

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



Numerické metody řešení aeroelasticity pro letecký
profil

Bakalářská práce

Vypracoval: Tomáš Krejča

Vedoucí práce: Ing. Marek Pátý

2019 / 2020



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Krejča Jméno: Tomáš Osobní číslo: 473473
Fakulta/ústav: Fakulta strojní
Zadávající katedra/ústav: Ústav technické matematiky
Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství
Studijní obor: bez oboru

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerické metody řešení aeroelasticity pro letecký profil

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical Methods for Aeroelasticity Analysis of an Aircraft Wing Section

Pokyny pro vypracování:

Rešerše metod pro řešení problémů aeroelasticity
Popis a naprogramování modelu pro výpočet rovinného stacionárního proudění okolo leteckého profilu
Odladění programu a výpočet proudového pole pro vybraný případ profilu
Grafická prezentace a analýza výsledků

Seznam doporučené literatury:

S. Slavík: Aeroelasticita leteckých konstrukcí, skripta ČVUT, FS
K. Kozel, J. Fůrst: Numerické metody řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, FS
J. Blazek: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:


Ing. Marek Pátý, ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: 09.04.2020

Termín odevzdání bakalářské práce: 16.08.2020

Platnost zadání bakalářské práce: _____


Ing. Marek Pátý
podp. s. vedoucí(ho) práce

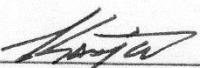

doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podp. vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podp. děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

4.5.2020
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty...) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....

Tomáš Krejča

Poděkování

Děkuji mému vedoucímu Ing. Markovi Pátému za ochotu a výraznou pomoc při tvorbě této práce. Bez důkladného vedení, dohledu a rozsáhlých zdrojů by se mi jinak těžko dotahovala až do konce.

Tomáš Krejča

Název práce: **Numerické metody řešení aeroelasticity pro letecký profil**

Autor: Tomáš Krejča

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Ústav: Ústav technické matematiky

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Marek Pátý

Klíčová slova: Matematické modelování, Aeroelasticita leteckého profilu, Eulerovy rovnice, Laxovo-Friedrichsovo schéma, CFD

Title: **Numerical Methods for Aeroelasticity Analysis of an Aircraft Wing Section**

Author: Tomáš Krejča

Supervisor: Ing. Marek Pátý

Keywords: Mathematical modelling, Aeroelasticity of a wing section, Euler's equations, Lax-Friedrichs scheme, CFD

Abstrakt

Tato práce se zabývá nejprve rešerší jednotlivých negativních jevů v aeroelasticitě a poté stručnou historií vývoje metod řešení těchto jevů. Následně jsou uvedeny matematické modely a fyzikální rovnice sloužící pro popis chování strukturální části konstrukce a tekutiny jí obtékající. Je věnována pozornost problémům na rozhraní tekutiny a pevné látky. V poslední části je popisován model řešení Eulerových rovnic Metodou konečných objemů pomocí Laxova-Friedrichsova schématu. Na závěr jsou uvedeny výsledky z programu napsaném v jazyku C++ pro tuto práci.

Abstract

This paper addresses at first the research of individual negative phenomena in the field of Aeroelasticity and follows with a brief history of the methods used for solving these phenomena. After that mathematical models and physical equations for describing of structural part of the construction and fluid flowing around it are presented. Attention is also paid to the issues on the interface of the fluid and the structure. In the last part the model of solving Euler's Equations via Final Volume Method with Lax-Friedrichs scheme is presented. In closing, it presents the results given by a program written in C++ specifically for this paper.

Seznam použitých symbolů

∇	gradient
$\nabla \cdot$	divergence
$\partial\Omega, \Gamma_s$	hranice kontrolní oblasti
Δt	časový krok
ε	koeficient umělé vazkosti
$\overrightarrow{\Phi}_k$	fyzikální tok mezi dvěma buňkami
$\vec{\sigma}$	tenzor normálového napětí
Ω	kontrolní oblast
ρ	hustota
$\vec{\tau}$	tenzor smykového napětí
μ	dynamická viskozita
ν	kinematická viskozita
A_{ref}	referenční plocha
D	difúzní koeficient
e	měrná energie
\vec{f}	objemová síla
$\vec{F}(\vec{W}), \vec{G}(\vec{W})$	fyzikální tok vektoru proměnných
\vec{g}	gravitační zrychlení
k	koeficient tepelné vodivosti
\vec{M}	hybnost
\vec{n}	normálový vektor
\vec{q}	tepelný tok
r	měrná plynová konstanta
T	teplota
\vec{u}, \vec{v}	rychlost
ν	měrný objem
\vec{W}	vektor proměnných

Obsah

Prohlášení	1
Poděkování.....	2
Abstrakt.....	4
Seznam použitých symbolů	6
Úvod.....	9
1. Aeroelasticita	10
1.1. Úvod do Aeroelasticity	10
1.1.1. Hmotnostně-tuhostní vazba	11
1.2. Aeroelastické jevy.....	11
1.2.1. Torzní divergence	11
1.2.2. Změna účinnosti řízení a reverze	12
1.2.3. Flutter	12
1.2.4. Buffeting.....	13
2. Vývoj metod řešení aeroelasticity	14
2.1. Experimentální získávání dat	14
2.2. Theodersenův model.....	14
2.3. Computational Fluid Dynamics (CFD)	14
3. Současné metody řešení aerodynamiky a aeroelasticity	16
3.1. Kontinuum a základní rovnice	16
3.1.1. Lagrangeův a Eulerův popis kontinua	16
3.1.2. Základní rovnice mechaniky tekutin	16
3.1.3. Základní rovnice pružnosti a pevnosti	19
3.2. Metody One-way a Two-way coupling	20
3.2.1. One-way coupling	21
3.2.2. Two-way coupling.....	21
3.2.3. Monolitické řešiče	21
3.2.4. Energetická metoda.....	22
3.3. EALE.....	22
3.3.1. Rovnice pro pohyblivou síť	22

4. Numerické řešení obtékání profilu	23
4.1. Matematický model	23
4.1.1. Eulerovy rovnice	23
4.1.2. Výpočetní oblast a okrajové podmínky	24
4.2. Metoda konečných objemů	24
4.3. Výpočetní síť	25
4.4. Laxovo-Friedrichsovo schéma	25
4.5. Výsledky programu 2Deuler	26
4.5.1. Historie reziduí a vliv hodnoty umělé vazkosti na řešení	27
4.5.2. Vztlakový koeficient	29
4.5.3. Výsledky pro různé hodnoty koeficientu umělé vazkosti	30
Závěr	33
Zdroje	34

Úvod

Při návrhu leteckých konstrukcí se musíme často potýkat s protichůdnými požadavky, týkajícími se nízké hmotnosti, vysoké tuhosti, optimálních aerodynamických vlastností a nízké výrobní ceny. Často je nutné hledat kompromisy, například mezi nízkou váhou a vysokou tuhostí a pevností u draků letadel nebo mezi aerodynamickým odporem a vztlakem u leteckých profilů. Budeme-li nacházet výhodnější kompromisy nebo efektivnější řešení, získáme nejen lepší výkony v leteckém odvětví, ale i ekonomičtější podmínky, které povedou k rozsáhlejšímu zpřístupnění letecké dopravy a tím pádem i k dalšímu rozvoji leteckého průmyslu. Nové světové trendy podsouvají stále vážněji i ekologickou otázku, která vedla k přeorientování zavedených cest ve vývoji a vedla k dalšímu tlaku na odlehčení konstrukce za účelem snížení spotřeby paliva. Snižování hmotnosti konstrukce však může mít negativní důsledky pro aeroelastickou stabilitu. Jedním z nejzávažnějších aeroelastických jevů je flutter křídla, projevující se jako vibrace s exponenciálně rostoucí výchylkou. Jeho důsledkem může v krajním případě být kolaps konstrukce letounu a následný pád stroje.

Hledání nových a lepších řešení umožňuje pokrok v CFD (Computational Fluid Dynamics – Počítačová mechanika tekutin), díky kterému jsme schopni získávat relativně rychle analýzu našich technických řešení. CFD však může produkovat nesprávné výsledky a je proto třeba pečlivě volit numerické metody a provádět validaci řešení, například srovnáním s experimentálními daty.

Aeroelasticita je obor kombinující mechaniku tekutin, dynamiku a pružnost a pevnost. Z mechaniky tekutin získáváme vnější síly vlivem působení proudění tekutiny, a to ať už budící, nebo tlumící účinky. Obor pružnosti a pevnosti nám popisuje chování konstrukce právě po působení vnějších nebo objemových sil. A nakonec dynamika funguje jako můstek, mezi těmito dvěma elementy, zvláště sledujeme-li děje, které mají kmitavý charakter jako je třeba flutter, který se bude v následujících kapitolách dále rozvíjet.

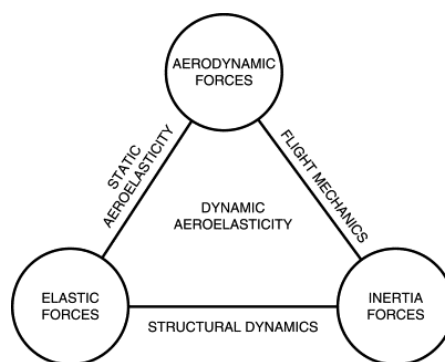
V prvních desetiletích od vzniku leteckého průmyslu nebyly pokročilé nástroje jako CFD k dispozici. Porozumění aeroelastickým jevům bylo omezené a náhlá selhání konstrukce v důsledku ztráty tuhosti vedla k tragickým nehodám. Analytická řešení byla příliš komplikovaná a často nedosažitelná, proto se musely používat zjednodušené modely nebo získávat časově a finančně náročná experimentální data (převážně v aerodynamickém tunelu).

První část této práce obsahuje přehled historického vývoje a současných metod řešení letecké aeroelasticity. Ve druhé části jsem se věnoval realizaci vlastního simulačního programu. Pro výpočet jsem využil numerický postup řešení Eulerových rovnic ve 2D s Laxovým-Friedrichsovým schématem Metodou konečných objemů a aplikoval jej na výpočet proudění okolo leteckého profilu Clark-Y.

1. Aeroelasticita

1.1. Úvod do Aeroelasticity

Aeroelasticita se zabývá interakcemi mezi proudící tekutinou a obtékaném tělesem. Z tekutiny se na těleso přenáší tlakové síly, které zároveň generují například vztlak, ale také mají deformační účinky na těleso. Tyto deformace však mohou opět vést ke změně proudového pole a tím vyvolat další silové účinky z tekutiny. Dále ovlivňují letecké vlastnosti a funkce systému řízení [1]. Proudící tekutina ale není jediným zdrojem deformačních účinků. Kromě ní mohou na konstrukci působit zatížení způsobené setrvačnými účinky hmoty, působí-li na ní zrychlení, a to ať už zrychlení samotného letounu (tečné, normálové) nebo konstantní tíhové zrychlení Země. Spolu s reakcemi konstrukce (elastické síly) dostáváme trojúhelník sil (Obr. 1).



Obrázek 1 Trojúhelník sil [1]

Kombinací působení těchto sil vzniká aeroelastický jev. Ten dále můžeme dělit na statický a dynamický.

U statického aeroelastického jevu zanedbáváme působení setrvačných sil a předpokládáme, že vnější a vnitřní silové účinky jsou konstantní. I přes toto zjednodušení můžeme získat základní přehled například o stabilitě konstrukce.

Musíme zde počítat i se zpětnou vazbou, kterou vyvolá deformace. Může vzniknout kombinované namáhání, kdy k například k základní námaze na tah/tlak přibude vlivem deformace konstrukce namáhání v jiné podobě (hlavně ohyb) nebo změnou polohy působíště síly [1].

Dynamický aeroelastický jev zahrnuje navíc oproti statickému i setrvačné účinky deformací, které se přičítají k původnímu zatížení, které může být i časově proměnné. Dynamická analýza zohledňuje i možnost deformací s kmitavou charakteristikou. Zde se musí kontrolovat, zda tento průběh není divergentní, tedy netlumený.

1.1.1. Hmotnostně-tuhostní vazba

Návrh konstrukce je vystaven konfliktním požadavkům na dosažení co nejnižší hmotnosti při zachování dostatečné tuhosti. Tuhost je spjatá s hmotností. Chceme-li tužší konstrukci, musíme počítat s příbytkem hmotnosti. Při úpravách musíme stále kontrolovat, zda je nadále tuhost konstrukce dostatečná a zda například nedojde ke ztrátě stability [1].

S novými technologiemi při vývoji a výrobě (hlavně vhodnějšími materiály) se konstrukce dostala za hranici, kde již tato vazba není rozhodující, zda vůbec bude letoun schopný letu. Tuhost konstrukce je dnes omezena normami a je snaha dosáhnout co nejnižší letové váhy při dodržení dané tuhosti.

1.2. Aeroelastické jevy

Takto označíme speciální fyzikální jevy, s kterými se můžeme setkat u leteckých konstrukcí. Jsou to průběhy s negativními dopady a aeroelasticita má za úkol tyto jevy odhalit nebo jim zabránit.

Statické aeroelastické jevy

- změna rozložení zatížení
- změna účinnosti řízení a reverze
- torzní divergence

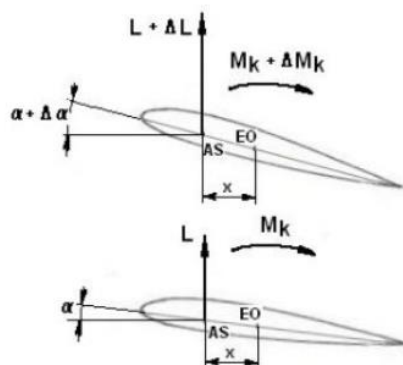
Dynamické aeroelastické jevy

- aeroelastická odezva na dynamické zatížení
- flutter
- buffeting
- servoelasticita

Nejzávažnějším jevům je věnována pozornost v následujících kapitolách.

1.2.1. Torzní divergence

Torzní divergenci si můžeme představit jako kroucení křídla. Vlivem obtékání profilu tekutinou vzniká vztahová síla L , která však nemá působíště ve středu profilu. Působí tedy zde kroučící moment M_k , který natáčí křídlo o úhel α (obr. 2). Vlivem zkrutu se mění úhel náběhu a tím i vztahová síla, která opět zvětšuje celkový kroučící moment. Je-li tuhost křídla dostatečná, zastaví se zkrut na určité hranici, kde bude v rovnováze s elastickými silami. Rychlost, při které budící účinky převýší tlumící, se v tomto případě nazývá kritickou rychlostí divergence. Zvyšováním tuhosti se docílí toho, aby kritická rychlost divergence byla dostatečně vyšší než nejvyšší rychlost letu. [1],[2]



Obrázek 2 Vznik kroučícího momentu [2]

$$K_{\varphi} = \frac{dM_k}{d\varphi}$$

K_φ – torzní tuhost

$K_\varphi > \frac{dM_k}{d\varphi}$ - přírůstek tuhosti je vyšší, než přírůstek vnějších sil po deformaci -> nastává stabilita

$K_\varphi < \frac{dM_k}{d\varphi}$ – přírůstek tuhosti je nižší, než přírůstek vnějších sil -> dojde k divergenci – budící síla bude narůstat, dokud nedojde ke ztrátě stability. [1]

1.2.2. Změna účinnosti řízení a reverze

Natáčením křidélek – pohyblivé části konce křídla sloužící k natáčení letounu – se mění aerodynamické síly působící na křídlo. Nově vzniklá síla má působiště u odtokové hrany křídla, tudíž relativně daleko od středu křídla a vzniká kroučící moment, který křídlo natáčí. U takto natočeného křídla vzniká nová vztlačková síla, která má však opačný směr než původní síla vzniklá pohybem křídélka. Tím se snižuje účinek křídélka. Jsou-li síly v rovnováze, dochází k vynulování klopícího účinku křídélka a pouhému kroucení křídla. Když je nově vzniklá síla větší než síla od křídélka, pozorujeme jev nazývaný reverze, při kterém dojde k prohození směru řízení. [2],[6]

1.2.3. Flutter

Flutter křídla (třepetání) patří mezi nejznámější aeroelastické jevy. Při překročení kritické rychlosti převažují aerodynamické a setrvačné síly nad silami tlumícími a výchylky kmitů divergentně rostou, dokud nedojde ke ztrátě stability. Komplexita výpočtu výrazně roste s navyšováním stupňů volnosti. U problému flutteru počítáme až se třemi stupni volnosti. Řešíme-li aeroelasticitu křídla a podobných prvků, jako jsou například lopatky turbín, projevují se nám tyto stupně volnosti jako torze a ohyb celého prvku a natáčení dokonale pevných křidélek. [6]

K určování kritické rychlosti flutteru slouží vyhodnocování celkové mechanické energie soustavy, která se skládá z kinetické, potencionální a deformační energie. Jsme-li přímo na kritické rychlosti flutteru, je součet těchto dílčích energií konstantní.

ΔE_{celk} – bilance celkové mechanické energie během jedné periody kmitu

$\Delta E_{celk} < 0$ – dochází k disipaci (vytrácení) energie -> tlumené kmitání

$\Delta E_{celk} = 0$ – harmonické kmitání, kritická rychlost flutteru

$\Delta E_{celk} > 0$ – do systému je dodáváno více energie, než je disipováno -> divergentní kmitání, dochází k flutteru křídla [1]

Aerodynamické (vnější) tlumení může mít jak pozitivní (tlumící), tak i negativní (divergentní) přínos. Konstrukční tlumení má vždy pozitivní následky.

Podmínky pro vznik flutteru křídla podle [1]:

1. Stupně volnosti – křídlo musí mít alespoň jeden stupeň volnosti (pouze teoretický případ, u ohybu je vždy $\Delta E_{celk} < 0$, u torze dochází k harmonickému kmitání), v praxi alespoň dva stupně volnosti
2. Fázová podmínka – zda jsou složky deformace (krut a ohyb) ve fázi nebo fázově posunutý. Pokud je krut ve fázi s ohybem, jedná se o tlumené kmity, v případě, že je krut fázově posunutý o $\frac{\pi}{2}$ oproti ohybu, dojde k netlumenému kmitání
3. Konfigurace sil

1.2.4. Buffeting

Buffeting vzniká v případě, že úplav vzniklý za křídlem narušuje proudové pole ocasních ploch. Rozvířený proud může způsobovat deformace kmitavého charakteru. Vzhledem k tomu, že vzniklé turbulence a následné vibrace považujeme jako náhodného charakteru, neexistuje žádné analytické řešení. Tomuto efektu lze předejít designem křídla s menší tvořivostí úplavu a správným umístěním ocasních ploch. Vzhledem k tomu, že vývojové trendy tíhly ke stále lepším a čistším návrhům křídla, jsou dnes případy buffetingu velmi vzácné. [6]

2. Vývoj metod řešení aeroelasticity

2.1. Experimentální získávání dat

Základním způsobem získávání dat potřebných k analýze aeroelastických jevů je experimentální cesta. Části konstrukce, na kterých chceme provádět měření se vkládají do aerodynamického tunelu. Zde se uměle vytvoří požadované proudění a zkoumají se aerodynamické vlastnosti tělesa. Pro popis proudění nás přednostně zajímají veličiny jako rychlost, tlak, moment a síla.

Rychlost se měří pomocí sledování rozdílu tlaků v zařízeních jako je Bernoulliho nebo Ventouriho trubice či Prendtlova sonda. Modernější způsob je měření hot-wire sondou. To je v podstatě natažený tenký drátek, ve kterém protéká proud a materiálovým odporem se poté generuje teplo. Následně je toto teplo odváděno proudem vzduchu. Odvedené teplo je pak úměrné rychlosti proudění. Tato sonda dokáže rychle reagovat na změnu rychlosti a tím pádem je vhodná na měření turbulentních proudů, ve kterých rychlost výrazně osciluje. [24]

Rozložení tlaku na konstrukci se nejčastěji získává pomocí tlakových kanálků. V nich jsou umístěny tenzometry, které měří deformace, z kterých se pak dá vypočítat samotné napětí neboli statický tlak. Máme-li těmito sondami proložený celý požadovaný povrch, může integrací získat působící sílu. Vzhledem k tomu, že je vyžadována velmi jemná síť, není to příliš častá metoda.

Síly a momenty se měří pomocí silových vah. Model je připoután na tyto váhy, které pak měří aerodynamické síly a momenty působící na model. Z těchto sil se pak dají vypočítat odporové koeficienty.

2.2. Theodersenův model

V roce 1935 vydal Theodore Theodersen článek [7] o analytickém výpočtu flutteru křídla. Jeho teorie uvažovala křídlo a křídélko ve tvaru plochých desek o nekonečném rozpětí. Aerodynamické síly působící na křídlo byly počítány modelem potenciálního proudění a pro jeho pohyb byly uvažovány harmonické kmity s infinitezimální amplitudou. Theodersenův model umožňoval určit kritickou rychlost flutteru pro případ s až 3 stupni volnosti. Výpočet dále uvažoval nestlačitelnou neviskózní tekutinu.

V roce 2000 Zeiler [27] upozornil na to, že Theodersenovi výpočty obsahují numerické chyby. Není to zas tak překvapivé vzhledem k tomu, v jaké době byl článek psán a že měl autor k dispozici pouze tužku a papír.

Následně na to vydal v roce 2015 Boyd Perry přepočtení [17] Theodersenova výpočtu.

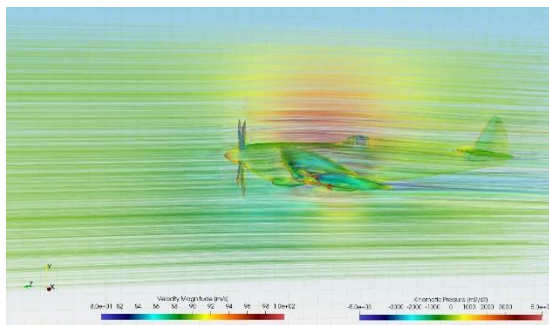
2.3. Computational Fluid Dynamics (CFD)

Nárůst výpočetního výkonu počítačů v druhé polovině 20. století umožnil aplikaci numerických metod pro výpočet matematických problémů. Aeroelastické jevy lze popsat obyčejnými a parciálními diferenciálními rovnicemi. Obyčejné diferenciální rovnice se dají řešit jednodukovými postupy jako je Collatzova nebo Runge-Kuttova metoda. Tato práce se zabývá především řešením proudění, které je popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi. Obvyklým způsobem pro jejich řešení je metoda sítí. V první generaci byla vyvinuta metoda konečných diferencí (MKD). Ta však není vhodná pro komplikovanější geometrie. V období druhé světové války byly podniknuty první kroky

vývoje metody konečných objemů (MKO), která se pak stala základem celého oboru výpočetní mechaniky tekutin (Computational Fluid Dynamics – CFD). [15]

MKO, na rozdíl od MKD, dokáže díky integrální definici pracovat s nespojitostmi v řešení jako jsou rázové vlny. Při jejich výskytu se však mohou v řešení objevovat nefyzikální oscilace. Jednou z možností, jak těmto oscilacím zamezit, je přidání členu s umělou vazkostí. Jeho negativním důsledkem je však snížení řádu přesnosti metody. Pro zachování vyššího řádu přesnosti v oblastech hladkého řešení a zároveň zabránění vzniku oscilacím v místech nespojitosti lze použít například flux-limiter metody, které přepínají mezi dvěma metodami s požadovanými vlastnostmi.

CFD je nyní celý vědní obor zabývající se zkoumáním a výpočtem proudění s pomocí výpočetní techniky. Umožňuje relativně snadný přístup v podobě programu obsahující celý inženýrský postup (workflow).



Obrázek 3 Ukázka výsledku CFD simulace v programu TCAE [26]

3. Současné metody řešení aerodynamiky a aeroelasticity

3.1. Kontinuum a základní rovnice

Abychom mohli popisovat děje pevných a tekutých látek, zavádíme pojem kontinuum. Místo toho, abychom se snažili najít obecný popis celého prostoru, popíšeme pouze malý úsek. Velikost tohoto výřezu by jednak měla být co nejmenší, aby se na ní dala aplikovat infinitezimálnost derivací, ale zároveň dostatečně velká na to, aby obsahovala dostatečný počet prvků, jako jsou například molekuly plynu, neboť jinak by se nezachytily jednotlivé interakce. Z požadavků derivací vyplývá, že se musí jednat o spojitou oblast. Máme-li popsany tento malý prostor pomocí diferenciálních rovnic, můžeme poté použitím integrace model roztáhnout na úplnou výpočetní oblast.

3.1.1. Lagrangeův a Eulerův popis kontinua

Při popisu dějů diferenciálními rovnicemi nás hlavně zajímá, jak se zkoumaná oblast mění. Můžeme například sledovat, jak se pohybují jednotlivé molekuly, a to lze dvěma způsoby.

Lagrangeův přístup sleduje aktuální polohu každé částice kontinua. Výpočetní síť se pohybuje spolu s částicí (je s ní pevně spjatá) a v praxi to znamená, že je nutné tuto síť upravovat v průběhu výpočtu.

Nejčastěji se používá v pevnostních analýzách, kde pohyb částic je minimální.

Eulerův přístup popisuje místo polohy částic jejich rychlost. Výpočetní síť je v prostoru pevná a kontinuum se pohybuje vůči této síti. [10], [13].

3.1.2. Základní rovnice mechaniky tekutin

Když popisujeme proudění tekutiny, zajímá nás pohyb jednotlivých částic a to, jak se navzájem ovlivňují. Je-li splněna podmínka kontinua, můžeme pak určit fyzikální vlastnosti této tekutiny, jako je například rychlost, tlak, hustota nebo teplota.

Pro popis proudění tekutiny používáme rovnice vycházející ze tří základních zákonů – zachování hmoty, energie a hybnosti.

Změny jednotlivých vlastností můžeme popsat jako množství veličiny, které je přeneseno přes určitou hranici. Tento děj můžeme nazvat tokem fyzikální veličiny. Zajímá nás, kolik hmoty, energie nebo hybnosti přitéká a odtéká do určené (kontrolní) oblasti. [14]

Tok fyzikální veličiny lze dělit na dva základní mechanismy:

- konvekce

$$\nabla \cdot (\mathbf{vc})$$

- a difúze

$$\nabla \cdot (D\nabla c)$$

dávající dohromady obecnou rovnici konvekce-difúze [14]

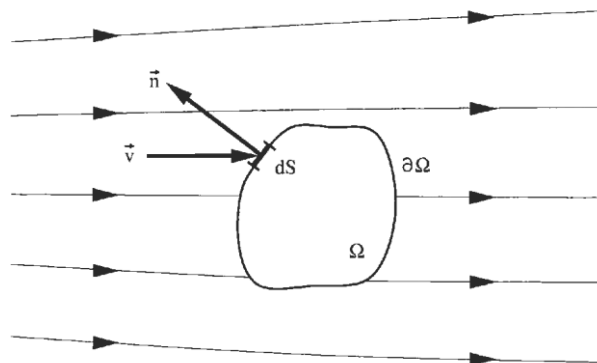
$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{vc}) + \nabla \cdot (D\nabla c) + R$$

kde

- c označuje bilancovanou fyzikální veličinu
- \mathbf{v} je rychlost pole, ve kterém se popisovaná veličina pohybuje
- D je difúzní koeficient – může být například dynamická viskozita tekutiny nebo tepelná vodivost látky
- R představuje vnitřní zdroj bilancované veličiny – například dodávané teplo
- ∇ značí gradient veličiny a $\nabla \cdot$ její divergenci

Pro představu konvekčního a difúzního mechanismu se hodí analogie vysypání soli do řeky. Představte si, že vysypete z mostu sůl do proudící řeky a chcete popisovat hustotu soli ve vodě. Sůl se bude rozšiřovat právě těmito dvěma mechanismy. Jednak zde bude probíhat rozpouštění na chemické úrovni – tedy difúze látky. To, jak je prostředí a látka náchylná k tomuto ději, popisuje difúzní koeficient. Dále bude docházet k přenášení soli vlivem proudění vody. Kromě víření vody se samotná oblast pohybuje spolu s tekoucí řekou. Rychlost proudění řeky můžeme přirovnat k rychlosti pole \mathbf{v} , dochází tedy ke konvekci (přenosu) fyzikální veličiny.

Podle zákona zachování hmotnosti se žádná hmota nesmí vytratit a její celková bilance musí být rovna nule. Představme si kontrolní objem Ω pevně umístěný v prostoru a jeho hranici $\partial\Omega$. Na této hranici můžeme vytnout malý úsek dS a k němu normálový vektor \mathbf{n} .



Obrázek 4 Kontrolní objem [10]

Zákon zachování nám říká, že bilance veličiny je rovna její akumulaci

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

a přítoku a odtoku skrze její hranici $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$$

Jelikož normálový vektor \mathbf{n} elementární plochy dS vždy směřuje ven z kontrolního objemu, udává se vtok jako záporný a výtok jako kladný člen.

Vzhledem k tomu, že zde nejsou žádné zdroje objemu nebo plochy (kontrolní objem je konstantní), pak integrální tvar zákona zachování hmoty má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\Omega} \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}) dS = 0$$

Diferenciální tvar zákona zachování hmoty má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

a pro nestlačitelnou tekutinu [10]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

který říká, že divergence rychlosti je rovna nule. V praxi to znamená, že proudí-li nestlačitelná tekutina pevným kontrolním objemem, nedochází zde k žádné akumulaci, tedy to, co přiteče přes hranici, musí i vytéci. Diferenciální tvar se hodí pro analytické řešení. V našem případě je bohužel analytické řešení příliš komplikované a často i nedosažitelné. Zákony zachování jsou primárně definovány pro integrální tvar, který má přirozenější podobu s ohledem na fyzikální skutečnost. Diferenciální tvar lze odvodit z integrálního za předpokladu diferencovatelnosti. Další výhodou je, že se můžeme vyhnout problémům, které nastanou s nástupem nespojitých dějů (jako je například rázová vlna), jenž jsou v rozporu s nároky na spojitě funkce u definice derivace.

V mechanice tekutin se provádí bilance hybnosti. Podobně jako v předchozím případě, i zde se hybnost přenáší difúzí a konvekcí. Difúze je zastoupena třením jednotlivých vrstev tekutin a konvekce samotným pohybem tekutiny. Bilance hybnosti vypadá takto

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \cdot \mathbf{M} + (\mathbf{f} - \nabla P)$$

Tato rovnice říká, jak se mění hybnost tekutiny v čase (levý člen). První člen vpravo je konvekce hybnosti, druhý člen difúze způsobená třením a poslední člen vpravo zastupuje vnitřní a vnější zdroj hybnosti – objemové síly a tlakový gradient. Můžeme si všimnout, že se jedná o již uvedenou obecnou rovnici konvekce-difúze s dosaženými konkrétními členy.

Po vydělení rovnice objemem (vztažení na jednotku objemu) a hustotou a za předpokladu, že máme newtonovskou tekutinu, dostáváme obecný tvar Navier-Stokesových rovnic [14]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

kde

- \mathbf{M} je vektor bilancované hybnosti tekutiny
- \mathbf{u} uvádí vektor rychlosti
- ρ je hustota tekutiny
- P představuje tlak a ∇P tlakový gradient (tlakový spád, rozdíl)
- \mathbf{g} je výslednice zrychlení z objemových silových účinků \mathbf{f} – setrvačné a tíhové síly
- μ stojí pro dynamickou viskozitu
- ν je kinematická viskozita ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$)

Tuto rovnici taky můžeme číst tak, že změnu rychlosti proudění tekutiny způsobuje tlakový rozdíl, setrvačné a tíhové účinky a tření samotné tekutiny.

Jako poslední zbývá zákon zachování energie. To není více než první zákon termomechaniky. Změna energie uchována ve vymezeném objemu (vnitřní energie U a kinetická energie c) může být provedena dvěma způsoby: vykonanou prací na tekutinu vnějšími silami a výsledným dodaným teplem.

Práce může být vykonána jednak napětím na povrchu, nebo objemovými silami uvnitř objemu (tíha, setrvačné síly, ...). Tepelný tok se řídí Fourierovým zákonem

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

kde

- q je vektor hustoty tepelného toku
- k je koeficient tepelné vodivosti
- T značí teplotní pole tekutiny

Tato rovnice nám v podstatě říká, že teplo teče opačným směrem, než ukazuje gradient teploty. Jednodušeji řečeno – teplo proudí z teplejšího místa na studenější. [12]

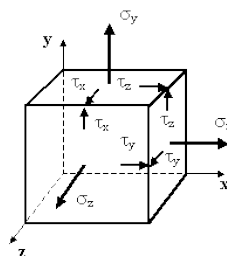
3.1.3. Základní rovnice pružnosti a pevnosti

Pro obecný popis třírozměrné struktury se používá systém patnácti diferenciálních rovnic o patnácti neznámých.

Napětí je definováno jako symetrický tenzor skládající se z normálových napětí σ a smykových napětí τ

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Předpokládáme, že všechny síly působící na těleso jsou v rovnovážném stavu, to znamená že je těleso v klidu, nebo se pohybuje přímočarým rovnoměrným pohybem [5].



Obrázek 5 Element tělesa v rovnováze [5]

Na objemu elementu tělesa dV musí být v každém směru všechny vnitřní účinky v rovnováze. To popisují rovnovážné rovnice

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Pro malé deformace platí, že vztah mezi napětím a posuvem je lineární. Pro normálové napětí

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

a pro smykové napětí [10]

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Vztah mezi napětím a deformací je popsán jako

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{ii} + \nu(\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk})] \quad , \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}$$

V dynamické analýze, která je důležitá v problematice aeroelasticity, je třeba vzít v potaz i setrvačné účinky hmoty. K tomu během deformace dochází i k tlumení vlivem disipace energie při tření jednotlivých molekul. Může tedy docházet ke kmitání. Tyto poznatky mají podobu soustavy rovnic

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \ddot{u}_i + \kappa \dot{u}_i = G_i$$

kde

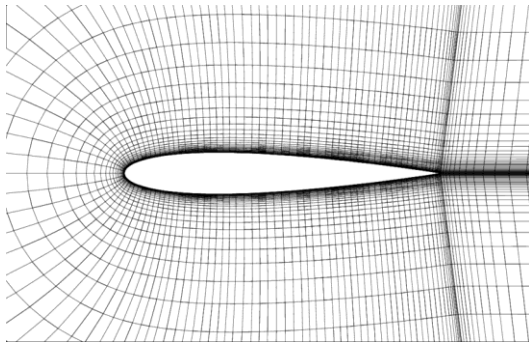
- $\rho \ddot{u}_i$ je člen představující setrvačný účinky
- $\kappa \dot{u}_i$ je tlumící člen, κ je koeficient viskózního tlumení na jednotku objemu
- G_i značí objemovou sílu ve směru i
- $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ zobrazuje změnu napětí napříč jednotlivými souřadnicemi, na okrajové podmínce se musí rovnat vnější působící síle [12]

3.2. Metody One-way a Two-way coupling

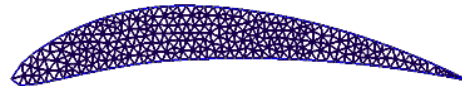
V Aeroelasticitě nás zajímají především interakce mezi tekutinou a pevným tělesem. Tekutina působí silovými účinky na těleso a způsobuje jeho pohyb nebo deformace. Současné řešení proudění tekutiny a deformace je však problematická z důvodu nekompatibility obvykle používaných metod. Pro popis proudění je tradičně používána eulerovská reprezentace a metoda konečných objemů, kdežto pro deformaci struktury lagrangeovská reprezentace a metoda konečných prvků.

Spojené systémy (Coupled systems) nám v aeroelasticitě popisují vzájemné propojení mezi tekutinou a pevným tělesem. Jsou to případy, kdy nemůžeme řešit pouze jednu stranu rozhraní, ale potřebujeme znát interakce mezi pevnou látkou a tekutinou.

Postupy při výpočtu můžeme rozdělit na monolitické a dělené metody. V mé práci se věnuji děleným metodám, a to One-way a Two-way coupling. Fyzikální informace na rozmezí obou domén jsou přenášeny mezi jednotlivými řešiči na straně mechaniky tekutin a pevnostní analýzy [3].



Obrázek 6 Eulerovská síť pro výpočet proudění (CFD)[8]



Obrázek 7 Lagrangeovská síť pro výpočet pevnostní analýzy (FEA)[9]

3.2.1. One-way coupling

Metoda One-way coupling používá pouze přenos informace z tekutiny na pevné prostředí. Nejdříve se vypočtou strukturální vlastnosti látky jako třeba vlastní frekvence, a to bez interakce s tekutinou. Poté probíhá výpočet proudového pole, s okrajovými podmínkami vzatých z prvního kroku, dokud výsledek nezkonverguje. One-way coupling nezaručuje zachování energie a je vhodné spíše pro výpočty, kde nedochází k relativně velkým deformacím. Výhody oproti One-way coupling jsou nižší výpočetní čas a kvalitnější síť na straně tekutiny. [3]

3.2.2. Two-way coupling

Two-way coupling umožňuje vzájemné vyměňování informací mezi tekutinou a pevnou látkou. V tomto případě se jedná o nestacionární (transient) výpočet proudového pole. Po zkonvergování výpočtu proudění se interpolují informace o silách na rozhraní do výpočetní sítě pevné látky, kde pak probíhá pevnostní výpočet s hodnotami z proudění. Jakmile se zde získají zkonvergované hodnoty, tak se vypočtené posuvy interpolují do sítě tekutiny. Tím se ukončí jedna smyčka z celkové simulace, která se opakuje, dokud změny posunu a interpolovaných sil neklesnou pod danou mez. Poté se spustí simulace v dalším časovém kroku [6]. Jelikož zde probíhají deformace, tak se nám výpočetní doména mění v průběhu výpočtu a je třeba výpočetní síť přegenerovat.

3.2.3. Monolitické řešiče

Pro fully-coupled model jsou obecné rovnice přeformovány tak, aby obsahovaly jak strukturální, tak i tekutinový popis a mohly být řešeny zároveň v jeden okamžik v průběhu výpočtu. Prvním problémem je nutnost se vypořádat s kombinací Eulerovského a Lagrangeovského popisu. Matice řešené ve výpočtu jsou výrazně řidší pro strukturální část. [18] Využití takového monolitického řešiče může být například ve výpočetní medicíně. Zde se strukturální část v podobě například cév blíží svojí hustotou tekutině v podobě krve. Poté dokáže být fully-coupled metoda velmi efektivní. [19]

3.2.4. Energetická metoda

Energetická metoda řešení aeroelasticity a flutteru spočívá v bilanci práce vykonané tekutinou na povrchu aerodynamického prvku v průběhu jedné periody kmitu. Aerodynamická síla pro výpočet práce se získá z tlaků na povrchu stěny. Pokud je tato práce kladná, znamená to, že se dodává do systému aerodynamická práce, a tedy energie a tím pádem může být soustava nestabilní. Záporná hodnota aerodynamické práce pak znamená, že koeficient tlumení (mechanické + materiálové) je kladný. Tím pádem nedojde k nestabilní situaci, jakou by mohl být například flutter křídla. [23]

3.3. EALE

Eulerian-arbitrary Lagrangian-Eulerian (EALE) je technika pro řešení Eulerovského-Lagrangeovského rozhraní mezi strukturální a tekutinovou částí výpočetní oblasti. Je použit monolitický řešič a výpočetní oblast je rozdělena na dvě pod-domény s různými numerickými řešeními. Konečné diference se používají pro časovou integraci a Galerkinova metoda pro prostorové diskretizace. Nelineární části se řeší Newtonovou metodou. Postup řešení EALE metodou je v [19].

3.3.1. Rovnice pro pohyblivou síť

Musíme-li použít pohyblivou výpočetní síť, jsou rovnice popisující proud tekutiny vyjádřeny relativně vůči pohybu sítě. Pro rychlost v těchto rovnicích platí

$$\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_m$$

kde v_f značí rychlost proudění tekutiny a v_m rychlost pohybu sítě. Pro představu, máme-li rovnici kontinuity z kapitoly 3.1.2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

tak dostaneme po dosazení

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\vec{v}_f - \vec{v}_m]) = 0$$

a v Navier-Stokesových rovnicích dostaneme po dosazení tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho u_i [\vec{v}_f - \vec{v}_m]) = \nabla \cdot (\mu \nabla u_i) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + S_{u_i}$$

Na rozhraní tekutiny a strukturální části výpočetní oblasti se rychlost proudění tekutiny rovná rychlosti pohybu sítě a tím nám vzniká okrajová podmínka

$$\vec{v}_{op} = \vec{v}_m \text{ na okraji } \Gamma_s$$

Vzniká nám tedy nový člen $-\nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}_m)$ v N.-S. rovnicích a $-\nabla \cdot (\rho \vec{v}_m)$ v rovnicích kontinuity. [20]

Integrací uvedené N.-S. rovnice a aplikací Greenovi věty dostáváme tvar

$$\int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Gamma_{cv}} \rho u_i [\vec{v}_f - \vec{v}_m] \cdot \vec{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{cv}} \mu (\nabla u_i \cdot \vec{n}) d\Gamma + \int_{\Omega_{cv}} S_{u_i} d\Omega$$

Dále si musíme dát pozor, aby rychlost pohybu sítě zachovávala (geometrický) zákon zachování, který lze obecně formulovat jako

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

kde V kontrolní objem. Slovy lze tento zákon vyjádřit jako, že změna objemu mezi dvěma časovými kroky se musí rovnat vzniklému či zaniklému (neboli dodanému) objemu na okraji buňky. [21]

Transientní, difúzní a zdrojový člen N.-S. rovnic a rovnic kontinuity je diskretizován standardním způsobem [22], kdežto konvektivní člen

$$\oint_{\Gamma_{cv}} \rho u_i [\vec{v}_f - \vec{v}_m] \cdot \vec{n} d\Gamma$$

pro pohyblivou síť se aproximuje jako

$$\sum_{face=1}^{N_f} \int_{face} \rho u_i [\vec{v}_f - \vec{v}_m] d\Gamma \cong \sum_{face=1}^{N_f} [\rho u_i (A_f \vec{v}_f \cdot \vec{n}) - \rho \frac{\delta V}{\Delta t}]_{face}$$

kde N_f je celkový počet stěn v kontrolním objemu, A_f značí plochu stěny kontrolního objemu a člen $\frac{\delta V}{\Delta t}$ určuje zaniklý objem buněk za jeden časový krok. [20]

4. Numerické řešení obtékání profilu

4.1. Matematický model

V praktické části jsem se věnoval programování simulace proudění kolem profilu křídla. Pro tuto numerickou simulaci bylo třeba zavést matematický model popisující tento problém. To obsahuje použité rovnice, definici výpočetní oblasti, diskretizaci rovnic a výběr numerického schématu.

4.1.1. Eulerovy rovnice

Eulerovy rovnice popisují proudění nevazké tekutiny. Získáme je tak, že v Navier-Stokesových rovnicích zanedbáme člen popisující třecí účinky tekutiny. [11]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Ulehčuje to programování numerického řešiče. Nemusí se zde diskretizovat komplikovaný tenzor napětí. Přijdeme tím pak ale o možnost počítat třecí koeficient. Samozřejmě, že se pak musí počítat s jistou chybou ve výsledcích, ale děláme-li orientační výpočet proudění okolo profilu křídla, musí nám tyto podmínky stačit. Jelikož je používaný popis zjednodušen na 2D model, použijeme rozpis vektorové Eulerovy rovnice do dvou směrů. Systém se poté ještě doplní konstitutivní rovnicí ideálního plynu

$$pv = rT$$

4.1.2. Výpočetní oblast a okrajové podmínky

V našem řešení je výpočetní oblast prostor ohraničený stěnou profilu křídla a dostatečně vzdáleným okrajem.

Jelikož řešíme diferenciální rovnice, musíme stanovit okrajové a počáteční podmínky ve výpočetní oblasti.

Na vstupu proudění jsem používal okrajovou podmínku typu *freeStream*. Definuje se zde vektor proměnných W (hustota, hybnosti v jednotlivých směrech a energie). Hybnost se počítá z rychlosti na vstupu, tedy rychlosti nenarušené tekutiny c_∞ a předpokládá se, že tudy může tekutina proudit jak dovnitř, tak i ven z výpočetní oblasti. Vstupní rychlost představuje relativní rychlost pohybu profilu vůči tekutině. Jelikož je rychlost vektor, můžeme jeho směrem měnit úhel náběhu profilu. V konfiguračním souboru se určuje jeho x-ová a y-ová složka.

Na výstupu se používá okrajová podmínka typu *outlet*. Na tomto okraji se hodnoty extrapolují ze sousedních buněk ve výpočetní oblasti.

Na samotném profilu je předepsána okrajová podmínka typu *wall*. Předepisuje se podmínka tečnosti vektoru rychlosti ke stěně profilu, tedy nulová normálová složka vůči stěně. Hustota a energie se extrapoluje z buňky u stěny. [11]

4.2. Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů je nejčastější prostředek pro výpočet problémů v oblasti mechaniky tekutin.

Integrujeme-li obecnou parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0$$

a aplikujeme-li Greenovu větu, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} dS + \oint_{\partial D} (\mathbf{F}(\mathbf{W}) + \mathbf{G}(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

kde

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}$$

a nahradíme-li integrály přes hranici D_i numerickými toky a časovou derivaci explicitním Eulerovým schématem

$$\frac{dW}{dt} = \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}$$

dostaneme po dalších úpravách

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_i)} \sum_{k=1}^m f_{i,k}^n \Delta y_{i,k} - g_{i,k}^n \Delta x_{i,k}$$

V našem případě pro 4-strané buňky vypadá naše rovnice takto:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 (F_{i,k}^n, G_{i,k}^n) \cdot \vec{n}_k \cdot \Delta \delta_k = W_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \Phi_k$$

kde

- Δt je časový krok
- $|\Omega_i|$ značí plochu buňky
- \vec{n}_k je normála stěny buňky
- $\Delta \delta_k$ uvádí délku stěny
- Φ_k je fyzikální tok mezi dvěma sousedními buňkami [11]

4.3. Výpočetní síť

Pro výpočet byla zvolena 2D C-shaped síť. Jedná se o strukturovanou síť o rozměru 35 x 156 čtyřúhelníků, tedy o celkovém počtu 5460 buněk.

Síť získáváme z takzvaných generátorů. Zadává se geometrie objektu, okolo kterého simulujeme proudění, a to buď například pomocí .stl modelu nebo v jednodušších případech tabulkou bodů. Dále se definuje vnější hranice výpočetní oblasti a parametry jemnosti sítě. Generátor proloží oblast body, které pak spojí a vytvoří výpočetní síť.

Body použité sítě byly vygenerovány v programu Ansys ICEM CFD.

Tuto oblast rozdělíme na jednotlivé geometrické obrazce, zvané buňky, potřebné k implementaci metody konečných objemů. V našem 2D případě se jedná o obecné čtyřúhelníky. Čím budou buňky menší a tím pádem výpočetní pole jemnější, tím se teoreticky budeme blížit k přesnějšímu výsledku numerické simulace. Na druhé straně vyšší počet buněk znamená delší výpočetní čas, tudíž záleží, jakou máme k dispozici výpočetní techniku. Jelikož jsem výpočetní program vytvářel od nuly, bylo nutné dělat mnoho doladování a testování jak kódu, tak vstupních parametrů simulace, tak jsem potřeboval dostávat výsledek v řádu minut výpočetního času.

4.4. Laxovo-Friedrichsovo schéma

Bylo zvoleno Laxovo-Friedrichsovo explicitní schéma. Je použita *cell-central* reprezentace, to znamená, že vektor proměnných W reprezentuje hodnoty ve středu buňky. Hodnotu na stěně pro výpočet toku mezi sousedními buňkami je proto nutné aproximovat na základě hodnot v přilehlých buňkách, a to právě pomocí Laxovo-Friedrichsova schématu.

V kapitole 4.2. je předepsané obecné schéma, ale je stále třeba určit tok Φ_k . Ten se v tomto případě počítá jako

$$\phi_k^{LF} = \phi^L - \varepsilon \frac{\|\Omega\|}{4\Delta t} (W_k - W_p)$$

První člen (ϕ^L) představuje aproximaci centrálním schématem, které je však nestabilní:

$$\phi_k^L = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_p), \frac{1}{2}(\mathbf{G}_k - \mathbf{G}_p) \right] \cdot \vec{n}_k \Delta \delta_k$$

Kvůli nestabilitě je zde druhý člen. Ten představuje umělou vazkost pro stabilizaci numerického schématu. Míru umělé vazkosti je možné regulovat koeficientem $\varepsilon \in \langle 0; 1 \rangle$. Pro volbu $\varepsilon = 0$ získáme nestabilní schéma a pro $\varepsilon = 1$ vysoce disipativní Laxovo-Friedrichsovo schéma.

Pro stabilní numerický výpočet musíme dodržet podmínky stability. Ta je v našem případě

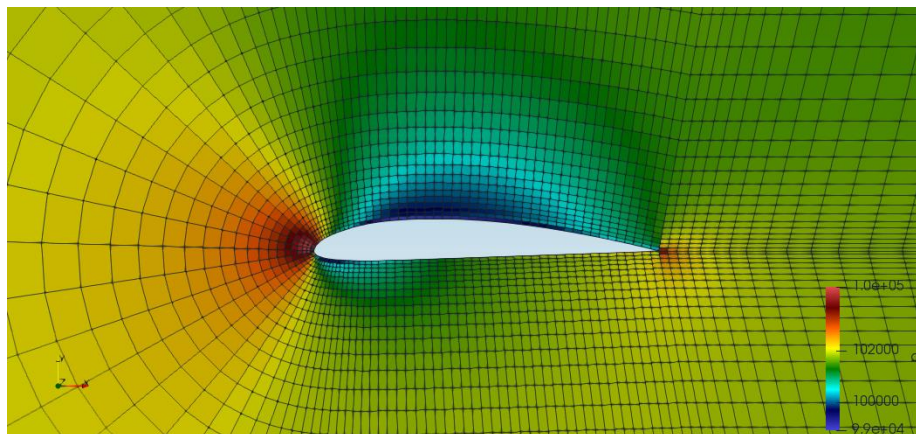
$$\Delta t \leq \min \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\Delta x}{|u| + c}, \sqrt{\varepsilon} \frac{\Delta y}{|v| + c} \right), c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

kde

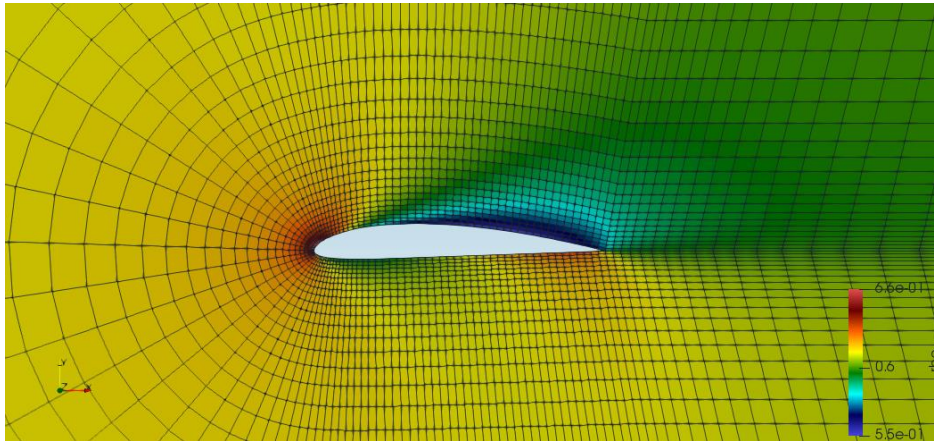
- ε značí koeficient umělé vazkosti
- Δx a Δy jsou rozměry buňky v x-ovém a y-ovém směru
- u a v je x-ová a y-ová složka rychlosti
- κ je poissonova konstanta [11]

4.5. Výsledky programu 2Deuler

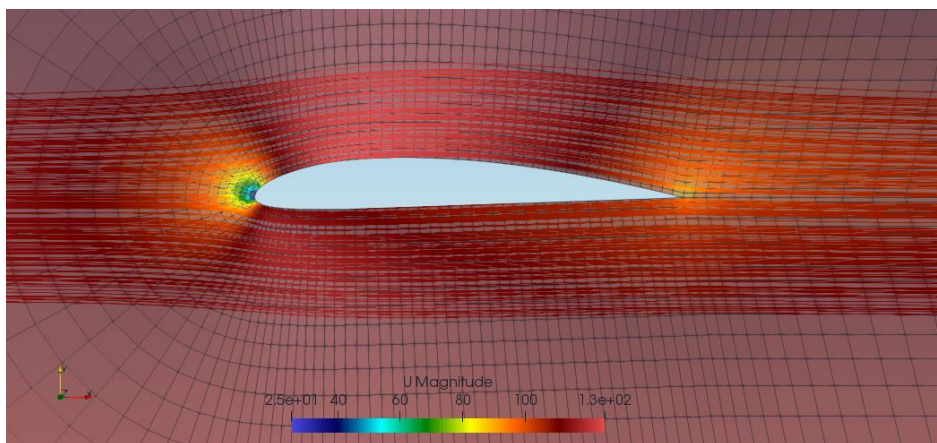
Program byl napsán v jazyce C++. Vstupní parametry simulace jsou v textovém souboru *control.cfg* a strukturovaná síť se načítá v podobě seznamu bodů ve formátu *.csv*. Výstupem je samotná síť s poli hodnot v ASCII formátu *.vtk*, který se dá načíst v open-source programu *ParaView*. Dalším výstupem jsou textové soubory dat residuí, hodnot vztlakového koeficientu a tlaků na stěně profilu, které spouští *gnuplot* skript generovaný samotným programem. Simulace potřebuje přibližně 70 000 iterací, aby byly výsledky dostatečně zkonvergovány. U posuzování zkonvergovanosti jsem se řídil vývojem hodnoty vztlakového koeficientu, tedy lišilo-li se CI od zkonvergované hodnoty přibližně o 0,1%. Finální výsledky byly počítány na 100 000 iterací. Běh simulace trvá na jednom slabším jádře přibližně půl hodiny.



Obrázek 6 Výsledné rozložení tlaku pro $\varepsilon = 0.055$ a $U = 120$ m/s



Obrázek 7 Výsledné rozložení hustoty vzduchu pro $\epsilon = 0.055$ a $U = 120$ m/s



Obrázek 8 Zobrazení rychlosti proudění pomocí Stream tracer v Paraview pro $\epsilon = 0.055$ a $U = 120$ m/s

4.5.1. Historie reziduí a vliv hodnoty umělé vazkosti na řešení

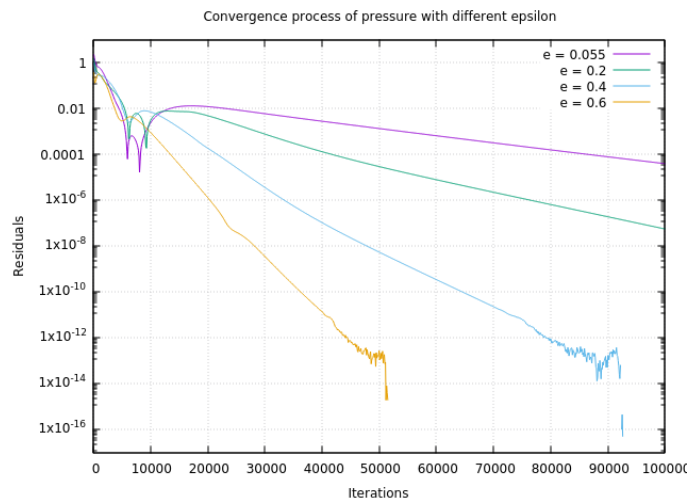
Ke kontrole, zda výpočet konverguje se používají rezidua. Ukazují nám míru změny hodnot v následující iteraci oproti té předchozí. Obecně platí

$$res(u) = \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}$$

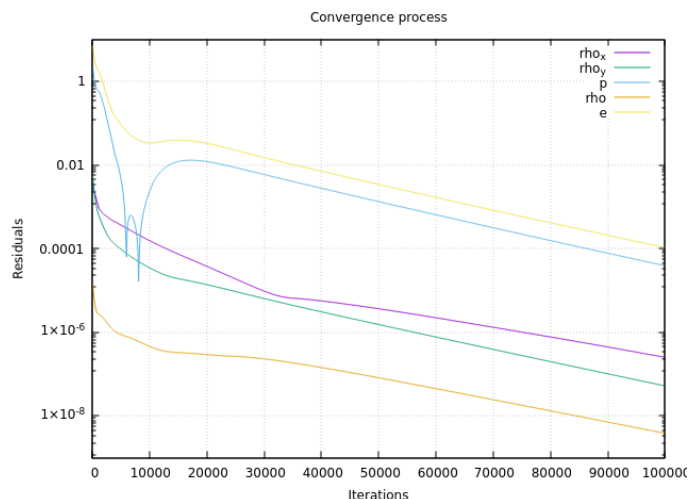
Pro výpočet napříč všemi buňkami jsem použil vztah

$$res(u) = \frac{\sum_k ||\Omega_i|| (u^{i+1} - u^i)}{\sum_k ||\Omega_i||}$$

U konvergujícího výpočtu se tento rozdíl bude stále zmenšovat. Taky to pomáhá určit, kolik výpočet potřebuje iterací. Rezidua se zapisují během simulace do textového souboru, z kterého si pak bere data *gnuplot* skript.



Obrázek 9 Rezidua tlaku pro různá epsilon



Obrázek 10 Historie reziduí finálního výpočtu s eps = 0.055

Konstanta ε v numerickém schématu nám určuje velikost členu s umělou vazkostí. Měla by být co nejnižší, abychom dostali co nejpřesnější výsledek, zároveň však musí být zachována stabilita schématu. Pohyboval jsem se v rozmezí 0,055 – 0,6. Jako finální hodnoty jsem nakonec volil $\varepsilon = 0,055$. V případech menších než $\varepsilon = 0,055$ začaly vznikat oscilace tlaku napříč vrstvami buněk směrem od stěny profilu.

Hodnoty vztlakového koeficientu vycházela pro různá epsilon jako

epsilon	Cl
0,055	0,321
0,2	0,15
0,4	0,06
0,6	0,03
experiment	0,385

z čehož lze, vyzorovat, že společně s hodnotou umělé vazkosti se simulace blížila výsledku z experimentu [27]. Porovnání výsledků vztlakového koeficientu pomohlo lépe navolit co nejlepší hodnotu epsilon.

4.5.2. Vztlakový koeficient

Vztlakový koeficient se počítá podle klasického vzorce

$$c_l = \frac{F_y}{0,5 \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref}}$$

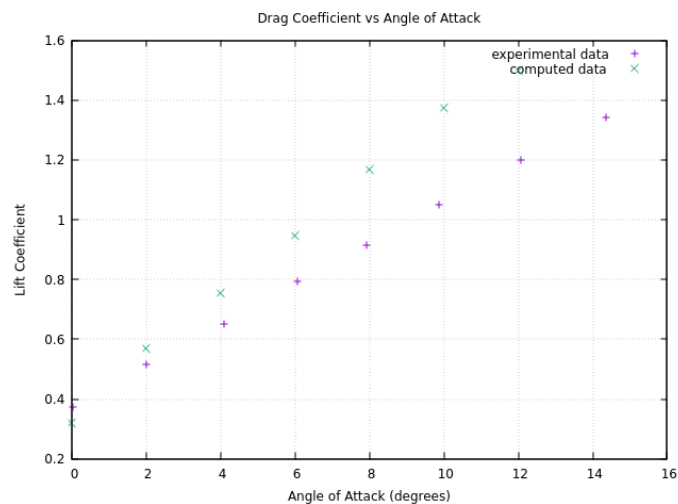
Jelikož se jedná o 2D simulaci, bere se A_{ref} jako délka tětiny profilu křídla. F_y se získá integrací tlaků po stěně profilu

$$\int d\vec{F} = \int p \cdot d\vec{l}$$

a pomocí numerické aproximace dostaneme

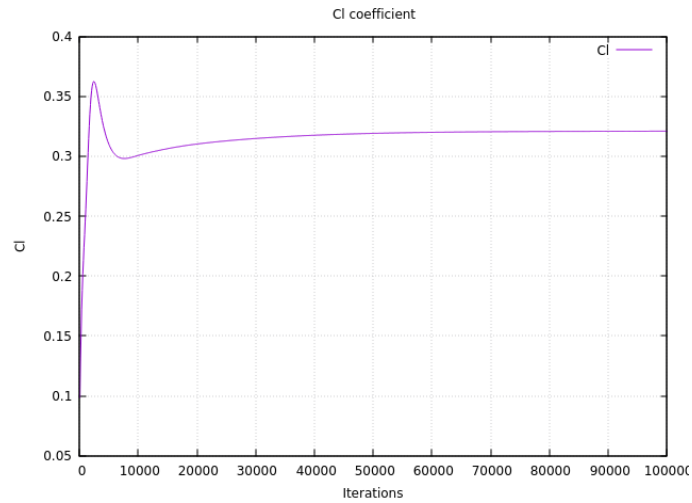
$$\vec{F} \cong \sum_{i=1}^n p_i \vec{n}_i \cdot l_i$$

Obr. 11 znázorňuje výsledky simulace výpočtu odporového koeficientu s daty z experimentálního měření [27].



Obrázek 11 Závislost c_l na úhlu náběhu

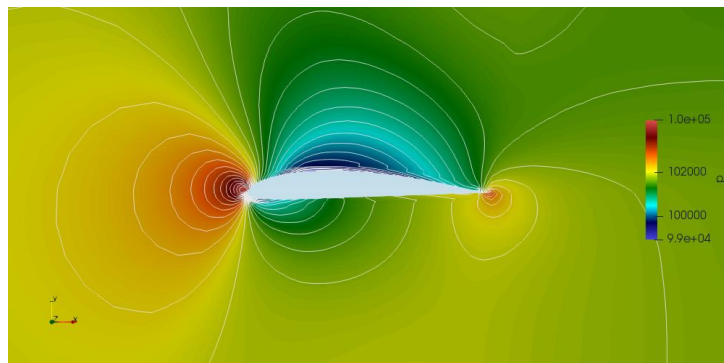
Na *obr. 12* lze vidět průběh hodnoty vztlakového koeficientu, jehož hodnota zkonverguje přibližně po 70 000 iteracích.



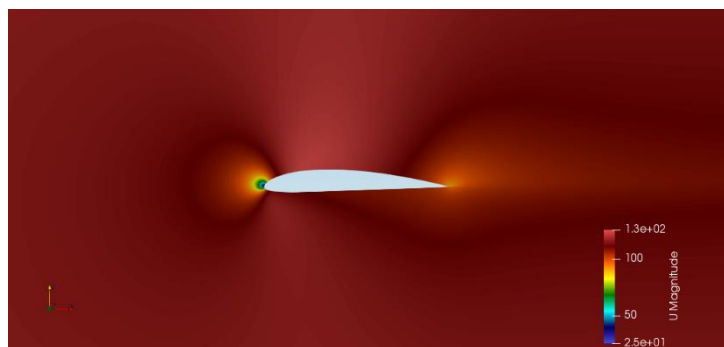
Obrázek 12 Konvergence vztlačového koeficientu napříč iteracemi simulace

4.5.3. Výsledky pro různé hodnoty koeficientu umělé vazkosti

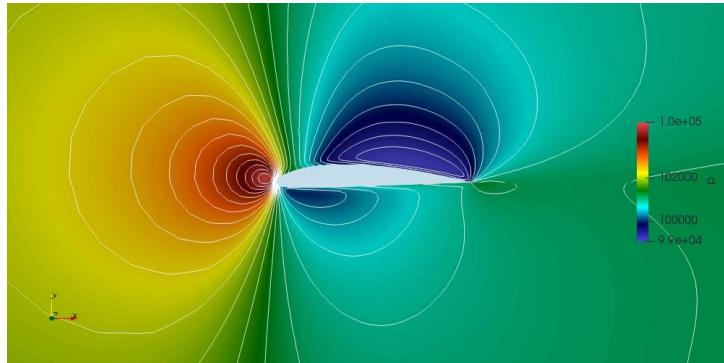
Následující výsledky byly vypočteny pro různé hodnoty epsilon při rychlosti proudění na vstupu 120 m/s a počítány na 100 000 iterací.



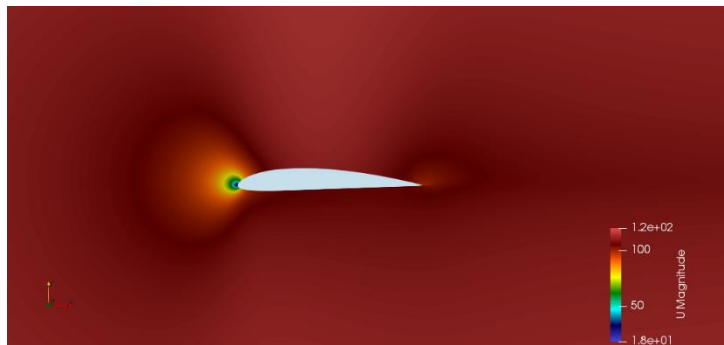
Obrázek 13 Kontury tlaku pro $e = 0.055$



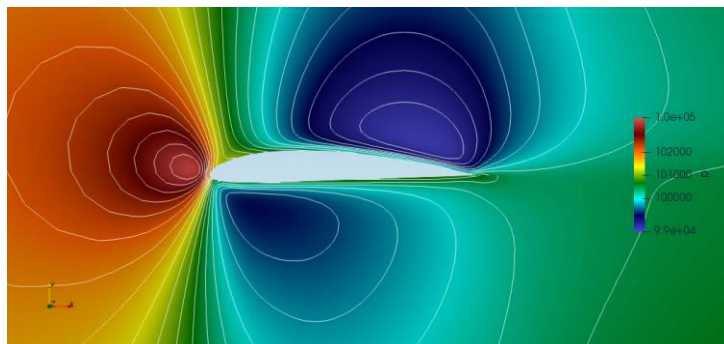
Obrázek 14 Rozložení rychlosti pro $e = 0.055$



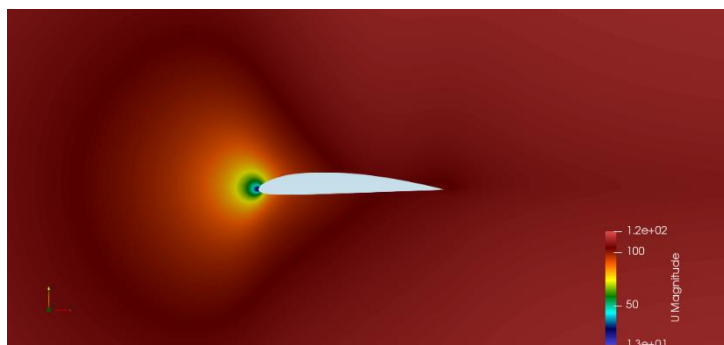
Obrázek 15 Kontury tlaku pro $\epsilon = 0.2$



Obrázek 16 Rozložení rychlosti pro $\epsilon = 0.2$

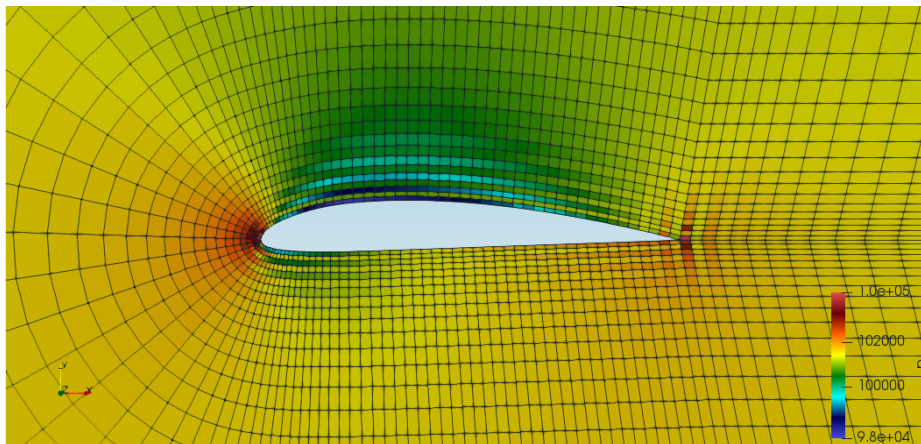


Obrázek 17 Kontury tlaku pro $\epsilon = 0.4$



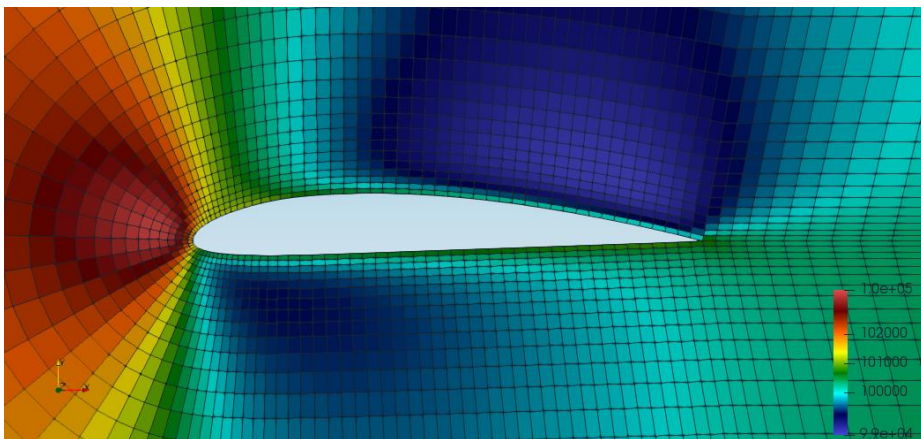
Obrázek 18 Rozložení rychlosti pro $\epsilon = 0.4$

Na obr. 19 lze vidět oscilace tlaku napříč buněčnými vrstvami, je-li parametr umělé vazkosti příliš nízký.



Obrázek 19 Projev oscilací tlaku pro $\epsilon = 0.01$

Obr. 20 naopak znázorňuje, jak vypadá rozložení tlaku při vyšším epsilon. Podtlaková kapsa je posunuta do zadní části profilu a „nedoléhá“ až na stěnu křídla, což způsobuje silné zkreslení ve výpočtu odporového koeficientu.



Obrázek 20 Rozložení tlaku pro $\epsilon = 0.6$

Závěr

V mé práci jsem se věnoval oboru aeroelasticity, který zkoumá působení aerodynamických sil na aerodynamické prvky, jakým je především křídlo letadla. Na začátku práce jsem se věnoval jednotlivým problémovým jevům, se kterými se můžeme setkat u leteckých konstrukcí a které mohou mít až fatální následky. Provedl jsem rešerši vývoje metod, které mají tyto problémové jevy odhalit. Zejména dnešní moderní výpočetní nástroje jako je CFD nebo FEA. Dále jsem představil základní rovnice, podle kterých se řeší proudové pole a strukturální analýza. Po obecném nahlédnutí na matematicko-fyzikální pohled jsem se věnoval metodám, jako jsou coupled (one-way, two-way či fully coupled) nebo energetické metody, pro řešení rozhraní tekutina/pevná látka, se kterým se právě v aeroelasticitě setkáváme. Praktickou část naplňuje vlastně napsaný simulační program pro rovinné nevazké proudění v C++. Byl použit model založený na Eulerových rovnicích, tedy jsem zanedbal vazkost tekutiny. Pro numerický výpočet metodou konečných objemů bylo zvoleno Laxovo-Friedrichsovo schéma, které je ale velmi disipativní. Pro snížení disipace byl používán člen s umělou vazkostí, jehož míra byla regulována koeficientem ϵ .

V průběhu výpočtu jsem sledoval konvergenci pomocí zapisovaných reziduí a vývoje hodnoty vztlakového koeficientu. Výsledné hodnoty byly výrazně ovlivněny hodnotou koeficientu umělé vazkosti.

I přes všechna zjednodušení se vypočtený vztlakový koeficient dobře shodoval s daty z experimentálního měření.

Zdroje

- [1] SLAVÍK S., *Aeroelasticita leteckých konstrukcí*, Vydavatelství ČVUT, 1997.
- [2] <http://www.slavetind.cz/stavba/Mechanika/Aeroelastickejevy.aspx>
- [3] BENRA F.-K., DOHMEN H. J., PEI J., SCHUSTER S., WAN B. *A Comparison of One-Way and Two-Way Coupling Methods for Numerical Analysis of Fluid-Structure Interactions*.
- [4] HONZÁTKO R. *Numerical Simulations of Incompressible Flows with Dynamical and Aeroelastic Effects*, Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague, 2007.
- [5] http://mechanika2.fs.cvut.cz/sources_old/pp1/teor31.htm
- [6] COLLAR A. R. *The Expanding Domain of Aeroelasticity*, The Royal Aeronautical Society, 1946.
- [7] THEODERSEN T. *General Theory of Aerodynamics Instability and the Mechanism of Flutter*, Report No. 496, National Advisory Committee for Aeronautics. Langley Aeronautical Lab., Langley Field, VA, United States, 1949.
- [8] <https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/examples/gmsh/gmsh.html>
- [9] <https://ars.els-cdn.com/content/image/3-s2.0-B9781782421856500015-f01-01-9781782421856.gif>
- [10] BLAZEK, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Oxford: Elsevier, 2001. ISBN 0080430090.
- [11] KOZEL, K., FÜRST J. *Numerické metody řešení problémů proudění I*, Ediční středisko ČVUT.
- [12] DOI, H. *Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows in Turbomachinery*, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2002.
- [13] DONEA J., HUERTA A., PONTHOT J.-Ph., RODRÍGUEZ-FERRAN A. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*, Liège: Université de Liège, Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya,
- [14] ŠESTÁK J., RIEGER F. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*, Vydavatelství ČVUT, 1998.
- [15] MÍKA S., BRANDNER M. *Stručná historie metody konečných objemů*, Západočeská univerzita, 2014.
- [16] https://www.researchgate.net/figure/Computational-grid-of-NACA-0012-airfoil_fig1_299645082
- [17] PERRY B. *Re-Computation of Numerical Results Contained in NACA Report No. 496*, Hampton, Virginia: Langley Research Center, 2015.
- [18] KAMAKOTI R., SHYY W. *Fluid-Structure Interaction for aeroelastic applications*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida, 2005.
- [19] WICK T. *Coupling of Fully Eulerian and Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods for Fluid-Structure Interaction Computations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

- [20] SLONE A. K., PERICLEOUS K., BAILEY C., CROSS M. *Dynamic Fluid-Structure Interaction Using Finite Volume Unstructured Mesh Procedures*
- [21] FARHART C., LESOINNE M., MAMAN N. *Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution*, Int J Numer Meth Fluids, 1995
- [22] CROFT N., PERICLEOUS K., CROSS M. *PHYSICA: a multiphysics environment for complex flow processes*, Numer Meth Laminar Turbulent Flow, 1995.
- [23] KLEČKOVÁ J. *Modelování aeroelastických jevů se zaměřením na predikci flutterů turbínových lopatek*, Fakulta aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni, 2019.
- [24] <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/tunhwv.html>
- [25] LAX P. D., WENDROFF B. *Systems of Conservation Laws*, Communications on Pure and Applied Mathematics 13, 1960.
- [26] <https://www.cfdsupport.com/img/TCFD-Spitfire-pressure-velocity-streamtraces-side-detail.png>
- [27] MARCHMAN J. F., WERME T.D. *Clark-Y Airfoil Performance at Low Reynolds Numbers*, Virginia Polytechnic Institute and State Univ., Blacksburg, VA, 1984.
- [28] ZEILER T., *Results of Theodorsen and Garrick Revisited*, Journal of Aircraft Vol. 37, No. 5, 2000.