

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Poklopová Jméno: Tereza Osobní číslo: 438481  
Zadávací katedra: K132 - Katedra mechaniky  
Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Predikce odezvy geotechnické úlohy užitím Hoek-Brownova modelu - implementace a verifikace

Název diplomové práce anglicky: Prediction of the response of geotechnical structure using Hoek-Brown model - implementation, verification

Pokyny pro vypracování:

1. Studium odborné literatury
2. Implementace nelineární Hoek-Brown podmínky porušení do softwaru GEO5 FEM
3. Vytvoření modelových příkladů pro testování
4. Porovnání výsledků s Mohr-Coulombovým materiálovým modelem

Seznam doporučené literatury:

1. M. Šejnoha, T. Janda, J. Pruška, M. Brouček. Metoda konečných prvků v geotechnice. Nakladatelství ČVUT, 2015
2. E. Hoek, E.T. Brown. Practical estimates of rock mass strength. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 34, No 8. 1997
3. Plaxis 2019 Manual

Jméno vedoucího diplomové práce: Prof. Michal Šejnoha

Datum zadání diplomové práce: 27.9.2019

Termín odevzdání diplomové práce: 5.1.2020

*Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku*

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

# SPECIFIKACE ZADÁNÍ

Jméno diplomanta: Bc. Tereza Poklopová

Název diplomové práce: Predikce odezvy geotechnické úlohy užitím Hoek-Brownova modelu -  
- implementace a verifikace

Základní část: K132 - prof. Michal Šejnoha podíl: 100 %

Formulace úkolů: Teoretické základy standardní Hoek-Brownovy podmínky porušení,  
sestavení algoritmů pro numerické výpočty,  
implementace algoritmů do konečně-prvkového programu GEO5 FEM,  
verifikace použitého algoritmu na základě výpočtů na jednoduchých numerických modelech,  
výpočet geotechnické úlohy s použitím Hoek-Brownova materiálového modelu a porovnání  
výsledků s výpočtem založeným na Mohr-Coulombově materiálovém modelu

Podpis vedoucího DP: ..... Datum: .....

Případné další části diplomové práce (části a jejich podíl určí vedoucí DP):

2. Část: ..... podíl: ..... %

Konzultant (jméno, katedra): .....

Formulace úkolů: .....

Podpis konzultanta: ..... Datum: .....

3. Část: ..... podíl: ..... %

Konzultant (jméno, katedra): .....

Formulace úkolů: .....

Podpis konzultanta: ..... Datum: .....

4. Část: ..... podíl: ..... %

Konzultant (jméno, katedra): .....

Formulace úkolů: .....

Podpis konzultanta: ..... Datum: .....

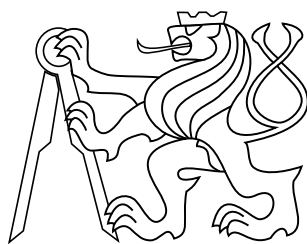
Poznámka:

Zadání včetně vyplněných specifikací je nedílnou součástí diplomové práce a musí být přiloženo k odevzdané práci. (Vyplněné specifikace není nutné odevzdat na studijní oddělení spolu s 1. stranou zadání již ve 2. týdnu semestru)

Diplomová práce

**Predikce odezvy geotechnické úlohy užitím  
Hoek-Brownova modelu - implementace  
a verifikace**

*Bc. Tereza Poklopová*



Praha 2020

Vedoucí práce: Prof. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D., DSc.

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta stavební, Katedra mechaniky



## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především panu Prof. Ing. Michalu Šejnohovi, Ph.D., DSc. za jeho odborné vedení a vstřícný přístup při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Barnabáši Polákovi za ochotu a čas, kterým se podílel na přípravě kontrolních výpočtů v Plaxisu.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně za odborného vedení vedoucího práce Prof. Ing. Michala Šejnohy, Ph.D., DSc. Dále prohlašuji, že veškeré informační zdroje, ze kterých jsem čerpala, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Praze dne 6.1.2020

Podpis autora: .....

## **Abstrakt**

Nelineární Hoek-Brownovo kritérium porušení popisuje odezvu horninového masivu, přičemž k horninovému masivu je přistupováno jako k izotropnímu materiálu. Ve výpočtech metodou konečných prvků má kritérium porušení význam podmínky plasticity vymezující elastickou oblast odezvy. Hlavním tématem práce je sestavení algoritmu pro návrat na plochu plasticity a výpočet korektního pole napětí a deformace s ohledem na plastické přetváření. Předpoklady jsou elastický-perfektně plastický vztah mezi napětím a deformací a neasociovaný zákon plastického přetváření. Míra dilatance je uvažována konstantní nezávislá na aktuálním poli napětí. Algoritmus bere ohled na singularitu plochy plasticity a zahrnuje návrat na její hranu při specifickém způsobu zatěžování bez nahrazování ostrých hran hladkými plochami. Verifikace algoritmu implementovaného do konečně-prvkového programu GEO5 MKP je podložena podrobným rozbohem vývoje napětí a deformace při simulaci jednoduchých laboratorních testů v triaxiálu a edometru. Dále se práce věnuje úloze stability svahu a výpočtu stupně bezpečnosti, který je obecně založen na redukci smykových parametrů pevnosti. Ty však v Hoek-Brownově podmínce plasticity přímo nevystupují. Podobnost s Mohr-Coulombovou plochou plasticity nabízí možnost odvození ekvivalentních smykových parametrů a porovnání odezvy řešených úloh s použitím dvou různých podmínek plasticity.

## **Název práce**

Predikce odezvy geotechnické úlohy užitím Hoek-Brownova modelu - implementace a verifikace

## **Klíčová slova**

Hoek-Brownova podmínka porušení; nelineární funkce plasticity; návrat na plochu plasticity; mechanika hornin; MKP

## **Abstract**

Nonlinear Hoek-Brown criterion is used for describing the response of a rock mass when the rock mass is treated as isotropic. In finite element calculations, the failure criterion has a meaning of a yield function bounding the elastic response. The main goal of this work is the presentation of the stress update algorithm for the determination of correct stress and strain fields. Assumptions are elastic-perfectly plastic stress and strain relation and non-associated flow rule. Rate of dilation is considered constant independent of the current stress field. The algorithm takes into account singularities of the yield surface and deals with a specific type of stress update without smoothing of corner singularities. The verification of the algorithm implemented into the finite element software GEO5 FEM is based on the detailed analysis of stress and strain evolution while simulating simple laboratory tests in triaxial apparatus and oedometr. Furthermore, attention is devoted to the calculation of slope stability and the determination of the factor of safety. In general, the factor of safety is based on the reduction of shear strength parameters, which, however, do not enter the formulation of Hoek-Brown yield function. Nevertheless, analogy with the Mohr-Coulomb yield surface allows for determining equivalent shear strength parameters and comparing predictions of the two models.

## **Title**

Prediction of the response of geotechnical structure using Hoek-Brown model - implementation, verification

## **Keywords**

Hoek-Brown failure criterion; nonlinear yield function; stress return mapping; rock mechanics; FEM

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Principy a hypotézy, definice pojmů</b>	<b>3</b>
2.1 Metoda konečných prvků a program GEO5 MKP . . . . .	3
2.2 Podmínky rovinné deformace a osově symetrie . . . . .	5
2.3 Základy teorie plasticity . . . . .	6
2.3.1 Funkce plasticity a zákon plastického přetváření pro materiál bez zpevnění/změkčení . . . . .	7
2.3.2 Invariantní veličiny . . . . .	8
2.3.3 Mohr-Coulombův model . . . . .	10
<b>3 Hoek-Brownova podmínka porušení</b>	<b>13</b>
3.1 Generalizovaná podmínka porušení . . . . .	13
3.1.1 Parametry Hoek-Brownova modelu a jejich určení . . . . .	14
3.1.2 Parametry neporušené horniny . . . . .	17
3.2 Ekvivalentní Mohr-Coulombovo kritérium . . . . .	17
3.2.1 Mohr-Coulombovy parametry . . . . .	18
3.2.2 Rozsah napětí pro aplikaci ekvivalentní Mohr-Coulombovy podmínky . . . . .	19
3.3 Formulace funkce plasticity a plastického potenciálu . . . . .	21
3.4 Řešení stability svahu . . . . .	23
3.5 Hoek-Brownovo kritérium v invariantech napětí . . . . .	24
<b>4 Výpočetní metody a algoritmy</b>	<b>25</b>
4.1 Transformační vztahy . . . . .	25
4.2 Newton-Raphsonova metoda . . . . .	26
4.3 „Cutting plane“ algoritmus . . . . .	28
4.3.1 Návrat na Hoek-Brownovu plochu plasticity . . . . .	29
4.3.2 Návrat na hranu Hoek-Brownovy plochy plasticity . . . . .	30
4.4 Kritérium pro návrat do vrcholu Hoek-Brownovy plochy plasticity . . . . .	31
<b>5 Laboratorní testy</b>	<b>33</b>
5.1 Parametry horniny testovacího modelu . . . . .	33
5.2 Numerický model triaxiálu . . . . .	34
5.2.1 Porovnání odezvy s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity . . . . .	35
5.2.2 Test návratu na hranu plochy plasticity . . . . .	38
5.3 Numerický model edometru . . . . .	40
5.3.1 Vliv zvoleného rozsahu napětí při výpočtu ekvivalentních smykových parametrů . . . . .	41
5.3.2 Porovnání odezvy s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity . . . . .	44
<b>6 Úloha stability svahu</b>	<b>47</b>
6.1 Parametry horninového masivu . . . . .	48
6.2 Interpretace výsledků a porovnání s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity . . . . .	48
<b>7 Úloha podzemní exkavace</b>	<b>51</b>
7.1 Parametry zeminy a horniny pro použité materiálové modely . . . . .	52



7.2 Interpretace výsledků a porovnání s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity . . . . .	53
<b>8 Závěr</b>	<b>55</b>
<b>Přílohy</b>	
<b>A Alternativní formulace funkce plastického potenciálu s mobilizovaným úhlem dilatance</b>	<b>57</b>
<b>B Tabulky pro odvození hodnot parametrů Hoek-Brownovy plochy plasticity</b>	<b>59</b>
<b>Literatura</b>	<b>63</b>



# 1 Úvod

Základním předpokladem Hoek-Brownovy podmínky porušení je idealizace horninového masivu složeného z bloků neporušené horniny a spojovacího materiálu mezi nimi a předpoklad izotropního chování. Vlastnosti horninového masivu jsou potom popsány čtyřmi základními parametry, a to dvěma pevnostními charakteristikami vztaženými k horninovým blokům a dvěma geologickými parametry získanými in-situ pozorováním povrchu horninového masivu. Standardní Hoek-Brownova (HB) podmínka byla odvozena empiricky, je definována v hlavních napětích a předpokládá nezávislost na prostřední hodnotě hlavního napětí. Kapitola 3 se zabývá vývojem modelu, určením jeho parametrů a formulací HB podmínky plasticity. Součástí kapitoly je také rozbor analogie HB materiálového modelu s Mohr-Coulombovou (MC) podmínkou porušení a problematika určení ekvivalentních smykových parametrů.

Největší výzvou této práce je sestavení tzv. „stress update“ algoritmu, který zahrnuje návrat stavu napjatosti z nepřijatelné oblasti na plochu plasticity a určení plastické deformace, a jeho implementace do konečně-prvkového programu GEO5 MKP. Teoretické základy pro výpočty 2D geotechnických úloh metodou konečných prvků za předpokladu plastického přetváření jsou shrnuty v kapitole 2. Strategie řešení návratu na plochu plasticity vychází ze zákonitostí standardní plasticity. Vztah mezi napětím a deformací je považován za elastický-perfektně plastický bez zpevnění. Návrat na plochu plasticity je řízen neasociovaným zákonem plastického přetváření. Předpokladem je nezávislá dilatace horninového masivu na aktuálním poli napětí. Tvar plochy plasticity obsahující singularity v podobě hran a vrcholu plochy plasticity vyžaduje modifikaci algoritmu pro specifické stavy napětí. Kapitola 4 se zabývá jak zmíněným algoritmem pro „stress update“, tak výpočetní metodou pro hledání globální rovnováhy.

Verifikace implementovaného algoritmu je založena na podrobném rozboru vývoje napětí a deformace v průběhu simulovaných laboratorních zkoušek v triaxiálu a edometru. Specifický typ zatěžování umožňuje testování a grafické znázornění návratu na hranu plochy plasticity, který je řešen bez její aproximace zaoblením. Výpočty laboratorních testů se zabývá kapitola 5. Součástí simulace zkoušek horninového masivu v tradičních laboratorních přístrojích je porovnání vývoje napětí a deformace ve zvoleném oboru zatěžování s použitím MC materiálového modelu s ekvivalentními smykovými parametry.

Použití HB materiálového modelu v úloze stability svahu vyžaduje speciální přístup k výpočtu stupně bezpečnosti, který je standardně založen na redukci smykových parametrů charakteristických pro materiálové modely typu Mohr-Coulomb a Drucker-Prager běžně používaných pro popis chování zemin. Úloze stability se krátce teoreticky věnuje část kapitoly 3. Konkrétní příklad určení stupně bezpečnosti za předpokladu Hoek-Brownova materiálového modelu rozebírá kapitola 6. Úloha je dále řešena standardní redukcí smykové pevnosti s použitím MC modelu s ekvivalentními smykovými parametry, přičemž jsou porovnávány jak výsledné stupně bezpečnosti, tak předpokládané plochy porušení.

Posledním výpočtem prezentovaným v této práci je úloha podzemní exkavace založená na reálné konstrukci tunelu. Rozbor výsledků v kapitole 7 obsahuje posouzení ekvivalence mezi HB a MC materiálovým modelem a porovnání výsledného pole deformace a rozsahu plastické deformace získaného numerickým výpočtem.



## 2 Principy a hypotézy, definice pojmů

Tato kapitola shrnuje veškeré teoretické principy a hypotézy, jejichž znalost je nutná pro implementaci materiálového modelu do konečně prvkového programu GEO5 FEM [1]. Část kapitoly 2.1 obsahuje stručné odvození hlavních vztahů mechaniky kontinua a metody konečných prvků a formuluje obecné podmínky rovnováhy. Použití metody konečných prvků v geomechanice spočívá především v řešení 2D úloh v podmínkách rovinné deformace s využitím sítě plošných konečných prvků. Analogické principy popisují také úlohu v podmínkách osové symetrie. Sestavením příslušných vektorů a matic pro podmínky rovinné deformace a osové symetrie se věnuje část 2.2. Protože se zeminy a horniny obecně chovají nelineárně, nejobsáhlejší část této kapitoly, část 2.3, je věnována teorii plasticity, která popisuje hranice elastického chování materiálů pomocí funkce plasticity příslušného materiálového modelu a zabývá se určením plastické deformace. Dále tato část obsahuje vysvětlení významu invariantních veličin jako výhodného nástroje pro popis pole napětí a deformace v případě plastického přetváření a formulaci nejpoužívanějšího materiálového modelu v geotechnických úlohách, kterým je Mohr-Coulombovo kritérium porušení.

### 2.1 Metoda konečných prvků a program GEO5 MKP

Metoda konečných prvků byla odvozena ze základních principů mechaniky kontinua a GEO5 MKP využívá její deformační variantu odvozenou pomocí principu virtuálních posunutí. To znamená, že primárními neznámými jsou posuny v uzlech sítě konečných prvků. Kinematické okrajové podmínky a vnější zatížení jsou definovány v příslušných uzlech, zatímco konstitutivní vztahy jsou sestavovány uvnitř prvku v integračních bodech. Hlavní úlohou numerického výpočtu je pak řešení soustavy nelineárních rovnic, která představuje podmínky rovnováhy sil ve všech uzlech sítě konečných prvků. Soustava má tvar

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{K}$  je globální matice tuhosti,  $\mathbf{r}$  je vektor neznámých uzlových posunutí a  $\mathbf{F}$  je vektor uzlového zatížení. Vzhledem ke zmíněné nelinearitě představuje řešení soustavy (2.1) iterační proces s nutností použití vhodného konvergenčního kritéria. Výpočetními metodami se zabývá kapitola 4.

Princip virtuálních prací předpokládá splnění geometrických rovnic (2.2) a kinematických okrajových podmínek (2.3), přičemž jeho důsledkem jsou Cauchyho podmínky rovnováhy (2.4) a statické okrajové podmínky (2.5). Vztahy (2.2), (2.4) a (2.5) formulují tři ze čtyř základních soustav rovnic teorie pružnosti. Čtveřici doplňují fyzikální rovnice (2.6) popisující vztah mezi napětím a deformací, které mají pro lineárně elastický materiál tvar Hookeova zákona.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Operátorová matice  $\boldsymbol{\partial}$  obsahuje parciální derivace podle souřadnicových os,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je vektor přetvoření,  $\mathbf{u}$  je vektor posunutí,  $\bar{\mathbf{u}}$  je vektor předepsaných posunů na hranici tělesa  $\Gamma_u$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  je vektor napětí,  $\mathbf{X}$  je vektor předepsaných objemových sil,  $\mathbf{n}$  je matice obsahující složky jednotkové normály k povrchu tělesa,  $\bar{\mathbf{t}}$  je vektor předepsaného povrchového zatížení na hranici tělesa  $\Gamma_t$  a  $\mathbf{D}$  je matice tuhosti. Obecně má vektor posunutí pro každý uzel sítě tři složky ve směru kartézských souřadnicových os, vektory napětí a přetvoření obsahují po třech normálových a třech smykových složkách působících na plošky elementárního tělesa. V případě nelineární odezvy jsou rovnice (2.6) obvykle prezentované v přírůstkovém tvaru

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{D}^{ep}$  představuje elastoplastickou (tečnou) matici tuhosti.

Uvnitř prvku jsou posuny vyjádřeny v závislosti na primárních neznámých uzlových posunech pomocí báзовých funkcí jako

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e\mathbf{r}_e \quad (2.8)$$

kde  $\mathbf{N}_e$  je matice báзовých funkcí a  $\mathbf{r}_e$  je vektor uzlových posunutí vztážen k danému prvku. Dosazením do geometrických rovnic (2.2) bychom získali vektor přetvoření vyjádřený jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\partial}\mathbf{N}_e\mathbf{r}_e = \mathbf{B}_e\mathbf{r}_e \quad (2.9)$$

kde matice  $\mathbf{B}_e$  se nazývá geometrická matice prvku. Vektorové pole napětí pak určíme dosazením do (2.6) jako

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_e(\mathbf{B}_e\mathbf{r}_e) \quad (2.10)$$

Aplikací principu virtuálních prací, který předpokládá rovnost práce vnějších sil a vnitřních sil na virtuálních posunech, a použitím základních vztahů teorie pružnosti bychom odvodili rovnici rovnováhy ve tvaru

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{X} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t \quad (2.11)$$

Dosazením uvedených aproximací získáme následující vztahy pro výpočet matice tuhosti prvku a uzlových sil od vnějšího zatížení

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e d\Omega \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_e^p = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \mathbf{X}_e d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}}_e d\Gamma_t \quad (2.13)$$

Pro rovnováhu na každém prvku potom platí

$$\mathbf{K}_e\mathbf{r}_e - \mathbf{R}_e^p = \mathbf{R}_e \quad (2.14)$$

kde  $\mathbf{R}_e$  je vektor uzlových vnitřních sil. Součet  $\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_e^p$  je nazýván vektorem pravých stran. Vektor vnitřních uzlových sil se v každé iteraci pro každý prvek sítě vypočítá jako

$$\mathbf{R}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (2.15)$$

Výslednou soustavu rovnic (2.1) pro celou diskretizovanou oblast bychom získali lokalizační matice tuhosti, vektoru posunutí a vektoru pravých stran vztažených k jednotlivým elementům sítě do globálních polí  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$ .

Výběr materiálového modelu je jedním z nejdůležitějších kroků při řešení geotechnických úloh metodou konečných prvků. Pro získání spolehlivé představy o odezvě by měl materiálový model co nejpřesněji popisovat skutečné chování daného typu zeminy nebo horniny. V ideálním případě bychom měli znát hodnoty parametrů příslušné materiálovému modelu určené podrobnými analýzami geotechnických laboratorních nebo in-situ testů. V opačném případě je možné získání hodnot parametrů zprostředkovaně ze známých hodnot pomocí často experimentálně odvozených vztahů. V takovém případě je na místě provedení parametrické studie významu míry daných veličin. Dalším krokem v numerickém modelování může být zpětná analýza problému, úprava parametrů na základě výsledků geotechnického monitoringu během výstavby tak, aby odezva numerického modelu odpovídala chování skutečné konstrukce, a predikce dalšího vývoje. [2]

Kompletní odvození metody konečných prvků, princip lokalizace, rozbor aproximace různými typy konečných prvků, formulace materiálových modelů pro zeminy včetně pokročilejších modelů a další informace o metodě konečných prvků v geomechanice a programu GEO5 MKP lze nalézt v [2].

## 2.2 Podmínky rovinné deformace a osově symetrie

V případě, že je rozměr analyzované konstrukce v jednom směru výrazně větší než ve zbývajících dvou, můžeme úlohu zjednodušit výpočtem v podmínkách rovinné deformace. V takové úloze platí, že posun ve směru největšího rozměru konstrukce a smyková přetvoření z roviny příčného řezu jsou oproti deformacím v rovině řezu zanedbatelná a vektor přetvoření obsahuje pouze tři nenulové složky deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varepsilon_z = 0\}^T \quad (2.16)$$

kde přítomnost nulové složky  $\varepsilon_z$  zajišťuje shodnou dimenzi s vektorem napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}^T \quad (2.17)$$

Nenulovost napětí  $\sigma_z$  plyne z rozšíření Hookeova zákona zavedením vlivu příčné deformace pomocí Poissonova čísla. Dále dojde k redukci vektoru posunutí

$$\mathbf{u} = \{u, v\}^T \quad (2.18)$$

vektoru objemových sil

$$\mathbf{X} = \{X, Y\}^T \quad (2.19)$$

a vektoru předepsaného povrchového zatížení

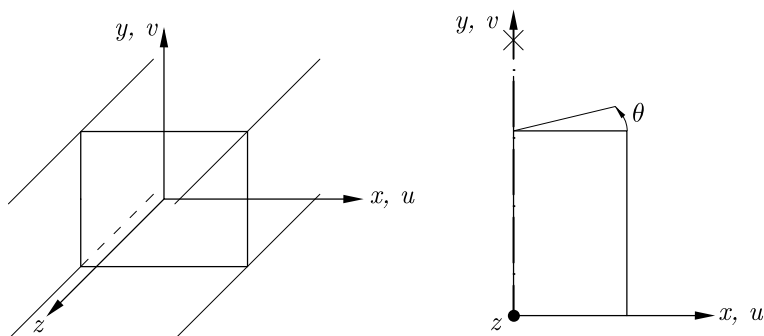
$$\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_x, \bar{t}_y\}^T \quad (2.20)$$

Podobně v případě osově symetrie lze zanedbat složky deformace ve směru rotace a vektory přetvoření a napětí se zjednoduší na

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} \right\}^T \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_\theta\}^\top \quad (2.22)$$

kde  $\theta$  je obvodová souřadnice,  $u$  je radiální přetvoření a  $\rho$  je aktuální hodnota poloměru. Vektor napětí  $\sigma_\theta$  má význam radiálního napětí. Orientace os a význam jednotlivých indexů pro podmínky rovinné deformace i osově symetrie vysvětluje Obr. 2.1. Podobně jako je v podmínkách rovinné deformace určována odezva na 1 m délky, v podmínkách osově symetrie určujeme odezvu na jednotku délky oblouku daném obvodovou souřadnicí.



**Obrázek 2.1** Souřadnicový systém pro podmínky rovinné deformace a osově symetrie

Operátorová matice parciálních derivací  $\boldsymbol{\partial}$  má pro podmínky rovinné deformace, resp. osově symetrie, tvar

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

resp.

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Matice obsahující složky jednotkové normály k povrchu tělesa má pro podmínky rovinné deformace, resp. osově symetrie, tvar

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

resp.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_\theta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

## 2.3 Základy teorie plasticity

Vzhledem k nelineárnímu chování zemin a hornin je v geotechnických úlohách zpravidla nevhodné použití modelu lineárně elastického materiálu a je nutné zvolit vhodný materiálový model z teorie plasticity. K materiálu lze zjednodušeně přistupovat jako k elastickému-perfektně plastickému, kdy vztah mezi napětím a přetvořením je bilineární a k nevratným plastickým deformacím dochází po dosažení určité hodnoty pevnosti

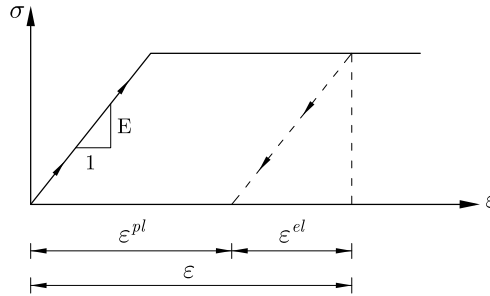


bez dalšího vývoje napětí v daném materiálovém bodě. Do dosažení pevnosti se materiál chová elasticky a mezi napětím a deformací platí Hookeův zákon (2.6). Pro zohlednění změny tuhosti po začátku plastického přetváření lze použít materiál se zpevněním nebo změkčením. Matice tuhosti  $\mathbf{D}$  má pro podmínky rovinné deformace tvar

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

V rámci této práce je předpokladem elastické-perfektně plastické chování bez zpevnění a horninový masiv je považován za izotropní. Vysvětlení základního principu elastického-perfektně plastického materiálu na příkladu jednoosého namáhání v tahu poskytuje Obr. 2.2. Tuhost izotropního materiálu je dána dvěma nezávislými konstantami:

- modulem pružnosti  $E$
- a Poissonovým číslem  $\nu$



**Obrázek 2.2** Bilineární diagram elastického-perfektně plastického materiálu namáhaného jednoosým tahem

### 2.3.1 Funkce plasticity a zákon plastického přetváření pro materiál bez zpevnění/změkčení

Oblast napjatosti, ve které se materiál chová elasticky, je vymezena plochou plasticity, která je popsána funkcí plasticity. V případě elastického-perfektně plastického materiálu platí podmínka plastické přípustnosti (2.28). To znamená, že se stav napětí v každém materiálovém bodě může nacházet uvnitř tělesa daného plochou plasticity nebo na jeho povrchu.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (2.28)$$

Pokud napětí dosáhne plochy plasticity, dochází k plastickému přetváření. V takovém případě platí rovnost

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.29)$$

Během dalšího zatěžování, kdy se materiálový bod již nachází v plastickém stavu, musí být splněna podmínka konzistence, která má podobu

$$df(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.30)$$

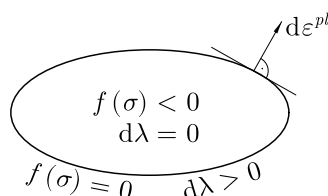
Nerovnost (2.31) je nepřipustná a v numerických výpočtech funguje jako indikátor plastického přetváření a zahájení algoritmu návratu na plochu plasticity a výpočtu plastické deformace.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) > 0 \quad (2.31)$$

O směru nárůstu plastické deformace a návratu na plochu plasticity rozhoduje zákon plastického přetváření. Obecně dochází k plastické deformaci ve směru normály k plastickému potenciálu definovanému funkcí  $g(\boldsymbol{\sigma})$ . V případě, kdy  $g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$ , se jedná o asociovaný (sdružený) zákon plastického přetváření, v opačném případě  $g(\boldsymbol{\sigma}) \neq f(\boldsymbol{\sigma})$  je zákon plastického přetváření nazýván neasociovaný (nesdružený). Přírůstek plastické deformace se určí jako

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.32)$$

kde  $d\lambda$  je skalární veličina zvaná plastický multiplikátor, která určuje, k jak velkému nárůstu deformace dochází. Pro případ elastického stavu tedy platí, že  $d\lambda = 0$  a pro případ plastického stavu  $d\lambda > 0$ . Grafické znázornění významu podmínky plasticity a asociovaného zákona plastického přetváření poskytuje Obr. 2.3.



**Obrázek 2.3** Význam podmínky plasticity a sdruženého zákona plastického přetváření

Vzhledem k tomu, že se materiálový bod může nacházet buď v elastické oblasti, nebo na ploše plasticity, platí tzv. podmínka komplementarity

$$d\lambda df(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.33)$$

Chování elastického-perfektně plastického materiálu lze ekvivalentně shrnout do tzv. zatěžovacích-odtěžovacích podmínek

$$d\lambda \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad d\lambda f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.34)$$

Plastický potenciál a tedy i návrat na plochu plasticity jsou v případě obou materiálových modelů použitych v této práci funkcí úhlu dilatance  $\psi$ . Úhel dilatance zohledňuje skutečnost, že zeminy a horniny vlivem smykového přetváření zvětšují svůj objem neboli dilatují. Hodnota úhlu dilatance se pohybuje v rozsahu  $0 \leq \psi \leq \varphi$ . Volba  $\psi = 0$  popisuje tzv. kritický stav, kdy materiál nedilatuje a nedochází tedy k žádným plastickým objemovým deformacím. Naopak s použitím hodnoty  $\psi = \varphi$  v celém oboru zatěžování dochází ke vzniku objemových plastických přetvoření, jejichž hodnoty jsou poměrně velké a spíše nereálné. Volbou nenulové hodnoty  $\psi$  nezávislé na aktuálním poli napětí předpokládáme, že zemina nebo hornina může během plastického přetváření neomezeně dilatovat. Vzhledem k těmto poznatkům doporučují autoři [2] použít  $\psi = 0$  ve všech geotechnických úlohách, ve kterých není zřejmé, jaká bude odezva zeminy či horniny.

### 2.3.2 Invariantní veličiny

Pro formulaci funkcí plasticity a interpretaci některých výsledků testovacích modelů bude použito několik veličin ze skupiny invariantů. Proto je nutné nejprve vysvětlit jejich význam. Invarianty jsou skalární veličiny, jejichž hodnota se nemění s pootočením

souřadnicového systému. Každý stav napjatosti tak lze převést do stejného ekvivalentního trojrozměrného systému. Funkci plasticity pro izotropní materiál lze vždy vyjádřit pomocí tří nezávislých invariantů.

Těmi může být trojice hlavních napětí  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , která představuje kořeny charakteristické rovnice při řešení úlohy vlastních čísel tenzoru napětí, přičemž platí řazení  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Hodnoty napětí v kartézském souřadnicovém systému jsou přímo rovné hodnotám hlavních napětí v případě, že v materiálovém bodě působí pouze normálová napětí a smykové složky jsou nulové. Pro úlohu rovinné deformace platí

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.35)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z \quad (2.36)$$

Obdobně se dají vyjádřit také složky hlavních deformací  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  a  $\varepsilon_3$  jako kořeny charakteristické rovnice tenzoru deformace.

Dalším způsobem vyjádření funkce plasticity pomocí invariantů je použití středního napětí  $\sigma_m$ , ekvivalentního deviatorického napětí  $J$  a Lodeho úhlu  $\theta$ . Obecnou napjatost lze rozdělit na hydrostatickou a deviatorickou část. Pro izotropní materiál platí, že hydrostatická složka napjatosti vyvolává pouze objemové přetvoření, oproti tomu deviatorická složka popisuje pouze tvarové změny. Střední napětí představuje hydrostatickou část napjatosti a jeho hodnotu získáme jako

$$\sigma_m = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.37)$$

kde vektor  $\mathbf{m}$  je pro rovinnou deformaci definován jako

$$\mathbf{m} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \right\}^T \quad (2.38)$$

Složky deviatorického napětí získáme odečtením hydrostatické části od celkové napjatosti

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - 3\mathbf{m}\sigma_m \quad (2.39)$$

Ekvivalentní deviatorické napětí  $J$  je odmocninou z druhého invariantu deviatoru napětí  $J_2$  a jeho velikost je přímo úměrná vzdálenosti bodu definujícího stav napětí od hydrostatické osy. Má význam jako skalární míra deviatoru napětí a jeho hodnotu získáme ze vztahu

$$J = \sqrt{J_2} \quad (2.40)$$

kde

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} \quad (2.41)$$

Operátorové matice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  mají pro rovinnou deformaci tvar

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Posledním invariantem pro popis napjatosti je Lodeho úhel  $\theta$ . Pro triaxiálovou kompresi nabývá Lodeho úhel hodnoty  $\theta = 30^\circ$  a pro triaxiálovou extenzi je roven  $\theta = -30^\circ$ . Triaxiálová napjatost představuje pro Lodeho úhel hraniční hodnoty, pro obecnou napjatost tedy platí, že  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Lodeho úhel je popsán vztahem

$$\theta = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3} I_{3s}}{2 J^3} \right) \quad (2.44)$$

kde  $I_{3s}$  je třetí invariant tenzoru deviatorického napětí  $\mathbf{s}$ , který má hodnotu jeho determinantu. Význam invariantů  $\sigma_m$ ,  $J$  a  $\theta$  bude dále graficky vysvětlen na konkrétním případě Mohr-Coulombovy podmínky plasticity v následující kapitole 2.3.3.

Podobně jako napjatost lze celkové přetvoření v materiálovém bodě rozdělit na část hydrostatickou a deviatorickou. Hydrostatickou částí přetvoření je relativní změna elementárního objemu neboli objemové přetvoření, které určíme jako

$$\varepsilon_v = 3\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.45)$$

Obdobou tenzoru deviatorického napětí je potom tenzor deviatorického přetvoření. Složku tenzoru přetvoření popisující tvarovou změnu získáme jako

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}\varepsilon_v \quad (2.46)$$

Posledním invariantem popisujícím přetvoření je ekvivalentní deviatorické přetvoření, které je definováno jako míra deviatoru přetvoření a používá se ke znázornění plochy porušení. Určí se ze vztahu

$$E_d = \sqrt{2\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}} \quad (2.47)$$

Zároveň platí rovnice

$$\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_m \varepsilon_v + J E_d \quad (2.48)$$

### 2.3.3 Mohr-Coulombův model

Mohr-Coulombův materiálový model je standardně používaným modelem pro materiály s vnitřním třením jako jsou právě zeminy a horniny. Model nezahrnuje jiné než smykové porušení a zohledňuje zvýšení smykové pevnosti se zvětšujícím se normálovým napětím. Smyková pevnost se odvíjí právě od smykového tření uvnitř materiálu popsaného úhlem vnitřního tření  $\varphi$  a kohezí  $c$ . Z obálky Mohrových kružnic lze odvodit podmínku plasticity jako vztah mezi normálovým a smykovým napětím při porušení ve tvaru

$$|\tau| + \sigma_n \tan \varphi - c = 0 \quad (2.49)$$

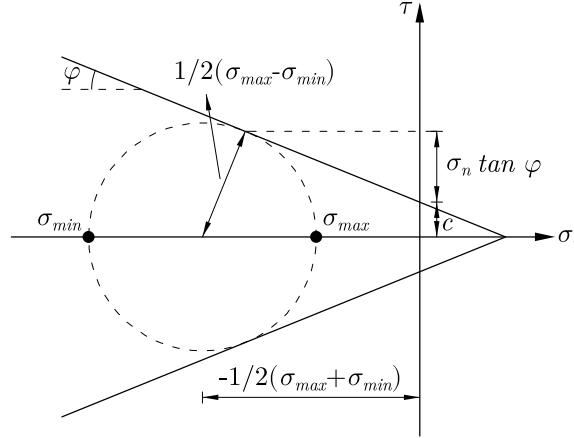
V případě nulového normálového napětí je smyková pevnost dána pouze soudržností materiálu. Parametry  $\varphi$  a  $c$  se určí experimentálně provedením série triaxiálových testů, jejichž výsledkem je odpovídající počet dvojic normálového a smykového napětí při porušení. Na základě znalosti napjatosti při porušení lze sestavit obálku Mohrových kružnic a odvodit smykové parametry zeminy a hodnoty hlavních napětí. Význam všech veličin popisuje Obr. 2.4, ze kterého lze konstatovat, že

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \varphi \quad (2.50)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \varphi \quad (2.51)$$

Dosazením těchto vztahů do (2.49) získáme Mohr-Coulombovu podmínku plasticity definovanou v hlavních napětích jako

$$f(\sigma_{max}, \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (2.52)$$



**Obrázek 2.4** Význam Mohrovy kružnice a smykových parametrů MC modelu

Mohr-Coulombova podmínka je tedy nezávislá na prostřední hodnotě hlavního napětí. Jejím vykreslením v prostoru hlavních napětí bychom získali tvar šestibokého jehlanu. Deviatorický řez plochou plasticity je znázorněn na Obr. 2.5(a). Geometrický význam invariantů  $\sigma_m$ ,  $J$  a  $\theta$  je vysvětlen na Obr. 2.5(b). Hodnota  $\sqrt{3}\sigma_m$  je vzdáleností aktuální napjatosti od počátku měřená po hydrostatické ose, kolmá vzdálenost od hydrostatické osy je rovna  $\sqrt{2}J$ . Funkce plastického potenciálu je definována jako

$$g(\sigma_{max}, \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \psi \quad (2.53)$$

Obrázek 2.5(a) znázorňuje oblasti plochy plasticity pro všechny možnosti stavu napjatosti. Jednotlivé funkce plasticity a plastického potenciálu bychom získali nahrazením  $\sigma_{max}$  a  $\sigma_{min}$  příslušnými hlavními napětími. Vzhledem k tomu, že program GEO5 MKP aplikuje standardní řazení podle velikosti, uplatní se především oblast  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , pro speciální případy návratu na hranu plochy plasticity při triaxiálové kompresi a extenzi také oblasti  $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$  a  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ . V Obr. 2.5(a) jsou také vyznačeny hraniční hodnoty invariantu  $\theta$  příslušné triaxiálové kompresi (TC) a triaxiálové extenzi (TE). Pro napjatost v triaxiálu platí:

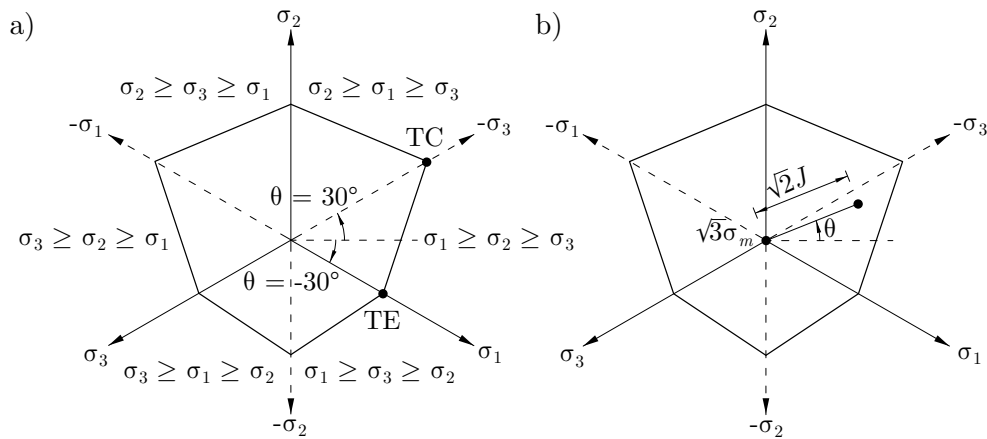
- triaxiálová komprese  $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$
- triaxiálová extenze  $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$

V invariantech  $J$ ,  $\sigma_m$  a  $\theta$  zapíšeme funkci plasticity jako [2]

$$f(J, \sigma_m, \theta) = J + (\sigma_m - c \cot \varphi)g(\theta) \quad (2.54)$$

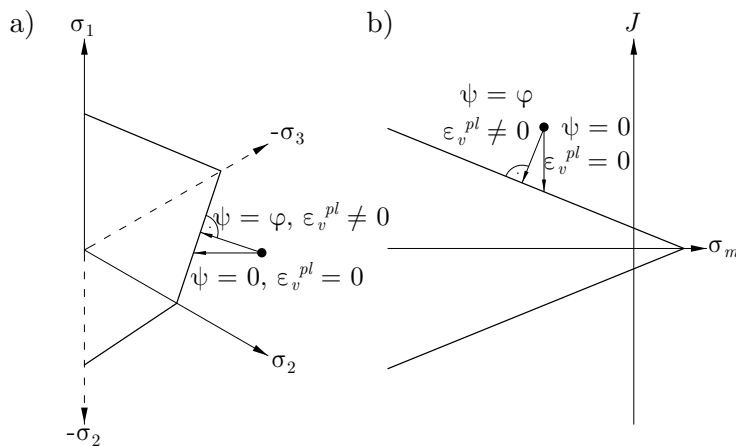
kde plastický potenciál  $g(\theta)$  má tvar [2]

$$g(\theta) = \frac{\sin \varphi}{\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi} \quad (2.55)$$



**Obrázek 2.5** Znázornění Mohr-Coulombovy podmínky plasticity v deviatorickém řezu: a) význam triaxiálové komprese a extenze, b) geometrický význam invariantů

Obr. 2.6 vysvětluje význam úhlu dilatance  $\psi$  pro návrat na Mohr-Coulombovu plochu plasticity a objemovou plastickou deformaci v prostoru hlavních napětí (a) a v meridiánové rovině (b). V případě, že  $\psi = \varphi$ , dochází k návratu kolmo na plochu plasticity a jedná se o sdružený zákon plastického přetváření. Dochází k nárůstu objemové plastické deformace ve směru vnější normály k ploše plasticity. Při  $\psi = 0$  zůstává hodnota středního napětí  $\sigma_m$  v průběhu návratu konstantní a nedochází k žádnému vývoji objemové plastické deformace.



**Obrázek 2.6** Naznačení významu úhlu dilatance pro směr návratu na Mohr-Coulombovu plochu plasticity a hodnotu objemové plastické deformace: a) v deviatorickém řezu, b) v meridiánové rovině

## 3 Hoek-Brownova podmínka porušení

Hoek-Brownovo kritérium porušení je v současné době nejběžněji používaný materiálový model pro predikci odezvy horninového masivu. Ve své původní podobě bylo uvedeno v roce 1980 v práci Everta Hoeka a Edwin T. Browna [3] pro použití v navrhování podzemních exkavací. Kritérium je čistě empirické a v původní formulaci bylo odvozeno pro neporušené horninové masivy vysoké pevnosti. Nezbytnost použití kritéria porušení i pro horniny velmi nízké pevnosti a kvality vedla k zásadním změnám v interpretaci Hoek-Brownovy podmínky. E. Hoek a E.T. Brown upřesnili v roce 1997 v práci [4] generalizované kritérium porušení, ve kterém jsou hodnoty materiálových konstant redukovány v závislosti na geologických vlastnostech masivu. V roce 2002 poté E. Hoek společně s C. Carranza-Torrese a B. Corkumem uvedli v článku [5] závislost na dalším parametru, tzv. faktoru porušení. Tím umožnili zohlednit kromě pevnostních a strukturních charakteristik horninového masivu také historii porušení masivu geotechnickými pracemi. Současná podoba kritéria porušení tak pokrývá celý rozsah typů horninových masivů včetně masivů tak nízké kvality, že je lze téměř klasifikovat jako zeminy. V průběhu let byly vyvinuty další modifikace Hoek-Brownovy podmínky porušení. Například články [6] a [7] se věnují významu prostřední hodnoty hlavního napětí a možností zahrnutí vlivu této hodnoty do kritéria porušení. Tato práce se zabývá pouze standardní formulací Hoek-Brownovy podmínky plasticity.

### 3.1 Generalizovaná podmínka porušení

Generalizované Hoek-Brownovo kritérium je definováno v hlavních napětích a předpokládá nezávislost na prostřední hodnotě hlavního napětí. Na rozdíl od Mohr-Coulombova modelu však zahrnuje nelineární vývoj pevnosti horninového masivu v závislosti na aktuální napjatosti. V konvenci často používané v geotechnických publikacích, kde záporná hodnota napětí značí tah, má generalizovaná podmínka tvar

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.1)$$

kde  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$  jsou efektivní hodnoty maximálního a minimálního napětí při porušení,  $m_b$  je redukováná hodnota Hoek-Brownovy konstanty pro horninový masiv,  $\sigma_{ci}$  je prostá pevnost neporušené horniny v tlaku,  $s$  a  $a$  jsou konstanty závislé na geologických charakteristikách horninového masivu.

Vzhledem k tomu, že cílový software využívá standardní znaménkovou konvenci a řazení hlavních napětí podle velikosti, pro další popis podmínky porušení je vhodné kritérium převést do odpovídající podoby, viz rovnice (3.2). To znamená, že  $\sigma_1$  odpovídá nejmenšímu hlavnímu napětí (nejmenší záporná hodnota - nejmenší tlak) a  $\sigma_3$  odpovídá největšímu hlavnímu napětí (největší záporná hodnota - největší tlak).

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_{ci} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.2)$$

Pro formulaci (3.2) tedy platí

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.3)$$

### 3 Hoek-Brownova podmínka porušení

Dosažením určitých předpokladů do rovnice (3.2) lze získat základní hodnoty pevnosti horninového masivu:

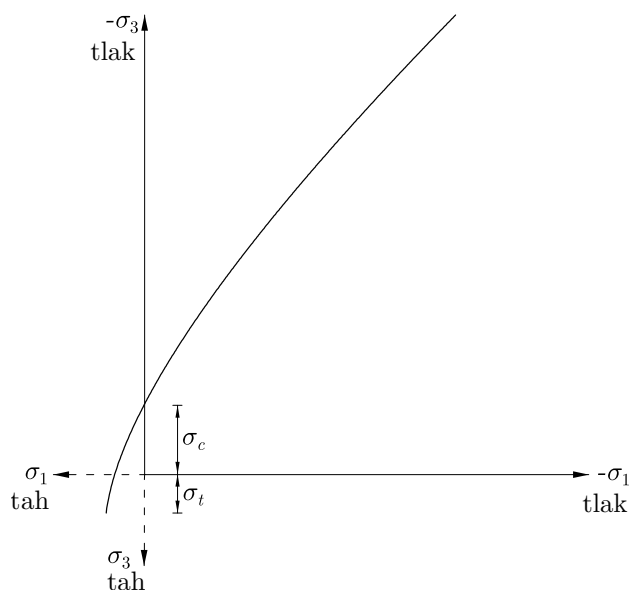
- jednoosá pevnost v tlaku ( $\sigma_1 = 0, \sigma_3 = \sigma_c$ )

$$\sigma_c = \sigma_{ci} s^a \quad (3.4)$$

- pevnost v tahu ( $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_t$ )<sup>1</sup>

$$\sigma_t = \frac{s\sigma_{ci}}{m_b} \quad (3.5)$$

Nelineární křivka kritéria porušení a hodnoty uvedených pevností jsou v rovině hlavních napětí znázorněny na Obr. 3.1.



Obrázek 3.1 Nelineární Hoek-Brownovo kritérium, jednoosá pevnost v tahu a v tlaku

#### 3.1.1 Parametry Hoek-Brownova modelu a jejich určení

Hoek-Brownův materiálový model je definován čtyřmi základními charakteristikami:

- jednoosou tlakovou pevností neporušené horniny  $\sigma_{ci}$
- hodnotou Hoek-Brownovy konstanty pro neporušenou horninu  $m_i$
- Geological Strength Indexem (GSI)
- faktorem porušení D

Tabulkové hodnoty těchto parametrů lze nalézt v příloze B.

#### Prostá tlaková pevnost a Hoek-Brownova konstanta

Prostá tlaková pevnost  $\sigma_{ci}$  a Hoek-Brownova konstanta  $m_i$  jsou parametry Hoek-Brownova modelu vztažené k pevnosti neporušených bloků horniny bez vlivu okolního spojovacího materiálu a vlastností diskontinuit. K jejich odvození by měla vést statistická analýza výsledků série triaxiálních testů na pečlivě připravených a neporušených vzorcích

<sup>1</sup>Dosažením  $\sigma_3 = \sigma_1$  do rovnice (3.2) zavádíme předpoklad, že jednoosá a dvouosá pevnost v tahu jsou totožné. Oprávněnost tohoto předpokladu pro křehké materiály demonstroval E. Hoek ve své publikaci [8].

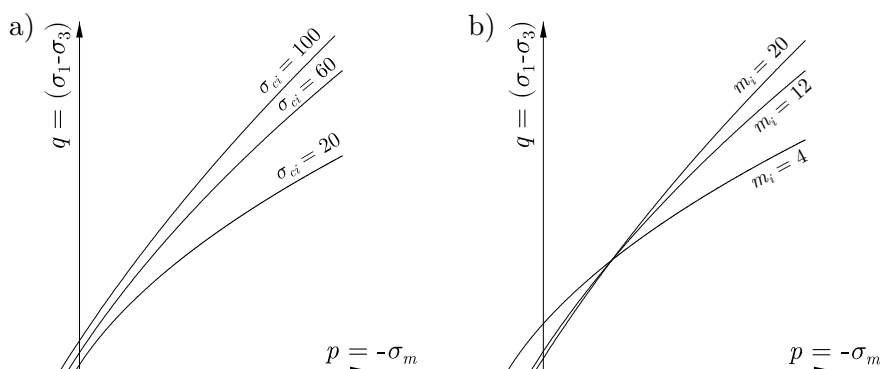


horniny. Spolehlivost výstupů provedených experimentů závisí na rozsahu aplikované hodnoty nejmenšího hlavního napětí. Více např. [4] a [9].

Dalším faktorem ovlivňujícím odhad pevnosti horninových bloků je velikost použitého vzorku. Mnoha studii bylo prokázáno, že laboratorně určená hodnota tlakové pevnosti výrazně klesá se vzrůstající velikostí vzorku. Autoři [4] předpokládají, že pokles pevnosti v tlaku je dán množstvím zrn v použitém vzorku. Protože větší vzorek obsahuje více zrn, dochází k rychlejšímu porušení vzorku na jejich rozhraní. V případě, že je ve vzorku dostatečně velké množství zrn, výsledná hodnota pevnosti v tlaku se ustálí a dosáhne konstantní hodnoty.

Tato úvaha se dále promítá do jednoho ze základních předpokladů Hoek-Brownovy podmínky porušení, a to předpokladu o izotropním chování horninového masivu. Izotropní chování lze předpokládat v případě, kdy horninový masiv obsahuje dostatečné množství diskontinuit, které nemají žádný specifický směr předurčující porušení. Zároveň musí být velikost horninových bloků dostatečně malá v porovnání s velikostí plánované exkavace. V případě, že velikost bloků je srovnatelná s velikostí analyzované konstrukce, porušení je dáno vlastnostmi blízké diskontinuity a Hoek-Brownovo kritérium nelze použít, viz [4].

Vliv pevnostních parametrů neporušených bloků horniny na výslednou křivku porušení ve standardně používaném  $p-q$  diagramu, kde  $p$  je střední napětí a  $q$  je deviatorické napětí, znázorňuje Obr. 3.2.



**Obrázek 3.2** Vliv pevnostních parametrů  $\sigma_{ci}$  (a) a  $m_i$  (b) na Hoek-Brownovu podmínku porušení zobrazenou v  $p-q$  diagramu

### Geological Strength Index (GSI)

Geological Strength Index je parametr, který do podmínky porušení vnáší vliv geologických vlastností horninového masivu jako je množství diskontinuit nebo jeho struktura. Tento systém klasifikace je založen na předpokladu, že pevnost horninového masivu je ovlivněna nejen pevnostními charakteristikami úlomků neporušené horniny, ale také možnostech těchto úlomků se v okolním prostředí pohybovat. Ta se odvíjí od tvaru jednotlivých bloků a drsnosti a kvality povrchů, které je oddělují. Zaoblené částice horniny obklopené zvětralým prostředím budou jako celek vykazovat mnohem nižší pevnost než částice hranaté s drsným povrchem spojů. Pro neporušenou, nezvětralou horninu bez diskontinuit platí, že  $GSI = 100$ , s horší kvalitou struktury a povrchů úlomků horniny se hodnota snižuje, viz [4].

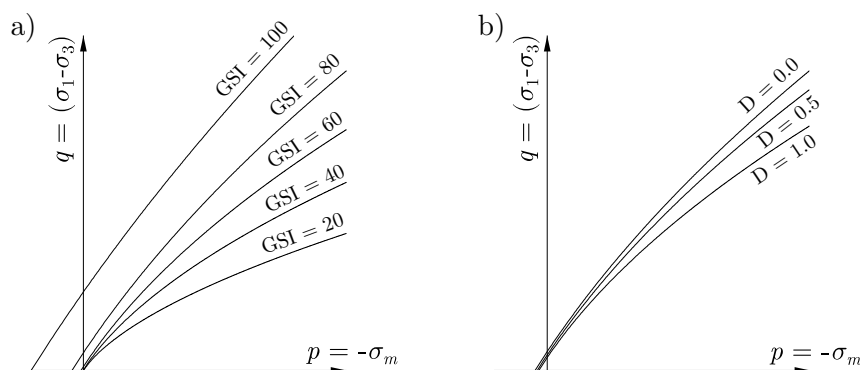
Tabulka GSI založená čistě na in-situ pozorování struktury povrchu horninového masivu a podmínek povrchů horninových bloků byla primárně určena pro kvalifikovaný odhad mechanických vlastností zkušebními geology. Potřeba geotechnických projektantů

spolehlivě určit parametry horniny pro numerické výpočty i za nepřítomnosti inženýrského geologa vedla k dalšímu vývoji systému GSI a především jeho kvantifikaci, která může být v některých případech snadněji uchopitelná. Výsledky tohoto vývoje představuje E. Hoek, T.G. Carter a M.S. Diederichs v článku [10].

Obr. 3.3(a) ukazuje významný vliv klasifikace GSI na tvar podmínky porušení a demonstuje nezbytnost co nejpřesnějšího kvalifikovaného odhadu.

### Faktor porušení

Faktor porušení  $D$ , z původního anglického názvu „disturbance factor“, se pohybuje v hodnotách 0 až 1 v závislosti na stupni porušení povrchu odstřelem nebo exkavací, přičemž hodnota 0 přísluší neporušenému povrchu. Jednotlivé stupně porušení se odvíjí od způsobu provádění těchto geotechnických prací, viz tabulka v příloze B. V numerických modelech bychom měli zohlednit dosah porušení exkavací pod povrch horninového masivu a hodnotu faktoru porušení odlišnou od nuly přisuzovat pouze v oblasti klasifikovaného povrchu. Význam volby faktoru porušení na Hoek-Brownovo kritérium dokládá Obr. 3.3(b).



**Obrázek 3.3** Vliv geologických parametrů GSI (a) a  $D$  (b) na Hoek-Brownovu podmínku porušení zobrazenou v  $p - q$  diagramu

### Parametry redukující pevnost horninového masivu

Pro zohlednění výše popsaných geologických parametrů v podmínce porušení je nutné určit materiálové konstanty popisující vývoj pevnosti horninového masivu, tedy tvar nelineární křivky porušení. Definice vztahů pro výpočet těchto charakteristik byla významným krokem pro přechod od původní formulace kritéria určeného pro neporušenou horninu a zobecnění na celou škálu typů horninových masivů. Konstantami závislými na geologických vlastnostech horninového masivu jsou:

- redukovaná hodnota Hoek-Brownovy konstanty  $m_b$
- konstanta  $s$
- konstanta  $a$

Pro výpočet jejich hodnot použijeme empiricky odvozené vztahy podle [5]

$$m_b = m_i \exp \frac{GSI - 100}{28 - 14D} \quad (3.6)$$

$$s = \exp \frac{GSI - 100}{9 - 3D} \quad (3.7)$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( \exp \frac{-GSI}{15} - \exp \frac{-20}{3} \right) \quad (3.8)$$

### Modul deformace

Další charakteristikou důležitou při posuzování odezvy geotechnické úlohy je modul deformace. Jeho hodnota je závislá na geologických parametrech masivu a pro různá rozmezí tlakové pevnosti horniny se uplatní různé vztahy pro jeho výpočet. Pro  $\sigma_{ci} \leq 100$  MPa je určena rovnice (3.9). Tento vztah předpokládá, že modul deformace se s nižší pevností v tlaku výrazně snižuje. Pro případ, kdy  $\sigma_{ci} > 100$  MPa, potom použijeme rovnici (3.10). Závislost tuhosti horninového masivu na aktuální napjatosti je zanedbatelná a tuhost je tedy považována za konstantní. Podle [5] platí

$$E_m(\text{GPa}) = \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_{ci}}{100}} 10^{((GSI-10)/40)} \quad (3.9)$$

$$E_m(\text{GPa}) = \left( 1 - \frac{D}{2} \right) 10^{((GSI-10)/40)} \quad (3.10)$$

#### 3.1.2 Parametry neporušené horniny

Pro neporušenou horninu dle původní formulace Hoek-Brownova kritéria [3] platí, že

- $m_b = m_i$
- $s = 1$
- $a = 0.5$

Totožné hodnoty bychom získali dosazením  $GSI = 100$  a  $D = 0$  dle skutečností uvedených v předchozím textu do rovnic (3.6), (3.7) a (3.8). Kritérium porušení pro neporušenou horninu má poté tvar

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_{ci} \left( m_i \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + 1 \right)^{0.5}. \quad (3.11)$$

Tato původní formulace Hoek-Brownovy podmínky porušení byla odvozena na základě empirických dat výzkumu E. Hoeka zaměřeného na porušení horniny jako křehkého materiálu [11] a modelových studiích horninového masivu E.T. Browna [12]. Využitím parabolické obálky odvozené z Griffithovy teorie lomu definoval E. Hoek vztah mezi smykovým a normálovým napětím na mezi vzniku trhliny. K odvození Hoek-Brownova kritéria dále autoři použili metodu „pokus-omyl“, kdy k datům z triaxiálových testů hledali odpovídající parabolickou křivku.

## 3.2 Ekvivalentní Mohr-Coulombovo kritérium

Při řešení geotechnických úloh se lze setkat s případy, kdy je přímé použití Hoek-Brownova kritéria komplikované. Typickým zástupcem těchto úloh je řešení stability svahu, kdy k úloze není přistupováno jako k problému hlavních napětí, ale normálových a smykových napětí. Problémem řešení stability svahu za použití Hoek-Brownova kritéria se blíže zabývá kapitola 3.4. Existence geotechnických softwarů napsaných pouze z hlediska Mohr-Coulombova kritéria bylo dalším důvodem pro nalezení ekvivalence mezi těmito dvěma podmínkami porušení. V současné době mnoho geotechnických softwarů umožňuje přímé použití Hoek-Brownovy podmínky plasticity.

Mezi složkami hlavních napětí, smykovým a normálovým napětím platí vztahy podle G. Balmera [13]:

$$\sigma_n = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\partial\sigma_3/\partial\sigma_1 + 1} \quad (3.12)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{\partial\sigma_3/\partial\sigma_1}}{\partial\sigma_1/\partial\sigma_3 + 1} \quad (3.13)$$

kde

$$\partial\sigma_3/\partial\sigma_1 = 1 + am_b \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1} \quad (3.14)$$

### 3.2.1 Mohr-Coulombovy parametry

Mohr-Coulombovo kritérium porušení je definováno dvěma smykovými parametry:

- koheze  $c$
- úhlem vnitřního tření  $\varphi$

Mohr-Coulombovu podmínku lze v hlavních napětích ekvivalentně k rovnici (2.52) zapsat také jako

$$\sigma_3 = -\sigma_{cm} + k\sigma_1, \quad (3.15)$$

kde  $\sigma_{cm}$  je jednoosá pevnost horninového masivu v tlaku a  $k$  udává sklon přímky popisující vztah mezi hlavními napětími  $\sigma_3$  a  $\sigma_1$ , viz Obr. 3.4. Efektivní hodnoty  $c$  a  $\varphi$  jsou následně dány vztahy (3.16) a (3.17).

$$c = \frac{\sigma_{cm}}{2\sqrt{k}} \quad (3.16)$$

$$\sin \varphi = \frac{k - 1}{k + 1} \quad (3.17)$$

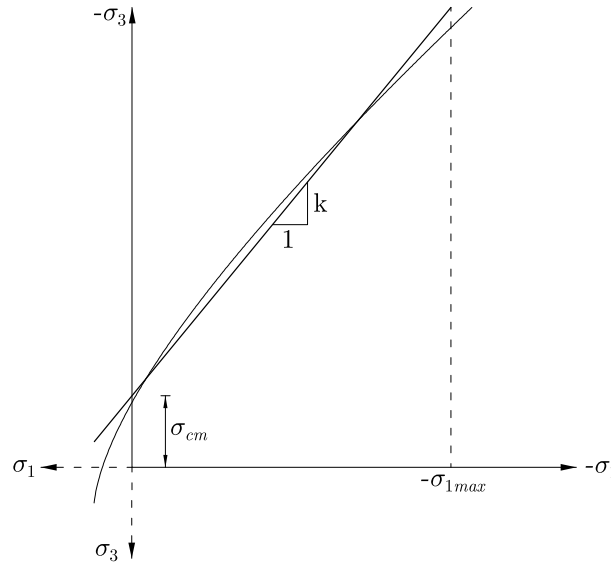
Mezi Mohr-Coulombovým lineárním (3.15) a Hoek-Brownovým nelineárním (3.2) vztahem mezi hlavními napětími nelze odvodit přímou závislost. Proto bylo k jejich ekvivalenci publikováno několik přístupů. Autoři [4] byli přesvědčeni, že nejpraktičtější způsobem určení ekvivalentních parametrů Mohr-Coulombovy podmínky je simulace série triaxiálových testů analytickým řešením rovnice (3.2) za použití určité škály hodnot hlavního napětí  $\sigma_1$ . Výsledná nelineární křivka je následně proložena přímkou o rovnici (3.15) pomocí lineární regrese a hodnoty smykových parametrů jsou určeny pomocí rovnic (3.16) a (3.17). Je důležité zmínit, že takto odvozené smykové parametry jsou pouze průměrné hodnoty nezávislé na aktuálních hodnotách hlavních napětí. Hodnoty smykových parametrů určené tímto způsobem jsou velmi citlivé na použitou škálu napětí  $\sigma_1$ . Autoři [4] uvedli v dané publikaci jako vhodný rozsah napětí  $0 < |\sigma_1| < 0.25\sigma_{ci}$ . Jak ovšem bude ukázáno v kapitole 5, ekvivalence je platná pouze do té doby, dokud se s oborem napjatosti pohybujeme ve stejném rozsahu.

Proces simulace triaxiálových testů a proložení nelineární křivky přímkou porovnáním ploch nad a pod křivkou bylo dále rozvinuto v [5], kde byly upřesněny vztahy pro určení ekvivalentních smykových parametrů do tvaru

$$c = \frac{\sigma_{ci}[(1 + 2a)s + (1 - a)m_b\sigma_{1n}](s + m_b\sigma_{1n})^{a-1}}{(1 + a)(2 + a)\sqrt{1 + (6am_b(s + m_b\sigma_{1n})^{a-1})/((1 + a)(2 + a))}} \quad (3.18)$$

$$\varphi = \arcsin \left[ \frac{6am_b(s + m_b\sigma_{1n})^{a-1}}{2(1 + a)(2 + a) + 6am_b(s + m_b\sigma_{1n})^{a-1}} \right] \quad (3.19)$$

kde  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci}$ .



**Obrázek 3.4** Zobrazení nelineárního HB kritéria a ekvivalentní MC podmínky porušení v rovině hlavních napětí

### 3.2.2 Rozsah napětí pro aplikaci ekvivalentní Mohr-Coulombovy podmínky

Volba hodnoty horního limitního napětí  $|\sigma_{1max}|$  je pro výpočet ekvivalentních smykových parametrů zásadní a musí být odvozena pro každou konkrétní úlohu, protože obě kritéria porušení budou poskytovat ekvivalentní odezvu v tomto daném rozsahu napjatosti. Autoři [5] upřesnili určení rozsahu napjatosti pomocí experimentálně odvozených vztahů pro dvě základní geotechnické úlohy:

- tunely

$$\frac{|\sigma_{1max}|}{\sigma_{cm}} = 0.47 \left( \frac{\sigma_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.94} \quad (3.20)$$

- svahy

$$\frac{|\sigma_{1max}|}{\sigma_{cm}} = 0.72 \left( \frac{\sigma_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.91} \quad (3.21)$$

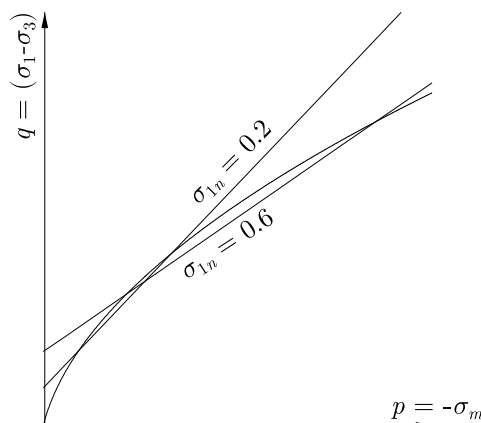
kde  $\sigma_{cm}$  je tzv. globální pevnost horninového masivu,  $\gamma$  je objemová tíha horninového masivu a  $H$  je hloubka tunelu, resp. výška svahu.

Rovnice (3.20) je totožná pro hluboké i mělké tunely, ačkoliv hodnoty  $|\sigma_{1max}|$  nebyly odvozeny stejným způsobem. V případě hlubokých tunelů byla hledána taková hodnota  $|\sigma_{1max}|$ , pro kterou Mohr-Coulombovo kritérium porušení poskytuje ekvivalentní charakteristickou křivku<sup>2</sup>. Za mělké tunely jsou považovány takové, jejichž hloubka je menší než trojnásobek průměru výrubu. Pro takové tunely bylo porovnání dvou podmínek porušení založeno na rozsahu porušení a maximální hodnotě sedání povrchu. Obdržený vztah však odpovídá tomu získanému pro hluboké tunely. Rovnici (3.20) lze tedy použít pro všechny podzemní exkavace, vyjma těch, kdy se zóna porušení šíří dále k povrchu. V takovém případě by mělo být řešení celého problému založeno pouze na jedné z podmínek porušení. V situaci, kdy horizontální napětí je větší než svislé napětí, by geostatické napětí dané hloubkou tunelu a objemovou tíhou ( $\gamma H$ ) mělo být nahrazeno hodnotou horizontálního napětí. Pro odvození rovnice (3.21) byla využita

<sup>2</sup>Charakteristická křivka popisuje průběh radiálního napětí na lici výrubu

Bishopova analýza na svazích s celou škálou geometrických vlastností a parametrů horninového masivu. [5]

Obr. 3.5 ukazuje vliv volby parametru  $\sigma_{1n}$  na výslednou ekvivalentní přímku porušení a smykové parametry. Vzhledem k parabolickému tvaru Hoek-Brownovy podmínky porušení, dosáhneme volbou větší hodnoty  $|\sigma_{1max}|$  vyšší koheze a nižšího úhlu smykového tření.



**Obrázek 3.5** Vliv volby rozsahu ekvivalence sklon ekvivalentní přímky porušení

Protože ekvivalentní smykové parametry jsou definovány pouze pro rozsah napětí  $0 \leq |\sigma_1| \leq |\sigma_{1max}|$ , je v oblasti malých napětí v případě velkého požadovaného rozsahu napjatosti nutné počítat s tím, že vzhledem k parabolickému tvaru Hoek-Brownovy plochy plasticity bude vždy odezva s použitím Mohr-Coulombovy ekvivalentní podmínky poměrně odlišná. Proto v úlohách, kde se předpokládají velmi malé hodnoty napětí v porovnání s pevností  $\sigma_{ci}$ , je vhodné volit adekvátní rozsah napjatosti velmi obezřetně.

### Globální pevnost horninového masivu $\sigma_{cm}$

Podle autorů [5] globální pevnost horninového masivu popisuje chování horninového masivu jako celku a poskytuje odhad pevnosti tohoto celku. Na rozdíl od jednoosé tlakové pevnosti dané rovnicí (3.4) neslouží pro detailní analýzu vzniku a šíření porušení, ale pro posouzení pevnosti určitého celku tvořeného horninovým masivem, např. pilíře. Její hodnotu lze získat z Mohr-Coulombovy přímky (3.15) jako

$$\sigma_{cm} = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3.22)$$

Po dosazení rovnic pro ekvivalentní smykové parametry  $c$  a  $\varphi$  obdržíme

$$\sigma_{cm} = \sigma_{ci} \frac{(m_b + 4s - a(m_b - 8s))(m_b/4 + s)^{a-1}}{2(1+a)(2+a)} \quad (3.23)$$

### 3.3 Formulace funkce plasticity a plastického potenciálu

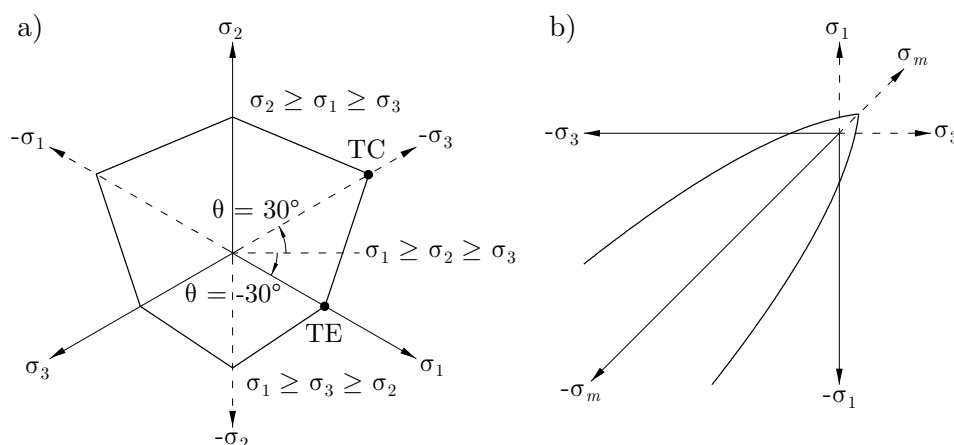
Podobně jako u Mohr-Coulombovy podmínky plasticity mají pro návrat na plochu plasticity význam tři oblasti. Funkce plasticity pro tyto tři sektory Hoek-Brownovy plochy plasticity poté odpovídají následujícím rovnicím

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 : \quad f^{13}(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ci} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.24)$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 : \quad f^{23}(\sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_{ci} \left( m_b \frac{-\sigma_2}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.25)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 : \quad f^{12}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_{ci} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.26)$$

Podobnost s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity je patrná z Obr. 3.6(a) znázorňující deviatorický řez plochou plasticity. V prostoru hlavních napětí je tvar tělesa definovaného funkcí plasticity obdobou šestibokého jehlanu Mohr-Coulombovy podmínky plasticity. Hrany tělesa ovšem mají parabolický tvar a zobrazením řezu tělesa v rovině maximálního a minimálního hlavního napětí získáme nelineární křivky, viz Obr. 3.6(b).



**Obrázek 3.6** Hoek-Brownova plocha plasticity: a) deviatorický řez, b) v rovině hlavních napětí

Pro účely této práce je pro plastický potenciál nesdruženého zákona plastického přetváření volena funkce podobná funkci plasticity

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 : \quad g(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ci} \left( m_g \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s_g \right)^{a_g} \quad (3.27)$$

V případě konstantní míry dilatace podle [14] platí

$$a_g = 1.0 \quad (3.28)$$

a proto

$$g(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - m_g(-\sigma_1) + \sigma_{ci}s_g \quad (3.29)$$

Úpravou výrazu (3.29) získáme

$$g(\sigma_1, \sigma_3) = (1 + m_g)\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ci}s_g \quad (3.30)$$

### 3 Hoek-Brownova podmínka porušení

V numerickém výpočtu se uplatní pouze parciální derivace funkce (3.30), proto její poslední člen nemá pro naše účely význam. Připomeňme formulaci Mohr-Coulombovy podmínky plasticity ve tvaru rovnice (3.15). Plastický potenciál pro Mohr-Coulombovu podmínku plasticity lze zapsat jako

$$g^{MC}(\sigma_1, \sigma_3) = k_g \sigma_1 - \sigma_3; \quad k = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (3.31)$$

Porovnáním rovnice (3.30) bez posledního členu a rovnice (3.31) získáme

$$1 + m_g = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (3.32)$$

a funkce plastického potenciálu ve tvaru

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 : \quad g(\sigma_1, \sigma_3) = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.33)$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 : \quad g(\sigma_2, \sigma_3) = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \sigma_2 - \sigma_3 \quad (3.34)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 : \quad g(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \sigma_1 - \sigma_2 \quad (3.35)$$

Pro proces návratu na plochu plasticity a následného určení plastické deformace v integračním bodě je nutné provést parciální derivace funkcí plasticity i plastických potenciálů. Ty definují složky vektoru příslušné normály k dané ploše. Normály k jednotlivým oblastem plochy plasticity mají tvar

$$\mathbf{n}^1 = \frac{\partial f^{13}(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ 1 + m_b a \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}; 0; -1 \right\}^T \quad (3.36)$$

$$\mathbf{n}^2 = \frac{\partial f^{23}(\sigma_2, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ 0; 1 + m_b a \left( m_b \frac{-\sigma_2}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}; -1 \right\}^T \quad (3.37)$$

$$\mathbf{n}^3 = \frac{\partial f^{12}(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ 1 + m_b a \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}; -1; 0 \right\}^T \quad (3.38)$$

Normály k plastickým potenciálům pro případ konstantní míry dilatace vyjádříme ve tvaru

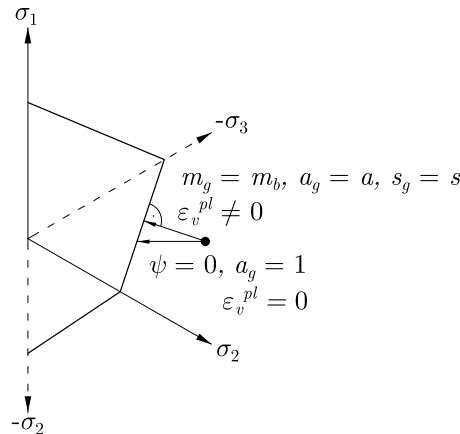
$$\mathbf{n}_g^1 = \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; 0; -1 \right\}^T \quad (3.39)$$

$$\mathbf{n}_g^2 = \frac{\partial g(\sigma_2, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ 0; \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; -1 \right\}^T \quad (3.40)$$

$$\mathbf{n}_g^3 = \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; -1; 0 \right\}^T \quad (3.41)$$

Vzhledem k formulaci plastického potenciálu ekvivalentně k Mohr-Coulombově podmínce plasticity platí obdobné zákonitosti pro návrat na plochu plasticity. V případě  $\psi = 0$  probíhá návrat rovnoběžně s rovinou  $\sigma_1 - \sigma_3$  a objemová plastická deformace je nulová. Pro dosažení asociovaného zákona plastického přetváření bychom uvažovali





**Obrázek 3.7** Návrat na Hoek-Brownovu plochu plasticity zobrazený v deviatorickém řezu

parametry plastického potenciálu  $m_g = m_b$ ,  $a_g = a$  a  $s_g = s$ . V tomto případě by partiální derivace plastického potenciálu byly funkcí aktuální hodnoty napětí a míra nárůstu plastické objemové deformace (dilatance) by závisela na této hodnotě. Pro účely této práce je dále předpokládána pouze konstantní míra dilatance a plastické potenciály v uvedených tvarech. Možnosti návratu na plochu plasticity v deviatorické rovině shrnuje Obr. 3.7. Znázornění návratu v meridiánové rovině bude patrné v podrobném rozboru návratu na plochu plasticity v kapitole 5.2.2.

Alternativní podobu funkce plastického potenciálu pro dilatanci závislou na aktuální hodnotě hlavního napětí podle [15] vysvětluje Příloha A.

### 3.4 Řešení stability svahu

Rozhodujícím faktorem při řešení úlohy stability svahu je stupeň bezpečnosti, který je definován jako poměr skutečné smykové pevnosti vůči minimální smykové pevnosti, při které nedojde ke kolapsu. Protože Hoek-Brownovo kritérium neposkytuje údaj o smykové pevnosti, je nezbytné k tomuto problému přistupovat skrze ekvivalenci s Mohr-Coulombovým modelem. Jedním z možných přístupů je určení ekvivalentních smykových parametrů s použitím rovnic (3.18) a (3.19) a kompletní řešení úlohy s Mohr-Coulombovým materiálovým modelem založené na redukci těchto parametrů. Toto řešení však poskytuje ekvivalentní odezvu pouze v použitém rozsahu napětí  $\sigma_1$  a hodnoty smykových parametrů jsou průměrné a nezávislé na aktuálním stavu napjatosti.

Spolehlivější řešení redukce smykové pevnosti a určení stupně bezpečnosti za použití Hoek-Brownova kritéria poskytuje článek [6]. Autoři zde zavádějí faktor  $\eta$  redukující pevnost horninového masivu jeho zahrnutím do funkce plasticity. Funkce plasticity pro  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  poté získá tvar

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - \frac{\sigma_{ci}}{\eta} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.42)$$

Určení hodnoty  $\eta$  je založeno na odvození závislosti na redukčních součinitelích smykových parametrů daných Eurokódem 7 [16]. Ten definuje návrhové hodnoty smykových parametrů jako

$$\tan \varphi_d = \frac{\tan \varphi_c}{\gamma_\varphi}, \quad c_d = \frac{c_c}{\gamma_c} \quad (3.43)$$

kde  $\varphi_c$  a  $c_c$  jsou charakteristické hodnoty a  $\gamma_\varphi$  a  $\gamma_c$  jsou redukční součinitele. V případě předpokladu  $\gamma_\varphi = \gamma_c = \gamma$  je postup podle Eurokódu 7 kompatibilní s tradičním Bishopovým přístupem a hodnota součinitele  $\gamma$  může být považována přímo za stupeň bezpečnosti, viz [6].

Odvození vztahu mezi redukčními faktory  $\gamma$  a  $\eta$  je založeno na sestrojení tečny k Hoek-Brownově podmínce porušení v posuzovaném bodě a určení sklonu této přímky. Porovnáním předpisu sklonu tečny k Hoek-Brownově podmínce a přímky ekvivalentního Mohr-Coulombova kritéria a zavedením předpokladu, že jejich poměr zůstává po redukcí konstantní získáme vztah pro parametr  $\eta$

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( 2 - \frac{\partial \tilde{f}(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} \right) \sqrt{1 + \frac{\left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \left( -\frac{\partial \tilde{f}(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} \right)^2}{\left( 2 - \frac{\partial \tilde{f}(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} \right)^2}} + \frac{\partial \tilde{f}(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} \right) \quad (3.44)$$

kde

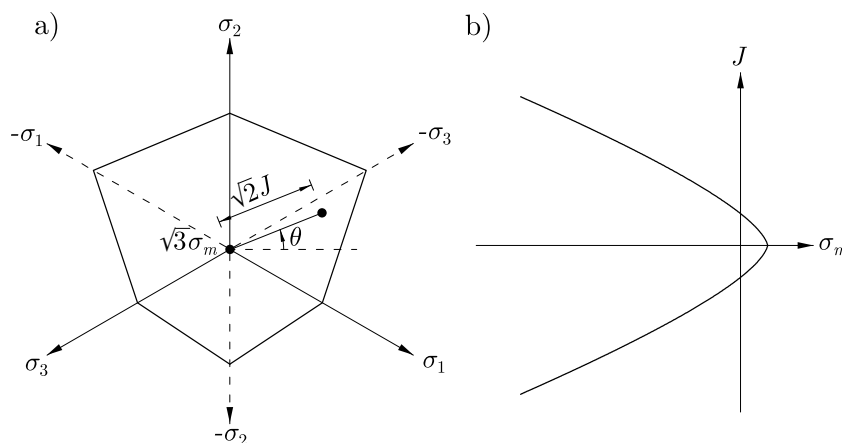
$$\tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{ci}}{\eta} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} = -m_b a \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1} \quad (3.45)$$

Kompletní odvození vztahu (3.44) lze nalézt v článku [6].

### 3.5 Hoek-Brownovo kritérium v invariantech napětí

Některé výsledky obdržené z modelových příkladů v kapitolách 5 a 6 budou interpretovány v invariantních veličinách, proto je vhodné uvést definici Hoek-Brownovy podmínky porušení také v invariantech napětí  $J$ ,  $\sigma_m$  a  $\theta$ . Jejich významem se zabývá kapitola 2.3.2. Připomeňme jejich znázornění na Obr. 3.8(a) v deviatorickém řezu Hoek-Brownovy plochy plasticity. Funkce plasticity v meridiánové rovině je znázorněna na Obr. 3.8(b). Hoek-Brownova podmínka plasticity zapsaná v invariantech napětí má podle [17] tvar

$$f(J, \sigma_m, \theta) = 2J \cos \theta - \sigma_{ci} \left( \frac{m_b}{\sigma_{ci}} \left( -\sigma_m + \frac{J}{\sqrt{3}} (\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta) \right) + s \right)^a = 0 \quad (3.46)$$



**Obrázek 3.8** a) Význam invariantů napětí v deviatorickém řezu plochy plasticity, b) Hoek-Brownova plocha plasticity v meridiánové rovině

## 4 Výpočetní metody a algoritmy

GEO5 MKP využívá pro nalezení rovnováhy, a tedy vyřešení nelineární soustavy rovnic (2.1), Newton-Raphsonovu metodu jinak nazývanou metoda tečen. Metoda tečen je standardní iterační metoda běžně používaná v konečně-prvkových programech. Je založena na minimalizaci rozdílu mezi vnějším zatížením a vnitřními silami.

V rámci každého iteračního kroku Newton-Raphsonovy metody dochází k řešení vnořeného iteračního cyklu návratu na plochu plasticity. Návrat na plochu plasticity je založen na principu elastického prediktoru-plastického korektoru. Stav napětí po aplikaci zatížení vychází z předpokladu elastického chování, a je proto označen elastickým prediktorem, plastický korektor představuje opravu pole napětí o tzv. plastickou část (hodnota napětí vztahena k plastické deformaci).

Program nejprve posoudí stav napjatosti v materiálovém bodě a v případě detekce plastického chování zahájí proces návratu na plochu plasticity. Vzhledem k řazení hlavních napětí podle velikosti může obecně dojít ke třem způsobům návratu. V případě návratu na plochu plasticity v oblasti  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  probíhá iterační proces, dokud není s požadovanou přesností splněna podmínka  $f^{13}(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ . Pokud se nacházíme v triaxiálové kompresi nebo extenzi, jedná se o návrat na hranu plochy plasticity, kdy je nutné splnit dvě podmínky plasticity<sup>1</sup> a každý iterační krok obnáší řešení soustavy rovnic o dvou neznámých. Třetím případem je návrat do vrcholu plochy plasticity, kdy na konci výpočetního procesu musí být splněny všechny tři podmínky plasticity. Návratem do vrcholu tělesa se zabývá kapitola 4.4.

Pro návrat na plochu plasticity a hranu plochy plasticity a následný výpočet korektního pole napětí a deformace slouží tzv. „Cutting plane“ algoritmus určený pro standardní plasticitu.

### 4.1 Transformační vztahy

Protože je Hoek-Brownův materiálový model formulován ve smyslu hlavních napětí, je po úspěšném návratu na plochu plasticity v rámci vnořeného iteračního cyklu nutné výslednou napjatost v materiálovém bodě transformovat zpět do kartézského souřadnicového systému, ve kterém vyjadřujeme globální podmínku rovnováhy.

Pro přírůstky napětí a deformace ve dvou souřadnicových systémech vzájemně natočených okolo osy  $z$  platí vztahy

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{T}_p^\varepsilon d\boldsymbol{\varepsilon}_c, \quad (4.1)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{T}_c^\sigma d\boldsymbol{\sigma}_p \quad (4.2)$$

kde index  $p$  značí přírůstky v hlavním souřadném systému a index  $c$  v kartézském souřadném systému. Matice  $\mathbf{T}_p^\varepsilon$  a  $\mathbf{T}_c^\sigma$  jsou transformační matice, pro které platí

$$\mathbf{T}_c^\sigma = (\mathbf{T}_p^\varepsilon)^\top \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>  $f^{13} = 0$  a  $f^{23} = 0$  v případě triaxiálové komprese a  $f^{13} = 0$  a  $f^{12} = 0$  pro případ triaxiálové extenze

Rozměr transformační matice  $\mathbf{T}_p^\varepsilon$  koresponduje s vektorem napětí a deformace. Pro podmínky rovinné deformace a osové symetrie má transformační matice tvar

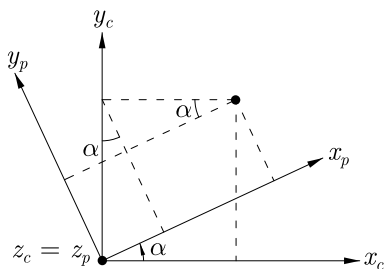
$$\mathbf{T}_p^\varepsilon = \begin{bmatrix} n_{11}n_{11} & n_{12}n_{12} & n_{11}n_{12} & n_{13}n_{13} \\ n_{21}n_{21} & n_{22}n_{22} & n_{21}n_{22} & n_{23}n_{23} \\ n_{31}n_{31} & n_{32}n_{32} & n_{31}n_{32} & n_{33}n_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

přičemž matice  $\mathbf{n}$ , z jejíchž prvků je transformační matice sestavena, vychází z geometrických vztahů mezi souřadnicovými systémy. Z Obr. 4.1 lze odvodit, že

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = \mathbf{n} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

kde

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



Obrázek 4.1 Rotace souřadnicového systému okolo osy z

## 4.2 Newton-Raphsonova metoda

Zatěžování numerického modelu je obvykle aplikováno v několika krocích, přičemž v každém výpočtovém kroku dochází k řešení dané soustavy nelineárních rovnic. Soustavu lze tedy pro k-tý výpočtový krok a j-tou iteraci zapsat jako

$$\mathbf{K}_j^k \mathbf{u}_j^k = \mathbf{f}^k \quad (4.7)$$

kde  $\mathbf{K}_j^k$  je v případě standardní Newton-Raphsonovy metody okamžitá tečná matice tuhosti,  $\mathbf{u}_j^k$  je aktuální vektor posunutí a  $\mathbf{f}^k$  je aktuální vektor uzlového zatížení (vektor pravých stran).

Principem Newton-Raphsonovy metody je nalezení průsečíku ve směru tečny k nelineární křivce řešení v každém iteračním kroku, přičemž důsledkem nelinearity je vektor nevyrovnaných sil

$$\Delta \mathbf{f}_j^k = \mathbf{F}^k - \mathbf{R}_j^k \quad (4.8)$$

kde  $\mathbf{F}^k$  je vektor uzlových sil od vnějšího zatížení na konci k-tého výpočtového kroku a  $\mathbf{R}_j^k$  je vektor vnitřních uzlových sil. Soustava je v rovnováze, pokud platí

$$\mathbf{F}^k - \mathbf{R}_j^k = 0 \quad (4.9)$$

Vektor vnitřních uzlových sil v  $k$ -tém výpočtovém kroku a  $j$ -té iteraci získáme s odkazem na rovnici (2.15) ze vztahu

$$\mathbf{R}_{e,j}^k = \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_{e,j}^k dV \quad (4.10)$$

přičemž pole napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{e,j}^k$  obsahuje hodnoty určené v rámci vnořeného iteračního procesu návratu na plochu plasticity. Matice  $\mathbf{B}_e$  je geometrická matice prvku, jejíž členy představují parciální derivace básových funkcí. Globální vektor  $\mathbf{R}_j^k$  získáme lokalizací všech vektorů vnitřních sil vztažených k jednotlivým elementům. Výchozí stav na začátku každého výpočtového kroku je řešením výpočtového kroku předchozího (viz Obr. 4.2), to znamená

$$\mathbf{u}_0^k = \mathbf{u}^{k-1} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{R}_0^k = \mathbf{R}^{k-1} \quad (4.12)$$

Pro vektor nevyrovnaných sil na začátku výpočtového kroku  $k$  potom platí

$$\Delta \mathbf{f}_0^k = \mathbf{F}^k - \mathbf{F}^{k-1} + \Delta \mathbf{f}_\epsilon^{k-1} \quad (4.13)$$

kde  $\mathbf{f}_\epsilon^{k-1}$  je vektor nevyrovnaných sil získaný na konci předchozího výpočtového kroku splňující požadovanou přesnost  $\epsilon$ .

Iterační krok začíná v případě standardní Newton-Raphsonovy metody určením tečné matice tuhosti, následují kroky iteračního cyklu popsané rovnicemi (4.14) až (4.16). Přírůstek deformace určíme s odkazem na kapitolu 2.1 pomocí rovnice (4.17). Přírůstek deformace má význam vstupní veličiny pro vnořený iterační cyklus návratu na plochu plasticity a určení aktuálního stavu napjatosti. V algoritmu Newton-Raphsonovy metody je tento krok označen jako funkce „StressUpdate“. Tento algoritmus je popsán v následujících kapitolách. Rovnicí (4.18) určíme celkové pole posunutí na konci iteračního kroku.

### Schéma globální iterace

$$\Delta \mathbf{f}_{j-1}^k = \mathbf{F}_k - \mathbf{R}_{j-1}^k \quad (4.14)$$

$$\Delta \mathbf{u}_j^k = \left( \mathbf{K}_{T_{j-1}}^k \right)^{-1} \Delta \mathbf{f}_{j-1}^k \quad (4.15)$$

$$d\mathbf{u}_j^k = d\mathbf{u}_{j-1}^k + \Delta \mathbf{u}_j^k \quad (4.16)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_j^k = \mathbf{B} d\mathbf{u}_j^k \quad (4.17)$$

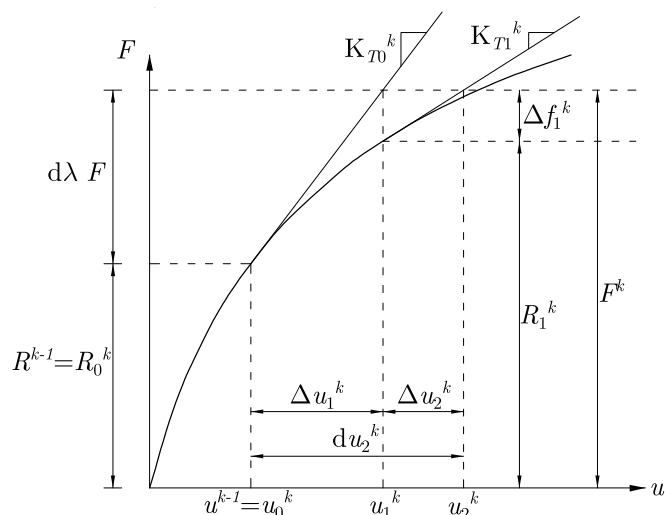
$$\boldsymbol{\sigma}_j^k = \text{StressUpdate}(\boldsymbol{\sigma}_{j-1}^k, d\boldsymbol{\varepsilon}_j^k)$$

$$\mathbf{u}_j^k = \mathbf{u}_{j-1}^k + \Delta \mathbf{u}_j^k \quad (4.18)$$

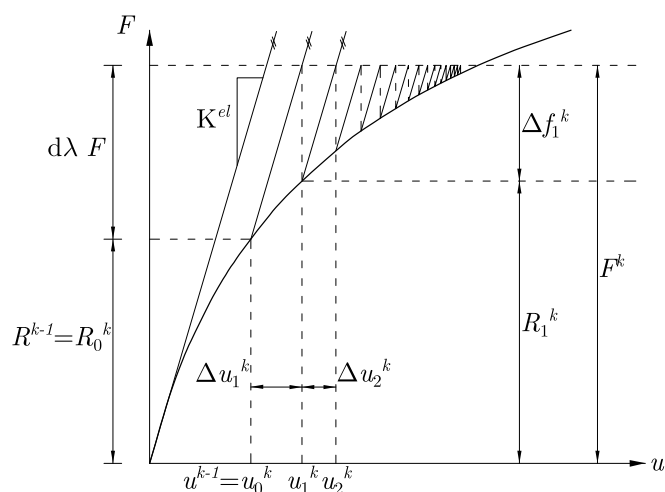
Výpočet se opakuje, dokud není splněna podmínka (4.9) s požadovanou přesností  $\epsilon$ .

Kromě standardní Newton-Raphsonovy metody lze pro řešení soustavy rovnic použít její modifikovanou verzi. K výpočtu tečné matice tuhosti potom nedochází v rámci každé iterace, ale pouze na začátku nového přírůstku zatížení a algoritmus dále pokračuje stejným způsobem s  $\mathbf{K}_{T_0}^k$ .

Další možnou úpravou této metody je nahrazení tečné matice v rovnici (4.15) počáteční elastickou maticí tuhosti  $\mathbf{K}^{el}$ , viz Obr. 4.3. Výhodou této metody je absence funkce pro výpočet tečné matice tuhosti, nicméně důsledkem je výrazné zpomalení konvergence.



Obrázek 4.2 Schéma standardní Newton-Raphsonovy metody



Obrázek 4.3 Schéma Newton-Raphsonovy metody s elastickou maticí tuhosti, tzv. metoda počáteční tuhosti

### 4.3 „Cutting plane“ algoritmus

Standardní „Cutting plane“ metoda byla odvozena pomocí Taylorova rozvoje funkce plasticity vzhledem k aktuální napjatosti. Pro funkci plasticity za předpokladu perfektní plasticity bez zpevnění nebo změkčení ve dvou po sobě jdoucích iteračních krocích návratu na plochu plasticity platí

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) = f(\boldsymbol{\sigma}_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_i} (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_i) = 0 \quad (4.19)$$

Připomeňme význam vektorů  $\mathbf{n}$ , resp.  $\mathbf{n}_g$  jako normál k ploše plasticity, resp. k plastickému potenciálu:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{n}_g = \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.21)$$

Elastickou část přírůstku deformace získáme za předpokladu teorie malých deformací jako

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (4.22)$$

Nahrazením parciálních derivací příslušným vektorem a dosazením rovnic (4.22) a (2.32) do (4.19) dostaneme vztah

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) = f(\boldsymbol{\sigma}_i) + (\mathbf{n}_i)^\top \mathbf{D}^{el} (d\varepsilon_{i+1} - d\varepsilon_i - (d\lambda_{i+1} - d\lambda_i)\mathbf{n}_{g,i}) = 0 \quad (4.23)$$

kde pro dvě po sobě jdoucí iterace platí  $d\varepsilon^{i+1} - d\varepsilon^i = 0$ . Jinými slovy předpokládáme, že přírůstek deformace v rámci iteračního kroku zůstává konstantní. Nyní můžeme vyjádřit přírůstek plastického multiplikátoru v závislosti na předešlém iteračním kroku jako

$$d\lambda_{i+1} = d\lambda_i + \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_i)}{(\mathbf{n}_i)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_{g,i}} \quad (4.24)$$

Více o algoritmu pro návrat na plochu plasticity včetně zahrnutí zpevnění či změkčení lze nalézt např. v [18].

### 4.3.1 Návrat na Hoek-Brownovu plochu plasticity

Pomocí známého přírůstku plastického multiplikátoru můžeme určit aktuální hodnoty napětí a plastické deformace a posoudit stav napjatosti na konci iteračního kroku. Na začátku prvního iteračního kroku vstupuje do výpočtu napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ , které je určeno jako

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}_{j-1}^k + \mathbf{K}_{j-1}^k d\varepsilon_j^k \quad (4.25)$$

Pokud není splněna podmínka plastické přípustnosti, platí tedy

$$f^{13}(\boldsymbol{\sigma}^{tr}) > 0$$

je zahájen algoritmus návratu na plochu plasticity. Pro první iterační krok platí:

$$d\lambda_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}^{tr} \quad (4.27)$$

Iterační cyklus návratu na plochu plasticity v sektoru  $f^{13}$  potom obnáší provedení této posloupnosti úkonů:

**Funkce** StressUpdate( $\boldsymbol{\sigma}_{j-1}^k, d\varepsilon_j^k$ ) - aktivní sektor plochy plasticity  $f^{13}$

---


$$\begin{aligned} & \text{do}\{ \\ & d\lambda_{i+1} = d\lambda_i + \frac{f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_i)}{(\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1} \\ & \boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - d\lambda_{i+1} \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 \\ & \} \text{while } f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) > \epsilon \end{aligned}$$


---

Normála  $\mathbf{n}^1$  k oblasti Hoek-Brownovy plochy plasticity  $f^{13}$ , resp.  $\mathbf{n}_g^1$  k příslušnému plastickému potenciálu má tvar (3.36), resp. (3.39). Zdůrazněme, že normály k plastickým potenciálům definovaným v kapitole 3.3 jsou nezávislé na aktuálních hodnotách napětí a v průběhu iteračního cyklu tedy zůstávají konstantní.

V případě lineární plochy plasticity jako je Mohr-Coulomb a předpokladu elastického-perfektně plastického materiálu probíhá návrat v rámci jediného iteračního kroku. Pro nelineární materiálový model může návrat obnášet několik iterací, viz kapitola 5.2.2 věnovaná testování algoritmu pro návrat na plochu plasticity.

### 4.3.2 Návrat na hranu Hoek-Brownovy plochy plasticity

V případě triaxiálové komprese nebo extenze, kdy se korektní stav napjatosti nachází na hraně plochy plasticity, platí rovnice (4.19) získaná Taylorovým rozvojem pro oba sektory příslušné hrany. Algoritmus neobsahuje kritérium rozhodující mezi typem návratu na plochu a na hranu plochy plasticity. Návrat na dva aktivní sektory plochy plasticity je zahájen za předpokladu, že po návratu na plochu plasticity  $f^{13}$  je jedna z podmínek  $f^{23} \leq 0$ ,  $f^{12} \leq 0$  porušena. Kapitola 5.2.2 obsahuje kompletní grafické znázornění návratu nejprve na jednu, poté na dvě aktivní oblasti plochy plasticity pro případ triaxiálové komprese. Pro více informací o „stress update“ algoritmu pro případ více aktivních sektorů plochy plasticity lze odkázat na [19].

Elastickou část přírůstku deformace pro případ dvou aktivních sektorů plochy plasticity můžeme vyjádřit jako

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl1} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl2} \quad (4.28)$$

kde plastické přírůstky deformace pro případ triaxiálové komprese určíme z rovnic

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl1} = d\lambda^1 \mathbf{n}_g^1, \quad (4.29)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl2} = d\lambda^2 \mathbf{n}_g^2 \quad (4.30)$$

Dosazením rovnic (4.28), (4.29) a (4.30) do Taylorova rozvoje potom získáme

$$f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_i) + (\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \left( d\varepsilon_{i+1} - d\varepsilon_i - (d\lambda_{i+1}^1 - d\lambda_i^1) \mathbf{n}_g^1 - (d\lambda_{i+1}^2 - d\lambda_i^2) \mathbf{n}_g^2 \right) = 0 \quad (4.31)$$

$$f^{23}(\boldsymbol{\sigma}_i) + (\mathbf{n}_i^2)^\top \mathbf{D}^{el} \left( d\varepsilon_{i+1} - d\varepsilon_i - (d\lambda_{i+1}^1 - d\lambda_i^1) \mathbf{n}_g^1 - (d\lambda_{i+1}^2 - d\lambda_i^2) \mathbf{n}_g^2 \right) = 0 \quad (4.32)$$

Označením rozdílů přírůstků plastických multiplikátorů v po sobě následujících krocích jako

$$\Delta\lambda^1 = d\lambda_{i+1}^1 - d\lambda_i^1, \quad (4.33)$$

$$\Delta\lambda^2 = d\lambda_{i+1}^2 - d\lambda_i^2, \quad (4.34)$$

a zavedením předpokladu  $d\varepsilon^{i+1} - d\varepsilon^i = 0$  získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $\Delta\lambda^1$  a  $\Delta\lambda^2$  ve tvaru

$$f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_i) - \Delta\lambda^1 (\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 - \Delta\lambda^2 (\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^2 = 0 \quad (4.35)$$

$$f^{23}(\boldsymbol{\sigma}_i) - \Delta\lambda^1 (\mathbf{n}_i^2)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 - \Delta\lambda^2 (\mathbf{n}_i^2)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^2 = 0 \quad (4.36)$$

Na začátku prvního iteračního kroku platí obdobně jako u návratu na jednu aktivní plochu plasticity

$$d\lambda_0^1 = 0, \quad d\lambda_0^2 = 0 \quad (4.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}^{tr} \quad (4.38)$$



Celý iterační algoritmus lze potom shrnout do následujících kroků:

**Funkce** StressUpdate( $\boldsymbol{\sigma}_{j-1}^k, d\boldsymbol{\varepsilon}_j^k$ ) - aktivní sektory plochy plasticity  $f^{13}$ ,  $f^{23}$

---


$$\begin{aligned} & \text{do}\{ \\ & \left[ \begin{array}{cc} (\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 & (\mathbf{n}_i^1)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^2 \\ (\mathbf{n}_i^2)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 & (\mathbf{n}_i^2)^\top \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\lambda^1 \\ \Delta\lambda^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_i) \\ f^{23}(\boldsymbol{\sigma}_i) \end{array} \right\} \\ & \left\{ \begin{array}{c} d\lambda_{i+1}^1 \\ d\lambda_{i+1}^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} d\lambda_i^1 \\ d\lambda_i^2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Delta\lambda^1 \\ \Delta\lambda^2 \end{array} \right\} \\ & \boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - d\lambda_{i+1}^1 \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^1 - d\lambda_{i+1}^2 \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^2 \\ & \left. \right\} \text{while } f^{13}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) > \epsilon \text{ or } f^{23}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) > \epsilon \end{aligned}$$


---

Analogicky je řešen návrat na hranu plochy plasticity v případě triaxiálové extenze. Algoritmus pro návrat bychom získali záměnou příslušných indexů.

#### 4.4 Kritérium pro návrat do vrcholu Hoek-Brownovy plochy plasticity

Vzhledem k tomu, že hodnotu funkce plasticity nelze v oblasti nad tahovou pevnost horninového masivu vyčíslit, nelze její hodnotu použít jako kritérium návratu do vrcholu plochy plasticity. Ze stejného důvodu není možné pro návrat použít stejný algoritmus jako v předchozích případech. Pro vektor hlavních napětí ve vrcholu platí

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \{\sigma_t; \sigma_t; \sigma_t\}^\top \quad (4.39)$$

J. Clausen ve své práci [14] zavádí hraniční roviny popsané funkcemi  $p_1$  a  $p_2$  ohraničující oblast napjatosti, ze které je elastický prediktor vrácen právě do vrcholu plochy plasticity. Orientace těchto hraničních rovin je definována vektory směrů napětí korepondujícími se třemi směry plastické deformace pro možné stavy napjatosti:

- dominantní sektor  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
- triaxiálová komprese  $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$
- triaxiálová extenze  $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$

Normála k plastickému potenciálu ve vrcholu, a tedy směr plastické deformace, pro dominantní sektor plochy plasticity  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  se určí jako

$$\mathbf{n}_g^t = \left. \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_t} \quad (4.40)$$

V případě konstantní míry dilatance je směr plastické deformace nezávislý na stavu napjatosti, proto v našem případě platí

$$\mathbf{n}_g^t = \mathbf{n}_g^1 \quad (4.41)$$

Normály rovnoběžné s rovinami triaxiálové komprese a extenze získáme opět pomocí parciálních derivací plastického potenciálu, přičemž aktivní jsou vždy dva sektory. Platí tedy

$$\mathbf{n}_g^{TC} = \left. \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_t} + \left. \frac{\partial g(\sigma_2, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_t} = \mathbf{n}_g^1 + \mathbf{n}_g^2 \quad (4.42)$$

$$\mathbf{n}_g^{\text{TE}} = \left. \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_t} + \left. \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_t} = \mathbf{n}_g^1 + \mathbf{n}_g^3 \quad (4.43)$$

Po dosazení vektorů normál k plastickému potenciálu, viz (3.39), (3.40) a (3.41), dostaneme

$$\mathbf{n}_g^t = \left\{ \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; 0; -1 \right\}^T \quad (4.44)$$

$$\mathbf{n}_g^{\text{TC}} = \left\{ \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; -2 \right\}^T \quad (4.45)$$

$$\mathbf{n}_g^{\text{TE}} = \left\{ 2 \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; -1; -1 \right\}^T \quad (4.46)$$

Korespondující směry napětí získáme jako

$$\mathbf{s}^t = \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^t, \quad \mathbf{s}^{\text{TC}} = \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^{\text{TC}}, \quad \mathbf{s}^{\text{TE}} = \mathbf{D}^{el} \mathbf{n}_g^{\text{TE}} \quad (4.47)$$

Funkce hraničních ploch mají předpis

$$p_1(\boldsymbol{\sigma}^{tr}) = \mathbf{n}_{p1}^T (\boldsymbol{\sigma}^{tr} - \boldsymbol{\sigma}^t) = 0, \quad (4.48)$$

$$p_2(\boldsymbol{\sigma}^{tr}) = \mathbf{n}_{p2}^T (\boldsymbol{\sigma}^{tr} - \boldsymbol{\sigma}^t) = 0, \quad (4.49)$$

kde jejich normály jsou definovány příslušnými směry napětí. Vektory normál k hraničním plochám získáme vektorovými součiny

$$\mathbf{n}_{p1} = \mathbf{s}^t \times \mathbf{s}^{\text{TC}}, \quad \mathbf{n}_{p2} = \mathbf{s}^{\text{TE}} \times \mathbf{s}^t \quad (4.50)$$

Kritérii rozhodujícími o tom, zda elastický prediktor spadá do oblasti návratu do vrcholu plochy plasticity, jsou hodnoty největšího hlavního napětí  $\sigma_1$ , funkce  $p_1$  a funkce  $p_2$ . Ty musejí pro návrat do vrcholu splňovat podmínky

$$\sigma_1 > \sigma_t, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0 \quad (4.51)$$

Problém nastává v případě, kdy kritéria vztahující se k hraničním plochám nejsou splněna, zároveň však platí, že  $\sigma_1 > \sigma_t$ . V takovém případě se nejedná o návrat do vrcholu, funkce plasticity ale není vyčíslitelná, a proto běžný návrat na plochu plasticity nepřipadá v úvahu. Pokud se napjatost nachází v tomto stavu, algoritmus zmenšuje výpočtový krok, dokud nedosáhne napětí  $\sigma_1 < \sigma_t$ , případně dokud není dosažen uživatelsky nastavený maximální počet relaxací výpočtového kroku. V prvním případě je zahájen běžný návrat na plochu plasticity.

V případě splnění kritérií (4.51) jsou hlavním napětím přiřazeny hodnoty odpovídající vrcholu plochy plasticity, viz (4.39). Příslušné hodnoty přírůstků plastické deformace jsou poté určeny na základě rozdílu mezi elastickým prediktorem  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$  a vektorem  $\boldsymbol{\sigma}_t$ . Plastická objemová deformace je vypočtena z její definice (2.45).

Robustnější algoritmus, který řeší návrat na plochu plasticity při  $\sigma_1 > \sigma_t$ , přičemž zbývající podmínky (4.51) nejsou splněny, je popsán v práci [14].

## 5 Laboratorní testy

Modely geotechnických laboratorních testů lze díky snadné geometrii a známé předpokládané odezvě snadno využít pro verifikaci materiálového modelu implementovaného do konečně-prvkového programu. Tato kapitola obsahuje důkladný rozbor odezvy materiálu za použití Hoek-Brownovy podmínky plasticity při simulaci laboratorních testů v triaxiálu a v edometru.

Triaxiálový laboratorní test, jehož výsledkem je dvojice smykového a normálového napětí a Mohrova kružnice při porušení, je prováděn za účelem odvození smykových parametrů zeminy či horniny. Edometrický test zkoumá přetvárné vlastnosti zeminy nebo horniny. Vzorek v edometrickém přístroji je zatěžován v určitých krocích za současného měření svislé deformace. Výsledkem je závislost mezi napětím a deformací umožňující určení sečného edometrického modulu deformace  $E_{oed}$ .

Numerický model triaxiálu je tvořen v podmínkách osové symetrie, oproti tomu pro model edometrické zkoušky byly použity podmínky rovinné deformace. Oba laboratorní testy umožňují testování algoritmu návratu na hranu triaxiálové komprese a také názorné porovnání s odezvou stejného modelu s použitím Mohr-Coulombovy podmínky plasticity s ekvivalentními smykovými parametry.

### 5.1 Parametry horniny testovacího modelu

Pro účely simulace namáhání vzorků v laboratorních přístrojích s předpokladem Hoek-Brownovy plochy plasticity byly parametry skutečného horninového masivu převzaty z [4], kde je daný masiv klasifikován jako masiv velmi nízké kvality. Pro obdržení ekvivalentních parametrů definujících tvar Mohr-Coulombovy podmínky plasticity doporučují autoři [4] simulaci skupiny triaxiálových testů s hodnotou nejmenšího hlavního napětí v rozsahu  $0 < |\sigma_1| < 0.25\sigma_{ci}$ . Pro odvození ekvivalentního lineárního Mohr-Coulombova kritéria je dále použit postup založený na analytickém určení největšího hlavního napětí a lineární regresi popsany v kapitole 3.2.1, jehož hlavním výsledkem jsou vztahy mezi parametry dvou podmínek porušení (3.18) a (3.19).

V první části Tab. 5.1 jsou uvedeny vstupní parametry horninového masivu, druhá

Parametr	Označení	Hodnota	Jednotky
Poissonovo číslo	$\nu$	0.3	(-)
Prostá pevnost v tlaku	$\sigma_{ci}$	20.0	(MPa)
Hoek-Brownova konstanta	$m_i$	8.0	(-)
Geological Strength index	GSI	30.0	(-)
Faktor porušení	D	0.0	(-)
Redukovaná Hoek-Brownova konstanta	$m_b$	0.656680	(-)
Konstanta	$s$	0.000419	(-)
Konstanta	$a$	0.522340	(-)
Modul deformace	$E_m$	1414.20	(MPa)

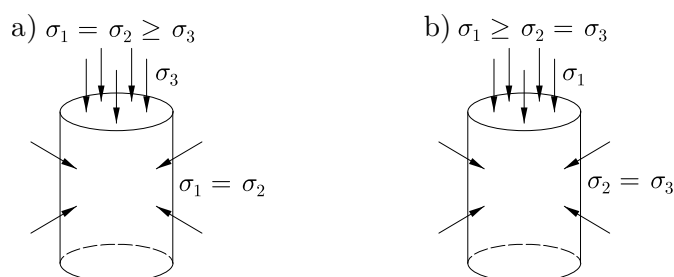
**Tabulka 5.1** Vstupní a vypočtené parametry horninového masivu

část tabulky shrnuje parametry získané na základě geologických charakteristik pomocí vztahů uvedených v kapitole 3.1.1. Objemová tíha horninového masivu není uvažována. Dosazením  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci} = 0.25$  do (3.18) a (3.19) získáme hodnoty ekvivalentních smykových parametrů

$$c = 649.0 \text{ kPa}, \quad \varphi = 22.8^\circ$$

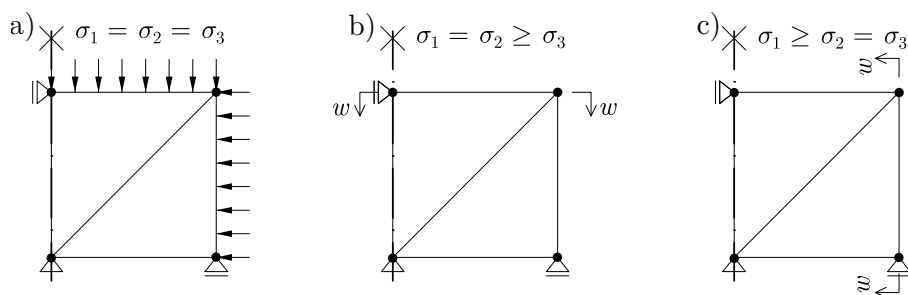
## 5.2 Numerický model triaxiálu

Numerický výpočet je stejně jako skutečný triaxiálový test proveden dvoufázově. V první fázi výpočtu je model zatížen všesměrným komorovým tlakem o hodnotě zvoleného napětí tak, aby byl vyvozen stav hydrostatické napjatosti. V následující fázi je zvyšována hodnota svíslého nebo radiálního napětí v závislosti na tom, zda chceme testovat triaxiálovou kompresi nebo extenzi, přičemž druhá hodnota napětí zůstává konstantní, viz schémata na Obr. 5.1. Pro triaxiálové působení vždy platí, že hodnoty hlavních napětí jsou přímo rovny předepsaným hodnotám zatížení.



**Obrázek 5.1** Způsoby zatěžování vzorku v triaxiálu: a) triaxiálová komprese, b) triaxiálová extenze

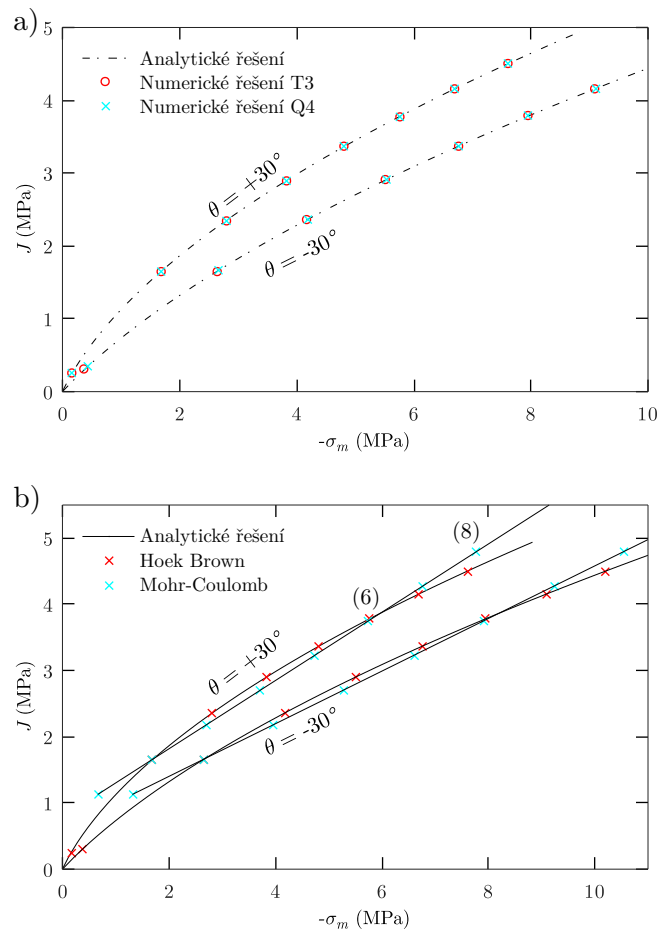
Nejjednodušší numerický model je tvořen v podmínkách osové symetrie, kde je daná oblast rozdělena na síť dvou trojúhelníkových prvků, případně představuje jeden čtyřúhelníkový konečný prvek. V první fázi je model vystaven přímo dané hodnotě tlaku, zatímco zvyšování napětí v druhé fázi je realizováno předepsáním posunu podpor. Vzhledem k předpokladu elastického-perfektně plastického vztahu mezi napětím a deformací by přímá aplikace přírůstku napětí v druhé zatěžovací fázi vyvolala vznik singularity a problém s konvergencí výpočetní metody. Schémata numerického modelu v jednotlivých fázích zatěžování jsou znázorněna na Obr. 5.2.



**Obrázek 5.2** Numerický model triaxiálu se dvěma tříuzlovými prvky: a) 1. fáze - izotropní napjatost, b) 2. fáze - přitížení posunem (triaxiálová komprese), c) 2. fáze - přitížení posunem (triaxiálová extenze)

Z předpokladu elastické-perfektně plastické odezvy také plyne důsledek konstantního pole napětí v průběhu dalšího zatěžování po dosažení plochy plasticity a začátku plastického přetváření. Vzhledem k triviálnímu způsobu zatěžování lze tuto skutečnost snadno ověřit. Numerický model byl pro osm různých komorových tlaků v rámci zvoleného rozsahu napětí zatížen dle schémat na Obr. 5.2 posunem o hodnotě větší než určuje mez plasticity. Jak dokazuje Obr. 5.3(a), stav napjatosti na konci numerického výpočtu triaxiálové komprese a extenze leží na analyticky vyjádřené ploše plasticity, přičemž numerická řešení pro tříuzlový a čtyřuzlový konečný prvek jsou s analytickým řešením v dobré shodě.

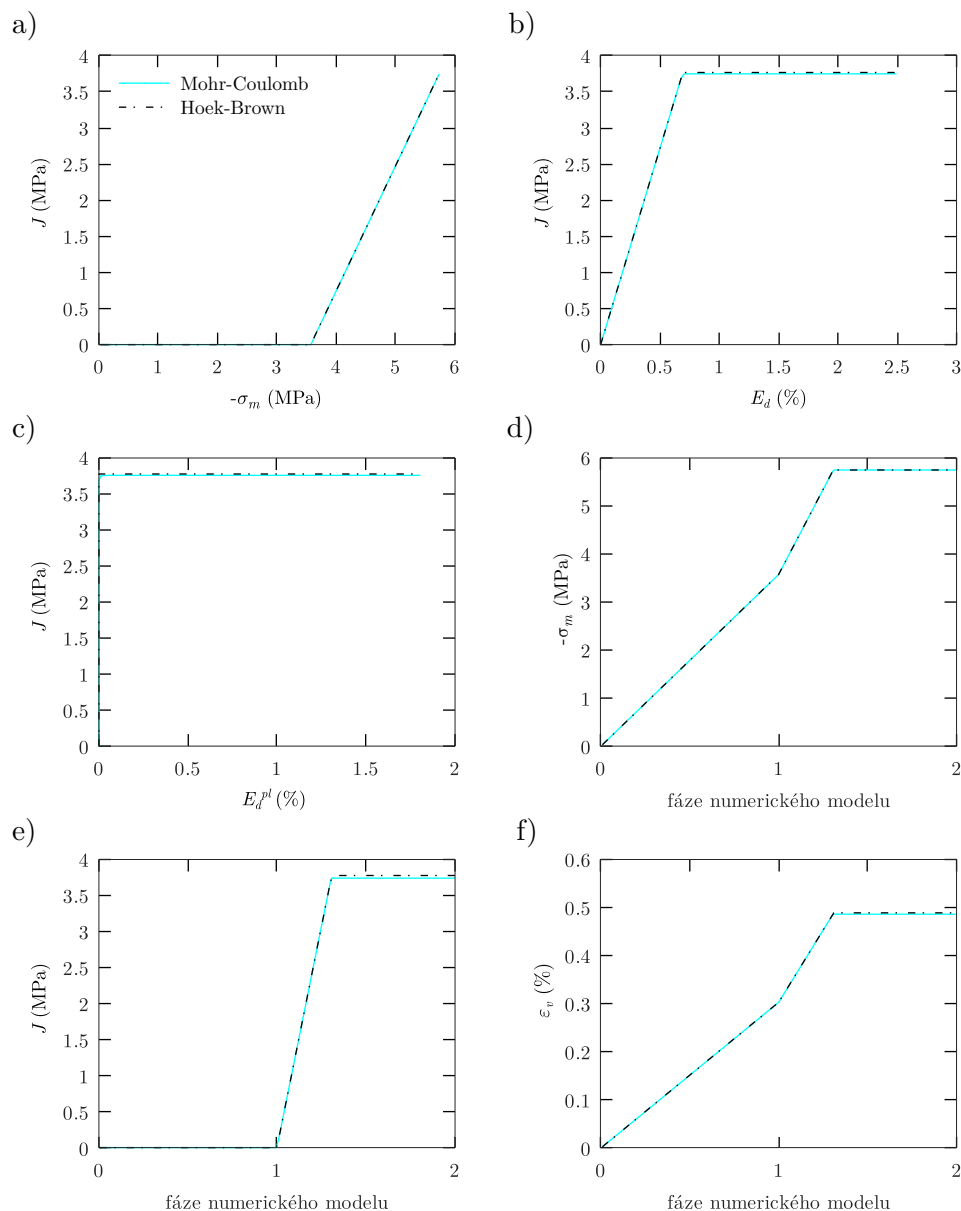
Obrázek 5.3(b) ukazuje numerické řešení nejen pro Hoek-Brownovu podmínku plasticity, ale také pro Mohr-Coulombovu podmínku plasticity s ekvivalentními parametry.



**Obrázek 5.3** Porovnání numerického a analytického řešení: a) pro dva typy konečných prvků, b) pro dvě různé podmínky plasticity s použitím tříuzlového konečného prvku

### 5.2.1 Porovnání odezvy s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity

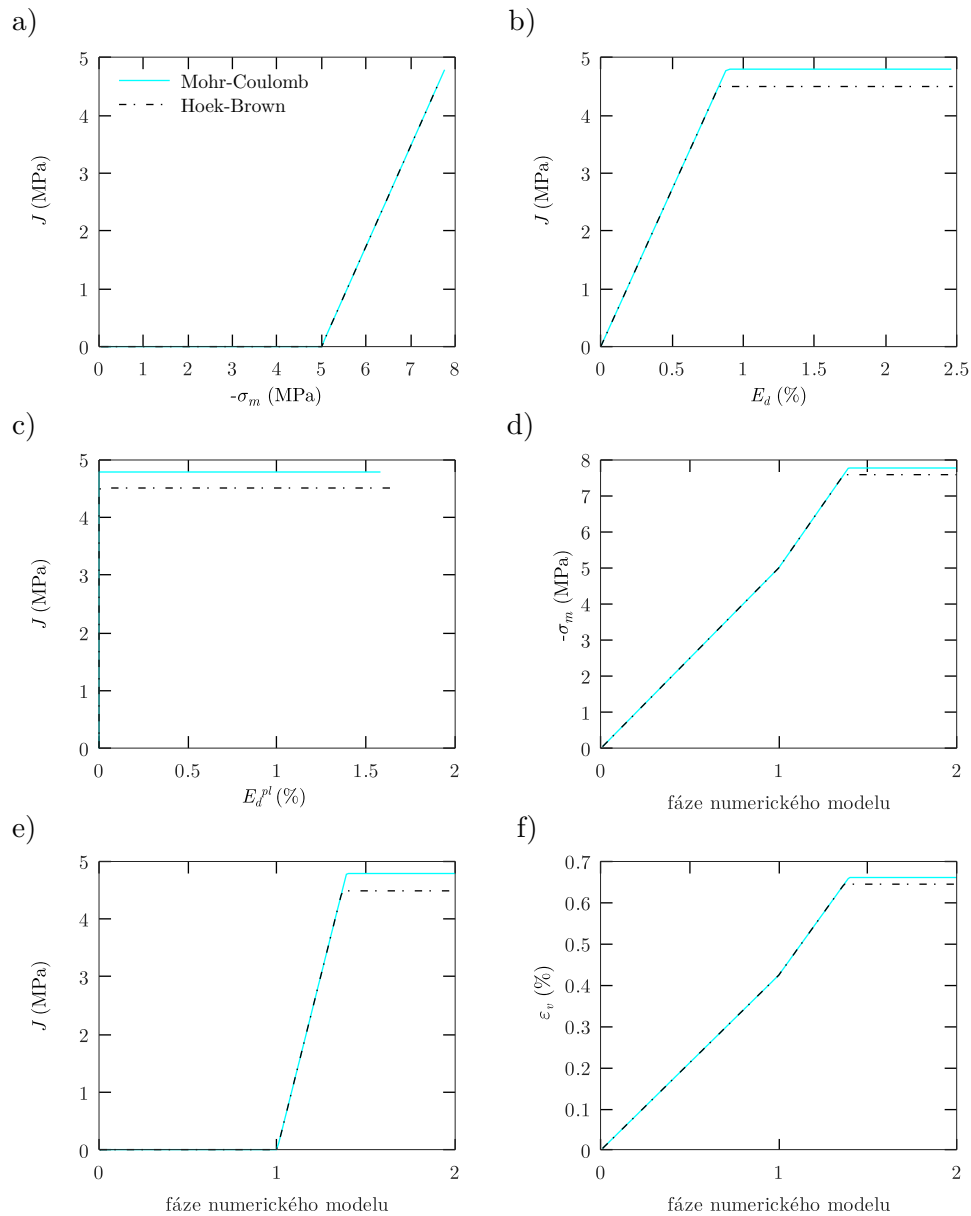
Jak už bylo v této práci několikrát zmíněno, shoda mezi odezvou danou Hoek-Brownovou a Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity je výrazně závislá na aplikovaném poměru  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci}$ . V případě triaxiálového testu lze na rozdíl od skutečného problému přesně určit oblast platnosti této ekvivalence, resp. navodit stav napjatosti nacházející se v daném rozsahu. Obrázky 5.4 a 5.5 ukazují vývoj invariantních veličin pro dva z osmi zatěžovacích stavů aplikovaných výše, konkrétně šestý (Obr. 5.4) a osmý (Obr. 5.5) ve



**Obrázek 5.4** Porovnání odezvy vzorku při triaxiální kompresi při použití HB nebo MC podmínky plasticity pro šestý ze série triaxiálních testů

stavu triaxiální komprese, viz také Obr. 5.3(b). Tyto závislosti spolu s Obr. 5.3(b) dokazují, že přesnost shody závisí na aktuálních hodnotách napětí a není vzhledem k průměrným hodnotám ekvivalentních smykových parametrů v rámci zvoleného rozsahu napjatosti stejná.

Vývoj invariantu  $J$  v závislosti na  $-\sigma_m$  na Obr. 5.4(a) a 5.5(a) je ukončen v momentě začátku plastického přetváření, což dokazují Obr. 5.4(d), 5.5(d) a 5.4(e), 5.5(e). Fáze numerického modelu 0-1 představuje zatěžování komorových tlakem v první fázi, 1-2 značí zvyšování deviatoru napětí v druhé fázi, přičemž zlom ve vývoji dané veličiny v druhé fázi indikuje začátek plastického přetváření. Protože se v první fázi výpočtu nachá-

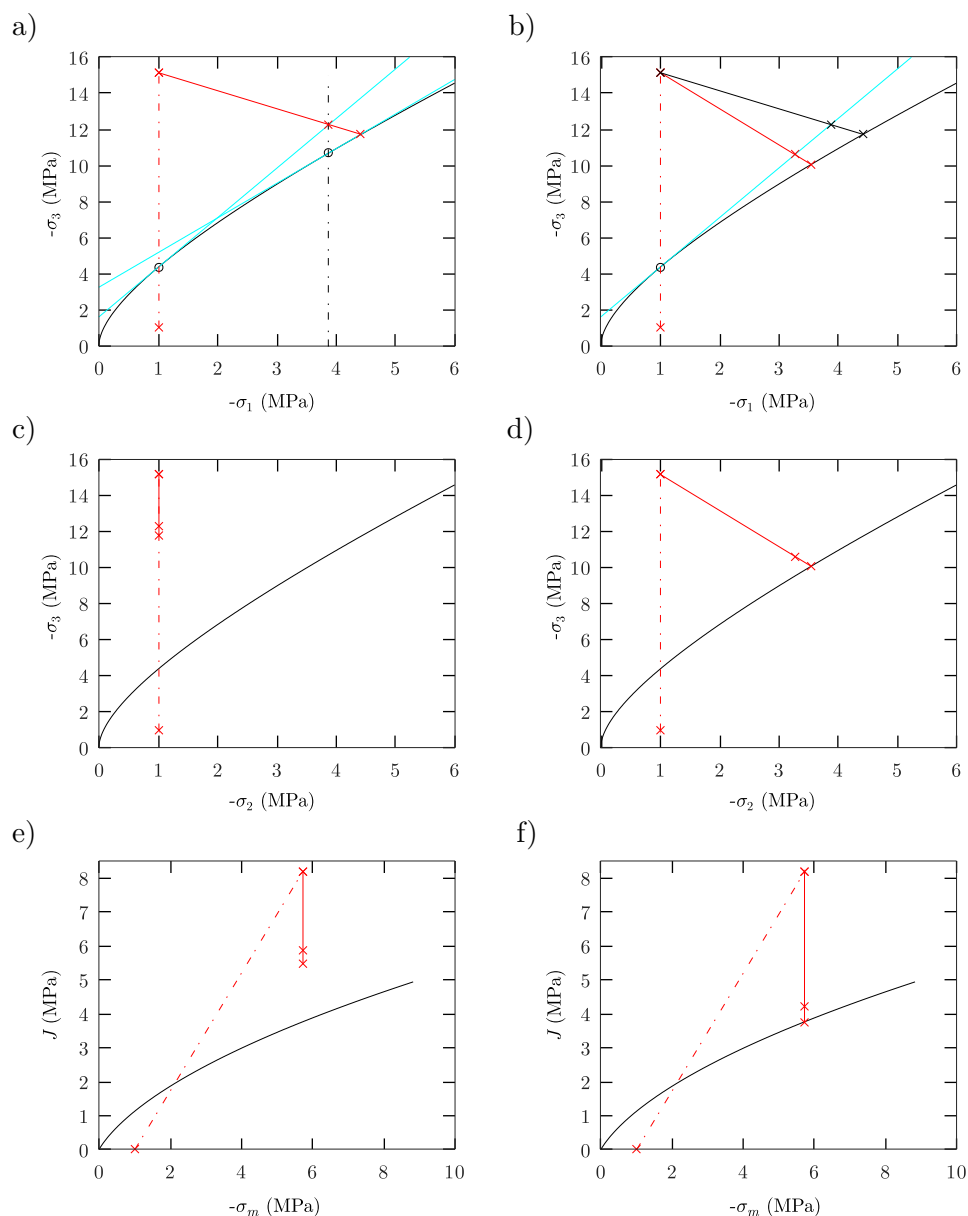


**Obrázek 5.5** Porovnání odezvy vzorku při triaxiálové kompresi při použití HB nebo MC podmínky plasticity pro osmý ze série triaxiálových testů

zíme ve stavu hydrostatické napjatosti, ekvivalentní deviatorické napětí  $J$  je v průběhu celé fáze rovno nule a střední napětí  $\sigma_m$  je rovno aktuální hodnotě komorového tlaku. Závislost na Obr. 5.4(b), 5.5(b) tedy popisuje pouze druhou fázi výpočtu a dokazuje elastické-perfektně plastické chování, obdobně Obr. 5.4(c), 5.5(c) pouze s plastickou částí ekvivalentního deviatorického přetvoření.

## 5.2.2 Test návratu na hranu plochy plasticity

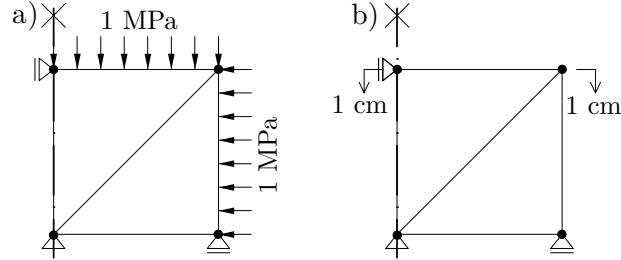
Numerickým výpočtem triaxiálové napjatosti lze názorně ilustrovat princip „Cutting plane“ algoritmu popsánoho v kapitole 4.3. Obrázek 5.6 ukazuje jeden iterační cyklus návratu na plochu plasticity v iteračním bodě v rámci první globální iterace Newton-Raphsonovou metodou pro numerický model triaxiálu ve druhé fázi zatěžování. V tomto testu byla pro názornost použita aplikace zatížení posunem podpor v jediném výpočtovém kroku a hodnota úhlu dilatance volena  $\psi = 0$ . Dráha zatížení má počátek v hydrostatickém napětí, které je výsledkem první fáze zatížení komorovým tlakem



**Obrázek 5.6** Grafické znázornění procesu návratu na plochu plasticity: a),c),e) pouze pro platnost sektoru  $f^{13}$ , b),d),f) na hranu plochy plasticity - sektory  $f^{13}$  a  $f^{23}$



o hodnotě  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$  MPa, viz schémata zatěžovacích stavů na Obr. 5.7. Následně je posunem podpor vyvolán nárůst svislého zatížení na hodnotu  $\sigma_3 \cong -15$  MPa (elastický prediktor). Připomeňme, že vektor napětí označený elastickým prediktorem je v algoritmu návratu na plochu plasticity značen  $\sigma^{tr}$ .



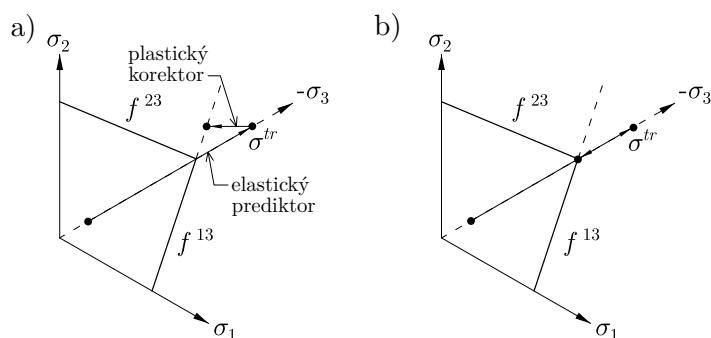
**Obrázek 5.7** Zatěžovací fáze numerického modelu pro test návratu na plochu plasticity: a) zatížení komorovým tlakem, b) přitížení posunem podpor na horní hraně modelu

Implementovaný algoritmus po splnění kritéria plastického přetváření  $f^{13}(\sigma^{tr}) > \epsilon$  zahájí cyklus návratu na plochu plasticity v sektoru  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Tento návrat popisují Obr. 5.6(a),(c),(e), kdy první z grafů ukazuje linearizaci plochy plasticity pro každou jednotlivou iteraci a návrat na tečnu k ploše plasticity ve vyznačených bodech, dokud není splněna podmínka  $f^{13}(\sigma) \leq \epsilon$ . Druhý z grafů znázorňuje průběh návratu v prostoru  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Hodnota hlavního napětí  $\sigma_2$  se v průběhu návratu nemění a po dokončení iteračního procesu je podmínka plastické přípustnosti  $f^{23}(\sigma) \leq 0$  porušena. Protože při volbě  $\psi = 0$  nedochází ke vzniku objemové plastické deformace, hodnota středního napětí se v průběhu návratu na plochu plasticity nemění. V meridiánové rovině, viz Obr. 5.6(e), tedy dochází k návratu na plochu plasticity svise dolů, přičemž celkový návrat je neúspěšný.

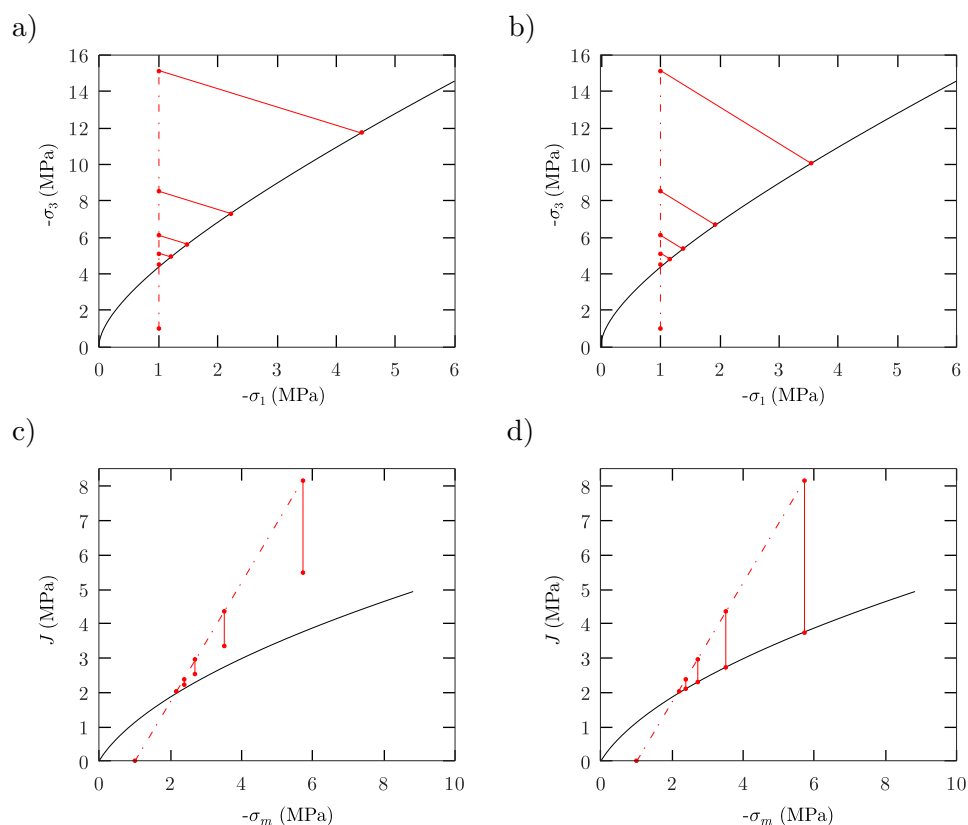
Algoritmus po tomto iteračním cyklu znovu posoudí stav napjatosti a vzhledem k platnosti výrazu  $f^{23}(\sigma) > \epsilon$  zahájí návrat na hranu plochy plasticity znázorněný na grafech na Obr. 5.6(b),(d),(f)<sup>1</sup>. První graf ukazuje obdobný proces linearizace jako v prvním případě, vzhledem k řešení soustavy dvou rovnic se ale liší směr návratu. Jak dokazuje druhý graf, v celém průběhu návratu se napjatost nachází v rovině triaxiálové komprese  $\sigma_1 = \sigma_2$  a dochází ke změnám všech hodnot napětí. Třetí z grafů potvrzuje úspěšný návrat na plochu plasticity také v meridiánové rovině. Návrat na plochu plasticity lze také ilustrovat v prostoru hlavních napětí, viz Obr. 5.8, kdy 5.8(a) ukazuje návrat na  $f^{13}$  bez ohledu na  $f^{23}$  a 5.8(b) ukazuje návrat na hranu plochy plasticity.

Po dokončení návratu na plochu plasticity se výsledné pole napětí transformuje pomocí matice uvedené v kapitole 4.1 zpět do kartézského souřadnicového systému, dojde k zahájení následující globální iterace Newton-Raphsonovy metody, vypočte se nový elastický prediktor a celý proces se opakuje, dokud není splněna rovnováha a vektor nevyrovnaných sil není menší než určená tolerance. Na Obr. 5.9 je pro stejný příklad vykreslen kompletní průběh konvergence ke správnému stavu napjatosti, to znamená návrat na plochu plasticity v rámci každé globální iterace. Obrázky 5.9(a),(c) korespondují s návratem pouze na  $f^{13}$ , zatímco Obr. 5.9(b),(d) představují správný proces návratu na hranu plochy plasticity v rámci jednoho výpočtového kroku pro všechny globální iterace.

<sup>1</sup>Lze si také povšimnout, že v tomto případě po návratu pouze na plochu  $f^{13}$  platí  $\sigma_2 > \sigma_1$ , viz také Obr. 5.8(a)



**Obrázek 5.8** Návrat na plochu plasticity v prostoru hlavních napětí: a) pouze pro platnost sektoru  $f^{13}$ , b) návrat na hranu plochy plasticity - sektory  $f^{13}$  a  $f^{23}$

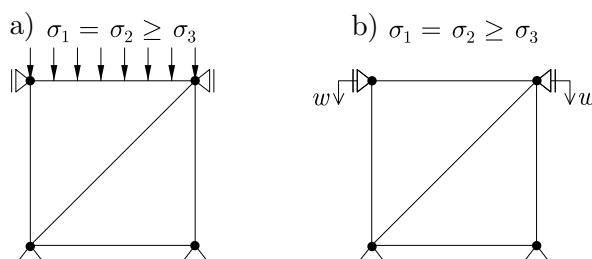


**Obrázek 5.9** Zobrazení návratu na plochu plasticity pro všechny globální iterace až do dosažení rovnovážného stavu: a),c) pouze pro platnost sektoru  $f^{13}$ , b),d) návrat na hranu plochy plasticity - sektory  $f^{13}$  a  $f^{23}$

### 5.3 Numerický model edometru

Vzorek v edometru je oproti triaxiálu zatěžován pouze svislým tlakem, přičemž je zabráněno příčné deformaci. Vztah mezi svislým a bočním napětím je dán rozšířeným Hookeovým zákonem a obdobně jako u triaxiálu se kartézské složky napětí přímo rovnají těm hlavním. Numerický výpočet lze buď modelovat v podmínkách osové symetrie stejným způsobem jako triaxiál s jinými okrajovými podmínkami, nebo v podmínkách rovinné deformace, viz Obr. 5.10. Oproti triaxiálu je možné svislé zatížení zadat nejen

posunem horní hrany modelu, ale také přímo hodnotou napětí.



**Obrázek 5.10** Numerický model edometru se dvěma tříuzlovými prvky: a) zatížení určitou hodnotou napětí, b) zatížení posunem

Pro příklad výpočtu odezvy vzorku namáhaného v edometru byly v první fázi použity parametry horninového masivu uvedené v kapitole 5.1, včetně ekvivalentních smykových parametrů určených pro poměr  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci} = 0.25$ . Pro napjatost v edometru platí

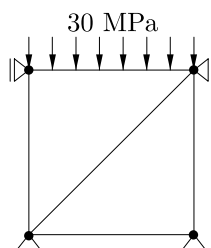
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z \quad (5.1)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z \quad (5.2)$$

Dosazením rovnic (5.1) a (5.2) do Hoek-Brownovy podmínky plasticity jako

$$\frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z - \sigma_z - \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{-\sigma_z}{\sigma_{ci}} + s \right)^a = 0, \quad (5.3)$$

lze určit mezní hodnotu napětí, kdy se vzorek v edometru začne plasticky přetvářet. V elastické oblasti je hodnota svislého napětí přímo rovna zadanému zatížení. Výpočtem pro zadané parametry bychom tedy získali mezní zatížení o hodnotě  $\sigma_z = -16.165$  MPa. Na rozdíl od triaxiálu dochází v edometru v důsledku zabránění příčné deformace k dalšímu vývoji napjatosti i po začátku plastického přetváření. Abychom mohli názorně popsat jevy odehrávající se v oblasti plasticity, zatížili jsme model hodnotou napětí nad mezí plasticity dle Obr. 5.11.



**Obrázek 5.11** Numerický model edometru zatížený hodnotou napětí nad mezí plasticity

### 5.3.1 Vliv zvoleného rozsahu napětí při výpočtu ekvivalentních smykových parametrů

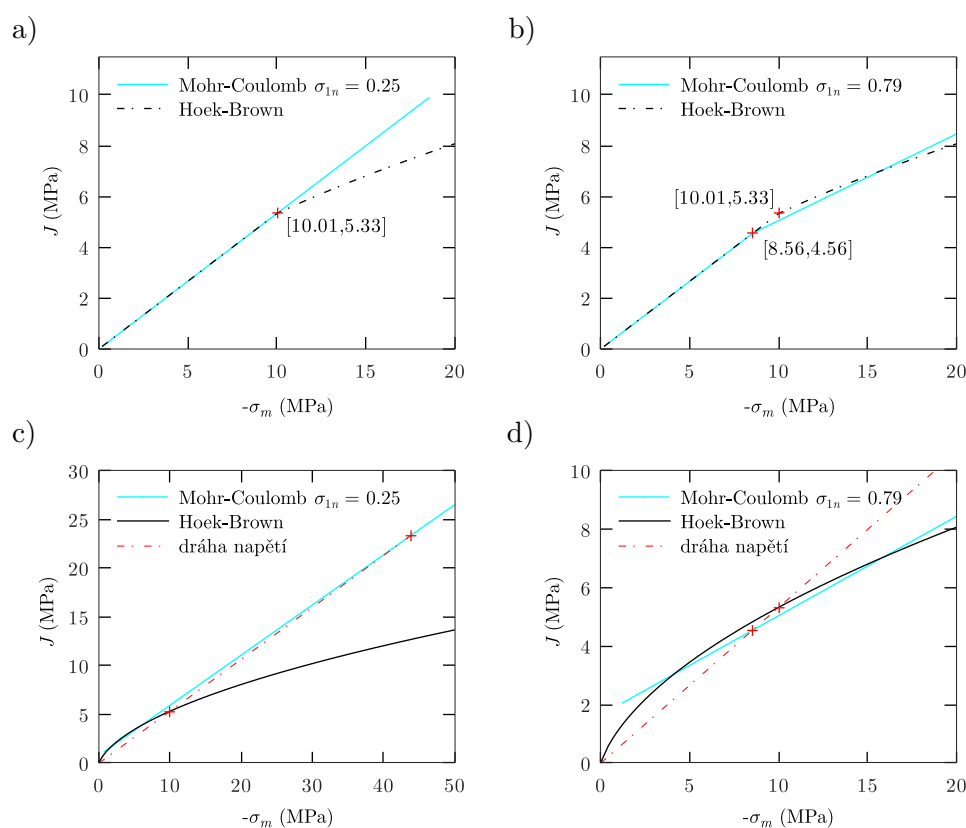
Simulací edometrické zkoušky lze snadno demonstrovat vliv zvoleného poměru  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci}$  při výpočtu ekvivalentních smykových parametrů. Na rozdíl od triaxiálu, kde jsou hodnoty hlavních napětí přímo rovny vnějšímu zadanému zatížení a lze tedy

přímo předpovídat napjatost uvnitř vzorku, se napjatost v edometru řídí plochou plasticity, která je funkcí parametrů horninového masivu. Analytické odvození maximální hodnoty napětí  $|\sigma_{1max}|$  by tedy bylo velmi komplikované.

Důsledek špatně zvoleného rozsahu napětí pro ekvivalentní Mohr-Coulombovu podmínku plasticity je patrný z Obr. 5.12(a), kdy při použití Hoek-Brownovy podmínky plasticity dochází při dosažení výše vypočteného mezního zatížení ke zlomu ve vývoji napětí a plastickému přetváření, zatímco v případě Mohr-Coulombovy podmínky plasticity nedojde k plastickému přetváření v celém oboru zatěžování. Na Obr. 5.12(c) je vyznačena dráha napětí a body, ve kterých dosáhne podmínky plasticity, které by měly být v ideálním případě totožné. Je tedy jasné, že napjatost vzorku v edometru je v tomto případě výrazně mimo předpokládanou oblast platnosti ekvivalence mezi dvěma podmínkami plasticity.

Pokud vypočteme novou hranici rozsahu ekvivalence jako poměr bočního napětí na konci zatěžování získaného numerickým výpočtem při použití Hoek-Brownovy podmínky plasticity<sup>2</sup> a pevnosti  $\sigma_{ci}$ , získáme novou hodnotu  $\sigma_{1n} = |\sigma_{1max}|/\sigma_{ci} = 0.79$ . Novým výpočtem smykových parametrů získáme

$$c = 1345.5 \text{ kPa}, \quad \varphi = 15.6^\circ$$



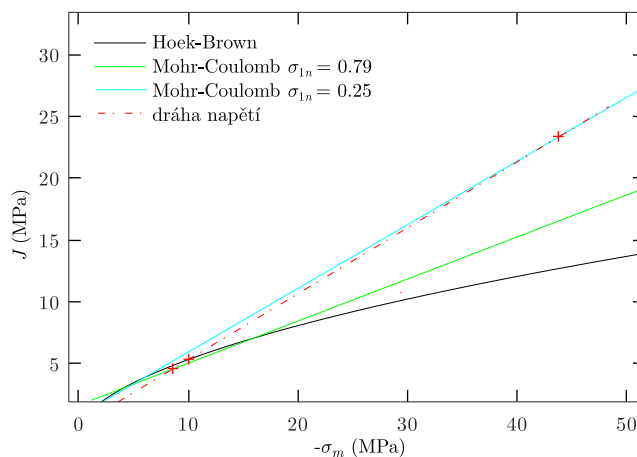
**Obrázek 5.12** Závislost odezvy horninového masivu v edometru na zvoleném rozsahu  $\sigma_1$  pro určení smykových parametrů

Obrázek 5.12(b) ukazuje odezvu pro dvě podmínky plasticity s použitím nových hodnot ekvivalentních parametrů a body zlomu představující počátek plastického pře-

<sup>2</sup>Boční napětí je v celém vzorku konstantní a má hodnotu  $\sigma_1 = \sigma_2 = 15.795 \text{ MPa}$

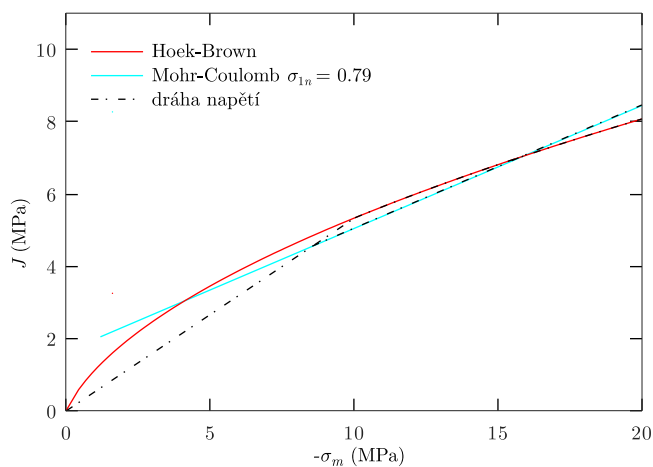
tváření. Obr. 5.12(d) znázorňuje stejnou dráhu napětí jako v prvním případě, nyní je ekvivalentní podmínka plasticity nastavena tak, že jsou body dosažení ploch plasticity velmi blízké. Výrazný rozdíl mezi Mohr-Coulombovou podmínkou s různě zvolenými rozsahy platnosti ekvivalence dokazuje graf na Obr. 5.13, ze kterého je patrná vzdálenost mezi jednotlivými body dosažení plochy plasticity dráhou napětí.

V případě edometru, kdy je v celém objemu vzorku konstantní napjatost ve všech směrech, je možné dosáhnout poměrně dobré shody mezi dvěma podmínkami porušení. Ve skutečné úloze, kde se napjatost liší pro každý element sítě, může být získání ekvivalentní odezvy odvozením jediné dvojice smykových parametrů nezávislých na aktuální hodnotě napětí velmi komplikované.



**Obrázek 5.13** Porovnání počátku plastického přetváření pro různě zvolené rozsahy nejmenšího hlavního napětí

Jak již bylo řečeno, v případě edometru dochází k dalšímu vývoji napětí i během plastického přetváření. Vzhledem k tomu, že v edometru dochází ke vzniku triaxiálové komprese, dráha napětí se po dosažení mezní elastické hodnoty dále pohybuje po hraně plochy plasticity. Numerickým výpočtem získaný vývoj napětí v porovnání s analytickým řešením obou podmínek plasticity pro řešený příklad je vykreslen na Obr. 5.14.

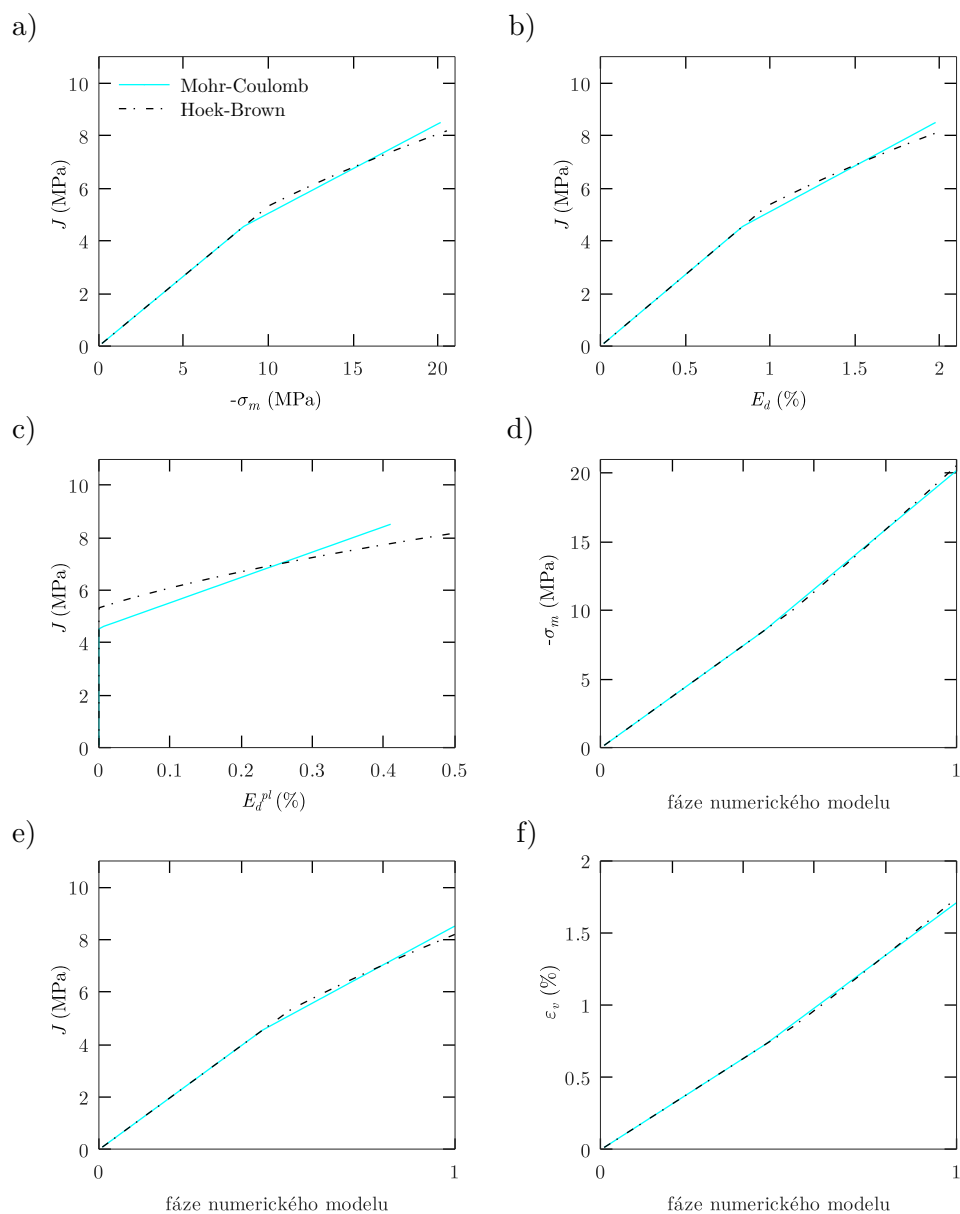


**Obrázek 5.14** Znázornění dráhy napětí při edometrické zkoušce pro obě podmínky plasticity

### 5.3.2 Porovnání odezvy s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity

Obrázek 5.15 poskytuje porovnání odezvy horninového masivu při edometrické zkoušce pro Hoek-Brownovu podmínku plasticity a ekvivalentní Mohr-Coulombovou podmínku plasticity odvozenou pro  $\sigma_{1n} = 0.79$ . Výše jsme dokázali, že dráha napětí je do počátku vývoje plastické deformace lineárně-elastická a po dosažení plochy plasticity se dále pohybuje po její hraně. Z toho plyne nelineární průběh veličin za předpokladu Hoek-Brownovy podmínky plasticity po začátku plastického přetváření.

Vývoj pole napětí znázorňují grafy na Obr. 5.15(a),(d),(e). Vztahy mezi napětím



**Obrázek 5.15** Porovnání odezvy vzorku při edometrické zkoušce pro použití Hoek-Brownovy a Mohr-Coulombovy podmínky plasticity odvozené pro  $\sigma_{1n} = 0.79$

a deformací porovnávají Obr. 5.15(b),(c). Na Obr. 5.15(f) je patrný nelineární vývoj objemové deformace po začátku plastického přetváření za použití Hoek-Brownovy podmínky plasticity. V tomto případě nedochází k žádné objemové plastické deformaci (příklad řešen pro  $\psi = 0$ ) a platí

$$\varepsilon_v = \varepsilon^{el} \quad (\varepsilon_v = \varepsilon_3)$$





## 6 Úloha stability svahu

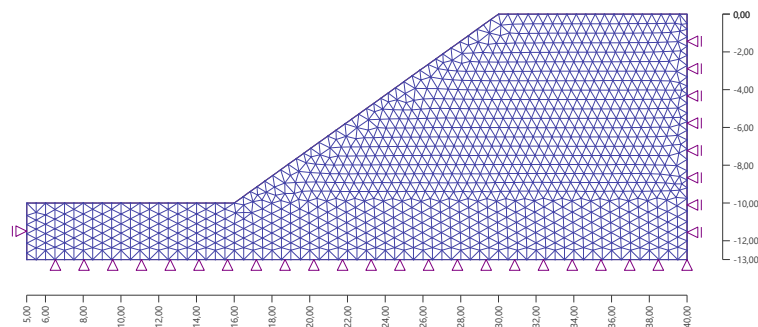
Cílem stabilitní analýzy svahu je určení stupně bezpečnosti, který je v případě řešení úlohy jako problému redukce smykových parametrů  $c$  a  $\varphi$  přímo roven redukčnímu součiniteli  $\gamma$ . Pro řešení stability svahu ve smyslu hlavních napětí za předpokladu Hoek-Brownovy podmínky plasticity jsme v kapitole 3.4 zavedli parametr  $\eta$  splňující funkci redukčního součinitele a mající význam stupně stability. Připomeňme podmínku plasticity pro stabilitní analýzu ve tvaru

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - \frac{\sigma_{ci}}{\eta} \left( m_b \frac{-\sigma_1}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (6.1)$$

V numerickém výpočtu představuje určení parametrů  $\gamma$  a  $\eta$  iterační proces, ve kterém dochází k postupné redukci pevnostních charakteristik materiálového modelu. V rámci každého redukčního kroku dochází ke zvýšení redukčního součinitele a kompletnímu výpočtu geostatické napjatosti. Divergence výpočetní metody má význam kolapsu konstrukce. Poslední redukční součinitel, při kterém dosáhneme konvergence k řešení, je proto roven stupni stability.

Přesnost a rychlost vyřešení úlohy potom závisí nejen na parametrech sítě konečných prvků a nastavení iterační metody, ale také na počáteční velikosti redukčního kroku a povoleném počtu jeho relaxací, tedy snížení redukčního kroku ve chvíli, kdy dojde k divergenci metody.

Pro testování výpočtu stupně stability s Hoek-Brownovým materiálovým modelem byl vytvořen numerický model svahu o výšce  $H = 10$  m a sklonu  $35.5^\circ$ . Oblast numerického modelu byla pokryta sítí trojúhelníkových konečných prvků o maximální délce hrany 0.5 m. Sít konečných prvků a okrajové podmínky řešené oblasti jsou patrné z Obr. 6.1<sup>1</sup>.



**Obrázek 6.1** Geometrie a okrajové podmínky numerického modelu pro výpočet stability svahu, síť konečných prvků

<sup>1</sup>Geometrie svahu a vstupní parametry horninového masivu převzaty z příkladu v článku [6].

## 6.1 Parametry horninového masivu

Vstupní parametry horninového masivu jsou uvedeny v první části Tab. 6.1, druhá část tabulky obsahuje hodnoty konstant Hoek-Brownova materiálového modelu a modulu deformace získané ze vztahů uvedených v kapitole 3.1.1.

Parametr	Označení	Hodnota	Jednotky
Objemová tíha	$\gamma$	25.0	(kN/m <sup>3</sup> )
Poissonovo číslo	$\nu$	0.3	(-)
Prostá pevnost v tlaku	$\sigma_{ci}$	30.0	(MPa)
Hoek-Brownova konstanta	$m_i$	2.0	(-)
Geological Strength Index	GSI	5.0	(-)
Faktor porušení	D	0.0	(-)
Redukovaná Hoek-Brownova konstanta	$m_b$	0.067225	(-)
Konstanta	$s$	0.000026	(-)
Konstanta	$a$	0.019210	(-)
Modul deformace	$E_m$	410.73	(MPa)

**Tabulka 6.1** Vstupní parametry horninového masivu pro stabilitní analýzu

Pro porovnání byla úloha stability řešena nejen za předpokladu Hoek-Brownovy podmínky plasticity, ale také standardně redukcí ekvivalentních smykových parametrů a provedením výpočtu s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity. Rozsah ekvivalence je v případě úlohy stability svahu dán experimentálně odvozeným vztahem (3.21), ze kterého lze vyjádřit

$$|\sigma_{1max}| = 0.72\sigma_{cm} \left( \frac{\sigma_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.91} \quad (6.2)$$

Globální pevnost horninového masivu má z rovnice (3.22) hodnotu  $\sigma_{cm} = 433$  kPa. Dosazením do (6.2) získáme maximální hodnotu nejmenšího hlavního napětí  $|\sigma_{1max}| = 189$  kPa. S představou o rozsahu napjatosti v horninovém masivu můžeme určit ekvivalentní smykové parametry dle (3.18) a (3.19) s výsledkem

$$c = 20 \text{ kPa}, \varphi = 21^\circ$$

## 6.2 Interpretace výsledků a porovnání s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity

Stabilitní analýza byla provedena pro dva různé stupně aproximace, a to pro lineární aproximaci s tříúhlovými konečnými prvky (T3) a kvadratickou aproximaci s šestiúhlovými konečnými prvky (T6). Pro výpočet stupně stability byla pro obě podmínky plasticity použita metoda počáteční tuhosti. Výsledné hodnoty stupňů stability jsou pro všechny výpočty uvedeny v Tab. 6.2. Poslední sloupec tabulky uvádí hodnotu stupně stability získanou výpočtem totožného zadání v konečně-prvkovém programu Plaxis 2D 2019.

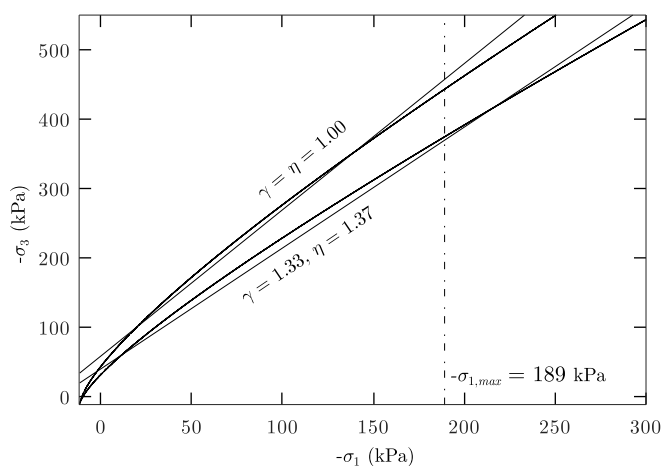
Pokud porovnáme výsledné hodnoty stupně stability pro různé řády aproximace, liší se o 0.07, resp. o 0.09 pro případ Hoek-Brownova, resp. Mohr-Coulombova materiálového modelu. V případě použití lineární aproximace se hodnoty stupně stability pro dva různé materiálové modely liší o 0.02, v případě kvadratické aproximace vystoupá rozdíl na 0.04. Z výpočtu za předpokladu Mohr-Coulombova materiálového modelu a kvadratické aproximace pole posunutí byl s použitím standardní Newton-Raphsonovy metody

MKP program	GEO5 FEM					Plaxis 2019
Materiálový model	HB	HB	MC	MC	MC (tečná matice	HB
Prvek	T3	T6	T3	T6	T6 tuhosti)	T15
Stupeň stability	1.44	1.37	1.42	1.33	1.33	1.35

**Tabulka 6.2** Výsledky stabilitní analýzy pro dva typy materiálového modelu a dva stupně aproximace, porovnání s výpočtem v Plaxisu 2019

s výpočtem tečné matice tuhosti v každém iteračním kroku obdržen totožný stupeň stability jako v případě konvergence metodou počáteční tuhosti.

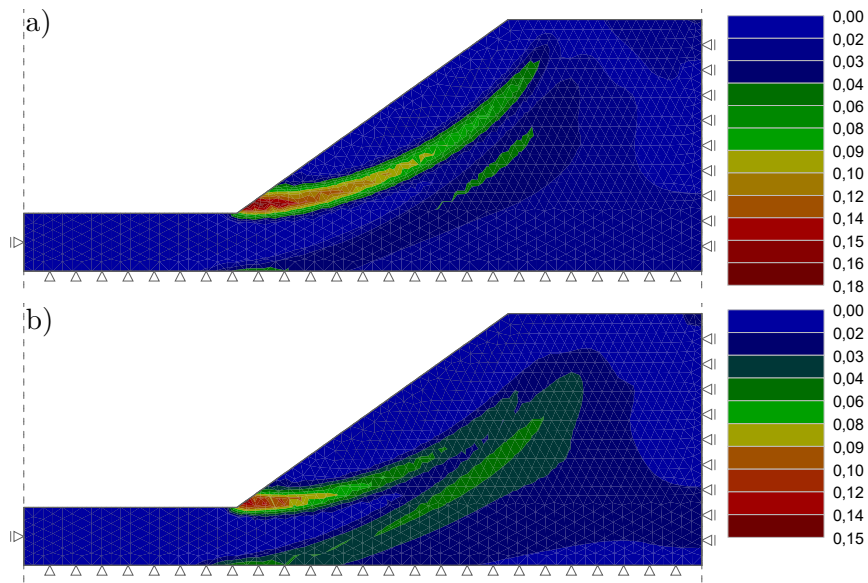
Dobrá shoda ve výsledných hodnotách stupňů stability pro Hoek-Brownovu podmínku plasticity v porovnání s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity potvrzuje správnost předpokládaného rozsahu napjatosti ve výpočtu ekvivalentních smykových parametrů. Maximální hodnota nejmenšího hlavního napětí  $\sigma_1$  je vyznačena v grafu na Obr. 6.2 který v rovině hlavních napětí  $\sigma_1 - \sigma_3$  vykresluje původní podmínky plasticity a podmínky plasticity po redukcí parametrů hodnotami stupně stability získanými z numerického výpočtu s kvadratickou aproximací.



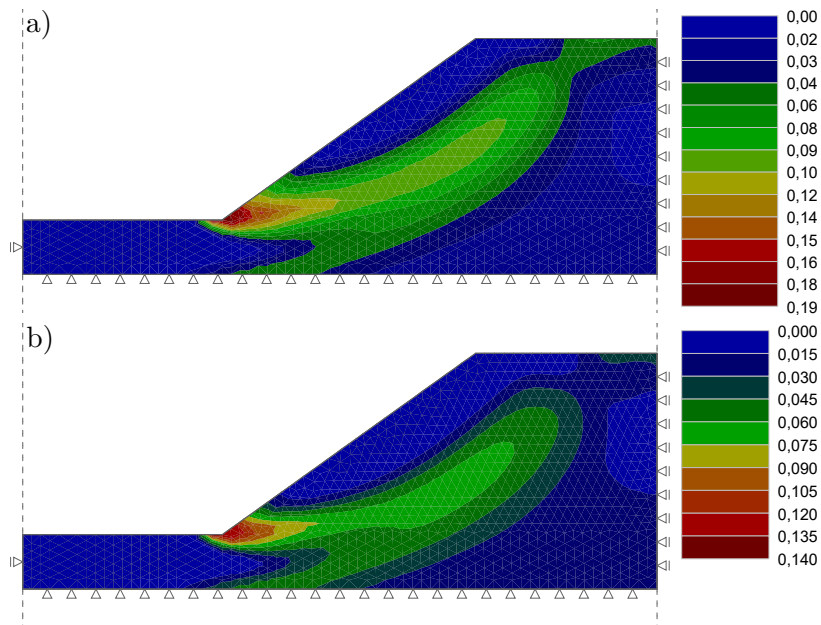
**Obrázek 6.2** HB a MC podmínka plasticity v rovině hlavních napětí před a po redukcí pevnostních charakteristik - kvadratická aproximace

Předpokládanou smykovou plochu porušení lze nejnázorněji zobrazit pomocí plastické části ekvivalentního deviatorického přetvoření, které popisuje pouze plastickou tvarovou deformaci. Obrázky 6.3 a 6.4 umožňují porovnání tvaru smykové plochy a výsledných rozsahů plastické deformace pro oba typy aproximace a materiálové modely.

## 6 Úloha stability svahu



**Obrázek 6.3** Plocha porušení zobrazená pomocí  $E_d^{pl}$  (%) pro síť z kvadratických konečných prvků: a) HB podmínka plasticity, b) MC podmínka plasticity



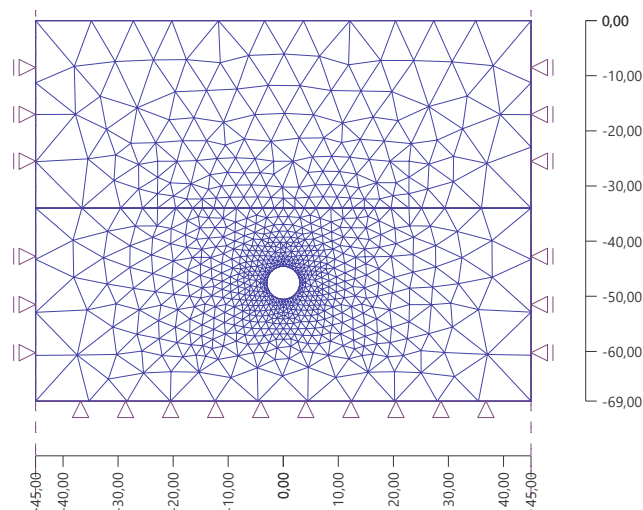
**Obrázek 6.4** Plocha porušení zobrazená pomocí  $E_d^{pl}$  (%) pro síť z lineárních konečných prvků: a) HB podmínka plasticity, b) MC podmínka plasticity

## 7 Úloha podzemní exkavace

Předmětem poslední kapitoly je výpočet reálné úlohy podzemní exkavace, přičemž parametry úlohy byly převzaty z předchozí práce autora [20]. Jedná se o kruhový výrub o průměru 6 m ražený pomocí plnoprofilového tunelovacího stroje (TBM). Tunel v současnosti slouží pro vedení linky metra. Podloží je tvořeno vrstvou jílové zeminy o nízké až střední plasticitě proměnné mocnosti, pod jílem se nachází horninový masiv tvořený vápencem. Ražba probíhala především vrstvou zeminy, část výrubu byla provedena právě v horninovém masivu. Osa výrubu je vedena ve spádu a v místě posuzovaného řezu má hloubku 47.5 m od povrchu terénu. Rozhraní mezi zeminou a horninou leží v hloubce 34 m.

Numerický model v podmínkách rovinné deformace je zobrazen na Obr. 7.1. Protože GEO5 MKP neumožňuje aplikaci přístupů doporučených pro numerické modelování ražby prováděné pomocí TBM, v [20] byla použita standardní metoda exkavace. Vzdálenosti svislých hranic modelu byly dle obecných doporučení voleny jako 5ti až 6ti násobek průměru výrubu. Sít z šestiuzlových konečných prvků byla vytvořena na základě studie vlivu počtu konečných prvků na maximální hodnotu ohybového momentu na ostění tunelu, viz [20]. Na hranicích modelu má konečný prvek délku hrany 8 m, v oblasti výrubu je síť zhuštěna prvky o délce hrany 0.5 m v dosahu 10 m.

Jako kritérium pro volbu stupně exkavace byla zvolena hodnota hloubky poklesové kotliny na terénu. Optimální procento exkavace vyvolá hodnotu sedání na terénu maximálně 20 mm. V případě výrubu v hornině lze zvolit exkavaci 100 % již v 2. fázi numerického výpočtu, viz prezentace výsledků v kapitole 7.2. V 1. fázi dochází k výpočtu geostatické napjatosti.



**Obrázek 7.1** Geometrie a okrajové podmínky numerického modelu pro výpočet podzemní exkavace, síť konečných prvků

## 7.1 Parametry zeminy a horniny pro použité materiálové modely

Pro popis chování jílové zeminy v horní vrstvě nadloží byl zvolen Mohr-Coulombův materiálový model s tuhostí rostoucí s geostatickým napětím, tzn. s hloubkou vrstvy, a odlišným modulem deformace při odtížení. Parametry jílové vrstvy jsou shrnuty v Tab. 7.1.

Parametr	Označení	Hodnota	Jednotky
Objemová tíha	$\gamma$	19.6	(kN/m <sup>3</sup> )
Poissonovo číslo	$\nu$	0.4	(-)
Modul pružnosti na povrchu	E	15.0	(MPa)
Modul pružnosti na rozhraní	E	40.0	(MPa)
Modul odtížení	$E_{ur}$	80.0	(MPa)
Úhel vnitřního tření	$\varphi$	25.0	(°)
Koheze	$c$	10.0	(kPa)

**Tabulka 7.1** Parametry jílu - Mohr-Coulombův materiálový model

Charakteristiky horninového masivu uvedené v první části Tab. 7.2 byly zvoleny na základě údajů o výsledcích provedených geotechnických zkoušek, které byly součástí projektové dokumentace sloužící jako podklad<sup>1</sup>. Volba základních parametrů Hoek-Brownova materiálového modelu v druhé části Tab. 7.2 se odvíjí od geologického popisu horninového masivu a jeho zatřídění v rámci tabulek v příloze B. Dle geologického ohledání se jedná o horninu velmi nízké kvality s vysokou porozitou, trhlinami a ložiskami písku a jílu. Průměrný index kvality RQD (Rock Quality Designation) určený ze souboru vzorků získaných z jádrových vrtů je roven 8 %. S ohledem na uvedené skutečnosti byla jednoosé tlakové pevnosti  $\sigma_{ci}$  přiřazena nejnižší tabulková hodnota pro daný typ horniny a hodnota GSI volena pro horninové masivy velmi nízké kvality s rozpadající se strukturou. Vzhledem ke způsobu ražby pomocí TBM lze v okolí výrubu uvažovat nulovou hodnotu faktoru porušení D. Poslední část tabulky shrnuje zbývající dopočtené parametry Hoek-Brownova modelu. Pro obě vrstvy geologického profilu je volena nulová dilatance, to znamená  $\psi = 0$ .

Parametr	Označení	Hodnota	Jednotky
Objemová tíha	$\gamma$	21.7	(kN/m <sup>3</sup> )
Poissonovo číslo	$\nu$	0.3	(-)
Modul pružnosti	E	630.0	(MPa)
Prostá pevnost v tlaku	$\sigma_{ci}$	50.0	(MPa)
Hoek-Brownova konstanta	$m_i$	12.0	(-)
Geological Strength Index	GSI	15.0	(-)
Faktor porušení	D	0.0	(-)
Redukovaná Hoek-Brownova konstanta	$m_b$	0.576484	(-)
Konstanta	$s$	0.000079	(-)
Konstanta	$a$	0.561101	(-)

**Tabulka 7.2** Parametry horninového masivu - Hoek-Brownův materiálový model

<sup>1</sup>Z důvodu charakteru stavby nelze uvést reference odkazující na projektovou dokumentaci, zároveň si autor nepřeje být uveden

Ekvivalence mezi Hoek-Brownovým a Mohr-Coulombovým materiálovým modelem platí v rozsahu nejmenšího hlavního napětí  $0 \leq |\sigma_1| \leq |\sigma_{1max}|$ , kde horní hraniční hodnotu pro případ tunelu získáme s odkazem na rovnici (3.20) z experimentálně odvozeného vztahu

$$|\sigma_{1max}| = 0.47\sigma_{cm} \left( \frac{\sigma_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.94} \quad (7.1)$$

Dosažením parametrů Hoek-Brownova materiálového modelu do rovnice (3.22) získáme hodnotu globální pevnosti horninového masivu  $\sigma_{cm} = 8436$  kPa. Následným dosazením do (7.1) obdržíme  $|\sigma_{1max}| = 550$  kPa. Ekvivalentními smykovými parametry dle (3.18) a (3.19) potom jsou

$$c = 145 \text{ kPa}, \varphi = 44^\circ$$

Numerický výpočet byl proveden také za předpokladu modifikované formulace Mohr-Coulombova materiálového modelu. V případě modifikovaného Mohr-Coulombova modelu (MMC) se deviatorický řez plochou plasticity zobrazí jako hladká křivka, návrat na plochu plasticity se tak zjednoduší a odpadá řešení singularit v podobě hran plochy plasticity. Modifikovaná plocha protíná standardní plochu plasticity právě po délce hran triaxiálové komprese a extenze. Formulaci funkce plasticity pro MMC lze najít v [2].

## 7.2 Interpretace výsledků a porovnání s Mohr-Coulombovou podmínkou plasticity

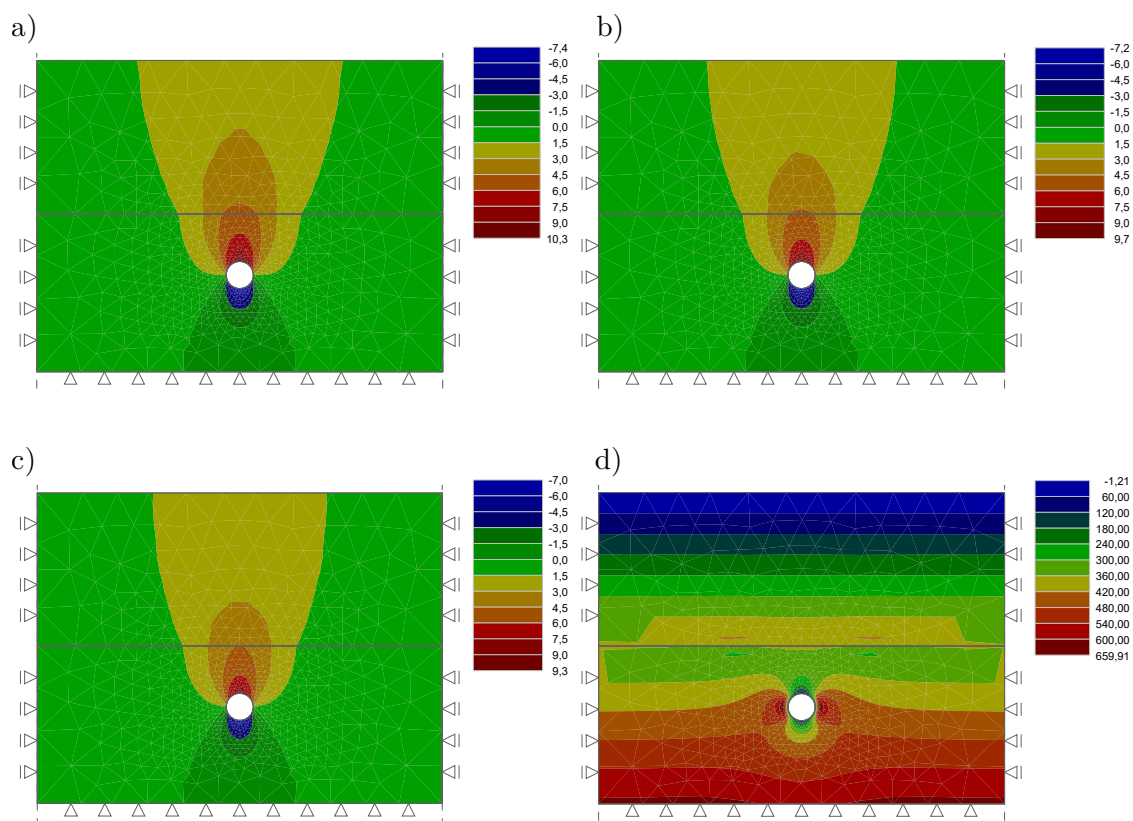
Tabulka 7.3 uvádí porovnání hodnot sedání v nejnižším místě poklesové kotliny a v koruně tunelu a zvednutí dna tunelu pro numerické výpočty za předpokladu HB podmínky plasticity a standardní a modifikované MC podmínky plasticity s ekvivalentními smykovými parametry. Celkový obdržený průběh sedání je zobrazen na Obr. 7.2(a),(b),(c). Rozdíly mezi hodnotami sedání ve třech sledovaných bodech se pohybují v řádech desetin milimetru, což ukazuje na vhodné předpoklady pro ekvivalenci dvou materiálových modelů. Správnost předpokládaného rozsahu napětí  $\sigma_1$  dále dokazuje Obr. 7.2(d) s vykreslením jeho průběhu, kde hodnoty hlavního napětí v okolí výrubu daný rozsah výrazně nepřesahují.

Materiálový model	Terén	Koruna	Dno
HB	2.4	10.3	-7.4
MC	2.2	9.7	-7.2
MMC	2.1	9.3	-7.0

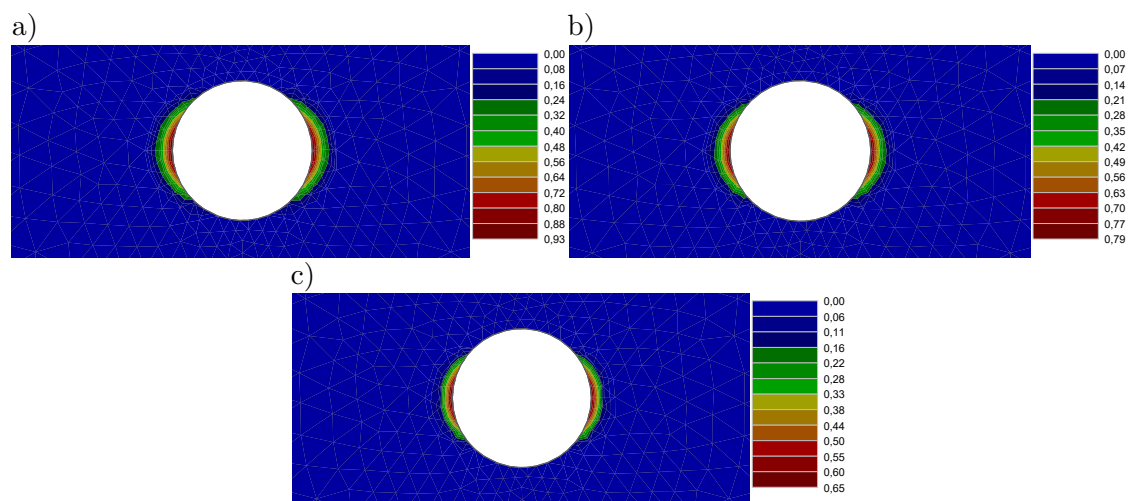
**Tabulka 7.3** Porovnání sedání  $dz$  (mm) pro HB podmínku plasticity a ekvivalentní MC a MMC podmínky plasticity

Představu o rozsahu plastické deformace poskytuje Obr. 7.3 s průběhem plastické složky ekvivalentního deviatorického přetvoření. Rozdíl mezi maximálními hodnotami  $E_d^{pl}$  při použití HB a MC modelu představuje 0.14 %, přičemž dosah plastické deformace se téměř neliší. V případě MMC modelu dochází obecně ke vzniku menších plastických deformací v porovnání s MC modelem. Dosah plastické deformace je menší než v případě HB a MC podmínky plasticity.

## 7 Úloha podzemní exkavace



**Obrázek 7.2** Vykreslení průběhu sedání  $dz$  (mm) pro různé materiálové modely  
a) HB, b) MC, c) MMC  
d) vykreslení průběhu hlavního napětí  $\sigma_1$  (kPa)



**Obrázek 7.3** Vykreslení průběhu plastické deformace  $E_d^{pl}$ : (%) a) HB, b) MC, c) MMC



## 8 Závěr

Geotechnické úlohy jsou především problémem řešení nelineárních úloh s nutností znalosti teorie plasticity. Teoretický základ byl nelineárním výpočtům dán v úvodní kapitole této práce. Samotným numerickým výpočtům předcházela formulace Hoek-Brownovy podmínky plasticity a její implementace do programu GEO5 MKP se zahrnutím singularit plochy plasticity. Součástí byla také implementace výpočtu speciálního parametru, který má význam stupně bezpečnosti v úloze stability svahu. Verifikace materiálového modelu byla provedena na jednoduchých numerických modelech. Po prokázání funkčních algoritmů byly následně provedeny dva komplexní výpočty geotechnických úloh, a to úloha stability svahu a podzemní exkavace.

Implementace materiálového modelu do konečně-prvkového programu představuje výzvu v podobě sestavení algoritmů pro výpočet korektních přírůstků složek vektorů napětí a přetvoření s ohledem na vývoj plastické deformace. Zvolená iterační metoda pokrývá návrat napjatosti ze stavu elastického prediktoru na dominantní sektor plochy plasticity a na hrany triaxiálové komprese a extenze, které tento sektor vymezují. Odlišný přístup je aplikován pro návrat do vrcholu plasticity, který může nastat v případě vývoje kladné plastické deformace. Součástí „stress update“ algoritmu je kritérium rozhodující o tom, zda se jedná o běžný návrat na plochu plasticity nebo speciální případ návratu do jejího vrcholu.

Při řešení reálných geotechnických úloh má význam především návrat na dominantní oblast plochy plasticity. Způsob návratu na hranu triaxiálové komprese byl detailně popsán v kapitole věnující se jednoduchým numerickým modelům inspirovaným okrajovými podmínkami a specifickým způsobem zatěžování materiálu v laboratorních přístrojích pro geotechnické zkoušky. Jednotlivé kroky iteračního cyklu jsou graficky znázorněny s ohledem na zvolený směr plastické deformace. Kapitola obsahuje také vysvětlení jevů odehrávajících se v zatěžovaném bloku horninového masivu na základě grafického znázornění vývoje veličin popisujících napjatost a přetvoření v materiálovém bodě za předpokladu elastického-perfektně plastického materiálu a zároveň demonstruje význam těchto veličin v teorii plasticity. Na příkladu zatěžování horniny v edometru byl dokázán význam volby horní hraniční hodnoty předpokládaného rozsahu napjatosti v horninovém masivu pro výpočet ekvivalentních smykových parametrů.

Výpočet parametru představujícího stupeň bezpečnosti byl testován na konkrétní geometrii svahu. Hodnota stupně bezpečnosti určeného výpočtem v GEO5 MKP je v dobré shodě s výsledkem výpočtu v konečně-prvkovém geotechnickém softwaru Plaxis 2019 za předpokladu obdobných kritérií výpočtu. Zároveň se výrazně neliší hodnoty získané s použitím ekvivalentní Mohr-Coulombovy podmínky plasticity s parametry získanými doporučeným postupem popsaným v kapitole věnované ekvivalenci mezi nelineární HB a lineární MC funkcí plasticity. Provedení výpočtů stability s různými podmínkami porušení a typy konečných prvků vedlo nejen k porovnání výsledných stupňů bezpečnosti, ale také rozsahu plastické deformace a grafických znázornění předpokládané plochy porušení.

Ekvivalence mezi HB a MC podmínkou plasticity je použita také v poslední kapitole, která se zabývá výpočtem podzemní exkavace. Interpretace výsledků opět potvrzuje, že v případě správného předpokladu o napjatosti v horninovém masivu poskytují obě

podmínky plasticity srovnatelnou odezvu popsanou pomocí hodnot sedání a plastické deformace na konci exkavace.

Autor předpokládá budoucí vývoj uvedených algoritmů a zahrnutí dalších vlivů do výpočtu, které může vést na nutnost použití jiných iteračních metod pro „stress update“. Nicméně za zde uvedených předpokladů byla dokázána použitelnost zvolených metod a na jejich základě sestavených algoritmů i při řešení predikce odezvy ve skutečných geotechnických úlohách.

## Příloha A

# Alternativní formulace funkce plastického potenciálu s mobilizovaným úhlem dilatance

Podle [6] a [15] lze funkci plastického potenciálu definovat jako

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 : \quad g(\sigma_1, \sigma_3) = S_3 - \left( \frac{1 + \sin \psi_{mob}(\sigma_1)}{1 - \sin \psi_{mob}(\sigma_1)} \right) S_1 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 : \quad g(\sigma_2, \sigma_3) = S_3 - \left( \frac{1 + \sin \psi_{mob}(\sigma_2)}{1 - \sin \psi_{mob}(\sigma_2)} \right) S_2 \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 : \quad g(\sigma_1, \sigma_2) = S_2 - \left( \frac{1 + \sin \psi_{mob}(\sigma_1)}{1 - \sin \psi_{mob}(\sigma_1)} \right) S_1 \quad (\text{A.3})$$

Hodnoty hlavních napětí v původní funkci plastického potenciálu uvedené v kapitole 3.3 jsou nahrazeny hodnotami škálovanými. Podle [15] platí, že

$$S_1 = \frac{-\sigma_1}{m_b \sigma_{ci}} + \frac{s}{m_b^2} \quad (\text{A.4})$$

$$S_2 = \frac{-\sigma_2}{m_b \sigma_{ci}} + \frac{s}{m_b^2} \quad (\text{A.5})$$

$$S_3 = \frac{-\sigma_3}{m_b \sigma_{ci}} + \frac{s}{m_b^2} \quad (\text{A.6})$$

Matematickými úpravami a dosazením rovnice pro tahovou pevnost horninového masivu (3.5) bychom obdrželi členy  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$  ve tvaru

$$S_1 = \frac{-\sigma_1 + \sigma_t}{m_b \sigma_{ci}} \quad (\text{A.7})$$

$$S_2 = \frac{-\sigma_2 + \sigma_t}{m_b \sigma_{ci}} \quad (\text{A.8})$$

$$S_3 = \frac{-\sigma_3 + \sigma_t}{m_b \sigma_{ci}} \quad (\text{A.9})$$

Čitatele výrazů (A.7), (A.8) a (A.9) tedy představují hodnoty hlavních napětí v souřadném systému s počátkem ve vrcholu plochy plasticity.

Úhel  $\psi_{mob}$  je mobilizovaný úhel dilatance, jehož hodnota se z počáteční hodnoty lineárně snižuje se zvyšující se hodnotou hlavního napětí s nejvyšší hodnotou. To znamená,

že se míra dilatance v průběhu výpočtu mění v závislosti na aktuálním poli napětí. Hodnota  $\psi_{mob}$  se dle [15] určí následovně

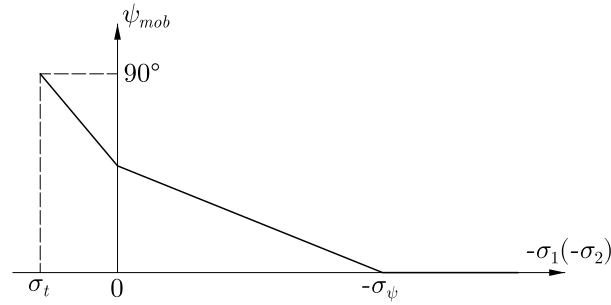
$$0 \leq -\sigma_1 \leq \sigma_\psi : \quad \psi_{mob}(\sigma_1) = \frac{\sigma_\psi + \sigma_1}{\sigma_\psi} \psi; \quad k_1 = 2 \frac{\psi}{\sigma_\psi} \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_t \geq \sigma_1 \geq 0 : \quad \psi_{mob}(\sigma_1) = \psi + \frac{\sigma_1}{\sigma_t} (90^\circ - \psi); \quad k_1 = 2 \frac{90^\circ - \psi}{\sigma_t} \quad (\text{A.11})$$

$$0 \leq -\sigma_2 \leq \sigma_\psi : \quad \psi_{mob}(\sigma_2) = \frac{\sigma_\psi + \sigma_2}{\sigma_\psi} \psi; \quad k_2 = 2 \frac{\psi}{\sigma_\psi} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_t \geq \sigma_2 \geq 0 : \quad \psi_{mob}(\sigma_2) = \psi + \frac{\sigma_2}{\sigma_t} (90^\circ - \psi); \quad k_2 = 2 \frac{90^\circ - \psi}{\sigma_t} \quad (\text{A.13})$$

Mobilizovaný úhel  $\psi_{mob}$  je vždy větší nebo roven nule. Platí  $\psi_{mob} = 0$  v případě, že absolutní hodnota nejmenšího napětí dosáhne hodnoty zadaného limitního napětí  $\sigma_\psi$ . To znamená, že  $\sigma_\psi$  je napětí, při kterém již nedochází k žádné objemové plastické deformaci. Úhel  $\psi$  představuje počáteční úhel dilatance. Grafické znázornění závislosti úhlu dilatance na aktuální hodnotě nejmenšího hlavního napětí poskytuje Obr. A.1. Strmější závislost mobilizovaného úhlu dilatance v tahové oblasti podle [15] zohledňuje plastickou expanzi při namáhání horninového masivu tahem.



**Obrázek A.1** Bilineární závislost hodnoty mobilizovaného úhlu dilatance na hodnotě nejmenšího hlavního napětí [6]

Konstanty  $k_1$  a  $k_2$  mají význam pro parciální derivace plastických potenciálů. Normály k plastickým potenciálům v případě míry dilatance závislé na aktuální hodnotě napětí mají tvar

$$\mathbf{n}_g^1 = \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \frac{k_1 \left( \sigma_1 - \frac{s}{m_b^3 \sigma_{ci}} \right) \cos \psi_{mob} + 1 - \sin^2 \psi_{mob}}{m_b \sigma_{ci} (1 - \sin \psi_{mob})^2}; 0; -\frac{1}{m_b \sigma_{ci}} \right\}^T \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{n}_g^2 = \frac{\partial g(\sigma_2, \sigma_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ 0; \frac{k_2 \left( \sigma_2 - \frac{s}{m_b^3 \sigma_{ci}} \right) \cos \psi_{mob} + 1 - \sin^2 \psi_{mob}}{m_b \sigma_{ci} (1 - \sin \psi_{mob})^2}; -\frac{1}{m_b \sigma_{ci}} \right\}^T \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{n}_g^3 = \frac{\partial g(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \frac{k_1 \left( \sigma_1 - \frac{s}{m_b^3 \sigma_{ci}} \right) \cos \psi_{mob} + 1 - \sin^2 \psi_{mob}}{m_b \sigma_{ci} (1 - \sin \psi_{mob})^2}; -\frac{1}{m_b \sigma_{ci}}; 0 \right\}^T \quad (\text{A.16})$$

## Příloha B

# Tabulky pro odvození hodnot parametrů Hoek-Brownovy plochy plasticity

Při zpracovávání předběžného průzkumu nebo návrhu lze pro získání odhadu pevnosti horniny použít tabulky na Obr. B.1 a B.2. Tabulková hodnota  $\sigma_{ci}$  se odvíjí od zatřídění dané horniny do tříd R0 (horniny s nejnižší pevností) až R6 (extrémně pevné horniny). Hodnota  $m_i$  určovaná z tabulky je závislá na geologickém typu horniny, jejím vzniku a textuře.

Pro odvození hodnoty GSI lze použít například tabulku na Obr. B.3, ačkoliv v průběhu let bylo publikováno mnoho jejích modifikací. Podklad pro určení faktoru porušení představuje tabulka na Obr. B.4, popisující způsoby a rozsah porušení povrchu horninového masivu exkavací.







Hoek and Brown table						Recorded in GlobR2C2 as	
Grade	Term	Uniaxial comp. strength (Mpa)	Point load index (Mpa)	Field estimate of strength	Examples	Hoek and Brown term	Unique lithologic name instances
R6	Extremely strong	> 250	> 10	Specimen can only be chipped with a geological hammer.	Fresh basalt, chert, diabase, gneiss, granite, quartzite.	Hard	Basalt, conglomerate, flysch, gneiss, granite, greywacke, intermediate rocks, lavas (basalts, etc), limestone, marly limestone, metamorphic, mudstone, plutonic, sandstone, schist, shale, siltstone, volcanic rock, volcano-sedimentary.
R5	Very strong	100–250	4–10	Specimen requires many blows of a geological hammer to fracture it.	Amphibolite, sandstone, basalt, gabbro, gneiss, granodiorite, limestone, marble, rhyolite, tuff.		
R4	Strong	50–100	2–4	Specimen requires more than one blow of a geological hammer to fracture it.	Limestone, marble, phyllite, sandstone, schist, shale.		
R3	Medium strong	25–50	1–2	Cannot be scrapped or peeled with a pocket knife, specimen can be fractured with a single blow from a geological hammer.	Claystone, coal, concrete, schist, shale, siltstone.	Medium	Claystone, shale, slate, volcanic tuff, sandstone, shale, limestone, marl, siltstone, basalt, marl and consolidated clay.
R2	Weak	5–25	*	Can be peeled with a pocket knife with difficulty, shallow indentation made by firm blow with the point of a geological hammer.	Chalk, rock salt, potash.	Weak	Aeolianite, argillites, basalt, chalk, clay, conglomerate, dune deposits, fluvial deposits, glacial deposits, glaciofluvial, gravels, head, lahar deposits, loess and silts, marl, sand, sand, sandstone, slag, silt, till, tuff, undifferentiated recent marine deposits.
R1	Very weak	1–5	*	Crumbles under firm blows with the point of a geological hammer, can be peeled by a pocket knife.	Highly weathered or altered rock.		
R0	Extremely weak	0.25–1	*	Indented by thumbnail.	Stiff fault gouge.		

\* Point load tests on rocks with a uniaxial compressive strength below 25 MPa are likely to yield highly ambiguous results.




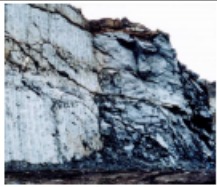

**Tabulka B.1** Hodnoty jednoosé pevnosti v tlaku, převzato z [4]

Rock type	Class	Group	Texture			
			Coarse	Medium	Fine	Very fine
SEDIMENTARY	Clastic		Conglomerates (21±3) Breccias (19±5)	Sandstones 17±4	Siltstones 7±2 Greywackes (18±3)	Claystones 4±2 Shales (6±2) Marls (7±2)
		Non-Clastic	Carbonates	Crystalline Limestone (12±3)	Sparitic Limestones (10±2)	Micritic Limestones (9±2)
	Evaporites			Gypsum 8±2	Anhydrite 12±2	
	Organic					Chalk 7±2
METAMORPHIC	Non foliated		Marble 9±3	Hornfels (19±4) Metasandstone (19±3)	Quartzites 20±3	
	Slightly foliated		Migmatite (29±3)	Amphibolites 26±6	Gneiss 28±5	
	Foliated*			Schists 12±3	Phyllites (7±3)	Slates 7±4
IGNEOUS	Plutonic	Light	Granite 32±3 Granodiorite (29±3)	Diorite 25±5		
		Dark	Gabbro 27±3 Norite 20±5	Dolerite (16±5)		
	Hypabyssal		Porphyries (20±5)		Diabase (15±5)	Peridotite (25±5)
	Volcanic	Lava		Rhyolite (25±5) Andesite 25±5	Dacite (25±3) Basalt (25±5)	Obsidian (19±3)
		Pyroclastic	Agglomerate (19±3)	Breccia (19±5)	Tuff (13±5)	

Tabulka B.2 Hodnoty Hoek-Brownových konstant, převzato z [4]

GEOLOGICAL STRENGTH INDEX FOR JOINTED ROCKS (Hoek and Marinos, 2000)		SURFACE CONDITIONS				
<p>From the lithology, structure and surface conditions of the discontinuities, estimate the average value of GSI. Do not try to be too precise. Quoting a range from 33 to 37 is more realistic than stating that GSI = 35. Note that the table does not apply to structurally controlled failures. Where weak planar structural planes are present in an unfavourable orientation with respect to the excavation face, these will dominate the rock mass behaviour. The shear strength of surfaces in rocks that are prone to deterioration as a result of changes in moisture content will be reduced if water is present. When working with rocks in the fair to very poor categories, a shift to the right may be made for wet conditions. Water pressure is dealt with by effective stress analysis.</p>		SURFACE CONDITIONS				
		VERY GOOD Very rough, fresh unweathered surfaces	GOOD Rough, slightly weathered, iron stained surfaces	FAIR Smooth, moderately weathered and altered surfaces	POOR Slackensided, highly weathered surfaces with compact coatings or fillings or angular fragments	VERY POOR Slackensided, highly weathered surfaces with soft clay coatings or fillings
STRUCTURE		DECREASING SURFACE QUALITY →				
	INTACT OR MASSIVE - intact rock specimens or massive in situ rock with few widely spaced discontinuities	90			N/A	N/A
	BLOCKY - well interlocked undisturbed rock mass consisting of cubical blocks formed by three intersecting discontinuity sets	80				
	VERY BLOCKY- interlocked, partially disturbed mass with multi-faceted angular blocks formed by 4 or more joint sets		70			
	BLOCKY/DISTURBED/SEAMY - folded with angular blocks formed by many intersecting discontinuity sets. Persistence of bedding planes or schistosity		60			
	DISINTEGRATED - poorly interlocked, heavily broken rock mass with mixture of angular and rounded rock pieces			50		
	LAMINATED/SHEARED - Lack of blockiness due to close spacing of weak schistosity or shear planes			40		
				30		
				20		
		N/A	N/A		10	

Tabulka B.3 Tabulka pro odvození hodnoty GSI pro horninový masiv, převzato z [21]

Appearance of rock mass	Description of rock mass	Suggested value of $D$
	Excellent quality controlled blasting or excavation by Tunnel Boring Machine results in minimal disturbance to the confined rock mass surrounding a tunnel.	$D = 0$
	Mechanical or hand excavation in poor quality rock masses (no blasting) results in minimal disturbance to the surrounding rock mass. Where squeezing problems result in significant floor heave, disturbance can be severe unless a temporary invert, as shown in the photograph, is placed.	$D = 0$ $D = 0.5$ No invert
	Very poor quality blasting in a hard rock tunnel results in severe local damage, extending 2 or 3 m, in the surrounding rock mass.	$D = 0.8$
	Small scale blasting in civil engineering slopes results in modest rock mass damage, particularly if controlled blasting is used as shown on the left hand side of the photograph. However, stress relief results in some disturbance.	$D = 0.7$ Good blasting $D = 1.0$ Poor blasting
	Very large open pit mine slopes suffer significant disturbance due to heavy production blasting and also due to stress relief from overburden removal. In some softer rocks excavation can be carried out by ripping and dozing and the degree of damage to the slopes is less.	$D = 1.0$ Production blasting $D = 0.7$ Mechanical excavation

Tabulka B.4 Hodnoty faktoru porušení  $D$ , převzato z [5]



## Literatura

- [1] Fine spol. s.r.o. *Geotechnický software GEO5*. 2019. URL: <https://www.fine.cz/>.
- [2] Šejnoha M., Janda T., Pruška J. a Brouček M. *Metoda konečných prvků v geomechanice. Teoretické základy a Inženýrské aplikace*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2015. ISBN: 978-80-01-05743-8.
- [3] Hoek E. a Brown E.T. *Underground excavations in rock*. London: Institution of Mining a Metallurgy, 1980. ISBN: 09-004-8854-9.
- [4] Hoek E. a Brown E.T. “Practical estimates of rock mass strength”. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 34.8 (1997), s. 1165–1186.
- [5] Hoek E., Carranza-Torres C. a Corkum B. “Hoek-Brown failure criterion - 2002 edition”. In: *Proceedings of the 5th North American symposium - NARMS-TAC* (2002).
- [6] Benz T., Schwab R., Kautner R.A. a Vermeer P.A. “A Hoek-Brown Criterion with intrinsic material strength factorization”. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45 (2008), s. 210–222.
- [7] Shunchuan Wu, Shihuai Zhang a Guang Zhang. “Three-dimensional strength estimation of intact rock using a modified Hoek-Brown criterion based on a new deviatoric function”. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 107 (2018), s. 181–190.
- [8] Hoek E. “Strength of models of jointed rock masses. Twenty-third Rankine Lecture”. In: *Géotechnique* 23 (3 1983), s. 183–223.
- [9] Hoek E. “Rock mass properties”. In: *Practical Rock Engineering*. 2007. Kap. 11. URL: <https://www.rocscience.com/assets/resources/learning/hoek/Practical-Rock-Engineering-Chapter-11-Rock-Mass-Properties.pdf>.
- [10] Hoek E., Carter T.G. a Diederichs M.S. “Quantification of the Geological Strength Index chart”. In: *47th. US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium* (2013).
- [11] Hoek E. “Brittle failure of rock”. In: *Rock Mechanics in Engineering Practice* (1968), s. 99–124.
- [12] Brown E.T. “Strength of models of rock with intermittent joints”. In: *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Divisions* 96 (6 1970), s. 1935–1949.
- [13] Balmer G. “A general analytic solution for mohr’s envelope”. In: *Proceedings-American Society for Testing and Materials* 52 (1952), s. 1260–1271.
- [14] Clausen J. “Efficient Non-Linear Finite Element Implementation of Elasto-Plasticity for Geotechnical Problems”. Ph.D. thesis. Esbjerg Institute of Technology, Aalborg University, 2007.
- [15] *PLAXIS Material Models CONNECT Edition V20*. 2019.
- [16] ČSN EN 1997-1. *Eurokód 7: Navrhování geotechnických konstrukcí - Část 1: Obecná pravidla*. 2006.

- [17] Rocscience Inc. - 2D a 3D Geotechnical Software. *RS2 Material Model Manuals*. 2019. URL: [https://www.rocscience.com/help/rs2/theory/Material\\_Model\\_Manuals/6-Hoek-Brown\\_Model.pdf](https://www.rocscience.com/help/rs2/theory/Material_Model_Manuals/6-Hoek-Brown_Model.pdf).
- [18] Pamin J. “Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena”. Ph.D. thesis. Technical University Delft, 1994.
- [19] Potts D.M. a Zdravkovič L. *Finite element analysis in geotechnical engineering - theory*. London: Thomas Telford, 1999. ISBN: 0 7277 2753 2.
- [20] Poklopová T. “Posouzení reálné podzemní konstrukce na účinky zemětřesení - pseudostatický výpočet”. Bc. thesis. České vysoké učení technické v Praze, 2018.
- [21] Marinos P. a Hoek E. “GSI: A Geological Friendly Tool for Rock Mass Strength Estimation”. In: *Proceedings of the GEOEng 2000 at the International Conference on Geotechnical and Geological Engineering* (2000), s. 1422–1446.

# Seznam obrázků

2.1	Souřadnicový systém pro podmínky rovinné deformace a osové symetrie	6
2.2	Bilineární diagram elastického-perfektně plastického materiálu namáhaného jednoosým tahem	7
2.3	Význam podmínky plasticity a sdruženého zákona plastického přetváření	8
2.4	Význam Mohrovy kružnice a smykových parametrů MC modelu	11
2.5	Znázornění Mohr-Coulombovy podmínky plasticity v deviatorickém řezu: a) význam triaxiálové komprese a extenze, b) geometrický význam invariantů	12
2.6	Naznačení významu úhlu dilatance pro směr návratu na Mohr-Coulombovu plochu plasticity a hodnotu objemové plastické deformace: a) v deviatorickém řezu, b) v meridiánové rovině	12
3.1	Nelineární Hoek-Brownovo kritérium, jednoosá pevnost v tahu a v tlaku	14
3.2	Vliv pevnostních parametrů $\sigma_{ci}$ (a) a $m_i$ (b) na Hoek-Brownovu podmínku porušení zobrazenou v $p - q$ diagramu	15
3.3	Vliv geologických parametrů GSI (a) a D (b) na Hoek-Brownovu podmínku porušení zobrazenou v $p - q$ diagramu	16
3.4	Zobrazení nelineárního HB kritéria a ekvivalentní MC podmínky porušení v rovině hlavních napětí	19
3.5	Vliv volby rozsahu ekvivalence sklon ekvivalentní přímkou porušení	20
3.6	Hoek-Brownova plocha plasticity: a) deviatorický řez, b) v rovině hlavních napětí	21
3.7	Návrat na Hoek-Brownovu plochu plasticity zobrazený v deviatorickém řezu	23
3.8	a) Význam invariantů napětí v deviatorickém řezu plochy plasticity, b) Hoek-Brownova plocha plasticity v meridiánové rovině	24
4.1	Rotace souřadnicového systému okolo osy $z$	26
4.2	Schéma standardní Newton-Raphsonovy metody	28
4.3	Schéma Newton-Raphsonovy metody s elastickou maticí tuhosti, tzv. metoda počáteční tuhosti	28
5.1	Způsoby zatěžování vzorku v triaxiálu: a) triaxiálová komprese, b) triaxiálová extenze	34
5.2	Numerický model triaxiálu se dvěma tříuzlovými prvky: a) 1. fáze - izotropní napjatost, b) 2. fáze - přitížení posunem (triaxiálová komprese), c) 2. fáze - přitížení posunem (triaxiálová extenze)	34
5.3	Porovnání numerického a analytického řešení: a) pro dva typy konečných prvků, b) pro dvě různé podmínky plasticity s použitím tříuzlového konečného prvku	35
5.4	Porovnání odezvy vzorku při triaxiálové kompresi při použití HB nebo MC podmínky plasticity pro šestý ze série triaxiálových testů	36
5.5	Porovnání odezvy vzorku při triaxiálové kompresi při použití HB nebo MC podmínky plasticity pro osmý ze série triaxiálových testů	37

5.6	Grafické znázornění procesu návratu na plochu plasticity: a),c),e) pouze pro platnost sektoru $f^{13}$ , b),d),f) na hranu plochy plasticity - sektory $f^{13}$ a $f^{23}$ . . . . .	38
5.7	Zatěžovací fáze numerického modelu pro test návratu na plochu plasticity: a) zatížení komorovým tlakem, b) přitížení posunem podpor na horní hraně modelu . . . . .	39
5.8	Návrat na plochu plasticity v prostoru hlavních napětí: a) pouze pro platnost sektoru $f^{13}$ , b) návrat na hranu plochy plasticity - sektory $f^{13}$ a $f^{23}$ . . . . .	40
5.9	Zobrazení návratu na plochu plasticity pro všechny globální iterace až do dosažení rovnovážného stavu: a),c) pouze pro platnost sektoru $f^{13}$ , b),d) návrat na hranu plochy plasticity - sektory $f^{13}$ a $f^{23}$ . . . . .	40
5.10	Numerický model edometru se dvěma tříuzlovými prvky: a) zatížení určitou hodnotou napětí, b) zatížení posunem . . . . .	41
5.11	Numerický model edometru zatížený hodnotou napětí nad mezí plasticity	41
5.12	Závislost odezvy horninového masivu v edometru na zvoleném rozsahu $\sigma_1$ pro určení smykových parametrů . . . . .	42
5.13	Porovnání počátku plastického přetváření pro různě zvolené rozsahy nejmenšího hlavního napětí . . . . .	43
5.14	Znázornění dráhy napětí při edometrické zkoušce pro obě podmínky plasticity . . . . .	43
5.15	Porovnání odezvy vzorku při edometrické zkoušce pro použití Hoek-Brownovy a Mohr-Coulombovy podmínky plasticity odvozené pro $\sigma_{1n} = 0.79$ . . . . .	44
6.1	Geometrie a okrajové podmínky numerického modelu pro výpočet stability svahu, síť konečných prvků . . . . .	47
6.2	HB a MC podmínka plasticity v rovině hlavních napětí před a po redukcí pevnostních charakteristik - kvadratická aproximace . . . . .	49
6.3	Plocha porušení zobrazená pomocí $E_d^{pl}$ (%) pro síť z kvadratických konečných prvků: a) HB podmínka plasticity, b) MC podmínka plasticity .	50
6.4	Plocha porušení zobrazená pomocí $E_d^{pl}$ (%) pro síť z lineárních konečných prvků: a) HB podmínka plasticity, b) MC podmínka plasticity . . . . .	50
7.1	Geometrie a okrajové podmínky numerického modelu pro výpočet podzemní exkavace, síť konečných prvků . . . . .	51
7.2	Vykreslení průběhu sedání $dz$ (mm) pro různé materiálové modely a) HB, b) MC, c) MMC d) vykreslení průběhu hlavního napětí $\sigma_1$ (kPa) . . . . .	54
7.3	Vykreslení průběhu plastické deformace $E_d^{pl}$ : (%) a) HB, b) MC, c) MMC	54
A.1	Bilineární závislost hodnoty mobilizovaného úhlu dilatance na hodnotě nejmenšího hlavního napětí [6] . . . . .	58

## Seznam tabulek

5.1	Vstupní a vypočtené parametry horninového masivu . . . . .	33
6.1	Vstupní parametry horninového masivu pro stabilitní analýzu . . . . .	48
6.2	Výsledky stabilitní analýzy pro dva typy materiálového modelu a dva stupně aproximace, porovnání s výpočtem v Plaxisu 2019 . . . . .	49
7.1	Parametry jílu - Mohr-Coulombův materiálový model . . . . .	52
7.2	Parametry horninového masivu - Hoek-Brownův materiálový model . . .	52
7.3	Porovnání sedání $dz$ (mm) pro HB podmínku plasticity a ekvivalentní MC a MMC podmínky plasticity . . . . .	53
B.1	Hodnoty jednoosé pevnosti v tlaku, převzato z [4] . . . . .	59
B.2	Hodnoty Hoek-Brownových konstant, převzato z [4] . . . . .	60
B.3	Tabulka pro odvození hodnoty GSI pro horninový masiv, převzato z [21]	61
B.4	Hodnoty faktoru porušení $D$ , převzato z [5] . . . . .	62