerickým výpočtem.

Nelineární příčnou tuhost je možné využít v podvozcích vozů kolejové dopravy. Bylo zjištěno, že vhodným natočením pružících prvků je možné ovlivňovat příčnou a podélnou tuhost celého stupně vypružení. V kapitole 6 je uvedeno schéma vhodného uložení pružin v podvozku Y 32. Efektem tohoto uložení je snížení tuhosti ve směru jízdy x a zvýšení tuhosti stupně vypružení v příčném směru y . Tuhost této soustavy ve směru jízdy x má přímý vliv na velikost momentu mezi podvozkem a skříní při průjezdu vozu obloukem. Obecně je snahou tento momentu minimalizovat. Maximální poměr bočních tuhostí k_y/k_x tedy pozitivně ovlivňuje jízdní vlastnosti.

Poslední část diplomové práce se zabývá návrhem šroubovité pružiny s cílem dosažení maximálního poměru bočních tuhostí k_y a k_x při zachování osově tuhosti k_z . Pro

dosažení co největšího poměru bočních tuhostí byl zvolen optimalizační algoritmus *Patternsearch*. Z důvodu časové náročnosti výpočtu byla optimalizace rozdělena na dvě části. Cílem první části bylo nalezení maximálního poměru bočních tuhostí, kde optimalizačním parametrem byl počet činných závitů n_1 . Cílem druhé části optimalizace bylo dosažení požadované osově tuhosti prvku. Optimalizačním parametrem zde byl průměr drátu d a průměr středního vinutí D , hodnota počtu činných závitů zde vstupovala jako konstanta z předchozí části optimalizace.

V rámci optimalizace byly vypočteny parametry dvou šroubovitých pružin (b) a (c). Parametry pružiny (b) jsou velmi podobné výchozímu prvku – pružině (a). Poměr bočních tuhostí vzrostl pouze o 7% a z kontroly únavové pevnosti tohoto prvku bylo zjištěno, že maximální zátěžová amplituda je prakticky totožná (odchylka zhruba 2%) s maximální zátěžovou amplitudou výchozího pružícího prvku. Parametry pružiny (c) jsou však od původního pružícího prvku velmi rozdílné. Pro dosažení většího poměru bočních tuhostí byl odebrán jeden činný závit z původního počtu závitů pružiny (a), tato hodnota sloužila jako výchozí bod optimalizace. Výsledkem optimalizace byl nárůst poměru bočních tuhostí o 17% ve srovnání s výchozím pružícím prvkem. Ovšem pro dodržení únavové pevnosti tohoto prvku musela být snížena maximální amplituda zatížení o 20%.

Bibliografie

- [1] ContiTech AG. *Secondary Suspension*. 25. dub. 2020. URL: <https://www.continental-industry.com/en/Solutions/Suspension-Anti-Vibration/Railway/Bogie/Secondary-Suspension>.
- [2] Michajl V. Batanov a N. V. Petrov. *Ocelové pružiny: Technologie výroby a ochrana proti korosi*. Czech. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953.
- [3] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. English. New Delhi: PHI Learning, 2012. ISBN: 9788120310759;8120310756;
- [4] *Bombardier TRAXX*. 8. břez. 2020. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/Bombardier_TRAXX.
- [5] Jan Buchta. *Vypružení železničního nákladního vozu s nízkou vlastní hmotností [online]*. Diplomová práce. 2017 [cit. 2020-04-12]. URL: <https://dspace.cvut.cz/handle/10467/73311>.
- [6] *Element Types*. 13. dub. 2020. URL: http://web.mit.edu/calculix_v2.7/CalculiX/ccx_2.7/doc/ccx/node25.html.
- [7] *Flexicoil suspension and resilient wheels*. 30. lis. 2019. URL: http://www.traintesting.com/flexicoil_suspension.htm.
- [8] Michal HAVRÁNEK. *Dvounápravové podvozky osobních vozů [online]*. Bachelářská práce. 2011 [cit. 2020-03-08]. URL: <https://theses.cz/id/4v3xzh/>.

- [9] Jan CHVOJAN. *Výzkum vybraných vlastností kompozitového podvozku a jeho komponent [online]*. Disertační práce. 2017 [cit. 2020-04-24]. URL: [Dostupn%C3%A9%20z%20WWW%20%3Chttps://theses.cz/id/ku95hw/](https://theses.cz/id/ku95hw/).
- [10] Český normalizační institut. *ČSN EN 13906-1 Šroubové válcové pružiny vyráběné z drátů a tyčí kruhového průřezu: výpočet a konstrukce. Část 1: Tlačné pružiny = Cylindrical helical springs made from round wire and bar - Calculation and design - Part 1: Compression springs*. Czech.
- [11] Aleksei IVANNIKOV. *Konstrukční návrh podvozku nákladního železničního vozu Y27, pro rychlost 120 km/h [online]*. Diplomová práce. 2016 [cit. 2020-04-13]. URL: <https://theses.cz/id/5x5e61>.
- [12] Jiří Izer. *Kolejové vozy*. Alfa, Bratislava, 1986.
- [13] Christophe Jacquet. *Bogie Vehicle Schematic*. 10. dub. 2020. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=71255973>.
- [14] Aleš Hába Jakub Vágner. "Možnosti stanovení příčné tuhosti flexi-coil pružin". In: (2010). URL: <https://vts.cd.cz/documents/168518/195471/3008.pdf/0dfda26a-82fb-4ac5-bf4b-8bea02a26597>.
- [15] M. Yaqoob Javed et al. "A novel MPPT design using generalized pattern search for partial shading". In: *Energy and Buildings* (2016). ISSN: 0378-7788. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778816309252>.
- [16] Ondřej JEZEK. *Návrh vinuté pružiny s progresivním průběhem osově a příčné tuhosti [online]*. Bakalářská práce. 2018 [cit. 2020-03-20]. URL: <https://dspace.cvut.cz/handle/10467/80675>.
- [17] Bohdan Bolzano Kladno. *Přehled vlastností oceli 51CrV4*. URL: https://www.bolzano.cz/assets/files/TP/MOP_%5C%20Tycova_ocel/EN_10083/MOP_51CrV4.pdf (cit. 27. 12. 2019).
- [18] Daniel S. H. Lo. *Finite Element Mesh Generation*. English. London: CRC Press, 2014;2015; ISBN: 041569048X;9780415690485;

BIBLIOGRAFIE

- [19] Miroslav Tomas Marián Moravčík Erik Bašista. “Innovative Bogie for Railway Freight Wagon”. In: (2017). URL: <https://www.actamechanica.sk/pdfs/ams/2017/03/08.pdf>.
- [20] Zdeněk Maruna. *Metodika konstruování kolejových vozidel*. Ediční středisko Českého vysokého učení technického, Praha, 1988.
- [21] *MATLAB Documentation*. 17. ún. 2020. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/>.
- [22] Jiří Michalec. *Pružnost a pevnost I*. České vysoké učení technické v Praze, Strojní fakulta, 2010. ISBN: 978-80-01-04224-3.
- [23] *NAŘÍZENÍ KOMISE (EU) č. 1299/2014 ze dne 18. listopadu 2014 o technických specifikacích pro interoperabilitu subsystému infrastruktura železničního systému v Evropské unii*. 19. dub. 2020. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/PDF/?uri=CELEX:32014R1299&from=NL>.
- [24] *Neoficiální stránky o třísystemových lokomotivách typu 109 E*. URL: <https://109-e.wgz.cz/rubriky/popis-lokomotivy-109-e/podvozky> (cit. 02.12.2019).
- [25] Michal PANOCHA. *Technicko-ekonomické hodnocení lokomotiv s ohledem na konstrukční vlastnosti [online]*. Diplomová práce. 2015 [cit. 2020-03-08]. URL: <https://theses.cz/id/s28rx5/>.
- [26] Josef Dostál a Petr Heller. *Kolejová vozidla I*. Západočeská univerzita v Plzni, 2007. ISBN: 978-80-7043-520-5.
- [27] Jan PETRÁS. *Přehled elektrických lokomotiv světových výrobců [online]*. Baka-lářská práce. 2008 [cit. 2020-03-08]. URL: <https://theses.cz/id/bhzsky/>.
- [28] Tatravagónka a.s. Poprad. *Y25Ls-K*. 4. čvc 2020. URL: https://tatravagonka.sk/file/2016/06/Y25Ls-K_nahlad.pdf.
- [29] AstraRail Industries S.A. *Y25Lsd(f)-KC1 2-axle bogie, 22.5 t / axle, with CFCB brake*. 12. dub. 2020. URL: <https://www.greenbrier-europe.com/products/product/y25lsdif-kc1/>.

BIBLIOGRAFIE

- [30] SIEMENS. *Vectron AC/DC/MS*. URL: <https://new.siemens.com/global/en/products/mobility/rail-solutions/rolling-stock/locomotives/vectron/ac-dc-ms.html> (cit. 27. 12. 2019).
- [31] *SIMULIA User Assistance 2017*. 17. ún. 2020. URL: https://help.3ds.com/2017/english/DSSIMULIA_Established/SIMULIA_Established_FrontmatterMap/DSDocAbaqus.htm?ContextScope=all&id=98fad6a8ab734777b45e49a5ded104b1#Pg0.
- [32] *Solid (continuum) elements*. 19. dub. 2020. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEELMRefMap/simaelm-c-solidcont.htm>.
- [33] *What is the "hourglass effect" in finite element analysis? How does the reduced integration, resulting in the hourglass effect, work? How can we counter the hourglass effect?* 19. dub. 2020. URL: <https://www.quora.com/What-is-the-hourglass-effect-in-finite-element-analysis-How-does-the-reduced-integration-resulting-in-the-hourglass-effect-work-How-can-we-counter-the-hourglass-effect>.
- [34] Martin ZÍTKO. *Vagony*. 17. břez. 2020. URL: <https://www.vagony.cz>.