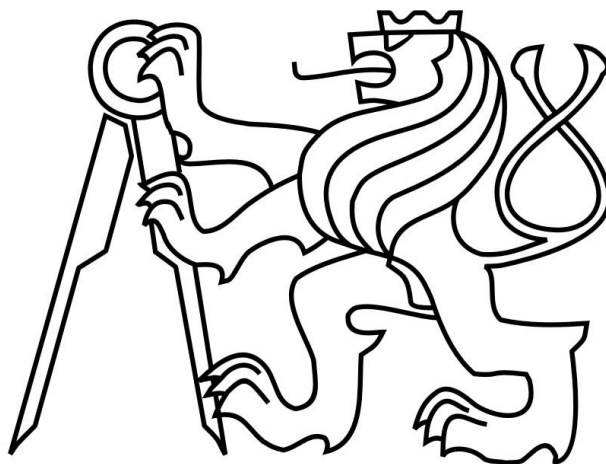


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV LETADLOVÉ TECHNIKY



KONCEPČNÍ NÁVRH IONTOVÉHO MOTORU S TOROIDNÍM
MAGNETICKÝM POLEM

DIPLOMOVÁ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vasyliov** Jméno: **Oleh** Osobní číslo: **453151**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav letadlové techniky**
Studijní program: **Letectví a kosmonautika**
Studijní obor: **Letadlová a kosmická technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Konceptní návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem

Název diplomové práce anglicky:

Conceptual design of ion thruster with toroidal magnetic field

Pokyny pro vypracování:

- 1) Navrhněte koncept iontového motoru s toroidní konfigurací magnetického pole a válcovou konfigurací elektrod.
- 2) Nasimulujte trajektorie izolovaných iontů v elektrickém/magnetickém poli motoru. Zvažte možné efekty způsobené přítomností většího množství iontů.
- 3) Zhruba určete základní provozní parametry motoru.

Seznam doporučené literatury:

Dan M. Goebel, Ira Katz: Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters, NASA/JPL+CalTech, 2008
S. Mazouffre, Electric propulsion for satellites and spacecraft: established technologies and novel approaches, Plasma Sources Sci. Technol. 25 (2016) 033002
+ další literatura dle doporučení vedoucího

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

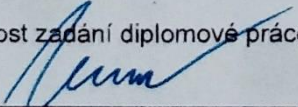
Mgr. Jaroslav Kousal, Ph.D., ústav letadlové techniky FS

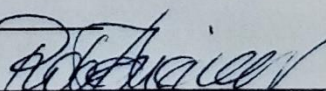
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

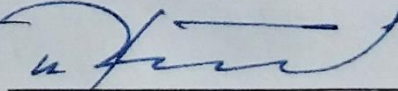
Datum zadání diplomové práce: **24.04.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **07.08.2020**

Platnost zadání diplomové práce:


Mgr. Jaroslav Kousal, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


Ing. Robert Theiner, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

29.04.2020

Datum převzetí zadání

Васильев

Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Oleh Vasyliiev
Název DP:	Koncepční návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem.
Anglický název:	Conceptual design of an ion thruster with a toroidal magnetic field.
Rok:	2020
Odbor studia:	(NLAK) Letectví a kosmonautika
Ústav/obor:	Ústav letadlové techniky / (3906T008) Letadlová a kosmická technika
Vedoucí práce:	Mgr. Kousal Jaroslav Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran: 72
	počet obrázků: 62
	počet tabulek: 6
	počet příloh: 1
Klíčová slova:	Elektromagnetické pole, drift elektronu, elektro raketový pohon, iontový motor, specifický impulz, měrný tah, Torion.
Keywords:	Electromagnetic field, electron drift, electro rocket propulsion, ion thruster, specific impulse, specific thrust, Torion.

Anotace: Cílem této diplomové práce byl návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem. Proveden vypočet trajektorií nabitých částic v urychlovači a stanoveny základní charakteristiky motoru.

Abstract: The aim of this diploma thesis was to design an ion motor with a toroidal magnetic field. The trajectories of the charged particles inside an accelerator was calculated and basic parameters of the engine was defined.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem

„Koncepční návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem“

vypracoval samostatně, veškerou použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v příloženém seznamu literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze 30. 7. 2020

.....

Oleh Vasyliov

PODĚKOVÁNÍ

«Chtěl bych poděkovat svým rodičům za trpělivost a stálou podporu během dlouhých let mých studií»

Oleh Vasyliev.

Obsah

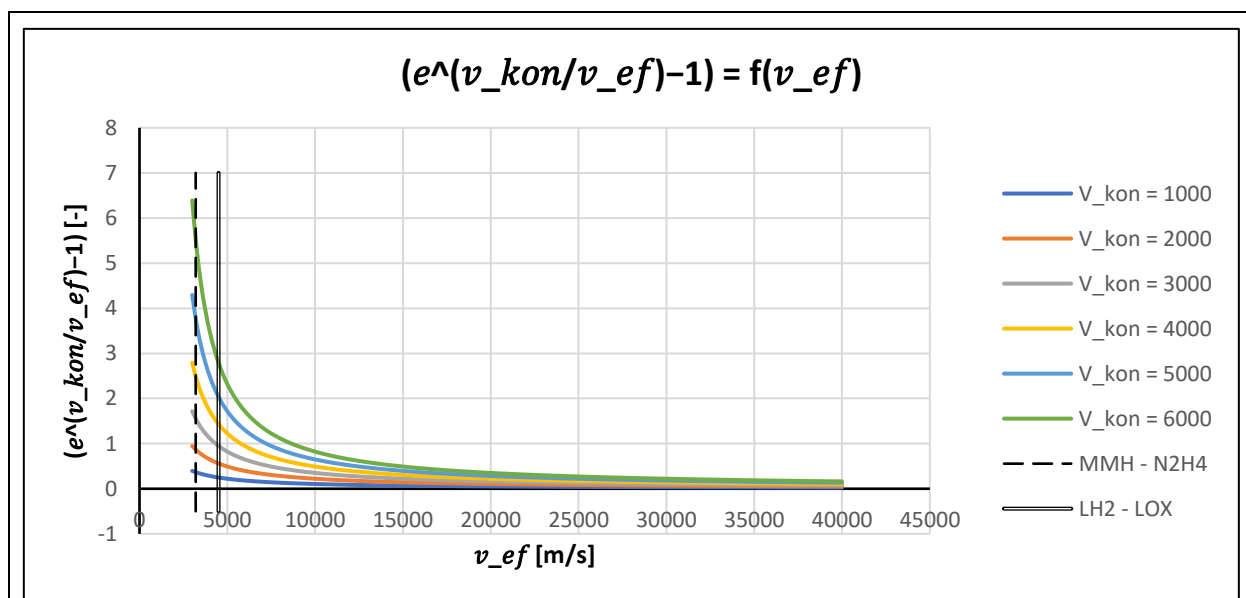
Přehled elektrických raketových motorů.	3
Impulz a tah.....	3
Elektro termální pohon.....	5
Resistojety.	5
Arcjety.	6
Elektro magnetický pohon.	7
Magnetoplasmadynamický (MPD) motor.	7
VASIMR.....	8
Elektro statický pohon.	10
Iontový motor s Hallovým efektem.....	10
Iontový motor.	11
Drift elektronů.....	16
Vliv počáteční rychlosti.	20
Vliv hmotnosti částice.....	23
Závěr.	24
Elektrostatické pole válcového kondenzátoru.....	24
Magnetické pole přímého vodiče.	29
Konstrukce motoru.....	33
Ionizace plynu.	35
Stanovení trajektorií kationtů bez uvažování jejich vzájemného spolupůsobení.	37
Stanovení času na každém úseku.	41
Výsledný tvar trajektorií.	43
Efektivní výtoková rychlost a účinnost nasměrování.	45
Faktory ovlivňující tvar trajektorie.	46
Vliv stupně ionizace.....	47

Stanovení trajektorií kationtů s uvažováním jejich vzájemného spolupůsobení.	49
Korekce elektrického pole.	51
Korekce magnetického pole.	52
Princip sestrojení nové iterace.	53
Optimalizace motoru.	55
Specifický impulz a hmotnostní průtok — space charge limit.	58
Charakteristiky motoru na vybraném režimu.	62
Zvýšení hmotnostního průtoku.	65
Závěr.	68
Seznam užitých označení.	70
Seznam použité literatury.	72
Použitý software.	72
Přílohy.	72

Přehled elektrických raketových motorů.

Impulz a tah.

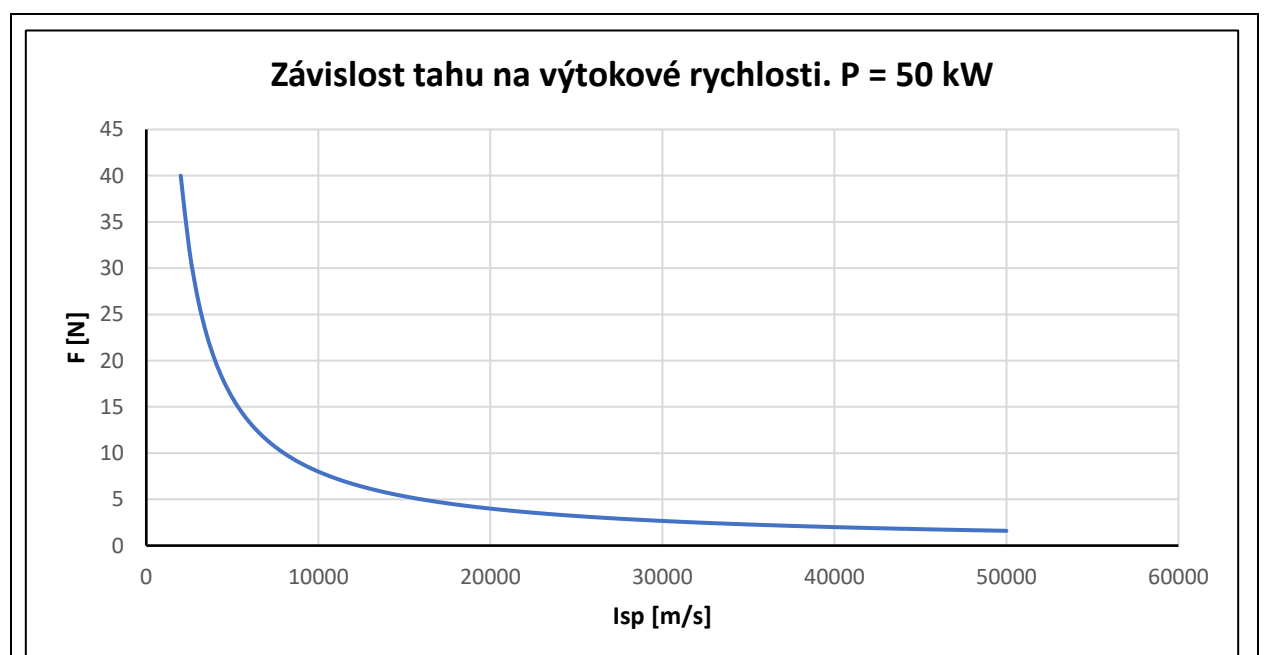
Důležitým parametrem raketového motoru je specifický impulz I_{sp} , zvláště pokud jde řeč o kosmické sondě nebo posledním stupni nosné rakety. Existuje několik základních jednotek, vyjadřujících tuto veličinu. Nejrozšířenější z nich je sekunda [s], protože může být využita v různých soustavách jednotek. Specifický impulz vyjádřený v sekundách jeví sebou čas, během kterého může pracovat motor, aby při tom generoval tah 1 [N] a vyžil 1 [kg] paliva. Jinou možností je $\left[\frac{N \cdot s}{kg}\right]$, což je síla v newtonech kterou vyvolá motor, pokud bude pracovat 1 [s] a využije při tom 1 [kg] paliva. Pokud ale počítáme konečnou rychlost nějaké kosmické sondy, tak je vhodnějším použít specifický impulz ve formě efektivní výtokové rychlosti pracovních látek: $\left[\frac{N \cdot s}{kg}\right] \Rightarrow \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot kg} \Rightarrow \left[\frac{m}{s}\right]$. Protože konečná rychlost se počítá pomocí Ciolkovského vzorce, který má následující tvar: $v_{kon} = v_{ef} \cdot \ln\left(\frac{M_{poč}}{M_{kon}}\right)$ kde $M_{poč}$ je počáteční hmotnost rakety a M_{kon} je hmotnost na konci manévru. Z tohoto vzorce plyne že pokud máme nějak stanovenou hmotnost sondy (M_{kon}), pak množství paliva nutné k uskutečnění manévru může být vyjádřeno jako: $M_{paliva} = M_{kon} \cdot \left(e^{\frac{v_{kon}}{v_{ef}}} - 1\right)$. Průběh násobku $\left(e^{\frac{v_{kon}}{v_{ef}}} - 1\right)$ v závislosti na efektivní výtokové rychlosti je znázorněn na obrázku 1.



Obrázek 1, násobek potřebného množství paliva v závislosti na výtokové rychlosti.

Čárkovaná a dvojitá čára na obrázku 1 odpovídají motorům na samozápalných pohonných látkách (MMH – N₂H₄) a kombinaci kyslík – vodík (LH₂ – LOX), což jsou nejčastěji používané pohonné systémy pro mezi orbitální manévry. Můžeme vidět že pro požadované konečné rychlosti větší než 2000 m/s chemické pohonné jednotky jsou velmi nevýhodné. Tak například pro desetitunovou loď a požadované urychlení 5000 m/s spotřebuje chemický pohon na dimethylhydrazinu až 36574 kg paliva (efektivní výtokovou rychlost považujeme za 3250 m/s). Kdyžto fyzikální pohonný systém z $v_{ef} = 20000$ m/s vyžaduje jenom 2840 kg pracovního plynu pro stejnou konečnou rychlost sondy, což je více než dvanáctinásobné ušetření.

Hlavním rozdílem mezi chemickým a fyzikálním pohonem je role kterou odehrává pracovní látka. Tak u chemických pohonných jednotek pracovní látka je zároveň akumulátorem energie. Zdrojem této energie jsou exotermické chemické reakce paliva a okysličovadla u vícesložkových motorů nebo katalytický rozklad pracovní látky u jednosložkových. Fyzikální pohon ale vyžaduje vnější napájecí výkon, protože jeho pracovní látka nenesou v sobě energii a odehrává jenom roli hmoty na kterou motor působí silou za účelem získání hybnosti. Je to velkým omezujícím faktorem fyzikálních pohonů. Příčinou tomu je obtížnost získání vysokých elektrických výkonů ve vesmíru, hlavně kvůli problémům s chlazením. Závislost mezi tahem, příkonem a specifickým impulzem může být vyjádřena v následující formě: $F = \frac{2 \cdot \mu \cdot P}{I_{sp}}$ kde μ je celková účinnost motoru, která u fyzikálních pohonů může pohybovat mezi 40 až 90 procenty. Průběh této závislosti pro příkon 50 kW a účinnost 80 % je znázorněn na obrázku 2.



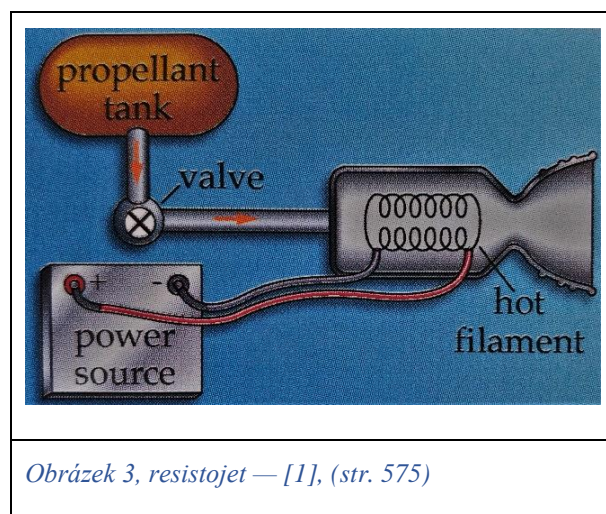
Obrázek 2, závislost tahu na výtokové rychlosti pro 50 kW motor.

Elektro termální pohon.

Resistojety.

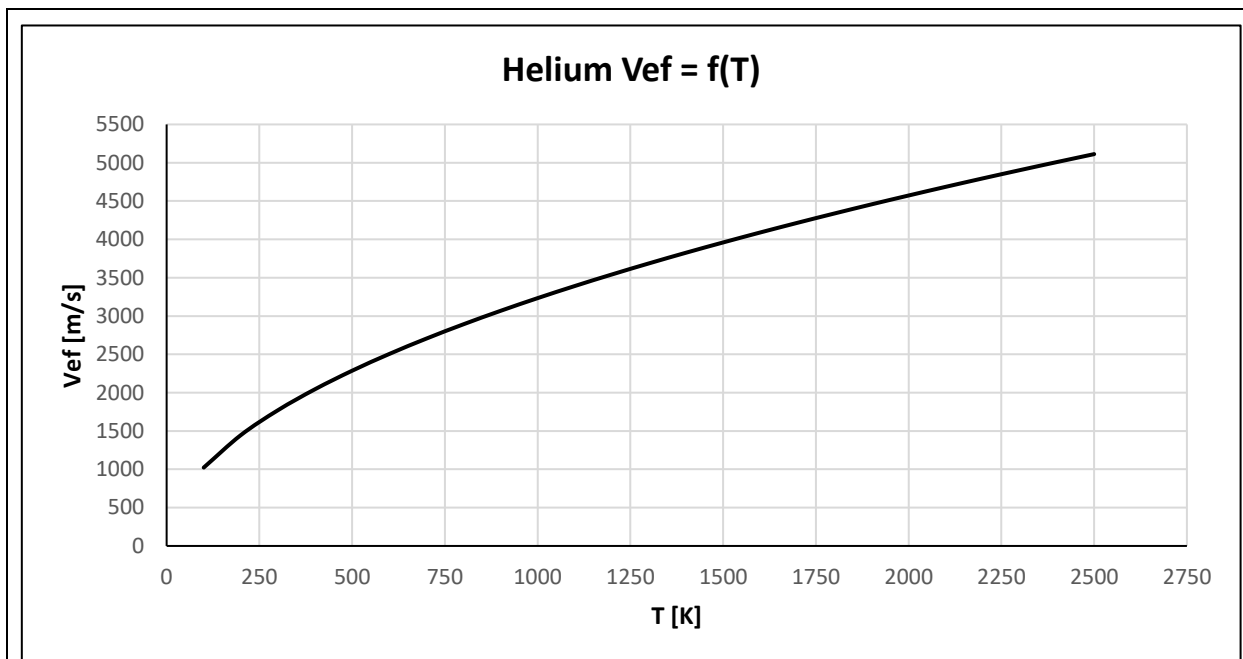
Resistojety jsou založené na velmi jednoduchém principu — pracovní látka se zahřívá průchodem elektrickým topným tělesem a získává tím pádem nějaké množství tepelné energie. Tato energie je následně přeměňována v mechanickou energii pracovního plynu průchodem urychlovací tryskou (obrázek 3).

Ohřátí pracovní látky může být využito i pro zlepšení charakteristik plynových motorů (motory pracující na stlačeném plynu) nebo jednosložkových chemických pohonů na hydrazinu. Celkem resistojety mají dost vysokou účinnost (kolem 80 %) a můžou pracovat s téměř libovolnou pracovní látkou. Jejich specifický impulz je omezen materiálem topného tělesa. Tak například pokud resistojet pracuje ve vakuu při optimálním rozšíření trysky, výtoková



rychlost jeho pracovní látky může být stanovena pomocí vzorku $v_{ef} = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{\mathcal{H}-1} \cdot \frac{RT}{M}}$ kde \mathcal{H} je Poissonova konstanta, R je univerzální plynová konstanta a M je molární hmotnost plynu. Průběh této závislosti pro helium je dan na obrázku 4.

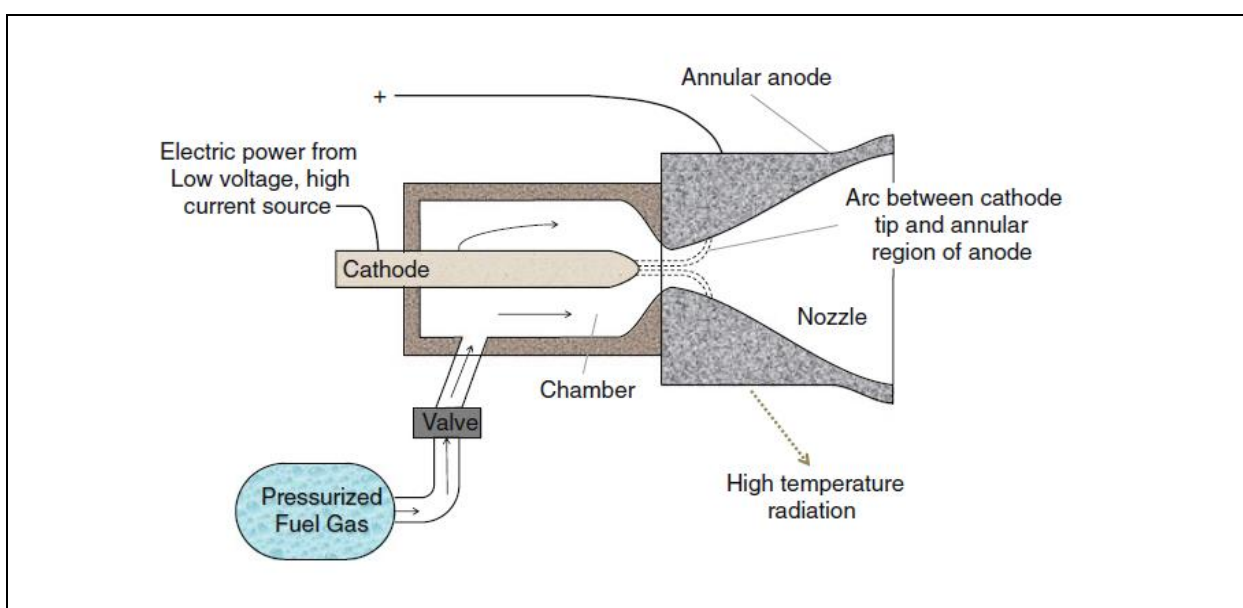
Ve většině případů resisojety jsou využívány v orientačních systémech hlavně z důvodu jejich jednoduchosti a spolehlivosti. Pracovní látkou vystupuje běžně helium nebo dusík. Skladovací tlak kolísá v rozmezích 100-300 atm, pracovní — několik atmosfér. Jak ukazuje následující obrázek výtokové rychlosti můžou přesahovat 3000 m/s v případě použití helia. Samozřejmě i ten nejlepší specifický impulz není dostatečný pro hlavní motor pohonného systému (musíme taky uvažovat i omezení teploty topného tělesa), existují ale i jiné koncepce elektro termálních pohonů které můžou dosahovat výtokových rychlosti větších než 10000 m/s. Avšak i takové motory jsou využívány primárně v systémech řízení letové polohy. Celkem použití resistojetů dává možnost výhodně zlepšovat charakteristiky orientačního systému a díky malému tahu požadované energetické nároky nejsou velké.



Obrázek 4, závislost výtokové rychlosti helia na teplotě ohřátí.

Arcjetý.

V arcjetech vodičem, který disipuje elektrickou energii v teplo je plazma. Pracovní látka je zahřívána stabilizovaným obloukem do teploty kolem 10000 [K]. Tah je produkován následnou expanzí pracovního plynu v trysce, jak je znázorněno na obrázku 5. Anoda a katoda motoru jsou vyrobené s žáruvzdorných materiálů (W, Th-W). Jejich výkon kolísá v rozmezích stovek [W] až jednotek [kW] a účinnost stanoví běžně 40 %.



Obrázek 5, schéma arcjetu — [2], (str. 307)

Tak vysoké teploty ohřátí pracovní látky jsou dosažitelné díky tomu že plyn není ohříván v celém svém objemu ale jenom uvnitř oblouku. Tím pádem proud dotýkající se stěn komory je chladnější. Elektrický oblouk může být stabilní i za relativně vysokého tlaku (kolem 1 baru). Tahle vlastnost je unikátní a odlišuje arcjety od ostatních elektrických pohonných systémů, které ve většině případů vyžadují velmi nízké tlaky kvůli nutnosti zabránění rekombinaci iontů. Podobně jak je to u chemických motorů, výtoková rychlost arcjetů je závislá na odmocnině poměru teploty ohřátí plynu a jeho molární hmotnosti, avšak na rozdíl od chemických motorů, neexistuje jednoduché analytické formy této závislosti.

Celková efektivita arcjetů je nízká, a to z důvodu velkých ztrát na disociaci pracovní látky a velkého vyzařovacího výkonu horkého trupu motoru.

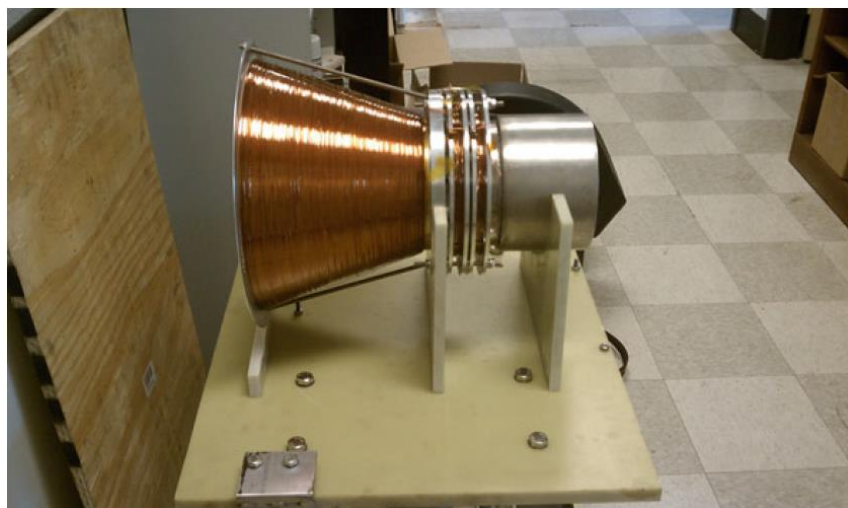
Hlavní výhodou arcjetů je jejich schopnost pracovat při vysokém tlaku, což dává mnohem větší tah. Právě tato vlastnost spolu s velkým specifickým impulzem je příčinou častého použití arcjetů v jakosti motorů orientačního systému. Poměr tahu k výtokovému průřezu trysky může být větší než několik tisíc N/m^2 . Síla proudu v oblouku může dosahovat 1000 A, avšak napětí je několik desítek voltů.

Elektro magnetický pohon.

Magnetoplasmadynamický (MPD) motor.

Teoretický nejpokročilejší koncepce elektrického pohonu z hlediska měrného tahu a výkonu. Může vystupovat jako hlavní motor pohonného systému těžké pilotované nebo nákladní kosmické lodi. Urychlení nabitých částic je uskutečňováno elektrickým polem, když to jejich nasměrování probíhá pomocí Lorentzové síly. Přičemž magnetické pole vytvářející tuto sílu je indukováno primárně samotným proudem iontů čili elektrickým polem, které tento proud vyvolává. V některých konceptech za těmito účely může být využito i vnějších zdrojů což jsou cívky vytvářející magnetickou trysku. Umožňuje to produkovat mnohem větší kontinuální tah. Cívka je navinuta na rozšiřující se (konický) kanál a její magnetické pole stabilizuje plasmu a zvyšuje celkovou efektivitu nasměrování proudu nabitých částic. Prototyp takového motoru je znázorněn na obrázku 6. MPD motory podobají se arcjetům s tím rozdílem že jejich výkon a tím pádem i tah můžou být řadově vyšší. Tak prototypy MPD motorů, testované v Moskevském leteckém ústavu, dosahovaly výkonu 188 kW. Jejich specifický impulz byl při tom 44 km/s ale celková účinnost nepřesáhovala 49 %.

An MPD thruster with a magnetic nozzle. High-Power Electric Propulsion Laboratory (HPEPL) in the Georgia Institute of Technology Department of Aerospace Engineering



Obrázek 6, MPD motor s magnetickou tryskou. HPEPL v Georgijském technickém institutu, ústav leteckého inženýrství — [2], (str. 311)

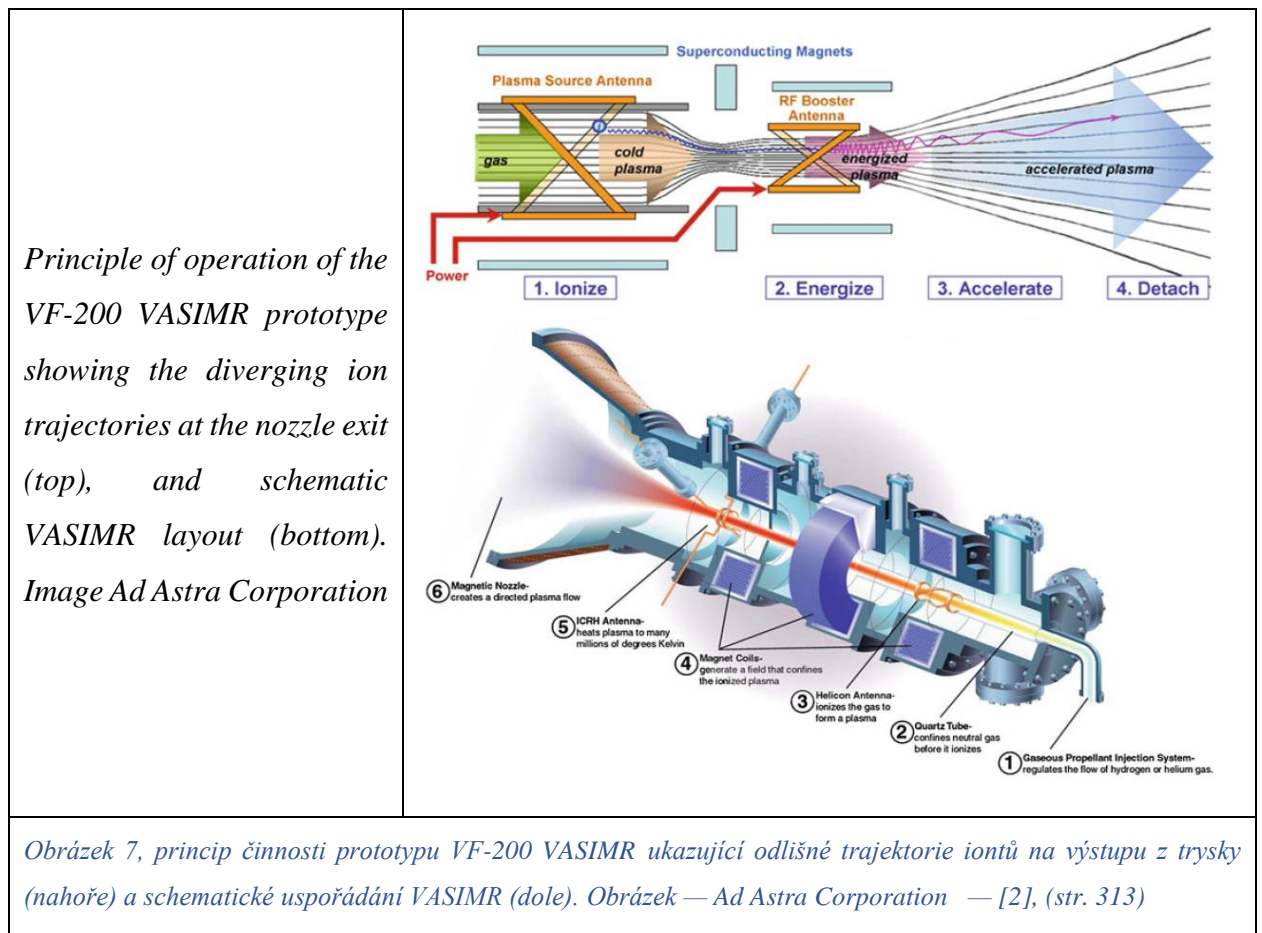
Hlavními technologickými problémy MPD motoru jsou eroze elektrod a nadměrné ohřátí v důsledku nízké účinnosti. Běžný MPD motor může pracovat s výkonem řádově MW, ale jeho nízká účinnost zapříčiňuje to že zhruba půlka spotřebovaného výkonu musí být vyzařována zpět do vesmíru. Jejich životnost silně závisí na druhu pracovní látky a velikosti pracovního proudu a pohybuje se v rozmezích 8800 až 28000 h. Tah a specifický impulz jsou závislé na kombinaci napájecího výkonu a pracovní látky. Tak například Lithium s přísadou barya umožňuje produkovat 1-2 N tahu na MW výkonu. Specifický impulz při tom pohybuje se v rozmezích 40 až 58 km/s.

Měrný výkon a tah velkých MPD motorů jsou řádově vyšší než u iontových pohonů a jakmile problémy eroze elektrod budou vyřešené, MPD motory se můžou stát konkurenceschopnými.

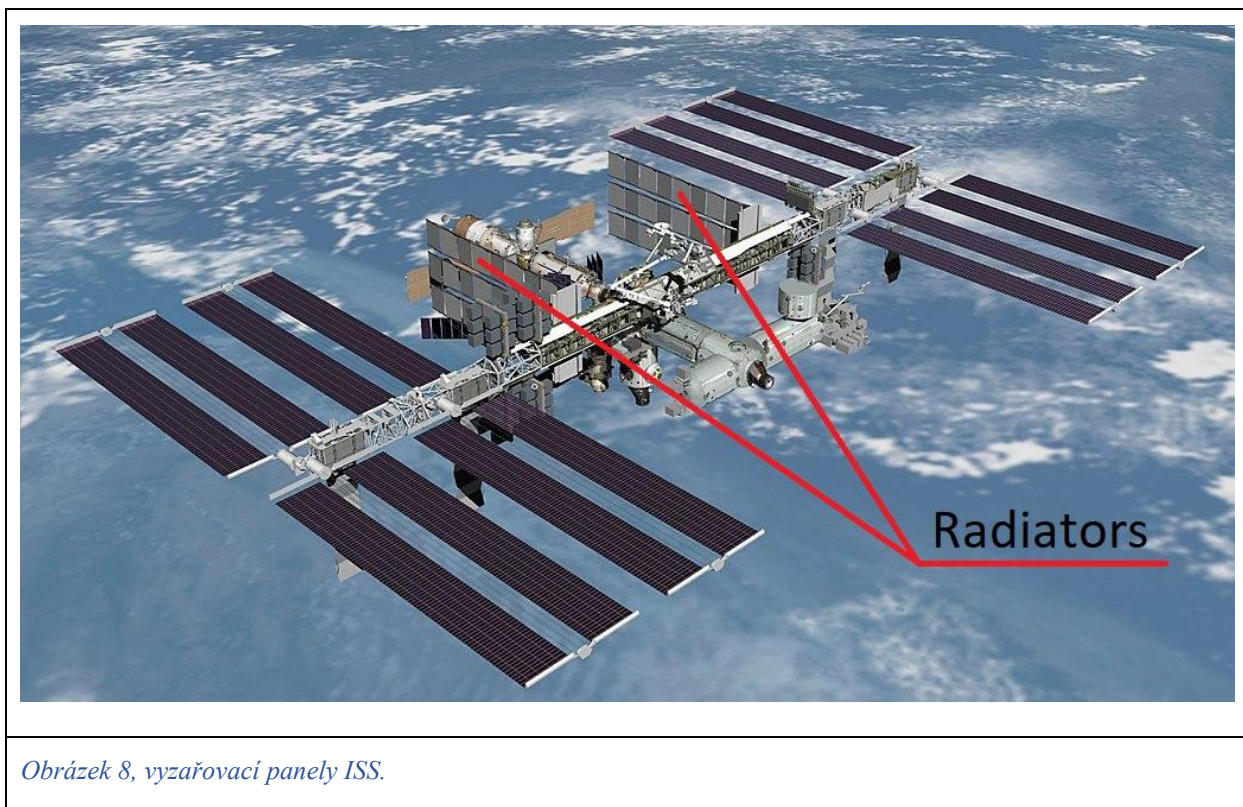
VASIMR.

Motor VASIMR (Variable Specific Impulse Magnetic Rocket) byl původně vyvinout Franklinem Chang-Díazem v NASA. V dnešní době výzkum tohoto pohonu se provádí ve firmě Ad Astra v Texasu. VASIMR liší se od tradičních MPD motorů způsobem ionizaci pracovní látky a řízením tahu a specifického impulzu. Ionizace je uskutečňována nízkofrekvenčními elektromagnetickými vlny (1-10 kHz). Helikónová anténa vysílá energii do molekul hnacího plynu, čímž zvyšuje jejich rychlost natolik, že v důsledku vzájemných kolizi dochází k ionizaci. Takováhle konstrukce nevyžaduje elektrody a nevzniká tím pádem problém jejich eroze. Druhý stupeň ohřátí využívá frekvence, které rezonují z cyklotronovou frekvenci iontů.

Magnetické pole je používáno pro nasměrování proudu částic a prevence dotýkání horkého plazmatu stěn motorů (viz obr. 7). Právě díky tomu že magnetické pole kontroluje proces ionizaci a následného urychlování nabitých částic, VASIMR je schopen regulovat své pracovní parametry: tah a specifický impuls. Umožňuje to například využívat větší tah na úkor specifickému impulsu na nízkých oběžných dráhách a opačné ve hlubokém vesmíru.



Existující prototypy VASIMR dosahují efektivity 50 % a tahu 2 N. Výkon, který nezúčastňuje se urychlení iontů je přeměňován na teplo a musí být disipován do vesmíru. Což pro 200 kW motor znamená vyzařování 100 kW. Vyzařování tak velkého výkonu je dost problematickým, zvláště pokud jde řeč o nízko potenciálním teplo. Tak například výkon energetického systému ISS je 170 kW. Vzhledem k tomu že stanice skoro půlku času provádí ve stínu a některá část výkonu se přeměňuje na elektromagnetické vlny, tak stejně kolem 70 kW je nutně vyzařovat. Používají se k tomu vyzařovací panely docela velké plochy a tím pádem i hmotnosti (viz obr. 8). Je to jeden z důvodu předpokládaného impulzního způsobu aplikace VASIMR pro korekci oběžné dráhy ISS. Čili plánuje se akumulace tepelné energie produkované motorem při jeho práci a její následné vyzařování během dlouhé doby. Jiný problém dělá magnetické pole daného motoru, které sahá hodnot 1-2 [T], což vyžaduje konvenčně chlazené elektromagnety nebo dokonce supravodiče.



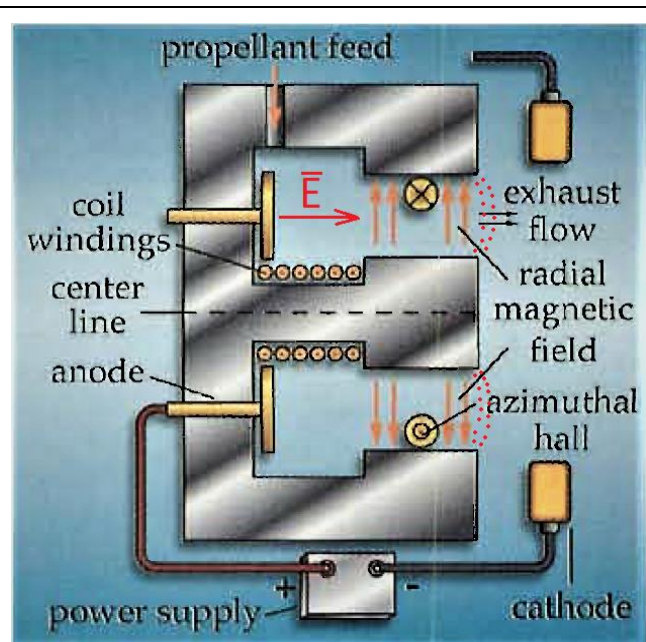
Elektrostatický pohon.

Iontový motor s Hallovým efektem.

Daný typ motoru využívá unikátního jevu, který se jmenuje Hallův proud. Je to proud nabitých částic, který vzniká v prostoru kolmých na sebe elektrického a magnetického polí. Jeho matematická podstata je rozebrána v kapitole « drift elektronu ». Interakce magnetického pole a rezultujícího elektrického pole vytváří sílu která urychluje pozitivně nabité ionty v plazmatu. Čili místo pole mřížek, které urychlují částice v iontovém motoru, Hallův motor využívá pole mezi oblastí zachycených elektronů a vnější elektrodou (viz obr. 9). Samozřejmě i pozitivně nabité ionty jsou taky ovlivněné magnetickým polem, ale protože jejich hmotnost je řádově vyšší než hmotnost elektronu, tento vliv je zanedbatelný.

Hallův motor byl původně vyvinut v Sovětském svazu a pote se rozšířil do Francie a Spojených států. V dnešní době tato technologie je docela dobře vyvinuta. Motory s Hallovým efektem poskytují tah v rozmezích 100 až 1000 mN . Jejich celková účinnost kolísá v rozmezích 50-60 % a specifický impulz — 14 až 28 km/s. Urychlující rozdíl potenciálu může být od několika set V do jednoho kV . Jedná z příčin nižší účinnosti v porovnání s iontovým motorem je velká divergence výtokového proudu, která může docházet 45°.

In a HET (Hall-effect Thruster), the interaction of an applied magnetic field with the resulting electric field creates the force that accelerates the positive ions within the plasma. Accelerated ions acquire momentum that prevents them from recombining with electrons (red dots).



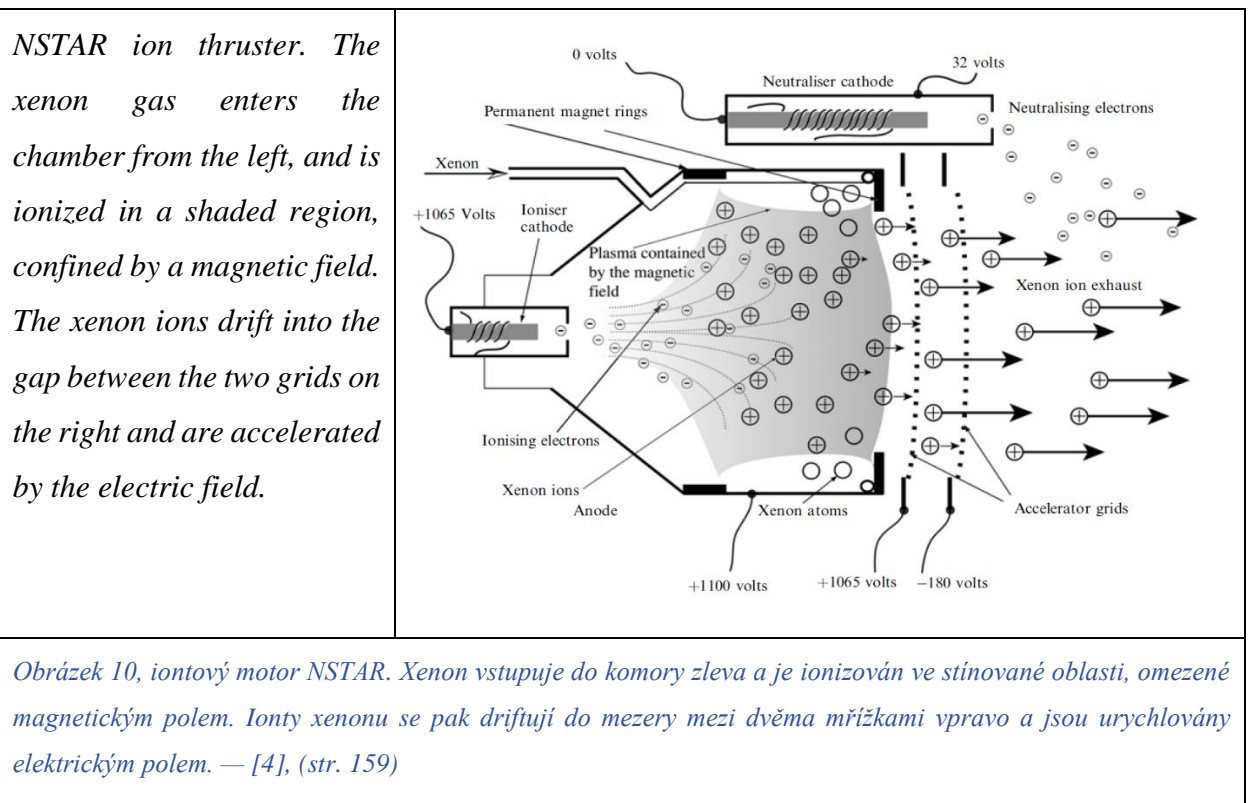
Obrázek 9, v HET (Hall-effect Thruster) interakce aplikovaného magnetického pole s výsledným elektrickým polem vytváří sílu, která urychluje kladné ionty v plazmě. Zrychlené ionty nabírají hybnost, která jim zabraňuje rekombinovat s elektrony (červené tečky). — [1], (str. 577)

Výkon Hallových motorů může dosahovat 10 kW a jejich eroze je nižší než u MPD motorů. Avšak jejich životnost je menší než životnost iontových pohonů. Hlavní výhodou Hallových motorů oproti iontovým je větší hustota proudu a tím pádem i větší měrný tah (tah na jednotku plochy průřezu motoru).

Iontový motor.

Je to jeden z nejjednodušších konceptů elektrického raketového pohonu. Pracovní látka je ionizovaná a urychlována elektrickým polem. Kladně nabitě ionty pak opustí motor s velkou rychlostí a formují iontový paprsek. Pro jeho neutralizaci je použita elektronová tryska (viz. Obr 10). Pracovní látka vstupuje do ionizační komory ve formě neutrálního plynu. Jeho ionizace probíhá nárazem s elektrony, které jsou emitované ohřátou katodou a urychlované radiálním elektrickým polem. Pro zvýšení efektivity této ionizace využívá se axiální magnetické pole, vytvářené silnými permanentními magnety. Efektivita ionizace jeví sebou funkci závislosti počtu produkovaných iontů na elektronovém toku a odehrává velkou roli v celkové účinnosti motoru. Ionizace každého atomu plynu může odebírat 20-30 eV a je to ztrátová energie.

Po ionizaci a průchodu první mřížkou ionty vstupují do urychlovací komory. Tato část motoru jeví sebou deskový kondenzátor s velkou intenzitou elektrického pole a tloušťkou 1-2 mm. Urychlené ionty pak prolítají druhou mřížkou a vytváří iontový paprsek.



Výtoková rychlost je přímo řízená rozdílem potenciálu urychlovacích mřížek. Průchodem tímto rozdílem ionty získávají určité množství energie, která je představena kinetickou formou (rychlosti). Jiným parametrem, který má vliv na tah, je hmotnostní průtok pracovní látky. U iontových motoru hmotnostní průtok je přímo vázán na proud mezi mřížkami. Pro zvýšení tahu je nutně zvyšovat elektrický proud motoru, který ale nemůže být navyšován nekonečně kvůli jevu který je známý jako « space charge limit ». Podstata tohoto jevu spočívá v tom, že urychlené částice iontového paprsku taky působí svým elektrickým polem na kationty v mezi mřížkovém prostoru (brzdí je). Tím pádem při rostoucí hustotě proudu může dojít k tomu, že urychlovací pole v blízkosti první mřížky spádne do nuly, protože pozitivní náboj odlítajících iontů této pole zruší. Pokud označíme hustotu proudu (proud iontů na jednotku plochy) jako j , maximální hustota proudu iontového motoru může být stanovena pomoci následujícího vzorku:

$$j_{max} = \frac{4\epsilon_0}{9} \left(\frac{2q}{M/N_A} \right)^{1/2} \left(\frac{E^3}{x} \right)^{1/2} \quad [4], \text{ (str. 162)}$$

q je náboj iontu, M — molární hmotnost pracovního plynu, x — vzdálenost mezi mřížkami, E — intenzita elektrického pole, $\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$ — permitivita vakua, N_A — Avogadrova konstanta. Můžeme vidět že hustota proudu a tím pádem i tah jsou přímo úměrné intenzitě elektrického pole a nepřímo úměrné vzdálenosti mezi mřížkami. Čili pro stanovenou intenzitu elektrického pole menší vzdálenost mezi mřížkami dává větší tah.

Energie získána množstvím iontů hmotnosti m po průchodu urychlovačem může být zapsaná jako: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{M}N_Aq\Delta V$ kde ΔV je rozdíl urychlovacího potenciálu. Z tohoto vzorku můžeme vyjádřit výtokovou rychlost částic: $v_{ef} = \sqrt{\frac{2q\Delta VN_A}{M}}$.

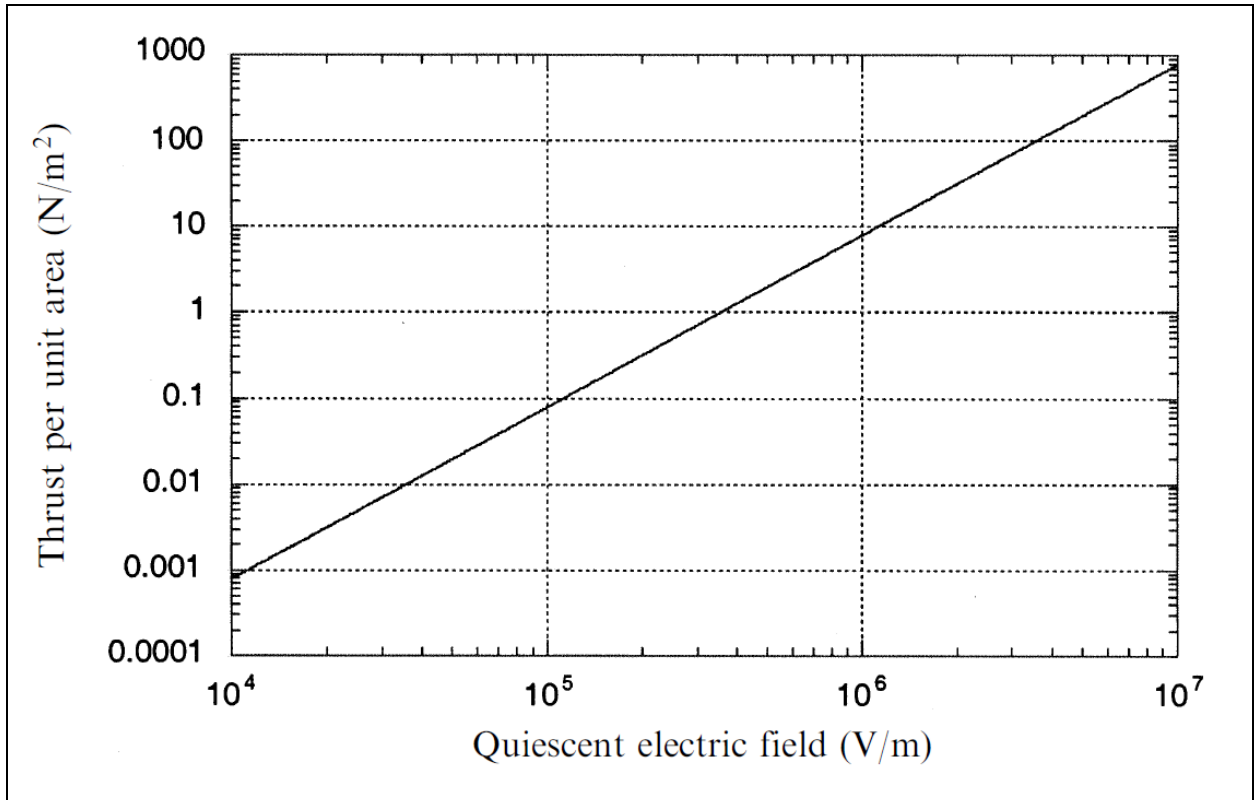
Zvyšování intenzity elektrického pole nebo zmenšování vzdálenosti mezi mřížkami mají své technologické limity a při dosažení těchto limitu jediným způsobem zvětšení tahu motoru je zvětšování jeho průřezu, které ale taky má své omezení. Z těchto důvodů měrný tah vztážený na jednotku plochy $F_s \left[\frac{N}{m^2} \right]$ představuje důležitou charakteristiku motoru. Pro jeho vyjádření stanovíme hmotnostní tok na jednotku průřezu jako $\dot{m}_s = j \frac{M/N_A}{q}$. Pak $F_s = \dot{m}_s v = j \frac{M/N_A}{q} v$ a vzhledem k tomu že $E = \frac{\Delta V}{x}$ tlak iontového motoru může být zapsán jako:

$$F_s = \frac{4\varepsilon_0}{9} \left(\frac{2q}{M/N_A} \right)^{1/2} \cdot \frac{\Delta V^{3/2}}{x^2} \cdot \frac{M/N_A}{q} \cdot \left(\frac{2q}{M} \right)^{1/2} \cdot \Delta V^{1/2} \implies F_s = \frac{8}{9} \varepsilon_0 \frac{\Delta V^2}{x^2} \implies$$

$$F_s = \frac{8}{9} \varepsilon_0 E^2$$

[4], (str. 163)

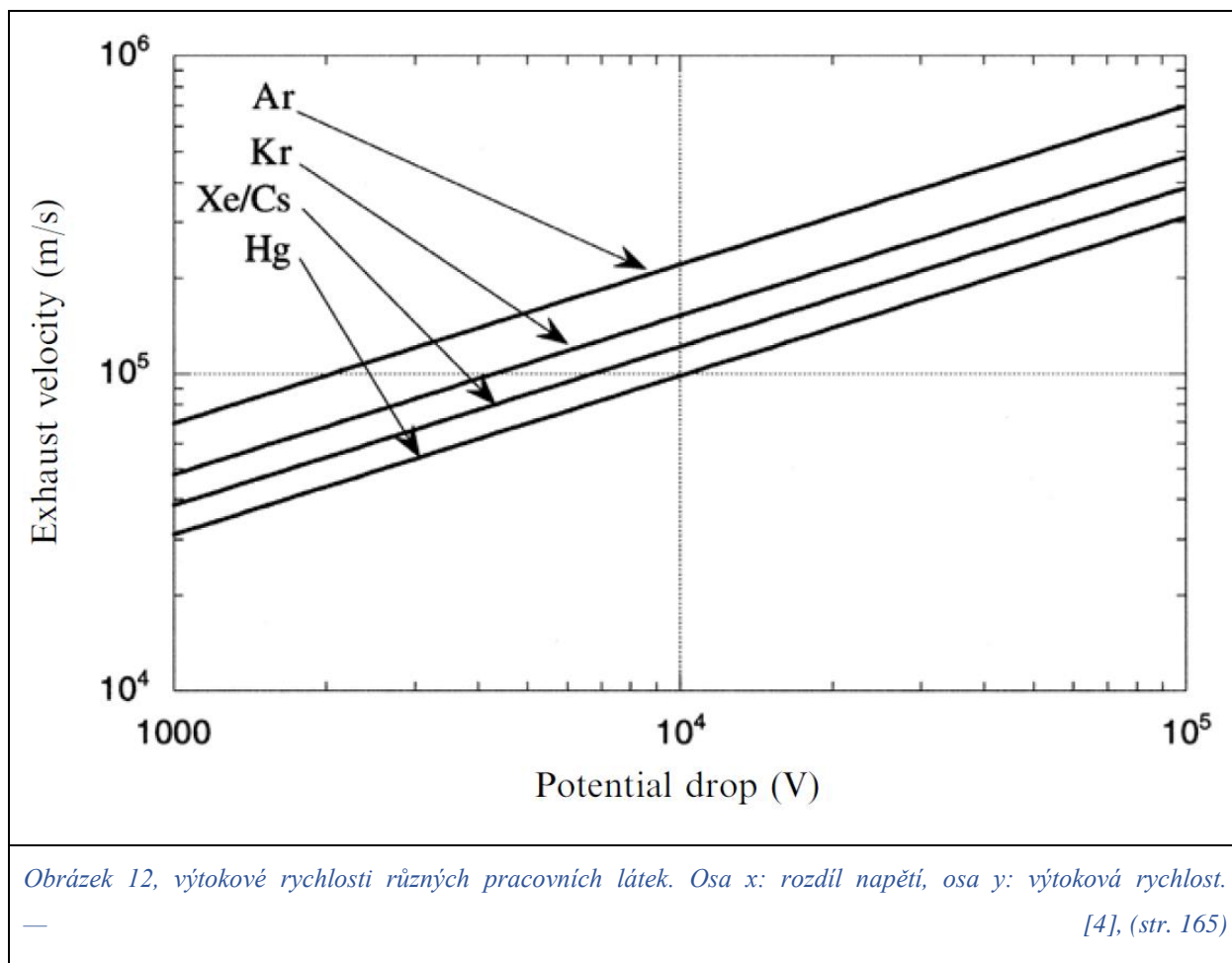
Průběh této závislosti v logaritmických souřadnicích je znázorněn na obrázku 11.



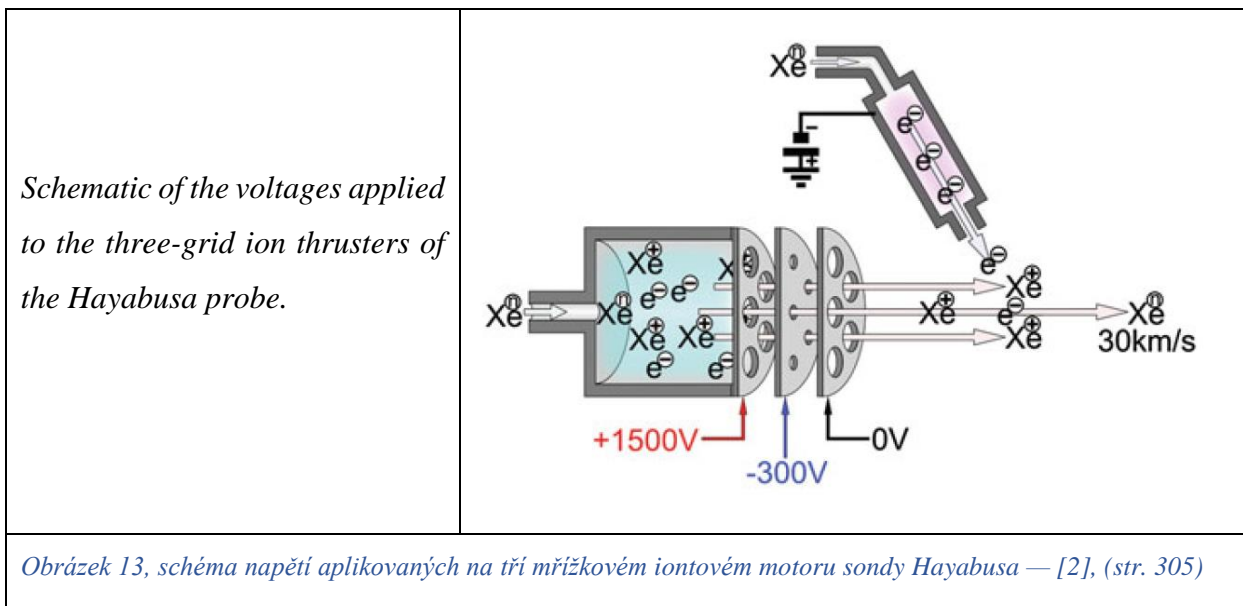
Obrázek 11, měrný tah iontového motoru. Osa x: intenzita elektrického pole, osa y: tah na jednotku plochy.

[4], (str. 164)

Jak můžeme vidět tah motoru, vztažený na jednotku plochy, je úplně nezávislý na druhu pracovní látky, na rozdíl třeba od výtokové rychlosti, kterou jsme stanovili jako $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{M/N_A}}$. Lehké plyny s velkým poměrem náboje iontu k jeho hmotnosti dávají velké výtokové rychlosti, což ale znamená zvětšení požadovaného výkonu ($P = \frac{Fv_{ef}}{2\mu}$ kde μ je účinnost). Právě z tohoto důvodu iontové motory pracují v zásadě na těžkých plynech, například xenonu. Následující graf ukazuje závislosti výtokové rychlosti na rozdílu potenciálů pro různé pracovní látky.



Ve většině případů výtoková rychlost iontového motoru je nadměrně vysoká, zvláště pokud je nutně generovat relativně vysoký tah (více než 0,5 N). A proto se někdy využívá brzdění výtokového proudu kationtů třetí mřížkou. V prostoru mezi druhou a třetí mřížkou ionty jsou zpomalované a jejich výtoková rychlost se zmenšuje, celkový proud částic při tom ale zůstává stejným. Samozřejmě snížení výtokové rychlosti u tři mřížkového motoru snižuje i tah ($F = \dot{m}v_{ef}$) ale pokles požadovaného výkonu je větší ($P = \frac{1}{2}\dot{m}v_{ef}^2$) a pro zadaný výkon tři mřížkový motor dává větší tah. Třetí mřížka řeší taky i problém zpětného proudu elektronů do vnitřního prostoru ionizátoru. Příklad tři mřížkového motoru je znázorněn na obrázku 13.



Z hlediska efektivity iontového motoru důležitou roli odehrává energie ionizaci E_{ion} a při její započítávání efektivita ionizace může být zapsaná jako: $\eta_{ion} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{ef}^2}{\frac{1}{2}Mv_{ef}^2 + E_{ion}}$ [4], (str. 167)

Z tohoto můžeme vidět, že těžké ionty dávají účinnější motor. Celkem do rychlosti 100 km/s molární hmotnost pracovní látky hraje roli. Při vysokých rychlostech tento vliv mizí, protože celková kinetická energie iontu je mnohem větší než energie ionizace. Příklady některých používaných iontových pohonů jsou znázorněny v tabulce 1.

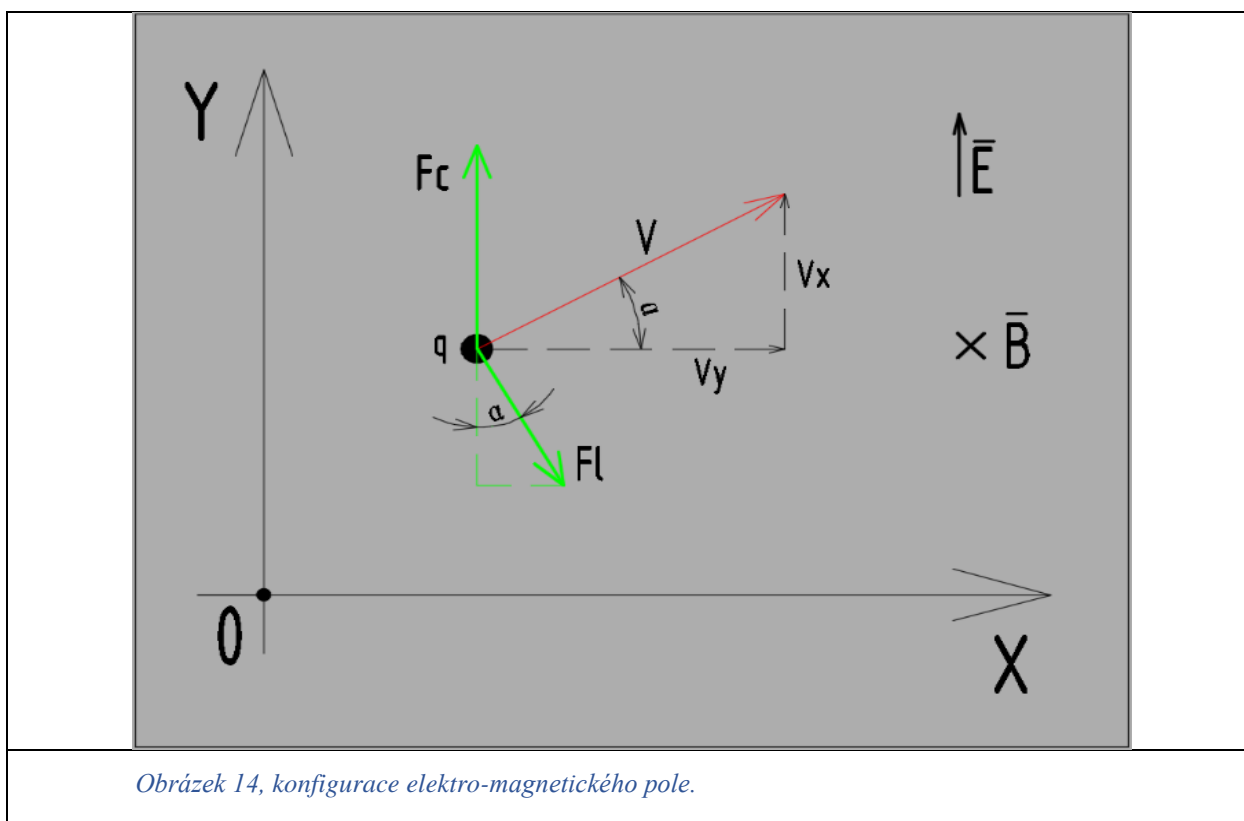
Thruster	Beam diameter (cm)	Specific Impulse (s)	Thrust (mN)	Power (kW)	Manufacturer
RIT-10	8.7	3,700	35	0.98	EADS
SERT II	15	4,770	29	0.91	NASA-Glenn
RIT-XT	21	6,419	218	8.06	EADS
T6	22	4,650	230	7.05	QinqiQ
XIPS-25	25	4,338	245	6.8	Boeing/L3-ETI
NSTAR	30	3,100	90	2.33	NASA-Glenn
NEXT	40	4,110	237	6.9	Engineering Model
HiPEP	91 × 41	9,620	670	39.3	Lab (JIMO Mission)

Tabulka 1, příklady některých iontových motorů — [2], (str. 306)

Jak můžeme vidět z provedené rešerše, v dnešní době pořad nejsou vyvinuté motory schopné generovat dostatečný měrný tah (alespoň 50 N/m^2) a mít při tom účinnost v rozmezích 60-80 % s výtokovou rychlostí nepřekračující 100 km/s a celkovou životností motoru větší než 5 let. Právě tomuto problému je věnována představená níže diplomová práce. Provedený koncepční návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem je následně doplněn možným způsobem zvětšení jeho hmotnostního průtoku, který ale vyžaduje spíše experimentální provedení než teoretický výpočet.

Drift elektronů.

Hlavní princip práce motoru, představeného v dane diplomové práci, spočívá v urychlení nabitých částic plynu v elektro-magnetickém poli. Pro pochopení základních zákonitostí tohoto pohybu odvodíme rovnice driftu elektronu v kolmých na sebe elektrickém a magnetickém polích.



Obrázek 14, konfigurace elektro-magnetického pole.

Uvažujeme nabitou částici která se pohybuje v elektro-magnetickém poli (obrázek 14). Silové čáry elektrického pole směřují podél osy y , vektor magnetické indukce \vec{B} má směr kolmo na obrázek (od nás). Počáteční podmínky:

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 & v_{x0} = 0 & t_0 = 0 \\ y_0 = 0 & v_{y0} = 0 & \vec{a}_0 = 0 \end{array}$$

V nějaký okamžik času t částice s nábojem q bude mít rychlost v a její zrychlení bude určeno působením dvou sil: elektrostatické a magnetické. Elektrostatickou silou pojmenujeme F_c (Coulombův zákon) a můžeme ji zapsat jako $\vec{F}_c = q \cdot \vec{E}$. Působení magnetického pole je představeno Lorentzovou silou $\vec{F}_l = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Sestavíme Newtonovy pohybové rovnice pro každou osu:

$$\begin{cases} ox & m\ddot{x} = F_l \cdot \sin \alpha \\ oy & m\ddot{y} = F_c - F_l \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Velikost Lorentzové síly můžeme zapsat jako $F_l = qvB$. Úhel α je dan tangentou $\alpha = \text{atan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$, $\sin \alpha = \frac{v_y}{v}$, $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$. Tím pádem můžeme přepsat soustavu sledujícím způsobem:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = Eq - qvB \cdot \frac{v_x}{v} \\ m\ddot{x} = qvB \cdot \frac{v_y}{v} \end{cases} \implies \begin{cases} m\ddot{y} = Eq - qB\dot{x} \\ m\ddot{x} = qB\dot{y} \end{cases}$$

Máme soustavu lineárních diferenciálních rovnic druhého řadu. Provedeme integraci druhé rovnice podle času t :

$$m\dot{x} = qBy + C$$

Kde $C = 0$ ($v_{x0} = 0$ a zároveň $y_0 = 0$). Můžeme tím pádem vyjádřit rychlost po ose x :

$$\dot{x} = \frac{qBy}{m}$$

Po dosazení do první rovnice soustavy dostáváme: $m\ddot{y} = Eq - qB \frac{qBy}{m} \implies$

$$m\ddot{y} + \frac{q^2 B^2}{m} y = Eq$$

Což je lineární nehomogenní rovnice druhého řadu. Odpovídající homogenní rovnice má tvar: $m\ddot{y} + \frac{q^2 B^2}{m} y = 0$ a její charakteristickou rovnici můžeme zapsat jako $mk^2 + \frac{q^2 B^2}{m} = 0$. Odkud $k^2 = -\frac{q^2 B^2}{m^2} = \frac{q^2 B^2}{m^2} i^2 \implies k = \pm \frac{qB}{m} i$. Komplexně sdruženým kořenům odpovídá sledující tvar řešení homogenní rovnice:

$$\bar{y} = C_1 \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$$

Pravou stranou nehomogenní rovnici je konstanta (Eq), a proto částečné řešení budeme hledat ve tvaru $y^* = Ax + D$, jeho první a druhá derivace: $y'^* = A$, $y''^* = 0$. Po dosazení do rovnice dostáváme:

$$m \cdot 0 + \frac{q^2 B^2}{m} (Ax + D) = Eq \implies \frac{q^2 B^2}{m} Ax + \frac{q^2 B^2}{m} D = Eq$$

Provedeme srovnání koeficientu:

$$\begin{aligned} x^1: \frac{q^2 B^2}{m} A = 0 &\implies A = 0 \\ x^0: \frac{q^2 B^2}{m} D = Eq &\implies D = \frac{mEq}{q^2 B^2} \end{aligned} \implies y^* = \frac{mE}{qB^2}$$

Celkové řešení je součtem $y = \bar{y} + y^*$:

$$y = C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2}$$

Konstanty C_1 a C_2 stanovíme z počátečních podmínek:

$$t = 0 \implies y = 0 \implies y = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) + \frac{mE}{qB^2} \implies 0 = C_1 + \frac{mE}{qB^2} \implies \boxed{C_1 = -\frac{mE}{qB^2}}$$

$$t = 0 \implies y' = 0 \implies y' = -C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{qB}{m} + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{qB}{m} + 0 \implies 0 = C_2 \frac{qB}{m} \implies \boxed{C_2 = 0}$$

Konečně můžeme zapsat:

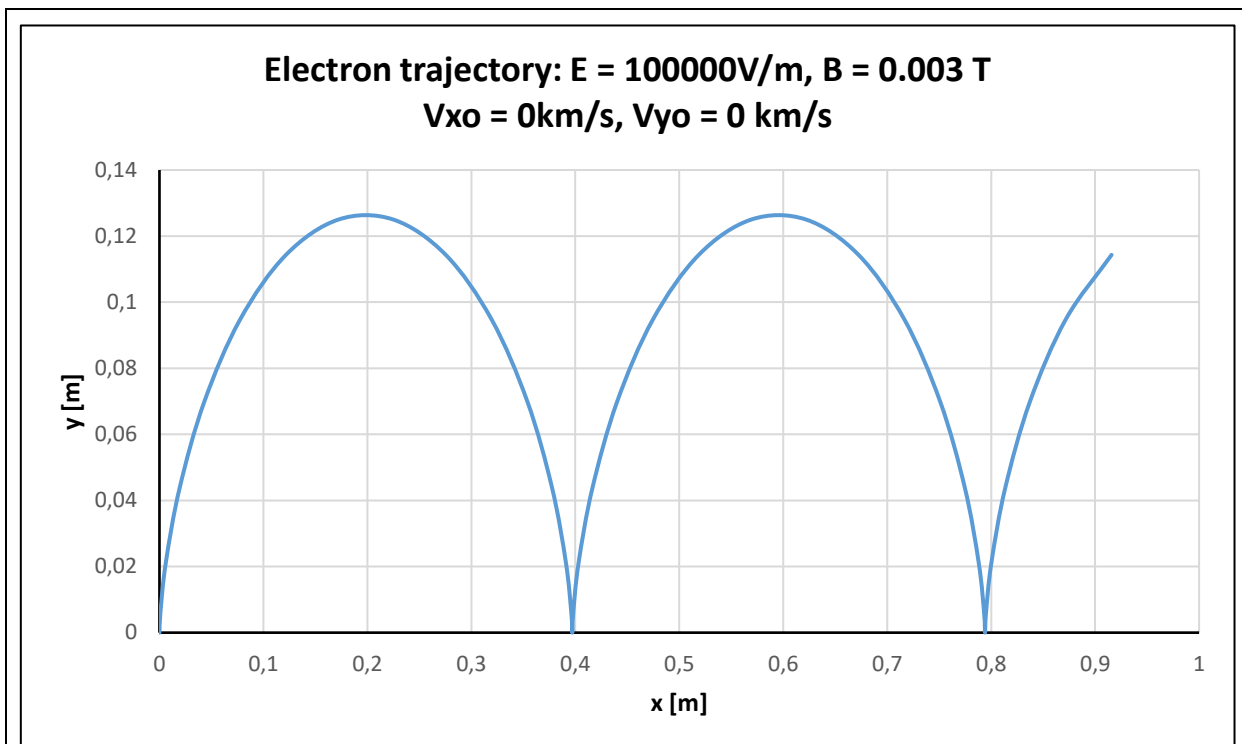
$$\boxed{y = -\frac{mE}{qB^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2}} \quad (2)$$

Pro popis x-ové složky pohybu využijeme už odvozenou dříve rovnici $\dot{x} = \frac{qBy}{m}$ a dosadíme do něj y : $\dot{x} = \frac{qB}{m} \left(-\frac{mE}{qB^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2}\right) \implies \dot{x} = -\frac{E}{B} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B} \implies$
 $x = \frac{E}{B}t - \frac{E}{B} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{m}{qB} + C$, kde $C = 0$, $\left(\begin{matrix} t = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right)$. \implies

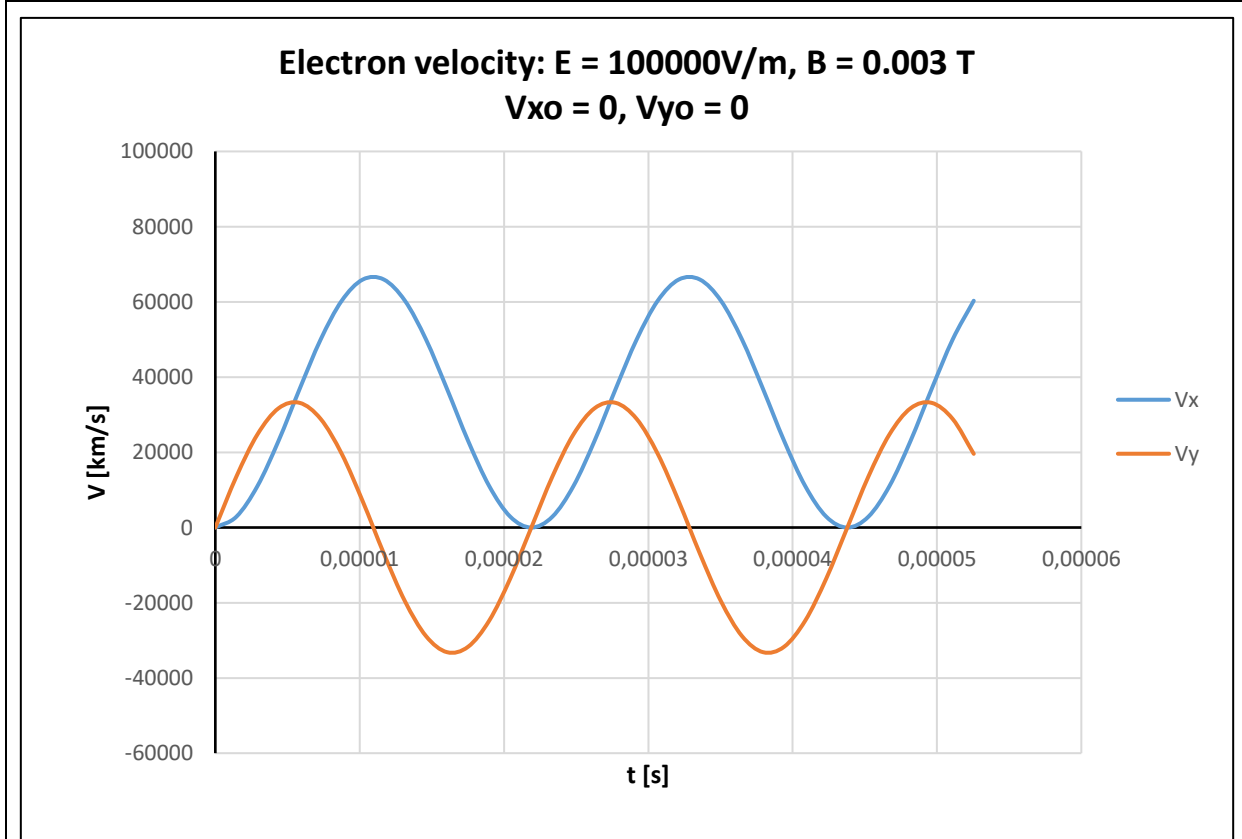
$$\boxed{x = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)} \quad (3)$$

Při analýze obdržených rovnic můžeme stanovit, že pohyb po ose y je čistě kmitavý:

$y = \frac{mE}{qB^2} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)$ s minimální hodnotou 0 a maximální — $y = 2 \frac{mE}{qB^2}$. Kdyžto pohyb po ose x má jak kmitavou $\left(\frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)$, tak i konstantně rostoucí složku $\left(\frac{E}{B}t\right)$, čili poloha částice na ose x směřuje k nekonečnu při nekonečně rostoucím času. Přičemž rychlost podél stejné osy má čistě kmitavý charakter a nebude se neomezeně zvětšovat. Můžeme pak říct, že částice bude driftovat podél osy x . Poměr $\frac{qB}{m}$ udává úhlovou frekvenci obou pohybu, která je stejná. Na následujících grafech jsou znázorněny trajektorie částice v rovině XY a časový průběh složek rychlostí.



Obrázek 15, trajektorie pohybu elektronu v kolmých na sebe elektrickém a magnetickém polích.



Obrázek 16, časový průběh složek rychlosti elektronu.

Vliv počáteční rychlosti.

Pro posouzení vlivu počáteční rychlosti na pohyb částice vyřešíme soustavu pohybových rovnic (1) s uvažováním v_{x0} a v_{y0} .

$$\begin{cases} m\ddot{y} = Eq - qB\dot{x} & x_0 = 0 & v_{x0} = v_{x0} & t_0 = 0 \\ m\ddot{x} = qB\dot{y} & y_0 = 0 & v_{y0} = v_{y0} & \vec{a}_0 = 0 \end{cases}$$

Po integraci druhé rovnice máme:

$$m\dot{x} = qBy + C \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ v_{x0} = v_{x0} \end{cases} \Rightarrow C = mv_{x0} \Rightarrow \dot{x} = \frac{qB}{m}y + v_{x0}$$

Dosadíme \dot{x} do první rovnice soustavy:

$$m\ddot{y} = Eq - qB\left(\frac{qB}{m}y + v_{x0}\right) \Rightarrow m\ddot{y} = Eq - \frac{q^2B^2}{m}y - qBv_{x0} \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} + \frac{q^2B^2}{m}y = Eq - qBv_{x0}$$

Homogenní rovnice a její řešení budou vypadat stejně jako v předchozím případě:

$$\bar{y} = C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Částečné řešení budeme zase hledat ve formě polynomu prvního stupně $y^* = Ax + D$,

$$y'^* = A, y''^* = 0.$$

$$m \cdot 0 + \frac{q^2B^2}{m}(Ax + D) = Eq - qBv_{x0} \Rightarrow \frac{q^2B^2}{m}Ax + \frac{q^2B^2}{m}D = Eq - qBv_{x0}$$

Provedeme srovnání koeficientů:

$$\begin{aligned} x^1: \frac{q^2B^2}{m}A = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ x^0: \frac{q^2B^2}{m}D = Eq - qBv_{x0} & \Rightarrow D = \frac{mEq}{q^2B^2} - \frac{mqBv_{x0}}{q^2B^2} \end{aligned} \Rightarrow y^* = \frac{mE}{qB^2} - \frac{mv_{x0}}{qB}$$

Celkové řešení $y = \bar{y} + y^*$:

$$y = C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2} - \frac{mv_{x0}}{qB}$$

Analýza počátečních podmínek:

$$\begin{aligned} t = 0 \\ y = 0 \end{aligned} \Rightarrow y = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) + \frac{mE}{qB^2} - \frac{mv_{x0}}{qB} \Rightarrow 0 = C_1 + \frac{mE}{qB^2} - \frac{mv_{x0}}{qB} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{mv_{x0}}{qB} - \frac{mE}{qB^2}$$

$$t = 0 \\ y' = v_{y0} \Rightarrow y' = -C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{qB}{m} + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{qB}{m} + 0 \Rightarrow v_{y0} = C_2 \frac{qB}{m} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{mv_{y0}}{qB}$$

Konečný tvar řešení:

$$y = \frac{m}{qB} \left(v_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mv_{y0}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} - v_{x0} \right) \quad (4)$$

Dosadíme y do rovnici $\dot{x} = \frac{qB}{m}y + v_{x0}$:

$$\dot{x} = \frac{qB}{m} \left(\frac{m}{qB} \left(v_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mv_{y0}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} - v_{x0} \right) \right) + v_{x0} \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \left(v_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_{y0} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(\frac{E}{B} - v_{x0} \right) + v_{x0} \Rightarrow$$

$$x = \left(v_{x0} - \frac{E}{B} \right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{m}{qB} - v_{y0} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{m}{qB} + \frac{E}{B}t + C \Rightarrow$$

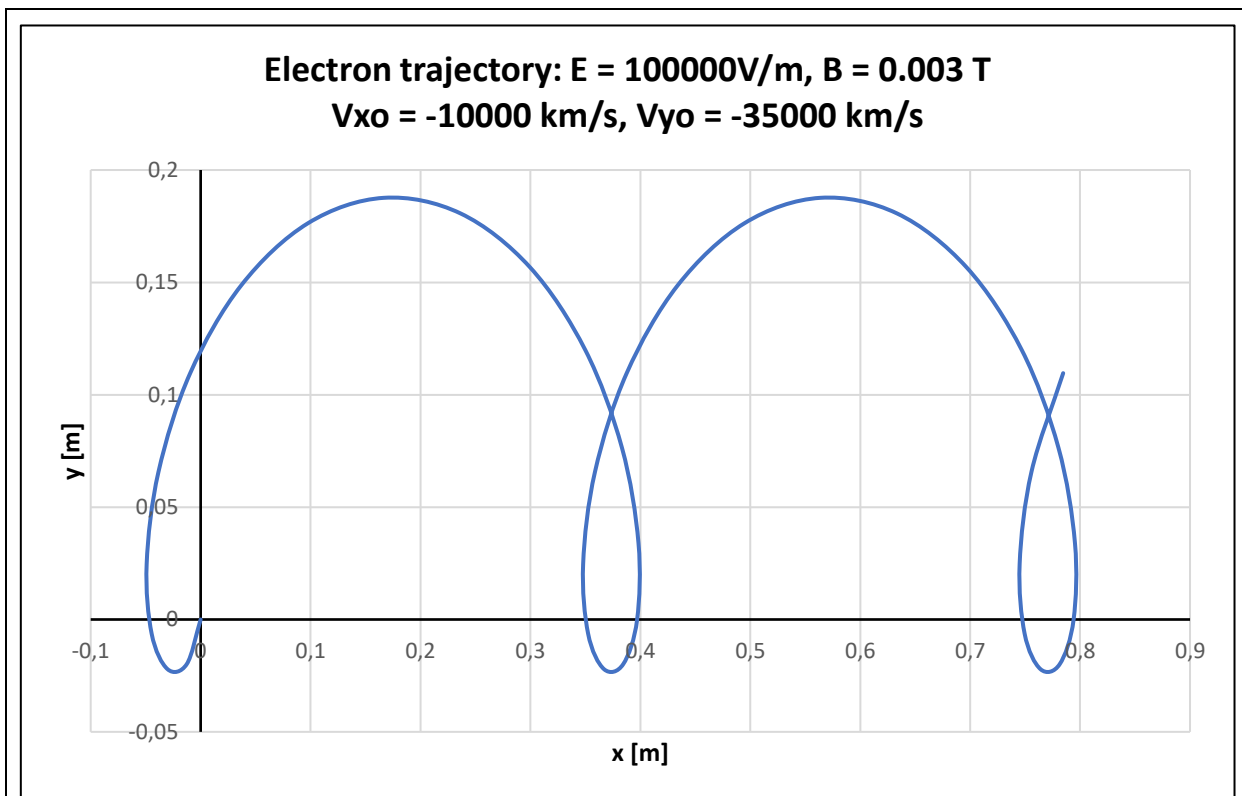
Pro stanovení konstanty C využijeme počáteční podmínky:

$$t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow 0 = -v_{y0} \frac{m}{qB} + C \Rightarrow C = v_{y0} \frac{m}{qB}$$

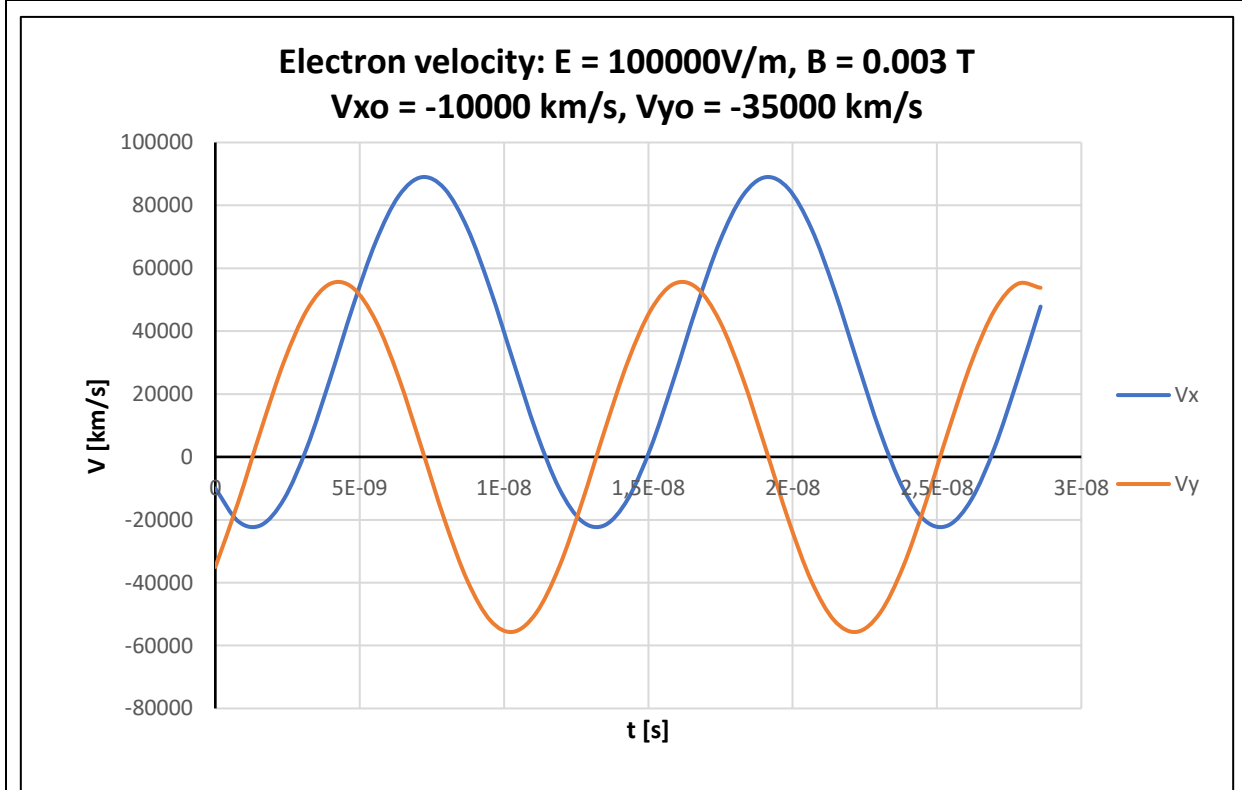
Konečně můžeme zapsat x -ovou pohybovou rovnici:

$$x = \left(v_{x0} - \frac{E}{B} \right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{m}{qB} - v_{y0} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \frac{m}{qB} + \frac{E}{B}t + v_{y0} \frac{m}{qB} \quad (5)$$

I když pohybové rovnice se na první pohled hodně zkomplikovaly, nezměnila se ale podstata probíhajícího jevu. Částice pořád pohybuje v určitém pásmu hodnot po ose y a její x -ová souřadnice je rostoucí s časem, čili částice pořád driftuje. Změnu v její trajektorii můžeme pozorovat na následujícím grafu.



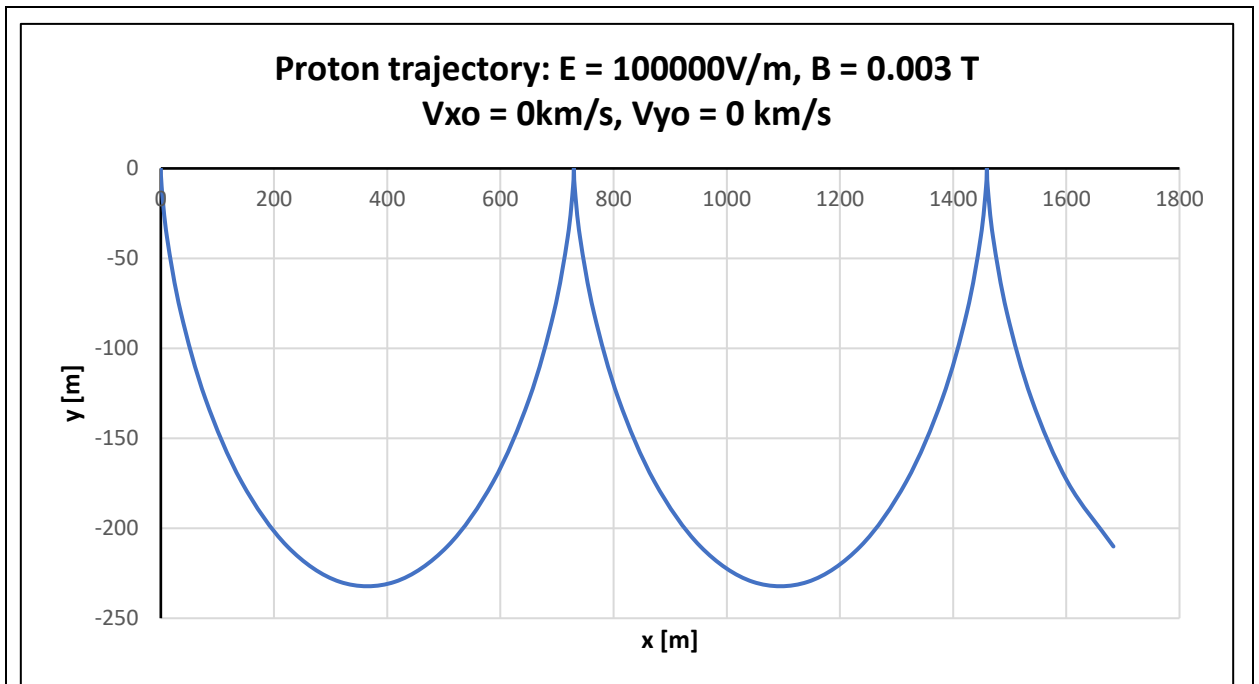
Obrázek 17, tvar trajektorie s nenulovou počáteční rychlostí.



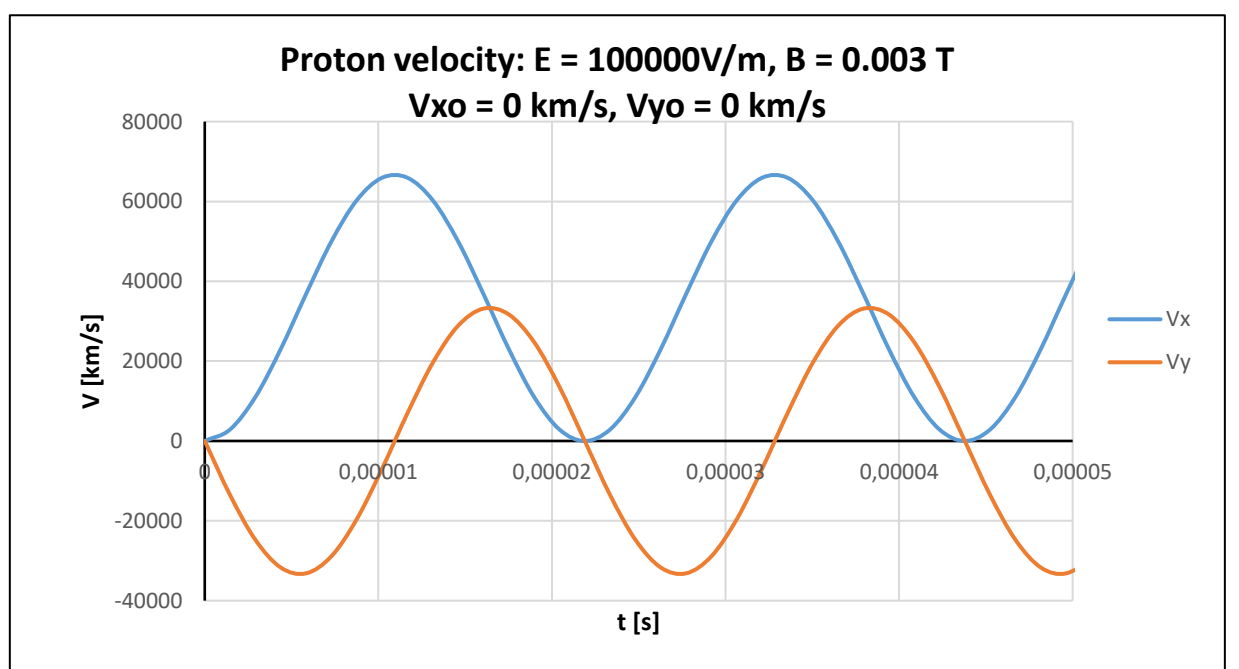
Obrázek 18, změna časového průběhu složek rychlosti v důsledku $v_0 \neq 0$.

Vliv hmotnosti částice.

Plazmat jako celek se může skládat z částic, které se liší nejenom směrem náboje (kladný nebo záporný), ale i hmotnosti. Na následujícím grafu je znázorněná trajektorie pohybu protonu, který má hmotnost $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ [kg] a je 1724 krát těžší než elektron.



Obrázek 19, trajektorie pohybu protonu.



Obrázek 20, časový průběh složek rychlosti protonu.

Jak je vidět s uvedených grafu pohyb protonu má opačný směr vůči ose y , smysl driftu ale zůstal stejný (kladný směr osy x). Lineární parametry drahy se taky zvětšily 1724 krát, stejně jako i perioda kmitu, která může být vyjádřena jako $T = 2\pi \frac{m}{qB}$, maximální rychlosti se ale nezměnily. Proton potřebuje 1724 krát více energie než elektron na dosažení určité rychlosti, ale zároveň projde 1724 krát větší vzdálenost v homogenním elektrostatickém poli, které koná práci.

Závěr.

Poměr hmotnosti částice k její náboji určuje velikost cykloidy po které bude částice pohybovat a taky frekvenci její kmitu ($y_{max} = 2 \frac{mE}{qB^2}$, $T = 2\pi \frac{m}{qB}$). Znamená to že těžké částice (třeba jádra atomů obsahující neutrony) budou vyžadovat velké lineární rozměry urychlovače. Situaci da se ovládat zvětšením magnetické indukce což ale má své technologické limity.

Z derivací rovnice (3) plyne že rychlost ve směru x dá se zapsat jako:

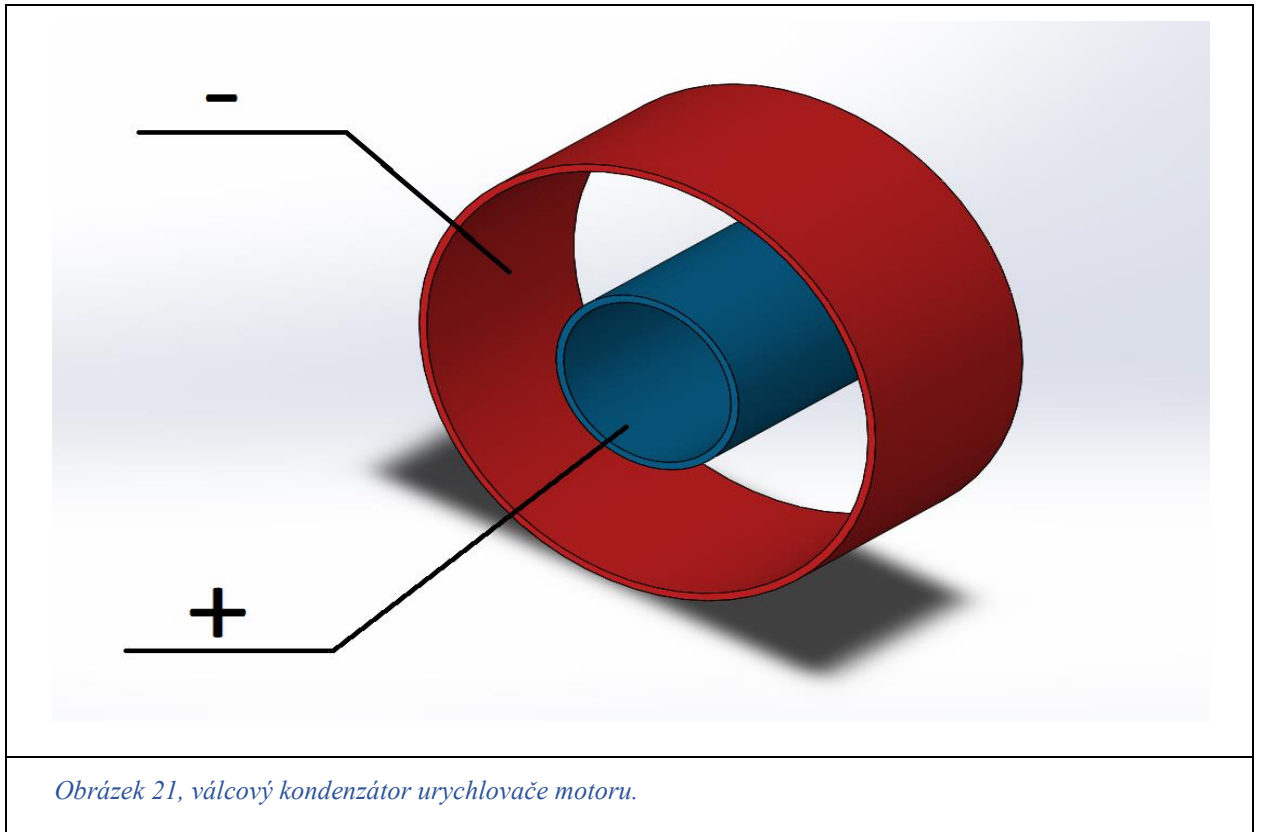
$$v_x = \frac{E}{B} \left(1 - \cos \left(\frac{qB}{m} t \right) \right)$$

Tím pádem maximální rychlost v horizontálním směru není závislá na poměru náboje ku hmotnosti částic a je daná poměrem $\frac{E}{B}$ který má jednotku rychlosti: $\frac{E}{B} = \frac{V}{m} \cdot \frac{m^2}{V \cdot s} = \left[\frac{m}{s} \right]$.

Výhodou je stejný směr driftu, což znamená že plazmat jako celek da se urychlovat v jedním kanálu, bez rozdělení na urychlovače záporných a kladných částic. Avšak v rozebraném níže motoru kondenzátorem jsou zrychlované pouze kladně nabitě ionty, pro jejich neutralizaci je pak využita elektronová tryska.

Elektrostatické pole válcového kondenzátoru.

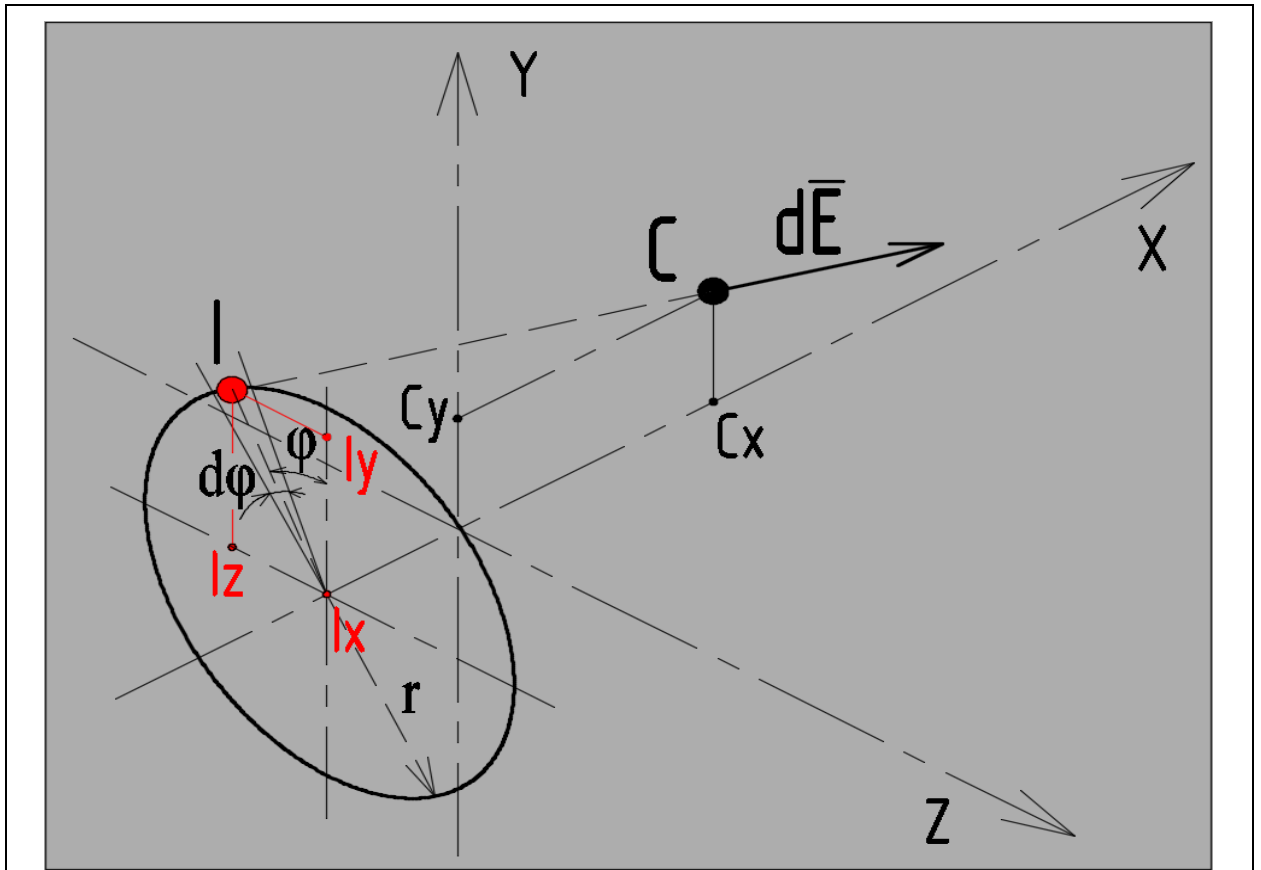
Představený v dané diplomové práci iontový motor s toroidním magnetickým polem (nadále Torion) využívá elektrostatické pole pro urychlení iontů. Směr vektoru jeho intenzity není shodný s vektorem tahu motoru, ale je na něho kolmým, na rozdíl třeba od klasického iontového motoru. Urychlovačem funguje válcový kondenzátor s kladně nabitým vnitřním válečkem (viz obr. 21). Nasměrování pohybu nábojů je uskutečněno toroidním magnetickým polem, které není vlastní pole motoru, ale je generováno speciálními cívkami.



Pro stanovení trajektorie pohybu iontu je nutně vědět vektor intenzity elektrického pole \vec{E} v každém bodě v okolí daného kondenzátoru. Problém spočívá v tom že elektrické pole mezi vnitřním a vnějším valečkou už nelze počítat za homogenní kvůli velké vzdálenosti mezi nimi v porovnání s délkou urychlovače. Zvlášť je potřebným určovat vliv elektrického pole na náboj i v nějaké vzdálenosti od motoru.

Z těchto důvodů pro stanovení vektoru \vec{E} bude využit princip superpozice: výsledný vektor intenzity elektrického pole je součtem jednotlivých vektorů $\Delta \vec{E}$ od každého elementárního náboje. Tím pádem kondenzátor bude chápán jako kladně a záporně rovnoměrně nabitě valečky a celkový vektor intenzity elektrického pole bude stanoven integrováním.

Zprv je nutně stanovit vektor \vec{E} který bude tvořen elementárním rovnoměrně nabitým kolečkem. Za tímto účelem vyřešíme úlohu zobrazenou na obrázku 22. Necht' máme rovnoměrně kladně nabitě kolečko rádiusu r s lineární hustotou náboje $q_l = \left[\frac{C}{m} \right]$, umístěné rovnoběžně s rovinou ZY a v nějaké vzdálenosti od něj (I_x), přičemž střed prstence leží na ose X . Účelem je stanovit vektor intenzity elektrického pole v bodě $C(C_x, C_y)$ ležícím v rovině XY . Je zřejmé že z-ová složka hledaného vektoru bude nulová a vliv levé (záporná část osy Z) a pravé (kladná část osy Z) pukly kolečka budou se lišit jenom znaménkem z-ové souřadnice, čili da se využít symetrie.



Obrázek 22, stanovení elektrického pole rovnoměrně nabitého kolečka.

Vybereme nekonečně malý element I délky $rd\varphi$, obsahující náboj $q_l \cdot rd\varphi$. Intenzita elektrického pole bodového náboje Q může být určena jako:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \quad (6)$$

V daném vzorku: d — vzdálenost k náboji, ϵ — elektrická permitivita materiálu ($\epsilon = 1$ protože motor pracuje ve vakuu), ϵ_0 — permitivita vakua ($\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$).

Zavedeme konstantu $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ která bude se rovnat $k = 8987551792 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$, pak rovnici (6)

můžeme přepsat do tvaru: $\bar{E} = k \frac{Q}{d^2}$. (7)

Bod I má souřadnice $I(I_x, r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Souřadnice bodu C můžeme zapsat jako $C(C_x, C_y, 0)$. Pak elementární vektor intenzity elektrického pole $d\bar{E}_c$ může se stanovit podle vzorku (7):

$$|d\bar{E}_c| = \frac{k \cdot q_l \cdot rd\varphi}{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}$$

Vektor \vec{IC} má souřadnice $\vec{IC}(C_x - I_x, C_y - r \cos \varphi, -r \sin \varphi)$ a svírá se souřadnicovými osy úhly α_x, α_y a α_z (viz obr. 23), které můžeme spočítat jako:

$$\cos \alpha_x = \frac{C_x - I_x}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}}$$

$$\cos \alpha_y = \frac{C_y - r \cos \varphi}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}}$$

$$\cos \alpha_z = \frac{-r \sin \varphi}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}}$$

Pak můžeme napsat, že:

$$dE_{cx} = |d\vec{E}_c| \cos \alpha_x$$

$$dE_{cy} = |d\vec{E}_c| \cos \alpha_y$$

$$dE_{cz} = |d\vec{E}_c| \cos \alpha_z$$

Po úpravě dostáváme následující zápis složek vektoru \vec{E}_c :

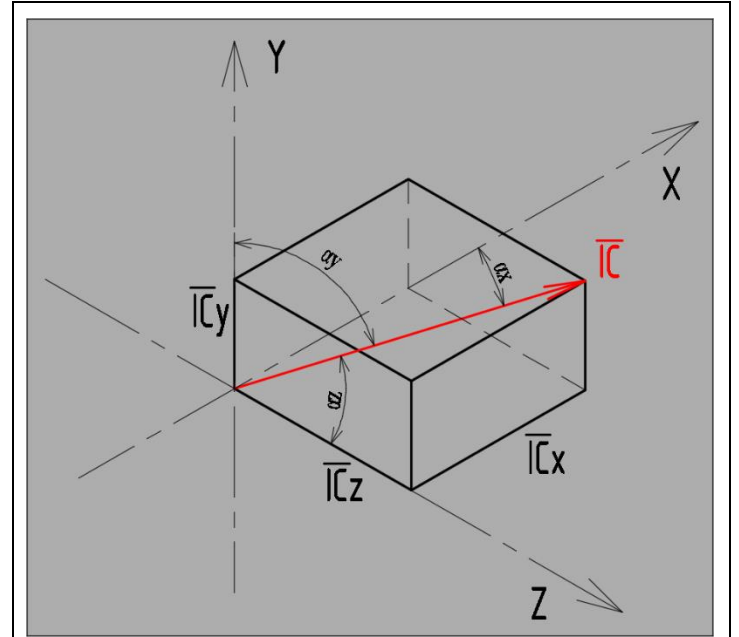
$$dE_{cx} = \frac{(C_x - I_x) \cdot k \cdot q_l \cdot r}{((C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$dE_{cy} = \frac{(C_y - r \cos \varphi) \cdot k \cdot q_l \cdot r}{((C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$dE_{cz} = \frac{(-r \sin \varphi) \cdot k \cdot q_l \cdot r}{((C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

Poslední integrál da se vyřešit pomocí záměny proměnné:

$$\begin{aligned} \int \frac{(-r \sin \varphi) \cdot k \cdot q_l \cdot r}{((C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi &= \left| \frac{(C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi = t}{2C_y r \sin \varphi d\varphi = dt} \right| = \\ &= -\frac{1}{2C_y} \int \frac{k \cdot q_l \cdot r}{t^{3/2}} dt = -\frac{k \cdot q_l \cdot r}{2C_y} \int t^{-1,5} dt = -\frac{k \cdot q_l \cdot r}{2C_y} t^{-0,5} \cdot (-2) = \\ &= \frac{k \cdot q_l \cdot r}{C_y} \frac{1}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi}} \end{aligned}$$



Obrázek 23, rozklad vektoru \vec{IC} .

Tím pádem můžeme vidět, že výsledná z-ova složka vektoru intenzity elektrického pole opravdu bude nulová:

$$E_{cz} = \frac{k \cdot q_l \cdot r}{C_y} \frac{1}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2 - 2C_y r \cos \varphi}} \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{k \cdot q_l \cdot r}{C_y} \left(\frac{1}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + C_y^2 + r^2}} \right)$$

Ostatní integrály ale nejsou integrovatelné a vyžadují použití numerických přístupu řešení. Toto řešení bude probíhat následujícím způsobem: válcová plocha s nábojem Q se rozdělí na N stejných části s nábojem $\frac{Q}{N}$. Každá část I má své souřadnice $I(I_x, r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ kde I_x a úhel φ budou se měnit po jednotlivých krocích, například $I_x \in [0; 0,23]$ s krokem 0,01 a $\varphi \in [0; 2\pi]$ s krokem $\frac{\pi}{20}$ radiánů. Zkoumaný bod C má taky své souřadnice $C(C_x, C_y, C_z)$. Pak absolutní hodnota vektoru \bar{E}_{ci} může se počítat jako:

$$|\bar{E}_{ci}| = \frac{kQ/N}{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (C_z - r \sin \varphi)^2} \quad (8)$$

Jeho složky se určí pomocí cosinů:

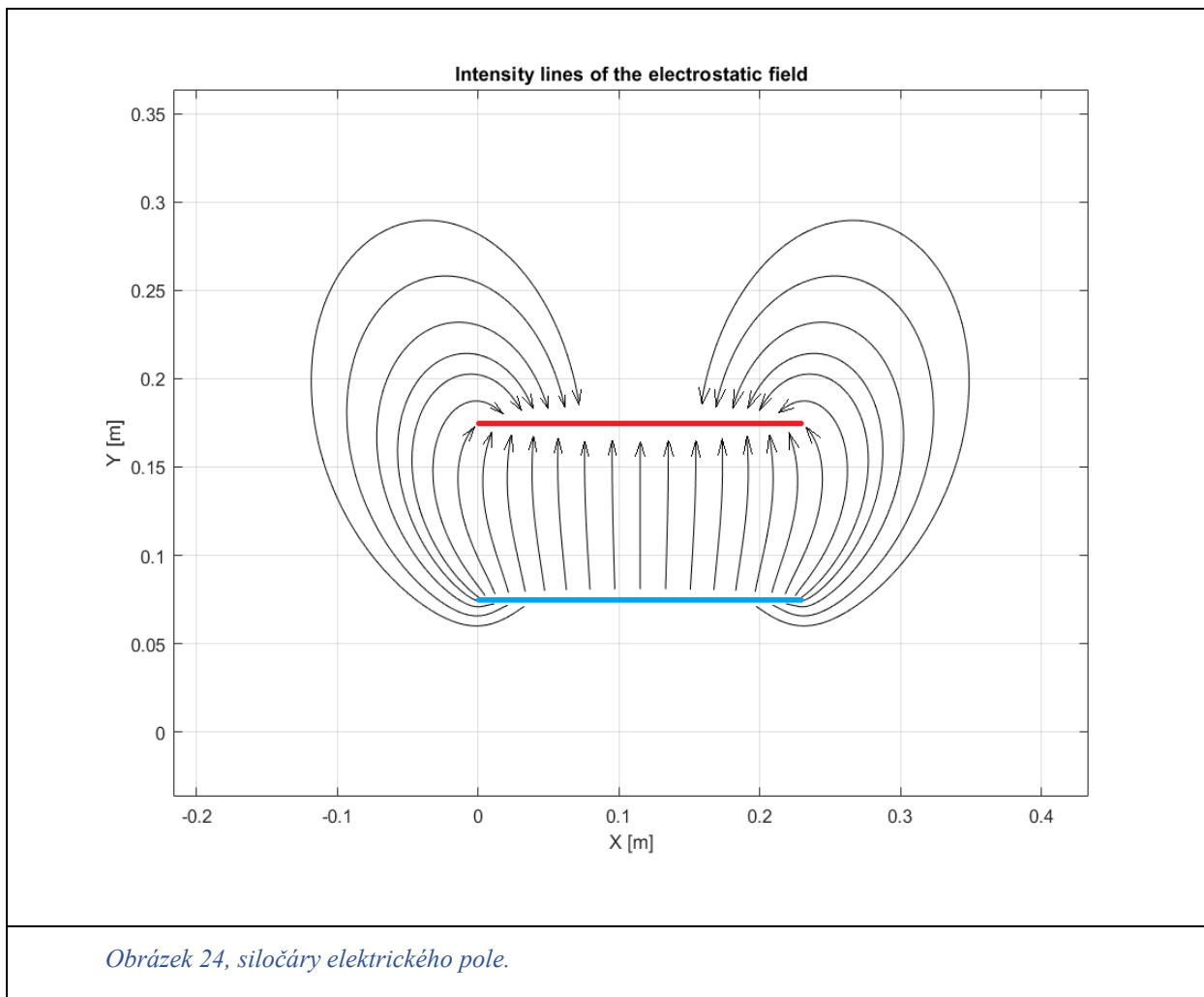
$$E_{cxi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_x \quad \cos \alpha_x = \frac{C_x - I_x}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (C_z - r \sin \varphi)^2}}$$

$$E_{cxi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_y \quad \cos \alpha_y = \frac{C_y - r \cos \varphi}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (C_z - r \sin \varphi)^2}}$$

$$E_{cxi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_z \quad \cos \alpha_z = \frac{C_z - r \sin \varphi}{\sqrt{(C_x - I_x)^2 + (C_y - r \cos \varphi)^2 + (C_z - r \sin \varphi)^2}}$$

Výsledné složky E_{cx} , E_{cy} a E_{cz} jeví sebou součet všech E_{cxi} , E_{cxi} a E_{cxi} . Program pro dane výpočty bude aplikovat cyklus uvnitř cyklu. Tak například pokud válcová plocha je rozdělena na 10 koleček a v každé jsou 50 částí (celkem 500 plošek), program bude jevit sebou cyklus na 10 operaci každá z nich ale taky bude umisťovat v sobě cyklus na následující 50. Tím pádem algoritmus nejdřív spočítá složky E_{cxi} , E_{cxi} a E_{cxi} od každé plošky prvního kolečka, pak přejde na druhé a tak dále, až do desátého.

Na obrázku 24 jsou znázorněny siločáry elektrického pole válcového kondenzátoru v rovině XY . Osa X je osou motoru. Vnitřní a vnější válce na daném řezu se projeví jako modrá a červená čáry respektive. Poloměr vnitřního válce je 7,5 [cm] vnějšího — 17,5 [cm], oba mají délku 23 [cm]. Je vidět asymetrii elektrického pole vůči mezi válcovému prostoru. Tato asymetrie vzniká v důsledku velkého rozdílu poloměru vnitřního a vnějšího válce.



Magnetické pole přímého vodiče.

I když magnetické pole Torionu má toroidní formu, nelze však ho počítat za homogenní kvůli omezenému počtu cívek (viz obr. 28). Proto stanovení vektoru magnetické indukce bude probíhat numericky. Tento numerický výpočet lze ale zjednodušit tím, že jednotlivé cívky, které mimochodem mají obdélníkovou formu, budou představeny jako čtyři přímé vodiče. Což znamená že pokud máme například 9 cívek, tak celkem dostáváme 36 vodičů a každý z nich generuje ve zkoumaném bodě nějaký svůj vektor \vec{B}_i . Pak celková magnetická indukce se spočte jako součet:

$$\vec{B} = \sum_1^{36} \vec{B}_i.$$

Pro stanovení vektoru \vec{B}_i je nutně popsát magnetické pole v okolí nějakého přímého vodiče, což je předmětem dané kapitoly.

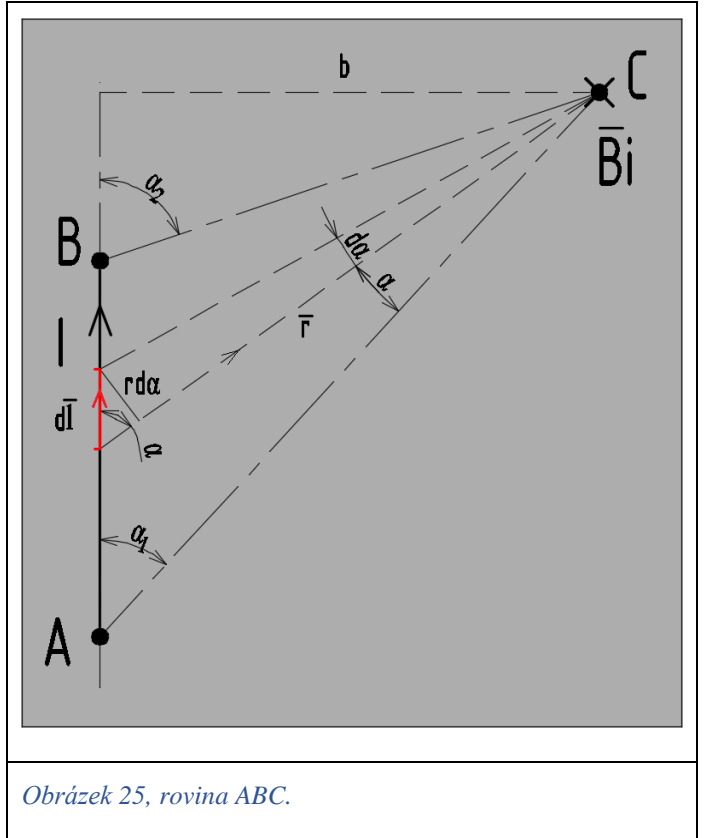
Nechť máme přímý vodič \overline{AB} , libovolně umístěný v prostoru, po kterém běží proud I . Body A a B mají souřadnice:

$$A(A_x, A_y, A_z)$$

$$B(B_x, B_y, B_z)$$

Účelem je stanovit vektor magnetické indukce \overline{B}_i v bodě $C(C_x, C_y, C_z)$.

Přímka AB a bod C určují rovinu v prostoru, tato rovina je znázorněná na obrázku 25. Následující výpočet bude probíhat v rovině ABC . Všechny elementární vektory $d\overline{B}_i$ tvořené elementárními proudy $d\overline{l}$ budou mít shodný směr kolmo na obrázek (od nás).



Obrázek 25, rovina ABC.

Magnetickou indukci v bodě C od elementárního proudu $d\overline{l}$ určuje Biotův–Savartův zákon, který ve vektorově formě má následující tvar:

$$\boxed{d\overline{B}_i = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r^3} [d\overline{l} \times \overline{r}]} \quad (9)$$

μ — magnetická permeabilita prostředí, v daném případě $\mu = 1$.

μ_0 — Permeabilita vakua, $\mu_0 = 1,256637062 \cdot 10^{-6} \left[\frac{N}{A^2} \right]$.

V rovině ABC můžeme využít jeho skalární formu:

$$\boxed{dB_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha} \quad (10)$$

Z obrázku 25 můžeme stanovit že: $r = \frac{b}{\sin \alpha}$ a elementární délka $dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{(\sin \alpha)^2}$

Pak rovnici (10) da se přepsat následujícím způsobem:

$$dB_i = \frac{\mu_0 I (\sin \alpha)^2}{4\pi b^2} \frac{bd\alpha}{(\sin \alpha)^2} \sin \alpha \implies \boxed{dB_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha} \quad (11)$$

Po integrování $B_i = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \implies$

$$\boxed{B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)} \quad (12)$$

Jak vidíme pro stanovení hodnoty B_i je nutně vědět vzdálenost bodu C od přímky AB a taky kosiny $\cos \alpha_1$ a $\cos \alpha_2$. Tento úkol lze vyřešit zavedením třech vektoru:

Vektor \overline{AB} se složkami $\overline{AB} \left((B_x - A_x), (B_y - A_y), (B_z - A_z) \right)$.

Vektor \overline{AC} se složkami $\overline{AC} \left((C_x - A_x), (C_y - A_y), (C_z - A_z) \right)$.

Vektor \overline{BC} se složkami $\overline{BC} \left((C_x - B_x), (C_y - B_y), (C_z - B_z) \right)$.

Pak $\cos \alpha_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$, $\cos \alpha_2 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|}$, vzdálenost $b = |\overline{AC}| \cdot \sin \alpha_1 = |\overline{AC}| \cdot \sqrt{1 - (\cos \alpha_1)^2}$.

Po naleznutí skalární hodnoty B_i zbývá určit vektor \overline{B}_i . Za tímto účelem stanovíme jednotkový vektor $\overline{B}_{1i}(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$ který bude mít směr shodný s vektorem \overline{B}_i . Tento jednotkový vektor můžeme dostat pomocí vektorového součinu vektoru \overline{AB} a \overline{AC} když vydělíme jeho výsledek (vektor) absolutní hodnotou $|\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

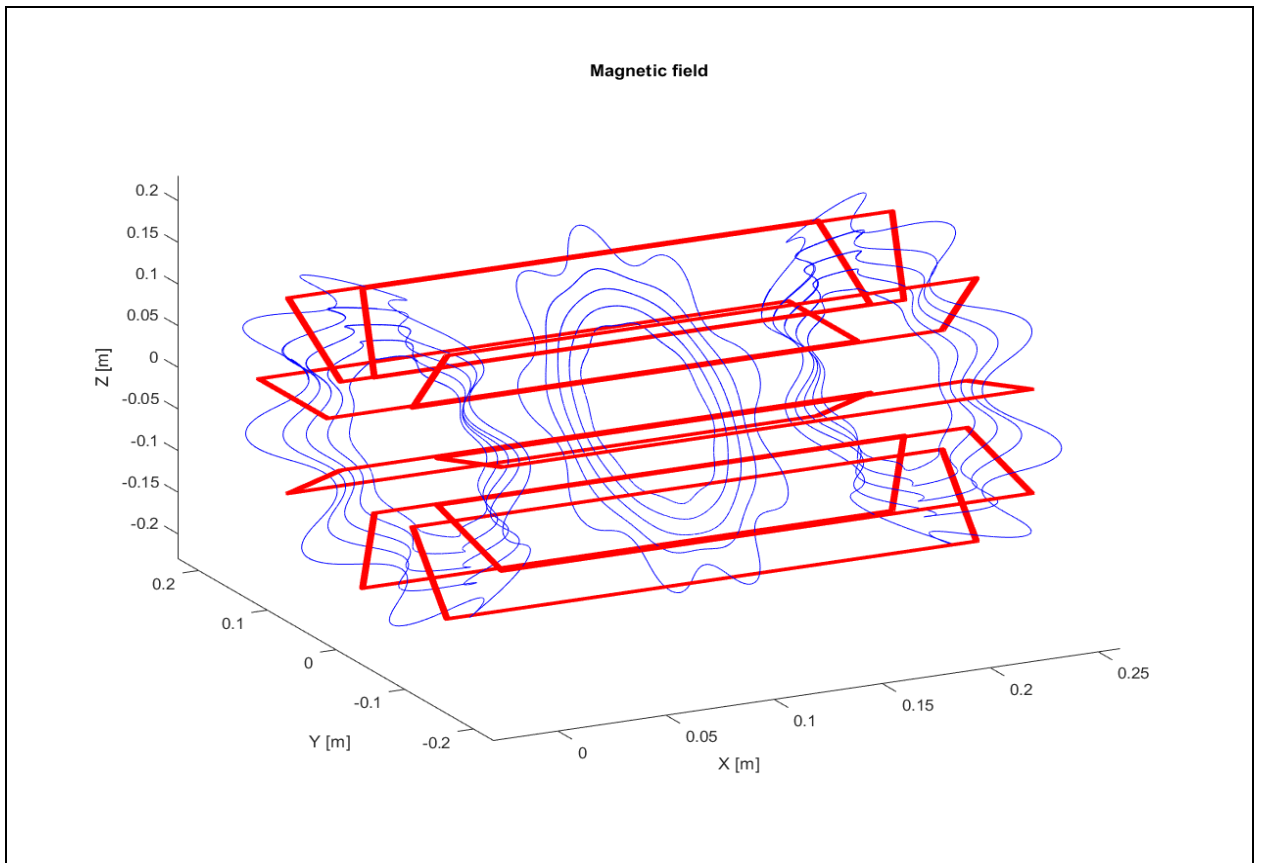
Dostaneme pak:

$$\overline{B}_{1i} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} \text{ kde } \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (B_x - A_x) & (B_y - A_y) & (B_z - A_z) \\ (C_x - A_x) & (C_y - A_y) & (C_z - A_z) \end{vmatrix}$$

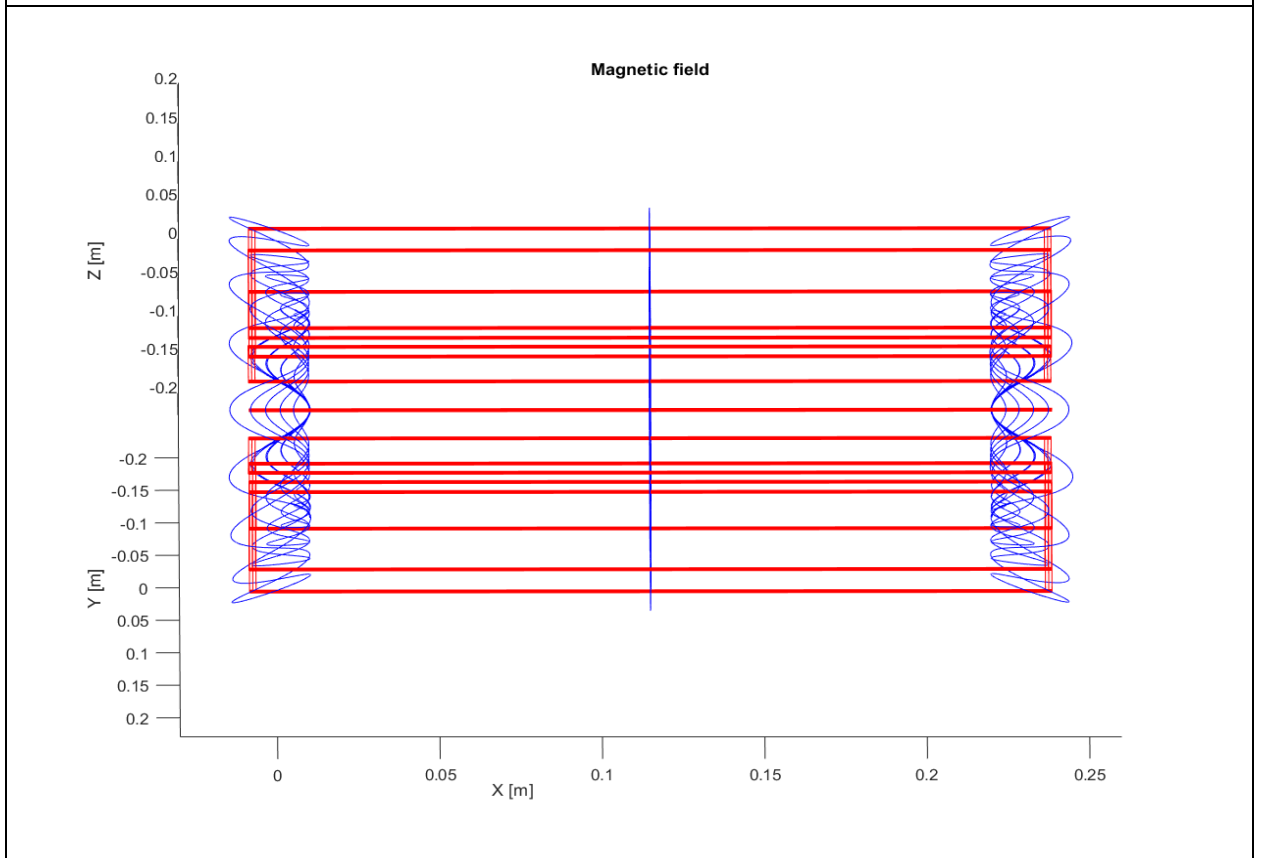
Hledaný námi vektor \overline{B}_i pak můžeme zapsat jako $\overline{B}_i = B_i \cdot \overline{B}_{1i}$ a jeho složky budou mít tvar: $\overline{B}_i(B_i \cdot B_{1ix}, B_i \cdot B_{1iy}, B_i \cdot B_{1iz})$. Protože máme celkem 36 přímých vodičů, vektor \overline{B}_i je jenom jedním s třiceti šesti vektoru, součet kterých dá celkový vektor magnetické indukce $\overline{B} = \sum_1^{36} \overline{B}_i$ ve zkoumaném bodě C .

Na obrázku 26 jsou znázorněny indukční čáry magnetického pole motoru ve třech «řezech» — jednom prostředním a dvou krajních. Můžeme pozorovat jak je pole deformováno v blízkosti vnějšího válce a zvláště v okrajích motoru. Na bočním pohledu (viz obr. 27) je vidět že indukční čáry sahají dokonce i za meze vnitřní části toroidu. Potvrzuje to předpoklad, že při takovém množství cívek (v daném případě 9) nelze už magnetické pole chápat jako homogenní a je požadován numericky vypočet.

Celkový stav magnetického pole motoru určuje proud I v cívkách a nadále pro regulaci a odladění motoru budou se využívat tyto tři hodnoty: náboj Q kondenzátoru (určuje elektrické pole), proud I v cívkách (určuje magnetické pole) a x-ova souřadnice otvoru v katodu (viz obr. 29 položka 5) která určuje počátek trajektorie kationtu.



Obrázek 26, indukční čáry magnetického pole urychlovače.

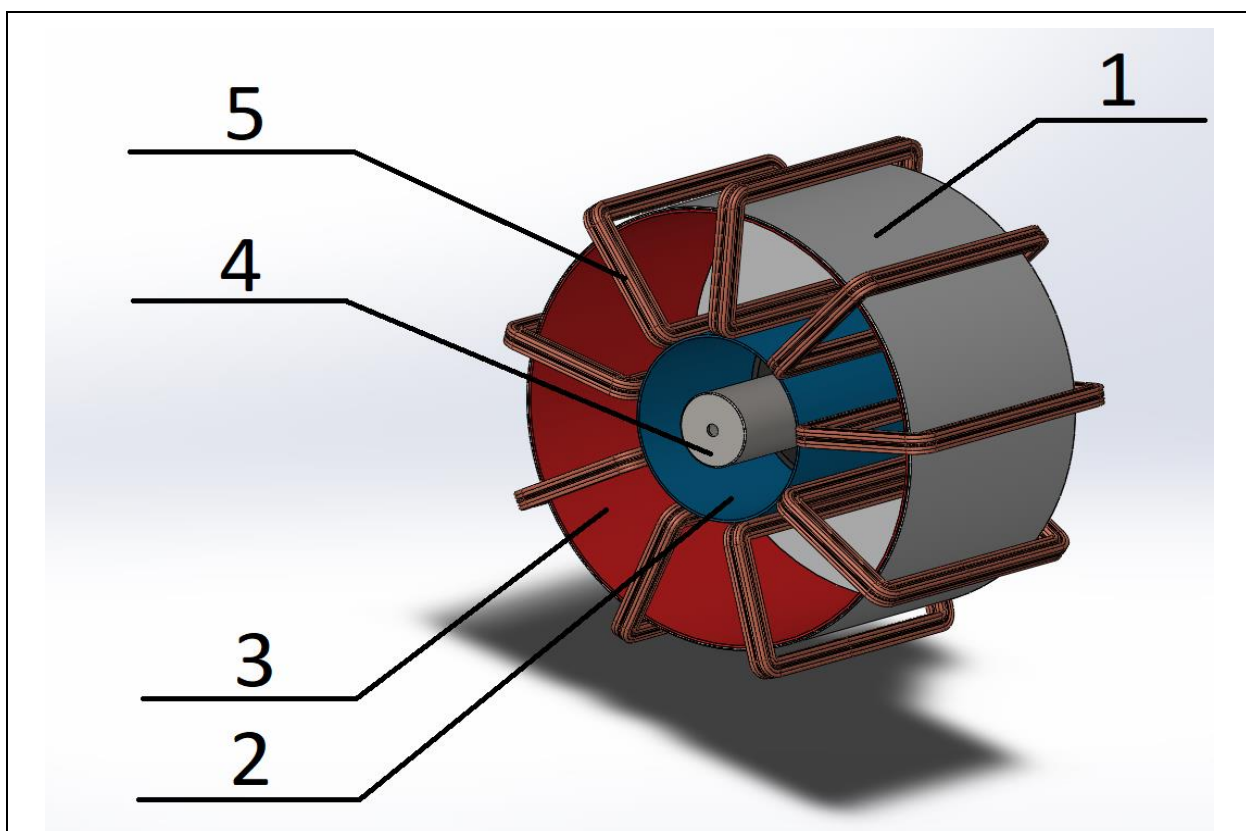


Obrázek 27, indukční čáry magnetického pole — boční pohled.

Konstrukce motoru.

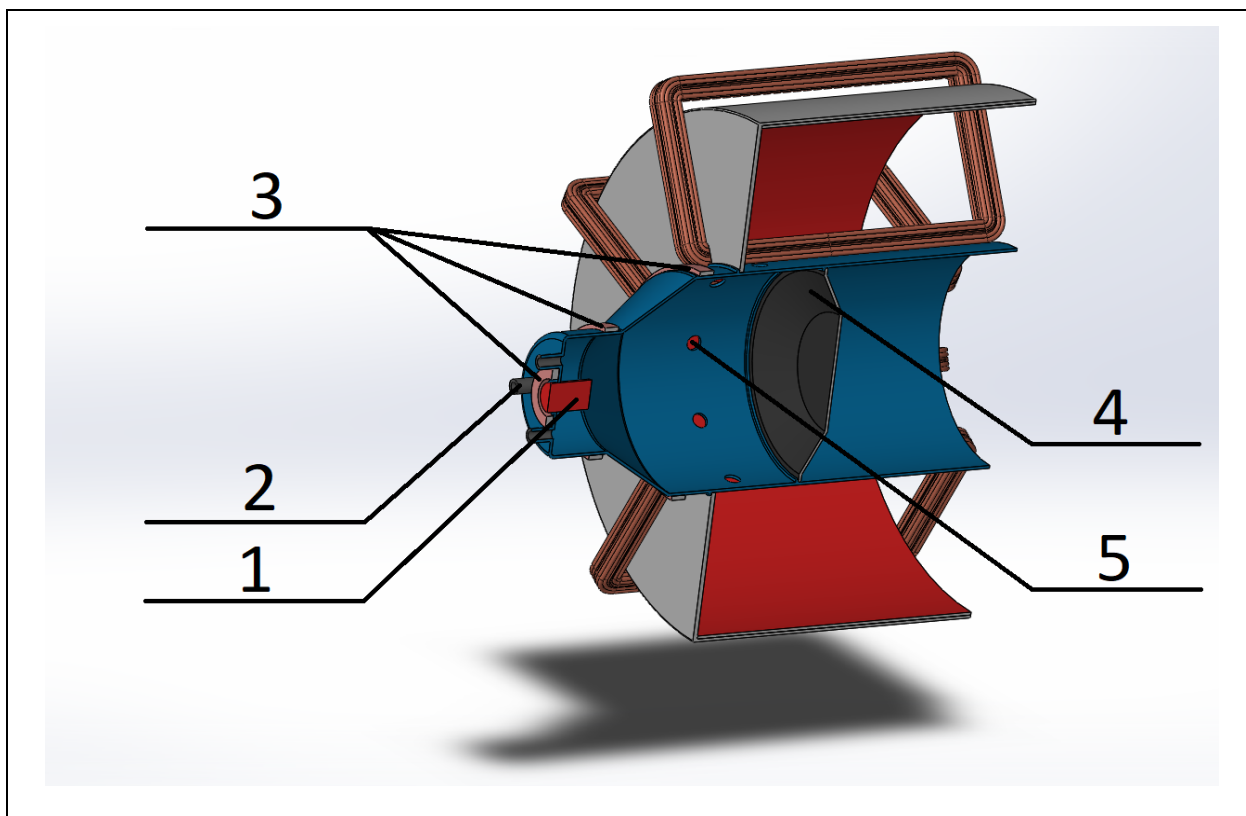
Představený v dané diplomové práci motor tvoří válcový kondenzátor s devíti cívkami, vytvářejícími v mezi válcovým prostoru toroidní magnetické pole. Pracovní plyn je ionizován ve přední části motoru na stejném principu co je využit v iontovém motoru, což je ionizace kolizí s elektronem. Po ionizaci kladně nabitě ionty vstupují do mezi válcového prostoru otvory ve vnitřním válci. Působením elektrostatické síly tyto částice jsou přitahovány ke katodě (vnější válec). Magnetické pole slouží k zabránění bombardování ionty katody a nasměrování pohybu kationtů ven z motoru (v ideálním případě rovnoběžně s osou motoru). Pro jejich neutralizaci je využita elektronová tryska umístěná v ose motoru v prostoru vnitřního válce (viz obr. 28).

Podobná toroidní konfigurace magnetického pole je využita v práci popisující magnetický design inovativního supravodivého toroidního portálu pro Hadronovou terapii, kde magnetické pole je využito pro přesné nasměrování protonů. Název práce v angličtině — «Magnetic Design of a Superconducting Toroidal Gantry for Hadron Therapy», autoři: Enrico Felcini, Luca Bottura, Jeroen van Nugteren, Gijs de Rijk, Glyn Kirby, a Bertrand Dutoit. [5]



Obrázek 28, konstrukce motoru: 1) pouzdro, 2) anoda, 3) katoda, 4) Elektronová tryska (neutralizátor), 5) cívky toroidního magnetického pole.

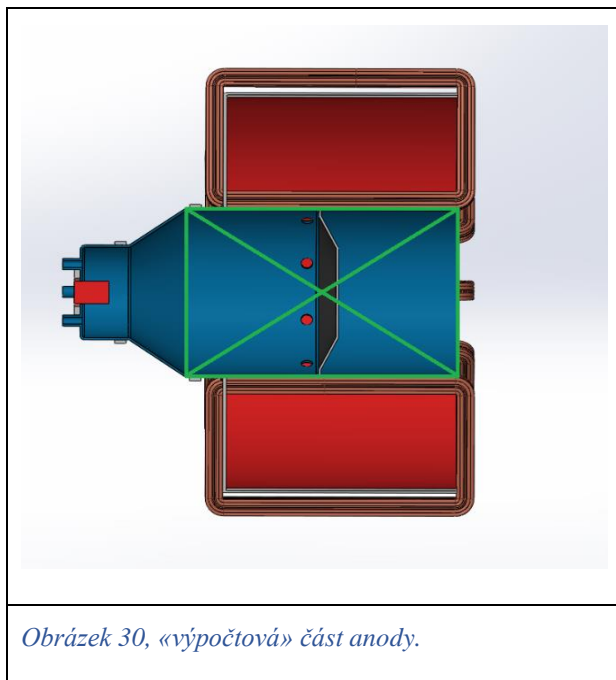
Jak už můžeme vidět, zobrazený model je jenom schematickým. Jeho hlavním účelem je znázornění koncepce, nikoliv konstrukční návrh motoru. Předmětem této práce je vypočet trajektorií pohybu kationtů a jejich vliv na celkové charakteristiky Torionu, a proto technologická část je opuštěna.



Obrázek 29, řez motorem: 1) zdroj elektronů, 2) otvor pro zavedení pracovního plynu, 3) cívky axiálního magnetického pole ionizátoru, 4) support, 5) vstupní otvor urychlovače (určuje počátek trajektorií)

Na řezu motoru je vidět modrý ionizátor (viz obr. 29), pouzdro kterého spolu s vnitřním válečkem tvoří hlavní anodu. Zdrojem elektronu pro ionizaci plynu je rozžhavená anoda 1, která má menší potenciál než hlavní anoda motoru. Tím pádem elektrony jsou přitahované k modrému válci. Jejich pohyb je taky ovlivněn axiálním magnetickým polem vytvořeným cívkami 3, čili oni začínají driftovat v tangenciálním směru a «rotují» kolem osy motoru (viz kapitola «drift elektronu»). Když elektron potká na své cestě atom pracovního plynu (zavedeného otvorem 2) a má při tom energii větší než ionizační práce, tak nárazem může ionizovat atom a vytvořit kationt. Vyrážený takhle elektron taky značně driftovat a může ionizovat další atom. Ionizovaný plyn prostupuje dal a je zastavován supportem 4 který je vyroben z nevodivého materiálu. Tím pádem v komoře ionizátoru začne se hromadit plazmat a vytvoří se určitý tlak. Pod tímto tlakem kationty prostupují otvorem 5 v mezi válcový prostor urychlovače, kde oni jsou pak urychlovány elektrostatickým polem.

Axiální magnetické pole ionizátoru je mnohonásobně slabší než pole urychlovače a proto nebude uvažováno při výpočtu trajektorií pohybu kationtů. Jiným zjednodušením je zanedbaní náboje umístěného v kónusové části ionizátoru, čili pohyb iontů budou ovlivňovat jenom náboje katody a válcové části anody (zelený obdélník na obrázku 30). Rozložení nábojů bude se předpokládat za rovnoměrné. Protože maximální rychlosti částic nedosahují rychlosti srovnatelné z rychlosti světla, relativistické efekty se uvažovat nebudou.



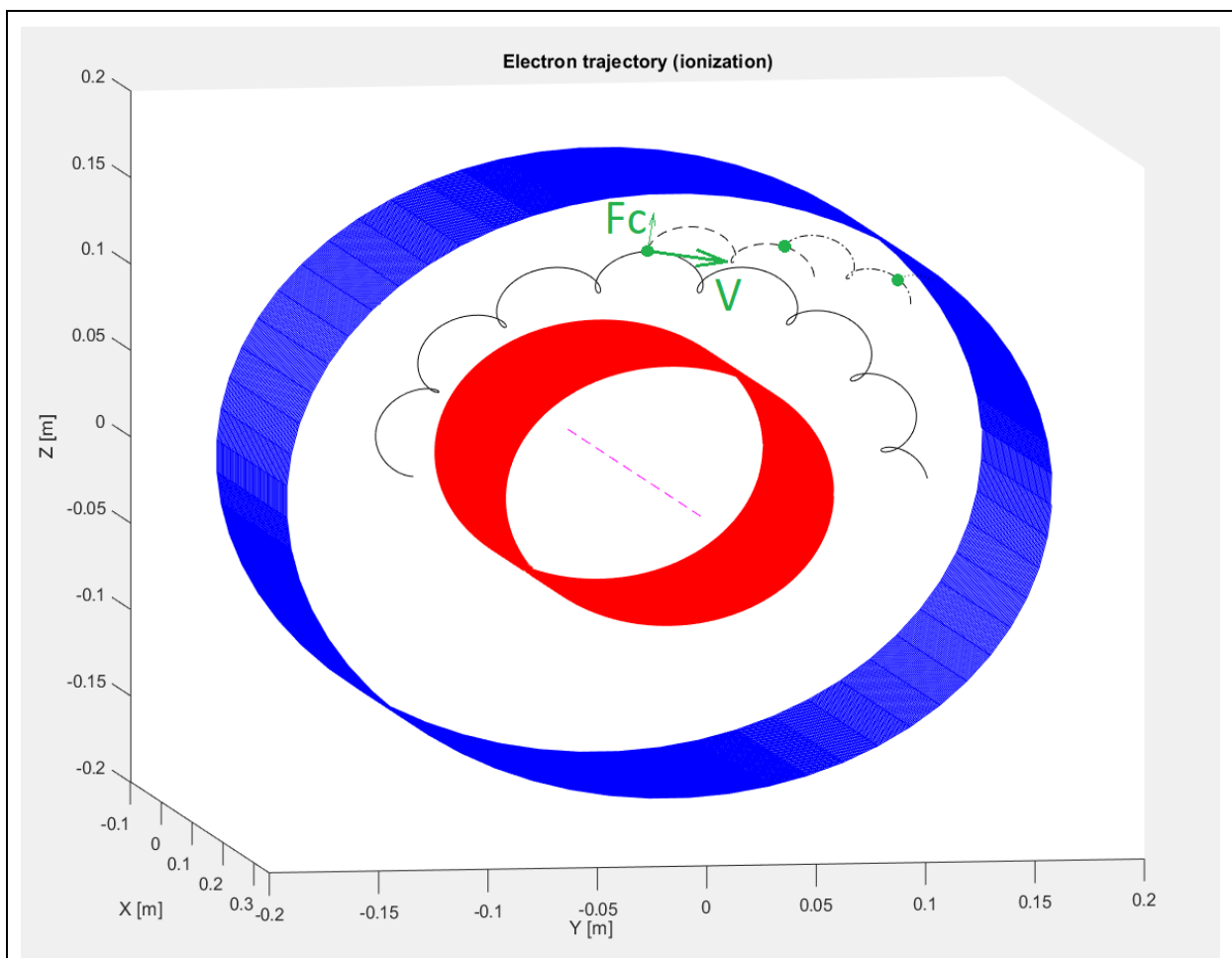
Obrázek 30, «výpočtová» část anody.

Ionizace plynu.

Existují tři základní způsoby ionizace plynu. A to jsou termická ionizace, ve které potřebnou energii k odtržení elektronu od atomu dávají srážky mezi atomy v důsledku zvýšení teploty. Ionizace eklektickým polem, kde k ionizaci dochází v důsledku převýšení intenzitou elektrického pole určité hodnoty, po které následuje odtržení elektronu od atomu. Třetí variantou je ionizace zářením, která se dělí na spoustu dalších variant v závislosti na druhu záření.

V daném motoru je využit stejný princip ionizace jako v iontovém motoru, čili ionizace beta zářením. Hlavní anoda (modrý válec) může mít potenciál $+ 400 - 500$ [V]. Zdroj elektronu (anoda 1 obr. 29) má potenciál na několik desítek voltu nižší, třeba $+ 350 - 450$ [V]. Pohyb elektronu v prostoru ionizátoru je znázorněn na obrázku 31. Pozice cykloidy z větší vzdálenosti od osy X odpovídají větší rychlosti. Parametry elektrického a magnetického pole ionizátoru jsou nastavovány tak aby elektron dosahoval rychlosti dostatečné pro ionizaci atomu pracovního plynu. Po ionizaci (zelené body na obr. 31) elektron ztrácí svou rychlost a začíná pohybovat po jiné cykloidě a po několika srážkách se dostává hlavní anody motoru.

Energie nutná pro ionizaci je závislá na pracovním plynu a stupňů jeho ionizaci. Jako pracovní látka může být využit helium, argon, xenon nebo jiné inertní plyny. Souhrn ionizačních energií je znázorněn v tabulce 2.



Obrázek 31, pohyb elektronu v prostoru ionizátoru.

Prvek	He	Ne	Ar	Kr	Xe
I – stupeň [eV]	24,59	21,56	15,76	14	12,13
II – stupeň [eV]	54,42	40,96	27,63	24,36	21,21
III – stupeň [eV]	-	63,45	40,74	36,95	32,1
Relativní at. hm.	4,0026	20,1797	39,948	83,8	131,29

Tabulka 2, ionizační energie jednotlivých pracovních látek.

Můžeme vidět pokles ionizační energii z rostoucí atomovou hmotnosti. V dane diplomové práci představen motor využívající Argon. Za účelem zvětšení specifického impulzu dá se použít Helium a pro větší tah — Xenon.

Stanovení trajektorií kationtů bez uvažování jejich vzájemného spolupůsobení.

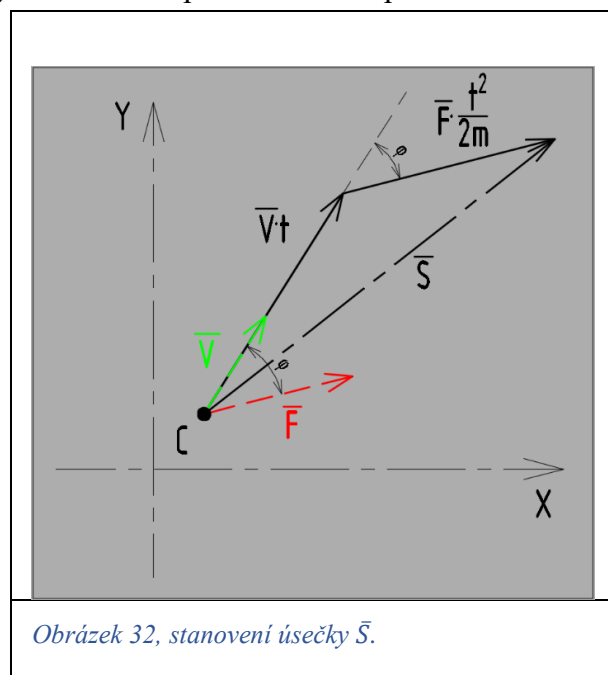
Pokud motorem je urychlována jedná částice, její trajektorie je ovlivňována jenom elektromagnetickým polem urychlovače. Pokud takových částic je několik, tak každá pohybující se částice vytváří kolem sebe magnetické pole a tím ovlivňuje pohyb ostatních kationtů. Toto ovlivnění je uskutečňováno i elektrostatickým polem, protože každý kationt má nějaký náboj a odpuzuje ostatní stejně nabitě ionty. Vypočet trajektorií pohybu nábojů s uvažováním jejich vzájemného spolupůsobení je velmi komplikovaným a komplexním úkolem a bude rozebrán v následující kapitole. Předmětem dané části práce je stanovení křivky pohybu iontů za předpokladu malé hustoty jejich toku, kde ještě můžeme zanedbat elektrické a magnetické pole pohybujících se nábojů.

Každý bod prostoru kolem motoru má nějakou hodnotu intenzity elektrického pole \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} , princip jejich vypočtu je rozebrán v předchozích kapitolách. Pak síla působící na pohybující se náboje může být zapsaná jako:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{V} \times \vec{B}]) \quad (12)$$

Kde q je náboj částice [C] a vektor \vec{V} je vektorem rychlosti $\left[\frac{m}{s}\right]$. Vektor síly \vec{F} obecně svírá nějaký úhel φ s vektorem rychlosti \vec{V} . Draha ujetá jednotkovým nábojem umístěným v bodě C za nějaký malý čas t může být představená vektorem \vec{S} (viz obr. 32).

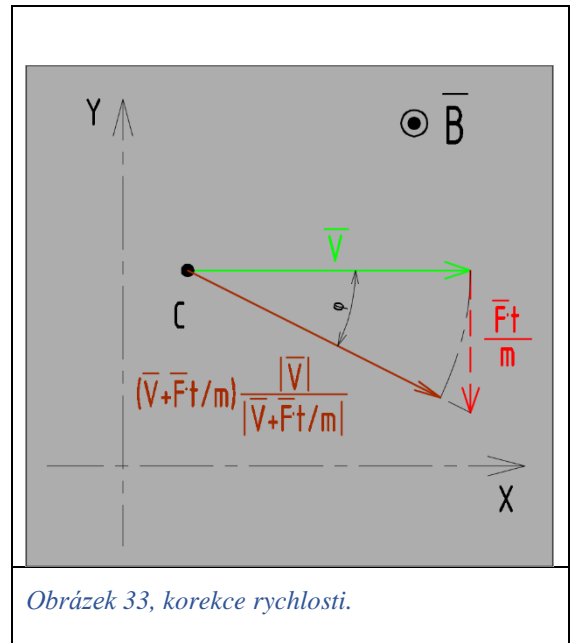
$$\vec{S} = \vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot \frac{t^2}{2m} \quad (13)$$



Kde m je hmotnost částice. Je to elementární vzdálenost projedná za velmi malý usek času. Součet jednotlivých úseček \vec{S} bude pak přibližně nahrazovat skutečnou křivku trajektorie kationtu. Takový vypočet bude vyžadovat stanovení síly \vec{F} v každém výpočtovém bodě trajektorie. Tak například první úsečka bude mít nulovou počáteční rychlost, pak síla působící na částici bude určena jenom elektrostatickým polem. Konečná rychlost na první úsečce spočte se jako $\vec{v}_{kon1} = \frac{\vec{F}_1}{m} t$ a bude využita jako počáteční rychlost na druhé elementární úsečce, která už bude mít

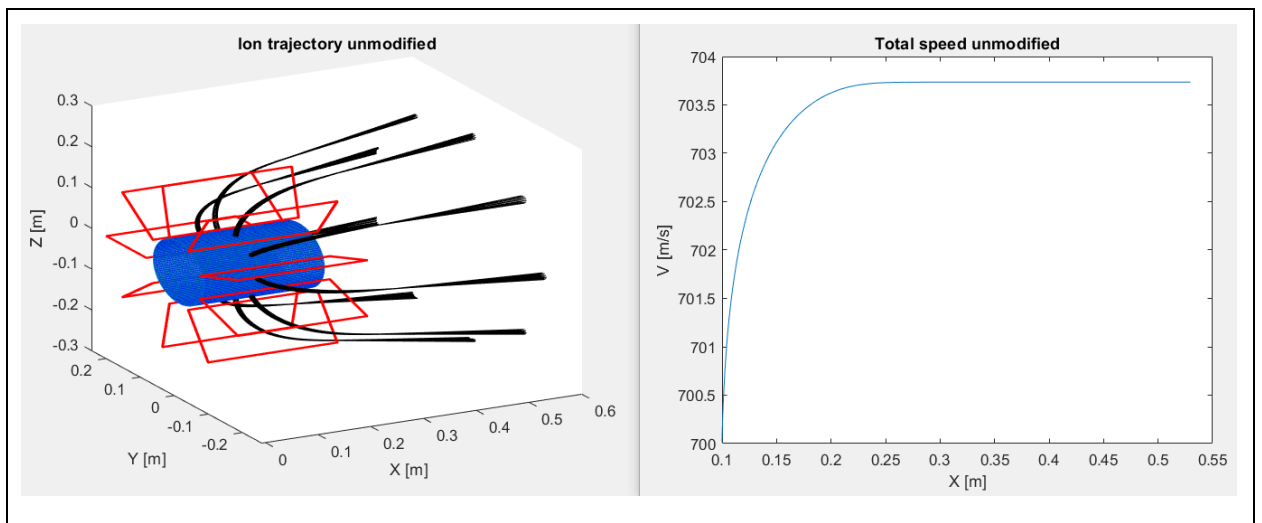
nenulovou složku Lorentzové síly a její konečná rychlost spočte se jako: $\vec{V}_{kon2} = V_{kon1} + \frac{\vec{F}_2}{m} t = \frac{\vec{F}_1}{m} t + \frac{\vec{F}_2}{m} t$.

Takovýhle algoritmus výpočtu má ale drobnou nepřesnost, která se bude akumulovat po každé iteraci. Princip vznikající nepřesnosti je patrný z obrázku 33, kde je zobrazen případ pohybu částice v magnetickém poli z nějakou počáteční rychlosti. Výsledná rychlost spočtená jako součet $\vec{V} + \vec{F} \frac{t}{m}$ bude mít větší absolutní hodnotu, než počáteční vektor rychlosti \vec{V} což ale neodpovídá fyzikální realitě, protože magnetické pole nekoná práci. Konečná rychlost na daném úseku musí být pootočená o úhel φ vůči počáteční rychlosti ale její absolutní hodnota musí zůstat stejná. Toho lze



Obrázek 33, korekce rychlosti.

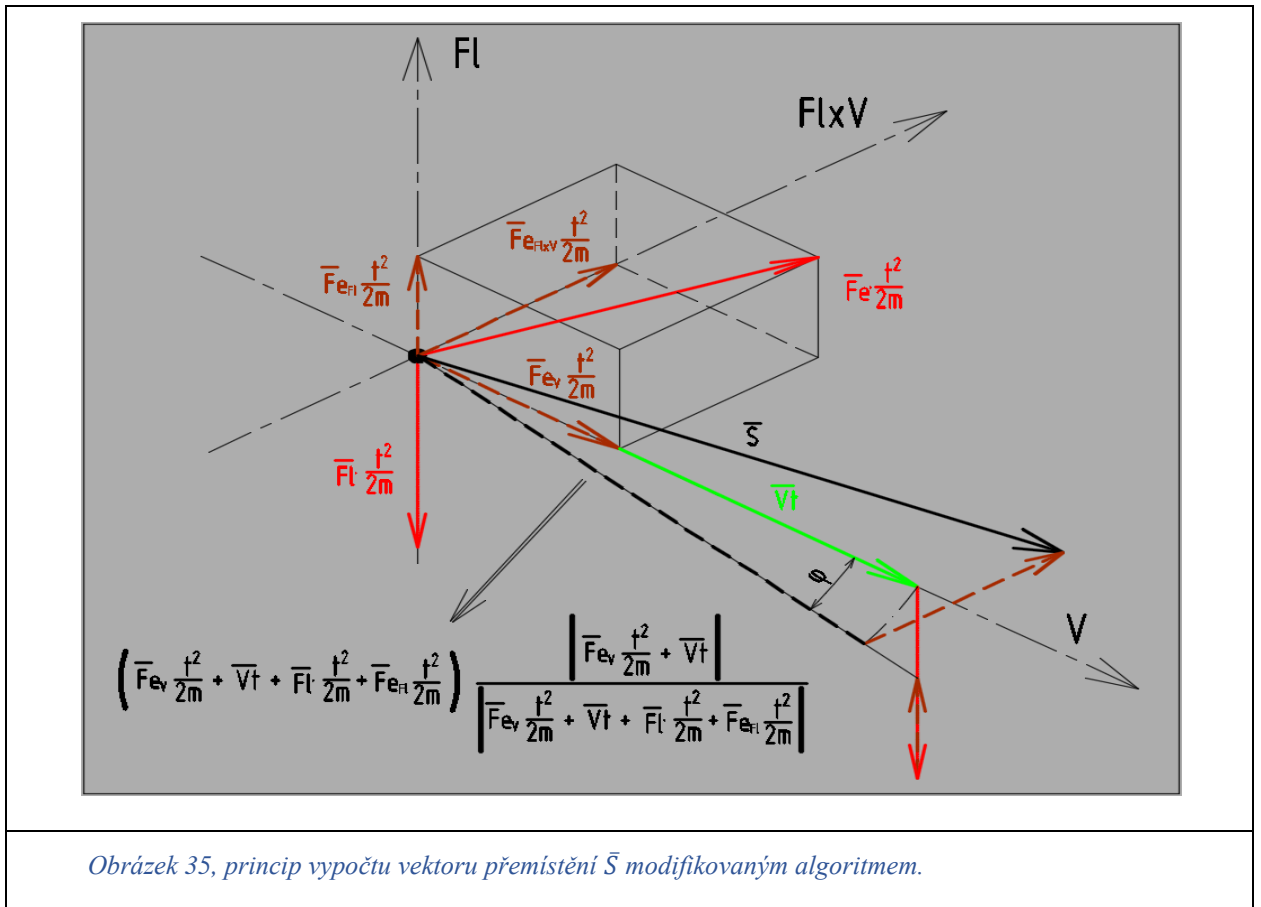
dosáhnout vynásobením vektoru konečné rychlosti poměrem $|\vec{V}|/|\vec{V} + \vec{F}t/m|$ a výsledná rychlost může pak být zapsaná jako: $\vec{V}_{kon} = \left(\vec{V} + \vec{F} \frac{t}{m} \right) \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V} + \vec{F}t/m|}$. Na obrázku 33 \vec{V}_{kon} zobrazená jako hnědý vektor. Takováhle úprava dovoluje modelovat pohyb iontů líp odpovídající realitě, protože magnetické pole mění jenom směr rychlosti, nikoliv její velikost. Tak například na následujícím obrázku je vidět grafy trajektorií a absolutní rychlosti iontů argonu při pohybu v čistě magnetickém poli z počáteční rychlosti $700 \left[\frac{m}{s} \right]$, které byly počítané neupraveným algoritmem.



Obrázek 34, růst rychlosti na neupraveném algoritmu.

Můžeme pozorovat vzrůst absolutní rychlosti který nesmí nastat při pohybu v magnetickém poli. Avšak vznikající chyba není velká, je to díky velmi malé hodnotě uhlu φ na každé iteraci, při které trojúhelník rychlosti je skoro rovnoramenný.

Samozřejmě za přítomnosti elektrického a magnetického polí je modifikace algoritmu složitější. Je to z toho důvodu že magnetické pole bude ovlivňovat jenom tu část elektrostatické síly \vec{F}_e která leží v rovině vektoru rychlosti \vec{V} a Lorentzové síly \vec{F}_l a vůbec neovlivní složku kolmou na tuto rovinu. Pro pochopení vypočtu trajektorie upraveným algoritmem využijeme následující obrázek.



Obrázek 35, princip vypočtu vektoru přemístění \vec{S} modifikovaným algoritmem.

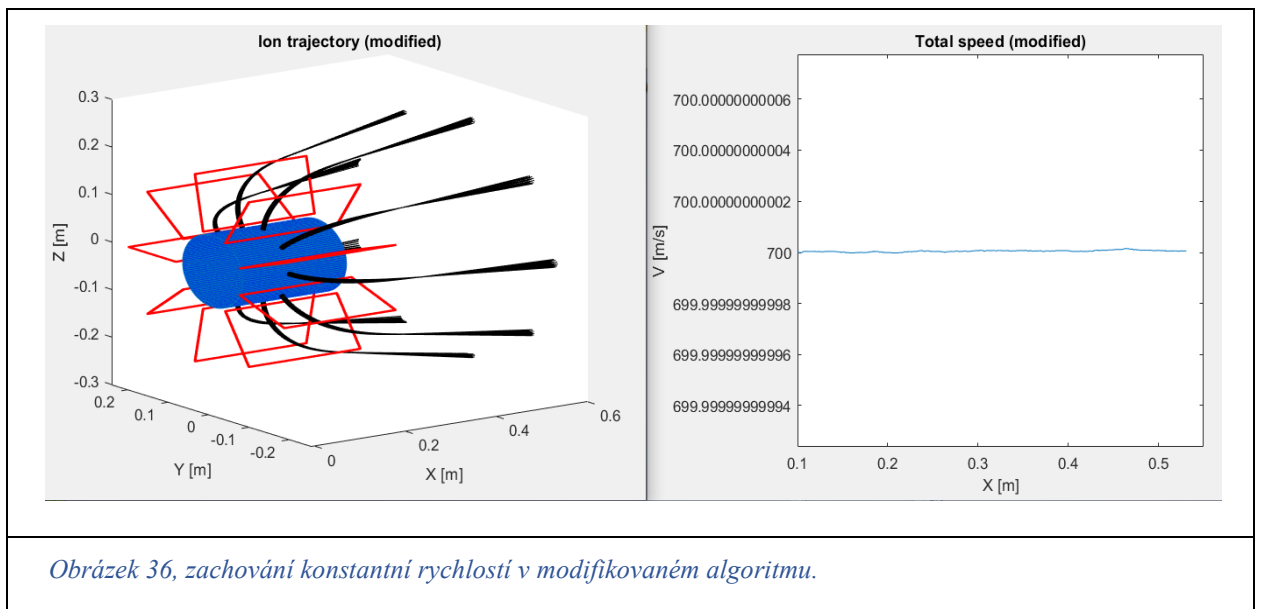
Na daném obrázku sestojen výsledný vektor přemístění \vec{S} , vypočet konečné rychlosti bude probíhat podobným způsobem. Zaprvé síla působení elektrického pole \vec{F}_e se rozloží na složky: \vec{F}_{e_v} — ve směru rychlosti, $\vec{F}_{e_{F_l}}$ — ve směru Lorentzové síly, $\vec{F}_{e_{F_l \times v}}$ — ve směru kolmém na vektory rychlosti a Lorentzové síly. Na daném obrázku tyto vektory už vynásobené hodnotou $\frac{t^2}{2m}$ a představují přemístění od odpovídajících sil. Zadruhé provede se srovnání vektoru $\vec{F}_l \frac{t^2}{2m}$ a $\vec{F}_{e_{F_l}} \frac{t^2}{2m}$ a pokud absolutní hodnota vektoru $\vec{F}_{e_{F_l}} \frac{t^2}{2m}$ je větší, tak jeho součet s vektorem $\vec{F}_l \frac{t^2}{2m}$ musí nejenom potočit výsledný vektor přemístění ale taky i zvětšit jeho deklinaci. Tím pádem výsledné přemístění \vec{S} spočte se jako obyčejný součet všech vektorů:

$$\bar{S} = \bar{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \bar{V}t + \bar{F}_l \frac{t^2}{2m} + \bar{F}_{eFl} \frac{t^2}{2m} + \bar{F}_{eFl \times v} \frac{t^2}{2m} = \bar{V}t + (\bar{F}_e + \bar{F}_l) \frac{t^2}{2m} \quad (14)$$

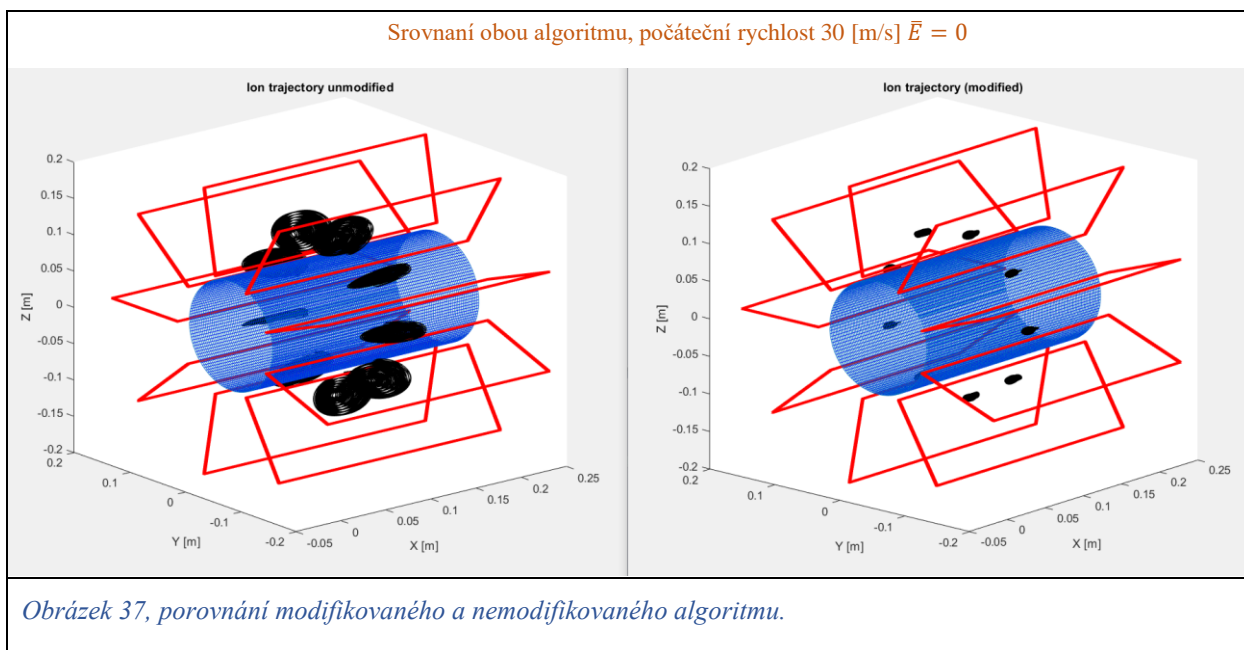
Čili žádná modifikace se v podstatě neprovádí. Pokud ale vektor $\bar{F}_{eFl} \frac{t^2}{2m}$ je kratší než $\bar{F}_l \frac{t^2}{2m}$ (případ zobrazený na obrázku), tak jejich součet musí jenom pootočit vektor $\bar{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \bar{V}t$ ke kterému zatím je nutně přičíst $\bar{F}_{eFl \times v} \frac{t^2}{2m}$ a výsledný vektor \bar{S} zapíše se následujícím způsobem:

$$\bar{S} = \left(\bar{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \bar{V}t + \bar{F}_l \frac{t^2}{2m} + \bar{F}_{eFl} \frac{t^2}{2m} \right) \frac{|\bar{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \bar{V}t|}{|\bar{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \bar{V}t + \bar{F}_l \frac{t^2}{2m} + \bar{F}_{eFl} \frac{t^2}{2m}|} + \bar{F}_{eFl \times v} \frac{t^2}{2m} \quad (15)$$

Na sledujícím grafu jsou znázorněny trajektorie a celková rychlost kationtů argonu ve stejných podmínkách jako na obrázku 34 (počáteční rychlost $700 \left[\frac{m}{s} \right]$, $\bar{E} = 0$).



Mnohem větší rozdíl mezi upraveným a neupraveným algoritmy se projeví v případě pohybu po trajektorii velké křivosti. Tak například sledující obrázek porovnává trajektorie obou algoritmy v případě počáteční rychlosti rovné $30 \left[\frac{m}{s} \right]$. Je dobře vidět anomálně se zvětšující poloměry křivosti trajektorií nemedifikovaného postupu výpočtu, čemu odpovídá velký růst rychlosti. Tak po osmi stech iteracích (úsečkách \bar{S}) celková rychlost kationtů počítaná bez úprav vzrostla až na $201 \left[\frac{m}{s} \right]$. Na upraveném algoritmu hodnota celkové rychlosti zůstává pořád stejná. Nepatrný drift kationtů na modifikovaném algoritmu je způsoben nikoliv nepřesností algoritmu, ale nehomogenitou magnetického pole. Velikost vektoru magnetické indukce \bar{B} je trochu větší v blízkosti katodu (modrý válec) což zmenšuje poloměr křivosti trajektorie částice v této oblasti a ta už se nevrátí přesně na původní místo ale začne se pohybovat po cykloidě.



Stanovení času na každém úseku.

Existuje několik variant stanovení času pohybu kationtu na každé výpočtové úsečce a rozhodnutí mezi nimi musí být provedeno s ohlednutím na přesnost výpočtu a jeho rychlost. Nejjednodušším způsobem je položit čas t za konstantu a sestrojovat trajektorii která se bude skládat z pořadí rostoucích úseku \vec{S}_i , problém ale nastává v přesnosti výpočtu. Konečná rychlost nábojů sahá hodnot větších než $50\,000 \left[\frac{m}{s} \right]$, což je mnohonásobně víc než jeho počáteční rychlost (třeba $0,5 \text{ [m/s]}$). Vede to k tomu že velikost vektorů \vec{S}_i na konci trajektorie může být $100\,000$ krát větší než na její začátku a pro dosažení nějaké rozumné velikosti konečných úseček jejich počáteční velikost musí být hodně mala. Za následek dostáváme nepoměrně velký počet výpočtových vektorů \vec{S}_i na začátku trajektorie, což hodně zpomaluje výpočet a nepřináší velkou přesnost kvůli relativně obrovským posledním úsečkám.

Jedním z možných řešení je stanovení nějaké požadované délky vektorů \vec{S}_i . A následně vypočítávání času t na každé úsečce. Pokud ale rozebereme i ten jednodušší případ nevyžadující modifikaci algoritmu ($\vec{F}_{eF_l} > \vec{F}_l$) ve kterém vektor \vec{S}_i se spočte podle rovnici 14, tak dostáváme složkový zápis:

$$\begin{cases} S_x = V_x \cdot t + F_x \frac{t^2}{2m} \\ S_y = V_y \cdot t + F_y \frac{t^2}{2m} \\ S_z = V_z \cdot t + F_z \frac{t^2}{2m} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \left(V_x \cdot t + F_x \frac{t^2}{2m} \right)^2 + \left(V_y \cdot t + F_y \frac{t^2}{2m} \right)^2 + \left(V_z \cdot t + F_z \frac{t^2}{2m} \right)^2$$

Pro stanovení času t na každé úsečce je nutně hledat kořen polynomu čtvrtého stupně. Znamená to iterativní přibližný výpočet třeba Newtonovou metodou. Tenhle iterativní výpočet kořenu polynomu bude hodně prodlužovat celkový výpočetní čas, protože musí se dělat pro každý vektor \vec{S}_i . Naším cílem je navrhnout takový způsob určování času, při kterém doba pohybu kationtu na dané výpočtové úsečce bude se zmenšovat z rostoucí absolutní rychlosti a velikost jednotlivých úseček \vec{S}_i nebude se silně měnit v průběhu sestrojování trajektorie. Přičemž vzorek, určující čas, musí být co nejkratší, a hlavně nevyžadující iterativní výpočet.

Možným řešením je využití té vlastnosti, že přímkou vektoru \vec{S} a \vec{V} svírají velmi malý úhel a proto hlavní složkou vektoru \vec{S} je součet $\vec{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \vec{V}t$ a můžeme říct že $\vec{S} \cong \vec{F}_{ev} \frac{t^2}{2m} + \vec{V}t$. Je to vektorová rovnice a pokud \vec{F}_{ev} a \vec{V} svírají ostrý úhel (elektrické pole urychluje iont) tak: $|\vec{S}| = |\vec{V}t| + |F_{ev}| \frac{t^2}{2m}$. Diskriminantem této rovnice je $D = |\vec{V}|^2 + 4 \frac{|\vec{F}_{ev}| \cdot |\vec{S}|}{2m}$ a jediným kladným kořenem je:

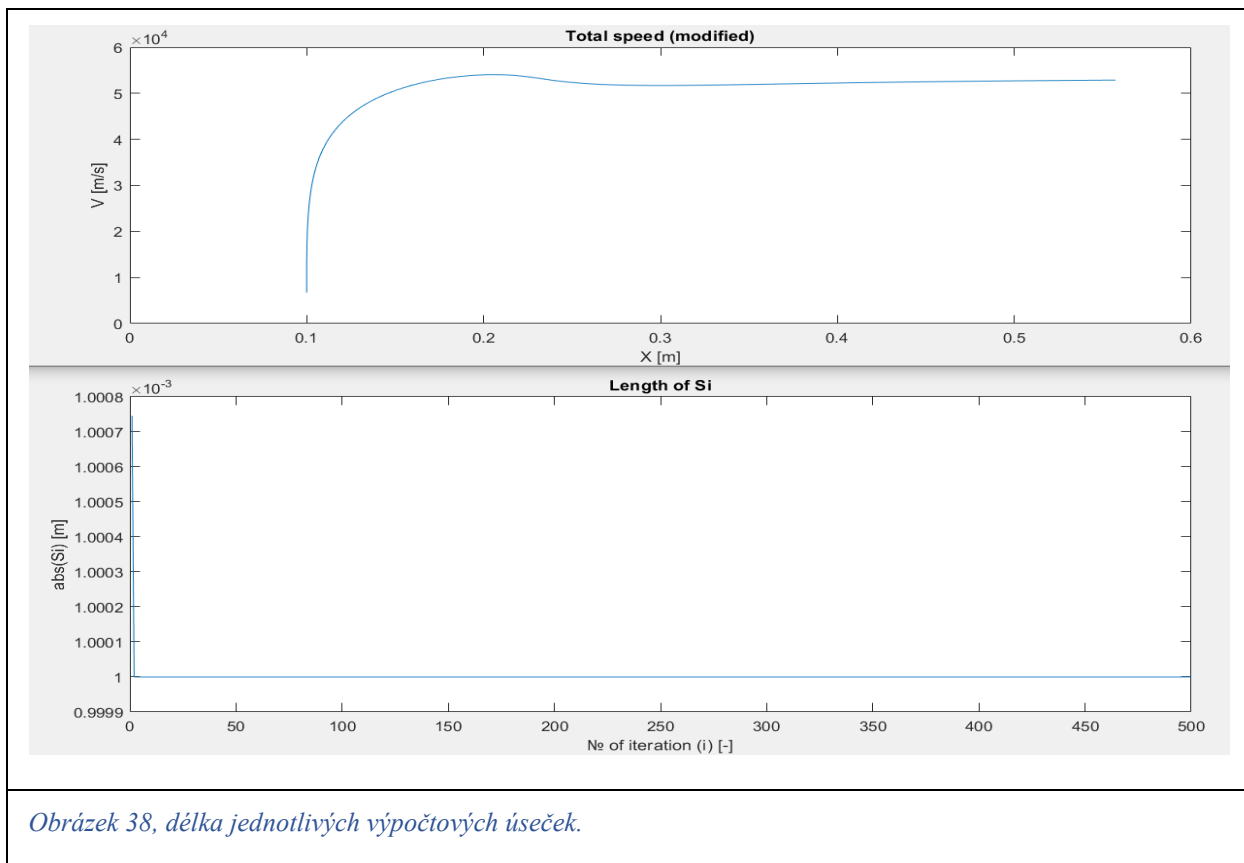
$$t = \frac{-|\vec{V}| + \sqrt{|\vec{V}|^2 + 2 \frac{|\vec{F}_{ev}| \cdot |\vec{S}|}{m}}}{|\vec{F}_{ev}|/m} \quad (16)$$

Pokud ale úhel je tupý (elektrické pole zpomaluje iont), pak $|\vec{S}| = |\vec{V}t| - |F_{ev}| \frac{t^2}{2m}$ a řešením je:

$$t = \frac{-|\vec{V}| + \sqrt{|\vec{V}|^2 - 2 \frac{|\vec{F}_{ev}| \cdot |\vec{S}|}{m}}}{-|\vec{F}_{ev}|/m} \quad (17)$$

Rozhodnutí mezi použitím vzorku 16 – 17 (určení úhlu) bude provedeno logickým operátorem. Vhodnost daného způsobu určování času můžeme ocenit z následujícího grafu (obr. 38), který vyjadřuje délku vektoru \vec{S}_i na každé výpočtové úsečce. Kationt pohybuje z počáteční rychlosti 1 [m/s] v elektrickém a magnetickém polích a jeho rychlost stoupa až na 53 [km/s]. Jak můžeme vidět délka úseček \vec{S}_i zůstává pořád stejná a odpovídá požadované hodnotě (v daném případě 1 [mm]) s výjimkou jen první iteraci, kde $|\vec{S}_1|$ je o jeden mikrometr větší. Je to bohatě postačující výsledek a konečný tvar výpočtového algoritmu s využitím vzorku 16 – 17 má kompromisní počet operací při dostatečně vysoké přesnosti.

Konečně dostáváme algoritmus který má zadaný počáteční bod \vec{C}_1 (souřadnice) a vektor počáteční rychlosti \vec{V}_{p1} . Z tohoto počítá čtyři veličiny: sílu \vec{F} působící na náboj, čas pohybu na dané úsečce t , vektor přemístění \vec{S}_1 a vektor konečné rychlosti \vec{V}_{kon1} . Pak souřadnice sledujícího bodu trajektorie se počítají jako $\vec{C}_2 = \vec{C}_1 + \vec{S}_1$, jeho počáteční rychlost je $\vec{V}_{p2} = \vec{V}_{kon1}$ a výpočet se zopakuje. Provádí se nějaký předem stanovený počet iterací (třeba 500) se kterých se pak sestrojí trajektorie kationtů.



Obrázek 38, délka jednotlivých výpočtových úseček.

Výsledný tvar trajektorie.

Na formu trajektorie iontu mají vliv geometrické parametry motoru, velikost intenzity elektrického pole a magnetické indukce a taky hmotnost a náboj pohybujícího se kationtu. Ukázaná níže trajektorie byla sestrojena pro kationt argonu prvního stupně ionizace (s nábojem $q = 1,60217662 \cdot 10^{-19}$ [C]). Geometrické parametry motoru patrné z obrázku 39. Náboj katody a anody (kondenzátoru) je $Q = 12,1 \cdot 10^{-9}$ [C]. Přibližnou hodnotu odpovídajícího napětí můžeme stanovit ze vzorku pro kapacitu cylindrického kondenzátoru:

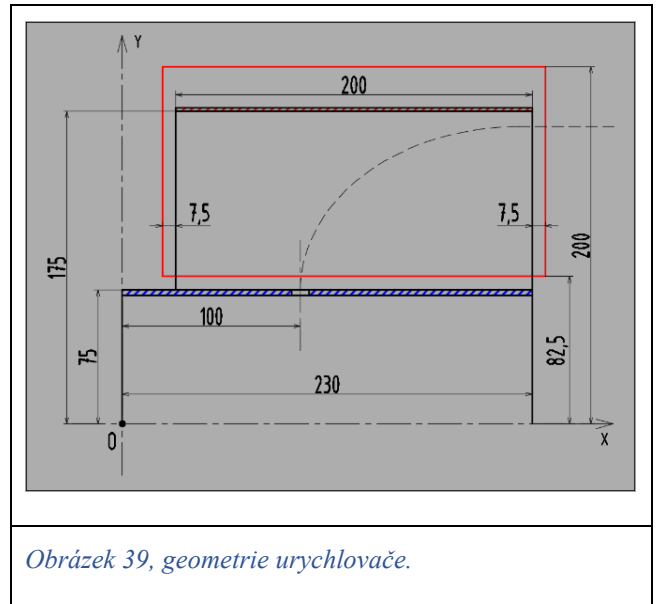
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{Q}{U} \implies U = \frac{2}{2} \frac{Q \ln(R_2/R_1)}{2\pi\epsilon_0 l} = \frac{2kQ \ln(R_2/R_1)}{l}$$

Kde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ a l je délka kondenzátoru (v daném případě využijeme střední hodnotu mezi délkami anodu a katodu, čili $l = \frac{0,23+0,2}{2} = 0,215$ [m]). Napětí pak bude se rovnat:

$$U = \frac{2 \cdot 8987551792 \cdot 12,1 \cdot 10^{-9} \cdot \ln(0,175/0,075)}{0,215} = 857,145$$
 [V]

Je to jenom orientační hodnota a při skutečném návrhu motoru dělat se bude samozřejmě opačně. Pro stanovenou hodnotu napětí spočtou se náboje ve válcích včetně jejich rozložení které už nebude bráno jako rovnoměrné. Takový výpočet ale je docela složitým a hodí se spíš pro reálné konstruování motoru, ne jeho technický návrh.

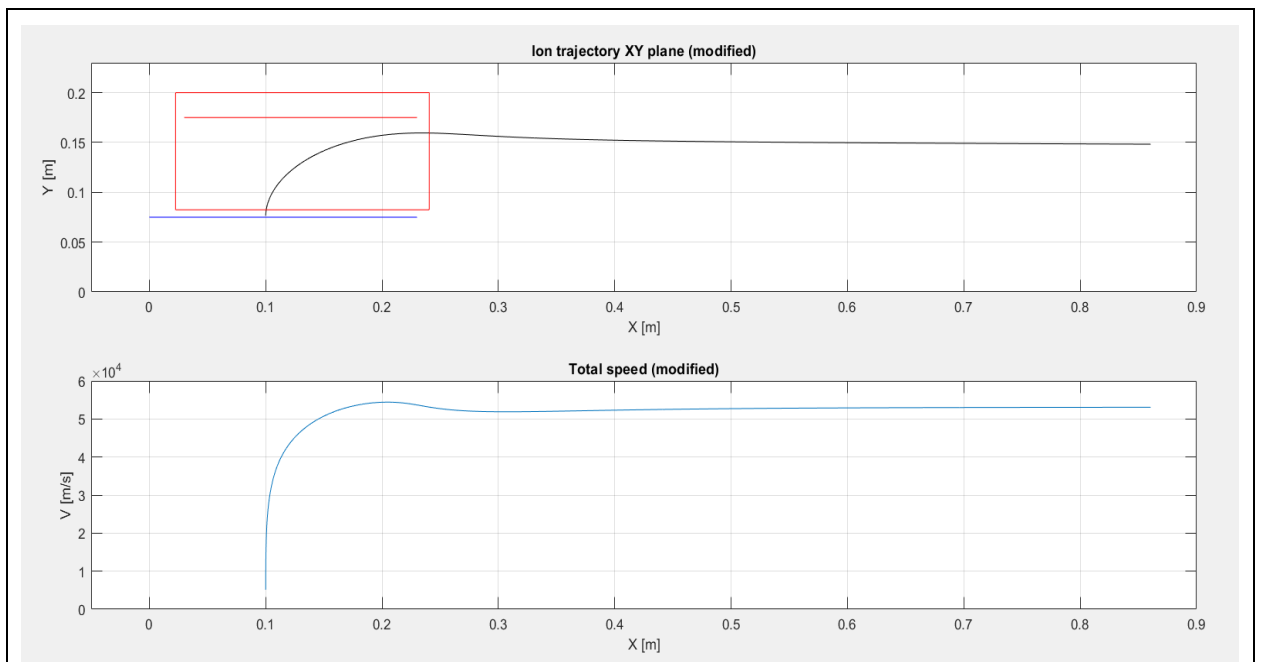
Posledním parametrem je proud v cívkách toroidního magnetického pole, tento proud má hodnotu $I = 21\,000\text{ [A]}$ a ihned můžeme vidět možné technologické obtížnosti. Rozdíl napětí v několik kilovolt nepředstavuje žádný problém, proud 21 [kA] ve vodiči ohraničeného průřezu vyžaduje použití supravodičů, přispívají k tomu i důvody zvýšení účinnosti. Tak například použita v 3D modelu motoru cívka má rozměry $15 \times 15\text{ [mm]}$ což dává $97,67 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$ a



Obrázek 39, geometrie urychlovače.

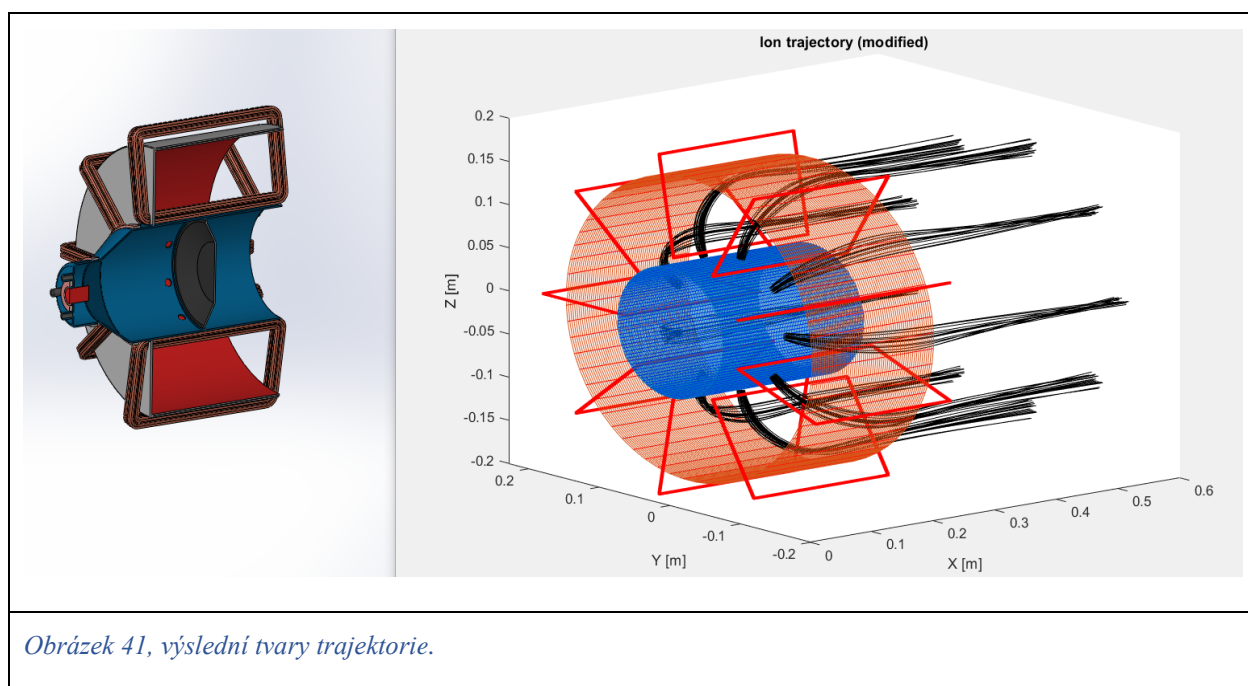
je to desetkrát víc než maximální dovolená hustota proudu v mědi. Zvýšení průřezu cívek má své omezení z těch důvodů že kationty potřebují dostatečně velké «okno» aby opustit prostor toroidu a nechytil při tom cívku.

Na obrázku 40 je znázorněná trajektorie iontu v rovině XY (osa X je hlavní osou motoru). Počátek dané trajektorie ($x \in [0,1; 0,23]$) připomíná cykloidu (viz kapitola «drift elektronu»). Po překročení x -ovou souřadnicí hodnoty $0,23\text{ [m]}$ nastává rychlý pokles velikosti intenzity elektrického pole \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} a vektor rychlosti částice \vec{V} už se málo mění.



Obrázek 40, trajektorie iontu v rovině XY .

Rychlost kationtů stoupla z počáteční hodnoty $1 [m/s]$ na $53\,076 [m/s]$ a její y-nová složka je $272,4 [m/s]$ což ukazuje na dobré nasměrování. Pracovní plyn vstupuje do mezi válcového prostoru urychlovače otvorem o průměru $10 [mm]$ tím pádem proudění částic z různými souřadnicí startovního bodu může se silně lišit. Z tohoto důvodu celkový proud ve výpočtovém modelu je představen 19 proudnicemi a každá z nich je počítaná zvlášť. Na obrázku 40 je znázorněná jenom jedna z nich (prostřední) která leží v rovině XY. Protože máme devět cívek a devět vstupních otvorů tak celkový obrázek bude představen devíti bandy v každé po 19 proudnic (obr. 41). Pro lepší představení na stejném obrázku je znázorněn i řez motorem.

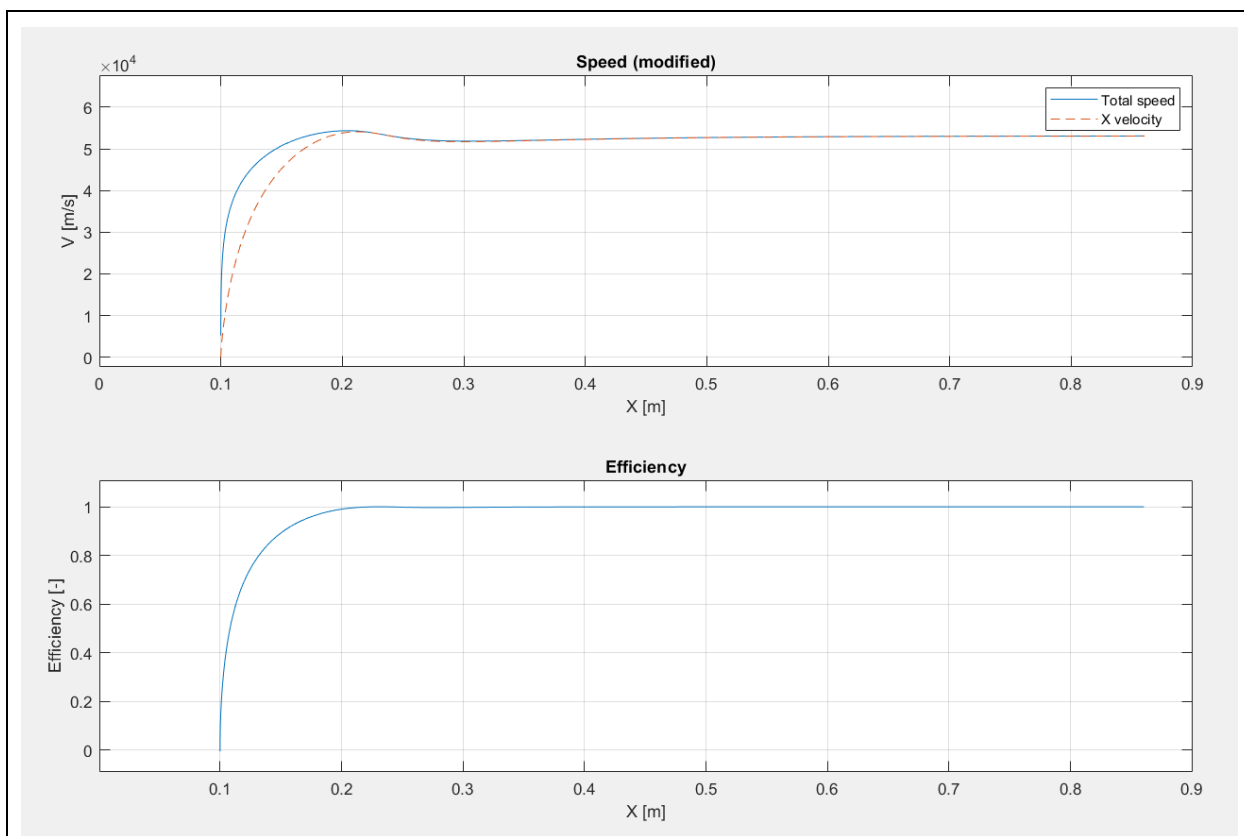


Obrázek 41, výslední tvary trajektorie.

Jak můžeme vidět z grafu absolutní rychlosti na obrázku 40 celková rychlost iontů se velmi málo mění ve vzdálenosti víc než $0,4 [m]$ po ose x. Tak při $x = 0,86 [m]$ rychlost částici je $53\,076 [m/s]$ a pokud bychom několikanásobně zvětšili počet iterací (vektorů \vec{S}_i) tak i pro $x = 4,06 [m]$ rychlost stoupne jenom na $53\,100 [m/s]$. Počítat trajektorii částic ve velké vzdálenosti od motoru je zbytečným hlavně z důvodu neutralizaci kationtů elektronovou tryskou.

Efektivní výtoková rychlost a účinnost nasměrování.

Po urychlení motorem kationt má nějaký vektor rychlosti \vec{V} , jenom jeho x-ová složka vytváří užitečný tah. Tím pádem poměr $\left(\frac{v_x}{|\vec{V}|}\right)^2$ vyjadřuje účinnost nasměrování částici a je jednou ze složek určující celkovou účinnost motoru. Protože máme 19 proudnic, tak musíme uvažovat střední hodnoty absolutní rychlosti a její x-ové složky. Na obrázku 42 jsou znázorněny grafy závislosti rychlosti a účinnosti na x-ové souřadnice.

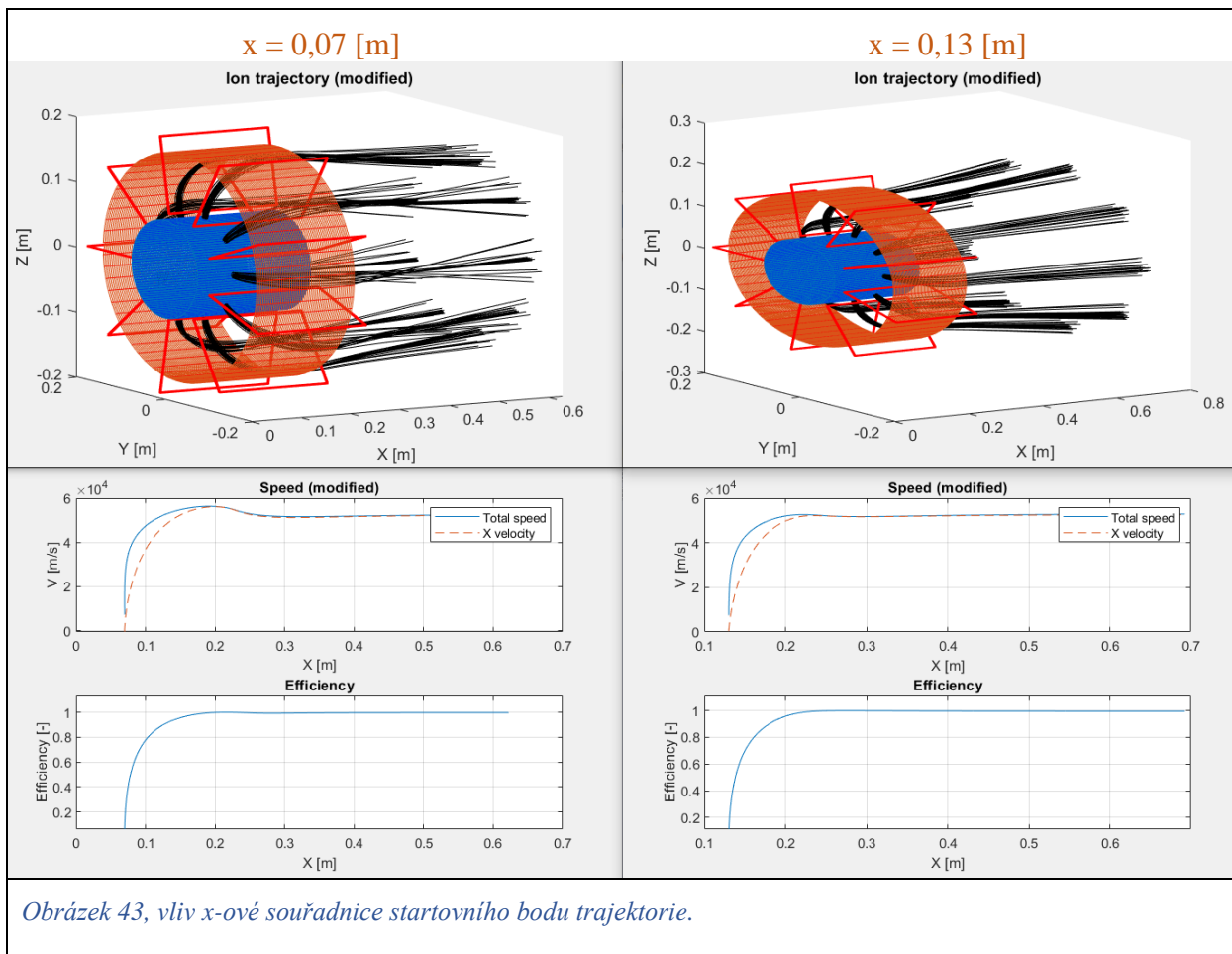


Obrázek 42, průběh rychlosti a účinnosti nasměrování.

Celková efektivita nasměrování proudu částic je více než 99 %. Střední výtokovou rychlost podél osy X můžeme brát jako efektivní výtokovou rychlost motoru v_{ef} a používat ji ve výpočtu tahu motoru: $T = \dot{m}v_{ef}$ — kde \dot{m} je hmotnostní průtok pracovní látky. V daném případě v_{ef} dosáhla hodnoty 53 060 [m/s].

Faktory ovlivňující tvar trajektorie.

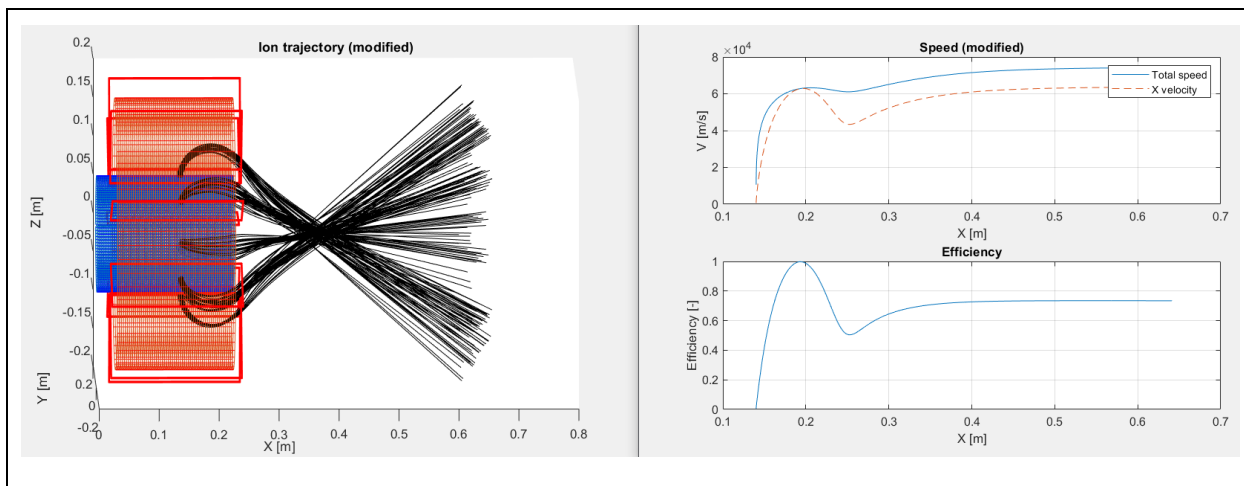
Nejdřív se soustředíme na vlivu počátečního bodu trajektorie. Optimální volba vstupních otvoru katodu ovlivňuje především směr a velikost absolutní rychlosti kationtů a tím pádem odehrává velkou roli v celkové optimalizaci motoru. Tak na obrázku 43 jsou znázorněny trajektorie, rychlosti a efektivnosti nasměrování částic pro startovní body $x = 0,07$ [m] a $x = 0,13$ [m]. V obou případech maximální rychlost (absolutní) se zmenšila — 52 380 [m/s] a 52 730 [m/s] respektive. Efektivita nasměrování pořád zůstává větší než 99 %. Jak vidíme existuje nějaká optimální poloha startovního bodu, avšak motor je na ní málo citlivý a dovoluje přemísťovat tuto polohu v rozmezích čtvrtiny délky urychlovače bez vážných změn účinnosti (v daném případě účinnost se zmenšila na 0,64 %). Jenom počáteční body $x = 0,045$ [m] a $x = 0,165$ [m] dávají účinnosti 88,98 % a 93,82 % respektive.



Mala citlivost motoru na polohu pracovního bodu dává možnosti zvětšení celkového průřezu kterým pracovní látka vstupuje do urychlovače, a to buď vytvářením několika řadu vstupních otvorů nebo naformováním těchto otvorů do tvaru elipsy s velkou poloosou rovnoběžnou hlavní ose motoru (osa X).

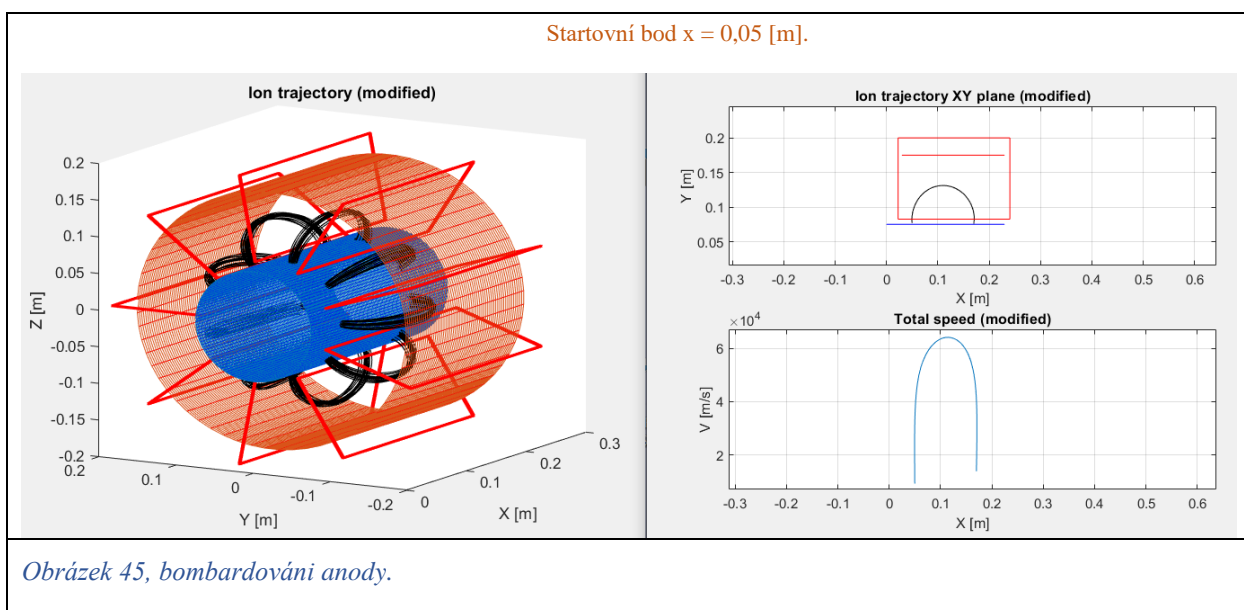
Vliv stupně ionizace.

Stupeň ionizace kationtu násobně mění poměr náboje částici k její hmotnosti a z rovnici (2) $\Rightarrow y = -\frac{mE}{qB^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2}$ plyne že více nabitý kationt má menší lineární rozměry dráhy (y_{max} — viz kapitola «drift elektronu»). Tak na sledujícím obrázku je znázorněná trajektorie iontů argonu s druhým stupněm ionizace a startovním bodem $x = 0,14 [m]$. Můžeme vidět mnohem menší rozměry cykloidy, což není překvapující. Co ale vypadá anomálně je pozoruhodný růst rychlosti v horní úvratě cykloidy ($63\,260 [m/s]$) a celkové výtokové rychlosti ($74\,270 [m/s]$ absolutní a $63\,650 [m/s]$ x-ová). Je to zapříčiněno nehomogenitou elektrického pole, v důsledku čeho závěry kapitoly «drift elektronu» v dané situaci neplatí nebo platí neúplně. Tak například lineární rozměry dráhy (amplituda kolísání) se opravdu zmenšily skoro přesně dvakrát.



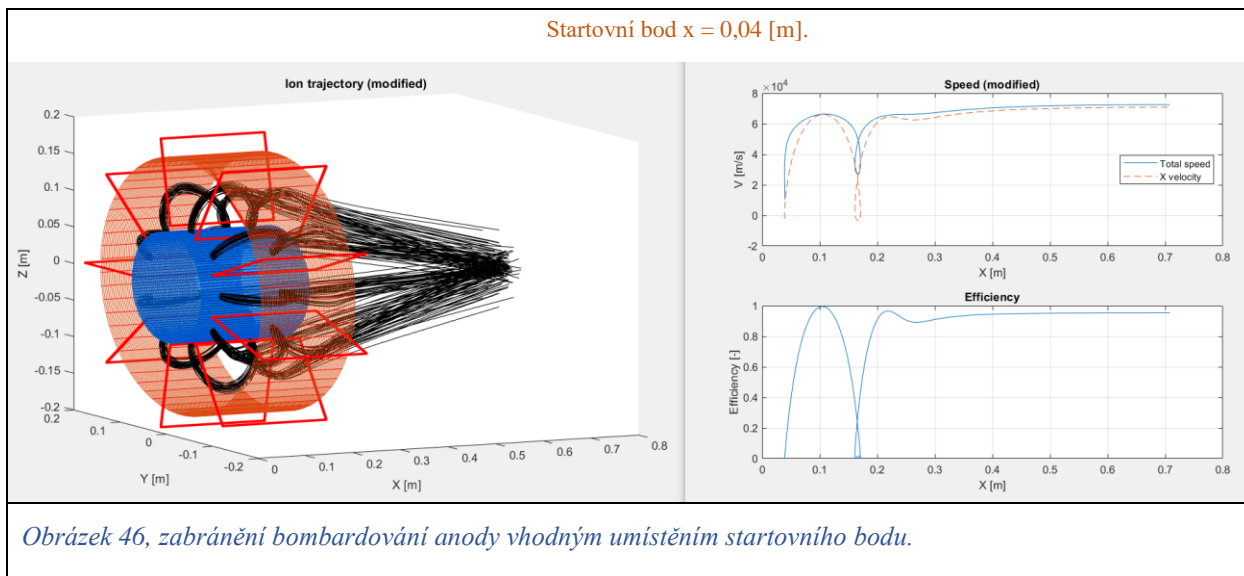
Obrázek 44, trajektorie iontů s druhým stupněm ionizace.

Nehomogenita elektrického pole může stát příčinou i některých technologických problému. Tak například rychlost částici která se vrátí na původní vzdálenost od anody už nemusí být nulová nebo rovnat se počáteční rychlosti. Situace je znázorněná na obrázku 45 kde kationty po vracení na původní vzdálenost od osy X mají rychlost $13\,940\text{ [m/s]}$.



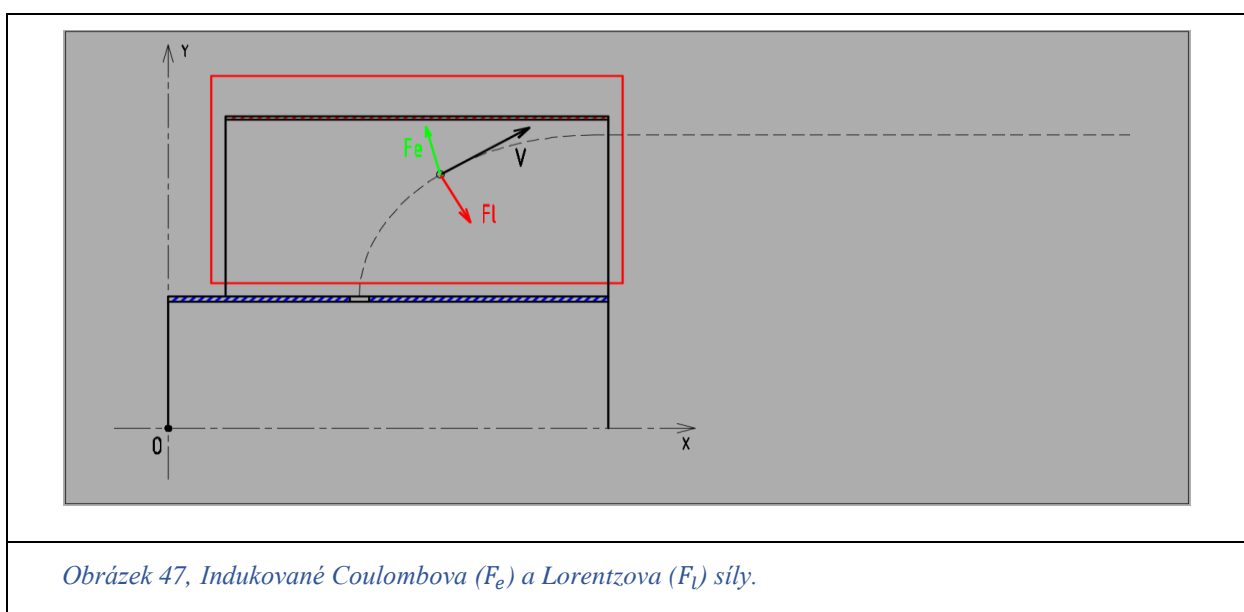
Obrázek 45, bombardování anody.

Za pracovních podmínek vakua podobné bombardování způsobí silný ohřev anody anebo dokonce její zničení. Takováhle situace nenastává ale vždycky, potenciál ve startovním bodě musí být větším než v první dolní úvratí cykloidy (místě bombardování). Na obrázku 46 je vidět, že pokud startovní bod přemístíme na 10 [mm] doleva, kationty proltnou urychlovačem aniž by chytnuly katodu nebo anodu. Na takováhle jevy musí se dávat pozor při návrhu. Reálný motor ale už má nějakou hustotu proudu částic a začne se v určité míře projevovat jejich vzájemná interakce. Proto než se zabývávat optimalizací motoru je nutně spočítat trajektorii kationtů s uvažováním jejich vzájemného spolupůsobení, což je předmětem následující kapitoly.



Stanovení trajektorií kationtů s uvažováním jejich vzájemného spolupůsobení.

Čím větší je hustota proudu částic v urychlovači tím více se začíná projevovat jejich interakce. Kromě vzájemného odpuzování kladně nabitých iontů existuje taky magnetické pole vyvolané proudem těchto iontů. Tim pádem vznikají dodatečné Coulombova a Lorentzova síly které působí na každou částici proudu. Přičemž účinky těchto sil mají opačný charakter. Tak Coulombova síla se snaží proud rozšířit (odpuzování stejně nabitých částic) kdyžto Lorentzova síla naopak jeho zužuje (přitahování dvou vodičů se stejným směrem proudu). Situace je znázorněná na obrázku 47.

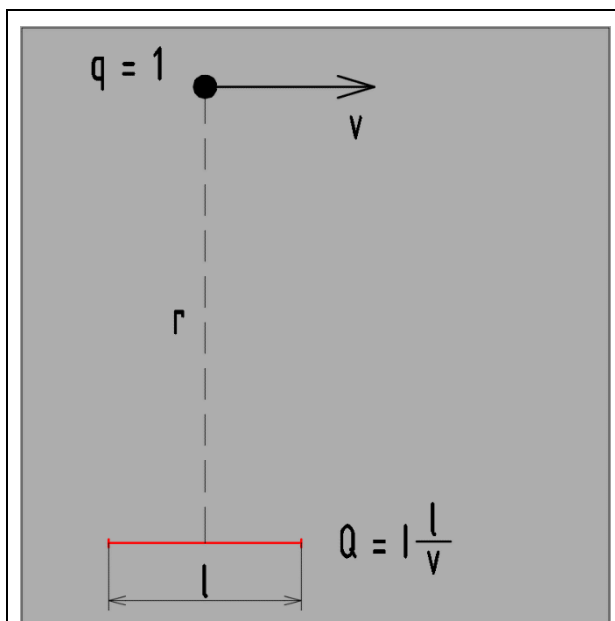


Posouzení o poměru těchto sil můžeme provést pomocí následujícího výpočtu. Nechť máme úsečku v prostoru délky l . Podél této úsečky běží proud částic I a každá z nich má nějakou rychlost v . Tim pádem náboj úsečky se spočte jako $Q = I \frac{l}{v}$. Ve vzdálenosti r mnohem větší než l umístíme těleso s nábojem 1 a rychlosti v (obr. 48). Intenzity elektrického a magnetického pole ve zkoumaném bodě se spočtou jako:

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{kIl}{r^2v}$$

$$B = \frac{\mu Il}{4\pi r^2}$$

$$\frac{E}{B} = \frac{kIl}{r^2v} \cdot \frac{4\pi r^2}{\mu Il} = \frac{4\pi k}{\mu v} = \frac{c^2}{v}$$



Obrázek 48, porovnání Coulombové a Lorentzové sil.

Konstanta c je rychlost světla. Můžeme vidět že pro běžné rychlosti v motoru nepřesahující 100 km/s elektrické pole má mnohonásobně větší hodnotu. Tak pro rychlosti iontů 30 km/s indukované elektrické pole má $3 \cdot 10^{12}$ krát větší intenzitu. Mnohem lepší představení ale udává poměr Coulombové a Lorentzové sil protože srovnává veličiny se stejnými jednotkami a je bezrozměrným. Coulombovou sílu můžeme zapsat jako: $F_e = qE$ a Lorentzovou — $F_l = qvB$. Pak jejich poměr — $\frac{F_e}{F_l} = \frac{qE}{qvB} = \frac{E}{vB} = \frac{c^2}{v^2}$. Čili pro stejnou rychlost 30 km/s Coulombova síla je 10^8 krát větší.

Z výše uvedených úvah plyne že reálný motor bude náchylným k rozšiřování proudu částic a pro jejich nasměrování v neměnicím své geometrické parametry urychlovači je nutně aplikovat silnější magnetické pole, čili větší proud v cívkách. Znamená to zvětšení i bez toho velkého proudu v cívkách generujících toroidní magnetické pole. Z technologického hlediska takový proud je dosažitelný jenom za požití supravodičů, a to nejenom kvůli velkým tepelným ztrátám, ale taky z důvodu omezených geometrických rozměrů cívek. Musí tady být řečeno, že i použití supravodičů má své technologické limity, a to jsou například omezení maximální hustoty proudu $j_{max} \left[\frac{A}{cm^2} \right]$ a maximální intenzity magnetického pole $B_{max} [T]$ po překročení kterých supravodivé vlastnosti se ničí.

Korekce elektrického pole.

Vypočet trajektorie částic s uvažováním jejich vzájemného spolupůsobení probíhá iterativním způsobem. První iterace jevív sebou trajektorii iontů bez uvažování jejich vzájemné interakce (předchozí kapitola). Pro následující iteraci je nutně stanovit hodnotu indukovaného elektrického a magnetického pole v každém bodě těchto trajektorií. Vypočet intenzity indukovaného elektrického pole probíhá tak že každému bodu už spočtené trajektorie se přiřadí určitý náboj podle vzorku:

$$Q_i = \frac{\dot{m}q}{171m} \cdot \frac{S}{v_i} \quad \dot{m} \quad \text{— hmotnostní průtok pracovní látky.}$$

$$\frac{\dot{m}}{171} \quad \text{— hmotnostní průtok jednou proudnicí.}$$

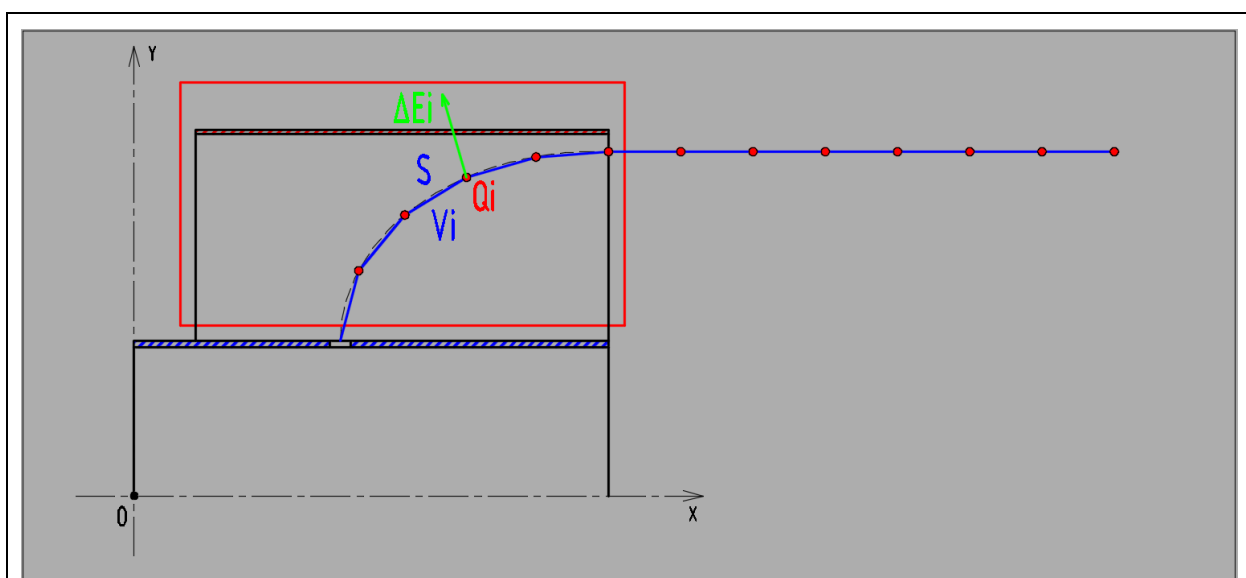
$$q \quad \text{— náboj kationtů.}$$

$$m \quad \text{— hmotnost kationtů.}$$

$$S \quad \text{— vzdálenost mezi sousedními body.}$$

$$v_i \quad \text{— rychlost v daném bodě.}$$

Vyraz $\frac{\dot{m}q}{171m}$ jeví sebou proud v ampérech a poměr S/v_i — čas v sekundách. Náboj každé úsečky je soustředěn na její konci (viz obr. 49). Celkový proud motoru tvoří 171 výpočtových proudnic a pokud každá se skládá z 1000 bodu, tak dostáváme tím pádem 171 000 nábojů Q_i .



Obrázek 49, indukovaný vektor elektrického pole ΔE_i .

Každý z těchto bodů Q_i působí na všechny ostatní. Tím pádem v každém bodě C trajektorie se souřadnici C_x, C_y, C_z můžeme spočítat intenzitu indukovaného elektrického pole podle vzorku

$$(8) \Rightarrow |\Delta \bar{E}_{ci}| = \frac{kQ_i}{(C_x - Q_{ix})^2 + (C_y - Q_{iy})^2 + (C_z - Q_{iz})^2}. \text{ Jeho složky se pak zapíšou následovně:}$$

$$\Delta E_{cxi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_x \quad \cos \alpha_x = \frac{C_x - Q_{ix}}{\sqrt{(C_x - Q_{ix})^2 + (C_y - Q_{iy})^2 + (C_z - Q_{iz})^2}}$$

$$\Delta E_{cyi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_y \quad \cos \alpha_y = \frac{C_y - Q_{iy}}{\sqrt{(C_x - Q_{ix})^2 + (C_y - Q_{iy})^2 + (C_z - Q_{iz})^2}}$$

$$\Delta E_{czi} = |\bar{E}_{ci}| \cos \alpha_z \quad \cos \alpha_z = \frac{C_z - Q_{iz}}{\sqrt{(C_x - Q_{ix})^2 + (C_y - Q_{iy})^2 + (C_z - Q_{iz})^2}}$$

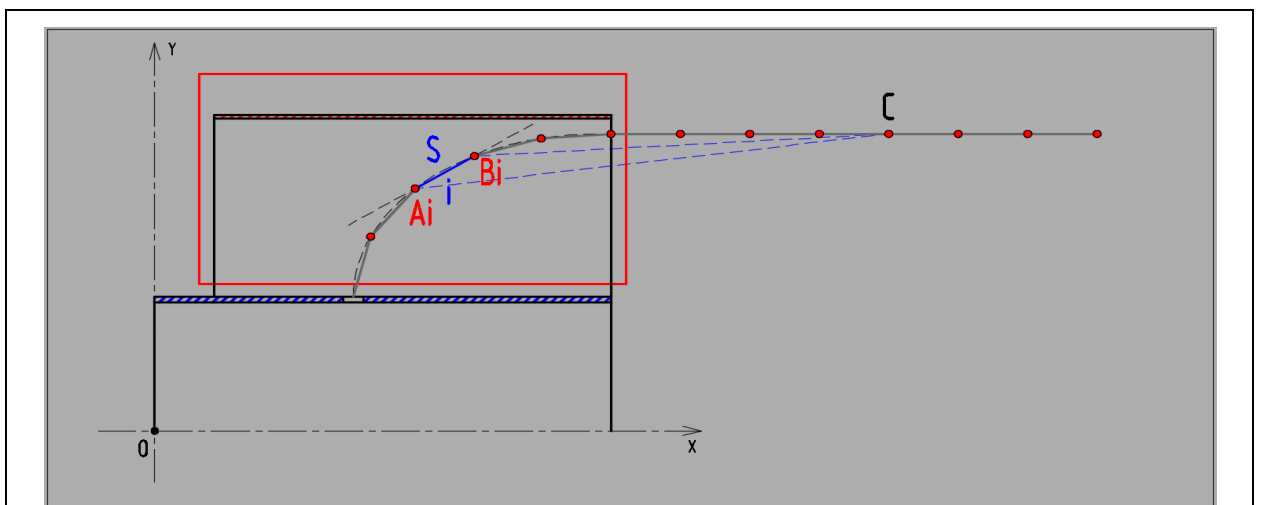
Pak výsledná intenzita indukovaného elektrického pole v bodě C je:

$$\Delta \bar{E}_c = \sum_1^N \Delta \bar{E}_{ci} \text{ kde } N \text{ je celkový počet nábojů } Q_i, \text{ v daném případě } 171000.$$

Výsledkem tohoto výpočtu je soubor (matice) která každému bodu už vypočtené trajektorie (předchozí iterace) přiřazuje vektor indukovaného elektrického pole. Tím pádem pokud máme 1000 bodů v jedné proudnici, tak dostáváme 19 000 odlišných bodů C (počítají se jenom 19 proudnic, ostatní se okopírují) a výsledkem výpočtu je matice umístující 19 000 vektorů $\Delta \bar{E}$.

Korekce magnetického pole.

Korekce magnetického pole probíhá podobným způsobem. Trajektorie předchozí iterace se rozdělí na elementární proudy. Každý z nich má hodnotu $I = \frac{mq}{171m}$. Pak každá úsečka i délky S má počáteční bod A_i a konečný B_i (viz obr. 50).



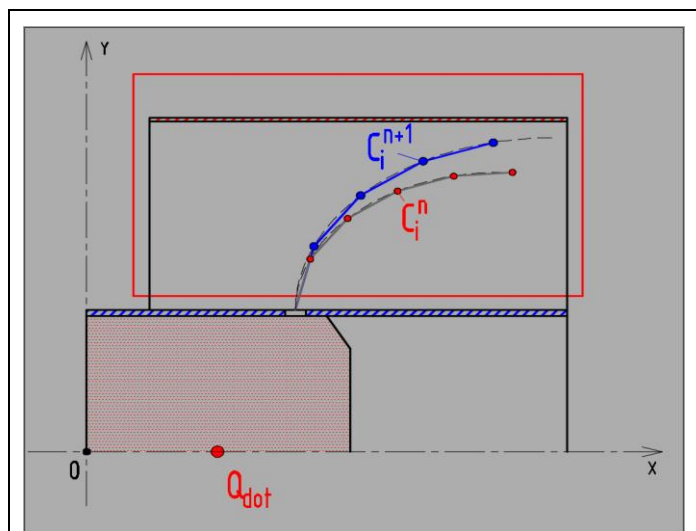
Obrázek 50, úsečka i délky S a její vliv na bod C trajektorie.

Intenzita indukovaného magnetického pole ΔB_{ci} kterou generuje úsečka i v bodě C se určí pomocí už odvozeného vzorku (12) — $\Delta B_{ci} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$ kde $\cos \alpha_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$, $\cos \alpha_2 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|}$, vzdálenost $b = |\overline{AC}| \cdot \sin \alpha_1 = |\overline{AC}| \cdot \sqrt{1 - (\cos \alpha_1)^2}$. Pokud bod C je totožným s bodem A_i nebo B_i pak $\Delta B_{ci} = 0$. Složky vektoru ΔB_{ci} se stanoví pomocí jednotkového vektoru $\Delta \overline{B}_{1ci} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$; $\Delta \overline{B}_{ci} = \Delta B_{ci} \cdot \Delta \overline{B}_{1ci}$. Výsledný vektor ΔB_c je součtem všech jednotlivých $\Delta \overline{B}_{ci} \implies \Delta \overline{B}_c = \sum_1^N \Delta \overline{B}_{ci}$. N je celkový počet všech úseček, tak například 1000 bodu jedné proudnice generují 999 úseček a pro 171 proudnici dostáváme $171 \cdot 999 = 170829$ úseček.

Výsledkem výpočtu je taky matice která každému bodu už vypočtené trajektorie přiřazuje vektor indukovaného magnetického pole. A pokud máme 1000 bodu v jedné proudnici, tak dostáváme 19 000 odlišných bodu C a tím pádem i 19 000 vektorů $\Delta \overline{B}$.

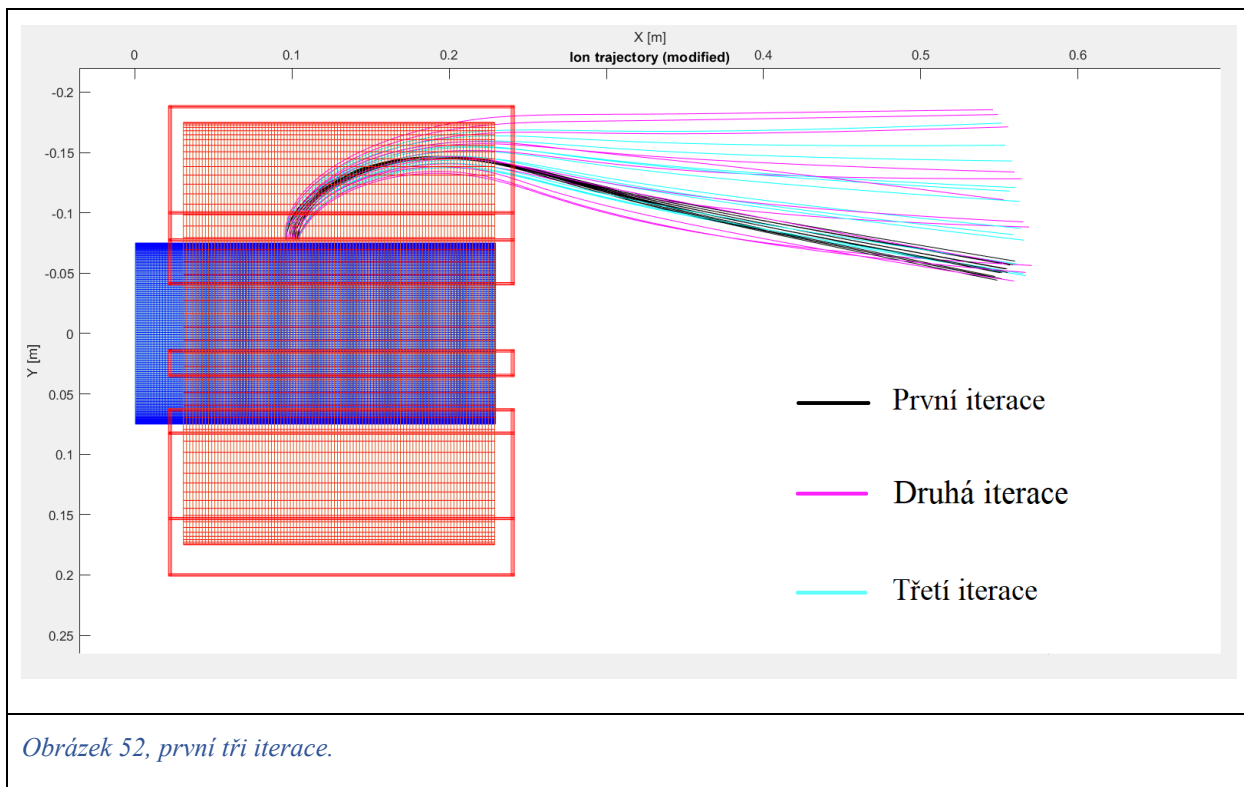
Princip sestavení nové iterace.

Při sestavování nové iterace ($n+1$) jsou využívány předem vypočtené databaze vektoru intenzity indukovaného elektrického a magnetického polí (n -ta iterace). Proces probíhá následujícím způsobem: v nějakém bodě C_i^{n+1} nejdřív se určí vektor intenzity elektrického pole \overline{E} a magnetického pole \overline{B} které vytváří samotný motor, zatím k těmto vektorům se přičtou $\Delta \overline{E}_i^n$ a $\Delta \overline{B}_i^n$ které vyjadřují stav indukovaného pole ve stejném bodě i ale předchozí iterace n . Naposled elektrické pole je ještě zkorigováno vektorem \overline{E}_{dot} který vyjadřuje intenzitu elektrického pole náboje Q_{dot} . Tento náboj je umístěn uprostřed ionizátoru a kompenzuje vliv prostorového náboje u výstupu z ionizátoru (obr. 51). Jeho velikost je odhadnuta tak aby kompenzoval vektor



Obrázek 51, předchozí a následná iteraci (trajektorii).

$\Delta \overline{E}_i^n$ v blízkosti vstupního otvoru, jinak kationty budou proudit zpátky do prostoru ionizátoru, což neodpovídá fyzikální skutečnosti. Podrobnější vysvětlení zavadení Q_{dot} je probráno v kapitole «Specifický impulz a hmotnostní průtok — space charge limit». Takhle zkorigované elektromagnetické pole je použito pro stanovení sledujícího bodu C_{i+1}^{n+1} a proces se opakuje.

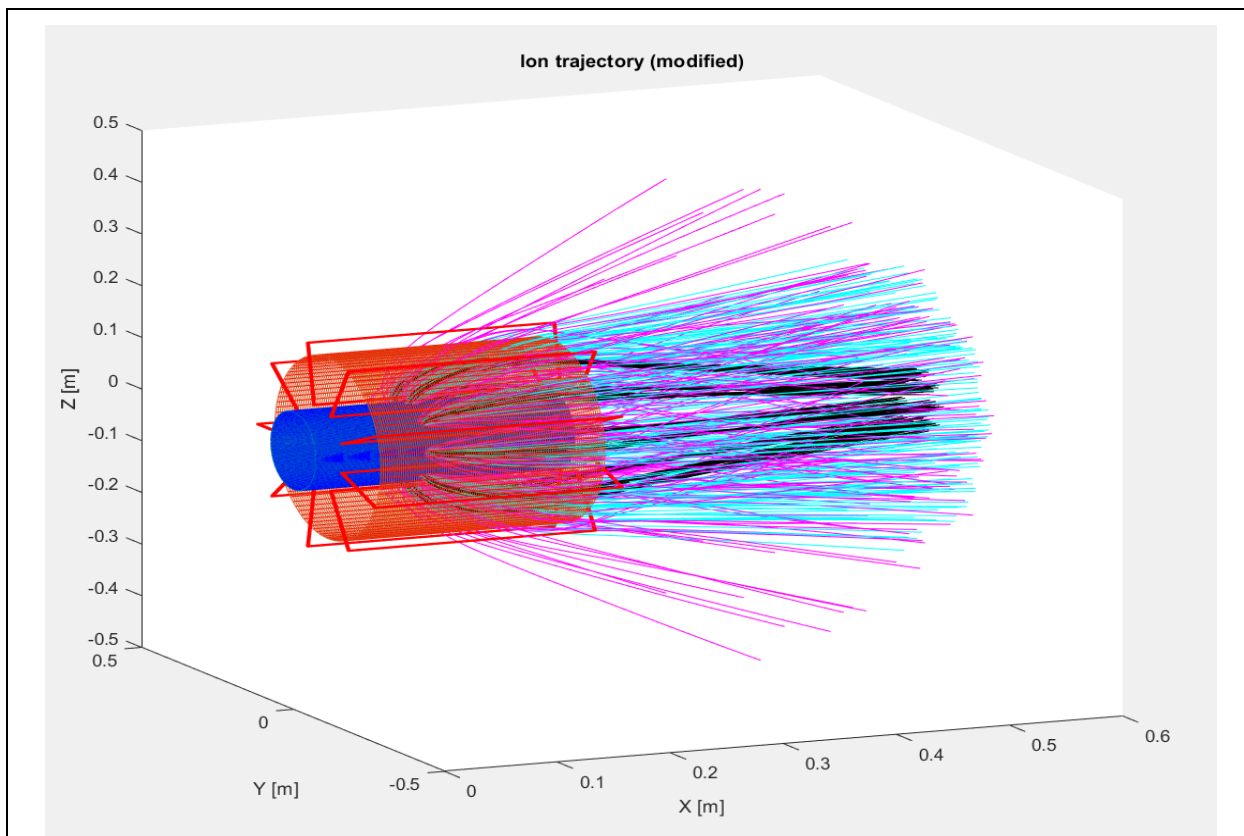


Obrázek 52, první tři iterace.

Charakter konvergence použité metody můžeme posoudit z průběhu třech iterací, představených na výše uvedeném obrázku. Tak první z nich znázorňuje trajektorii sestrojenou bez uvažování vzájemné interakce kationtů a proto je nejužší. Fialové proudnice odpovídají druhé iteraci a můžeme pozorovat velké rozšíření proudu v důsledku vzájemného odpuzování částic které v první iteraci jsou velmi blízko sobě. Třetí iterace už se málo liší od druhé a leží mezi první a druhou. Je to z toho důvodu že proud druhé iterace je velmi široký a vzájemně odpuzování jeho částic je slabší. Celkem pro sestrojení konečného tvaru trajektorií s dostatečnou přesností jsou pět iterací postačující.

Z průběhu proudnic představených na obrázku 52 je vidět splnění předpokladu o náchylnosti motoru k rozšiřování proudu částic s rostoucím hmotnostním průtokem. Tak představené tři iterace byly sestrojené pro průtok $\dot{m} = 0,0005 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$ což orientačně odpovídá tahu $30 \mu\text{N}$. Je to velmi malá hodnota ale i při tak malém průtoku jeho další zvyšování vyžaduje aplikaci mnohem silnějšího magnetického pole.

Tak například pět krát větší hmotnostní průtok už zapříčiní nepřijatelné rozšíření proudu a bombardování katody částicemi nabitého plynu (viz obr. 53). V provozu by takováhle situace vedla k destrukci motoru kvůli nadměrnému ohřevu katody. Zhoršuje se taky i efektivita nasměrování. Cílem následující kapitoly je optimalizace motoru a stanovení takových pracovních podmínek při kterých by se dalo dosáhnout tahu o velikosti alespoň několika $m\text{N}$.



Obrázek 53, Nadměrné rozšíření proudu při $\dot{m} = 0,0025 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$.

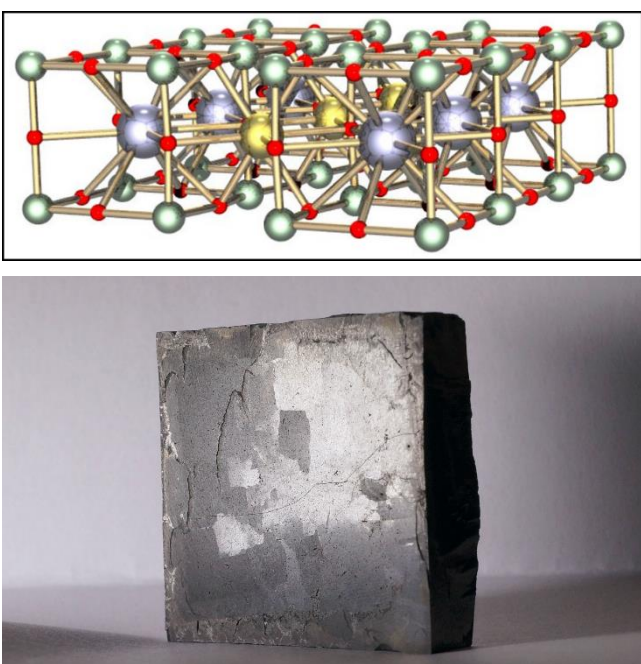
Optimalizace motoru.

Odladění motoru a jeho optimalizaci je nutno provádět při jeho konkrétním návrhu. Vyžaduje to docela přesnou simulaci, která už nepočítá rozložení nábojů katody a anody za homogenní. Stejně jako i náboj plynu v ionizátoru není už představen bodovým nábojem Q_{dot} ale předem vypočteným rozložením jednotlivých nábojů v prostoru ionizátoru. Všechny upomenuté rozložení nábojů přitom nejsou konstantní ale jsou ovlivněni proudem iontů v motoru, a proto musí se přepočítávat po každé iteraci. Takovýhle výpočet ale už šáha za meze představené diplomové práce a musí být podporován experimentem.

Optimalizace motoru provedená v dané kapitole jeví sebou přibližný výpočet jeho charakteristik za účelem následného jejich srovnání s už existujícími varianty iontových pohonu. Hlavními proměnnými v daném případě jsou druh pracovní látky a stupeň její ionizace, velikost proudu v cívkách, velikost rozdílu potenciálu katody a anody a v neposlední míře i souřadnice startovního bodu trajektorie (vstupní otvor 5 obr. 29).

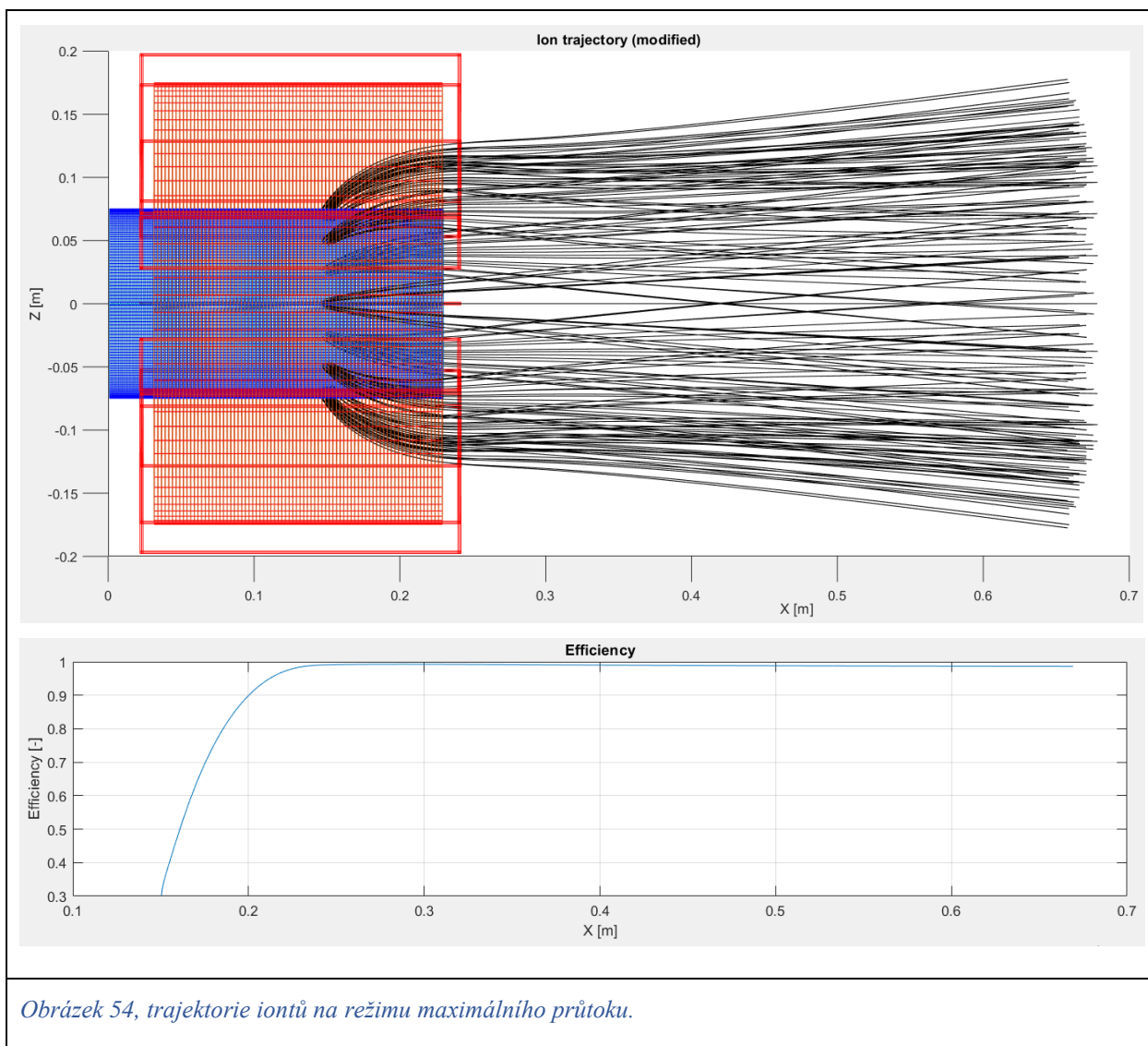
Jak už bylo uvedeno v předchozí kapitole zvětšení hmotnostního průtoku způsobuje rozšíření proudu částic a vyžaduje určité zvětšení intenzity magnetického pole. Situaci da se ovládat třemi způsoby. První a nejúčinnější je zvětšení proudu v cívkách toroidního magnetického pole, což zvyšuje jeho intenzitu. Druhý způsob spočívá ve zvětšení stupně ionizace pracovní látky, což zmenší amplitudu kolísání její cykloidy ($y_{max} = 2 \frac{mE}{qB^2}$ — závěr kapitoly drift elektronu). Třetí způsob je nejmíň účinným a jeví sebou zvětšení x-ové souřadnice startovního bodu trajektorie kationtů. Při přemístění startovního bodu blíže ke konci motoru dá se dosáhnout toho že první maximum cykloidy se dostane mimo meze urychlovače. Sníží se samozřejmě účinnost nasměrování.

Důležitým omezením jsou charakteristiky vybraného supravodičů. Protože motor je navržen na Ar a je požadován supravodič druhého druhu, v daném konceptu je použit vysokoteplotní supravodič YBCO s chemickou formulí $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. Jeho vlastnosti jsou popsány v tabulce 3. V daném případě hlavním omezujícím faktorem je kritická intenzita magnetického pole. Po její překročení ničí se supravodivé vlastnosti materiálu.

	Kritická teplota T_k	93 [K]
	Kritická intenzita magnetického pole B_k	5,7 [T]
	Kritická hustota proudu J	$7 \cdot 10^6 \left[\frac{A}{cm^2} \right]$
	Molární hmotnost.	666,19 $\left[\frac{g}{mol} \right]$
	Hustota.	6,3 $\left[\frac{g}{cm^3} \right]$
	Teplota tání	> 1000 [°C]

Tabulka 3, vlastnosti YBCO.

V prvním přiblížení navýšíme proud v cívkách tak aby magnetické pole přiblížilo se maximální dovolené hodnotě 5,7 [T] a nastavíme co největší hmotnostní průtok, při kterém ještě nedochází k bombardování katody ionty pracovního plynu. Výsledné trajektorie jsou znázorněny na obrázku 54.



Jak můžeme vidět efektivita nasměrování zůstává pořád na vysoké úrovni (98,9 %), avšak výtoková rychlost pracovní látky dosahá vůbec nepraktické hodnoty — 1493 km/s. Celkem parametry motoru na tomto režimu jsou shrnuty v následující tabulce.

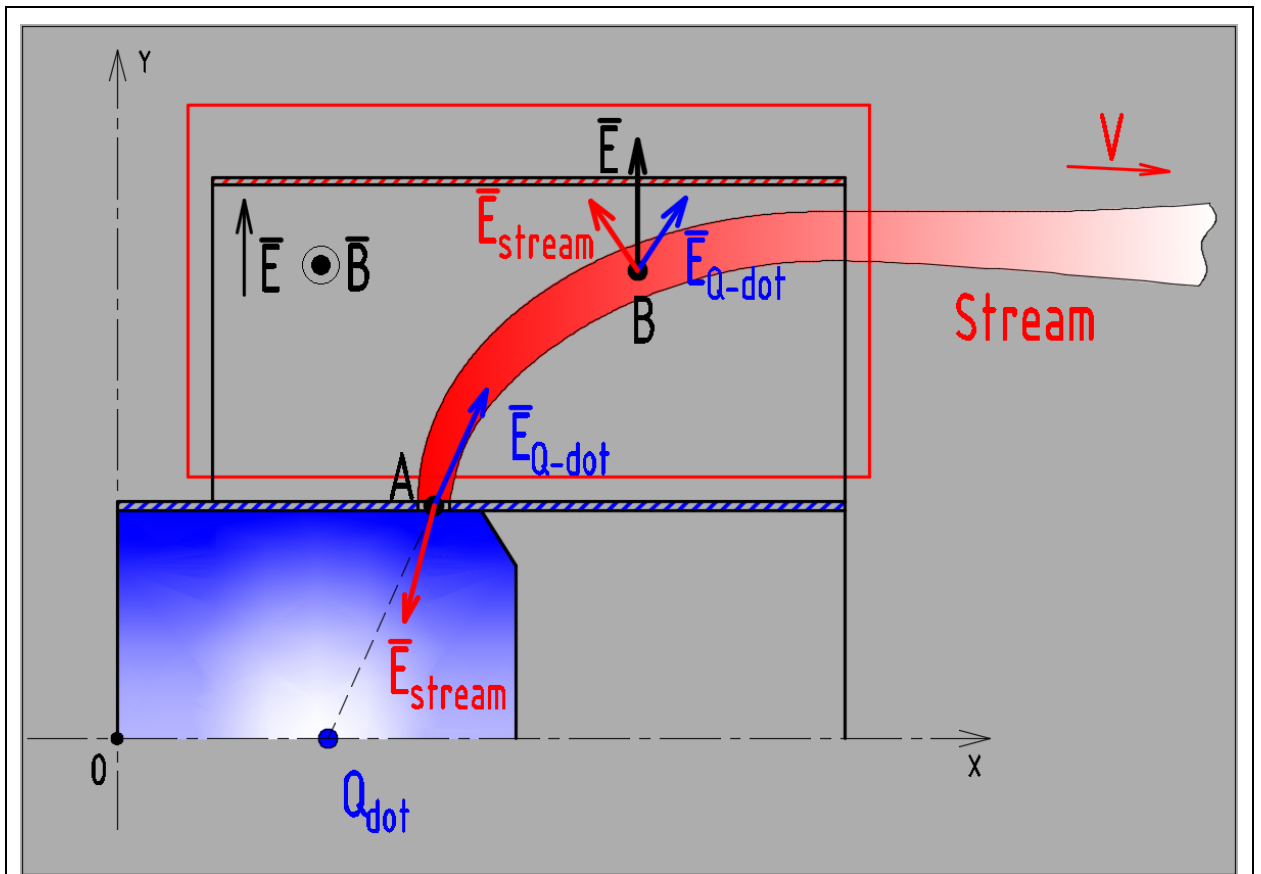
Tah	0,5056 N	
Výkon (bez strat na ionizaci)	377,82 kW	
I_{sp}	1493 km/s	
Proud v cívkách	369,6 kA	
Hmotnostní průtok	$3,42144 \cdot 10^{-7} \text{ kg/s}$	

Tabulka 4, charakteristiky motoru na režimu maximálního průtoku.

Intenzita magnetického pole v prostoru urychlovače stanoví při tom 5,635 T a napětí mezi válci kondenzátoru dosahuje 72.9 kV což při vzdálenosti mezi nimi 100 mm je ještě přípustná hodnota. Avšak v reálném provozu tak velké napětí vyžaduje robustní vedení a zvyšuje pravděpodobnost zkratu.

Specifický impulz a hmotnostní průtok — space charge limit.

Existuje příčina tak velké výtokové rychlosti motoru na režimu maximálního hmotnostního průtoku. Podstata spočívá v tom že daný motor urychluje proud kladně nabitých iontů, není celého plazmatu, což znamená že ve svém chování bude se podobat obyčejnému iontovému motoru a začne se projevovat efekt známý jako «space charge limit». Pro detailnější rozbor tohoto jevu a jeho pochopení využijeme následující obrázek.



Obrázek 55, space charge limit.

Bod A na obrázku reprezentuje kationty vstupující do urychlovače a můžeme vidět že výsledná intenzita elektrického pole v tomto bodě jeví sebou součet vlivu nabitého plynu ionizátoru ($\vec{E}_{Q\text{-dot}}$) a proudu urychlovaných iontů (\vec{E}_{stream}). Přičemž náboj Q_{dot} musí být dostatečně velkým aby kompenzoval vliv \vec{E}_{stream} . Čili při nějak stanoveném Q_{dot} a postupně se

zvyšujícím hmotnostním průtoku nastane moment kdy brzdicí vliv \bar{E}_{stream} stane dominujícím a celkový průtok už se nebude dal zvyšovat. Jeho další zvyšování da se provést pomoci zvýšení náboje plynu v ionizátoru což ale přivede taky ke zvýšení potenciálu částic vstupujících do urychlovače (potenciálu vůči Q_{dot}). Ve výsledku to znamená zvýšení výtokové rychlosti iontů. Jiným způsobem je zvětšení intenzity elektrického pole urychlovače (\bar{E}), což ale zase přivede k růstu celkové rychlosti (větší práce vykonaná elektrickým polem kondenzátoru), právě toto zvětšení rychlosti proudění zapříčiní zmenšení celkového náboje proudu v urychlovači a tím pádem i zmenšení \bar{E}_{stream} , čili zvětšení maximálního možného průtoku. Podobné věci se projevují i v klasickém iontovém motoru, kde při stanoveném průřezu hmotnostní tok závisí na maximální hustotě proudu a její zvýšení vyžaduje zvětšení \bar{E} .

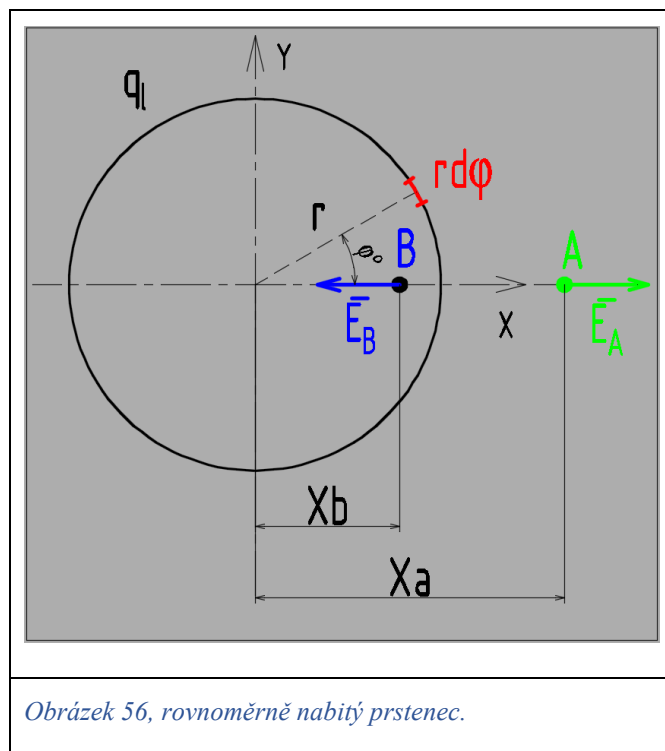
Intenzita barvy na obrázku 55 odpovídá hustotě rozložení nábojů (velmi orientačně) a příčinu takového směru vektoru \bar{E}_{stream} v bodě A da se pochopit z následující úvahy. Necht' máme kolečko poloměru r s lineární hustotou rozložení nábojů q_l (viz obr. 56). Elementární vektory intenzity elektrického pole v bodech A a B můžou být představený v následujícím tvaru:

$$d\bar{E}_A = \frac{kq_l r(x_a - r \cos \varphi)}{(x_a^2 + r^2 - 2x_a r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$d\bar{E}_B = \frac{kq_l r(x_b - r \cos \varphi)}{(x_b^2 + r^2 - 2x_b r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$\bar{E}_A = \int_0^{2\pi} \frac{kq_l r(x_a - r \cos \varphi)}{(x_a^2 + r^2 - 2x_a r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$\bar{E}_B = \int_0^{2\pi} \frac{kq_l r(x_b - r \cos \varphi)}{(x_b^2 + r^2 - 2x_b r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$



Výsledky numerického výpočtu těchto

integrálu pro kolo poloměru 1 m s lineární hustotou rozložení náboje $10^{-8} C/m$ jsou znázorněny na obrázku 57. Můžeme vidět že intenzita elektrického pole v bodě A má kladný směr vůči ose x a klesá z rostoucí vzdálenosti od kolečka. Pokud ale přemístíme zkušební těleso uvnitř kolečka, tak výsledná síla elektrického pole mění svůj směr a tlačí náboj ke středu. Právě tento jev vzniká na vstupu do urychlovače (obrázek 55, bod A).

Výtoková rychlost klasického iontového motoru může být stanovena pomocí vzorku: $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{M/N_A}}$. A jeho hmotnostní průtok — $\dot{m} = Sj \frac{M/N_A}{q}$ kde S je plocha průřezu motoru a maximální hustota proudu j se určí pomocí vztahu:

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9} \left(\frac{2q}{M/N_A} \right)^{1/2} \frac{\Delta V^{3/2}}{x^2} \Rightarrow$$

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{M/N_A}} \cdot \frac{\Delta V}{x^2} \Rightarrow$$

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9} v \frac{\Delta V}{x^2}$$

Hmotnostní průtok \dot{m} můžeme pak zapsat jako: $\dot{m} = Sj \frac{M/N_A}{q} = S \frac{4\varepsilon_0}{9} v \frac{\Delta V}{x^2} \frac{M/N_A}{q}$ kde

$$\text{rozdíl napětí } \Delta V = \frac{v^2 M/N_A}{2q} \Rightarrow$$

$$\dot{m} = S \frac{4\varepsilon_0}{9} v \frac{v^2 M/N_A}{2qx^2} \frac{M/N_A}{q} = \frac{2\varepsilon_0}{9} S \frac{(M/N_A)^2}{q^2 x^2} \cdot v^3 \Rightarrow v^3 = \frac{9q^2 x^2 \dot{m}}{2\varepsilon_0 S (M/N_A)^2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{9q^2 x^2 N_A^2}{2\varepsilon_0 S M^2} \cdot \dot{m}}$$

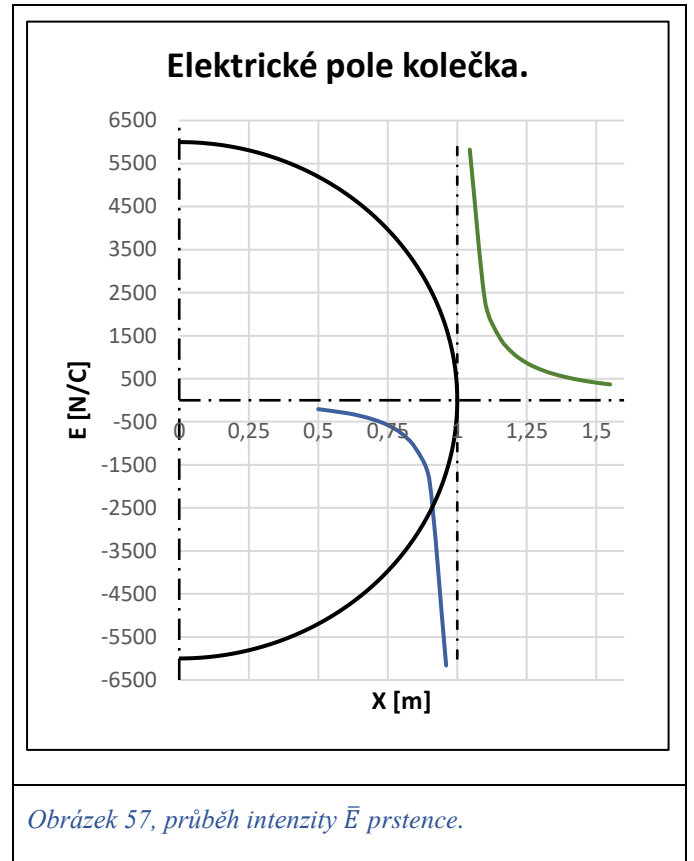
Pokud označíme konstantu $K_{\dot{m}} = \sqrt[3]{\frac{9q^2 x^2 N_A^2}{2\varepsilon_0 S M^2}}$ tak dostáváme konečný tvar závislosti výtokové rychlosti na hmotnostním průtoku pro klasický iontový motor:

$$\boxed{v = K_{\dot{m}} \sqrt[3]{\dot{m}}} \quad (18)$$

Můžeme vidět že $K_{\dot{m}}$ klesá se zmenšující se x což vysvětluje snahu inženýrů konstruovat iontové motory s co nejmenší mezi mřížkovou vzdáleností. Tah motoru je závislý na hmotnostním průtoku a výtokové rychlosti: $F = \dot{m}v = \frac{2\varepsilon_0}{9} S \frac{(M/N_A)^2}{q^2 x^2} \cdot v^3 \cdot v \Rightarrow F = \frac{2\varepsilon_0}{9} S \frac{(M/N_A)^2}{q^2 x^2} \cdot v^4 \Rightarrow$

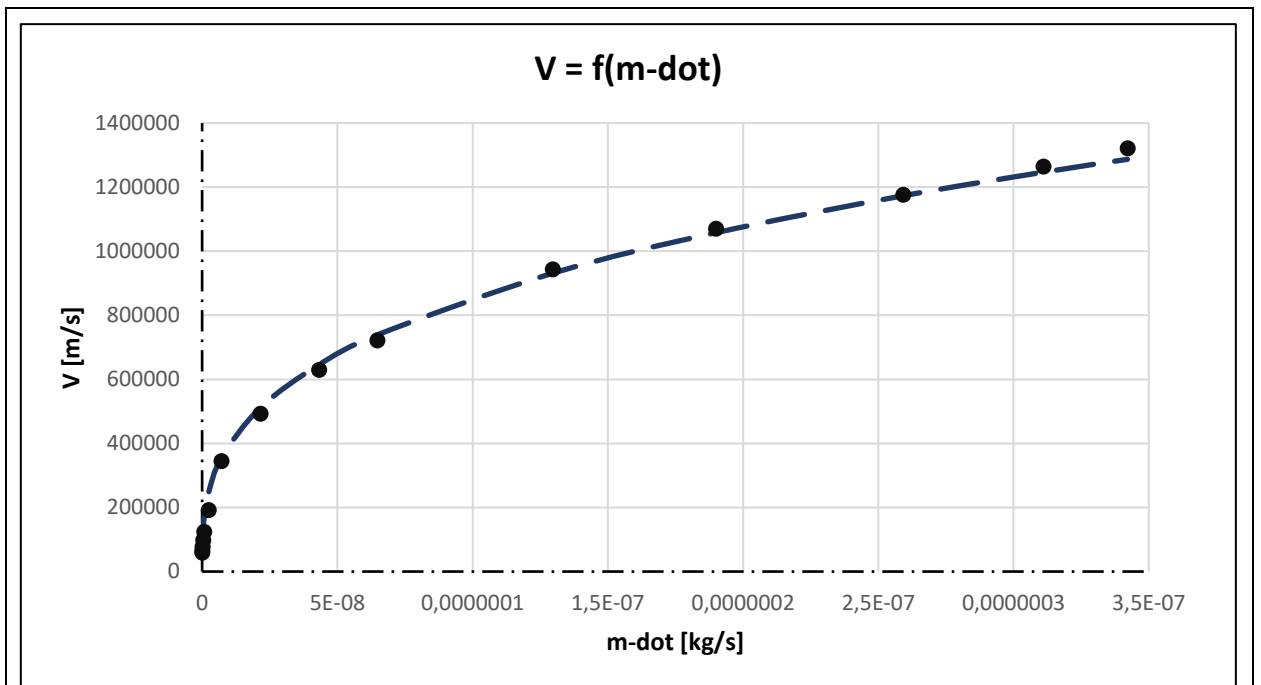
$v = \sqrt[4]{\frac{9q^2 x^2 N_A^2}{2\varepsilon_0 S M^2} \cdot F}$ a při označení $K_F = \sqrt[4]{\frac{9q^2 x^2 N_A^2}{2\varepsilon_0 S M^2}}$ dostáváme podobný vztah pro závislost výtokové rychlosti na tahu:

$$\boxed{v = K_F \sqrt[4]{F}} \quad (19)$$

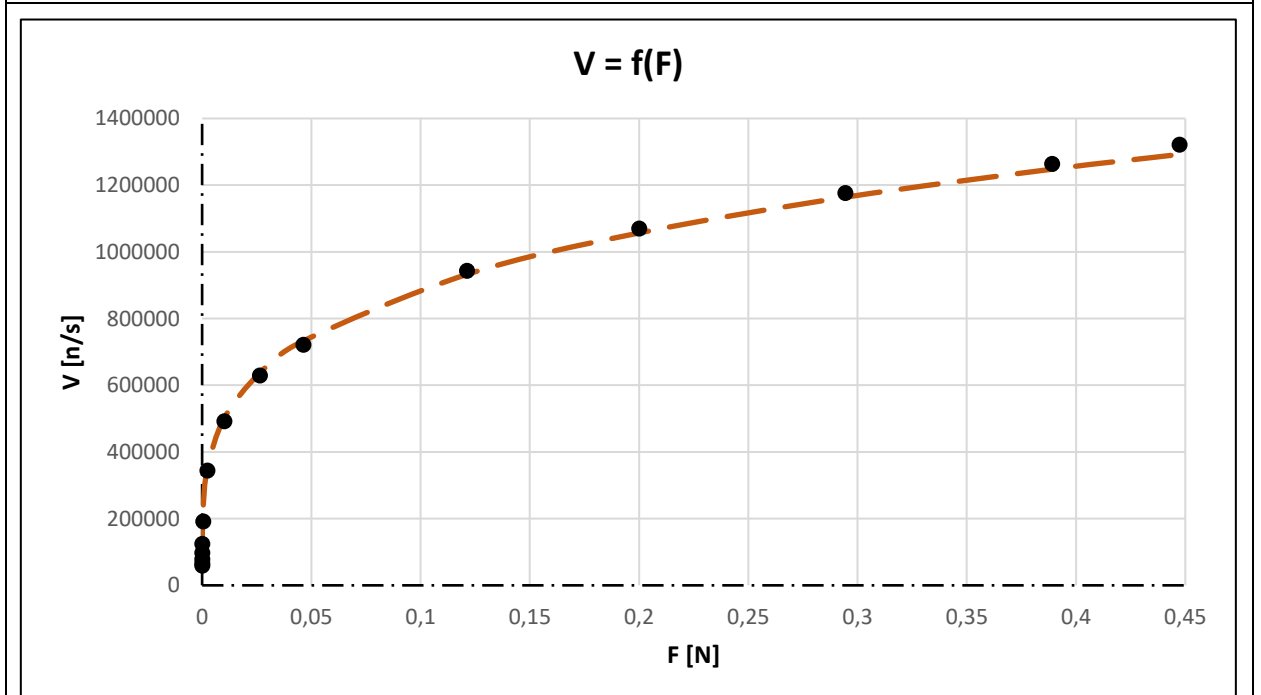


Obrázek 57, průběh intenzity \vec{E} prstence.

Na začátku kapitoly jsme předpokládaly charakter chování Torionu podobný klasickému iontovému motoru, což znamená že jeho výtoková rychlost musí být přímo úměrná třetí mocnině hmotnostního průtoku anebo čtvrté mocnině tahu. Správnost tohoto předpokladu ověřuji následující dva grafy, znázorňující I_{sp} na různých režimech hmotnostního průtoku.



Obrázek 58, závislost rychlosti na hmotnostním průtoku.



Obrázek 59, závislost rychlosti na tahu.

Aproximační křivky na výše uvedených obrázcích jsou popsány následujícími rovnicemi:

$$v = K_{\dot{m}} \sqrt[3]{\dot{m}} \implies \text{závislost rychlosti na průtoku (obrázek 58).}$$

$$v = K_F \sqrt[4]{F} \implies \text{závislost rychlosti na tahu (obrázek 59).}$$

Konstanty $K_{\dot{m}}$ a K_F nabývají hodnot:

$$K_{\dot{m}} = 184\,000\,000$$

$$K_F = 1\,580\,000$$

Pro bližší srovnání Torionu s iontovým motorem vypočteme mezi mřížkovou vzdálenost x kterou by měl klasický iontový motor se stanovenou námi konstantou $K_{\dot{m}}$:

$$K_{\dot{m}} = \sqrt[3]{\frac{9q^2x^2N_A^2}{2\varepsilon_0SM^2}} \implies K_{\dot{m}}^3 = \frac{9q^2x^2N_A^2}{2\varepsilon_0SM^2} \implies x^2 = \frac{2\varepsilon_0SM^2K_{\dot{m}}^3}{9q^2N_A^2} \implies x = \sqrt{\frac{2}{9}\varepsilon_0SK_{\dot{m}}^3 \cdot \frac{M}{qN_A}}$$

Průměr motoru je 0,175 m a plocha jeho průřezu — $S = \pi \cdot 0,175^2 = 0,0962113 \text{ m}^2$. Mezi mřížková vzdálenost par se rovná:

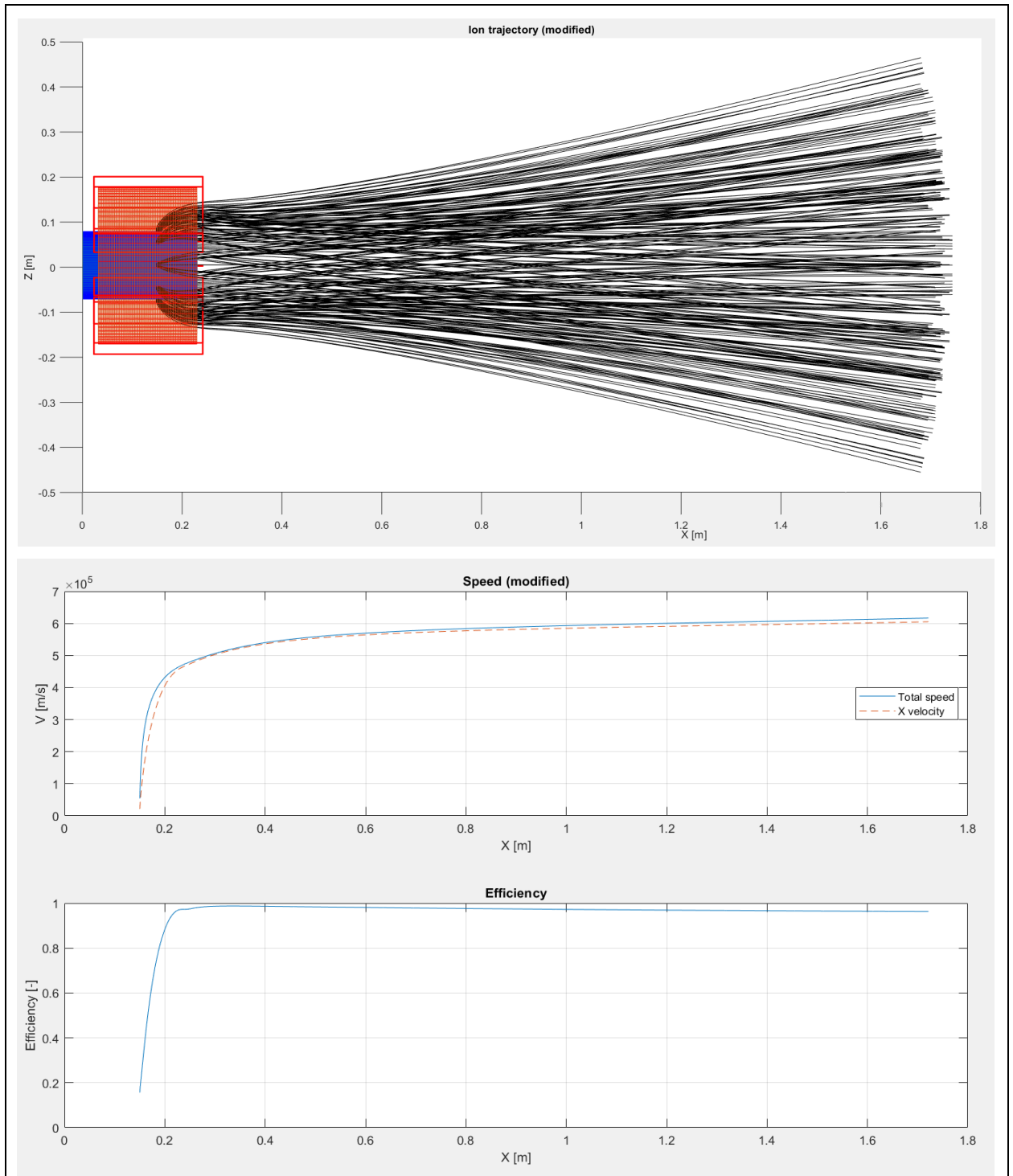
$$x = \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 8,85419 \cdot 10^{-12} \cdot 0,0962113 \cdot 6,23 \cdot 10^{24} \cdot \frac{39,948 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}} = 450,261 \text{ mm}$$

Příčinou tak velké hodnoty mezi mřížkové vzdáleností ekvivalentního iontového motoru je velký rozdíl poloměru vnějšího a vnitřního válce urychlovače Torionu (v daném případě 100 mm), což znamená že pro stejnou intenzitu elektrického pole rozdíl napětí musí být 100 krát větší a právě rozdíl napětí ΔV určuje konečnou rychlost iontů. Nějakou roli hraje i plocha vstupních otvorů do urychlovače a její x-ová souřadnice. Čili napočítané námi konstanty $K_{\dot{m}}$ a K_F platí jenom pro konkrétní typ motoru s nějak stanovenou kombinací geometrických parametru. Da se ale říct že ve své podstatě Torion má řádově menší měrný tah než klasický iontový motor. Na jinou stranu jeho konstrukce dovoluje aplikovat metody, které by umožňovaly pozoruhodné zvýšení hmotnostního průtoku bez zvětšení specifického impulsu. Tyto metody budou probrány v kapitole «zvýšení hmotnostního průtoku».

Charakteristiky motoru na vybraném režimu.

Protože výkony energetických systémů většiny geostacionárních družic se pohybují v rozmezích 10-20 kW, odladíme daný motor na 8-10 kW a srovnáme ho s nějakým klasickým iontovým motorem. Trajektorie pohybu iontů, jejich rychlost a efektivita nasměrování jsou znázorněny na následujícím obrázku. Můžeme vidět určitě rozšíření proudu ve velké vzdálenosti od motoru, toto rozšíření da se podstatně zmenšit umístěním neutralizátoru v hlavní ose (osa x).

Negativní náboj elektronů, vypuštěných tímto neutralizátorem, zmírní vzájemné odpuzování celého plazmatu. Růst rychlosti blíž ke konci výpočetního intervalu ($x > 0,8$) je vyvolán tím že ionty na tomto intervalu nejsou brzděny částicí s x-ovou souřadnicí větší než 1,7 m (konečná délka výpočetních proudnic). Z těchto důvodů budeme uvažovat rychlost ve vzdálenosti 0,8 m od motoru ($x = 0,8$ m) za efektivní výtokovou rychlost.



Obrázek 60, parametry motoru při výkonu 9,5 kW.

Efektivita nasměrování ve vybraném námi bodě dosahuje 97,6% a díky vysoké výtokové rychlosti ztráty na ionizaci jsou zanedbatelné v porovnání s kinetickou energií částic:

$$\eta_{ion} = \frac{\frac{1}{2} M v_{ef}^2}{\frac{1}{2} M v_{ef}^2 + E_{ion}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{39,948 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} (5,769 \cdot 10^5)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{39,948 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} (5,769 \cdot 10^5)^2 + 12,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,999822$$

Když položíme součet ostatních ztrát za 10 procent tak dostáváme přibližnou hodnotu celkové účinnosti motoru: $\eta_{celk} = 0,976 \cdot 0,999822 \cdot 0,9 = 0,878244$. Výkon nutný k urychlení iontů na v_{ef} se rovná: $P_{v_{ef}} = \frac{1}{2} \dot{m} v_{ef}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6} \cdot 576900^2 = 8320,34 \text{ W}$. Z tohoto plyne potřebný napájecí výkon: $P = \frac{P_{v_{ef}}}{\eta_{celk}} = \frac{8320,34}{0,878244} = 9473,84 \text{ W}$. Výslední charakteristiky motoru jsou shromážděny v následující tabulce.

Průměr motoru	0,35	[m]
Průměr ionizátoru	0,15	[m]
Napětí kondenzátoru	34285,8	[V]
Proud v cívkách toroidního magnetického pole	180000	[A]
Intenzita magnetického pole v urychlovači	2,743	[T]
Hmotnostní průtok	$0,05 \cdot 10^{-6}$	[kg/s]
Tah	28,845	[mN]
Efektivní výtoková rychlost	576900	[m/s]
Výkon	9473,84	[W]
Účinnost (orientačně)	87,82	[%]
Pracovní látka	Ar	[-]
Stupeň ionizace	I	[-]

Tabulka 5, charakteristiky motoru na režimu výkonu 9,5 kW.

Můžeme vidět že poměr výkonu k tahu je velmi vysoký — $328,44 [W/mN]$ a tato hodnota nejlíp vysvětluje nevýhodu nadměrně vysoké výtokové rychlosti. Tak například iontový motor RIT-10 má průměr pouhých $8,7 [cm]$ a výkon $980 [W]$. Generuje při tom tah $35 [mN]$. Nebo NEXT, který i když má o něco větší průměr ($0,4 m$), schopen ale produkovat tah $237 [mN]$, což je $8,2$ krát víc než má Torion při výkonu $1,37$ krát větším. Běžný iontový motor spotřebovává 26 až $37 [W]$ na jeden $[mN]$ tahu, což je v podstatě deset krát menší požadavek na výkon oproti tomu co má Torion. Zmenšení výkonu na $[mN]$ taku vyžaduje zvětšení hmotnostního průtoku při konstantní výtokové rychlosti. Jeden z možných způsobu provedení podobné úpravy je rozebrán dal.

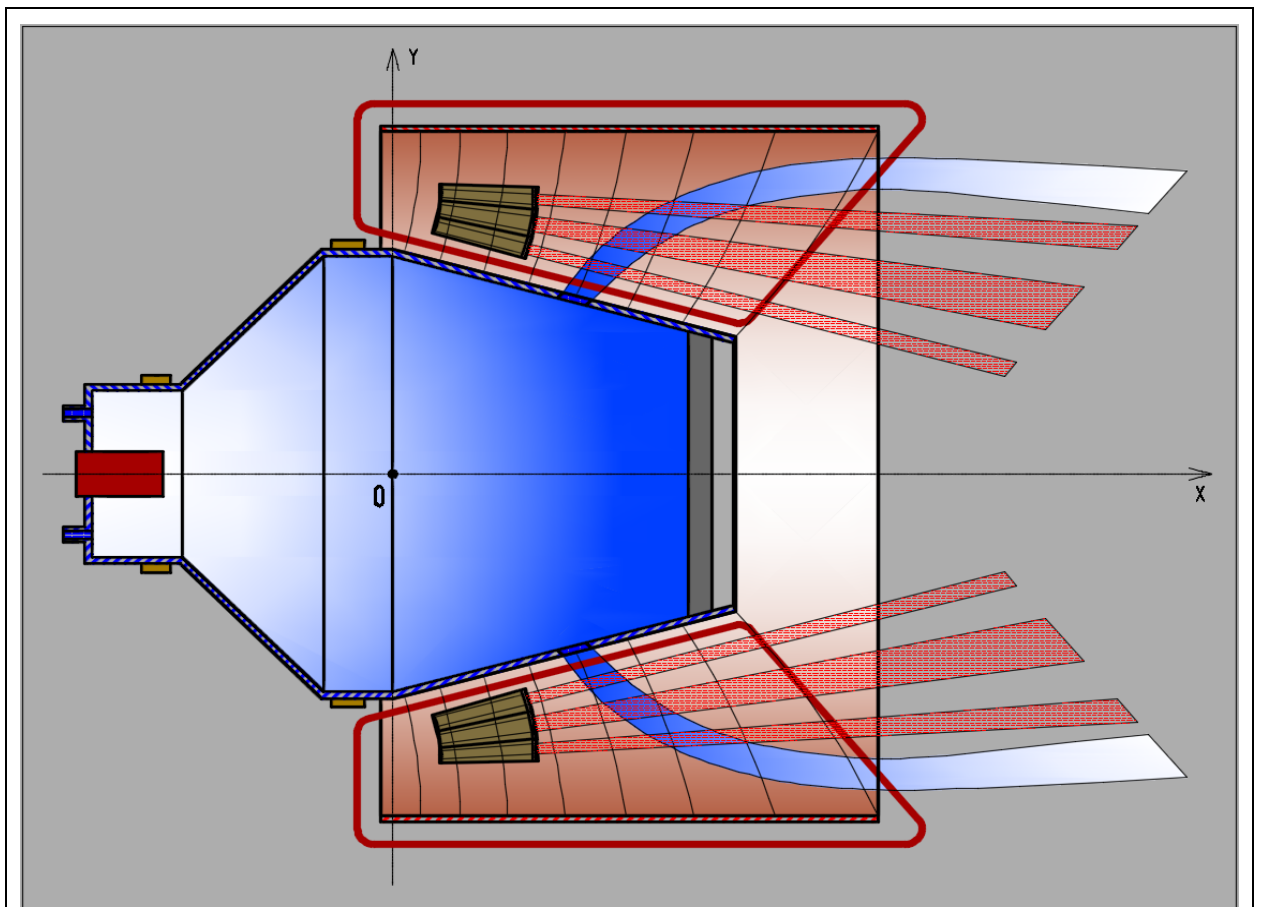
Zvýšení hmotnostního průtoku.

Jak už bylo stanoveno v předchozí kapitole výtoková rychlost Torionu je velmi nepraktická a silně omezuje možné scénáře použití motoru. Pro většinu kosmických misi optimální výtoková rychlost pracovní látky pohybuje se v rozmezích $20-50 km/s$. Její následné zvětšení, i když zmenšuje požadavky na množství paliva, vyžaduje ale mnohem výkonnější a tím pádem i těžší energetický systém. Jenda z hlavních příčin použití motoru s Hallovým efektem místo iontových je právě větší tah na jednotku plochy, i když takové zlepšení jde na úkor účinnost a životnosti. Tato kapitola představuje možnou další iteraci Torionu, která ale už nebude podporována matematickým výpočtem a její hlavním úkolem je ukázat směr dalšího vývoje.

Na obrázku 55, popisujícím «space charge limit», je vidět že zvětšení hmotnostního průtoku da se dosáhnout zvýšením množství plynu ionizátoru, čili zvětšením náboje Q_{dot} , což ale zvětší i výtokovou rychlost. Druhou variantou, která taky přivede k růstu I_{sp} , je zvětšení intenzity \bar{E} elektrického pole urychlovače. Existuje ale i jiná cesta — zmenšení vlivu \bar{E}_{stream} , přičemž bez zmenšení samotného \bar{E}_{stream} . Toho lze dosáhnout částečnou kompenzací pozitivního náboje odlétajících iontů negativním nábojem proudu elektronů. Za tímto účelem elektronové trysky neutralizátoru umístěny přímo do prostoru urychlovače. Vypuštěné nimi elektrony jsou silně vázaný na magnetické pole. Geometrické parametry jejich cykloid 73231 krát menší než takové u kationtu Ar^+ a jejich pohyb da se brát jako pohyb po přímce dané $\bar{E} \times \bar{B}$ driftem. Popsána situace je znázorněná na obrázku 61. V místě průseku trajektorií elektronů a kationtů může samozřejmě docházek ke kolizím. Trajektorie iontů v důsledku podobných srážek se nezmění, protože jejich hmotnost je mnohokrát větší. Její podstatná směna nastane jenom při zvýšení stupně ionizace, a proto je vhodným navrhovat motor na první stupeň ionizace pracovní látky. Elektron taky může

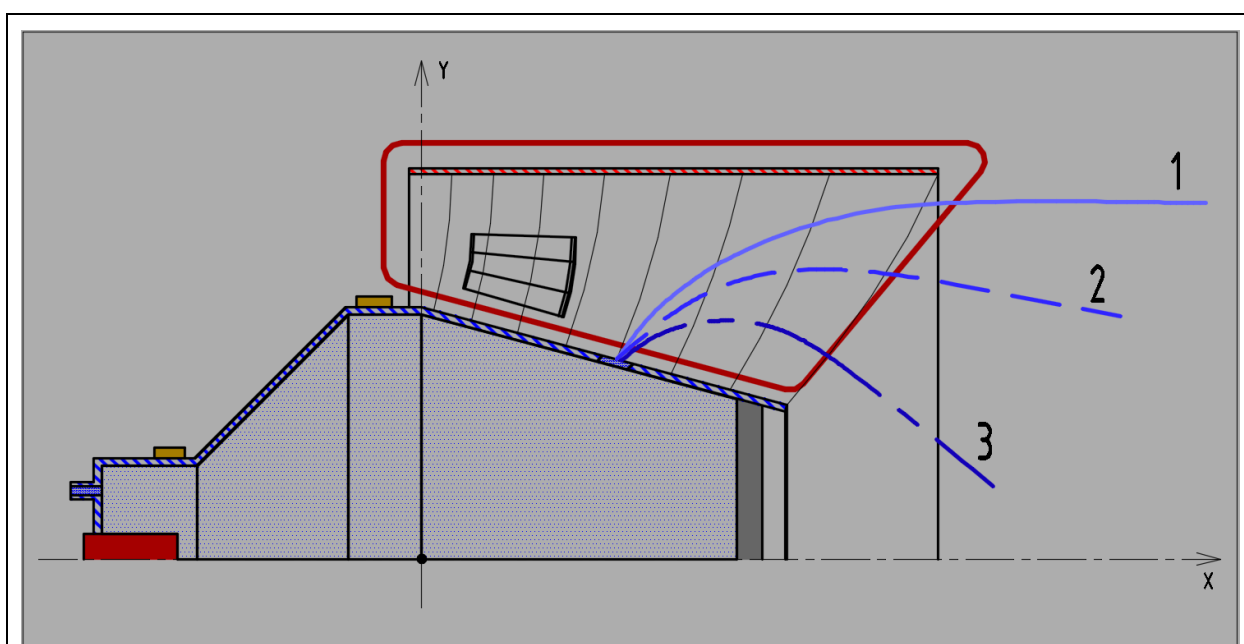
získat určité množství energie v důsledku podobné srážky, ale růst jeho rychlosti zapříčiní jenom změnu geometrických parametru jeho cykloidy, které pořád zůstanou hodně malé (řadově μm). Příčinou tomu že nedojde k rekombinaci je velká vzájemná rychlost částic při jejich případné kolizi.

Motory s Hallovým efektem využívají podobný způsob zvýšení hmotnostního průtoku. V daných motorech elektrony vázané na magnetické pole fungují jako záporná urychlovací mřížka. Některá část těchto elektronů vstupuje do mezi válcového prostoru urychlovače a částečně kompenzuje pozitivní náboj odlétajících iontů. V zobrazeném níže Torionu podobné úkoly plní elektronové proudnice. Jejich negativní náboj přitahuje ionty nacházející se v ionizátoru a tím pádem částečně kompenzuje \bar{E}_{stream} . Kromě toho dané elektrony přitahují i odlétající kationty a zpomalují je. Tím pádem proud elektronů v urychlovači svou roli připomíná třetí mřížku v iontovém motoru, úkolem které je taky zpomalit odlétající částice nabitého plynu. Hlavní nejistotou navrhnutého řešení je procentuální částka kationtů, stupeň ionizace kterých bude navýšen v důsledku srážky s elektronem. Jistou odpověď na tuto otázku dá se najít spíše experimentálně, než teoretickým výpočtem.



Obrázek 61, zvýšení hmotnostního průtoku umístěním neutralizátoru v urychlovači.

Přidání pouzdra ionizátoru kuželovitěho tvaru dovoluje natočit vektor počáteční rychlosti kationtů, což zmenšuje požadavek na intenzitu magnetického pole pro jejich nasměrování. V daném případě tento úhel stanoví 15° . Své důvody má i změna tvaru cívek toroidního magnetického pole. Natočení jejich pravých stran poskytuje lepší nasměrování iontů s vyšším stupněm ionizace (viz obrázek 62). Myšlenka spočívá v tom, že kationty s vyšším stupněm ionizace mají menší geometrické parametry svých cykloid a dosahují maximální y-ové souřadnice dřív. A proto je lepším naformování elektromagnetického pole urychlovače tak, aby tyto částice ho opustily při menší x-ové souřadnici.



Obrázek 62, Trajektorie iontů s prvním, druhým a třetím stupněm ionizace.

Představené zde úpravy mohou poskytnout mnohonásobné zvětšení hmotnostního průtoku. Tak například motory s Hallovým efektem dosahují skoro desetkrát větší maximální hustoty toku oproti iontovému motoru, a to při menší výtokové rychlosti. Zůstává ale otevřenou otázkou, jestli podobné technické změny umožní sestavení Torionu s alespoň stejným tahem na jednotku plochy jako má klasický iontový motor. Problém spočívá v tom, že iontový motor s mezi mřížkovou vzdáleností 1 [mm] má $K_m = 3132249,8$ což je 58,7krát menší hodnota oproti Torionu představenému v dané práci. Znamená to hmotnostní průtok $2 \cdot 10^5$ krát větší.

Závěr.

Dana diplomová práce jeví sebou koncepční návrh iontového motoru s toroidním magnetickým polem, pojmenovaného námi Torion. Cílem tohoto návrhu bylo předložení konstrukce motoru, schopného pracovat při vyšší hustotě proudu, než tradiční iontové motory. A mít při tom dostatečně velkou účinnost a životnost.

Sestrojené námi trajektorií pohybu iontů, odpovídající velmi malému hmotnostnímu průtoku, ukazují na možnost dosažení vysoké efektivity nasměrování (více než 98 %). Vzájemná interakce částic se ale začíná pozoruhodně projevovat už při malých hmotnostních tocích, a proto reálný motor je nutně počítat s uvažováním vzájemného spolupůsobení kationtů. Podobné odpuzování zapříčiní určité rozšíření proudu a vyžaduje zvětšení i bez toho vysoké intenzity magnetického pole v urychlovači. Z tohoto důvodu motor byl navrhnout s použitím technologie vysokoteplotních supravodivých materiálu druhého druhu, umožňujících vytváření silného magnetického pole.

Při dalším zkoumání bylo stanoveno, že efekt, známý jako «space charge limit», projevuje se v dane koncepci mnohem intenzivněji a maximální hustota proudů je mnohonásobně menší než hustota proudu klasického iontového motoru. Byly vysvětleny příčiny tohoto jevu a předložena další možná iterace Torionu, která by mohla řešit tento problém. Základní charakteristiky motoru: jeho výhody a nevýhody jsou uvedené v následující tabulce.

Konečně můžeme říct že představený zde motor má docela perspektivní vlastností. Hlavně z hlediska účinnosti a životnosti. Velký význam představuje další studie o možnostech zvýšení hmotnostního průtoku, která i když vyžaduje experimentální provedení, může ale mít i zjednodušenou teoretickou formu, představující simulaci pohybu celého plazmatu v urychlovacím kanálu motoru.

Torion — základní vlastností	
Výhody	Nevýhody
Parametry urychlovače da se nastavit tak aby vysokorychlostní částice se vůbec nedotýkaly konstrukčních prvku motoru.	Použití supravodivých materiálu vyžaduje velmi sofistikovaný termoregulační systém, který snižuje celkovou spolehlivost motoru a zvyšuje jeho cenu.
Motor může pracovat při velmi vysokých výtokových rychlostech.	
Nevzniká eroze elektrod při ionizaci plynu.	
Dá se dosáhnout velmi vysoké účinnosti (větší než 85 %). Přičemž část ztrát stanoví energie ionizace a neefektivita nasměrování, což ve výsledku dává menší nároky na chlazení.	
Motor je vhodný pro aplikace, vyžadující vysokou výtokovou rychlost a životnost, bez nutnosti generace velkého tahu, což jsou například meziplanetární sondy anebo mise s opouštěním sluneční soustavy.	Malý tah na jednotku průřezu (v daném případě pod průřezem se rozumí plocha celého motoru, ne proudnic kationtů). Tento parametr může ale být zlepšen zaváděním neutralizátoru do prostoru urychlovače a optimalizací geometrickým parametru motoru.
Díky tomu že motor nepoužívá ve své konstrukci urychlovací mřížky, nevzniká pro tuto koncepci ohraničení maximální plochy mřížek, čili celého motoru. A tím pádem da se sestrojít Torion o průměru větším než 50 cm.	
Motor má velkou rezervu ke zvýšení hmotnostního průtoku umístěním neutralizátoru v urychlovači.	
<i>Tabulka 6, základní vlastnosti Torionu.</i>	

Seznam užitých označení

-	I_{sp}	Specifický impulz	[m/s]
-	m	Hmotnost částice	[kg]
-	\bar{E}	Intenzita elektrického pole	[N/C]
-	v_{ef}	Efektivní výtoková rychlost	[m/s]
-	v_{kon}	Rychlost tělesa na konci manévru	[m/s]
-	$M_{poč}$	Hmotnost tělesa na počátku manévru	[kg]
-	M_{kon}	Hmotnost tělesa na konci manévru	[kg]
-	M_{paliva}	Hmotnost paliva	[kg]
-	\bar{F}	Síla — tah motoru	[N]
-	μ	Účinnost	[—]
-	η_{ion}	Efektivita ionizace	[—]
-	\mathcal{H}	Poissonova konstanta	[—]
-	R	Univerzální plynová konstanta	[$\frac{J}{K \cdot mol}$]
-	M	Molární hmotnost	[kg/mol]
-	j	Hustota proudu iontů v motoru	[$\frac{C}{m^2 \cdot s}$]
-	j_{max}	Maximální hustota proudu v motoru	[$\frac{C}{m^2 \cdot s}$]
-	q	Náboj iontů pracovní látky	[C]
-	x	Mezi mřížková vzdálenost iontového motoru	[m^2]
-	ε_0	Elektrická permitivita vakua	[$\frac{C}{N \cdot m^2}$]
-	N_A	Avogadrovo číslo	[$\frac{n_{částic}}{mol}$]
-	\bar{B}	Intenzita magnetického pole	[T]
-	$\bar{F}_c \Leftrightarrow \bar{F}_e$	Coulombova \Leftrightarrow elektrostatická síla	[N]
-	\bar{F}_l	Lorentzova síla	[N]
-	\bar{v}	Rychlost pohybu iontů v urychlovači	[m/s]
-	m_p	Hmotnost protonu	[kg]
-	T	Perioda kmitu	[s]
-	q_l	Lineární hustota rozložení náboje	[C/m]

- k	Součinitel úměrností Coulombového zákona	$\left[\frac{N}{m^2 \cdot C^2}\right]$
- μ_0	Magnetická permeabilita vakua	$[N/A^2]$
- l	Délka	$[m]$
- Q	Elektrický náboj kondenzátoru	$[C]$
- U	Elektrické napětí	$[V]$
- C	Kapacita kondenzátoru	$[F]$
- I	Velikost elektrického proudu	$[A]$
- c	Rychlost světla	$[m/s]$
- \dot{m}	Hmotnostní průtok	$[kg/s]$
- S	Délka výpočtové úsečky trajektorie	$[m]$

Seznam použité literatury

[1] Jerry John Sellers. Understanding Space, third edition. Copyright © 2005 by McGraw-Hill Companies. ISBN 0-07-340775-5.

[2] Malcolm Macdonald, Viorel Badescu: The international handbook of space technology. © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014. ISBN 978-3-642-41100-7.

[3] Wilfried Ley, Klaus Wittmann, Willi Hallmann.: Handbook of space technology. © 2009 John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-69739-9.

[4] Martin J. L. Turner. Rocket and space propulsion, second edition. © Praxis publishing Ltd, Chichester UK 2005. ISBN 3-540-22190-5.

[5] Enrico Felcini, Luca Bottura, Jeroen van Nugteren, Gijs de Rijk, Glyn Kirby, Bertrand Dutoit.: Magnetic Design of a Superconducting Toroidal Gantry for Hadron Therapy. 1051-8223 © 2020 IEEE.

Použitý software.

- 1) Microsoft Word
- 2) Microsoft Excel
- 3) SolidWorks 2017-2018
- 4) Autodesk AutoCAD 2015
- 5) MATLAB R2018b
- 6) Paint

Přílohy.

- 1) Skript MATLAB včetně souvisejících s ním funkcí, sloužící k výpočtu trajektorií pohybu iontů v prostoru urychlovače.