

České vysoké učení technické v Praze Fakulta strojní

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Lukáš Jurča

Numerická aproximace proudění nestlačitelné tekutiny s přestupem tepla

Ústav technické matematiky

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Matematické modelování
v technice

Praha 2020

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Jurča** Jméno: **Lukáš** Osobní číslo: **406427**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerická aproximace proudění nestlačitelné tekutiny s přestupem tepla

Název diplomové práce anglicky:

Numerical approximation of incompressible flow problems with heat transfer

Pokyny pro vypracování:

Matematické modelování problému proudění nestlačitelné tekutiny a vedení tepla. Matematická formulace problému a její slabá formulace. Popis metody konečných prvků a její realizace v rámci vybraného programového balíku. Stabilizace metody pro případ dominující konvekce. Diskretizovaný problém a způsoby jeho řešení. Řešení vybraných případů.

Seznam doporučené literatury:

- 1) P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Skripta, Vydavatelství ČVUT 2007.
- 2) O. C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor, J. Z. Zhu, O. C. Zienkiewicz, Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals, 2013, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=1372120>
- 3) H. C. Elman, D. J. Silvester, and A. J. Wathen, Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics 2005, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=422406>
- 4) Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic and Computational Approach Stefan Turek, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.
- 5) J. M. Bergheau, R. Fortunier, Finite Element Simulation of Heat Transfer, 2004
- 6) J.H. Lienhardt IV, J.H. Lienhardt V, A heat transfer textbook, 2003

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **21.10.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **19.01.2020**

Platnost zadání diplomové práce: _____



doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.10.2019

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Petra Sváčka, Ph.D., bez cizí pomoci a použil jsem pouze uvedené zdroje a literaturu.

V Praze dne 19.1.2020

.....

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. za vedení práce, rady a poznatky, trpělivost a pomoc s vypracováním této práce. Dále děkuji své rodině za veškerou podporu, kterou mi věnovala během studia.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá numerickou aproximací proudění nestlačitelné tekutiny a úlohy vedení tepla. Numerická aproximace je založena na metodě konečných prvků. Metoda je aplikována na skalární lineární i nelineární problém. Pro řešení problému konvekce-difuze je užitá stabilizace. Stabilizovaná metoda konečných prvků je dále použita pro řešení problému proudění nestlačitelné tekutiny, jsou řešeny testovací případy pro různá Reynoldsova čísla.

Abstract

The thesis deals with numerical approximation of the incompressible fluid flow and the heat transfer. The numerical approximation is based on the finite element method. The method is applied to both linear and nonlinear scalar problems. Stabilization is used to solve the problem of convection-diffusion. The stabilized finite element method is also used for solution of the problem of incompressible fluid flow. Selected test cases are solved for different Reynolds numbers.

Klíčová slova

Navierovy-Stokesovy rovnice, proudění, vedení tepla, slabá formulace, metoda konečných prvků

Key words

Navier-Stokes equations, flow, heat transfer, weak formulation, finite element method

Obsah

1	Úvod	8
2	Matematické nástroje	9
2.1	Vektorový prostor	9
2.2	Prostory funkcí	11
2.2.1	Věty o vnoření	13
3	Matematické modelování úlohy vedení tepla	16
3.1	Vedení tepla v tuhém tělese	16
3.2	Proudění tekutiny	18
3.2.1	Zákon zachování hmoty	18
3.2.2	Zákon zachování hybnosti	19
3.2.3	Navierovy-Stokesovy rovnice	20
3.2.4	Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic	20
4	Slabá formulace problému	22
4.1	Laplaceův problém	22
4.1.1	Ověření existence a jednoznačnosti řešení	24
4.2	Problém konvekce-difuze	26
4.2.1	Ověření existence a jednoznačnosti řešení	27
4.3	Nelineární problém p-Laplace	29
4.4	Stokesův problém	30
4.4.1	Existence a jednoznačnost řešení	32
4.5	Stacionární Navier-Stokesův problém	33
5	Metoda konečných prvků	35
5.1	Diskretizace abstraktního problému	35
5.2	Nelineární problém	39
5.3	Vektorový problém	39
5.4	Praktická realizace	40
5.4.1	Numerické řešení diskrétního problému	45

6	Numerické výsledky	51
6.1	Laplaceův problém	51
6.2	Problém p-Laplace	54
6.3	Problém konvekce-difuze	57
6.3.1	Stabilizace problému konvekce-difuze	60
6.4	Stokesův problém	62
6.5	Stacionární Navier-Stokesův problém	64
6.5.1	Stabilizace Navier-Stokesova problému	68
6.5.2	Numerické řešení problému kavity	72
7	Závěr	84
	Seznam literatury	86

1 Úvod

Diplomová práce se zabývá matematickým modelováním úlohy vedení tepla a proudění, zejména jejich numerickou simulací. V první části práce jsou popsány rovnice které dané fyzikální děje popisují (modelují) v reálném světě. Je zde uvedena inspekční analýza, která umožňuje získat charakteristiky proudění, jako je např. Reynoldsovo číslo, viz [1].

Pro účely aproximace metodou konečných prvků jsou odvozeny slabé formulace uvedených problémů. Nejprve jsou odvozeny pro skalární lineární a nelineární problémy a následně pro problémy vektorové.

V další kapitole je uvedena diskretizace abstraktních problémů pomocí metody konečných prvků a popis realizace metody konečných prvků v programu. Je stručně popsáno řešení soustav lineárních rovnic, jednak pro symetrické pozitivně definitní matice, ale také pro nesymetrické soustavy typu sedlového bodu.

V závěrečné kapitole jsou uvedeny a analyzovány numerické výsledky problémů spočtených na testovacích oblastech. Je zde také uvedeno numerické řešení Laplaceova problému, problému konvekce-difuze a nelineárního p-Laplaceova problému. Dále je popsáno řešení Stokesova a Navierova-Stokesova problému. Pro problém dominující konvekce jsou Galerkinovy aproximace srovnány s řešením se stabilizací. Taktéž je řešení srovnáno u Navier-Stokesova problému pro oblast zpětného schodu a kavity.

2 Matematické nástroje

V této kapitole rozebereme matematický aparát, který budeme v následujících kapitolách potřebovat, poznatky jsou převzaty ze skript [2].

2.1 Vektorový prostor

Budeme pracovat s množinou reálných čísel \mathbb{R} , přirozených čísel \mathbb{N} a komplexních čísel \mathbb{C} jak je uvedeno v [2]. Symbolem \mathbb{R}^n rozumíme lineární prostor n -rozměrných reálných vektorů. Na prostoru \mathbb{R}^n budeme používat Euklidovskou normu definovanou

$$\|\vec{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2},$$

součtovou normu

$$\|\vec{u}\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i| \right),$$

nebo maximovou normu

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |u_i|.$$

Prostory \mathbb{R}^n lze zobecnit, dále budeme symbolem V označovat reálný vektorový prostor, kde je definována operace sčítání vektorů a násobení reálným číslem. Vektorový prostor V nazýváme normovaným vektorovým prostorem, pokud existuje zobrazení $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazývané normou viz [2] a splňující následující vlastnosti pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

- (i) $\|\vec{v}\|_V \geq 0$,
- (ii) $\|\alpha\vec{v}\|_V = |\alpha|\|\vec{v}\|_V$,
- (iii) $\|\vec{v} + \vec{u}\|_V \leq \|\vec{v}\|_V + \|\vec{u}\|_V$.

Normovaný vektorový prostor, který je úplný, je Banachův prostor viz [2]. Na Banachově prostoru budeme pracovat s pojmy lineární forma L a bilineární forma a .

Lineární a bilineární forma

Zobrazení $L : V \mapsto \mathbb{R}$ nazýváme lineární formou, pokud pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$(i) \quad L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v}),$$

$$(ii) \quad L(\alpha\vec{u}) = \alpha L(\vec{u}).$$

Zobrazení L nazýváme spojité, jestliže pro libovolnou posloupnost $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$ platí $L(\vec{u}_n) \rightarrow L(\vec{u})$. Spojitá lineární forma se také nazývá spojitým lineárním funkcioálem viz [2]. Pro lineární formu je spojitost ekvivalentní s omezeností, forma L je spojitá pokud existuje $C > 0$ tak, že

$$|L(v)| \leq C \cdot \|\vec{v}\|_V \text{ pro libovolné } \vec{v}.$$

Zobrazení $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme bilineární formou, pokud pro libovolné $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(i) \quad a(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{w}) + a(\vec{v}, \vec{w}),$$

$$(ii) \quad a(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}) = a(\vec{w}, \vec{u}) + a(\vec{w}, \vec{v}),$$

$$(iii) \quad a(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha a(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$(iv) \quad a(\vec{u}, \alpha\vec{v}) = \alpha a(\vec{u}, \vec{v}).$$

Forma a se nazývá spojitá, pokud na prostoru V existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ platí:

$$|a(\vec{u}, \vec{v})| \leq C \|\vec{u}\|_V \|\vec{v}\|_V.$$

Spojitosť formy a znamená, že pro libovolné $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$ a $\vec{v}_n \rightarrow \vec{v}$ platí

$$a(\vec{u}_n, \vec{v}_n) \rightarrow a(\vec{u}, \vec{v}).$$

Často pracujeme s lineárními prostory, na kterých je definován skalární součin. Skalárním součinem nazýváme formu $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, pokud platí

$$(i) \quad \text{forma } (\cdot, \cdot) \text{ je bilineární,}$$

$$(ii) \quad \text{pro libovolné } \vec{u}, \vec{v} \in V \text{ platí } (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}),$$

(iii) pro libovolné $0 \neq \vec{u} \in V$ je $(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Lineární prostor V se skalárním součinem nazýváme unitární prostor, viz [3]. Skalární součin indukuje normu $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$.

2.2 Prostory funkcí

Budeme pracovat s prostory funkcí, tak jak jsou uvedeny v (2.1). Uvažujeme funkce více proměnných definované na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřené, souvislé a omezené oblasti, viz [2]. Symbolem $C(\bar{\Omega})$ rozumíme prostor spojitých funkcí na $\bar{\Omega}$ (uzávěr oblasti). Prostor $C^1(\bar{\Omega})$ s dimenzí $d = n$, pak spojitá a spojitě diferencovatelná funkce φ na $\bar{\Omega}$ vypadá následovně

$$\|\varphi\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi(x)| + \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right| + \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right| + \cdots + \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right|,$$

což bychom obdobně psali pro $C^2(\bar{\Omega})$, zde by ale byl zápis komplikovanější (smíšené derivace). Pro naše účely budeme potřebovat ještě jiné prostory než $C^k(\bar{\Omega})$.

Pro účely slabé formulace jednotlivých problémů budeme pracovat s prostory s integrálními normami, tedy s Lebesgovými a Sobolevovými prostory, viz [4].

Lebesgeovy prostory

Lebesgeovy prostory $L^p(\Omega)$ jsou definovány pomocí Lebesgueovy míry a integrálu, viz [4]. Pro $1 \leq p < \infty$, prostorem $L^p(\Omega)$ rozumíme množinu funkcí

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\},$$

kde norma na prostoru $L^p(\Omega)$ je definovaná

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

Prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy prostory, viz [4]. Speciálně pro $p = 2$ značíme $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{0,2}$. Prostor $L^2(\Omega)$ je navíc Hilbertovým prostorem a definujeme skalární součin na $L^2(\Omega)$

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$$

který budeme značit zkráceně $(f, g)_{\Omega}$. V prostoru $L^2(\Omega)$ budeme používat Cauchyho nerovnost viz [2].

Věta 2.1 (*Cauchyova nerovnost*)

Nechť $u \in L^2(\Omega)$ a $v \in L^2(\Omega)$ pak platí

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tato nerovnost se nazývá Cauchyova a lze zobecnit na tzv. Hölderovu nerovnost, viz [2].

Věta 2.2 (*Hölderova nerovnost*)

Mějme $1 \leq p, q \leq \infty$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak pro libovolné $u \in L^p(\Omega)$ a $v \in L^q(\Omega)$ platí

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Sobolevův prostor

Symbolem $W^{k,p}(\Omega)$ značíme Sobolevův prostor funkcí, jejichž derivace jsou až do k -tého řádu v prostoru $L^p(\Omega)$. Tedy pro $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p < \infty$ definujeme

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je multi-index, kde

$$D^{\alpha}v = \frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \partial x_d^{\alpha_d}}$$

jsou zobecněné derivace $D^{\alpha}v$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ které se uvažují ve smyslu distribucí, viz [4]. Pro $1 \leq p < \infty$ definujeme normu na $W^{k,p}(\Omega)$ jako

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}v\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

V dalším užíváme také seminormu, tj. zobrazení, které splňuje vlastnosti normy (i)-(iii) vyjma vlastnosti (i). V prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ je seminorma definována předpisem

$$|v|_{k,p,\Omega} = |v|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}v\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

Pro $p = 2$ je prostor $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův, v tom případě budeme značit

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Norma na $H^k(\Omega)$ se značí

$$\|\cdot\|_{H^k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,\Omega},$$

a seminorma

$$|\cdot|_{H^k,\Omega} = |\cdot|_{k,\Omega}.$$

2.2.1 Věty o vnoření

Pro ověření existence a jednoznačnost řešení budeme potřebovat následující pojmy, viz [2].

Funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$, resp. z prostoru $H^1(\Omega)$ jsou také prvky prostoru $L^p(\Omega)$ resp. $L^2(\Omega)$. Speciálně každý prvek prostoru $H^1(\Omega)$ leží v prostoru $L^2(\Omega)$, tedy $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, viz [2]. Navíc zřejmě platí (pro $C = 1$)

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Říkáme, že prostor $H^1(\Omega)$ je spojitě vnořen do prostoru $L^2(\Omega)$, což zapisujeme jako

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Vnoření prostorů lze zapsat obecněji. Pokud V_1 a V_2 jsou Banachovy prostory, říkáme, že prostor V_1 je spojitě vnořen do prostoru V_2 , tedy $V_1 \hookrightarrow V_2$. Pokud $V_1 \subset V_2$ a existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro libovolný prvek $v \in V_1$ platí

$$\|v\|_{V_1} \leq C\|v\|_{V_2}.$$

V závislosti na dimenzi d lze ukázat další vlastnosti funkcí ze Sobolevových prostorů, viz [2]. Speciálně pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

kde $1 \leq p < \infty$. Hodnoty funkce z prostoru $H^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$ tedy nemusí být dobře definovány (hranice oblasti je množina míry nula), viz [5].

Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat řešením okrajových úloh, bude nás zajímat hodnota funkce z $H^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$. K tomu účelu uijeme větu o stopách, viz [2].

Věta 2.3 (*Věta o stopách*)

Nechť Ω je omezená oblast v \mathbb{R}^d s lipschitzovskými spojitou hranicí. Pak existuje právě jeden lineární spojitý operátor $T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ takový, že

$$T\varphi = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ pro libovolnou funkci } \varphi \in C(\bar{\Omega})$$

Funkce $T\varphi$ se nazývá stopou funkce $v \in H^1(\Omega)$. Věta o stopách ukazuje na existenci konstanty $C > 0$ takové, že

$$\|T\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{1,\Omega}.$$

Na základě věty o stopách můžeme definovat prostor $H_0^1(\Omega)$ jako prostor funkcí z $H^1(\Omega)$, které jsou nulové na hranici (ve smyslu stop), tedy

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Pro formulaci slabých úloh pro Soboleovy prostory budeme používat Friedrichsovu nerovnost, viz. [2].

Věta 2.4 (*Friedrichsova nerovnost*)

Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak existuje konstanta $C_F > 0$ taková, že

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_F |u|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Friedrichsova nerovnost říká, že seminorma je norma ekvivalentní s původní normou na prostoru $H_0^1(\Omega)$, tedy pro funkce nulové na $\partial\Omega$. Friedrichsovu nerovnost lze zobecnit pro případ funkcí nulových pouze na části hranice $\Gamma \subset \partial\Omega$. Dostáváme Poincarého nerovnost, viz [2].

Věta 2.5 (*Zobecněná Poincarého nerovnost*)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí. Nechť $\Gamma \subset \partial\Omega$ je část hranice s kladnou $(d-1)$ -rozměrnou mírou. Pak existuje konstanta $C_p > 0$ taková, že

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq C_p \left(|u|_{1,\Omega}^2 + \left| \int_{\Gamma} u dS \right|^2 \right), \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Při formulaci úloh, budeme užívat Lax-Milgramovu větu, viz [2].

Věta 2.6 (*Lax-Milgramova*)

Nechť V je Banachův prostor, L lineární forma na V a $a(\cdot, \cdot)$ symetrická bilineární forma na V . Dále nechť existují kladné konstanty M, m, C takové, že pro libovolné $u, v \in V$ platí

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|,$$

$$a(u, u) \geq m \|u\|^2,$$

$$|L(v)| \leq C \|v\|.$$

Pak existuje právě jeden prvek $u^ \in V$, takový že platí*

$$a(u^*, v) = L(v),$$

pro každé $v \in V$ navíc platí

$$\|u^*\| \leq \frac{C}{m}.$$

Lax-Milgramova věta dokazuje existenci řešení úlohy $a(u, v) = L(v)$ za určitých předpokladů pro formy a a L , pro ověření předpokladů použijeme Poincarého nerovnost viz (2.5). Věta zůstává v platnosti i pro případ nesymetrické formy a .

Pro transformaci na referenční trojúhelník bude používat větu o Substituci, viz [2].

Věta 2.7 (*Věta o substituci*)

Nechť $J : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ je prosté a spojitě diferencovatelné zobrazení oblasti $\hat{\Omega}$ na oblast Ω a funkce $f \in L^1(\Omega)$. Pak

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\hat{\Omega}} f(J(\hat{x})) |J'(\hat{x})| d\hat{x},$$

kde $|J'(\hat{x})|$ je absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice zobrazení J .

Při odvození slabé formulace budeme užívat Greenovi věty, viz [2].

Věta 2.8 (*Greenova věta*)

Nechť funkce $u, v \in H^1(\Omega)$ a nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.

Pak platí vztah

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

kde pro lib. $i \in (1, \dots, d)$, $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$ je jednotková vnější normála k hranici Ω .

Greenova věta je ekvivalentní formulací Gauss-Ostrogradského věty, viz [2].

Věta 2.9 (*Gauss-Ostrogradského věta*)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^d$. Pak

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} ds,$$

kde pro lib. $i \in (1, \dots, d)$, $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$ je jednotková vnější normála k hranici Ω .

3 Matematické modelování úlohy vedení tepla

V této kapitole si rozebereme rovnice popisující jak samotný přestup tepla v tuhém tělese, tak proudění tekutiny.

3.1 Vedení tepla v tuhém tělese

Vedení tepla neboli kondukce tepla je přenos energie vzájemnou interakcí atomů a molekulárního spojitého prostředí, které vzniká v důsledku nerovnoměrného rozložení teplot [1]. V každém místě teplotního pole můžeme v určitém okamžiku stanovit tepelný tok. Vztáhneme-li tepelný tok na jednotku plochy v kolmé rovině na směr toku, získáme vektor hustoty tepelného toku \vec{q} .

Pokud svážeme hustotu tepelného toku s rozložením teploty v homogenním a isotropním prostředí, tak získáváme Fourierovu rovnici vedení tepla viz [1] nebo [6]

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T,$$

kde λ je součinitel tepelné vodivosti, \vec{q} je hustota tepelného toku a T je teplota, viz [1]. V anisotropních látkách lze Fourierovu rovnici zobecnit vztahem

$$\vec{q} = -\vec{\lambda} \cdot \nabla T, \quad (3.1)$$

kde $\vec{\lambda}$ je tenzor tepelné vodivosti, více viz [1]. Dále budeme uvažovat nestacionární průběh teploty a tenzor tepelné vodivosti λ nahradíme konstantou tepelné vodivosti. Vedení tepla je pak popsáno Fourierovou-Kirchhoffovou rovnicí vedení tepla, viz [1] nebo [6], která má tvar

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + 2\mu \vec{\Delta} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}, \quad (3.2)$$

kde \vec{u} je rychlost proudění tekutiny, ρ je hustota tekutiny, C_p tepelná kapacita tekutiny, μ je dynamická viskozita tekutiny, $\dot{Q}^{(g)}$ jsou objemové zdroje tepla a $\vec{\Delta}$ je tenzor rychlosti deformace. Rovnice popisuje konduktivně-konvektivní přenos tepla, fyzikální význam jednotlivých členů je následující

- $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$ je rychlost akumulace entalpie ve fixovaném objemu všemi mechanismy, bez záření.
- $\rho C_p \vec{u} \cdot \nabla T$ je rychlost konvektivního přívodu entalpie.
- $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$ je rychlost konduktivního přívodu tepla.
- $2\mu \vec{\Delta} : \vec{\Delta}$ je rychlost disipace mechanické energie.
- $\dot{Q}^{(g)}$ jsou objemové zdroje tepla.

Tato rovnice popisuje vývoj teplotních polí obecně, dle řešeného případu se členy rovnice (3.2) upravují nebo zanedbávají, viz. [1]. Pro případ vedení tepla v tuhém tělese jsou složky rychlosti \vec{u} a tenzoru rychlosti deformace $\vec{\Delta}$ nulové a rovnice (3.2) se redukuje na

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \dot{Q}^{(g)}. \quad (3.3)$$

Pokud se zabýváme stacionárním dějem, pak rovnice (3.3) přejde na tvar

$$-\Delta T = \dot{Q}^{(g)}, \quad (3.4)$$

kde $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ je Laplaceův operátor a $\dot{Q}^{(g)}$ jsou vnitřní tepelné zdroje. Rovnice (3.4) je Laplaceova rovnice vedení tepla.

3.2 Proudění tekutiny

Proudící tekutina je popsána tzv. základními rovnicemi dynamiky tekutin, viz [1]. Nejprve zdůrazněme, že strukturu proudící látky nahradíme tzv. kontinuem se spojitým rozložením hmoty, což umožňuje využívat diferenciálního a integrálního počtu, jak je popsáno např. v [7]. Objem V , ve kterém se nachází velké množství částic (atomů), rozdělíme na dostatečně malé díly ΔV_i a v každém z nich označíme průměrnou hustotu

$$\bar{\rho}_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i},$$

kde Δm_i je hmotnost veškerého materiálu obsaženého v objemu ΔV_i . Průměrnou hustotu $\bar{\rho}_i$ považujeme za lokální hustotu $\rho(x)$ pro každý bod prostoru $x \in \Delta V_i$. Obdobně můžeme definovat pro další fyzikální veličiny jako je rychlost, tlak, atd.. Hmotnost celého objemu V pak dostaneme integrací

$$m(V) = \int_V \rho dV.$$

V mechanice kontinua nahradíme látku skládající se z molekul a atomů, tzv. kontinuem, v tomto případě je látka popsána spojitou (hladkou) funkcí $\rho(x)$ definovanou pro libovoně $x \in \Omega$, více viz [7].

3.2.1 Zákon zachování hmoty

Jednou ze základních rovnic dynamiky tekutin je bilance hmotnosti v homogenní tekutině neboli rovnice kontinuity. Diferenciální tvar bilance hmotnosti v pevném kontrolním objemu, viz [1], má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.5)$$

kde ρ je hustota tekutiny a \vec{u} rychlost proudění tekutiny. V případě proudění nestlačitelné tekutiny ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) uvažujeme konstantní hustotu, rovnice (3.5) tedy získá tvar

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (3.6)$$

3.2.2 Zákon zachování hybnosti

Diferenciální bilance hybnosti, viz [1], má tvar

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\rho(\nabla \cdot \vec{u})\vec{u} - \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}$$

kde \vec{u} je rychlost, $\vec{\sigma}$ je tenzor celkových napětí, ρ je hustota a \vec{f} je vektorové pole objemových sil působících na jednotku hmotnosti. Aplikujeme-li rovnici kontinuity (3.6), pak člen $\rho(\nabla \cdot \vec{u})\vec{u}$ je nulový.

V mechanice tekutin je výhodnější rozložit tenzor celkových napětí $\vec{\sigma}$ na složku isotropního tlaku v tekutině p a složku dynamických napětí $\vec{\tau}$, tedy $\vec{\sigma} = -pI + \vec{\tau}$, viz [1]. Pak rovnice přejde do tvaru

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}, \quad (3.7)$$

kde jednotlivé členy vyjadřují:

- $\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right)$ jsou setrvačné síly,
- $-\nabla p$ jsou tlakové síly,
- $\nabla \cdot \vec{\tau}$ jsou síly vazkého tření,
- $\rho \vec{f}$ jsou objemové síly.

Rovnice (3.7) je základní rovnice dynamiky tekutin, Cauchyho rovnice dynamické rovnáhy.

Pro Newtonské tekutiny jsou dynamická napětí vyjádřena, viz [1], ve tvaru

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{\Delta}, \quad (3.8)$$

kde μ je dynamická viskozita, $\vec{\tau}$ je tenzor dynamických napětí a $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}(\vec{u})$ je tenzor rychlosti deformace, viz [1], který má tvar

$$\vec{\Delta} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T]. \quad (3.9)$$

3.2.3 Navierovy-Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice lze získat (viz [1]) dosazením Newtonova zákona (3.8) do dynamické rovnice (3.7), čímž dostaneme

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \vec{\Delta}) + \rho \vec{f}. \quad (3.10)$$

Za předpokladu konstantní viskozity μ a rozepsáním tensoru rychlosti deformace (3.9), můžeme přepsat rovnici (3.10) do tvaru

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}.$$

Tuto rovnici podělíme hustotou a označíme $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kinematickou viskozitu, dostaneme

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f}, \quad (3.11)$$

což jsou rovnice popisující proudění nestlačitelné tekutiny.

3.2.4 Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic

Pro numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic (3.11) budeme potřebovat určitou charakteristiku proudění, kterou nám poskytne inspekční analýza, viz [1]. Tímto způsobem je možné odvodit funkcionální závislosti mezi členy rovnice a charakterizovat proudění. Budeme postupovat následovně:

1. Vezmeme rovnice popisující daný problém. Budeme uvažovat nulové vnější síly \vec{f} . Pak nám rovnice (3.6) a (3.11) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

2. Zavedeme bezrozměrné proměnné tak, že původní proměnné vztáhneme ke zvoleným charakteristickým referenčním veličinám. Za charakteristické veličiny volíme ty, které jsou technicky důležité a v průběhu děje konstantní, jak je popsáno v [1]. Uvažujme L_∞ charakteristický rozměr dané oblasti a U_∞ charakteristickou rychlost proudění. Bezrozměrná rychlost \vec{u}^* je pak dána $\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U_\infty}$, transformace souřadnic je $x^* = \frac{x}{L_\infty}$ a prostorové derivace lze vyjádřit vztahem $\nabla^* = L_\infty \nabla$, bezrozměrný čas $t^* = t \frac{U_\infty}{L_\infty}$.

3. Nahradíme rozměrové proměnné bezrozměrnými, rovnice (3.12) přejdou na tvar

$$\frac{U_\infty^2}{L_\infty} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} - \nu \frac{U_\infty}{L_\infty^2} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{U_\infty^2}{L_\infty} (\vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^*) + \nabla^* \left(\frac{p}{\rho L_\infty} \right) = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{U_\infty}{L_\infty} \nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0. \quad (3.14)$$

Rovnice (3.14) je až na konstantu stejná. Dále budeme řešit pouze rovnice (3.13).

4. Uvedeme rovnice (3.13) do bezrozměrného tvaru, jak je popsáno v [1]. Tím dostaneme bezrozměrná kritéria, která vyjadřují proměnnou velikost příslušných členů. Rovnice (3.13) přenásobíme L_∞ a podělíme U_∞^2 , dostaneme

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu}{U_\infty L_\infty} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* + \nabla^* \left(\frac{p}{\rho U_\infty^2} \right) = 0,$$

kde zavedeme bezrozměrný tlak $p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$, pak máme

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu}{U_\infty L_\infty} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* + \nabla^* p^* = 0, \quad (3.15)$$

kde jsou všechny členy bezrozměrné. Označme člen $\frac{\nu}{U_\infty L_\infty} = \frac{1}{Re}$, kde Re je tzv. Reynoldsovo číslo.

Z analýzy dostáváme nejdůležitější bezrozměrné kritérium v hydrodynamice Reynoldsovo číslo, které vyjadřuje poměr setrvačných sil konvekce k silám vazkým, viz [1].

$$Re = \frac{U_\infty L_\infty}{\nu}, \quad (3.16)$$

kde U_∞ je charakteristická rychlost proudění tekutiny, L_∞ je charakteristický rozměr a ν je kinematická viskozita.

4 Slabá formulace problému

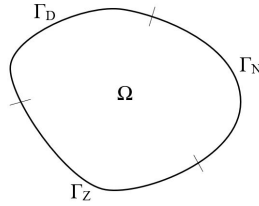
Pro použití metody konečných prvků je třeba úlohy formulovat ve slabém smyslu. Zde uvedeme skalární Laplaceův problém, problém konvekce-difuze, nelineární p-Laplaceův problém a následně Stokesův a Navier-Stokesův problém.

4.1 Laplaceův problém

Uvažujeme nejprve stacionární případ vedení tepla, obecně s reálnými zdroji. Budeme tedy řešit slabou formulaci Poissonovy rovnice, viz (3.4). Mějme spojitou oblast Ω s lipschitzovsky hladkou hranicí $\partial\Omega$, pak máme problém

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad (4.1)$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_Z$, kde $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_Z$ jsou vzájemně disjunkttní části hranice viz obr. 1,



Obrázek 1: Části oblasti

kde předepisujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } u = u_D \text{ na } \Gamma_D, \quad \text{b) } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ na } \Gamma_N, \quad \text{c) } -\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - \psi) \text{ na } \Gamma_Z \quad (4.2)$$

Vezmeme hladkou testovací funkci v , kde $v \in \mathcal{V} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$, jak je popsáno v [2]. Rovnici (4.1) přenásobíme v a zintegrujeme přes oblast Ω . Tedy dostaneme

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

a po užití Greenovy věty (2.8)

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Užitím okrajových podmínek (4.2) na hraniční integrál dostaneme

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = -\int_{\Gamma_N} \varphi v dS + \int_{\Gamma_Z} \alpha u v dS - \int_{\Gamma_Z} \alpha \Psi v dS.$$

Pak máme slabou formulaci řešení ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \alpha u v dS = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varphi v dS + \int_{\Gamma_Z} \alpha \Psi v dS,$$

kde bilineární symetrická forma $a(u, v)$ a lineární forma $L(v)$ jsou dány dle

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \alpha u v dS, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varphi v dS + \int_{\Gamma_Z} \alpha \psi v dS, \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $f \in L^2(\Gamma_D)$, $\varphi \in L^2(\Gamma_N)$, $\psi \in L^2(\Gamma_Z)$, $u_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, kde $L^2(\Omega)$ je Lebesgueův prostor s druhými derivacemi a $H^{1/2}(\Gamma_D)$ je prostor funkcí tvořený stopami funkcí z prostoru $H^1(\Omega)$, jak je uvedeno např. v [2].

Pro nenulovou Dirichletovu okrajovou podmínku hledáme řešení ve tvaru $u = \tilde{u} + u_D$, kde u_D je hladká funkce rozšiřující okrajovou podmínku na $\bar{\Omega}$ a \tilde{u} je nulová funkce $\tilde{u} = 0$ na hranici Γ_D , viz [2]. Hledáme řešení ve tvaru $u = u_D + \tilde{u}$ tak, že $\tilde{u} \in \mathcal{V}$ platí pro $\forall v \in \mathcal{V}$, kde

$$a(\tilde{u}, v) = L(v) - a(u_D, v). \tag{4.4}$$

4.1.1 Ověření existence a jednoznačnosti řešení

Pro ověření existence a jednoznačnosti řešení použijeme Lax-Milgramovu větu (2.6), tedy ověříme její předpoklady. Víme, že $a(u, v)$ je bilineární, symetrická forma a $L(v)$ je lineární na $V \in H^1(\Omega)$, viz [2]. Dále ověříme:

Omezenost, spojitost formy $|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in V$, rozepíšeme

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \alpha uv dS \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \alpha |u| |v| dS,$$

kde členy vyřešíme zvlášť:

(i) Užijeme Cauchyovy nerovnosti (2.1)

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|u\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega},$$

(ii) na druhý člen použijeme Cauchyovy nerovnosti (2.1) a věty o stopách (2.3)

$$\int_{\Gamma_Z} \alpha |u| |v| dS \leq \alpha \left(\int_{\Gamma_Z} |u|^2 dS \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 dS \right)^{1/2} \leq \alpha C^2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Potom celá nerovnost

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \alpha C^2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} &\leq M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \\ (1 + \alpha C^2) &\leq M. \end{aligned}$$

V-elasticitu formy $a(u, u) \geq m\|u\|^2$, $\forall u, v \in V$, rozepíšeme

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \alpha uu dS$$

kde členy vyřešíme zvlášť:

(i) Užijeme zobecněné Poincarého nerovnosti (2.5)

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega = |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

(ii) a u druhého členu je vidět, že je kladný

$$\int_{\Gamma_Z} \alpha uu dS \geq 0.$$

Pak celá nerovnost

$$a(u, u) \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

a tedy volba $m = \frac{1}{C}$ nám dává splnění podmínky V-eliptičnosti.

Omezenost, spojitost formy $|L(v)| \leq C\|v\|$, $\forall u, v \in V$, rozepíšeme

$$\left| \int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_N} \varphi vdS + \int_{\Gamma_Z} \alpha\psi vdS \right| \leq \int_{\Omega} |f||v|d\Omega + \int_{\Gamma_N} |\varphi||v|dS + \int_{\Gamma_Z} \alpha|\psi||v|dS,$$

kde ověříme spojitost jednotlivých členů užitím Cauchyovy nerovnosti (2.1) a věty o stopách (2.3), tedy

(i)

$$\int_{\Omega} |f||v|d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2d\Omega \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |v|^2d\Omega \right)^{1/2} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega},$$

(ii)

$$\int_{\Gamma_N} |\varphi||v|dS \leq \left(\int_{\Gamma_N} |\varphi|^2dS \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma_N} |v|^2dS \right)^{1/2} \leq C_2 \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{1,\Omega},$$

(iii)

$$\int_{\Gamma_Z} \alpha|\psi||v|dS \leq \alpha \left(\int_{\Gamma_N} |\psi|^2dS \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma_N} |v|^2dS \right)^{1/2} \leq \alpha C_3 \|\psi\|_{L^2(\Gamma_Z)} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Potom celá nerovnost

$$C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega} + C_2 \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{1,\Omega} + \alpha C_3 \|\psi\|_{L^2(\Gamma_Z)} \|v\|_{1,\Omega} \leq C \|v\|_{1,\Omega}$$

$$C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_N)} + \alpha C_3 \|\psi\|_{L^2(\Gamma_Z)} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \leq C \|v\|_{1,\Omega}$$

$$C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_N)} + \alpha C_3 \|\psi\|_{L^2(\Gamma_Z)} \leq C$$

Tím jsou ověřeny předpoklady Lax-Milgramovy věty a existuje tedy právě jedno řešení $u^* \in V$, $\forall v \in V$, takové, že

$$a(u^*, v) = L(v),$$

a navíc platí

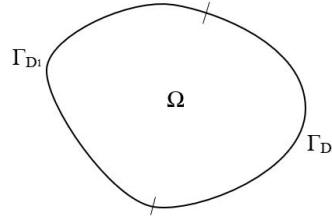
$$\|u^*\| \leq \frac{C}{m}.$$

4.2 Problém konvekce-difuze

Uvažujme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se spojitou Lipschitzovsky hladkou hranicí $\partial\Omega$. Pak mějme stacionární problém konvekce-difuze

$$-\nu\Delta u + (\vec{b} \cdot \nabla)u + \alpha u = f \text{ v } \Omega, \quad (4.5)$$

kde $f \in C(\bar{\Omega})$, $\vec{b} = (b_1, b_2) \in C^1(\bar{\Omega})$, $\alpha \geq 0$, $u_0 \in \Omega$ a $\nu > 0$ je daná konstanta. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}$ jsou vzájemně disjunktní části hranice viz obr. 2,



Obrázek 2: Části oblasti

kde předepisujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } u = 0 \text{ na } \Gamma_{D_1}, \quad \text{b) } u = u_{D_2} \text{ na } \Gamma_{D_2}, \quad (4.6)$$

Slabou formulaci daného problému získáme přenásobením testovací funkcí $v \in H_0^1(\Omega)$ a zintegrováním přes oblast Ω . Tedy

$$\int_{\Omega} -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} b_2 \right) v d\Omega + \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega,$$

následně aplikujeme Greenovu větu (2.8), pak

$$\int_{\Omega} -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\Omega = \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial n} v dS.$$

Dostáváme rovnici ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_{\Omega} (\vec{b} \cdot \nabla u) v d\Omega + \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega,$$

pak aplikujeme Dirichletovu okrajovou podmínku (4.6) a dostaneme slabou formulaci problému (4.5) ve tvaru

$$\nu(\nabla u, \nabla v)_{\Omega} + (\vec{b} \cdot \nabla u, v)_{\Omega} + (\alpha u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega},$$

kde máme lineární symetrickou formu $L(v)$ a bilineární nesymetrickou formu $a(u, v)$ tak, že

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (\vec{b} \cdot \nabla u, v)_\Omega + (\alpha u, v)_\Omega, \\ L(v) &= (f, v)_\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nenulovou Dirichletovu okrajovou podmínku řešíme stejně jako v (4.4).

4.2.1 Ověření existence a jednoznačnosti řešení

Ověříme předpoklady Lax-Milgramovy věty (2.6). Nejprve ověříme

Omezenost a spojitost formy $|L(v)| \leq C\|v\|$, $\forall u, v \in V$. Užijeme Cauchyovy nerovnosti a dostaneme

$$\left| \int_\Omega f v d\Omega \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 d\Omega \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega},$$

čímž jsme ověřily omezenost formy $L(v)$.

Následně pro ověření V-elasticity modifikujeme člen $\nu(\vec{b} \cdot \nabla u, v)_\Omega$, jak je popsáno v [2], vezmeme polovinu tohoto členu

$$\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla u) v d\Omega = \int_\Omega \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{b} u) v d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{b}) u v d\Omega.$$

Na první člen aplikujeme Greenovu větu (2.8), pak

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{b} u) v d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{n}) u v dS - \int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla v) u d\Omega.$$

Testovací funkce v je nulová na $\partial\Omega$, pak hraniční integrál je nulový a bilineární forma $a(u, v)$ přejde do tvaru

$$a(u, v) = \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla v + \left(\alpha - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{b}) \right) u v d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla u) v d\Omega - \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla v) u d\Omega.$$

Dále ověříme

V-elasticitu formy $a(u, u) \geq m\|u\|^2$, $\forall u \in V$, rozepíšeme

$$a(u, u) = \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{b}) \right) u u d\Omega + \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla u) d\Omega - \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \nabla u) u d\Omega}_0.$$

Je-li člen

$$\alpha - \frac{1}{2} \nabla \cdot \vec{b} \geq 0 \text{ v } \Omega,$$

pak můžeme užít zobecněnou Poincarého nerovnost (2.5) na člen

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla u \geq \nu |u|_{1,\Omega}^2,$$

a tím je V-elasticita formy $a(u, u)$ dokázána.

Víme tedy, že forma a je V-eliptická. Navíc lze ukázat, viz [2], že je tato forma bilineární a spojitá. Ovšem forma a není symetrická, protože obecně platí $a(u, v) \neq a(v, u)$. V Laxově-Milgramově větě není požadavek na symetrii podstatný a dá se vynechat. Pak je existence i jednoznačnost řešení problému (4.7) je dokázána.

4.3 Nelineární problém p-Laplace

Uvažujeme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s Lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Pak mějme nelineární problém p-Laplace

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{(p-2)} \nabla u) = f \text{ v } \Omega, \quad (4.8)$$

kde $p > 1$ a $p \neq 2$. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega$, na které předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \quad (4.9)$$

Slabou formulaci daného problému získáme přenásobením testovací funkcí v (v je nulová na $\partial\Omega$) a zintegrováním přes oblast Ω , dostáváme

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (|\nabla u|^{(p-2)} \nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Po aplikaci Greenovy věty (2.8) dostáváme

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-2)} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{(p-2)} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Následně aplikujeme okrajovou podmínku (4.2) na integrální člen přes hranici, pak slabá formulace přejde do tvaru

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-2)} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Máme nelineární problém, který je třeba linearizovat, volíme tedy novou funkci \bar{u} a nahradíme člen $|\nabla u|^{(p-2)}$ členem $|\nabla \bar{u}|^{(p-2)}$. Pak máme linearizovanou slabou formulaci ve tvaru

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^{(p-2)} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (4.10)$$

4.4 Stokesův problém

Pro formulaci vektorových problémů, Stokesova a Navier-Stokesova problému budeme pracovat s vektorovými prostory. Definujeme prostor vektorových funkcí \mathbf{V}_{div} s nulovou divergencí, tedy

$$\mathbf{V}_{div} = \left\{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d : \nabla \cdot \vec{v} = 0 \right\},$$

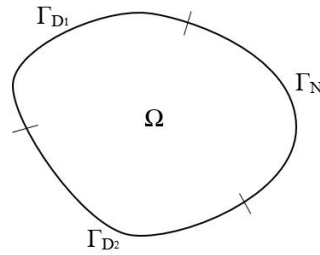
kde prostor $(H_0^1(\Omega))^d$ budeme značit $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Prostor \mathbf{V}_{div} je uzavřený podprostor prostoru $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Vzhledem k Friedrichsově nerovnosti je to Hilbertův prostor s normou $\|\vec{v}\|_{\mathbf{V}_{div}} = |\vec{v}|_{1,\Omega}$, blíže, např. v [2].

Nejprve se budeme zabývat numerickým řešením Stokesova problému a dále Navier-Stokesovými rovnicemi. Stokesův problém je linearizací Navier-Stokesových rovnic (3.12), popisuje pomalé proudění hodně vazké tekutiny, jedná se o vektorový problém.

Mějme tedy omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Hledáme funkce $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \text{ v } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= \nu \text{ v } \Omega, \end{aligned} \tag{4.11}$$

kde člen $\nu > 0$ je koeficient vazkosti, \vec{u} je rychlost proudění tekutiny a p je kinematický tlak. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \cup \Gamma_N$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}, \Gamma_N$ jsou vzájemně disjunktní části hranice, viz obr. 3,



Obrázek 3: Části oblasti

kde předepisujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_1}} = (0, 0), \quad \text{b) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_2}} = \vec{u}_{D_2}, \quad \text{c) } -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = -(p - p_{ref}) \vec{n} \text{ na } \Gamma_N. \tag{4.12}$$

Pro odvození slabé formulace se omezíme na případ, kdy uvažujeme nulovou Dirichletovu okrajovou podmínku Γ_{D_1} na celé hranici $\partial\Omega$ a referenční tlak $p_{ref} = 0$. Pak slabou

formulaci daného problému získáme přenásobením první rovnice, Stokesovy pohybové rovnice, testovací funkcí $\vec{v} \in \mathbf{V}$ a zintegrujeme, dostaneme

$$\int_{\Omega} (-\nu \Delta \vec{u} + \nabla p) \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega,$$

kde levou stranu rovnice můžeme rozepsat následně

$$\int_{\Omega} -\nu \Delta \vec{u} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega,$$

kde na členy použijeme Greenovu větu (2.8) a zvlášť upravíme

(i)

$$\int_{\Omega} -\nu \Delta \vec{u} d\Omega = \int_{\Omega} \nu (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \cdot \vec{v} dS,$$

(ii)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega.$$

Pak můžeme psát slabou formulaci první rovnice ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial\Omega} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega.$$

Následně aplikujeme nulovou Dirichletovu okrajovou podmínku a dostáváme slabou formulaci problému

$$\nu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \vec{v})_{\Omega} = (\vec{f}, \vec{v})_{\Omega}.$$

Slabou formulaci druhé rovnice, rovnice kontinuity, získáme přenásobením rovnice testovací funkcí $q \in L^2(\Omega)$ a zintegrujeme přes Ω . Dostaneme

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u}) q d\Omega = 0. \quad (4.13)$$

Sečtením obou slabých formulací, dostaneme slabou formulaci pro Stokesův problém, kde hledáme $\vec{u} \in \mathbf{V}$, tak že platí

$$\nu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \vec{v})_{\Omega} + (\nabla \cdot \vec{u}, q)_{\Omega} = (\vec{f}, \vec{v})_{\Omega}, \quad (4.14)$$

pro všechna $\vec{v} \in \mathbf{V}$. Následně se omezíme na podprostor $\mathbf{V}_{div} \subset \mathbf{V}$, pak lze problém (4.11) přeformulovat tak, že hledáme funkci $\vec{u} \in \mathbf{V}_{div}$ pro rovnici

$$\nu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_{\Omega} = (\vec{f}, \vec{v})_{\Omega}, \quad (4.15)$$

pro všechna $\vec{v} \in \mathbf{V}_{div}$, kde máme bilineární formu

$$a(U, V) = \nu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_{\Omega}. \quad (4.16)$$

4.4.1 Existence a jednoznačnost řešení

Bilineární forma (4.16) je spojitá, symetrická a v důsledku Friedrichsovy nerovnosti \mathbf{V}_{div} -eliptická, viz [2]. Dle Lax-Milgramovy věty (2.6) existuje právě jedno řešení $\vec{u} \in \mathbf{V}_{div}$. Dále je třeba najít tlak $p \in L^2(\Omega)$.

Existence tlaku je popsána v [8] (lemma 9.1.1 v kapitola 9), lemma říká, že pokud \vec{u} splňuje slabou formulaci Stokesova problému (4.15) pro libovolné $\vec{v} \in \mathbf{V}_{div}$, pak existuje funkce $p \in L^2(\Omega)$ pro kterou platí

$$\nu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega = (\vec{f}, \vec{v})_\Omega.$$

Následně definujeme prostor, viz [2]

$$Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ \eta \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \eta dx = 0 \right\}.$$

Pak slabá formulace Stokesova problému s tlakem, kde hledáme řešení $\vec{u} \in V$ a $p \in Q$ vypadá následovně

$$\begin{aligned} \nu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega &= (\vec{f}, \vec{v})_\Omega, \\ -(\nabla \cdot \vec{u}, q)_\Omega &= 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

kde máme formy $a(U, V)$ a $L(V)$, kde $U = (\vec{u}, p)$ a $V = (\vec{v}, q)$, takové, že

$$\begin{aligned} a(U, V) &= \nu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})_\Omega + (\nabla \cdot \vec{u}, q)_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega, \\ L(V) &= (\vec{f}, \vec{v})_\Omega, \end{aligned}$$

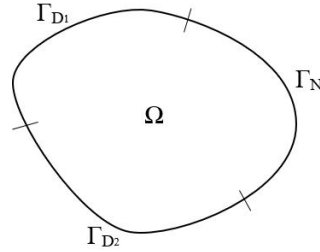
pro libovolné $\vec{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ a $q \in L_0^2(\Omega)$.

4.5 Stacionární Navier-Stokesův problém

Vezmeme Navierovy-Stokesovy rovnice (3.11) a budeme uvažovat stacionární proudění. Mějme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s Lipschitzovsky hladkou hranicí $\partial\Omega$. Hledáme funkce $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \text{ v } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ v } \Omega, \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde člen $\nu > 0$ je koeficient vazkosti, \vec{u} je rychlost proudění tekutiny a p je kinematický tlak. Člen $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ je nelineární člen z materiálové derivace. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \cup \Gamma_N$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}, \Gamma_N$ jsou vzájemně disjunktní části hranice, viz obr. 4,



Obrázek 4: Části oblasti

kde předepíšujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_1}} = (0, 0), \quad \text{b) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_2}} = \vec{u}_{D_2}, \quad \text{c) } -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = -(p - p_{ref})\vec{n} \text{ na } \Gamma_N. \quad (4.19)$$

Pro odvození slabé formulace Navier-Stokesova problému se nejprve omezíme na případ, kdy uvažujeme pouze nulovou Dirichletovu okrajovou podmínku Γ_{D_1} na celé hranici $\partial\Omega$ a referenční tlak $p_{ref} = 0$. Pak slabou formulaci získáme přenásobením první rovnice testovací funkcí $\vec{v} \in \mathbf{V}$ a zintegrujeme. Dostaneme

$$\int_{\Omega} (-\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p) \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega.$$

Dále postupujeme stejně jako v případě Stokesova problému (4.4), v této formulaci přibude člen

$$\int_{\Omega} ((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) \cdot \vec{v} d\Omega = c(\vec{u}; \vec{u}, \vec{v})_{\Omega},$$

což je trilineární forma. Forma c je spojitá (důkaz viz [2]) a navíc pro libovolné funkce $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ platí

$$c(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w}) = -c(\vec{u}; \vec{w}, \vec{v}).$$

Tedy forma $c(\vec{u}; \vec{v}, \vec{v}) = 0$ pro libovolné $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$. Pak máme slabou formulaci Navier-Stokesova problému, kde hledáme funkce $\vec{u} \in \mathbf{V}$ a $p \in Q$, takové že pro libovolné $\vec{v} \in \mathbf{V}$ a $q \in L_0^2(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_\Omega + c(\vec{u}; \vec{u}, \vec{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega &= (\vec{f}, \vec{v})_\Omega, \\ -(\nabla \cdot \vec{u}, q)_\Omega &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Následně se omezíme na podprostor $\mathbf{V}_{div} \subset \mathbf{V}$, pak lze problém (4.18) přeformulovat následovně. Hledáme funkci $\vec{u} \in \mathbf{V}_{div}$ takovou, že pro libovolné $\vec{v} \in \mathbf{V}_{div}$ platí

$$\nu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_\Omega + c(\vec{u}; \vec{u}, \vec{v})_\Omega = (\vec{f}, \vec{v})_\Omega. \tag{4.21}$$

Pak pokud rychlost \vec{u} řeší problém (4.21), pak (\vec{u}, p) řeší problém (4.20), jak je uvedeno v [2] nebo [8]. Máme tedy slabou formulaci Navier-Stokesova problému s tlakem (4.20), kde máme formy $a(U; U, V)$ a $L(V)$, kde $U = (\vec{u}, p)$ a $V = (\vec{v}, q)$, takové, že

$$\begin{aligned} a(U; U, V) &= \nu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_\Omega + c(\vec{u}; \vec{u}, \vec{v})_\Omega + (\nabla \cdot \vec{u}, q)_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega, \\ L(V) &= (\vec{f}, \vec{v})_\Omega, \end{aligned}$$

kde hledáme funkce $\vec{u} \in \mathbf{V}$ a $p \in Q$ pro libovolné $\vec{v} \in \mathbf{V}$ a $q \in L_0^2(\Omega)$.

Poznámka 4.1 *Nenulové okrajové podmínky Stokesova problému (4.12) a Navier-Stokesova problému (4.19), zavedeme u konkrétních numerických výpočtů v kapitole 6.*

5 Metoda konečných prvků

Abychom mohli nalézt aproximace řešení slabých formulací daných problémů, budeme používat metody konečných prvků. Nejprve uvedeme diskretizaci abstraktního problému v Banachově prostoru V . Dále rozebereme diskretizaci nelineárního a vektorového problému. Následně popíšeme praktickou realizaci v programu a metody řešení soustav lineárních rovnic.

5.1 Diskretizace abstraktního problému

Uvažujme nejprve abstraktní problém. Hledáme funkci $u \in V$ takovou, že

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (5.1)$$

kde V je nějaký Banachův prostor a formy $a(u, v)$ a $L(v)$ splňují předpoklady Lax-Milgramovi věty (2.6). Uvažujme podprostor V_h prostoru V , $V_h \subset V$, který má konečnou dimenzi $\dim V_h = N_h < \infty$. Necht'

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$$

tvoří bázi prostoru V_h . Libovolný prvek prostoru $v \in V_h$ lze tedy zapsat jako lineární kombinaci

$$v = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \quad (5.2)$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N_h$.

Pak lze formulovat diskrétní problém tak, že hledáme takové $u_h \in V_h$, že platí

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (5.3)$$

Vzhledem k předpokladům existuje právě jedno řešení problému (5.3).

Řešení problému

Pokud shrneme zde uvedené, budeme oproti původnímu problému řešit diskrétní Galerkinův problém (5.3) a pokud ho nalezneme, pak budeme znát i řešení původního Galerkinova problému, viz např. [2]. Řešení diskrétního Galerkinova problému nalezneme následovně.

Řešení u_h diskrétního problému (5.3), vyjádříme jako lineární kombinaci

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \quad (5.4)$$

kde $N_h < \infty$ je dimenze prostoru $V_h \subset V$ s bází $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$. Řešení (5.4) dosadíme za u_h v diskrétním Galerkinově problému (5.3) a užitím bilinearity formy $a(u_h, v_h)$, dostaneme pro libovolné $j = 1, \dots, N$

$$\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad (5.5)$$

kde označíme $a(\varphi_i, \varphi_j) = a_{i,j}$ a $L(\varphi_i) = b_i$. Tedy rovnice (5.3) lze přepsat následovně

$$\underline{A} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (5.6)$$

kde \underline{A} je matice tuhosti a \vec{b} vektor zatížení. Dále popíšeme jak sestavit matici \underline{A} .

Sestavení matice tuhosti

Ukážeme pro konkrétní problém (4.1). Nejprve uvažujme přípustnou triangulaci τ_h výpočetní oblasti Ω . Prostor V_h volíme $V_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in P_1(K) \forall K \in \tau_h\}$, kde $P_1(K)$ označujeme prostor lineárních polynomů, viz [2]. Prvky matice tuhosti \underline{A} vyjádříme následovně

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx.$$

Vektor zatížení \vec{b}

$$b_i = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_i dx.$$

Rozepíšeme výpočet prvků matice tuhosti \underline{A} užitím triangulace τ_h

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$$

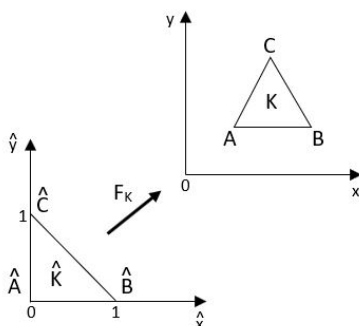
a prvky vektoru zatížení \vec{b}

$$b_i = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_i d\Omega = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \cdot \varphi_i dx dy.$$

Bázové funkce na \hat{K} lze volit jako polynomy 2., 3. a vyššího stupně. Pro integraci polynomů vyšších stupňů se používá numerická kvadratura, více viz [8]. Pro výpočet integrálů přes element K užíváme koncept referenčního elementu.

Koncept referenčního trojúhelníku

Pro výpočet na jednotlivých trojúhelnících K triangulace, využíváme ekvivalentní afinní zobrazení mezi trojúhelníkem K v souřadnicovém systému triangulace a jednotkovým referenčním trojúhelníkem \hat{K} , viz obr. 5.



Obrázek 5: Afinní zobrazení

Zobrazení $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ můžeme zapsat následovně

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Použijeme větu o substituci, tedy

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \left| \frac{x = \psi(t)}{dx = \psi'(t) dt} \right| = \int_{\hat{\Omega}} f(\psi(t)) \cdot |\psi'| dt,$$

kde $|\psi'|$ je absolutní hodnota Jacobiánu

$$|\psi'| = \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix},$$

kde matici determinantu značíme \underline{B}_K . Speciálně pro $f(x) = 1$ získáváme důležitý výsledek

$$|K| = \det \underline{B}_K \cdot |\hat{K}|.$$

Bázové funkce na referenčním elementu \bar{K} jsou definovány následovně

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y},\end{aligned}\tag{5.8}$$

a bázové funkce na trojúhelníku K lze vyjádřit

$$\begin{aligned}\varphi_A(x, y) &= \hat{\varphi}_{\hat{A}}(F_K^{-1}\hat{x}, \hat{y}), \\ \varphi_B(x, y) &= \hat{\varphi}_{\hat{B}}(F_K^{-1}\hat{x}, \hat{y}), \\ \varphi_C(x, y) &= \hat{\varphi}_{\hat{C}}(F_K^{-1}\hat{x}, \hat{y}).\end{aligned}$$

Derivace bázových funkcí

Potřebujeme derivace bázových funkcí $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ na elementu K vzhledem k volbě prostoru V_h . Tyto lze vyjádřit viz [2], následovně

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial y},\end{aligned}$$

kde pokud vyjdeme z bázových funkcí (5.8) a užijeme afinního zobrazení (5.7), tak vidíme, že všechny derivace jsou konstanty.

Odhad chyby řešení

K odhadu chyby řešení lze užít následující lemma, viz [2].

Lemma 5.1 (*Céovo lemma*)

Nechť u je řešením Galerkinova problému a u_h je řešení diskrétního Galerkinova problému. Pak platí

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h.\tag{5.9}$$

Normu $\|\cdot\|_V$ lze volit jako seminormu $|\cdot|_{H^1}$. Za předpokladu, že $u \in H^{(k+1)}(\Omega)$, jsou užity prvky řádu k a $(\tau_h)_{h \in (0, h_0)}$ je regulární systém triangulací, viz [2], pak platí odhad chyby

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot h \cdot |u|_{H^{(k+1)}(\Omega)},$$

kde h je krok sítě. Speciálně pro lineární prvky $k = 1$ platí

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot h \cdot |u|_{H^2(\Omega)}.$$

5.2 Nelineární problém

Uvažujeme nelineární problém na Banachově prostoru V

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v), \quad (5.10)$$

kde L je lineární forma v prostoru V a \mathcal{A} je nelineární forma v u , ale lineární ve v . Místo řešení nelineárního problému (5.10), zavedeme linearizaci formy \mathcal{A} , tak že $\mathcal{A}(u, v) = a(u; u, v)$, viz [9] nebo [2]. Hledáme řešení linearizovaného problému

$$a(u; u, v) = L(u, v)$$

kde hledáme řešení $u \in V$. Forma $a(u, v, w)$ je lineární v proměnných v a w , forma $L(u; v)$ je lineární v proměnné v . Řešení budeme hledat opakovaním řešení linearizovaného problému.

$$a(u^k, u^{k+1}, v) = L(u^k, v) \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

kde u^0 je nějaká počáteční aproximace řešení. Problém řešíme dokud není splněno

$$\|u^n - u^{n+1}\| \leq \epsilon,$$

pro nějaké $\epsilon > 0$.

5.3 Vektorový problém

Zde hledáme vektorovou funkci U . Tedy hledáme vektorovou funkci např. $U = (\vec{u}, p)$, kde $\vec{u} = (u, v)$ je vektor rychlosti a p tlak, jak je uvedeno v [9]. Budeme používat vektorový prostor $\mathbf{X} = X \times X \times L^2(\Omega)$, kde $X = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$.

Pak budeme uvažovat testovací funkce $V = (\vec{v}, q) \in \mathbf{X}$, kterými přenásobíme problém a zintegrujeme přes Ω . Po aplikaci Greenovy věty dostáváme slabou formulaci problému, kdy hledáme $U \in \mathbf{X}$ takové, že platí

$$a(U, V) = L(V) \quad \forall V \in \mathbf{X}, \quad (5.11)$$

kde $a(U, V)$ je bilineární forma $L(V)$ lineární forma. Při diskretizaci vektorového problému postupujeme stejně jako v případě skalárního, jen máme místo skalárních funkcí vektorové.

5.4 Praktická realizace

Výpočet je proveden pomocí knihovny CFEM, viz [9]. Jedná se o knihovnu realizovanou programovacím jazykem C pro výpočty metodou konečných prvků. Knihovna CFEM obsahuje složku `src` obsahující skripty, `bin` obsahující zkompileované objekty, `iniparser` s potřebnými knihovnami pro výpočet a složku `tests`, kde jsou definovány jednotlivé problémy.

V programu pracujeme se slabými formulacemi dle námi daných problémů, např. pro Poissonovu rovnici (4.1) je slabá formulace realizována následovně

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega}_{adx} + \underbrace{\int_{\Gamma_Z} \alpha u v dS}_{ads} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega}_{Ldx} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} \varphi v dS + \int_{\Gamma_Z} \alpha \Psi v dS}_{Lds}, \quad (5.12)$$

kde `adx`, `ads`, `Ldx`, `Lds` jsou v kódu jednotlivé funkce. Integrace je realizována programem, viz [9].

Okrajové podmínky jsou použity pomocí funkce `getBC`, která hraničním bodům dle označení přidělí typ okrajové podmínky (např. Dirichletovu nebo Neumanovu okrajovou podmínku). Označení okrajových bodů je dáno z programu GMSH.

V programu jsou diskretizace jak skalárního, tak i nelineárního a vektorového problému, nejprve popíšeme skalární problém.

Skalární problém

Pro řešení skalárního problému máme v programu definovanou metodu `scalarproblem`. Kde rozlišujeme Dirichletovské a Neumanovské okrajové podmínky. Dirichletovy okrajové podmínky jsou definovány funkcí s ukazateli `isfixed` a `val`, kde první nám specifikuje část hranice dle označení `mark`, kde má být použita okrajová podmínka a druhý udává hodnotu na hranici, viz [9]. Pro části hranice označené GAMMAD

```
void getBC(bpoint *P, short isfixed[], double val[])
{
    val[0] = 0.0; isfixed[0] = FALSE;
    if (P->mark == GAMMAD)
    {
        isfixed[0] = TRUE; val[0] = 0;
    }
}
```



```

    }
}

```

zde je Dirichletova okrajová podmínka předepsaná na části hranice `GAMMAD` a vrací hodnotu 0

Ve formách (5.12) integrujeme skalární funkci u , jejíž funkční hodnota je $u.f$ a partiální derivace $u.x$ a $u.y$ (typu `double`), viz [9]. Obdobně je volána funkce v . Zavedení bilineární formy adx vypadá následovně

```

double adx(point *P, scalar *UU, scalar *U, scalar *V)
{
    return nu * (U->fx * V->fx + U->fy * V->fy);
}

```

Podobně lineární forma Ldx :

```

double Ldx(point *P, scalar *UU, scalar *V)
{
    return f(P->x, P->y) * V->f;
}

```

Následně bilineární forma ads dána Newtonovou okrajovou podmínkou

```

double ads(bpoint *P, scalar *UU, scalar *U, scalar *V)
{
    if(P->mark == GAMMAC)
    {
        return (alpha * U->f * V->f);
    }
    else
    {
        return 0;
    }
}

```

Lineární forma Lds definovaná Neumanovou a Newtonovou okrajovou podmínkou je realizována následovně

```

double Lds(bpoint *P, scalar *UU, scalar *V)
{
    if(P->mark == GAMMAC)
    {
        return (Fi(P->x, p->y) * V->f);
    }
    else if(P->mark == GAMMAN)
    {
        return (alpha * Psi(P->x,P->y) * V->f);
    }
    else
    {
        return 0;
    }
}

```

Diskretizace metodou konečných prvků skalárního problému je definována v objektu `fespace`. Prostor konečných prvků obsahuje kvadratury `myQ` na daném elementu (trojúhelníku, víceúhelníku či přímce) typu `refquadrature` a specifikace prvků (lineární, kvadratické), viz [9]. V neposlední řadě zavádíme triangulaci sítě typu `gmesh`.

Program začne nahráním sítě z dané složky, inicializuje kvadraturu, prostor konečných prvků a báze funkce, takto

```

Gmesh_Load(&M, ConStr(sources,fnames[ifn]));
Quadraturelib_Init(&myQ, 3);
Febase_Init(&mybs, LINEAR_FE);
Fespace_Init(&V, &M, &myQ, &mybs);

```

Následně je problém daný formami `adx`, `Ldx`, `ads`, `Lds` s okrajovými podmínkami vyřešen v prostoru V následovně

```

Scalarproblem_SetBoundaryConditions(&V.msp, getBC);
Scalarproblem_SetForms(&V.msp, adx, Ldx, ads, Lds);

```

Výsledek diskretizace je systém lineárních rovnic, matice tuhosti A ve formátu `rcf` (row

compressed format data storage), vektor `rhs` (right-hand side of the equation) a vektor řešení `sol`, viz [9]. Vektory jsou alokovány takto

```
n = Fespace_GetDimension(&V);
rhs = Vector_Allocate(n);
sol = Vector_Allocate(n * 5);
```

Teď jsme schopni problém diskretizovat a vyřešit

```
Fespace_DiscretizeLinear(&V, &A, rhs);
RCF_Solve(&A, rhs, sol);
```

Nakonec program uloží data ve formátu vtk a dealokujeme paměť.

Vektorový problém

Vektorový problém je řešen obdobně co problém skalární, avšak nevolá se skalární prostor `fespace`, nýbrž prostor vektorový `flowspace`, viz [9]. Skalární funkce jsou nahrazeny vektorovými, tedy místo `scalar` je `flowvalue`. Máme vektorové funkce $U = (u_1, u_2, p)$ s funkčními hodnotami u, v, p a jejich parciálními derivacemi ux, uy, vx, vy, px, py , obdobně funkce $V = (v_1, v_2, q)$.

Okrajové podmínky jsou zavedeny podobně jako pro skalární problém, tedy např.

```
void getBC(bpoint *P, short isfixed[], double val[])
{
    val[0] = 0.0; isfixed[0] = FALSE;
    val[1] = 0.0; isfixed[1] = FALSE;
    val[2] = 0.0; isfixed[2] = FALSE;
    if (P->mark == GAMMAD)
    {
        isfixed[0] = TRUE; val[0] = 0.;
        isfixed[1] = TRUE; val[1] = 0.;
    }
}
```

kde ukazatele `isfixed` a `val` jsou teď vektory pro vektor $U = (u_1, u_2, p)$, funkce vrací hodnoty `val` na označených hranicích (`mark`) pro hodnoty rychlostí u_1, u_2 a tlaku p , viz [9].

Integrace formy adx pro vektorový Stokesův problém 4.11 vypadá následovně

```
double adx(point *P, flowvalue *UU, flowvalue *U, flowvalue *V)
{
    double nu = 0.1;
    return nu * (U->ux * V->ux + U->uy * V->uy) +
           + nu * (U->vx * V->vx + U->vy * V->vy) -
           - (V->ux + V->vy) * U->p + (U->ux + U->vy) * V->p;
}
```

kde $V \rightarrow u$, $V \rightarrow v$, $V \rightarrow p$ jsou části testovacího vektoru $V = (v_1, v_2, q)$, parametr UU se používá v případě nelineárního problému. Obdobně lineární forma Ldx

```
double Ldx(point *P, flowvalue *UU, flowvalue *V)
{
    return f1(P->x, P->y) * V->u + f2(P->x, P->y) * V->v;
}
```

kde vektorová funkce $f(f_1, f_2)$ je dána funkcemi `double f1(double, double)` a `double f2(double, double)`. Parametr UU je pro nelineární případ a není zde použit, viz [9]. Dále je program totožný se skalárním problémem, jen místo `fespace` voláme `flowspace`

```
Flowbase_Init(&mybs, TAYLORHOOD_FFE);
Flowspace_Init(&W, &M, &myQ, &mybs);
Flowvalueproblem_SetBoundaryConditions(&W.mfp, getBC);
Flowvalueproblem_SetForms(&W.mfp, adx, Ldx, ads, Lds);
```

Diskretizace vypadá obdobně

```
n = Flowspace_GetDimension(&W);
Flowspace_DiscretizeLinear(&W, sol, &A, rhs);
```

Nelineární problém

Nelineární problém je řešen stejně jako problém skalární, liší se až u diskretizace problému, kde zavádíme linearizaci \bar{u} , kterou inicializuje funkce

`Fespace_Interpolate(&V, sol), f`), viz [9]. Následně program provádí smyčku přes daný počet iterací `ITER`

```

for(i = 0; i < ITER; i++)
{
    Flowspace_Discretize(&V, sol1, &A, rhs);
    RCF_Solve(&A, rhs, sol, &par);
    err = Vector_Update(sol, 1, sol1, n);
    if(err < 1e-16)
        break;
}

```

V cyklu se problém diskretizuje pomocí funkce `Fespace_Diskretize(&V, sol, &A, rhs)` a řeší se soustava rovnic. V každém cyklu počítá reziduum mezi řešením `sol` a předchozím řešením `sol1` z minulé časové vrstvy funkcí `Vektor_Update(sol, omega, sol, n)`, viz [9]. Tato funkce vrací reziduum a mění hodnotu \bar{u} . Zde se používá tzv. relaxační koeficient ω který ovlivňuje nové řešení od starého, tak že $\bar{u} = (1 - \omega)\bar{u} + \omega u$ pro $\omega \in (0, 1)$, více viz [8]. Pokud hodnota chyby mezi starým řešením u a novým \bar{u} je menší než dané $\epsilon = 1 \cdot 10^{-16}$, pak jsou residua zkonvergovaná a řešení u se ukládá.

5.4.1 Numerické řešení diskrétního problému

V této kapitole budeme užívat zjednodušený zápis pro vektory \mathbf{x} a matice \mathbb{A} aby byli algoritmy metod lépe čitelné. Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (5.13)$$

Nejprve uvažujeme případ, kdy matice \mathbb{A} je symetrická a pozitivně definitní. To odpovídá problému vedení tepla bez konvektivního členu. Pro řešení takové soustavy lineárních rovnic můžeme použít buď metody přímé (např. Gaussovu eliminaci, LU-faktorizaci, Choleského faktorizaci) nebo iterační (např. metody největšího spádu nebo sdružených gradientů), více viz [2] nebo [8]. Pro numerické řešení Galerkinovy aproximace Laplaceova problému (4.1) byla použita iterační metoda sdružených gradientů.

Dále v případě soustav rovnic vzniklých diskretizací Navierových-Stokesových rovnic dostáváme soustavu, která není symetrická. Pro tento případ je buď užít přímý řešič, nebo je soustava řešena metodou např. GMRES s vhodným předpodmíněním, viz [10].

Symetrické matice - metoda sdružených gradientů

V této části uvažujeme symetrickou pozitivně definitní matici \mathbb{A} . Metoda sdružených gradientů patří mezi efektivnější metody řešení soustav lineárních rovnic. Budeme numericky řešit problém hledání minima kvadratického funkcionálu, viz [2]

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \quad (5.14)$$

což obecně vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$ operací ale pro řídké matice lze počet operací snížit na $\mathcal{O}(n)$, jak je uvedeno v [8]. V metodě volíme optimální krok α_k v každém kroku metody, směry \mathbf{d}_k jsou voleny tak, aby byly \mathbb{A} -ortogonální, tedy aby platilo

$$(\mathbf{d}_i)^T \mathbb{A} \mathbf{d}_j = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

Vzhledem k tomu, že matice \mathbb{A} je symetrická pozitivně definitní, lze ukázat, že $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{A}}$ je skalární součin, jak je ukázáno v [2].

Věta 5.2 *Mějme matici \mathbb{A} symetrickou pozitivně definitní $n \times n$. Nechť jsou směry $\mathbf{d}_i, i = 0, \dots, n-1$, voleny \mathbb{A} -ortogonálně, tedy*

$$\mathbf{d}_i^T \mathbb{A} \mathbf{d}_j = 0 \text{ pro } 0 \leq i < j \leq n-1.$$

Nechť posloupnost (\mathbf{x}^k) je definována pro libovolné \mathbf{x}^0 předpisem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k \text{ pro } k = 0, 1, \dots,$$

kde α_k je optimální krok ve směru \mathbf{d}^k , tedy

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k}{(\mathbf{d}^k)^T \mathbb{A} \mathbf{d}^k}.$$

Pak existuje $K \leq n$ takové, že \mathbf{x}^K je přesné řešení \mathbf{x}^ .*

Důkaz věty (5.2) viz [2]. Předchozí věta v případě volby \mathbb{A} -ortogonální minimalizačních směrů zaručuje konvergenci nejpozději v n -krocích.

Nechť $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a volme $\mathbf{d}^0 = \mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^0$, potom algoritmus metody sdružených gradientů vypadá následovně, viz [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k, \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{d}^k}{(\mathbf{d}^k)^T \mathbb{A} \mathbf{d}^k}, \\ \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{k+1}, \\ \mathbf{d}^{k+1} &= \mathbf{r}^{k+1} - \beta_k \mathbf{d}^k, \\ \beta_k &= \frac{(\mathbf{r}^{k+1})^T \mathbb{A} \mathbf{d}^k}{(\mathbf{d}^k)^T \mathbb{A} \mathbf{d}^k}, \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots$.

Volba parametrů v algoritmu:

- α_k je optimální volba kroku ve směru \mathbf{d}^k
- β_k zaručuje \mathbb{A} -ortogonalitu \mathbf{d}^{k+1} vůči \mathbf{d}^k , neboť platí

$$(\mathbf{d}^{k+1}, \mathbf{d}^k)_{\mathbb{A}} = (-\mathbf{r}^{k+1}, \mathbf{d}^k)_{\mathbb{A}} + \beta_k(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^k)_{\mathbb{A}} = 0,$$

kde jsme užili skalárního součinu $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{A}} = \mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{y}$.

Pro urychlení algoritmu lze používat předpodmínění matice \mathbb{A} , o předpodmínění více viz [2].

Řešení soustav s nesymetrickou maticí - GMRES

Řešíme soustavu lineárních rovnic s obecně nesymetrickou maticí \mathbb{A}

$$\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

jednou z možností je přenásobení zleva maticí \mathbb{A}^T , tím získáme soustavu rovnic

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbb{A}^T \mathbf{b},$$

kde matice $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ je symetrická pozitivně definitní a je možné ji řešit metodou konjugovaných gradientů. Takové metodě se pak říká CGNR (Conjugate Gradient Normal Residual), její konvergence je ale velmi pomalá neboť matice $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ má číslo podmíněnosti κ^2 , viz [10]. Je dokázáno, že metody zkonvergují maximálně v n iteracích.

GMRES metoda

Pro řešení systémů lineárních rovnic s nesymetrickou maticí \mathbb{A} lze použít například metodu GMRES (Generalized Minimal Residual). Jedná se o iterační metodu která v každé iteraci zmenšuje normu residua přes Krylův podprostor \mathcal{K}_i , více viz [8]. Výhodou této metody je, že můžeme dosáhnout řešení i v případě, že má matice \mathbb{A} indefinitní symetrickou část, viz [8].

Metoda je založenou na Arnoldiho procesu, který generuje ortonormální vektory. V každém kroku metody vezmeme Krylův podprostor $\mathcal{K}_i(\mathbf{r}_0, \mathbb{A})$ a pomocí Arnoldiho algoritmu najdeme ortonormální bázi prostoru \mathcal{K}_i .

Nejprve vytvoříme ortonormální bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ v Krylově podprostoru $\mathcal{K}_i(\mathbb{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span}(\mathbf{r}_0, \mathbb{A} \mathbf{r}_0, \dots, \mathbb{A}^{i-1} \mathbf{r}_0)$. Aproximace řešení \mathbf{r}_i je volena tak, aby platilo

$$\mathbf{x}_i = \arg_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}_i} \min \|\mathbf{b} - \mathbb{A} \mathbf{x}\|, \quad (5.15)$$

tedy \mathbf{x}_i je dán lineární kombinací vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$. Pro výpočet těchto vektorů se používá Arnoldiho algoritmus, kde volíme počáteční vektor \mathbf{v}_1 , tak že $|\mathbf{v}_1| = 1$ a počet kroků m , pak Arnoldiho algoritmus vypadá následovně, viz [10]

$$\begin{aligned}
& \text{Pro } j = 1, \dots, m \\
& \quad \text{Pro } i = 1, \dots, j \\
& \quad \quad h_{i,j} = (\mathbb{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \\
& \quad \quad \hat{\mathbf{v}}_{j+1} = \mathbb{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j}\mathbf{v}_i \\
& \quad \quad \text{konec cyklu pro } i \\
& \quad \quad h_{j+1,j} = |\hat{\mathbf{v}}_{j+1}| \\
& \quad \quad \mathbf{v}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{j+1}}{h_{j+1,j}} \\
& \quad \quad \text{konec cyklu pro } j
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Algoritmus vytváří matici koeficientů \mathbb{H}_i v horním Hessenbergově tvaru, viz [10]. Minimalizace normy reziduí závisí na matici koeficientů \mathbb{H}_i , která se transformací (elementární rotací) převede na trojúhelníkovou matici, ze které se dají získat Arnoldiho ortonormální vektory takové, že norma residua aproximace \mathbf{x}_i je minimalizována přes Krylův podprostor \mathcal{K}_i , jak je popsáno v [8]. Popis GMRES metody vypadá následovně

- (i) volíme počáteční odhad řešení \mathbf{x}_0 a počítáme residuum $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}_0$, $\beta := |\mathbf{r}_0|$ a $\mathbf{v}_1 := \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}$.
- (ii) aplikujeme Arnoldiho proces (5.16) a zavedeme matici $\mathbb{H}_m(m+1) \times m$ s nenulovými prvky $h_{i,j}$.
- (iii) zformulujeme aproximaci řešení $\mathbf{x}_m := \mathbf{x}_0 + \mathbb{V}_m\mathbf{y}_m$, kde \mathbf{y}_m minimalizuje $J(\mathbf{y}) := |\beta\mathbf{e}_1 - H_m\mathbf{y}|$ pro všechny vektory $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, kde \mathbf{e} je jednotkový vektor.
- (iv) Znovu opakujeme proces (i) - (iv) dokud nedocílíme požadovaného residua.

Výhodou metody GMRES je, že nemůže dojít ke kolapsu metody jako např. pro GCR metodu která se může zhroutit pokud není matice \mathbb{A} kladná reálná, tedy její symetrická část není pozitivně definitní, viz [8].

Tedy GMRES metoda nám dává přesné řešení po nejvýše n iteracích, n je dimenze matice \mathbb{A} . V případě, že matice \mathbb{A} má symetrickou část \mathbb{S} pozitivně definitní, pak metoda

vždy zkonverguje. Pokud ale matice \mathbb{S} není pozitivně definitní, pak metoda konverguje velmi pomalu a může dojít k jejímu zhroucení, více viz [8] nebo [10]. Tudíž pro řešení Stokesova a Navier-Stokesova problému uijeme předpodmínění.

Řešení soustavy vzniklé diskretizací Navierových-Stokesových rovnic, vede na řešení problému sedlového bodu $\mathbb{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tedy soustavy rovnic ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^* \\ \mathbb{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

kde matice \mathbb{M} je hmotnostní matice. V literatuře je uvedeno několik možností užití matice předpodmínění, viz [10]. Ideální předpodmínění matice soustavy \mathbb{M} by bylo maticí \mathbb{P} ve tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^* \\ 0 & \mathbb{S} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

kde matice \mathbb{S} je Schurův doplněk $\mathbb{S} = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^*$, více viz [10]. Vzhledem k náročnosti výpočtu Schurova doplnku \mathbb{S} je místo matice \mathbb{S} vhodné volit např. $\mathbb{S} \approx \alpha \mathbb{M}_p$, kde \mathbb{M}_p je matice hmotnosti pro lineární prvky. Případně $\mathbb{S} \approx \mathbb{Q}$, kde \mathbb{Q} je hlavní diagonála matice \mathbb{M}_p , více viz [10]. Schurův doplněk je symetrický a pozitivně definitní. Matice \mathbb{P} pak má tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^* \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

Předpodmíněná soustava pak má tvar

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{M} \mathbf{x} = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{b}, \quad (5.19)$$

která je již možná řešit metodou GMRES, viz [10].

Řešení pomocí knihovny UMFPACK

Knihovna UMFPACK slouží k řešení nesymetrických řídkých systémů lineárních rovnic pomocí multifrontální LU faktorizace, viz [11]. Knihovna je součástí balíčku SuiteSparse. Vstupními daty pro UMFPACK jsou matice v CSC formátu (zapsaná ve třech polích) a vektor pravé strany (taktéž pole).

Výpočty pomocí knihovny UMFPACK byly užity na problém konvekce-difuze, Stokesův problém a Navier-Stokesův. Výpočet byl proveden na akademickém serveru Triton, kde je knihovna SuiteSparse implementována. Pro spuštění procesu na serveru Triton bylo nejprve třeba nahrát knihovnu SuiteSparse příkazem `module load SuiteSparse`, následně pomocí příkazu `qsub` spustit proces a příkazem `qstat` proces sledovat.

6 Numerické výsledky

V této kapitole spočítáme numerické výsledky uvedených problému na různých testovacích případech.

6.1 Laplaceův problém

Ukážeme nejprve stacionární případ vedení tepla, tedy Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad (6.1)$$

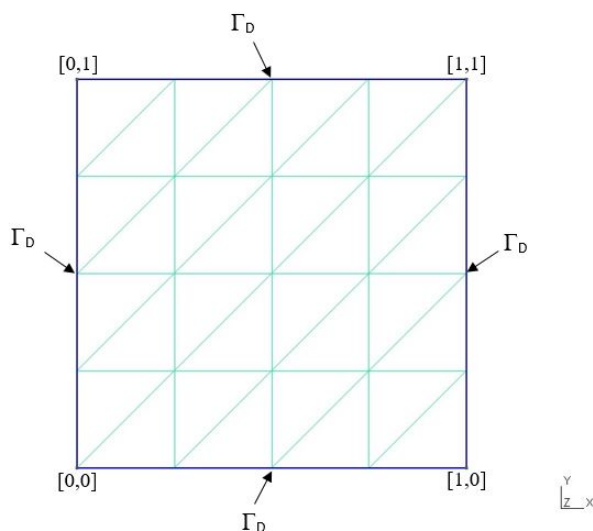
kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_Z$, kde $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_Z$ jsou vzájemně disjunktní části hranice, kde předepisujeme okrajovou podmínku

$$u = 0 \text{ na } \Gamma_D. \quad (6.2)$$

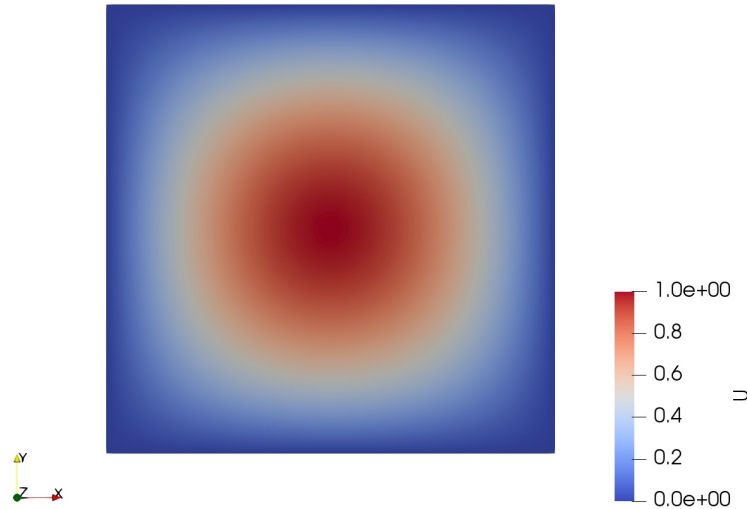
Máme odvozenou slabou formulaci problému, viz (4.3), tedy máme formu $a(u, v)$ a $L(v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega, \\ L(v) &= (f, v)_\Omega. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Pro výpočet volíme funkci $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$ a oblast výpočtu viz obr. 6.



Obrázek 6: Oblast výpočtu



Obrázek 7: Numerické řešení Laplaceova problému, síť $\frac{H}{32}$

Na obr. 7 máme numerické řešení Galerkinovy aproximace Laplaceova problému na pravidelné síti se zjemněným krokem $h \approx 0,01$. Numerický výpočet je třeba ověřit.

Napočítáme problém (6.1) na více sítích, a protože známe analytické řešení, známe funkci f a její derivace, můžeme vypočítat vzdálenosti na sítích dle norem. Máme seminormu na prostoru $H^1(\Omega)$

$$H^1 := \|u - u_e\|_{H^1(\Omega)}. \quad (6.4)$$

Dále normy na prostoru $L_2(\Omega)$, viz (2.1)

$$L_2 := \|u - u_e\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u - u_e|^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad (6.5)$$

součtovou diskrétní normu pro hodnoty ve vrcholech

$$l_1 := \|u - u_e\|_1 = \sum_{i=1, \dots, n} |u(P_i) - u_e(P_i)| \quad (6.6)$$

a maximovou diskrétní normu pro hodnoty ve vrcholech

$$l_{\infty} := \|u - u_e\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |u(P_i) - u_e(P_i)|, \quad (6.7)$$

kde u je přibližné numerické řešení a u_e je exaktní řešení, P_i jsou vrcholy triangulace (n -jejich počet). Známe analytické řešení pro zvolenou funkci $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$

a její derivace

$$u_e = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y),$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \pi \cos(\pi x) \cdot \sin(\pi y),$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = \pi \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi y).$$

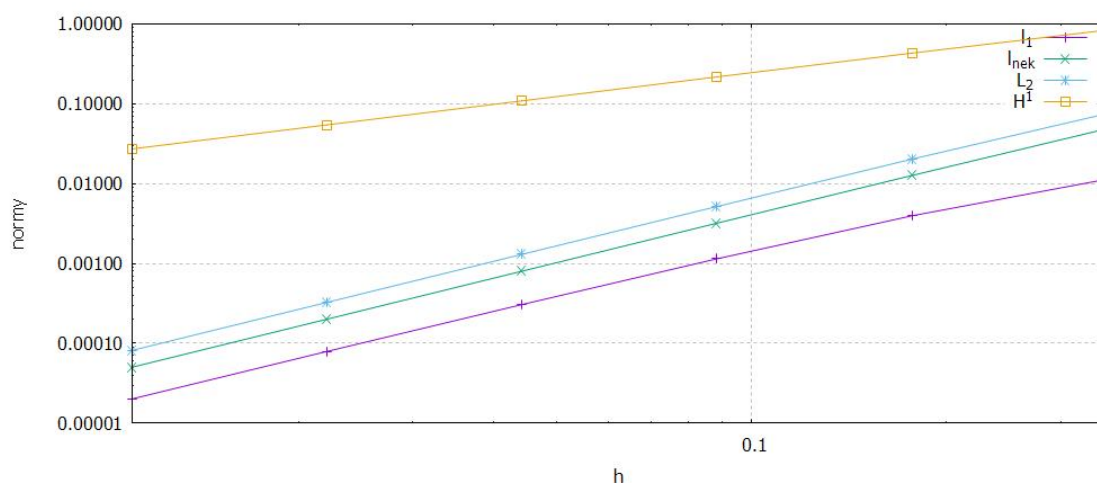
Máme-li výsledky na sítích s kroky $h_1 > h_2$ a chyby $e_1 > e_2$, pak řád konvergence jednotlivých norem spočteme následovně

$$p = \frac{\log\left(\frac{e_1}{e_2}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \quad (6.8)$$

V tab. 1 vidíme výsledky norem a jejich řád.

Tabulka 1: Parametry sítě, normy a řád konvergence

sítě	krok h	počet ele.	H^1	L_2	l_1	l_∞	pH^1	pL_2	pl_1	pl_∞
H	0,3536	32	0,8403	0,07562	0,29123	0,0488	-			
$\frac{H}{2}$	0,1768	128	0,432	0,02033	0,0777	0,0127	1,523	1,895	0,959	1,944
$\frac{H}{4}$	0,0884	512	0,2176	0,00518	0,0198	0,0032	1,789	1,972	0,989	1,986
$\frac{H}{8}$	0,0442	2048	0,1089	0,0013	0,005	0,0008	1,902	1,993	0,997	1,997
$\frac{H}{16}$	0,0221	8192	0,0545	0,00033	0,0013	0,0002	1,953	1,998	0,999	1,999
$\frac{H}{32}$	0,0111	32768	0,0273	0,00008	0,0003	0,00005	1,997	2	1	2



Obrázek 8: Vzdálenosti dle norem

Na obr. 8 je udána závislost chyby na kroku h . Vidíme, že se zmenšujícím krokem sítě se vzdálenosti spočtené dle norem zmenšují a zmenšuje se tedy i chyba. Tím jsme ověřili správnost numerického výpočtu a výsledného řešení na obr. 7.

6.2 Problém p-Laplace

Máme nelineární problém p-Laplace ve tvaru

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{(p-2)} \nabla u) = f \text{ v } \Omega, \quad (6.9)$$

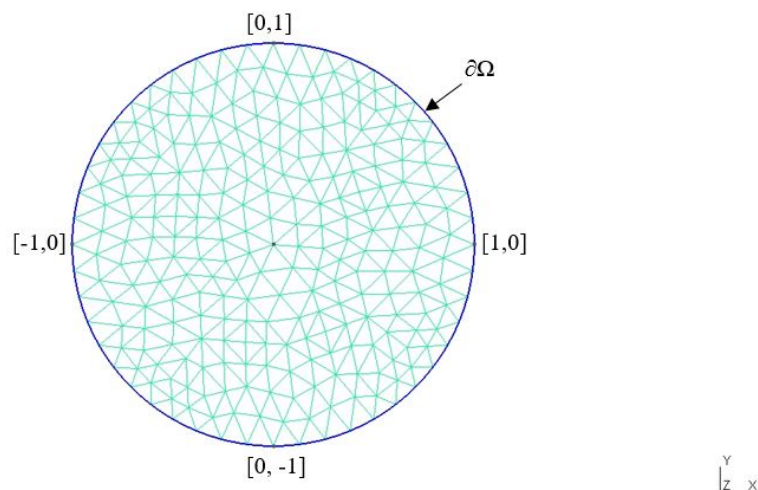
kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega$, kde předepisujeme okrajovou podmínku

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \quad (6.10)$$

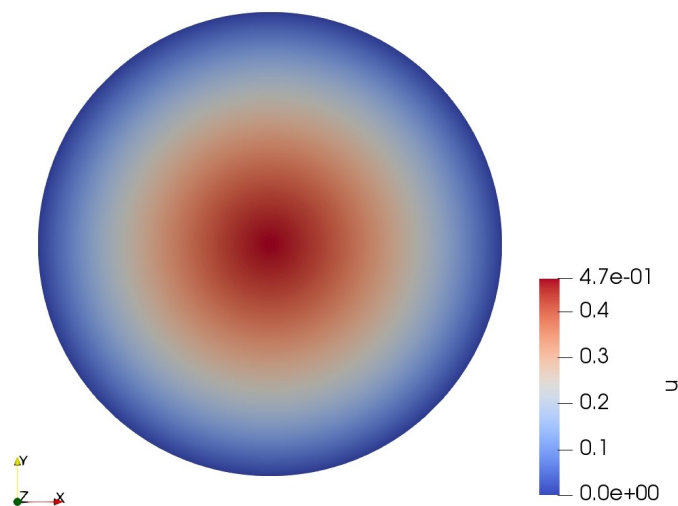
Máme odvozenou slabou formulaci problému, viz (4.10). Tedy máme linearizovanou bilineární formu $a(\bar{u}, v)$ a lineární formu $L(v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, v) &= (|\nabla \bar{u}|^{(p-2)}, \nabla v \cdot \nabla u)_{\Omega}, \\ L(v) &= (f, v)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Pro výpočet volíme exponent $p = 3$ a za funkci $f(x, y) = 1$. Počáteční přiblížení volíme $\bar{u}(x, y) = x$ s relaxačním koeficientem $\omega = 1$. Oblast výpočtu $\Omega : x^2 + y^2 < 1$ je vyobrazena na obr. 9 s nepravidelnou sítí s výchozím krokem $H = 0,22$.



Obrázek 9: Oblast výpočtu

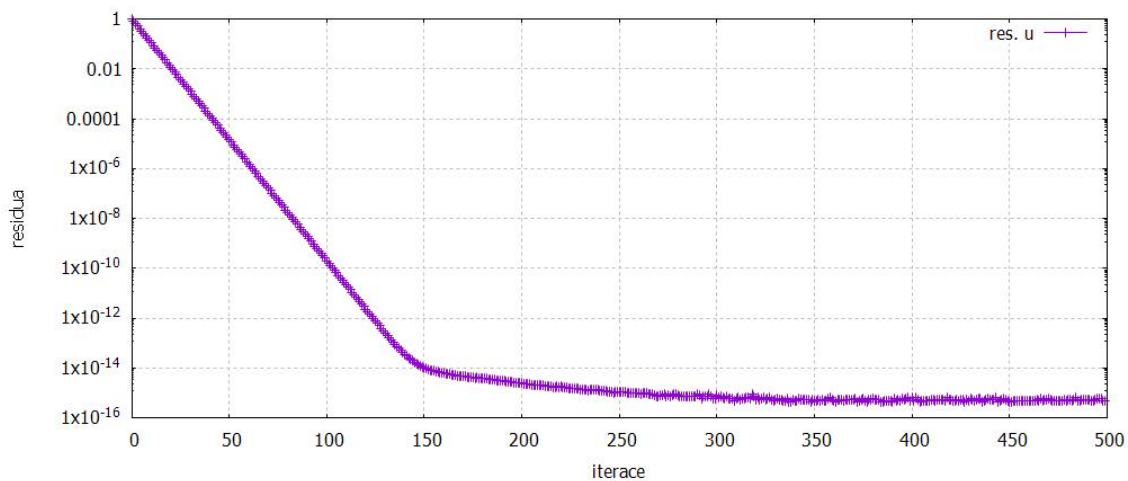


Obrázek 10: Numerické řešení p-Laplace problému, síť $\frac{H}{8}$

Na obr. 10 máme numerické řešení p-Laplace problému na zjemněné síti s krokem $h \approx 0,03$. Ověříme výpočet, vyneseme graf konvergence reziduí, kde jsou rezidua počítána dle Céova lemmatu (5.9) jako

$$\|u^n - u^{n+1}\| < \epsilon,$$

kde u^n je řešení z minulé časové vrstvy a u^{n+1} z nynější počítané. ϵ je reziduum.



Obrázek 11: Křivka konvergence p-Laplaceova problému, síť $\frac{H}{8}$

Na obr. 11 vidíme, že numerické řešení zkonvergovalo.

Pro ověření numerického výpočtu opět spočítáme normy H^1 viz (6.4), L_2 viz (6.5), l_∞ viz (6.7) na více sítích, viz tab. 2. Pro zvolenou funkci $f(x, y) = 1$ známe analytické řešení u_e a její derivace

$$u_e = C \left(1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

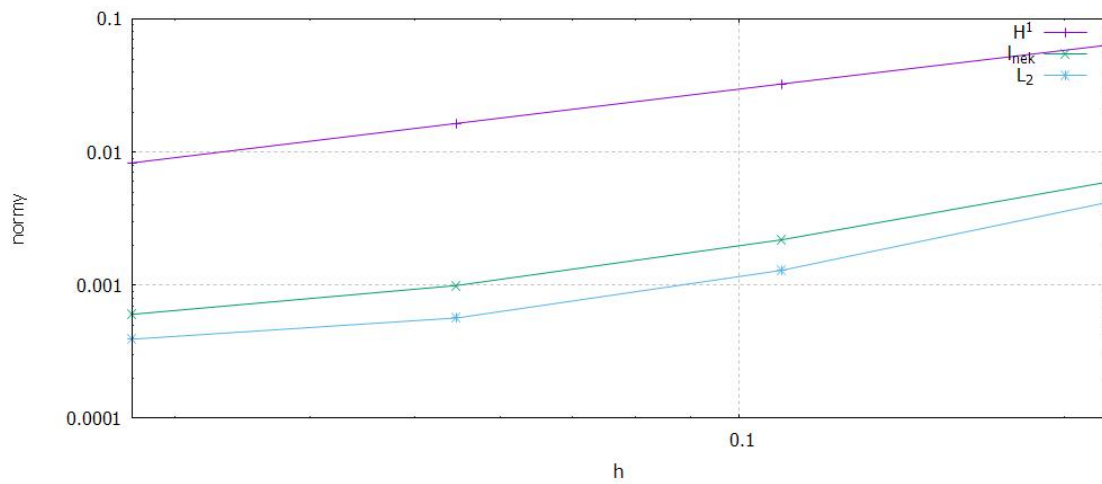
$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1,5Cx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}},$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{1,5Cy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}},$$

kde $C = 0,47178$ je konstanta pro exponent $p = 3$. Pak můžeme spočítat normy a řád konvergence.

Tabulka 2: Parametry sítě, normy a řád konvergence

sítě	krok h	počet ele.	H^1	L_2	l_∞	pH^1	pL_2	pl_∞
H	0,2189	318	0,06358	0,00594	0,00418	-		
$\frac{H}{2}$	0,1095	1272	0,03254	0,0022	0,0013	0,966	1,693	1,437
$\frac{H}{4}$	0,0547	5088	0,01645	0,00099	0,00057	0,984	1,189	1,143
$\frac{H}{8}$	0,0274	20352	0,0083	0,0006	0,00039	0,988	0,529	0,722



Obrázek 12: Vzdálenosti dle norem

Na obr. 12 vidíme, že se zmenšujícím krokem sítě se vzdálenosti spočtené dle norem zmenšují, tedy i chyba řešení. Tím jsme ověřili správnost numerického výpočtu a řešení na obr. 10.

6.3 Problém konvekce-difuze

Řešíme stacionární problém konvekce-difuze ve tvaru

$$-\nu\Delta u + (\vec{b} \cdot \nabla)u + \alpha u = f \text{ v } \Omega, \quad (6.12)$$

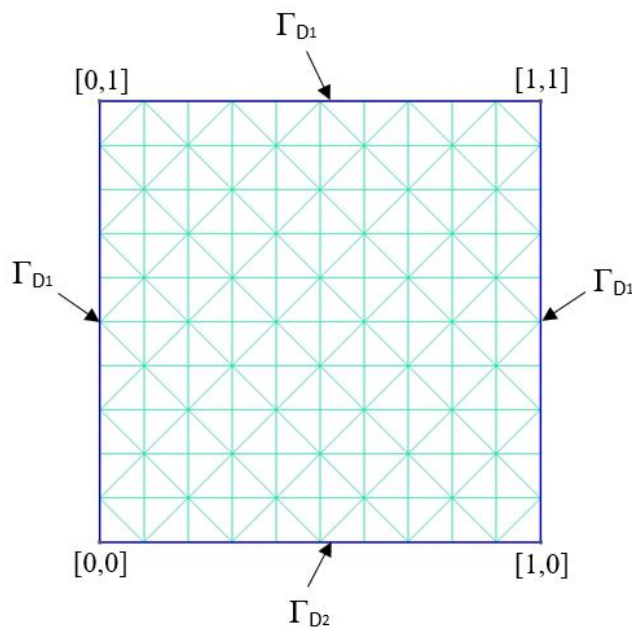
kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}$ jsou vzájemně disjunktní části hranice s okrajovými podmínkami

$$\text{a) } u = 0 \text{ na } \Gamma_{D_1}, \quad \text{b) } u = 1 \text{ na } \Gamma_{D_2}. \quad (6.13)$$

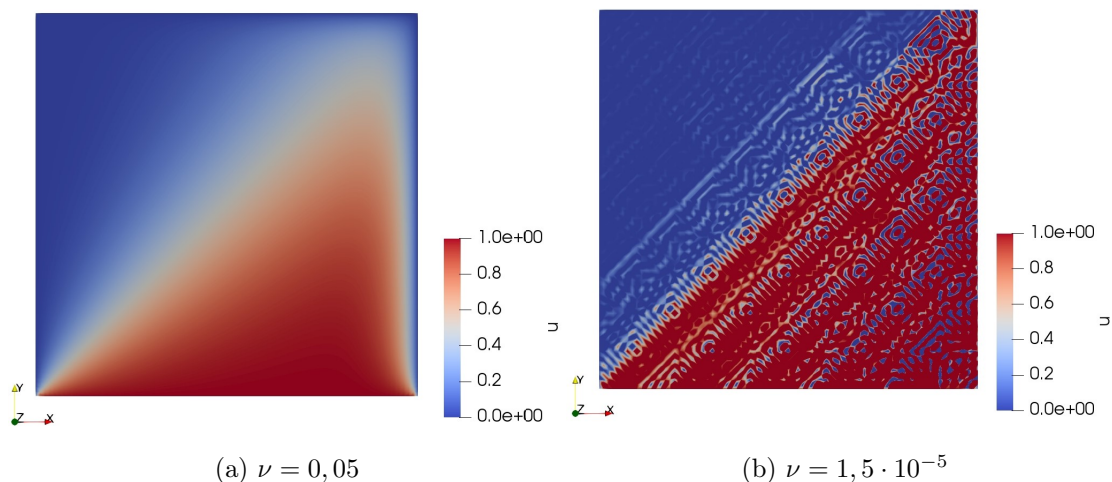
Slabou formulaci problému jsme odvodili, viz (4.7). Tedy máme bilineární formu $a(u, v)$ a lineární formu $L(v)$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (\vec{b} \cdot \nabla u, v)_\Omega + (\alpha u, v)_\Omega, \\ L(v) &= (f, v)_\Omega, \end{aligned} \quad (6.14)$$

kde pro výpočet volíme funkci $f = 0$, vektor konvekce $\vec{b} = (1, 1)$, koeficient difuze $\nu = 0,05$ a reaktivní koeficient $\alpha = 0$. Oblast Ω byla volena jako $\Omega : [0, 1]^2$ s pravidelnou sítí a výchozím krokem $H = 0,1$ viz obr. 13.



Obrázek 13: Oblast výpočtu

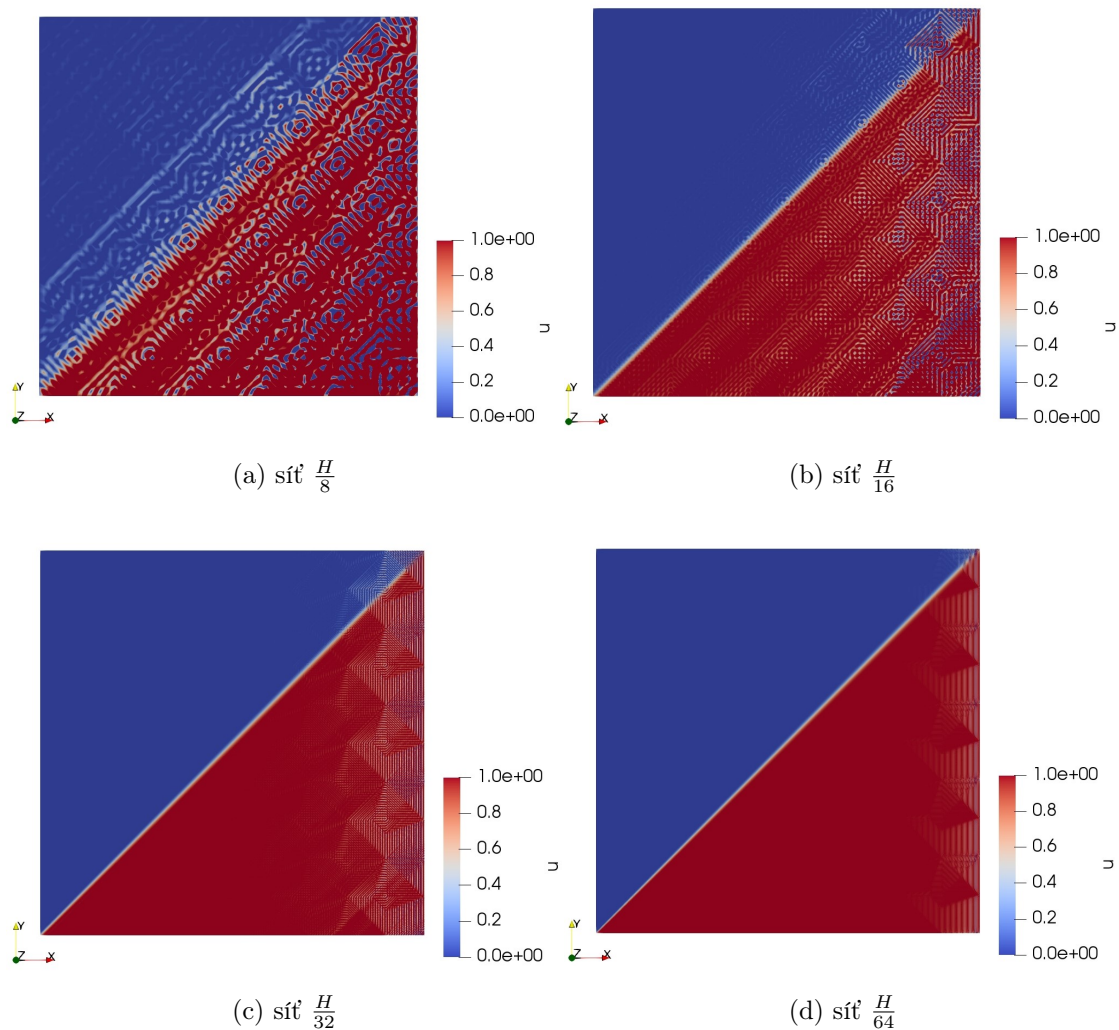


Obrázek 14: Numerická aproximace konvekce-difuze, síť $\frac{H}{8}$

Na obr. 14a vidíme numerické řešení Galerkinovy aproximace problému na zjemněné síti s krokem $h \approx 0,02$. Na obr. 14b vidíme numerické řešení Galerkinovy aproximace problému pro $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$, kde je řešení nestabilní s patrnými oscilacemi (měřítko vlevo je stejné jako v pravo pro $\nu = 0,05$, tedy tzv. overshoots efekt není viditelný, v numerickém řešení je ale obsažen). Nestabilita řešení závisí na tzv. Péceletově čísle, což je bezrozměrné kritérium viz např. [1] nebo [2], které je definováno vztahem

$$Pe = \frac{h_K \|\vec{b}\|_K}{\nu}, \quad (6.15)$$

kde h_K je lokální velikost elementu, ν je koeficient difuze a $\|\vec{b}\|_K$ je lokální velikost transportní rychlosti konvekce. Jak je vidět ze vztahu (6.15), stabilita řešení je značně ovlivněna krokem sítě. Zachováme tedy koeficient difuze $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ a provedeme výpočet pro jemnější síť s menším krokem.



Obrázek 15: Numerická aproximace problému konvekce-difuze bez stabilizace

Na obrázcích 15 vidíme, že nejstabilnějšího numerického řešení Galerkinovi aproximace problému bylo dosaženo až na obr. 15d, na síti $\frac{H}{64}$. Přesto jsou stále zjevné malé oscilace u pravé hrany oblasti.

Tabulka 3: Parametry sítí

sítě	krok h	počet elementů
$\frac{H}{8}$	0,01768	12800
$\frac{H}{16}$	0,00884	51200
$\frac{H}{32}$	0,00442	204800
$\frac{H}{64}$	0,00221	819200

Z tabulky 3 vidíme, že bylo zapotřebí velmi jemné sítě s velkým počtem elementů k dosažení poměrně dobré stability. Avšak pro zcela stabilní řešení by bylo třeba velmi jemné sítě např. $\frac{H}{128}$, kde by byl krok sítě v řádu tisícín. Výpočetní náročnost na takové síti by byla vysoká. Pro řešení problému s nižšími koeficienty difuze ν bude zapotřebí problém stabilizovat.

6.3.1 Stabilizace problému konvekce-difuze

Stabilizaci problému konvekce-difuze lze řešit více způsoby, např. metodou umělé vazkosti, metodou streamline diffusion nebo streamline Upwind/Petrov Galerkin(SUPG). Zvolili jsme stabilizaci SUPG metodou, více viz [2] nebo [8], kterou si rozebereme.

SUPG metoda

Mějme τ_h triangulaci oblasti Ω , tedy $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \tau_h} K$. Hledáme řešení $u_h \in V_h$ takové, že

$$a(u_h, v_h) + \sum_{K \in \tau_h} \delta_K (-\nu \Delta u_h + (\vec{b} \cdot \nabla) u_h + \alpha u_h, \vec{b} \cdot \nabla v_h)_K = L(v_h) + \sum_{K \in \tau_h} \delta_K (f, \vec{b} \cdot \nabla v_h)_K,$$

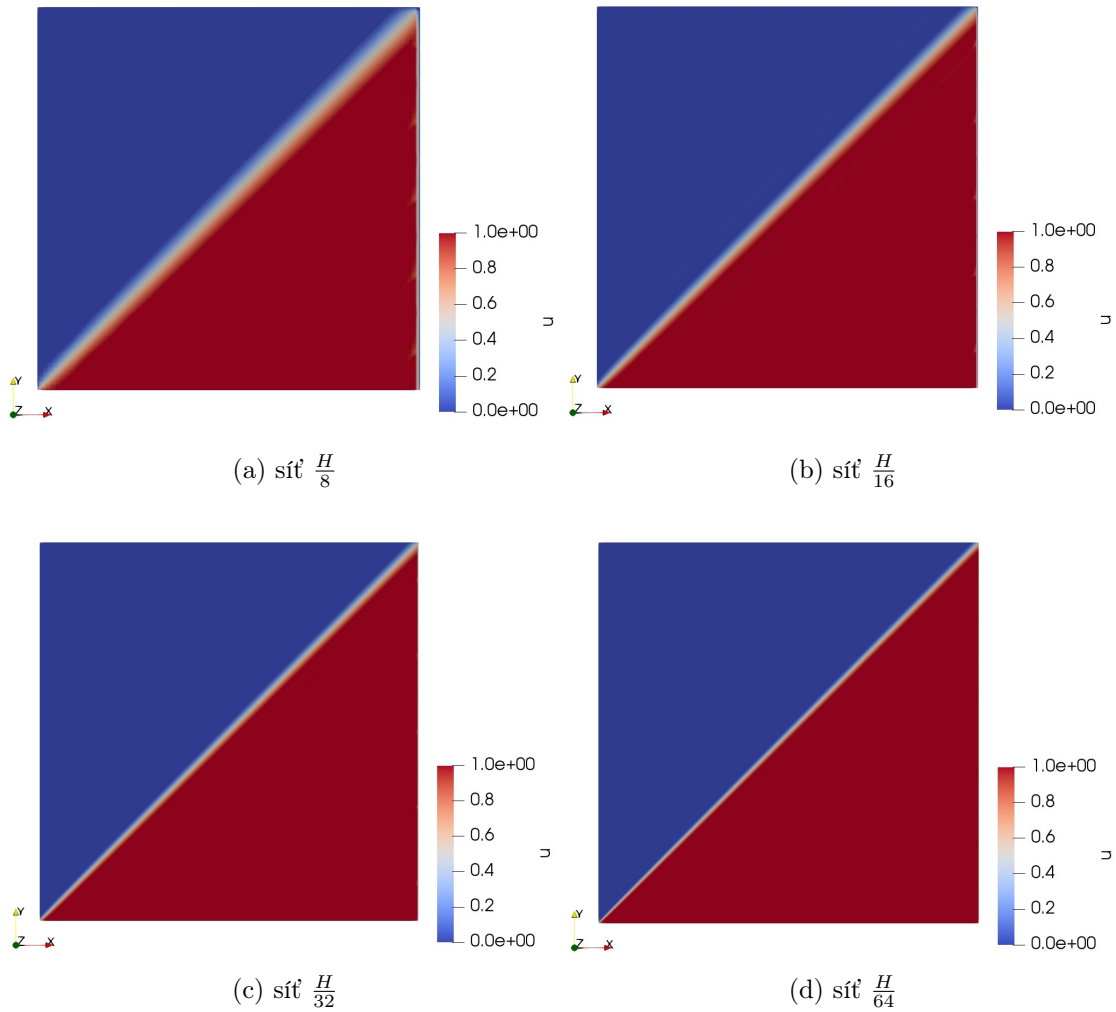
platí pro libovolné $V_h \in V$. Koeficient δ_K je stabilizační parametr, který je definován pomocí lokálního Pécletova (Reynoldsova) čísla.

$$\delta_K = \frac{h_K}{\|\vec{b}\|_K} \xi(Pe),$$

kde funkce $\xi(\cdot)$ je volena tak, že pro $Pe < 1$ je $\xi(Pe) \approx 0$ a pro $Pe > 1$ je $\xi(Pe) \approx 1$.

Pro funkci $\xi(Pe)$ byl užit vztah

$$\xi(Pe) = \min \left(1, \frac{Pe}{6} \right).$$



Obrázek 16: Numerická aproximace problému konvekce-difuze se stabilizací

Na obrázku 16 vidíme numerické výsledky stabilizovaného problému konvekce-difuze pro $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ na zjemněných sítích, viz tab. 3. Stabilního řešení bylo dosaženo už na hrubé síti viz obr. 16a s krokem $h \approx 0,02$ s 12800 elementy. Řešení Galerkinovy aproximace na stejné síti ani zdaleka nedosáhlo stabilního řešení bez nefyzikálních oscilací.

6.4 Stokesův problém

Řešíme stacionární Stokesův problém ve tvaru

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \text{ v } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ v } \Omega, \end{aligned} \quad (6.16)$$

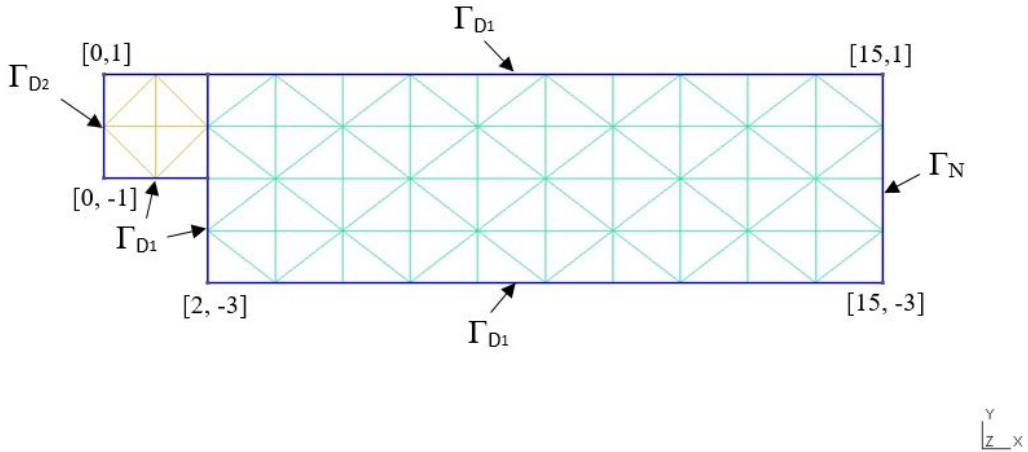
kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \cup \Gamma_N$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}, \Gamma_N$ jsou vzájemně disjunkttní části hranice, kde předepisujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_1}} = (0, 0), \text{ b) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_2}} = (0, 1 - y^2), \text{ c) } -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = -(p - p_{ref})\vec{n} \text{ na } \Gamma_N. \quad (6.17)$$

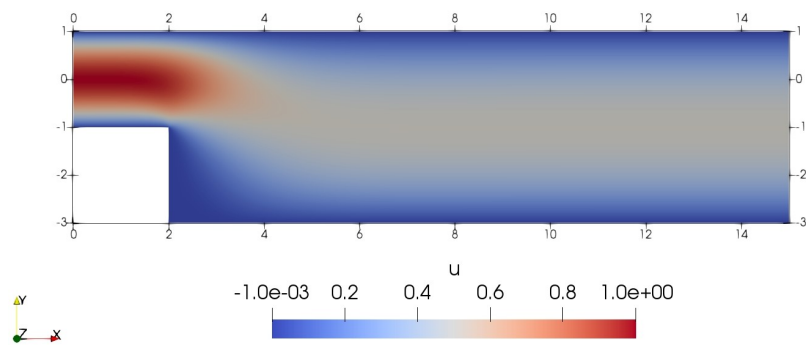
Máme odvozenou slabou formulaci problému (4.17), která pro okrajové podmínky (6.17) přejde v tvar, kde hledáme $\vec{u} \in \mathbf{V}$ a $p \in Q$ takové, že $a(U, V) = L(V)$, kde

$$\begin{aligned} a(U, V) &= \nu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_{\Omega} + (\nabla \cdot \vec{u}, q)_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \vec{v})_{\Omega}, \\ L(V) &= (\vec{f}, \vec{v})_{\Omega} + (p_{ref}\vec{n}, \vec{v})_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

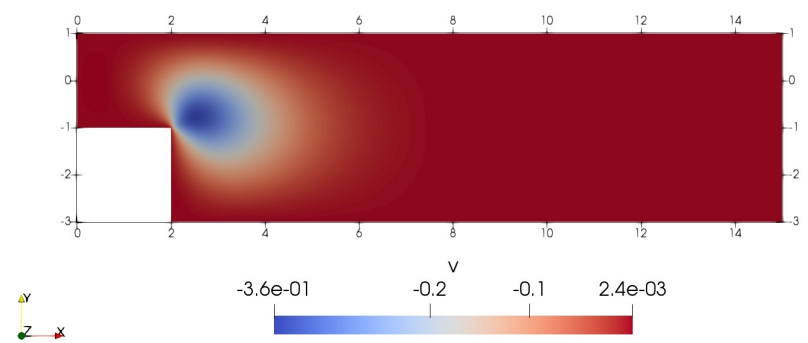
Pro výpočet volíme funkci $\vec{f} = (0, 0)$, referenční tlak $p_{ref} = 0$ a koeficient vazkosti $\nu = 0, 1$. Uvažujeme stacionární proudění v oblasti zpětného schodu viz obr. 17. Výpočtová síť je pravidelná síť se základním krokem $H \approx 1, 3$, zobrazená na obr. 17.



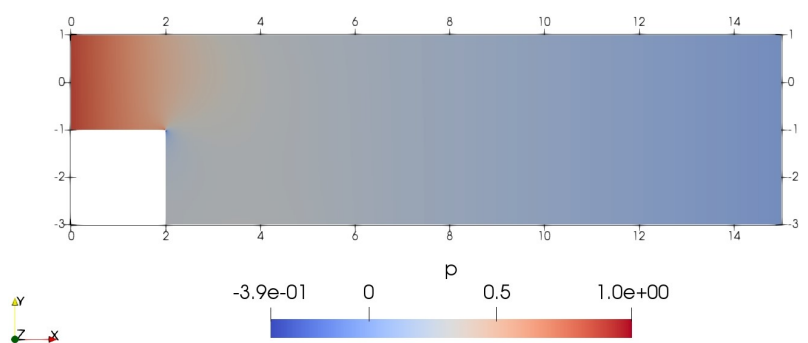
Obrázek 17: Oblast výpočtu



(a) složka rychlosti u



(b) složka rychlosti v



(c) tlak p

Obrázek 18: Numerická aproximace Stokesova problému, síť $\frac{H}{32}$

Na obrázku 18 vidíme numerické řešení Stokesova problému na zjemněné síti $\frac{H}{32}$ s krokem $h \approx 0,05$ a počtem elementů 90112. Vidíme zde numerické výsledky složek rychlosti $\vec{u} = (u, v)$ a tlaku p .

6.5 Stacionární Navier-Stokesův problém

Máme Navierovy-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$-\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ v } \Omega, \quad (6.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ v } \Omega.$$

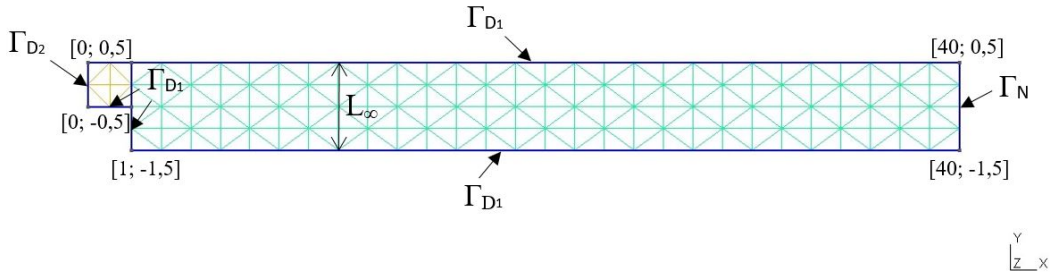
Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \cup \Gamma_N$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}, \Gamma_N$ jsou vzájemně disjunktní části hranice, kde předepisujeme okrajové podmínky

$$\text{a) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_1}} = (0, 0), \text{ b) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_2}} = (0, 1), \text{ c) } -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = -(p - p_{ref})\vec{n} \text{ na } \Gamma_N. \quad (6.20)$$

Máme odvozenou slabou formulaci problému (4.20), která pro okrajové podmínky (6.20) přejde v tvar, kde hledáme $\vec{u} \in \mathbf{V}$ a $p \in Q$ takové, že $a(U; U, V) = L(V)$, kde

$$\begin{aligned} a(U; U, V) &= \nu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})_\Omega + c(\vec{u}; \vec{u}, \vec{v})_\Omega + (\nabla \cdot \vec{u}, q)_\Omega - (p, \nabla \cdot \vec{v})_\Omega, \\ L(V) &= (\vec{f}, \vec{v})_\Omega + (p_{ref}\vec{n}, \vec{v})_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Pro výpočet volíme funkci $\vec{f} = 0$ a referenční tlak $p_{ref} = 0$. Uvažujeme stacionární proudění tekutiny v oblasti zpětného schodu viz obr. 19. Výpočetní síť je pravidelná síť se základním krokem $H \approx 0,76$, zobrazená na obr. 19.

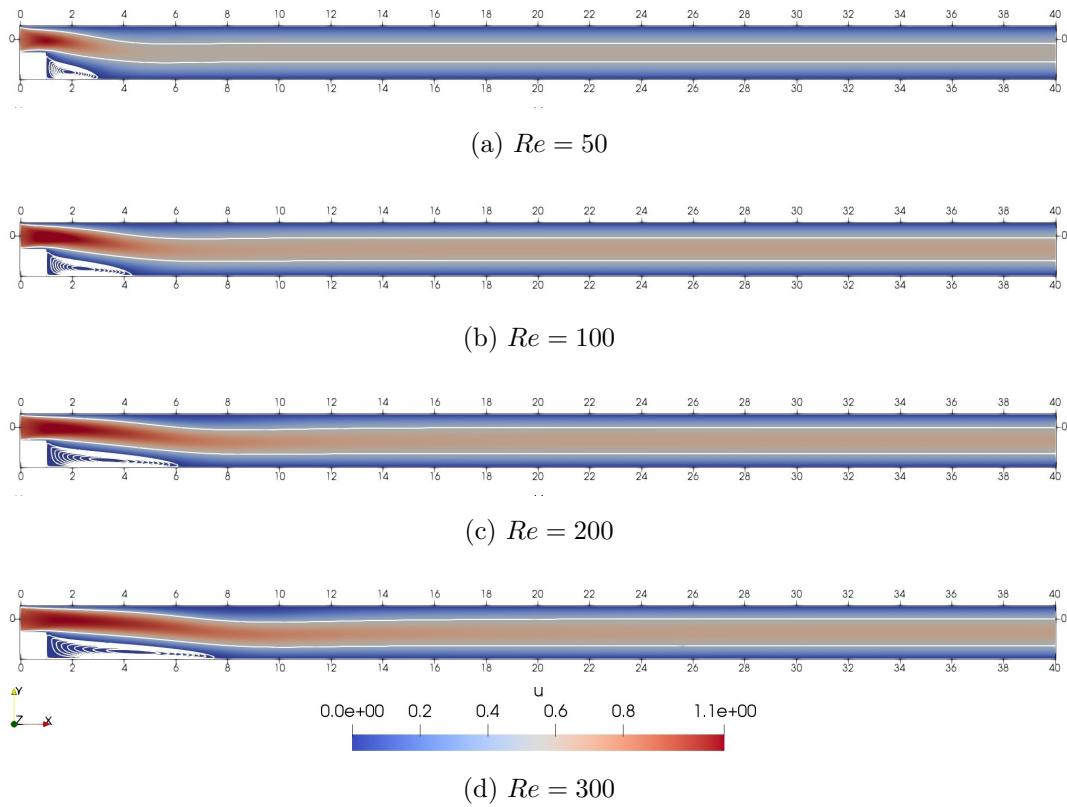


Obrázek 19: Oblast výpočtu

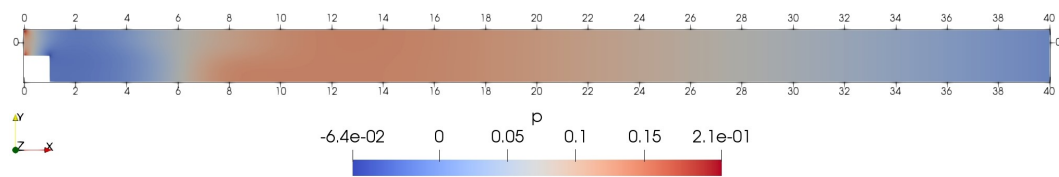
Numerický výpočet provedeme pro více Reynoldsových čísel. Předepisujeme bezrozměrné charakteristické veličiny, charakteristický rozměr volíme $L_\infty = 2$ dle geometrie na obr. 19, charakteristickou rychlost proudění spočteme $U_\infty = \frac{2}{3}U_{max}$, kde $U_{max} = 1$ dle vstupního rychlostního profilu na Γ_{D_2} . Kinematickou viskozitu ν dopočítáme z definičního vztahu pro Reynoldsovo číslo (3.16)

$$Re = \frac{U_\infty L_\infty}{\nu},$$

pro $Re = 50, 100, 200, 300$.

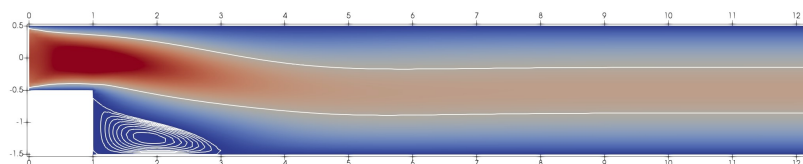


Obrázek 20: Numerické výsledky složky rychlosti u , síť $\frac{H}{8}$

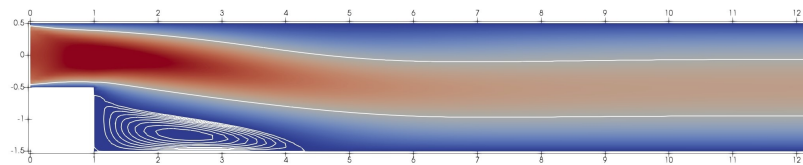


Obrázek 21: Numerický výsledek tlaku, $Re = 300$, síť $\frac{H}{8}$

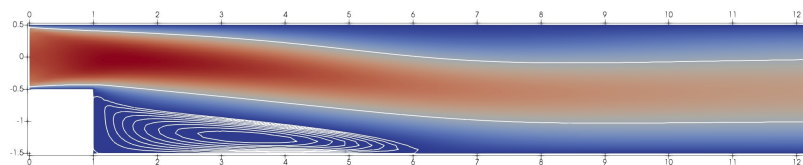
Na obr. 20 je zobrazeno numerické řešení Navier-Stokesova problému pro podélnou složku rychlosti u a pro daná Reynoldsova čísla na zjemněné síti s největším krokem $h \approx 0,1$ a 35328 elementy, viz tab. 4. Vidíme, že profil rychlosti je ustálený a není zpětně ovlivněn příliš krátkou délkou oblasti. Z obrázku je patrné odtržení na dolní stěně oblasti v blízkosti schodu, které je lépe zřetelné na detailech v obrázcích 22. Na obr. 21 je vyobrazené rozložení tlaku v oblasti.



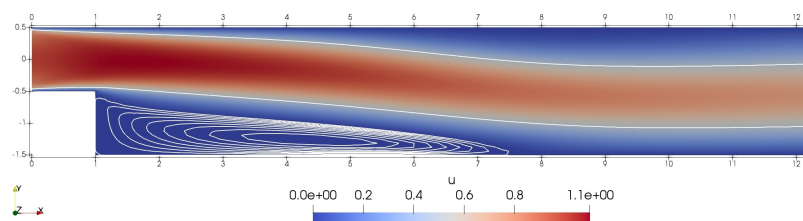
(a) $Re = 50$



(b) $Re = 100$



(c) $Re = 200$



(d) $Re = 300$

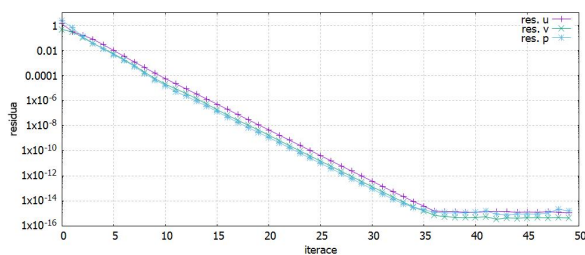
Obrázek 22: Detail odtržení, síť $\frac{H}{8}$

Zde na obrázku 22 je již dobře patrné odtržení rychlostního proudu v oblasti schodu.

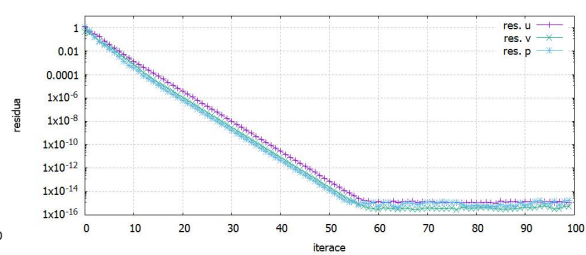
Pro ověření správnosti řešení si vyneseme graf konvergence reziduí, kde rezidua počítáme jako

$$\|u^n - u^{n+1}\| < \epsilon,$$

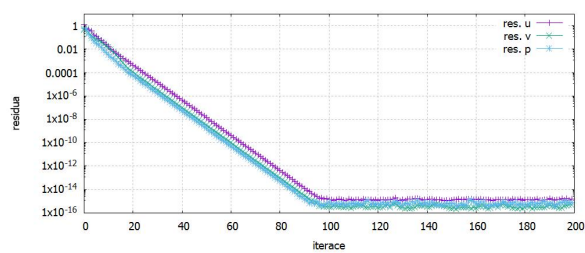
kde u^n je řešení z minulé časové vrstvy a u^{n+1} z nynější počítané. ϵ je reziduum. Křivky konvergence řešení rychlosti $\vec{u} = (u, v)$ a tlaku p jsou zobrazeny na obr. 23.



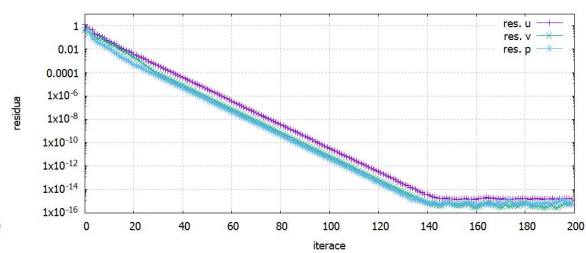
(a) $Re = 50$



(b) $Re = 100$



(c) $Re = 200$



(d) $Re = 300$

Obrázek 23: Konvergence reziduí, síť ($\frac{H}{8}$)

Na obr. 23 vidíme konvergenci reziduí, kde je zřetelné ustálení reziduí bez oscilací.

Tabulka 4: Parametry sítí

sítě	krok h	počet elementů
H	0,76	552
$\frac{H}{2}$	0,38	2208
$\frac{H}{8}$	0,095	35328

Dále se budeme zabývat stabilizací Navier-Stokesova problému, výsledky budeme počítat na sítích uvedených v tab. 4.

6.5.1 Stabilizace Navier-Stokesova problému

Použití Galerkinovy diskretizace problému může vést k výskytu nefyzikálních oscilací pro velká Reynoldsova čísla, viz [2] nebo [8].

Pro stabilizaci numerického řešení lze použít vícero metod, zde si uvedeme SUPG metodu jako v případě konvekce-difuze (6.3.1) a následně kombinaci metod SUPG, PSPG (pressure-stabilization/Petrov-Galerkin) a DIV-DIV stabilizace.

SUPG stabilizace

Známe Galerkinovu diskretizaci problému, kde hledáme U tak, že je pro všechna $V \in \mathbf{W}$ je splněna

$$a(U; U, V) = L(V).$$

Pro stabilizovanou metodu zavedeme stabilizační členy, pak dostáváme rovnici ve tvaru

$$a(U; U, V) + a_{SUPG}(U; U, V) = L(V) + L_{SUPG}(V), \quad (6.22)$$

kde členy rozepíšeme

$$\begin{aligned} a_{SUPG}(U^*; U, V) &= \sum_{K \in \tau_h} \delta_{K_1} (-\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u}^* \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p, (\vec{u}^* \cdot \nabla) \vec{v})_K, \\ L_{SUPG}(V^*) &= \sum_{K \in \tau_h} \delta_{K_1} (\vec{f}, (\vec{u}^* \cdot \nabla) \vec{v})_K. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Parametr $\delta_{K_1} \geq 0$ lze volit následovně

$$\delta_{K_1} = \frac{h_K}{2 \|\vec{u}\|_{\infty, K}} \xi(Re_{lok}),$$

kde

$$Re_{lok} = \frac{h_K \|\vec{u}\|_{\infty, K}}{2\nu}$$

je lokální Reynoldsovo číslo, h_K je lokální délka elementu K . Symbol $\|\cdot\|_{\infty, K}$ označuje normu v prostoru $L^\infty(K)$, tedy

$$\|\vec{u}\|_{\infty, K} = \max_K |\vec{u}|.$$

PSPG stabilizace

Zavedeme stabilizační členy do obou stran rovnice jako v případě SUPG stabilizace (6.22), ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{PSPG}(U^*; U, V) &= \sum_{K \in \tau_h} \delta_{K_2} (-\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u}^* \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p, \nabla q)_K, \\ L_{PSPG}(V^*) &= \sum_{K \in \tau_h} \delta_{K_2} (\vec{f}, \nabla q)_K, \end{aligned} \quad (6.24)$$

kde parametr $\delta_{K_2} \geq 0$ volíme jako v případě SUPG stabilizace

$$\delta_{K_2} = \frac{h_K}{2 \|\vec{u}\|_{\infty, K}} \xi(Re_{lok}).$$

DIV-DIV stabilizace

Zde zvyšujeme váhu momentových rovnic tak, že zavedeme stabilizační člen pouze do bilineární formy ve tvaru

$$a_{DIV}(U^*; U, V) = \sum_{K \in \tau_h} \delta_{K_3} (\nabla \cdot \vec{u}, \nabla \cdot \vec{v})_K, \quad (6.25)$$

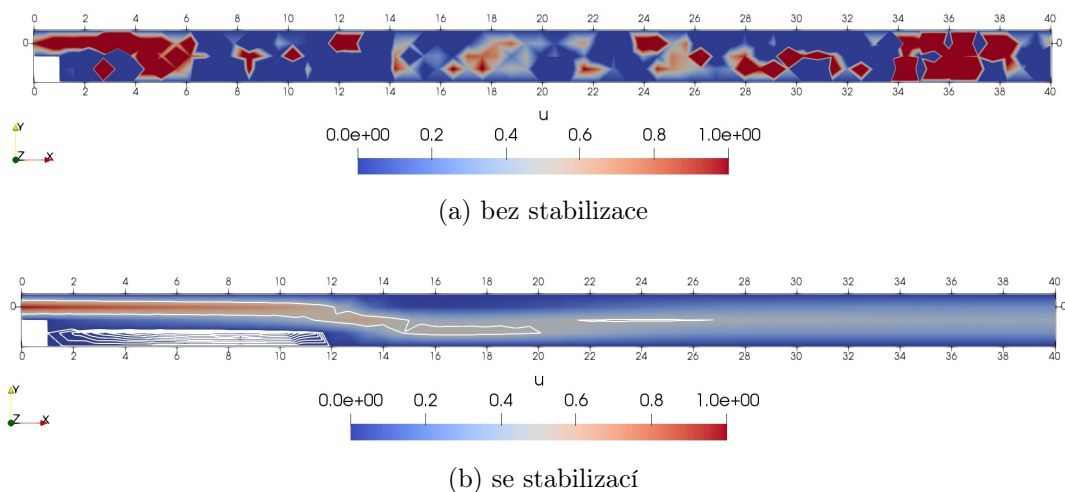
kde parametr $\delta_{K_3} \geq 0$ volíme

$$\delta_{K_3} = \frac{h_K \|\vec{u}\|_{\infty, K}}{2}.$$

Pak kombinovaná stabilizace vypadá následovně

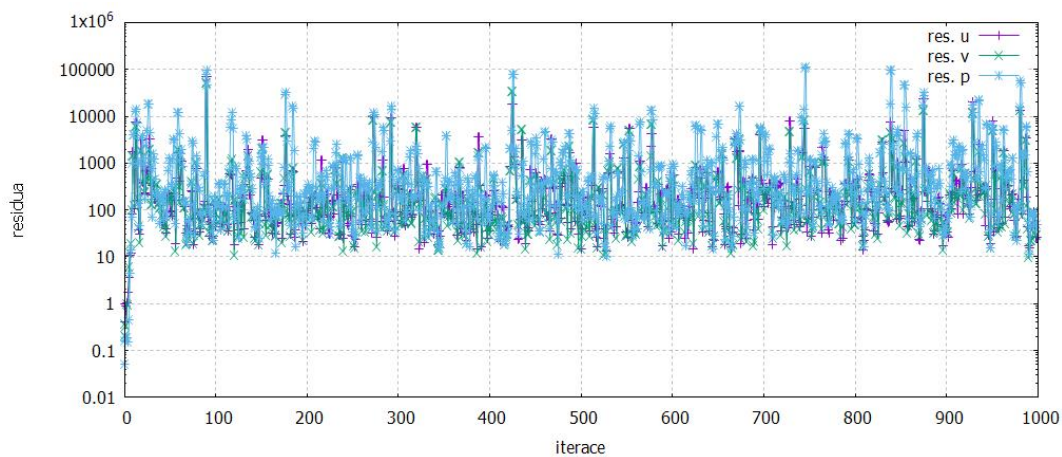
$$\begin{aligned} a(U; U, V) + a_{SUPG}(U; U, V) + a_{PSPG}(U; U, V) + a_{DIV}(U; U, V) \\ = L(V) + L_{SUPG}(V) + L_{PSPG}(V). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Provedeme numerický výpočet pro vyšší Reynoldsovo číslo $Re = 1000$ bez stabilizace a s kombinovanou stabilizací (6.26) na hrubé síti H viz tab. 4.

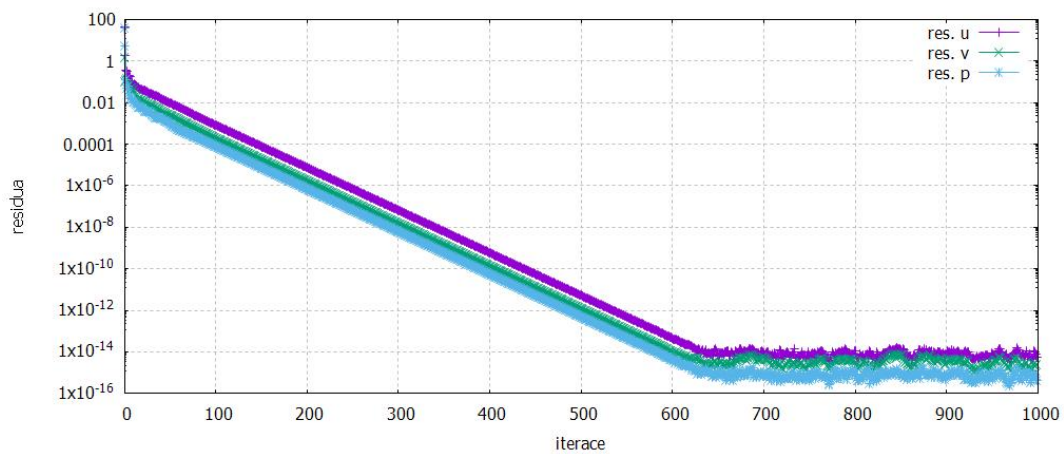


Obrázek 24: Stabilizované a nestabilizované řešení N-S problému, $Re = 1000$

Na obrázku 24 vidíme numerické řešení složky rychlosti u stabilizovaného a nestabilizovaného problému pro $Re = 1000$, počítané na hrubé síti s krokem $h \approx 0,8$. U nestabilizovaného řešení na obr. 24a vidíme vznik mnoha nefyzikálních oscilací, které jsou velmi dobře patrné z konvergence reziduí na obr. 25. Oproti tomu u stabilizovaného problému na obr. 24b je již dobře patrný profil rychlosti a odtržení na dolní stěně, ačkoli získané řešení je očividně málo přesné.



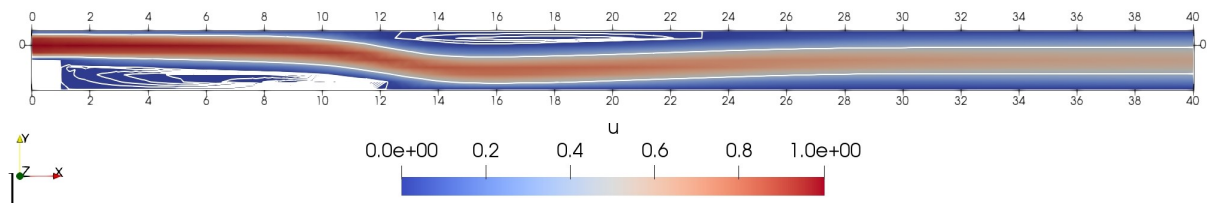
Obrázek 25: Konvergence reziduí nestabilizovaného problému, $Re = 1000$



Obrázek 26: Konvergence reziduí stabilizovaného problému, $Re = 1000$

Na obr. 26 vidíme, že stabilizovaný problém dosáhl konvergence bez oscilací.

Stabilizace tedy řešení ustálila a zbavila nefyzikálních oscilací, avšak jak je vidět na obr. 24b řešení není zcela přesné. Síť s krokem $h \approx 0,8$ je příliš hrubá. Čitelnějšího výsledku docílíme u jemnějších sítí např. $\frac{H}{2}$, $h \approx 0,4$, viz obr. 27, kde je již dobře patrné odtržení proudu na dolní i horní stěně.



Obrázek 27: Stabilizované řešení N-S problému, $Re = 1000$, síť $\frac{H}{2}$

6.5.2 Numerické řešení problému kavity

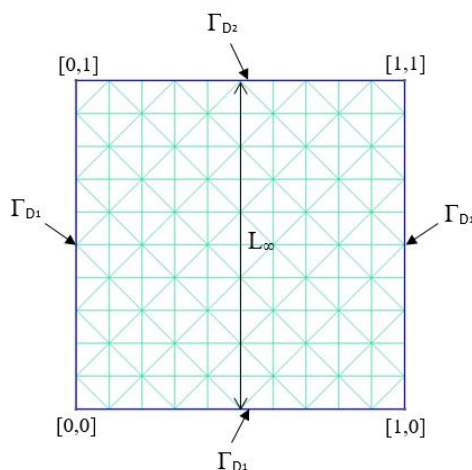
Problém je popsán rovnicemi (6.19) následovně

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \text{ v } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ v } \Omega. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}$, kde $\Gamma_{D_1}, \Gamma_{D_2}$ jsou vzájemně disjunktní části hranice, kde předepisujeme okrajové podmínky

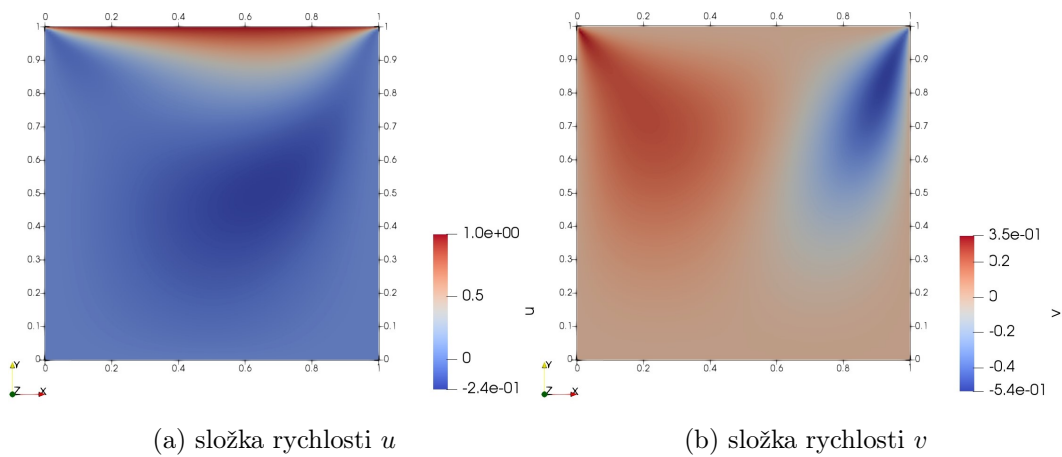
$$\text{a) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_1}} = (0, 0), \quad \text{b) } \vec{u}|_{\Gamma_{D_2}} = (0, 1), \tag{6.28}$$

Máme odvozenou slabou formulaci problému (4.20). Pro výpočet volíme $\vec{f} = (0, 0)$ a referenční tlak $p_{ref} = 0$. Uvažujeme proudění v kavitě obr. 28.

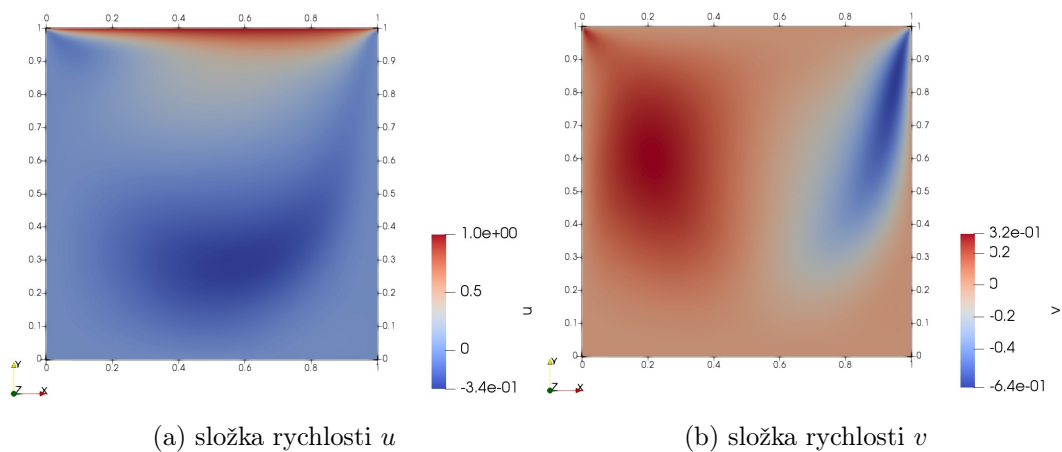


Obrázek 28: Oblast výpočtu

Numerický výpočet provedeme na pravidelné síti 129×129 s krokem $h \approx 0,01$, pro Reynoldsova čísla $Re = 100$ a 400 . Charakteristický rozměr volíme $L_\infty = 1$ dle geometrie na obr. 28. Charakteristickou rychlost proudění volíme $U_\infty = 1$ dle předepsané rychlosti na horní stěně kavity (Γ_{D_2}). Pak kinematickou viskozitu ν dopočítáme z definice Reynoldsova čísla, viz (3.16).

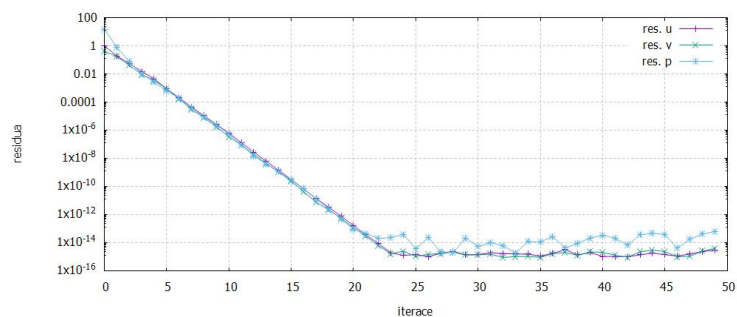


Obrázek 29: Numerické řešení, kavita (129×129) pro $Re = 100$

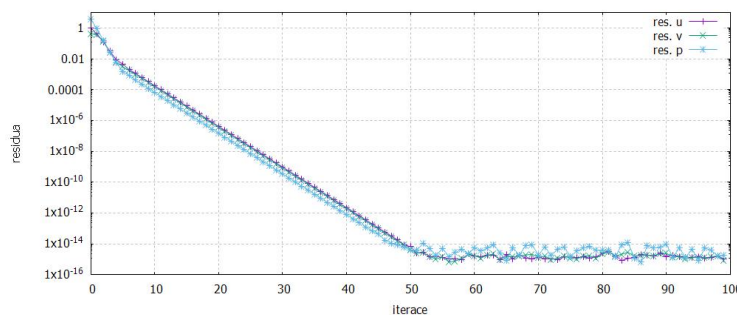


Obrázek 30: Numerické řešení, kavita (129×129) pro $Re = 400$

Na obr. 29 a 30 máme Galerkinovu aproximaci řešení problému kavity, konkrétně rychlostní pole $\vec{u} = (u, v)$. Řešení dokonvergovalo, jak můžeme vidět na obr. 31.



(a) $Re = 100$

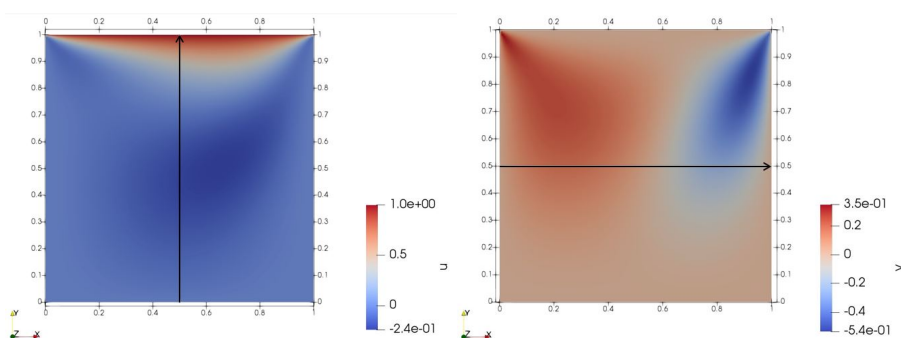


(b) $Re = 400$

Obrázek 31: Konvergence reziduů, kavita (129×129)

Galerkinovu aproximaci řešení problému kavity můžeme porovnat s numerickými výsledky uvedenými v článku [12] a tím ověřit správnost výpočtu.

V článku jsou hodnoty složek rychlosti $\vec{u} = (u, v)$ odečteny podél řezu skrz geometrický střed oblasti pro různá Reynoldsova čísla. Odečteme tedy hodnoty složek rychlosti u a v v řezech podél y a x , jak je ukázáno na obr. 32, pro $Re = 100$ a 400 . Referenční hodnoty u_r, v_r a vypočtené hodnoty u, v jsou uvedeny v následujících tabulkách.



(a) složka rychlosti u podél osy y

(b) složka rychlosti v podél osy x

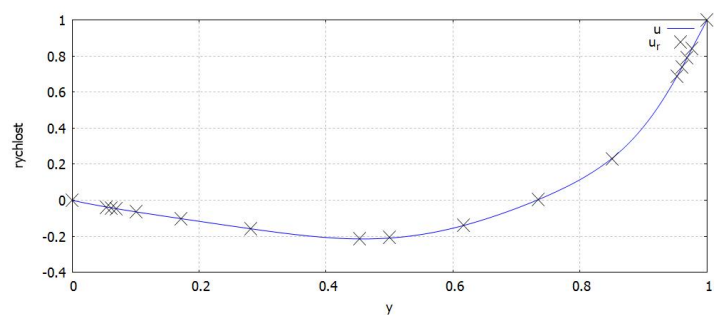
Obrázek 32: Řezy geometrickým středem oblasti

Tabulka 5: Referenční a numerické hodnoty složek rychlosti pro $Re = 100$

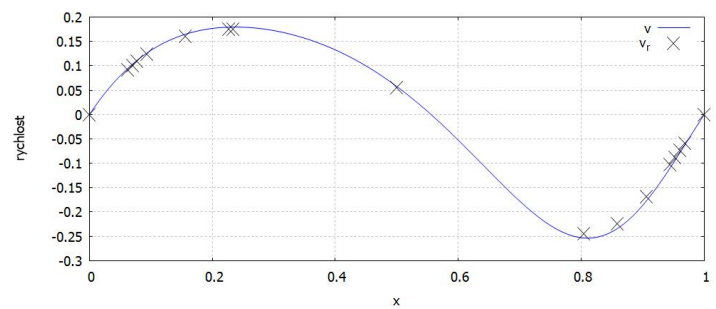
x	v_r	v	y	u_r	u
1	0	0	1	1	1
0,9688	-0,05906	-0,06229	0,9766	0,84123	0,84348
0,9609	-0,07391	-0,0779	0,9688	0,78871	0,79161
0,9531	-0,08864	-0,09334	0,9609	0,73722	0,74071
0,9453	-0,10313	-0,10851	0,9531	0,68717	0,69118
0,9063	-0,16914	-0,17715	0,8516	0,23151	0,23644
0,8594	-0,22445	-0,23371	0,7344	0,00332	0,000414
0,8047	-0,24533	-0,25354	0,6172	-0,13641	-0,13881
0,5	0,05454	0,05755	0,5	-0,20581	-0,20915
0,2344	0,17527	0,17956	0,4531	-0,21090	-0,21398
0,2266	0,17507	0,17935	0,2813	-0,15662	-0,15765
0,1563	0,16077	0,16480	0,1719	-0,10150	-0,10173
0,0938	0,12317	0,12639	0,1016	-0,06434	-0,06441
0,0781	0,10890	0,11178	0,0703	-0,04775	-0,04663
0,0703	0,10091	0,1036	0,0625	-0,04192	-0,04197
0,0625	0,09233	0,09481	0,0547	-0,03717	-0,03722
0	0	0	0	0	0

Tabulka 6: Referenční a numerické hodnoty složek rychlosti pro $Re = 400$

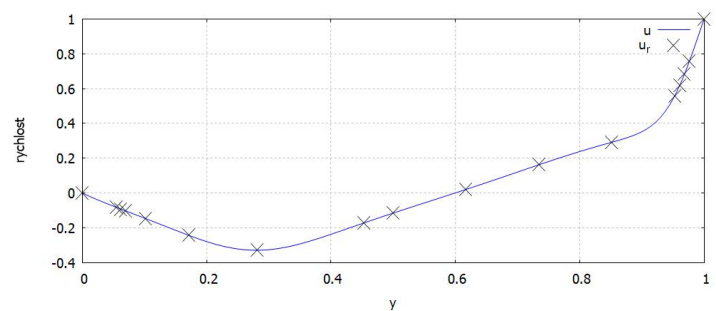
x	v_r	v	y	u_r	u
1	0	0	1	1	1
0,9688	-0,12146	-0,1254	0,9766	0,75837	0,76029
0,9609	-0,15663	-0,16141	0,9688	0,68439	0,68675
0,9531	-0,19254	-0,19809	0,9609	0,61756	0,6202
0,9453	-0,22847	-0,23466	0,9531	0,55892	0,561731
0,9063	-0,38325	-0,38983	0,8516	0,29093	0,29199
0,8594	-0,44993	-0,45383	0,7344	0,16256	0,16254
0,8047	-0,38598	-0,38563	0,6172	0,02135	0,02102
0,5	0,05186	0,05206	0,5	-0,11477	-0,11505
0,2344	0,30174	0,30345	0,4531	-0,17119	-0,17145
0,2266	0,30203	0,30382	0,2813	-0,32726	-0,32872
0,1563	0,28124	0,28351	0,1719	-0,24299	-0,24374
0,0938	0,22965	0,23166	0,1016	-0,14612	-0,14613
0,0781	0,20920	0,21099	0,0703	-0,10338	-0,10331
0,0703	0,19713	0,1988	0,0625	-0,09266	-0,09259
0,0625	0,1836	0,18513	0,0547	-0,08186	-0,0818
0	0	0	0	0	0



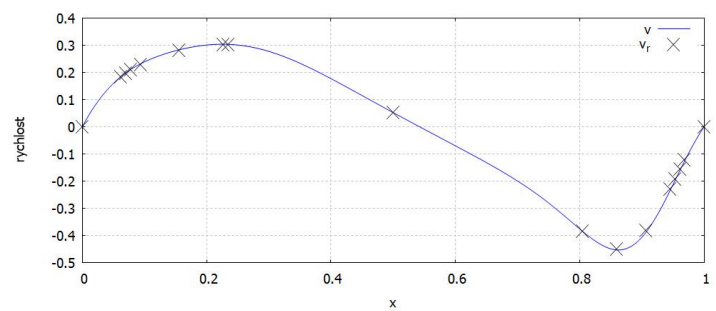
(a) složka rychlosti u_r a u pro $Re = 100$



(b) složka rychlosti v_r a v pro $Re = 100$



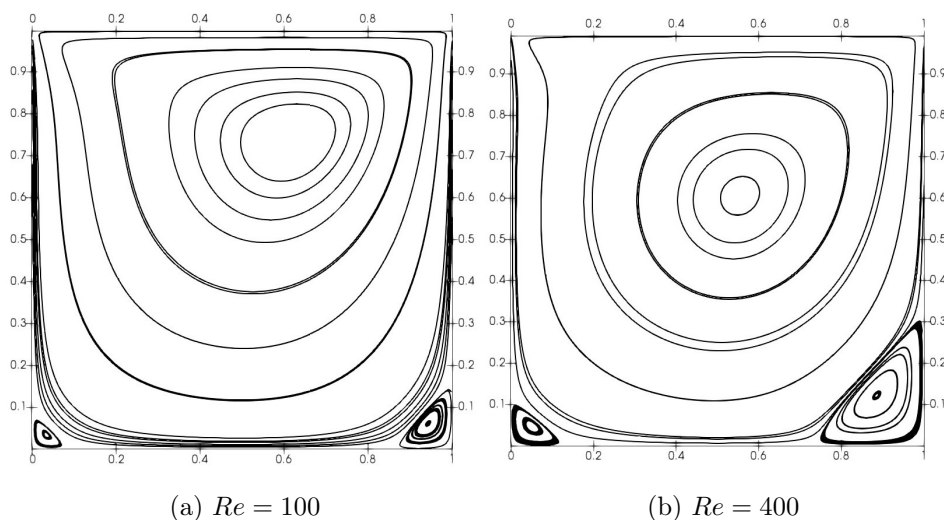
(c) složka rychlosti u_r a u pro $Re = 400$



(d) složka rychlosti v_r a v pro $Re = 400$

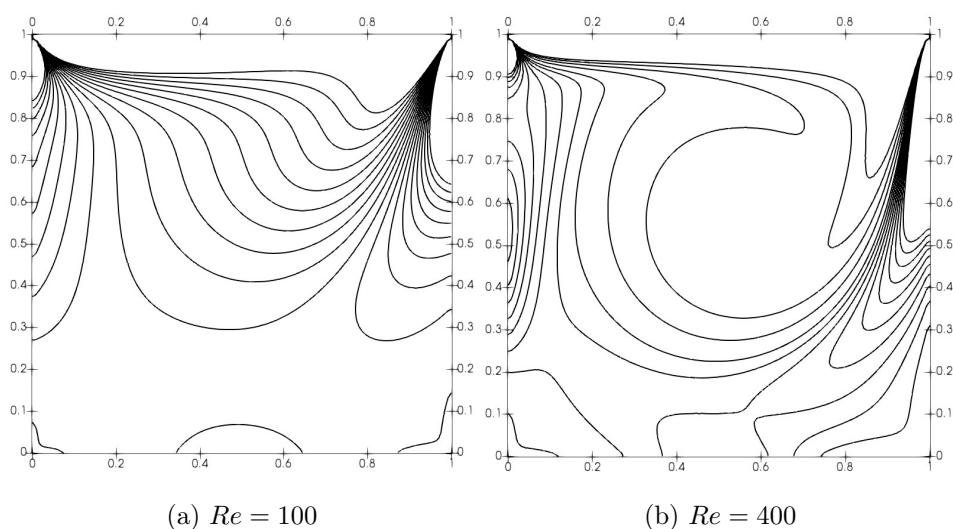
Obrázek 33: Srovnání numerických a referenčních hodnot rychlosti

Na obrázku 33 vidíme porovnané složky rychlosti u, v s referenčními hodnotami rychlosti u_r, v_r převzatými z článku [12]. Vidíme, že se hodnoty liší v řádu tisícín maximálně setin, čímž shledáváme vypočtené hodnoty rychlosti za správné.



Obrázek 34: Vírové proudnice, pravidelná síť (129×129)

Na obr. 34 jsou zobrazené vírové proudnice, které zobrazují variace vírů v dolních rozích kavity. Na obr. 35 jsou zobrazeny kontury vířivosti. Pro ověření můžeme opět porovnat hodnoty vířivosti ω s referenčními ω_r z článku [12]. Hodnoty vířivosti odečteme podél pohyblivé horní stěny kavity ve směru osy x , numerické a referenční hodnoty jsou uvedeny v tab. 7.

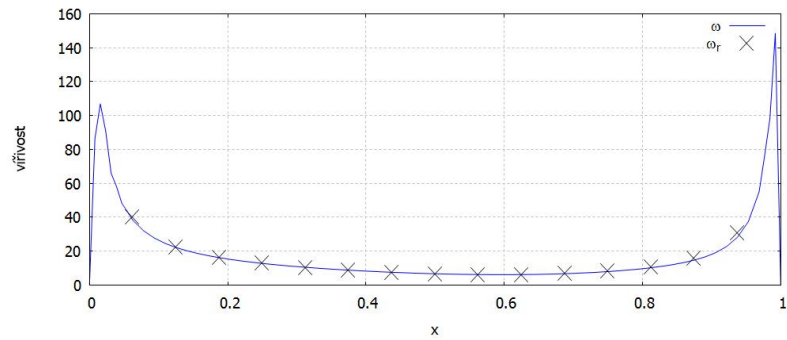


Obrázek 35: Vírové kontury, pravidelná síť (129×129)

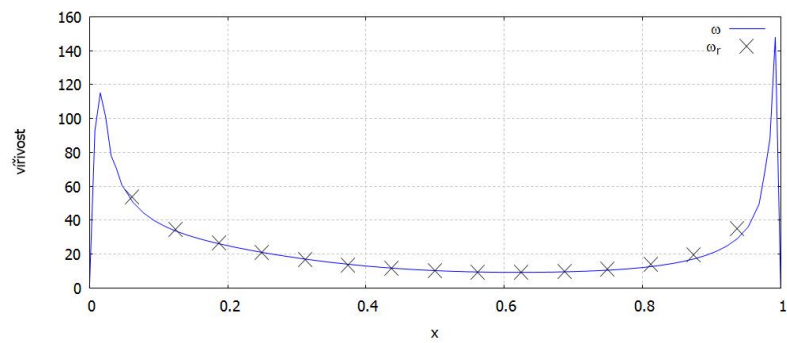
Tabulka 7: Referenční a numerické hodnoty vířivosti

x	$Re = 100$		$Re = 400$	
	ω_r	ω	ω_r	ω
1	-	-	-	-
0,0625	40,011	38,2184	53,6863	50,6998
0,125	22,5378	22,1473	34,6351	33,5876
0,1875	16,2862	16,1424	26,5825	26,102
0,25	12,7844	12,7422	21,0985	20,9945
0,3125	10,4199	10,4357	16,89	17,0338
0,375	8,69628	8,7454	13,704	13,9667
0,4375	7,43218	7,4939	11,4537	11,7253
0,5	6,57451	6,6271	10,0545	10,2462
0,5625	6,13973	6,1569	9,38889	9,4396
0,625	6,18946	6,1399	9,34599	9,2139
0,6875	6,82674	6,67176	9,88979	9,5326
0,75	8,2211	7,9101	11,2018	10,5146
0,8125	10,7414	10,196	13,9068	12,635
0,875	15,6591	14,683	19,6859	17,21
0,9375	30,7923	28,226	35,0773	29,171
1	-	-	-	-

Odečtené hodnoty vířivosti z tab. 7 vyneseme do grafů a porovnáme s referenčními hodnotami ω_r .



(a) $Re = 100$

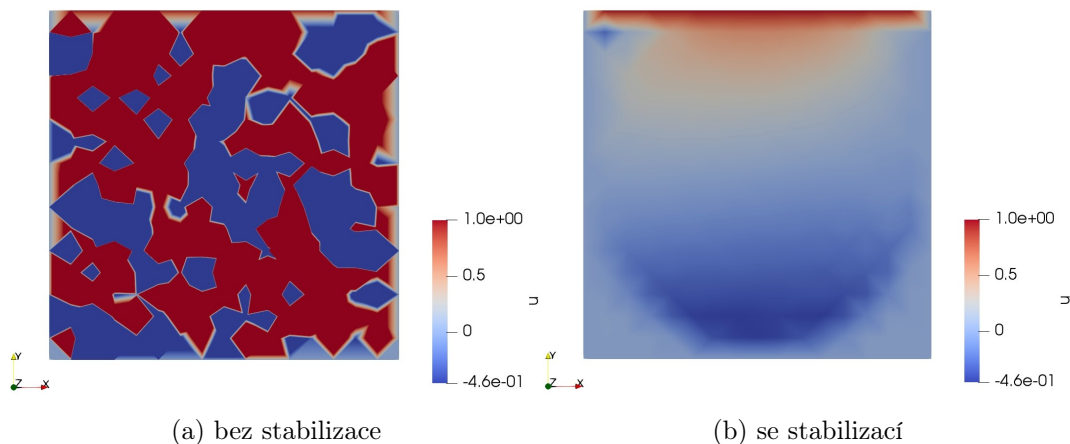


(b) $Re = 400$

Obrázek 36: Srovnání numerických a referenčních hodnot vířivosti

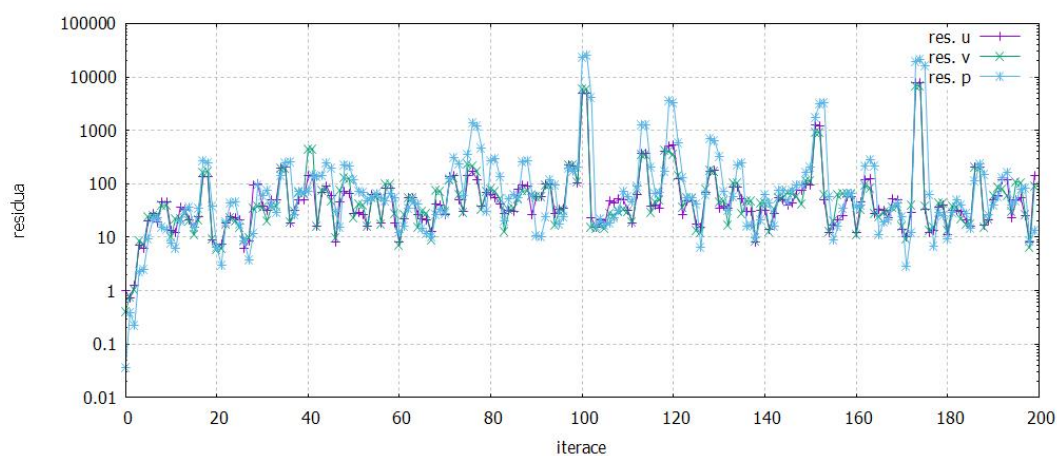
Jak je vidět na obrázku 36, tak zde dochází k trochu větším odchýlkám, stále se však tyto výsledky dají považovat za relevantní. Ověřili jsme vypočtené numerické výsledky s referenčními a můžeme se zabývat stabilitou řešení pro vyšší Reynoldsova čísla.

Napočítáme stabilizovaný problém kavity, užijeme kombinované stabilizace (6.26) pro $Re = 5000$ na hrubé pravidelné síti 17×17 s krokem $h \approx 0,09$.



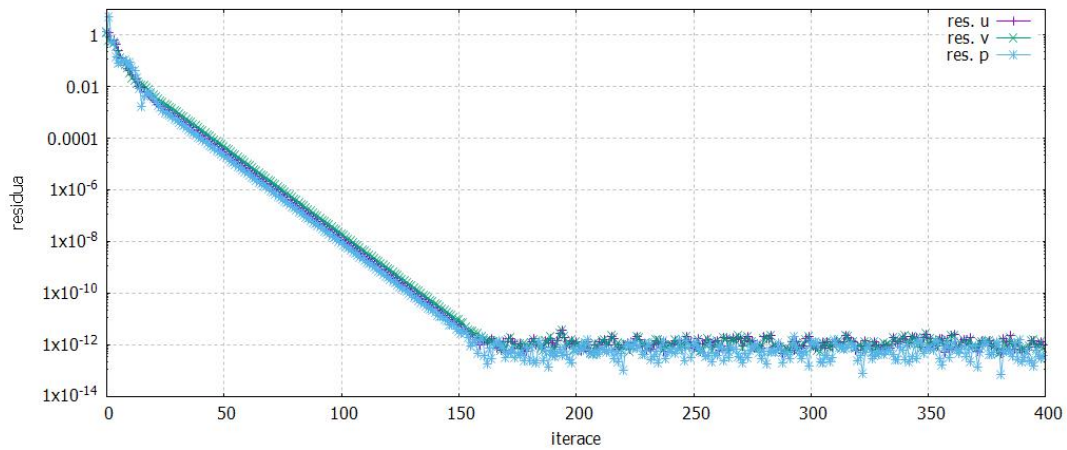
Obrázek 37: Numerické řešení složky rychlosti u pro $Re = 5000$, síť (17×17)

Na obr. 37 vidíme numerické výsledky problému kavity, konkrétně složky rychlosti u bez a se stabilizací. U nestabilizovaného problému počítaného Galerkinovou aproximací vidíme mnoho nefyzikálních oscilací bez jakýchkoli podobností s předchozími výsledky kavity. Oproti tomu stabilizovaný problém vypadá mnohem relevantněji, je ale znát hrubá síť která dosti ovlivňuje výsledek.



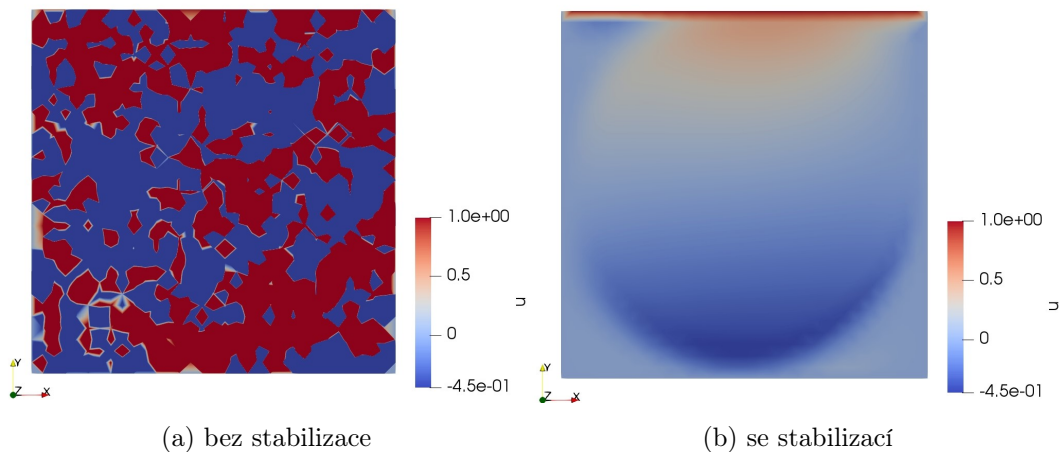
Obrázek 38: Konvergence reziduí nestabilizovaného problému

Z obr. 38 vidíme, že nestabilizovaný problém diverguje, oproti stabilizovanému problému který zkonvergoval bez oscilací viz obr. 39.



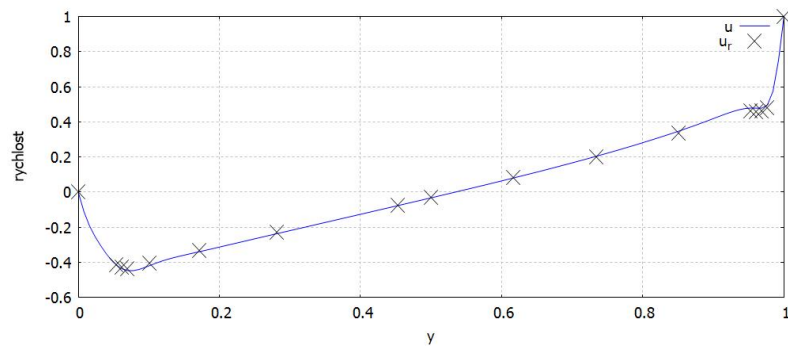
Obrázek 39: Konvergence reziduí stabilizovaného problému

Dosáhli jsme tedy stability ale řešení není příliš přesné, je hodně ovlivněné velkou hrubostí sítě, provedeme tedy výpočet na jemnější síti 33×33 .



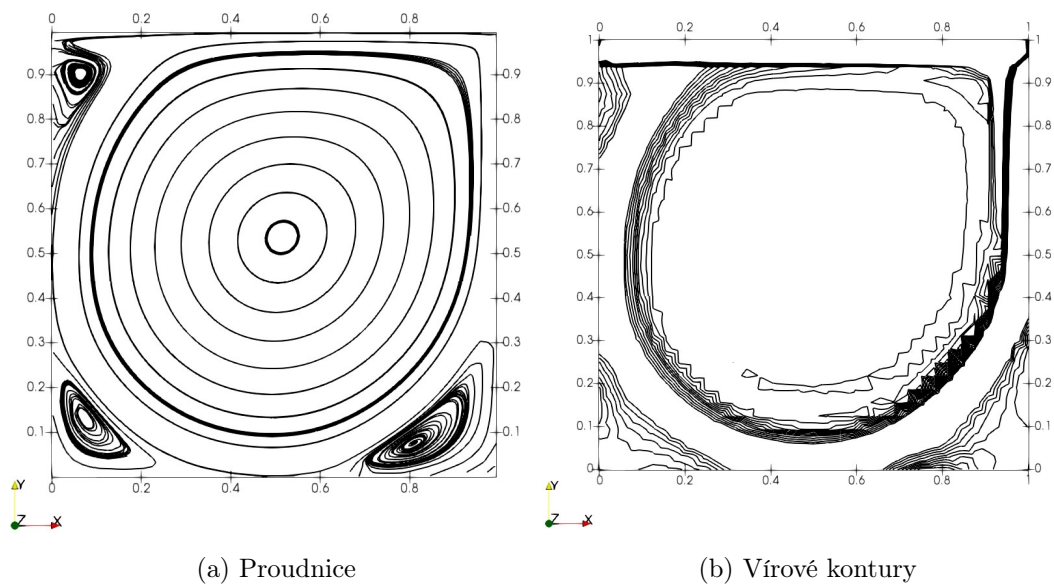
Obrázek 40: Numerické řešení složky rychlosti u pro $Re = 5000$, síť (33×33)

Na obr. 40 vidíme mnohem relevantnější numerický výsledek problému kavity, zcela bez viditelných oscilací. Numerický výsledek můžeme opět ověřit s výsledky v článku [12]. Odečteme složky rychlosti u podél řezu skrz Geometrický střed oblasti viz obr. 32a a porovnáme s referenčními hodnotami u_r převzatými z článku.



Obrázek 41: Provnání numerických a referenčních hodnot rychlosti, $Re = 5000$

Na obr. 41 vidíme srovnání numerických a referenčních výsledků pro stabilizovaný problém kavity, pro $Re = 5000$. Výpočet byl proveden na síti 33×33 s krokem $h = 0,04$. Stabilizovaný problém dosáhl takřka stejných hodnot rychlosti jako v uvedeném článku [12].



Obrázek 42: Vířivost pro $Re = 5000$, síť (33×33)

Na obr. 42 vidíme proudnice a vírové kontury stabilizovaného problému kavity. Vírové proudnice odpovídají proudnicím v článku [12]. Vírové kontury jsou oproti konturám uvedeným v článku dosti zkreslené, je patrné nepravidelné zvlnění křivek kontur (oscilace). Nesrovnalosti výsledků budou způsobeny příliš hrobou sítí, kdy výsledky v [12] jsou počítány na síti 257×257 oproti naší síti 33×33 , která je $3 \times$ hrubší.

Z hlediska stability však bylo dosaženo mnohem přesnějších výsledků, než-li u Galerkinovy aproximace.

7 Závěr

V diplomové práci byly odvozeny matematické formulace problémů a jejich slabé formulace. Dále je popsána a aplikována metoda konečných prvků na problém vedení tepla a proudění. Následně byla rozebrána diskretizace skalárního, vektorového a nelineárního problému.

Pro práci bylo naprogramováno řešení Laplaceovy rovnice v programovacím jazyce C/C++ i s výpočty uvedených norem pro ověření řešení. Následné problémy byly realizovány pomocí knihovny CFEM, kde byla doplněna stabilizace problémů konvekce-difuze a upravena stabilizace Navierových-Stokesových rovnic. Také byly rozebrány metody řešení soustav lineárních rovnic, které byly užity pro výpočet testovacích problémů.

V kapitole 6 byl napočítán stacionární případ vedení tepla na více sítích s ověřením konvergence dle uvedených norem. Následně byl napočítán p-Laplacův nelineární problém na více sítích opět s ověřením konvergence. Pro problém dominující konvekce (konvekce-difuze) byly napočítány výsledky Galerkinovy aproximace na vybraných sítích, které byly následně srovnány se stabilizovaným problémem se SUPG stabilizací. Stabilita metody byla vyvozena z hodnot Péceletova čísla. Z výsledků byly velmi dobře patrné výhody stabilizace, kdy bylo dosaženo relevantních výsledků už na hrubé síti.

Dále jsme napočítali Stokesův a Navier-Stokesův problém. Pro Navier-Stokesův problém jsme se zabývali stabilitou pro vyšší Reynoldsova čísla ($Re = 1000$) na hrubé síti. Následně porovnáním řešení Galerkinovy aproximace a stabilizovaného problému, zde bylo dosaženo relevantních výsledků pouze pro stabilizovaný problém, Galerkinova metoda divergovala.

V poslední kapitole jsme řešili výpočet problému kavity, kde jsme ověřili vypočtené hodnoty s referenčními hodnotami převzatými z literatury viz [12], pro $Re = 100$ a 400 . Došli jsme ke shodě a tím ověřili výpočet. Následně jsme se zabývali výpočtem stabilizovaného problému kavity pro vyšší Reynoldsova čísla ($Re = 5000$) na hrubé síti. Porovnáním nestabilizovaných a stabilizovaných výsledků bylo zřejmé, že stabilizovaný problém zkonvergoval bez oscilací oproti Galerkinově aproximaci. Hodnoty rychlosti stabilizovaného problému se shodovaly s referenčními hodnotami uvedenými v literatuře, viz [12]. Zobrazené vírové kontury v oblasti kavity nebyly příliš přesné, bylo znatelné zkreslení (zvlnění) kontur. Nepřesnost vírových kontur byla způsobena příliš hrubou

sítí, přesnějšího výsledku bychom dosáhli zjemněním sítě. Naším cílem však bylo vyšetření stability pro hrubší síť, kde byly stabilizované výsledky jednoznačně přesnější. Tím byly stanovené cíle práce splněny.

Seznam literatury

- [1] ŠESTÁK Jiří a RIEGER František, *Přenos hybnosti tepla a hmoty*. vyd. 2. Praha, Vydavatelství ČVUT. ISBN: 80-01-00957-2.
- [2] SVÁČEK Petr a FEISTAUER Miroslav, *Metoda konečných prvků*. Praha, Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN:80-01-03522-0.
- [3] BEČVÁŘ Jindřich, *Lineární algebra*. Praha, Vydavatelství Matfyzpress, 2005. ISBN: 80-86732-57-6.
- [4] MARIÁN Fabián, HABALA Petr, HÁJEK Petr, MONTESINOS Vicente, ZIZLER Václav, *Banach Spaces Theory*. New York, nakladatelství Springer, 2010. ISBN: 978-1-4419-7514-0.
- [5] KUFNER A., JOHN Oldřich, FUČÍK Svatopluk, *Function Spaces*. Praha, Vydavatelství Springer Netherlands, 1977. ISBN: 978-90-286-0015-7.
- [6] LIENHARDT IV John H. A John H. LIENHARD V, *A Heat Transfer Textbook* 4rd ed. Dover Publications, 2013. ISBN:0486479315.
- [7] PLEŠEK Jiří, *Nelineární mechanika kontinua s příklady*. Praha, 2015.
- [8] QUARTERONI Alfio, VALLI Alberto, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Berlín, Springer-Verlag, 1994. ISBN: 3-540-57111-6.
- [9] SVÁČEK Petr, *On implementation aspects of finite element method and its application*. Springer US, 2018. ISSN: 1572-9044.
- [10] ELMAN C. H., SILVESTR J. D. a WATHEN j. A., *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. 2006.
- [11] SuiteSparse: a suite of sparse matrix software [online]. [cit. 2020-01-13]. Dostupné z: <http://faculty.cse.tamu.edu/davis/suitesparse.html>.
- [12] GHIA U., GHIA N. K. a SHIN C. T., *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*. Ohio, Journal of Computational Physics, 1982. 48, 387-41.