

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní  
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Diplomová práce

**Porovnání Van der Waalsova a Gentova modelu hustoty  
deformační energie**

*Ramez Bariekzahy*

Vedoucí práce: doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D

Studijní program: Strojní inženýrství, navazující magisterský  
Obor: Biomechanika a lékařské přístroje

9. srpna 2019

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bariekzahy** Jméno: **Ramez** Osobní číslo: **437760**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Biomechanika a lékařské přístroje**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Porovnání Van der Waalsova a Gentova modelu hustoty deformační energie**

Název diplomové práce anglicky:

**Comparison between Van der Waals and Gent model of the strain energy density function**

Pokyny pro vypracování:

Vysvětlete základy popisu nelineárně pružného chování materiálů  
Proveďte klasifikaci hyperelastických konstitutivních modelů  
Porovnejte mechanické odezvy Gentova a Van der Waalsova modelu  
při stavech napjatosti odpovídajících základním namáháním (tah, tlak, prostý smyk)  
a rovnoosé rovinné deformaci a nafukování tenkostěnné membrány

Seznam doporučené literatury:

Holzappel G. A. (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley and Sons, Chichester  
Horný L. (2014) Patobiomechanika srdečněcévního systému I. díl. Studijní materiál ČVUT FS, dostupné z <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Patobiomechanika-srdecnecevního-systemu-I.pdf>  
Marckmann G., Verron E. (2006) Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. Rubber Chemistry and Technology, 79(5), 835-858

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

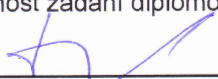
**doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS**

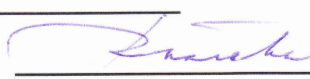
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **15.04.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **16.08.2019**

Platnost zadání diplomové práce:

  
doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

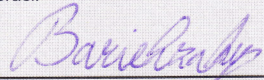
  
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

1.5.2019  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

# Anotační list

**Jméno autora:** Bc. Ramez Bariekzahy

**Název DP:** Porovnání Van der Waalsova a Gentova modelu hustoty deformační energie

**English title:** Comparison between Van der Waals and Gent model of the strain energy density function

**Rok:** 2019

**Studijní program:** Strojní inženýrství

**Ústav/odbor:** Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

**Vedoucí práce:** doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D

**Bibliografické údaje:**

počet stran: 91

počet obrázků: 49

**Klíčová slova:** Hyperelasticita, hustota deformační energie, Gentův materiálový model, Van der Waalsův materiálový model, jednoosá napjatost, prostý smyk, rovnoosá rovinná deformace, nafukování tenkostěnné membrány.

**Keywords:** Hyperelasticity, strain energy density function, Gent material model, Van der Waals material model, uniaxial state of stress, simple shear, equibiaxial extension, inflation of cylindrical thin-walled membrane.

**Abstrakt:** Tato diplomová práce se zaměřuje na porovnání dvou hyperelastických konstitutivních modelů, jmenovitě Gentova a Van der Waalsova. V práci je nejprve proveden výklad základů nelineární teorie elasticity, následuje klasifikace hyperelastických konstitutivních modelů (Neo-hookeovský, Arrudy-Boyceové, zobecněný Rivlinův a Ogdenův). Hlavní část je věnována porovnání mechanické odezvy Gentova a Van der Waalsova materiálového modelu při jednoosé napjatosti, prostém smyku, rovnoosé rovinné deformaci a nafukování válcové tenkostěnné membrány.

**Abstract:** This thesis is focused on comparison between two hyperelastic material models, namely Gent and Van der Waals model. At first, the basics of nonlinear theory of elasticity is explained, followed by the classification of hyperelastic constitutive models (neo-Hookean, Arruda-Boyce, generalized Rivlin and Ogden model). The main part of the thesis is devoted to comparison of mechanical response of Gent and Van der Waals material model at uniaxial state of stress, simple shear, equibiaxial extension and inflation of cylindrical thin-walled membrane.

# Poděkování

Tímto bych rád poděkoval především doc. Ing. Lukašovi Hornému, Ph. D., který mi jako vedoucí diplomové práce poskytl odborné vedení, cenné konzultace a rady. Další poděkování bych chtěl věnovat mé rodině za podporu.

*Autor*



# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou konzultací poskytnutých vedoucím práce. Pro psaní práce jsem použil pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 9. srpna 2019

.....  
Ramez Bariekzahy

# Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| Seznam použitého značení . . . . .                              | 4         |
| <b>1 Úvod</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2 Motivace</b>   | <b>8</b>  |
| <b>3 Teorie nelineární elasticity</b>                           | <b>9</b>  |
| 3.1 Kinematika deformace . . . . .                              | 9         |
| 3.2 Lagrangeova metoda popisu přetvoření kontinua . . . . .     | 10        |
| 3.2.1 Gradient posunutí . . . . .                               | 10        |
| 3.2.2 Deformační gradient . . . . .                             | 11        |
| 3.2.3 Polární rozklad deformačního gradientu . . . . .          | 12        |
| 3.2.4 Tenzor protažení . . . . .                                | 13        |
| 3.2.5 Geometrická interpretace deformačního gradientu . . . . . | 14        |
| 3.2.6 Cauchy–Greenův tenzor deformace . . . . .                 | 15        |
| 3.2.7 Greenův–Lagrangeův tenzor deformace . . . . .             | 15        |
| 3.3 Mechanické napětí . . . . .                                 | 17        |
| 3.3.1 Cauchyho (skutečné) napětí . . . . .                      | 17        |
| 3.3.2 První Piola–Kirchhoffovo napětí . . . . .                 | 18        |
| 3.3.3 Druhé Piola–Kirchhoffovo napětí . . . . .                 | 19        |
| 3.3.4 Tenzor elasticity . . . . .                               | 19        |
| 3.4 Konstitutivní rovnice . . . . .                             | 20        |
| 3.4.1 Hyperelastické materiály . . . . .                        | 20        |
| 3.4.2 Nestlačitelné hyperelastické materiály . . . . .          | 22        |
| <b>4 Hyperelastické konstitutivní modely</b>                    | <b>23</b> |
| 4.1 Modely založené na fyzikální podstatě . . . . .             | 23        |
| 4.1.1 Neo-hookeovský materiálový model . . . . .                | 23        |
| 4.1.2 Arrudy–Boyceové materiálový model . . . . .               | 25        |
| 4.1.3 Gentův materiálový model . . . . .                        | 27        |
| 4.1.3.1 Omezující podmínky . . . . .                            | 27        |
| 4.1.4 Van der Waalsův materiálový model . . . . .               | 27        |
| 4.1.4.1 Omezující podmínky . . . . .                            | 28        |
| 4.2 Modely založené na matematické podstatě . . . . .           | 28        |
| 4.2.1 Zobecněný Rivlinův materiálový model . . . . .            | 28        |
| 4.2.2 Ogdenův materiálový model . . . . .                       | 29        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>5</b> | <b>Mechanická odezva Van der Waalsova a Gentova modelu</b> | <b>30</b> |
| 5.1      | Jednoosá napjatost . . . . .                               | 30        |
| 5.1.1    | Formulace úlohy . . . . .                                  | 30        |
| 5.1.2    | Gentův model . . . . .                                     | 31        |
| 5.1.2.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 31        |
| 5.1.2.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 32        |
| 5.1.2.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 33        |
| 5.1.3    | Van der Waalsův model . . . . .                            | 34        |
| 5.1.3.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 34        |
| 5.1.3.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 35        |
| 5.1.3.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 36        |
| 5.1.4    | Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu . . . . .      | 38        |
| 5.2      | Prostý smyk . . . . .                                      | 42        |
| 5.2.1    | Formulace úlohy . . . . .                                  | 42        |
| 5.2.2    | Gentův model . . . . .                                     | 43        |
| 5.2.2.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 43        |
| 5.2.2.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 45        |
| 5.2.2.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 45        |
| 5.2.3    | Van der Waalsův model . . . . .                            | 46        |
| 5.2.3.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 46        |
| 5.2.3.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 48        |
| 5.2.3.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 49        |
| 5.2.4    | Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu . . . . .      | 51        |
| 5.3      | Rovnoosá rovinná deformace . . . . .                       | 54        |
| 5.3.1    | Formulace úlohy . . . . .                                  | 54        |
| 5.3.2    | Gentův model . . . . .                                     | 55        |
| 5.3.2.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 55        |
| 5.3.2.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 56        |
| 5.3.2.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 57        |
| 5.3.3    | Van der Waalsův model . . . . .                            | 58        |
| 5.3.3.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 58        |
| 5.3.3.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 59        |
| 5.3.3.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 60        |
| 5.3.4    | Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu . . . . .      | 62        |
| 5.4      | Nafukování tenkostěnné membrány . . . . .                  | 65        |
| 5.4.1    | Formulace úlohy . . . . .                                  | 65        |
| 5.4.2    | Gentův model . . . . .                                     | 67        |
| 5.4.2.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 67        |
| 5.4.2.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 69        |
| 5.4.2.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 70        |
| 5.4.3    | Van der Waalsův model . . . . .                            | 74        |
| 5.4.3.1  | Určení Cauchyho napětí . . . . .                           | 74        |
| 5.4.3.2  | Kinematicky přípustné deformace . . . . .                  | 76        |
| 5.4.3.3  | Interpretace výsledků . . . . .                            | 78        |
| 5.4.4    | Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu . . . . .      | 83        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>6 Závěr</b>                                  | <b>85</b> |
| 6.1 Shrnutí . . . . .                           | 85        |
| 6.2 Výsledky . . . . .                          | 85        |
| 6.2.1 Jednoosá napjatost . . . . .              | 86        |
| 6.2.2 Prostý smyk . . . . .                     | 86        |
| 6.2.3 Rovnoosá rovinná deformace . . . . .      | 86        |
| 6.2.4 Nafukování tenkostěnné membrány . . . . . | 87        |
| 6.3 Doplnující rozbor . . . . .                 | 88        |
| <b>Literatura</b>                               | <b>90</b> |

## Seznam použitého značení

|                   |   |                      |
|-------------------|---|----------------------|
| $a$               | globální parametr interakce                               | [ 1 ]                |
| $a_0$             | délka hrany krychle                                       | [ m ]                |
| $A_{ij}$          | materiálový parametr zobecněného Rivlinova modelu         | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $ds$              | elementární plocha v rovině řezu v průběžné konfiguraci   | [ m <sup>2</sup> ]   |
| $dS$              | elementární plocha v rovině řezu v referenční konfiguraci | [ m <sup>2</sup> ]   |
| $dV$              | elementární objem v průběžné konfiguraci                  | [ m <sup>3</sup> ]   |
| $dV_r$            | elementární objem v referenční konfiguraci                | [ m <sup>3</sup> ]   |
| $F_{red}$         | konstantní axiální síla                                   | [ N ]                |
| $h$               | druhý rozměr tělesa v průběžné konfiguraci                | [ m ]                |
| $H$               | druhý rozměr tělesa v referenční konfiguraci              | [ m ]                |
| $w$               | třetí rozměr tělesa v průběžné konfiguraci                | [ m ]                |
| $W$               | třetí rozměr tělesa v referenční konfiguraci              | [ m ]                |
| $I_1(\mathbf{C})$ | první hlavní invariant tenzoru $\mathbf{C}$               | [ 1 ]                |
| $I_2(\mathbf{C})$ | druhý hlavní invariant tenzoru $\mathbf{C}$               | [ 1 ]                |
| $I_3(\mathbf{C})$ | třetí hlavní invariant tenzoru $\mathbf{C}$               | [ 1 ]                |
| $J$               | jacobián  | [ 1 ]                |
| $J_{VdW}$         | zobecněný invariant tenzoru deformace                     | [ 1 ]                |
| $k$               | Boltzmannova konstanta                                    | [ JK <sup>-1</sup> ] |
| $l$               | první rozměr tělesa v průběžné konfiguraci                | [ m ]                |
| $l_p$             | délka článku řetězce                                      | [ m ]                |
| $L$               | první rozměr tělesa v referenční konfiguraci              | [ m ]                |
| $\mathcal{L}$     | Langevinova funkce  | [ 1 ]                |
| $n$               | hustota řetězců   | [ m <sup>-3</sup> ]  |
| $N$               | počet článků v řetězci                                    | [ 1 ]                |
| $p$               | Lagrangeův multiplikátor                                  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $P_m$             | spojité zatížení  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $q$               | poměrná síla vztažená na délku obvodu                     | [ Nm <sup>-1</sup> ] |
| $Q_{1G}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $Q_{1W}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $Q_{2G}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $Q_{2W}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $Q_{3G}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $Q_{3W}$          | substituční člen  | [ 1 ]                |
| $r$               | střední poloměr membrány v průběžné konfiguraci           | [ m ]                |
| $r_0$             | délka vektoru $\vec{r}_0$                                 | [ m ]                |
| $r_{ch}$          | délka vektoru $\vec{r}_{ch}$                              | [ m ]                |
| $R$               | střední poloměr membrány v referenční konfiguraci         | [ m ]                |
| $t$               | čas   | [ s ]                |
| $T$               | Termodynamická teplota                                    | [ K ]                |
| $x_i$             | prostorové souřadnice                                     | [ m ]                |
| $X_K$             | materiálová souřadnice                                    | [ m ]                |
| $z$               | cylindrická axiální souřadnice v průběžné konfiguraci     | [ m ]                |
| $Z$               | cylindrická axiální souřadnice v referenční konfiguraci   | [ m ]                |

|                              |  |                      |
|------------------------------|--|----------------------|
| $\alpha_p$                   | materiálový parametr Ogdenova modelu                   | [ 1 ]                |
| $\beta$                      | směšující parametr                                     | [ 1 ]                |
| $\beta_L$                    | inverzní Langevinova funkce                            | [ 1 ]                |
| $\Gamma_{V1}$                | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\Gamma_{V2}$                | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\delta$                     | úhel zkosu   | [ rad ]              |
| $\delta_{ij}$                | Kroneckerovo delta                                     | [ 1 ]                |
| $\Delta_V$                   | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\eta$                       | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\chi$                       | cílová funkce  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\chi_{ax}$                  | dílčí cílová funkce                                    | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\chi_{circ}$                | dílčí cílová funkce                                    | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\iota$                      | cílová funkce  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\iota_{ax}$                 | dílčí cílová funkce                                    | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\iota_{circ}$               | dílčí cílová funkce                                    | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\lambda_{ch}$               | protažení řetězce                                      | [ 1 ]                |
| $\lambda_k$                  | hlavní protažení                                       | [ 1 ]                |
| $\lambda_m$                  | parametr limitního protažení                           | [ 1 ]                |
| $\lambda_{rR}$               | radiální hlavní protažení                              | [ 1 ]                |
| $\lambda_{zZ}$               | axiální hlavní protažení                               | [ 1 ]                |
| $\lambda_{zZini}$            | počáteční axiální hlavní protažení                     | [ 1 ]                |
| $\lambda_{\theta\Theta}$     | obvodové hlavní protažení                              | [ 1 ]                |
| $\lambda_{\theta\Theta ini}$ | počáteční obvodové hlavní protažení                    | [ 1 ]                |
| $\mu$                        | počáteční smykový modul pružnosti                      | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\omega_{G1}$                | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\omega_{V1}$                | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\omega_{V2}$                | substituční člen                                       | [ 1 ]                |
| $\Omega$                     | průběžná podmnožina prostoru                           | [ - ]                |
| $\partial\Omega$             | hranice průběžné podmnožiny prostoru                   | [ - ]                |
| $\Omega_r$                   | referenční podmnožina prostoru                         | [ - ]                |
| $\partial\Omega_r$           | hranice referenční podmnožiny prostoru                 | [ - ]                |
| $\pi$                        | Ludolfovo číslo  | [ 1 ]                |
| $\Pi$                        | vnitřní tlak   | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\Pi_{int}$                  | vnitřní potenciální energie                            | [ J ]                |
| $\Psi$                       | hustota deformační energie                             | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{ArrudaBoyce}$         | Arrudy-Boyceov model hustoty deformační energie        | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{Gent}$                | Gentův model hustoty deformační energie                | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{MooneyRivlin}$        | Mooney-Rivlinův model hustoty deformační energie       | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{neoHook}$             | Neo-hookeův model hustoty deformační energie           | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{Ogden}$               | Ogdenův model hustoty deformační energie               | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{Rivlin}$              | Rivlinův model hustoty deformační energie              | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\Psi_{VanderWaals}$         | Van der Waalsův model hustoty deformační energie       | [ Jm <sup>-3</sup> ] |
| $\theta$                     | cylindrická úhlová souřadnice v průběžné konfiguraci   | [ rad ]              |
| $\Theta$                     | cylindrická úhlová souřadnice v referenční konfiguraci | [ rad ]              |
| $\nu$                        | počet stavů deformace                                  | [ 1 ]                |
| $\Upsilon$                   | parametr tenkostěnnosti                                | [ 1 ]                |
| $\xi$                        | polohové zobrazení                                     | [ - ]                |

|                             |  |                      |
|-----------------------------|--|----------------------|
| $\xi^{-1}$                  | inverzní polohové zobrazení                            | [ - ]                |
| <b>b</b>                    | levý Cauchy-Greenův tenzor deformace                   | [ 1 ]                |
| <b>C</b>                    | pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace                  | [ 1 ]                |
| <b>E</b>                    | Greenův-Lagrangeův tenzor deformace                    | [ 1 ]                |
| <b>F</b>                    | deformační gradient                                    | [ 1 ]                |
| <b>F<sup>-1</sup></b>       | inverze deformačního gradientu                         | [ 1 ]                |
| <b>I</b>                    | jednotkový tenzor                                      | [ 1 ]                |
| <b>P</b>                    | první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí                  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| <b>R</b>                    | tenzor rotace  | [ 1 ]                |
| <b>S</b>                    | druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí                  | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| <b><math>\sigma</math></b>  | Cauchyho tenzor napětí                                 | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| <b>U</b>                    | pravostranný tenzor protažení                          | [ 1 ]                |
| <b>v</b>                    | levostranný tenzor protažení                           | [ 1 ]                |
| <b>z</b>                    | gradient posunutí                                      | [ 1 ]                |
| <b><math>\zeta</math></b>   | tenzor elasticity                                      | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $d\vec{f}$                  | průběžná infinitesimální výslednice sil                | [ N ]                |
| $d\vec{F}$                  | referenční infinitesimální výslednice sil              | [ N ]                |
| $d\vec{x}$                  | elementární vektor v průběžné konfiguraci              | [ m ]                |
| $d\vec{X}$                  | elementární vektor v referenční konfiguraci            | [ m ]                |
| $\vec{F}_m$                 | vektor soustředěné síly                                | [ N ]                |
| $\vec{\phi}_k$              | vlastní vektor matice tenzoru protažení                | [ 1 ]                |
| $\vec{n}$                   | vnější normála roviny řezu v průběžné konfiguraci      | [ 1 ]                |
| $\vec{N}$                   | vnější normála roviny řezu v referenční konfiguraci    | [ 1 ]                |
| $\vec{r}_0$                 | polohový vektor řetězce v referenčním stavu            | [ m ]                |
| $\vec{r}_{ch}$              | polohový vektor řetězce v průběžném stavu              | [ m ]                |
| $\vec{t}$                   | Cauchyho vektor intenzity vnitřních sil                | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\vec{T}$                   | nominální vektor intenzity vnitřních sil               | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\vec{T}_s$                 | druhý Piola-Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| $\vec{u}$                   | vektor posunutí  | [ m ]                |
| $\vec{x}$                   | polohový vektor v průběžné konfiguraci                 | [ m ]                |
| $\vec{X}$                   | polohový vektor v referenční konfiguraci               | [ m ]                |
| <u>C</u>                    | matice pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace       | [ 1 ]                |
| <u>dx</u>                   | matice elementárního vektoru v průběžné konfiguraci    | [ m ]                |
| <u>dX</u>                   | matice elementárního vektoru v referenční konfiguraci  | [ m ]                |
| <u>E</u>                    | matice Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace          | [ 1 ]                |
| <u>I</u>                    | jednotková matice                                      | [ 1 ]                |
| <u>F</u>                    | matice deformačního gradientu                          | [ 1 ]                |
| <u>F<sup>-1</sup></u>       | inverzní matice deformačního gradientu                 | [ 1 ]                |
| <u><math>\Phi</math></u>    | modální matice   | [ 1 ]                |
| <u><math>\Lambda</math></u> | spektrální matice                                      | [ 1 ]                |
| <u>R</u>                    | matice tenzoru rotace                                  | [ 1 ]                |
| <u><math>\sigma</math></u>  | matice Cauchyho tenzoru napětí                         | [ Nm <sup>-2</sup> ] |
| <u>U</u>                    | matice pravostranného tenzoru protažení                | [ 1 ]                |
| <u>v</u>                    | matice levostranného tenzoru protažení                 | [ 1 ]                |



# Kapitola 1

## Úvod

Existují materiály, jejichž závislost napětí na deformaci nelze popsat lineárním vztahem. Představme si například chování některých lidských tkání, pryžových nebo polymerních materiálů, které v průběhu deformace vykazují proměnnou tuhost. Vnitřní strukturu těchto materiálů lze zjednodušeně modelovat řetězcem ideálně tuhých neuspořádaných prvků, jež jsou vůči sobě obecně natočeny. Může se jednat o chaoticky seskupená kolagenní vlákna uvnitř lidského vazy nebo cévní stěny. V pokročilé fázi deformace se pak takový materiál stává tužším vlivem napřímění pomyslného řetězce, kdy dochází k uspořádání jednotlivých prvků. Toto je obecná představa o chování třídy materiálů, které nazýváme hyperelastické.

Tato diplomová práce je věnována porovnání dvou hyperelastických konstitutivních modelů, jmenovitě Gentova a Van der Waalsova, které definuje vztah pro hustotu deformační energie. Oba se řadí mezi modely navržené na konci 20. století a typem spadají pod modely využívající předpoklad o limitním protažení řetězce. Vzhledem k počtu materiálových parametrů je Van der Waalsův model složitější, a v této práci tak vždy následuje za Gentovým modelem.

Cílem této práce je výklad základů nelineární teorie elasticity, dále pak klasifikace hyperelastických konstitutivních modelů a porovnání mechanické odezvy Gentova a Van der Waalsova materiálového modelu při následujících stavech napjatosti: tah, tlak, prostý smyk, rovnoosá rovinná deformace a nafukování válcové tenkostěnné membrány.

Způsob provedení této diplomové práce má převážně teoretický charakter, který souvisí se zadanou problematikou. Záměrem je pochopit chování Gentova a Van der Waalsova materiálového modelu v závislosti na hodnotách vstupních parametrů a oba vzájemně porovnat.

# Kapitola 2

## Motivace

Biomechanika je nauka o silách a působení sil v živých organismech a jako vědní obor aplikuje poznatky z techniky na poli biologie a medicíny. Její historie sahá až k starověkému Aristotelovi, který popsal anatomii a funkci zvířecích orgánů, nicméně v moderním pojetí nabývá významu od počátku 17. století spolu s rozkvětem klasické mechaniky. Mezi významné osobnosti této periody bezpochyby patří: Galileo Galilei (1564-1642), Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1783), Thomas Young (1773-1829), Hermann von Helmholtz (1821-1894) a mnozí další, jejichž výčet by byl vyčerpávající (viz např. [1], [2]). V současnosti se pak jedná o progresivní vědu, která značně přispívá k pokroku v oblastech lékařství, technologií, materiálového inženýrství a robotiky.

Jednou z domén biomechaniky je určení mechanických vlastností živých tkání. V této práci se zaměříme na měkké tkáně lidského těla, které se v různých podobách nachází v kardiovaskulárním systému, kloubních chrupavkách, kůži, svalech, šlachách a vazech [3]. Důvodů, proč se nejedná o snadný úkol, si představíme hned několik. Měkké tkáně obecně vykazují materiálovou heterogenitu a anizotropii, nelineární závislost napětí na deformaci, viskoelastické a hysterezní chování, závislost na rychlosti deformace a podléhají procesu stárnutí.

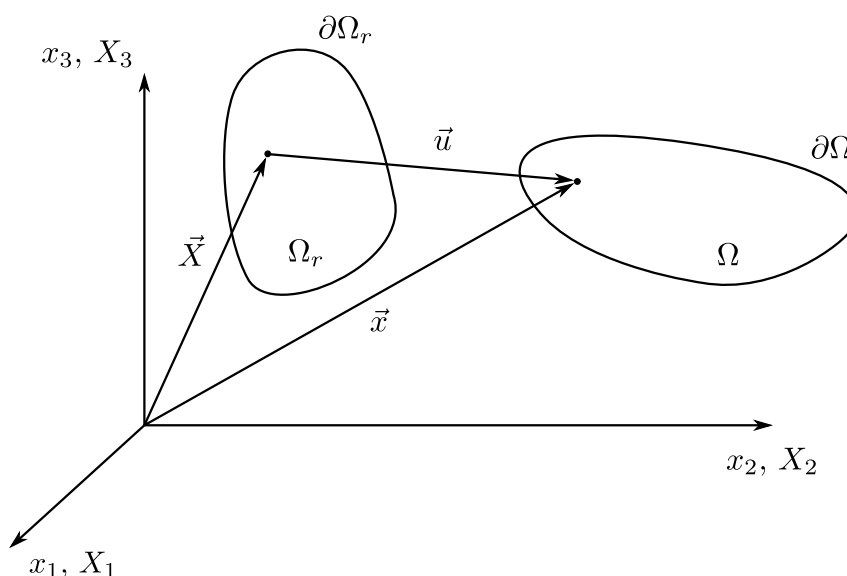
Výše zmíněné body naznačují, že převážnou část předpokladů, kterých se s výhodou využívá u běžných konstrukčních materiálů (tj. např. ocel), již není možné aplikovat při modelování biologických tkání. Rozmanitost lidských tkání je obrovská, avšak jedno mají společné – skládají se z více složek. V jistém smyslu se dají přirovnat ke kompozitům. Složitost vnitřní stavby těchto struktur má za následek to, že si při jejich popisu nevystačíme s Hookeovým zákonem, jako tomu bylo u lineárně elastických materiálů, se kterými má strojní inženýrství bohatou zkušenost. Existuje několik postupů, jak sestavit konstitutivní rovnici pro nelineárně elastický materiál. Tím obecnějším je tzv. cauchyovský přístup s přímou vazbou mezi napětím a deformací, na rozdíl od tzv. greenova přístupu, kdy jsou napětí vyjádřena jako derivace hustoty deformační energie. Pro adiabatické a izotermické deformace funkce hustoty deformační energie vždy existuje, nicméně nalézt takovou funkci, která by s dostatečnou přesností vystihovala chování konkrétního materiálu, není zcela triviální záležitost [1]. Doposud byla navržena celá řada modelů hustoty deformační energie, které do jisté míry korespondují s realitou. Jedním z nich se stal právě Van der Waalsův model hustoty deformační energie od H. G. Kiliana nebo Gentův model od A. N. Genta.

## Kapitola 3

# Teorie nelineární elasticity

V této kapitole ukotvíme esenciální vztahy a definice nelineární pružnosti, které poslouží jako nezbytný základ pro popis podstaty hyperelastických modelů. Zaměříme se na mechanicky poddajná, elastická tělesa (po zatížení a následném odlehčení se těleso navrátí do původního stavu s tím aspektem, že v průběhu nedochází k disipaci energie). Dále bude představena kinematika přetvoření kontinua, rozličné tenzory deformace a napětí, rovnice rovnováhy a konstitutivní vztahy.

### 3.1 Kinematika deformace



Obrázek 3.1: Přetvoření oblasti

Uvažujme spojitě těleso, které se rozkládá na otevřené souvislé podmnožině trojrozměrného Eukleidova prostoru. Takové těleso se v čase může deformovat a zaujímat různé tvary. Těleso v počátečním čase  $t = 0$ , tj. v *referenční konfiguraci*, zaujímá podmnožinu prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kterou budeme značit symbolem  $\Omega_r$ , její hranici pak symbolem  $\partial\Omega_r$  (viz Obr. 3.1). Předpokládejme, že se těleso v čase  $t > 0$  kvazistaticky deformuje, zaujme podmnožinu  $\Omega$  s hranicí  $\partial\Omega$  a tím se ocitne v *průběžné konfiguraci* [4]. Nechť polohový vektor  $\vec{X}$  zaměřuje *materiálový bod* z množiny  $\Omega_r$  a polohový vektor  $\vec{x}$  *prostorový bod* z množiny  $\Omega$ . V Lagrangeově pojetí mluvíme o jednom konkrétním bodu, který v čase  $t$  změnil svou polohu prostřednictvím vektoru posunutí  $\vec{u}$  dle vztahu

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad (3.1)$$

Tímto způsobem zavedené Lagrangeovy *materiálové souřadnice*  $X_K$  a Eulerovy *prostorové souřadnice*  $x_i$ , kde  $K, i \in \{1, 2, 3\}$ , budeme nadále vztahovat ke společné kartézské vektorové bázi [5]. V této práci u nadcházejících vyjádření v indexovém zápisu předpokládáme, že si čtenář za indexy  $i$  a  $K$  dosadí číselné hodnoty 1, 2 a 3 pro získání příslušných složek uvažovaných veličin.

## 3.2 Lagrangeova metoda popisu přetvoření kontinua

Zmíněné přetvoření kontinua definujeme matematickým zobrazením  $\xi : \Omega_r \rightarrow \Omega$ , které převádí polohový vektor  $\vec{X}$  v  $\Omega_r$  na polohový vektor  $\vec{x}$  v  $\Omega$ . Takovému zobrazení říkáme *pohyb tělesa*. Uvažujme-li problém s fyzikální podstatou věci, oblast  $\Omega_r$  bude vyplněna částicemi hmotného materiálu, které se ovšem při idealizované deformaci zachovají, pouze se změní jejich uspořádání na oblast  $\Omega$ . Kromě toho předpokládáme, že ve skutečnosti žádné dvě částice, ať už v referenční nebo v průběžné konfiguraci, nezaujmou stejné místo v prostoru. Za těchto podmínek lze zobrazení  $\xi$  prohlásit za regulární, jehož inverzní zobrazení budeme značit  $\xi^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega_r$ . Dále nechť zobrazení  $\xi$  a  $\xi^{-1}$  jsou spojitě diferencovatelné dle potřeby.

$$\vec{x} = \xi(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

$$\vec{X} = \xi^{-1}(\vec{x}, t) \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Gradient posunutí

Nejprve zavedeme *gradient posunutí*  $\mathbf{z}$ , v indexovém zápisu definovaný vztahem

$$z_{iK} = \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \quad (3.4)$$

v němž figuruje vektor posunutí  $\vec{u}(\vec{X}, t)$ , který obecně závisí na materiálovém polohovém vektoru  $\vec{X}$  a čase  $t$ . Gradient posunutí je tenzor druhého řádu [5]. Ekvivalentně ho lze zapsat

$$\mathbf{z} = \text{Grad } \vec{u} \quad (3.5)$$

kde velké počáteční písmeno operátoru označuje derivaci dle materiálových souřadnic  $X_K$  na oblasti  $\Omega_r$ . Operátor gradient mimo jiné zvyšuje řád libovolného tenzoru o jeden stupeň.

### 3.2.2 Deformační gradient

Dále zavedeme významnou veličinu mechaniky kontinua, *deformační gradient*  $\mathbf{F}$ , v indexovém zápisu definovaný vztahem

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \quad (3.6)$$

v němž figuruje polohový vektor  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ , který obecně závisí na materiálovém polohovém vektoru  $\vec{X}$  a čase  $t$ . Ekvivalentně ho lze zapsat

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \vec{x} \quad (3.7)$$

Deformační gradient je tenzor druhého řádu, jenž v matematickém kontextu odpovídá Jacobiho matici zobrazení  $\xi$  [5]. Z dříve uvedeného předpokladu hladkosti zobrazení  $\xi$  a  $\xi^{-1}$  plyne, že deformační gradient  $\mathbf{F}$  musí být nesingulární [4], tzn. že bude reprezentován čtvercovou regulární maticí  $\underline{F}$ . Vlastnost regulární matice, tj. požadavek na determinant různý od nuly, zapíšeme s využitím symbolu jacobiani  $J$

$$J = \det |\underline{F}| \neq 0 \quad (3.8)$$

Abychom dále omezili možný interval hodnot jacobiani, vypůjčíme si větu o substituci v integrálech, pomocí které dáme do rovnosti objem tělesa v průběžné konfiguraci (na oblasti  $\Omega$ ) s objemem tělesa v referenční konfiguraci (na oblasti  $\Omega_r$ ), tedy

$$\int_{\Omega} dV = \int_{\Omega_r} J dV_r > 0 \quad (3.9)$$

Vidíme, že jacobian dává do souvislosti elementární objem  $dV$  z oblasti  $\Omega$  a elementární objem  $dV_r$  z oblasti  $\Omega_r$ . Fyzikální představa o zdeformovaném tělese logicky nepřipouští záporný objem, tudíž musí platit

$$J = \frac{dV}{dV_r} = \det |\underline{F}| > 0 \quad (3.10)$$

na celé oblasti  $\Omega_r$ , aby byla rovnice (3.9) splněna [5].

#### Inverze deformačního gradientu

V následujícím textu bude potřeba taktéž *inverze deformačního gradientu*  $\mathbf{F}^{-1}$ , kterou definujeme vztahem

$$F_{Ki}^{-1} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \vec{X} \quad (3.11)$$

kde malé počáteční písmeno operátoru označuje derivaci dle prostorových souřadnic  $x_i$  na oblasti  $\Omega$ . Vynásobíme-li regulární matici  $\underline{F}$  její inverzí  $\underline{F}^{-1}$ , obdržíme jednotkovou matici  $\underline{I}$ , resp. Kroneckerovo delta  $\delta_{ij}$  definované vztahem (3.15), o čemž se níže snadno přesvědčíme za pomoci věty o derivování složené funkce. Doplňme, že pro jednoduchost indexových zápisů budeme od této chvíle uvažovat Einsteinovu sumační konvenci.

$$\underline{F} \underline{F}^{-1} = \underline{I} \quad (3.12)$$

$$F_{iM} F_{Mj}^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial X_M} \frac{\partial X_M}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad (3.13)$$

### Vztah deformačního gradientu a gradientu posunutí

Využijeme-li rovnice (3.1) dosazené do vztahu (3.6), známou funkci Kroneckerovo delta  $\delta_{iK}$  v indexovém zápisu, resp. jednotkový tenzor  $\mathbf{I}$  v tenzorovém zápisu, obdržíme níže uvedený vztah mezi deformačním gradientem  $\mathbf{F}$  a gradientem posunutí  $\mathbf{z}$ .

$$F_{iK} = \frac{\partial(X_i + u_i)}{\partial X_K} = \delta_{iK} + z_{iK} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{z} \quad (3.14)$$

$$\delta_{iK} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = K, \\ 0 & \text{je-li } i \neq K. \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.2.3 Polární rozklad deformačního gradientu

S pomocí věty o polárním rozkladu vyjádříme deformační gradient jako součin dvou členů

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}} \quad (3.16)$$

kde  $\mathbf{R}$  označuje ortonormální tenzor rotace,  $\mathbf{U}$  pravostranný tenzor protažení a  $\mathbf{v}$  levostranný tenzor protažení. Tenzory protažení  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}$  jsou symetrické a pozitivně definitní. Polární rozklad je jednoznačný [5]. Necht' tenzory druhého řádu  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{R}$  určují příslušné matice  $\underline{U}$ ,  $\underline{v}$  a  $\underline{R}$ . V následujícím odvození aplikujeme pravidlo o determinantu součinu matic spolu s pravidlem o determinantu transponované matice a využijeme ekvivalence inverze a transpozice ortonormální matice [7], abychom ukázali, že ortonormální matice  $\underline{R}$  má jednotkový determinant, tedy

$$\det |\underline{R}| \det |\underline{R}| = \det |\underline{R}^T| \det |\underline{R}| = \det |\underline{R}^T \underline{R}| = \det |\underline{I}| = 1 \quad (3.17)$$

Z výše uvedeného plyne  $\det^2 |\underline{R}| = 1$ . Výraz odmocníme a obdržíme  $\det |\underline{R}| = \pm 1$ . Uvážíme-li navíc tvrzení (3.10) a (3.16) doplněné o vlastnost pozitivní definitnosti tenzorů protažení, která implikuje  $\det |\underline{U}| > 0$  a  $\det |\underline{v}| > 0$ , pak postupem (3.18) jednoznačně určíme platnost rovnic (3.19) a (3.20).

$$\det |\underline{F}| = \det |\underline{R}\underline{U}| = \det |\underline{R}| \det |\underline{U}| \quad (3.18)$$

$$\det |\underline{R}| = +1 \quad (3.19)$$

$$\det |\underline{F}| = \det |\underline{U}| = \det |\underline{v}| \quad (3.20)$$

### 3.2.4 Tenzor protažení

V minulé podkapitole byly uvedeny dva tenzory protažení, jejichž význam si nyní přiblížíme. Nejprve využijme vlastnosti, že reálnou, symetrickou matici protažení  $\underline{U}$  z předchozí sekce lze dle věty o spektrálním rozkladu (odvození viz příloha A.1 v [5]) rozepsat do tvaru

$$\underline{U} = \underline{\Phi} \underline{\Lambda} \underline{\Phi}^T \quad (3.21)$$

Ortonormální *modální matice*  $\underline{\Phi}$  obsahuje po sloupcích seřazené *vlastní vektory*  $\vec{\varphi}_k$ , zatímco *spektrální matice*  $\underline{\Lambda}$  tvoří na diagonále *vlastní čísla*  $\lambda_k$  a mimo diagonálu nuly, kde  $k \in \{1, 2, 3\}$ , jak je naznačeno v (3.22) a (3.23).

$$\underline{\Phi} = \left( \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \\ \vec{\varphi}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.22)$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Popsaná vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory respektují úlohu (3.24). Vlastní čísla  $\lambda_k > 0$  nazveme *hlavní protažení* [4].

$$\underline{U} \vec{\varphi}_k = \lambda_k \vec{\varphi}_k \quad (3.24)$$

Nyní odvodíme užitečný vztah mezi jacobíánem a hlavními protaženími. Vyjdeme z (3.10), resp. (3.18), kam oprávněně dosadíme kladnou variantu (3.19), aplikujeme spektrální rozklad (3.21), pravidla o determinantech uvedené v sekci 3.2.3, využijeme postup (3.17) analogicky pro modální matici vzhledem k její ortonormalitě a nakonec vypočteme determinant spektrální matice, tedy

$$\begin{aligned} J &= \det |\underline{F}| = \det |\underline{R}| \det |\underline{U}| = \det |\underline{U}| = \det |\underline{\Phi} \underline{\Lambda} \underline{\Phi}^T| = \\ &= \det |\underline{\Phi}| \det |\underline{\Lambda}| \det |\underline{\Phi}^T| = (\det |\underline{\Phi}|)^2 \det |\underline{\Lambda}| = \det |\underline{\Lambda}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Totožně lze postupovat s maticí levostranného tenzoru protažení  $\underline{v}$ , která splňuje všechny výše zmíněné předpoklady pro matici pravostranného tenzoru protažení  $\underline{U}$ , a to včetně možnosti spektrálního rozložení, viz (3.26). V zájmu rozlišení jsou veličiny vztahované k matici  $\underline{v}$  označeny vlnovkou.

$$\begin{aligned} J &= \det |\underline{F}| = \det |\underline{v}| \det |\underline{R}| = \det |\underline{v}| = \det |\tilde{\underline{\Phi}} \tilde{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{\Phi}}^T| = \\ &= \det |\tilde{\underline{\Phi}}| \det |\tilde{\underline{\Lambda}}| \det |\tilde{\underline{\Phi}}^T| = (\det |\tilde{\underline{\Phi}}|)^2 \det |\tilde{\underline{\Lambda}}| = \det |\tilde{\underline{\Lambda}}| = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Na závěr dokážeme fakt, že matice tenzorů protažení  $\underline{U}$  a  $\underline{v}$  mají stejná vlastní čísla a jejich vlastní vektory se liší o matici tenzoru rotace  $\underline{R}$ . Vyjdeme z úlohy o vlastních číslech (3.24), kam dosadíme upravený vztah polárního rozkladu deformačního gradientu (3.16)

$$\underline{R}^T \underline{v} \underline{R} \vec{\varphi}_k = \lambda_k \vec{\varphi}_k \quad (3.27)$$

Vynásobíme obě strany rovnice (3.27) zleva maticí  $\underline{R}$



$$\underline{R} \underline{R}^T \underline{v} \underline{R} \vec{\varphi}_k = \lambda_k \underline{R} \vec{\varphi}_k \quad (3.28)$$

Zavedeme substituci

$$\widetilde{\vec{\varphi}}_k = \underline{R} \vec{\varphi}_k \quad (3.29)$$

A součin ortonormální matice s její transpozicí upravíme na jednotkovou matici, tedy

$$\underline{v} \widetilde{\vec{\varphi}}_k = \lambda_k \widetilde{\vec{\varphi}}_k \quad (3.30)$$

Z výsledné struktury (3.30) je zřejmé, že matice levostranného tenzoru protažení  $\underline{v}$  sdílí s maticí pravostranného tenzoru protažení  $\underline{U}$  stejná vlastní čísla  $\lambda_k$ , ovšem vlastní vektory  $\widetilde{\vec{\varphi}}_k$  matice  $\underline{v}$ , resp.  $\vec{\varphi}_k$  matice  $\underline{U}$  jsou svázány přepočtem (3.29).

### 3.2.5 Geometrická interpretace deformačního gradientu

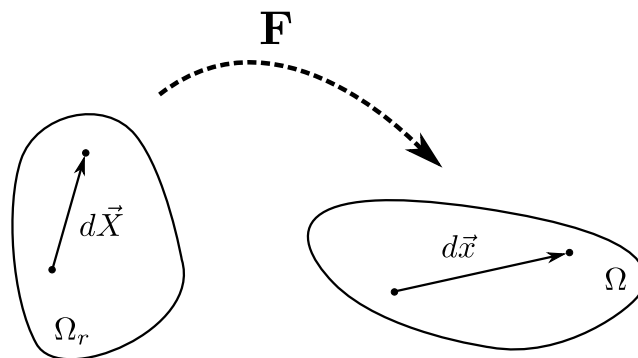
Začneme u rovnice (3.2), ze které vypočteme totální diferenciál zobrazení  $\xi$  ve složkovém zápise

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} dX_K = F_{iK} dX_K \quad (3.31)$$

Je patrné, že se jedná o násobení matice  $\underline{F}$  s maticí  $\underline{dX}$  reprezentující vektor  $d\vec{X}$ , výsledek přepíšeme

$$\underline{dx} = \underline{F} \underline{dX} \quad (3.32)$$

Deformační gradient lze v této souvislosti vyložit jako lineární zobrazení mezi prostorem referenčních a zdeformovaných elementárních vektorů, které mapuje orientovanou úsečku  $d\vec{X}$  z oblasti  $\Omega_r$  na přetvořenou úsečku  $d\vec{x}$  v průběžné konfiguraci  $\Omega$  [4][5][6], jak je schematicky znázorněno na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Přetvoření nekonečně malé úsečky

Jistě nás bude zajímat, jak se změnila délka úsečky v průběhu deformace. K určení vzdálenosti proto zavedeme metriku v trojrozměrném Eukleidově prostoru  $\mathbb{E}^3$ , která je zobecněním Pythagorovy věty [7]. Velikost vektoru  $d\vec{X}$  z oblasti  $\Omega_r$  bude dána vztahem

$$\|d\vec{X}\| = \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \sqrt{d\vec{X} \cdot d\vec{X}} \quad (3.33)$$

kde složka  $dX_K$  značí rozdíl příslušné souřadnice koncového a počátečního bodu vektoru  $d\vec{X}$ . Sečtení čtverců těchto složek de facto tvoří produkt skalárního součinu vektoru se sebou samým. Abychom se zbavili odmocniny, výraz umocníme a přepíšeme do algebraické notace

$$(\|d\vec{X}\|)^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = \underline{dX}^T \underline{dX} \quad (3.34)$$

Pod symbolem  $\underline{dX}$  nalezneme vektor  $d\vec{X}$  přepsaný do sloupcové matice, pak  $\underline{dX}^T$  označuje její transpozici. Totožný postup aplikujeme k popisu délky zdeformovaného vektoru, navíc s dosazením vzorce (3.32), tedy

$$(\|d\vec{x}\|)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \underline{dx}^T \underline{dx} = \underline{dX}^T \underline{F}^T \underline{F} \underline{dX} = \underline{dX}^T \underline{C} \underline{dX} \quad (3.35)$$

### 3.2.6 Cauchy–Greenův tenzor deformace

Plynule navážeme na předchozí sekci, kde jsme odvodili kvadrát délky zdeformovaného vektoru v průběžné konfiguraci. Součin  $\underline{F}^T \underline{F}$  byl označen jako matice  $\underline{C}$ , která je obecně symetrická a pozitivně definitní. A jelikož vznikla součinem matic, které náležejí tenzorům druhého řádu, tak se opět jedná o matici tenzoru druhého řádu [5]. Ten v literatuře nalezneme pod názvem *pravý Cauchy–Greenův tenzor deformace*  $\mathbf{C}$ , definovaný vztahem

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2} \quad (3.36)$$

Vyjádření pomocí pravostranného tenzoru protažení  $\mathbf{U}$  získáme přímým dosazením polárního rozkladu (3.16) do (3.36). Obdobným způsobem je definován *levý Cauchy–Greenův tenzor deformace*  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad (3.37)$$

### 3.2.7 Greenův–Lagrangeův tenzor deformace

Míru přetvoření kontinua lze získat tak, že popíšeme rozdíl mezi vektorem  $d\vec{X}$  z referenční konfigurace a jeho obrazem  $d\vec{x}$  v průběžné konfiguraci, viz Obr. 3.2. Odečtením kvadrátů délek (3.34) a (3.35) získáme

$$(\|d\vec{x}\|)^2 - (\|d\vec{X}\|)^2 = \underline{dX}^T \underline{C} \underline{dX} - \underline{dX}^T \underline{dX} = \underline{dX}^T (\underline{C} - \mathbf{I}) \underline{dX} = 2 \underline{dX}^T \underline{E} \underline{dX} \quad (3.38)$$

Zavedli jsme symetrickou matici  $\underline{E}$ , jež předurčuje změnu délky libovolného úseku vektoru  $d\vec{x}$ , a to nezávisle na jeho orientaci [5]. Tato matice reprezentuje *Greenův–Lagrangeův tenzor deformace*  $\mathbf{E}$ , který definujeme vztahem

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})} \quad (3.39)$$

Jedná se o tenzor druhého řádu, který ve zkoumaném místě materiálu vymizí (tj. všechny jeho složky budou rovny nule) právě tehdy, pokud v onom bodě nedochází k deformaci. Tuto vlastnost matematicky zapíšeme následovně

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall d\vec{X}: \|d\vec{x}\| = \|d\vec{X}\| \quad (3.40)$$

Dosazením (3.14) a (3.36) do (3.39) získáme vyjádření Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace v závislosti na gradientu posunutí v tenzorovém zápisu (3.41), případně ve složkovém zápisu (3.42).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \mathbf{z})^T (\mathbf{I} + \mathbf{z}) - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [\mathbf{z} + \mathbf{z}^T + \mathbf{z}^T \mathbf{z}] \quad (3.41)$$

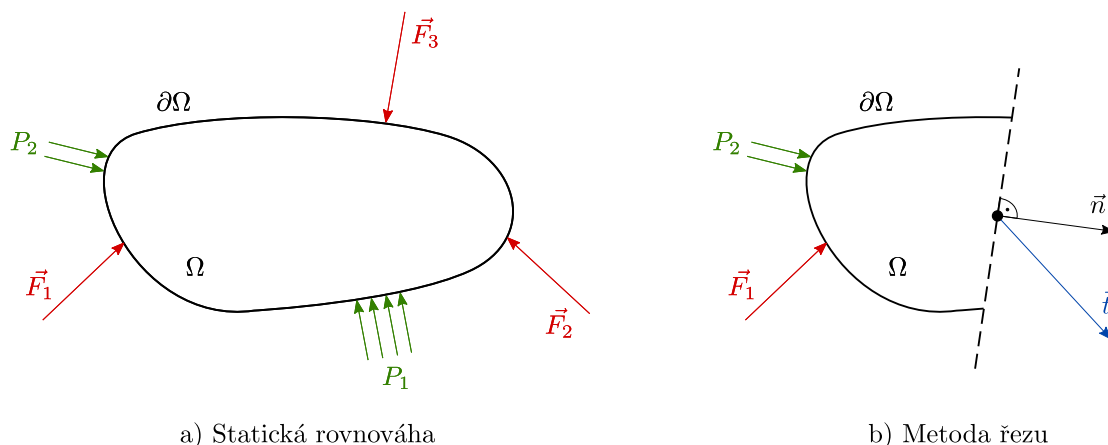
$$E_{IK} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_I}{\partial X_K} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} + \frac{\partial u_m}{\partial X_I} \frac{\partial u_m}{\partial X_K} \right) \quad (3.42)$$

### 3.3 Mechanické napětí

Napětí neboli intenzita vnitřních sil je fyzikální veličina, která v tělese popisuje rozložení sil na jednotku plochy a odráží tak míru namáhání tělesa. Může být vyvoláno buďto vnějšími nebo objemovými silovými účinky. Ve skutečnosti ho nelze přímo naměřit, pouze dopočítat. Využívá se např. k vyhodnocení mezních stavů napjatosti. V této sekci zadefinujeme tři různé tenzory napětí, které lze použít k popisu tělesa z nelineárně pružného materiálu a tenzor elasticity, jehož využití nalezneme v konkrétních úlohách tohoto textu.

#### 3.3.1 Cauchyho (skutečné) napětí

Uvažujme těleso v průběžné konfiguraci  $\Omega$ , které se nachází ve statické rovnováze. Toto těleso je podrobno vnějším silovým účinkům (soustředěné síly  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$ , spojitě zatížení  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , kde  $m \in \mathbb{N}$ ) a objemovým účinkům (např. gravitační síly), viz Obr. 3.3. Uvažujme bod zaměřený polohovým vektorem  $\vec{x}$ . K určení lokální napjatosti v bodě  $\vec{x}$  těleso rozdělíme rovinným řezem na dvě části, které již samy o sobě nebudou ve statické rovnováze. Abychom oddělenou část uvedli zpět do rovnováhy, připojíme do roviny řezu silové působení, které ve výsledku nahradí zbývající část.



Obrázek 3.3: Těleso vystavené vnějším silovým účinkům

V rovině řezu s vnější normálou  $\vec{n}$  uvažujme bod zaměřený polohovým vektorem  $\vec{x}$ , do kterého umístíme infinitesimální výslednici sil  $d\vec{f}$  pro zajištění statické rovnováhy. Dále zavedeme *Cauchyho vektor intenzity vnitřních sil*  $\vec{t}$ , který na elementární ploše  $ds$  v okolí vektoru  $\vec{x}$  v rovině řezu vytváří staticky ekvivalentní silové působení

$$d\vec{f} = \vec{t}ds \quad (3.43)$$

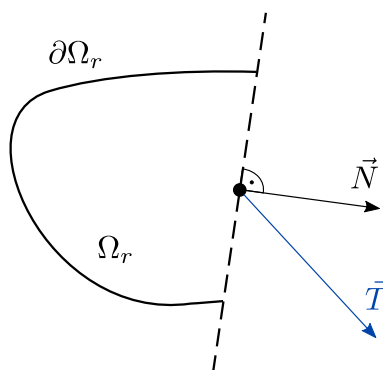
Předpokládáme, že vektor intenzity vnitřních sil závisí pouze na polohovém vektoru  $\vec{x}$ , čase  $t$  a volbě řezu, respektive na vnějším normálovém vektoru  $\vec{n}$ , tedy  $\vec{t} = \vec{t}(\vec{x}, \vec{n}, t)$ . Vztah mezi vektorem intenzity vnitřních sil a vektorem vnější normály je dán rovnicí

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma}\vec{n} \quad (3.44)$$

kde lineární transformace  $\boldsymbol{\sigma}$  označuje *Cauchyho tenzor napětí* [8]. Jedná se o symetrický tenzor druhého řádu definovaný v průběžné konfiguraci  $\Omega$ .

### 3.3.2 První Piola-Kirchhoffovo napětí

Opět uvažujme těleso v průběžné konfiguraci  $\Omega$ , které se nachází ve statické rovnováze. Rovinným řezem oddělme jednu část z tělesa a tu doplňme o silovou výslednici  $d\vec{f}$  přesně tak, jako tomu bylo v sekci 3.3.1. Nyní sledujme tentýž hmotný bod, jenž byl v průběžné konfiguraci  $\Omega$  určen polohovým vektorem  $\vec{x}$ , do referenční konfigurace  $\Omega_r$ , kde je určen polohovým vektorem  $\vec{X}$ . Vedme tímto bodem v referenční konfiguraci řez s vnější normálou  $\vec{N}$ , v jeho okolí vytyčme elementární plochu  $dS$  a na závěr do něj přenesme vektor silové výslednice  $d\vec{f}$  z průběžné konfigurace, viz Obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Řez tělesem v referenční konfiguraci

V referenční konfiguraci zavádíme *nominální vektor intenzity vnitřních sil*  $\vec{T}$ , který na elementární ploše  $dS$  vytváří ekvivalentní silové působení

$$d\vec{f} = \vec{T}dS \quad (3.45)$$

Předpokládáme obdobnou závislost nominálního vektoru intenzity vnitřních sil na čase  $t$ , poloze  $\vec{X}$  a vnější normále  $\vec{N}$ , tj.  $\vec{T} = \vec{T}(\vec{X}, \vec{N}, t)$ . Vztah mezi vektorem intenzity vnitřních sil a vektorem vnější normály je dán rovnicí

$$\boxed{\vec{T} = \mathbf{P}\vec{N}} \quad (3.46)$$

kde lineární transformace  $\mathbf{P}$  označuje *první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí*. Jedná se o obecně nesymetrický tenzor druhého řádu definovaný nad dvěma konfiguracemi  $\Omega$  a  $\Omega_r$  [8]. Sloučíme-li dále rovnice (3.43) a (3.45), doplněné o definiční vztahy (3.44) a (3.46), obdržíme

$$\boldsymbol{\sigma}\vec{n}ds = \mathbf{P}\vec{N}dS \quad (3.47)$$

Nakonec dosadíme Nansonovu větu (3.48), která popisuje změnu referenčního plošného elementu  $dS$  s normálou  $\vec{N}$  v průběžný plošný element  $ds$  s normálou  $\vec{n}$  při deformaci určující

deformační gradient  $\mathbf{F}$ , do rovnosti (3.47) a po drobných úpravách získáme vyjádření tenzoru  $\boldsymbol{\sigma}$  pomocí  $\mathbf{P}$  a naopak, viz (3.49) a (3.50) [8]. Označením  $\mathbf{F}^{-T}$  míníme transpozici inverze deformačního gradientu, tedy  $(\mathbf{F}^{-1})^T$ .

$$\vec{n}ds = J\mathbf{F}^{-T}\vec{N}dS \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T \quad (3.49)$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (3.50)$$

### 3.3.3 Druhé Piola-Kirchhoffovo napětí

V sekci 3.3.1, resp. 3.3.2, jsme využili silovou výslednici  $d\vec{f}$  k zavedení vektoru  $\vec{t}$  v průběžné konfiguraci  $\Omega$  způsobem přímým, resp. vektoru  $\vec{T}$  v referenční konfiguraci  $\Omega_r$  způsobem přenesení. Úvahy o řezech tělesy zachovejme. Nyní využijeme vzorec (3.32) v upravené formě  $d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1}d\vec{x}$  k tomu, abychom ze silové výslednice  $d\vec{f}$  (původem z průběžné konfigurace  $\Omega$ ) učinili zpětnou geometrickou transformací referenční infinitesimální výslednici sil  $d\vec{F}$ , tedy

$$d\vec{F} = \mathbf{F}^{-1}d\vec{f} \quad (3.51)$$

Tím pádem v referenční konfiguraci zavádíme *druhý Piola-Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil*  $\vec{T}_s$ , který na elementární ploše  $dS$  vytváří ekvivalentní silové působení

$$d\vec{F} = \vec{T}_s dS \quad (3.52)$$

Vztah mezi vektorem intenzity vnitřních sil a vektorem vnější normály je dán rovnicí

$$\boxed{\vec{T}_s = \mathbf{S}\vec{N}} \quad (3.53)$$

kde lineární transformace  $\mathbf{S}$  označuje *druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí*. Jedná se o symetrický tenzor druhého řádu definovaný pouze v referenční konfiguracemi  $\Omega_r$  [8]. Následující přepočtové vztahy (3.54), (3.55) a (3.56) mezi jednotlivými tenzory napětí plynou z rovnic (3.43), (3.45), (3.51) a (3.52), které byly doplněny o substituce (3.44), (3.46), (3.53) a Nansonovu větu (3.48).

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.54)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (3.55)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad (3.56)$$

### 3.3.4 Tenzor elasticity

V teorii nelineární pružnosti zavádíme veličinu charakterizující pružnost materiálu. Tenzor elasticity definujeme jako derivaci Cauchyho napětí dle deformačního gradientu, tj.

$$\boxed{\boldsymbol{\zeta} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{F}}} \quad (3.57)$$

Jedná se o tenzor 4. řádu, který má v tomto kontextu 21 nezávislých složek. Jednou z jeho možných interpretací nacházíme v popisu směrnice tečny grafu funkce napětí vs. deformace.

## 3.4 Konstitutivní rovnice

Postupujeme-li k řešení skutečných technických problémů souvisejících s popisem deformovatelných těles, nastává potřeba doplnit rovnice kinematické, napěťové a bilanční další skupinou, kterou představují *konstitutivní rovnice*. Konstitutivní rovnice s určitou přesností modelují chování reálných materiálů a poskytují tak idealizovaný popis skutečnosti na bázi zkušenosti nebo axiomu. V tomto kontextu máme na mysli předně závislost stavu napětí na stavu deformaci [9]. Dále se v této podkapitole zaměříme především na popis tzv. *hyperelastických materiálů*, jež mimo jiné doplníme o zjednodušující předpoklady izotropie a nestlačitelnosti. Na věc bude nahlíženo z čistě mechanické perspektivy, a tudíž vyloučíme termodynamické vlivy z úvahy.

### 3.4.1 Hyperelastické materiály

Skupinu elastických materiálů, jejichž konstitutivní rovnice vyvozujeme z *hustoty deformační energie*, nazýváme hyperelastické materiály. Typickými představiteli jsou pryž ve strojírenství, případně měkké tkáně v lékařství. Obecný konstitutivní vztah pro tento typ materiálů udává tzv. *Greenova elasticita*. Ta předpokládá existenci *Helmholtzovy volné energie*  $\Psi$ . Jedná se o skalární funkci definovanou na jednotku referenčního objemu  $dV_r$ . Integrací  $\Psi$  přes oblast  $\Omega_r$  obdržíme *vnitřní potenciální energii*  $\Pi_{int}$  v čase  $t$ , tedy

$$\Pi_{int}(t) = \int_{\Omega_r} \Psi dV_r \quad (3.58)$$

Uvážíme-li navíc  $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$  výhradně jako funkci deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , lze Helmholtzovu volnou energii ztotožnit s hustotou deformační energie zkoumaného tělesa. Pro takový případ nabývá  $\Psi$  globálního minima pro  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ . Z literatury a lidských zkušeností navíc plyne, že funkce  $\Psi$  je obecně polykonvexní, tudíž s přibývajícím deformací rostoucí. V souladu s výše uvedenými podmínkami přistoupíme k formulaci konstitutivní rovnice

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.59)$$

která vychází z Clausius-Planckovy formy druhého termodynamického zákona pro ideálně elastický materiál bez vnitřních disipačních účinků a ve své podstatě definuje hyperelastický materiál [9]. S využitím vztahu (3.49), resp. (3.54), obdržíme alternativní vyjádření prostřednictvím Cauchyho tenzoru napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (3.60)$$

resp. pomocí druhého Piola-Kirchhoffovo tenzoru napětí

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.61)$$



### Ekvivalentní podoba hustoty deformační energie

Nyní si představme zdeformované pryžové těleso, které bude v daný okamžik uchovávat určité množství deformační energie popsané funkcí  $\Psi(\mathbf{F})$ . Toto zdeformované těleso uchopíme a jako tuhý celek libovolným přesunem a natočením přemístíme. Přijmeme předpoklad o objektivitě funkce  $\Psi(\mathbf{F})$ , jenž zajistí, že si myšlené těleso zachová stejné množství deformační energie, jaké mělo před přemístěním. Dle (3.2) popíšme původní deformaci zobrazením  $\vec{x} = \xi(\vec{X}, t)$  s deformačním gradientem  $\mathbf{F}$  a přemístění jako tuhý celek zobrazením  $\vec{x}^* = \xi^*(\vec{X}, t^*)$  s deformačním gradientem  $\mathbf{F}^*$ . Vztah mezi zmíněnými pohyby lze vyjádřit *Eukleidovskou transformací*, tj.

$$\vec{x}^* = \vec{k}(t) + \mathbf{Q}(t)\vec{x} \quad (3.62)$$

kde vektor  $\vec{k}$  a ortonormální tenzor druhého řádu  $\mathbf{Q}$  jsou spojité funkce času  $t$ . Pak s využitím vzorců (3.6) a (3.62) odvodíme vyjádření pro  $\mathbf{F}^*$ , tedy

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \vec{x}^*}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial}{\partial \vec{X}} (\vec{k}(t) + \mathbf{Q}(t)\vec{x}) = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F} \quad (3.63)$$

Hustoty deformační energie  $\Psi$  si v obou uvažovaných stavech musí odpovídat. S využitím vyjádření (3.63) je dáme do rovnosti

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{F}^*) = \Psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad (3.64)$$

která musí platit pro libovolný tenzor  $\mathbf{Q}$ . Učiníme konkrétní volbu a za tenzor  $\mathbf{Q}$  zvolíme transpozici ortonormálního tenzoru rotace  $\mathbf{R}^T$ . Užitím polárního rozkladu deformačního gradientu (3.16) a dosazením volby do rovnice (3.64) získáme ekvivalentní formu hustoty deformační energie

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U}) = \Psi(\mathbf{U}) = \Psi(\mathbf{C}) \quad (3.65)$$

Došli jsme k závěru, že  $\Psi$  lze vyjádřit funkcí pravostranného tenzoru protažení  $\mathbf{U}$  a díky vztahu (3.36) také funkcí pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $\mathbf{C}$ . V této práci budeme navíc uvažovat pouze izotropní hyperelastický materiál, jehož hustotu deformační energie  $\Psi$  můžeme vyjádřit pomocí hlavních invariantů tenzoru  $\mathbf{C}$ , tj.  $I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})$ , viz funkční závislost (3.66). K výpočtu hlavních invariantů tenzoru  $\mathbf{C}$  lze použít následující vztahy (3.67), (3.68) a (3.69) [9].

$$\boxed{\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}))} \quad (3.66)$$

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (3.67)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] \quad (3.68)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det |\mathbf{C}| \quad (3.69)$$

### 3.4.2 Nestlačitelné hyperelastické materiály

Pro některé polymerní materiály a obzvláště pro živé tkáně s vysokým podílem vody je výhodné zavést do výpočtu idealizovaný předpoklad nestlačitelnosti, jelikož tyto materiály při deformaci vykazují zanedbatelné změny objemu. Teoreticky nestlačitelný materiál v průběhu deformace zachovává konstantní objem, z rovnice (3.10) tudíž plyne podmínka nestlačitelnosti

$$J = 1 \quad (3.70)$$

která má rovněž za následek, že třetí hlavní invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace bude roven jedné, tj.

$$I_3(\mathbf{C}) = \det |\mathbf{C}| = \det |\mathbf{F}^T \mathbf{F}| = \det |\mathbf{F}^T| \det |\mathbf{F}| = (\det |\mathbf{F}|)^2 = 1 \quad (3.71)$$

Z předpokladu nestlačitelnosti byla vyvozena *modifikovaná hustota deformační energie*  $\Psi_{mod}$

$$\Psi_{mod} = \Psi(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (3.72)$$

která je definovaná pro (3.70). Nově zavedený skalár  $p$ , jenž nepřímo reprezentuje hydrostatický tlak, označujeme jako tzv. *Lagrangeův multiplikátor* a jak v pozdějším textu ukážeme, početně ho lze vyčíslit pomocí rovnic rovnováhy doplněných o silové okrajové podmínky. Přesuňme se dále k sestavení konstitutivní rovnice. Derivací modifikované hustoty deformační energie (3.72) a následným dosazením do obecné formulace konstitutivní rovnice pro hyperelastický materiál (3.59) vznikne

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.73)$$

Pro tenzor druhého řádu s existující inverzí bez důkazu zavedeme obecně platný vzorec

$$\frac{\partial \det |\mathbf{F}|}{\partial \mathbf{F}} = \det |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-T} \quad (3.74)$$

který s využitím substitucí (3.8) a (3.70) aplikujeme ve výše uvedeném vztahu (3.73), a tím obdržíme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál, tedy

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-T}} \quad (3.75)$$

Vynásobíme-li rovnici (3.75) zprava výrazem  $\mathbf{F}^T$ , resp. zleva výrazem  $\mathbf{F}^{-1}$ , získáme díky vztahu (3.49) konstitutivní rovnici (3.76) prostřednictvím Cauchyho tenzoru napětí, resp. díky vztahu (3.54) konstitutivní rovnici (3.77) pomocí druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí [9].

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}} \quad (3.76)$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}} \quad (3.77)$$

# Kapitola 4

## Hyperelastické konstitutivní modely

Konstitutivní model můžeme považovat za poslední díl skládačky, která vede k určení mechanické odezvy namáhaného tělesa. Bavíme se o návrhu modelů hustoty deformační energie, které by měly co nejlépe vystihnout reálné chování objektu. Jejich využití nacházíme v analytických a numerických výpočtech. Hyperelastické konstitutivní modely jsou v literatuře a současných odborných publikacích hojně zastoupeny, ovšem každý z nich má svá omezení, a to především v oblastech použití. Jedná se o rozdíly v přípustném druhu namáhání, rozsahu deformací, složitosti předpisů funkcí, či počtu požadovaných parametrů. Jednotlivé modely se liší především tím, jakým způsobem pracují s informacemi o vnitřní struktuře materiálu. Zda zahrnují jevy na úrovni vláken, molekul nebo samotných atomů. Tyto modely lze rozdělit dle způsobu návrhu do tří skupin na takové, které jsou [10]:

1. vyvozené z fyzikální podstaty polymerních řetězců s podporou statistických metod,
2. vyvozené fenomenologicky sofistickým matematickým aparátem,
3. kombinací výše uvedených.

### 4.1 Modely založené na fyzikální podstatě

V této sekci poukážeme na modely hustoty deformační energie, k jejichž návrhu vedly fyzikální znalosti popisující odezvu polymerních řetězců na mikroskopické úrovni. Polymerní látka je obecně tvořena makromolekulami, resp. řetězci, které se skládají z jednoho či více druhů monomerů. Ty mezi sebou interagují a společně utváří systém s mnoha stupni volnosti. Pro tak rozsáhlý systém již není možné postupovat deterministicky v horizontu reálného času. Z toho důvodu se využívá popisu pomocí statistických veličin, zejména entropie [10].

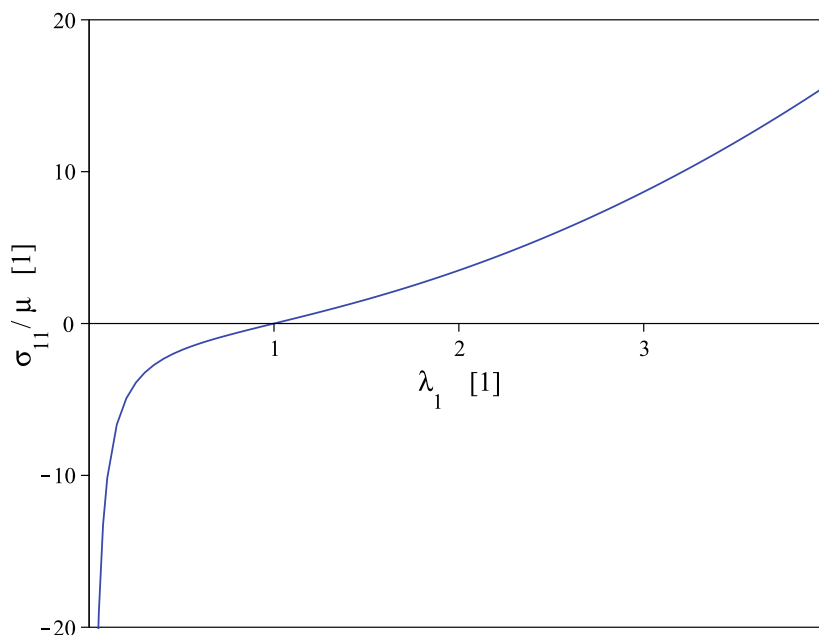
#### 4.1.1 Neo-hookeovský materiálový model

Neo-hookeovský model byl navržen ve 40. letech minulého století na základě následujících poznatků. Uvažujme ideální izotropní materiál, jenž se chováním podobá pryži. Jeho vnitřní strukturu tvoří vzájemně zavazbené monomery, které lze popsat jednoduchým modelem. Představme si dlouhý řetězec z mnoha nepoddajných elementárních úseček. Každá z těchto úseček má po svých obou koncích ideální rotační kloubový spoj se sousedními elementy. Tyto elementy nezabírají místo v prostoru, tzn. že se v jistých případech mohou vtělit jeden

do druhého. Popsaný řetězec obecně zaujímá nepravidelné uspořádání, neboť elementy jsou vůči sobě různě natočeny. Celou strukturu bychom přeneseně mohli přirovnat k chaoticky zamotanému klubku niti. Konfigurace řetězce může být ovlivněna tepelnými pohyby (kmity) a vnějším silovým působením na materiál, které způsobí deformaci. Deformace zapříčiní změnu konfigurace řetězce a zároveň sníží entropii systému. Formulované úvahy jsou navíc doplněny o předpoklady nestlačitelnosti materiálu, Gaussova rozložení hustoty pravděpodobnosti koncových bodů řetězce při deformaci, ekvivalentní délky elementárních úseček a omezení, které nedovoluje, aby se řetězec přiblížil svému kompletnímu narovnání, resp. natažení. To nás přivádí k jednomu z nejzákladnějších modelů hustoty deformační energie, Neo-hookeovský materiál, definovaný vztahem

$$\Psi_{neoHook} = \frac{nkT}{2} (I_1(\mathbf{C}) - 3) \quad (4.1)$$

kde  $n$  reprezentuje hustotu řetězců,  $k$  Boltzmannovu konstantu a  $T$  termodynamickou teplotu. Tyto tři veličiny sloučíme pod počáteční smykový modul pružnosti  $\mu = nkT$ , který lze experimentálně určit. Neo-hookeovský model vyniká jednoduchostí svého matematického zápisu, operuje pouze s jedním parametrem  $\mu$ . Důvěryhodné výsledky pro jednoosou napjatost, dvouosou napjatost a prostý smyk předpovídá pro deformace menší než 50% [9][10][11].



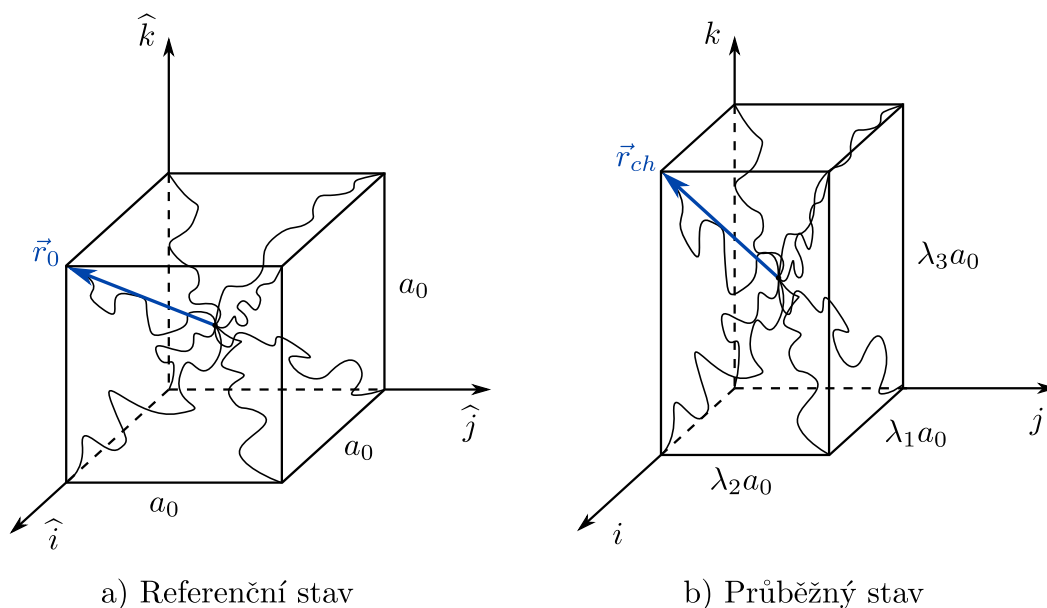
Obrázek 4.1: Jednoosá napjatost pro Neo-hookeovský materiálový model

Obr. 4.1 vykresluje závislost napětí na deformaci při jednoosé napjatosti nestlačitelného hyperelastického materiálu, pro který byl uvažován Neo-hookeovský konstitutivní model hustoty deformační energie. Na horizontální ose se nachází hlavní protažení  $\lambda_1$  a na vertikální ose Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$  podělené materiálovým parametrem  $\mu$ , kde index 1 udává směr jednoosé napjatosti. Zbylé složky tenzoru napětí  $\sigma$  jsou pro tento případ rovny nule. Příslušné odvození vztahu pro napětí odpovídá identickému postupu, který je popsán v níže uvedené sekci 5.1.2.1.

### 4.1.2 Arrudy-Boyceové materiálový model

V mnoha chemických a strojírenských průmyslech se vyskytují elastomery obohacené o přísadové částice, jejichž úkolem je vylepšit materiálové vlastnosti navázáním na polymerní řetězec. Velikost těchto plniv se řádově pohybuje v jednotkách nanometrů. Příkladem mohou být pneumatiky kol, jež běžně obsahují částice oxidu křemičitého a sazí. V případě zatížení prostým smykem lze u takových materiálů pozorovat závislost smykového modulu pružnosti na deformaci. Tuto skutečnost bylo třeba uvážit při návrhu propracovaných hyperelastických modelů [9].

Ellen M. Arruda a Mary C. Boyce v 90. letech minulého století navrhly model, který měl disponovat matematickou jednoduchostí a co nejmenším počtem materiálových parametrů, jež by bylo možné získat provedením jediné experimentální zkoušky. Jedná se o model s limitní průtažností řetězců vycházející z poznatků statistické mechaniky. Základ tvoří síť, která se skládá z osmi orientovaných řetězců. Uvažujme krychli, jejíž hrany počátečních délek  $a_0$  zůstávají v průběhu deformace svázané se směry hlavních protažení. Osmi řetězci postupně spojíme střed krychle se všemi vrcholy krychle. Model využívá symetrie krychle a předpoklad nestlačitelnosti materiálu k určení mechanické odezvy sítě. Schematickou vizuální interpretaci poskytuje Obr. 4.2, který vyobrazuje popsany model v *referenčním a průběžném stavu*.



Obrázek 4.2: Model s osmi řetězci

Každému z osmi řetězců sítě v referenčním stavu přiřadíme vektor  $\vec{r}_{0i}$ , stejně tak v průběžném stavu vektor  $\vec{r}_{chi}$ , kde  $i \in \{1, \dots, 8\}$ . Tyto vektory jsou dány vždy počátečním a koncovým bodem jednotlivých řetězců a směřují k vrcholu krychle. Vzhledem k symetrii modelu v referenčním stavu má všech osm vektorů  $\vec{r}_{0i}$  totožnou délku  $r_0$ , která je určena statistikou náhodných kroků vztahem

$$r_0 = \sqrt{N}l_p \quad (4.2)$$

kde  $N$  označuje počet článků v řetězci mezi chemickými vazbami, přičemž každý článek má neměnnou délku  $l_p$ . Ze vzorce pro úhlopříčku krychle vyjádříme délku hrany krychle v závislosti na délce  $r_0$

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}r_0 \quad (4.3)$$

Dále se přesuneme k průběžné konfiguraci, kde původní krychle přešla v kvádr o stranách délek  $\lambda_1 a_0$ ,  $\lambda_2 a_0$  a  $\lambda_3 a_0$  a vektory  $\vec{r}_{0i}$  přešly v průběžné vektory  $\vec{r}_{chi}$ . Délky vektorů  $\vec{r}_{chi}$  jsou rovněž totožné a platí pro ně vztah

$$r_{ch} = \frac{a_0}{2} \sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} = \frac{\sqrt{N}l_p}{\sqrt{3}} \sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} \quad (4.4)$$

kam byly dosazeny rovnice (4.2) a (4.3). Veličiny  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  značí hlavní protažení. Hustota deformační energie je úměrná změně entropie řetězců, Arruda a Boyce ji vyjádřily následovně

$$\Psi = nkTN \left( \frac{r_{ch}}{Nl_p} \beta_L + \ln \frac{\beta_L}{\sinh \beta_L} \right) \quad (4.5)$$

kde  $\beta_L$  reprezentuje inverzní Langevinovu funkci ( $\beta_L = \mathcal{L}^{-1}[r_{ch}/Nl_p]$ ),  $n$  hustotu řetězce,  $k$  Boltzmannovu konstantu a  $T$  termodynamickou teplotu. Výraz pro délku řetězce (4.4) dosadíme do vyjádření (4.5), které spolu s rovnicí (3.76) dále využijeme k odvození vztahu pro rozdíl hlavních napětí

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \lambda_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} = \frac{nkT}{3} N \mathcal{L}^{-1} \left[ \lambda_{ch} / \sqrt{N} \right] \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_{ch}} \quad (4.6)$$

kde protažení řetězce  $\lambda_{ch}$  je definováno vztahem

$$\lambda_{ch} = \frac{r_{ch}}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{I_1(\mathbf{C})} \quad (4.7)$$

Na závěr uvedeme formulaci hustoty deformační energie  $\Psi_{ArrudaBoyce}$ , která byla získána integrací rovnice (4.6) [10][15]. Využijeme-li rozvoj inverzní Langevinovy funkce do řady, pak prvních pět členů hustoty deformační energie zapíšeme následujícím předpisem

$$\Psi_{ArrudaBoyce} = nkT \left( \frac{1}{2} (I_1(\mathbf{C}) - 3) + \frac{1}{20N} (I_1(\mathbf{C})^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2} (I_1(\mathbf{C})^3 - 27) + \frac{19}{7000N^3} (I_1(\mathbf{C})^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4} (I_1(\mathbf{C})^5 - 243) + \dots \right) \quad (4.8)$$

### 4.1.3 Gentův materiálový model

Na přelomu tisíciletí A. N. Gent formuloval fenomenologický model hustoty deformační energie, k němuž dospěl obdobně jako H. G. Kilian úvahou o limitní průtažnosti polymerního řetězce. Navrhl model, který dosahuje singularity pro první hlavní invariant Cauchy-Greenova tenzoru deformace blížící se limitní hodnotě, tj.  $I_1(\mathbf{C}) \rightarrow \lambda_m^2$ . Následující zápis definuje Gentův model hustoty deformační energie pro izotropní nestlačitelný materiál

$$\Psi_{Gent} = -\frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{2} \ln \left( 1 - \frac{I_1(\mathbf{C}) - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right) \quad (4.9)$$

Dva výše uvedené materiálové parametry  $\lambda_m$ , resp.  $\mu$ , označují *parametr limitního protažení*, resp. počáteční smykový modul pružnosti [21]. Počáteční smykový modul pružnosti nabývá pouze kladných hodnot  $\mu > 0$ .

#### 4.1.3.1 Omezující podmínky

Předpis Gentova modelu hustoty deformační energie (4.9) udává jednu omezující podmínku plynoucí z definičního oboru přirozeného logaritmu. Musí platit

$$1 - \frac{I_1(\mathbf{C}) - 3}{\lambda_m^2 - 3} > 0 \quad (4.10)$$

Vzhledem ke skutečnostem plynoucích ze vztahů (3.67), (3.36) a (3.21) víme, že první hlavní invariant Cauchy-Greenova tenzoru deformace nabývá pouze kladných hodnot  $I_1(\mathbf{C}) \geq 3$ , a tudíž je jeho limitní hodnota  $\lambda_m^2$  omezena nerovností  $\lambda_m^2 > 3$ , ovšem dodáme, že fyzikálně přípustné jsou pouze kladné hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Z toho důvodu nebude přirozený logaritmus existovat pro všechny tenzory deformace. Kinematicky přípustné deformace detailněji probereme v nadcházející kapitole pro jednotlivé stavy napjatosti.

### 4.1.4 Van der Waalsův materiálový model

V 80. letech minulého století H. G. Kilian navrhl sofistikovaný model hustoty deformační energie, který se opírá o dvě základní myšlenky. Uvažuje zaprvé limitní průtažnost polymerního řetězce a zadruhé Van der Waalsovi mezimolekulární síly [16]. Limitní průtažností vysvětlujeme jev tuhnutí při velkých deformacích, který v mnoha případech pozorujeme u hyperelastických materiálů. Jev je zapříčiněn konečnou délkou molekul, a tím pádem nemožností jejich neomezeného protažení [21]. Kilian s polymerní sítí zacházel tak, jako by se jednalo o plyn tvořený částicemi. Jednotlivé částice ve Van der Waalsově pojetí zaujímají určitý objem v prostoru a vzájemně na sebe silově působí. Van der Waalsův model hustoty deformační energie, k jehož návrhu dospěl H. G. Kilian za pomoci stavové rovnice reálného plynu, má pro izotropní nestlačitelný materiál následující podobu

$$\Psi_{VanderWaals} = \mu \left( -(\lambda_m^2 - 3) \left( \ln(1 - \eta) + \eta \right) - \frac{2a}{3} \left( \frac{J_{VDW} - 3}{2} \right)^{3/2} \right) \quad (4.11)$$

kde



$$\eta = \sqrt{\frac{J_{VdW} - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (4.12)$$

$$J_{VdW} = (1 - \beta)I_1(\mathbf{C}) + \beta I_2(\mathbf{C}) \quad (4.13)$$

Van der Waalsův model disponuje čtyřmi materiálovými parametry, a to počátečním smykovým modulem pružnosti  $\mu$ , parametrem limitního protažení  $\lambda_m$ , *globálním parametrem interakce*  $a$  a *směšujícím parametrem*  $\beta$ . Dále pak obsahuje *substituční člen*  $\eta$  a *zobecněný invariant tenzoru deformace*  $J_{VdW}$ . Nyní objasníme význam výše zmíněných parametrů. Počáteční smykový modul pružnosti nabývá pouze kladných hodnot, tj.  $\mu > 0$ . Parametr limitního protažení  $\lambda_m$  ovlivňuje kinematicky přípustné konfigurace modelu, zatímco veličina  $\lambda_m^2$  odpovídá limitní hodnotě zobecněného invariantu  $J_{VdW}$ . Pro limitní stav, kdy se zobecněný invariant tenzoru deformace blíží kvadrátu parametru limitního protažení, tj.  $J_{VdW} \rightarrow \lambda_m^2$ , se hustota deformační energie Van der Waalsova modelu blíží k nekonečnu stejně jako síla, jež takový stav vyvolává. Bezrozměrný směšující parametr  $\beta$  váhově ovlivňuje míru závislosti Van der Waalsova modelu na prvním a druhém hlavním invariantu tenzoru  $\mathbf{C}$ . Parametr  $\beta$  může nabývat přípustných hodnot z intervalu  $0 \leq \beta \leq 1$ . Globální parametr interakce  $a$  charakterizuje vzájemné působení řetězců polymeru a difuzní pohyb mezipolymerních vazeb [18][19][20].

#### 4.1.4.1 Omezující podmínky

Samotný Van der Waalsův model hustoty deformační energie (4.11) má několik omezujících podmínek plynoucích z definičních oborů přirozeného logaritmu a druhé odmocniny. Současně musí platit následující tři nerovnice

$$1 - \sqrt{\frac{J_{VdW} - 3}{\lambda_m^2 - 3}} > 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{J_{VdW} - 3}{\lambda_m^2 - 3} \geq 0 \quad (4.15)$$

$$J_{VdW} - 3 \geq 0 \quad (4.16)$$

Nerovnice (4.16) implikuje *požadavek 1* na zobecněný invariant tenzoru deformace  $J_{VdW} \geq 3$ . Z *požadavku 1* prostřednictvím nerovnice (4.15) dále plyne *požadavek 2* na parametr limitního protažení  $\lambda_m^2 > 3$ . Z fyzikálních důvodů uvažujeme pouze kladné hodnoty parametru  $\lambda_m$ .

## 4.2 Modely založené na matematické podstatě

### 4.2.1 Zobecněný Rivlinův materiálový model

Zobecněný Rivlinův model byl navržen v 50. letech minulého století na základě fenomenologického přístupu k věci. Rovnice (3.66) poukázala na možné vyjádření hustoty deformační energie prostřednictvím prvního až třetího invariantu tenzoru  $\mathbf{C}$ . Při uvážení nestlačitelného materiálu bude  $I_3(\mathbf{C}) = 1$ . Pro nezatížené těleso navíc platí  $I_1(\mathbf{C}) = I_2(\mathbf{C}) = 3$ . Jelikož globální minimum hustoty deformační energie normujeme na nulu, tj.  $\Psi(\mathbf{I}) = 0$ , zdá se

být vhodné vyjádřit funkci  $\Psi$  v závislosti na výrazech  $(I_1(\mathbf{C}) - 3)$  a  $(I_2(\mathbf{C}) - 3)$ . Tato úvaha předcházela návrhu zobecněného Rivlinova modelu pro nestlačitelný izotropní hyperelastický materiál ve formě polynomiální řady

$$\Psi_{Rivlin} = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^M A_{ij} (I_1(\mathbf{C}) - 3)^i (I_2(\mathbf{C}) - 3)^j \quad (4.17)$$

kde  $A_{ij}$  reprezentuje materiálové parametry, přičemž  $A_{00} = 0$  a  $M \in \mathbb{N}$ . Pro praktické účely se nejčastěji přistupuje k využití prvního, druhého nebo třetího řádu  $M$ , které vyžadují postupně 3, 8 nebo 15 materiálových parametrů. Ty lze s určitou přesností stanovit z experimentu. Speciální volbou  $\Psi_{Rivlin}$  s nenulovými členy  $A_{10}$  a  $A_{01}$  získáme *Mooney-Rivlinův model* definovaný vztahem

$$\Psi_{MooneyRivlin} = A_{10}(I_1(\mathbf{C}) - 3) + A_{01}(I_2(\mathbf{C}) - 3) \quad (4.18)$$

Materiálové parametry Mooney-Rivlinova modelu určují počáteční smykový modul pružnosti jako  $\mu = 2(A_{10} + A_{01})$ . Zobecněný Rivlinův model lze využít k důvěryhodné předpovědi mechanické odezvy těles s velkými deformacemi, Mooney-Rivlinův model pak pro deformace nepřesahující 200% [10][12][13].

### 4.2.2 Ogdenův materiálový model

V rámci vývoje a zdokonalování modelů se R. W. Ogden zaměřil na vyjádření hustoty deformační energie s absencí invariantů  $I_1(\mathbf{C})$  a  $I_2(\mathbf{C})$ . V 70. letech minulého století pak navrhl výpočetně jednoduchý Ogdenův model hustoty deformační energie, jenž je pro nestlačitelný izotropní hyperelastický materiál definován vztahem

$$\Psi_{Ogden} = \sum_{p=1}^M \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (4.19)$$

$$\sum_{p=1}^M \mu_p \alpha_p = 2\mu > 0 \quad (4.20)$$

Model využívá trojici hlavních protažení  $\lambda_k$ , kde  $k \in \{1, 2, 3\}$ , materiálový parametr  $\mu_p$  a bezrozměrný materiálový parametr  $\alpha_p$  pro  $p = 1, \dots, M$ , kde  $M \in \mathbb{N}$ . Porovnáním s klasickou lineární teorií pružnosti obdržíme podmínku konzistence (4.20), která musí být vždy splněna. Symbol  $\mu$  opět označuje počáteční smykový modul pružnosti. Ogdenův model disponuje  $2M$  materiálovými parametry, a třebaže nemusí vést snadná cesta k jejich experimentálnímu nalezení, jedná se o jeden z nejrozšířenějších hyperelastických konstitutivních modelů. Od výše zmíněných modelů se liší mimo jiné v exponentu hlavních protažení, který není omezen pouze na přirozená čísla, což se projeví ve větší přizpůsobivosti Ogdenova vztahu. V literatuře se ukázalo, že volba řádu  $M = 3$  vede k dosažení významné shody s měřeními pro případy jednoosé napjatosti, dvouosé napjatosti a čistého smyku [9][10][13][14].

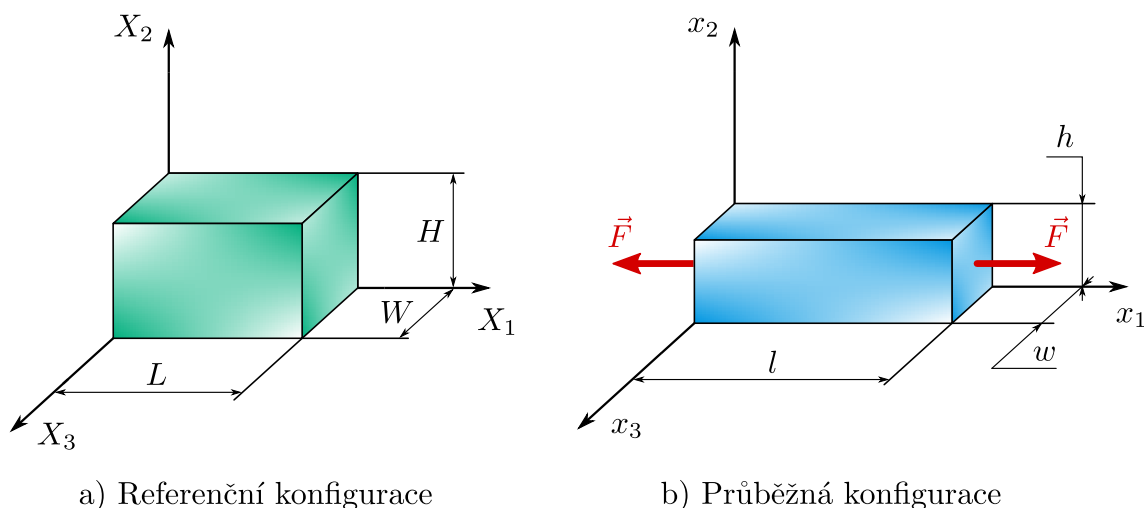
## Kapitola 5

# Mechanická odezva Van der Waalsova a Gentova modelu

V této kapitole se zaměříme na aplikace výše definovaného Van der Waalsova a Gentova modelu hustoty deformační energie pro izotropní nestlačitelný hyperelastický materiál. Postupně probereme stavy napjatosti odpovídající základním typům namáhání, konkrétně se bude jednat o tah a tlak, prostý smyk, rovnoosou rovinnou deformaci a nafukování tenkostěnné membrány. Současně vysvětlíme omezení, s nimiž se modely při výpočtech potýkají.

### 5.1 Jednoosá napjatost

#### 5.1.1 Formulace úlohy



Obrázek 5.1: Jednoosá napjatost kvádrů

Uvažujme kvádr o počáteční délce  $L$ , výšce  $H$  a šířce  $W$ , jenž umístíme do počátku materiálového kartézského souřadnicového systému  $X_K$  tak, že jeho hrany délky, výšky a

šířky budou rovnoběžné s odpovídajícími hlavními osami  $X_1$ ,  $X_2$  a  $X_3$ . Kvádr poté zatížíme silovým působením  $\vec{F}$  ve směru jeho délky. Předpokládáme, že se jeho hrany prodlouží, resp. zkrátí na délku  $l$ , výšku  $h$  a šířku  $w$ . Přetvoření kvádrů popisuje zobrazení  $\xi$ , které polohovému vektoru  $\vec{X}$  z referenční konfigurace zaměřující bod kvádrů přiřazuje polohový vektor  $\vec{x}$  v průběžné konfiguraci zaměřující bod přetvořeného kvádrů. Popsanou situaci schematicky znázorňuje Obr. 5.1, korektně ji zapíšeme pohybovým předpisem, tedy

$$x_1 = \frac{l}{L}X_1 = \lambda_1 X_1 \quad (5.1)$$

$$x_2 = \frac{h}{H}X_2 = \lambda_2 X_2 \quad (5.2)$$

$$x_3 = \frac{w}{W}X_3 = \lambda_3 X_3 \quad (5.3)$$

Podíly průběžných a referenčních délek hran kvádrů udávají hlavní protažení  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$ . Z pohybového předpisu s odvoláním na vzorec (3.6) vypočteme deformační gradient a dle vztahu (3.36) vyjádříme příslušný Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

## 5.1.2 Gentův model

### 5.1.2.1 Určení Cauchyho napětí

Prostřednictvím deformačního gradientu (5.4) nejprve vyjádříme první hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnice (3.67) s využitím matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.5)), tedy

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (5.6)$$

Následně první hlavní invariant (5.6) dosadíme do Gentova modelu hustoty deformační energie (4.9), a důsledkem toho obdržíme vyjádření  $\Psi_{Gent}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$

$$\Psi_{Gent} = -\frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{2} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right) \quad (5.7)$$

V dalším kroku využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76) k určení složek Cauchyho napětí. Vzhledem k faktu, že pro tento konkrétní případ jsou složky deformačního gradientu  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{23}$ ,  $F_{31}$  a  $F_{32}$  nulové, zjišťujeme, že se rovněž složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  a  $\sigma_{32}$  rovnají nule. Pak diagonální složky, jež jsou v důsledku vztahů (5.1) až (5.6) hlavními napětími, nabývají tvar

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 - p = \mu \lambda_1^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.8)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 - p = \mu \lambda_2^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.9)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 - p = \mu \lambda_3^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.10)$$

Nyní vyčíslíme Lagrangeův multiplikátor  $p$  pomocí silové okrajové podmínky. Z výše zmíněné formulace úlohy 5.1.1 vyplývá, že čtyři boční stěny kvádrů v průběžné konfiguraci nejsou vystaveny vnějšímu silovému působení, potažmo externímu napětí. Pak složky Cauchyho napětí  $\sigma_{22}$ , resp.  $\sigma_{33}$  ve směru prostorové souřadnice  $x_2$ , resp.  $x_3$  vymizí. K určení Lagrangeova multiplikátoru postačí jedna z rovnic (5.9), (5.10), načež učiníme výběr a obdržíme níže uvedené vyjádření

$$p = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 = \mu \lambda_3^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} \quad (5.11)$$

Následně výpočet doplníme o předpoklad nestlačitelnosti (3.70), díky kterému uvedeme hlavní protažení  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  do vztahu s hlavním protažením  $\lambda_1$ . Vzhledem k uvažovanému izotropnímu materiálu přijmeme pro případ jednoosé napjatosti předpoklad, že se hlavní protažení  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  sobě rovnají. S využitím vztahu pro výpočet jacobíanu (3.8) poté souhrnně píšeme

$$J = \det |F| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (5.12)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad (5.13)$$

Při operaci odmocňování druhých mocnin pochopitelně uvažujeme pouze kladné hodnoty hlavních protažení, které mají fyzikální opodstatnění. Na závěr dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.11) do rovnice (5.8), kam vzápětí zavedeme substituci (5.13). Takto získáme nenulovou složku Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$ , kterou lze vyjádřit v bezrozměrném tvaru normováním rovnice (5.8) parametrem  $\mu$ , v závislosti na hlavním protažení  $\lambda_1$  a parametru  $\lambda_m$ , tj.

$$\boxed{\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{(\lambda_m^2 - 3)(\lambda_1^3 - 1)}{\lambda_1 \lambda_m^2 - \lambda_1^3 - 2}} \quad (5.14)$$

### 5.1.2.2 Kinematicky přípustné deformace

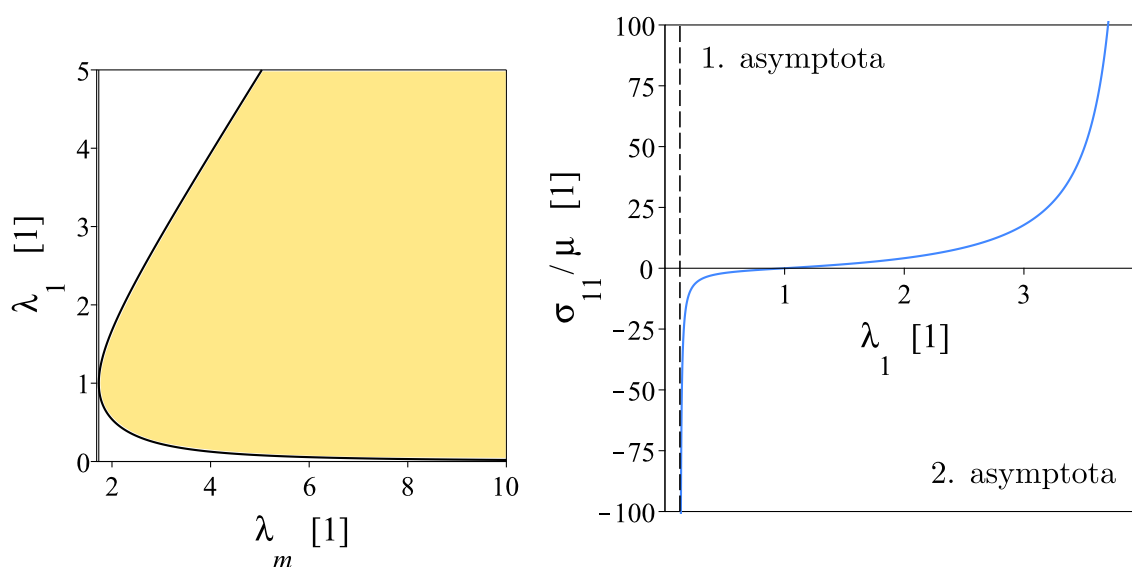
Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.10)), který se vyskytuje v Gentově modelu hustoty deformační energie (4.9) a z vyjádření normovaného Cauchyho napětí (5.14) plyne omezení kladené na hlavní protažení  $\lambda_1$  v závislosti na volbě parametru  $\lambda_m$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem rovnice (5.14). Pokud se výraz ve jmenovateli

$$Q_{1G} = \lambda_1 \lambda_m^2 - \lambda_1^3 - 2 \quad (5.15)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{1G}$  rovno nule. Levá strana Obr. 5.2 vykresluje implicitní

funkci  $Q_{1G} = 0$  rozdělující rovinu na dvě podoblasti. Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose hlavní protažení  $\lambda_1$ . Žlutou barvou je vyznačena podoblast kinematically přípustných deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$  a bílou barvou podoblast kinematically nepřípustných deformací.

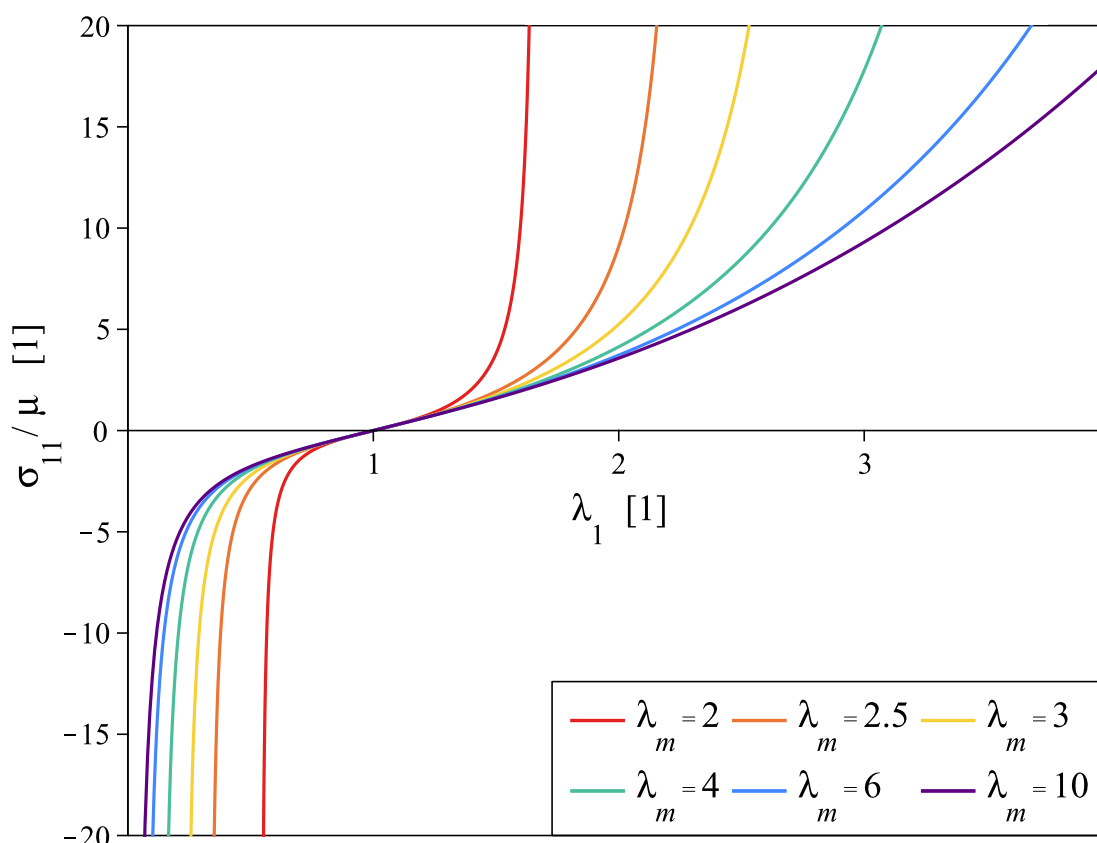
Pravdivost tvrzení ověříme na libovolně zvoleném parametru z intervalu hodnot  $\lambda_m \in (\sqrt{3}, \infty)$ . Uvažujme např. hodnotu  $\lambda_m = 4$ , pro kterou přibližně vypočteme kladné kořeny kubické rovnice  $Q_{1G} = 0$ , a tím obdržíme:  $\lambda_{1a} \approx 0.125$ ,  $\lambda_{1b} \approx 3.936$ . Limitní hodnota  $\lambda_{1a}$ , resp.  $\lambda_{1b}$  koresponduje s polohou první, resp. druhé asymptoty na pravé straně Obr. 5.2, kde je vynesena závislost normovaného Cauchyho napětí (5.14) na hlavním protažení  $\lambda_1$  pro hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m = 4$ .



Obrázek 5.2: Kinematically přípustné deformace Gentova modelu při jednoosé napjatosti (vlevo) a předpověď Gentova modelu při jednoosé napjatosti pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  (vpravo)

### 5.1.2.3 Interpretace výsledků

V předchozí části byla odvozena nenulová složka normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$ , a to v závislosti na parametru  $\lambda_m$  a nezávisle proměnné  $\lambda_1$ . Výsledky interpretujeme formou grafické závislosti. Obr. 5.3 zobrazuje předpověď Gentova materiálového modelu při jednoosé napjatosti. Tento graf znázorňuje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$ . Vidíme, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám, kterých dosahují pro hodnoty nezávisle proměnné  $\lambda_1$  blízké se ke kladným kořenům kubické rovnice  $Q_{1G} = 0$ . Z grafu je rovněž patrné, že Gentův model při jednoosé napjatosti do jisté míry vystihuje fenomén tuhnutí materiálu. K tomuto jevu dochází u hyperelastických materiálů v oblastech velkých deformací.



Obrázek 5.3: Předpověď Gentova modelu při jednoosé napjatosti pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$

### 5.1.3 Van der Waalsův model

#### 5.1.3.1 Určení Cauchyho napětí

Odvození vztahu pro Cauchyho napětí s využitím Van der Waalsova materiálového modelu obnáší srovnatelnou posloupnost kroků, jako tomu bylo pro Gentův materiálový model v sekci 5.1.2.1. Prostřednictvím deformačního gradientu (5.4) nejprve vyjádříme první a druhý hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnic (3.67) a (3.68) doplněných o vyjádření matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.5)). Shodně obdržíme první (5.6) a druhý hlavní invariant

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4 - \lambda_2^4 - \lambda_3^4 \right) \quad (5.16)$$

Následně oba hlavní invarianty (5.6), (5.16) dosadíme do Van der Waalsova modelu hustoty deformační energie (4.11), a tím získáme vyjádření  $\Psi_{VanderWaals}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_m$ ,  $\beta$  a  $\mu$ . Pro jednoduchost budeme nadále uvažovat parametr globální interakce  $a$  roven nule. K určení složek Cauchyho napětí využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76). Díky skutečnosti, že pro případ jednoosé napjatosti

matice deformačního gradientu (5.4) obsahuje nenulové pouze diagonální složky, budou mi-modiagonální prvky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma$  rovny nule. Složky  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{33}$ , jež jsou ve skutečnosti hlavními napětími, nabývají odpovídající symbolický tvar

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \Psi_{VanderWaals}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 - p \quad (5.17)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial \Psi_{VanderWaals}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 - p \quad (5.18)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial \Psi_{VanderWaals}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 - p \quad (5.19)$$

Lagrangeův multiplikátor  $p$  určíme ze silové okrajové podmínky, neboť čtyři stěny kváдру nejsou vystaveny vnějšímu silovému působení, tudíž bude platit symbolické vyjádření

$$p = \frac{\partial \Psi_{VanderWaals}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 \quad (5.20)$$

Do výpočtu dále zavedeme předpoklad nestlačitelnosti (3.70), který pro případ izotropního materiálu vyústí ve vztahy (5.12) a (5.13). Nakonec dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.20) do rovnice (5.17), kam vzápětí po zderivování zavedeme substituci (5.13). Uvedeným postupem získáme nenulovou složku Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$ , kterou lze vyjádřit v bezrozměrném tvaru normováním rovnice (5.17) parametrem  $\mu$ , v závislosti na hlavním protažení  $\lambda_1$  a materiálových parametrech  $\lambda_m$ ,  $\beta$ , tj.

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\left((\beta - 1)\lambda_1 - \beta\right)\left(\lambda_1 - 1\right)\left(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1\right)}{\lambda_1^2 \left(-1 + \left(\frac{(1-\beta)\lambda_1^4 + 2\beta\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2 + (2-2\beta)\lambda_1 + \beta}{(\lambda_m^2 - 3)\lambda_1^2}\right)^{1/2}\right)} \quad (5.21)$$

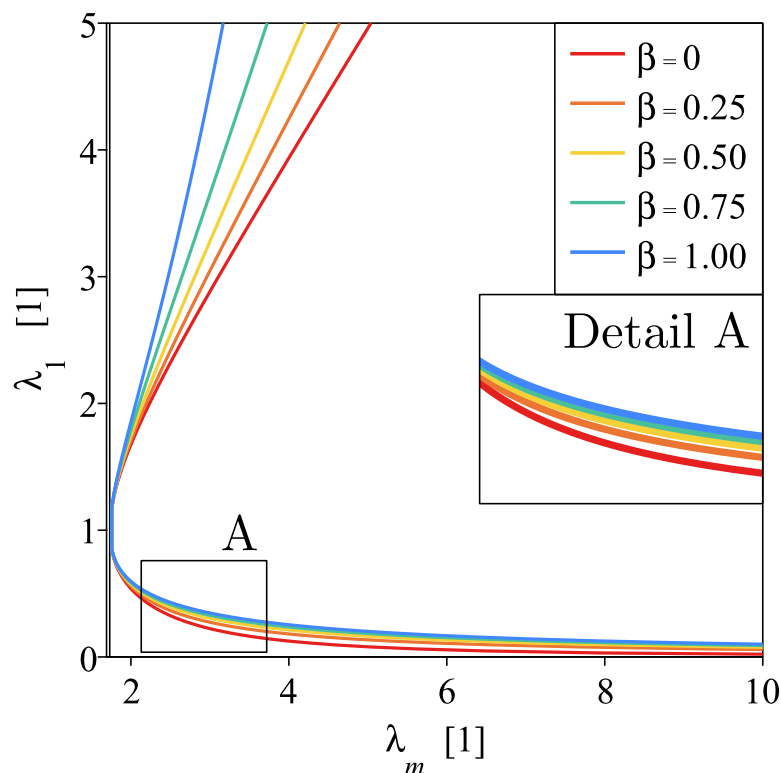
### 5.1.3.2 Kinematicky přípustné deformace

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.14)), který se vyskytuje ve Van der Waalsově modelu hustoty deformační energie (4.11) a z vyjádření normovaného Cauchyho napětí (5.21) plyne omezení kladené na hlavní protažení  $\lambda_1$  v závislosti na volbě parametrů  $\lambda_m$  a  $\beta$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem rovnice (5.21). Pokud se výraz ve jmenovateli

$$Q_{1W} = -1 + \left(\frac{(1 - \beta)\lambda_1^4 + 2\beta\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2 + (2 - 2\beta)\lambda_1 + \beta}{(\lambda_m^2 - 3)\lambda_1^2}\right)^{1/2} \quad (5.22)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{1W}$  rovno nule. Obr. 5.4 vykresluje implicitní funkci  $Q_{1W} = 0$  pro pět hodnot parametru  $\beta$ . Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose hlavní protažení  $\lambda_1$ . Každá hraniční křivka rozděluje rovinu na dvě podoblasti, konvexní a konkávní plochu. Konvexní plocha určuje kinematicky přípustnou oblast deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$ . Zato konkávní plocha určuje kinematicky nepřípustnou oblast deformací. Všimněme si, že se rostoucím parametrem  $\beta$  dochází v tahu (tj. pro  $\lambda_1 > 1$ ) k zvětšení podoblasti kinematicky přípustných deformací. Na druhou stranu s





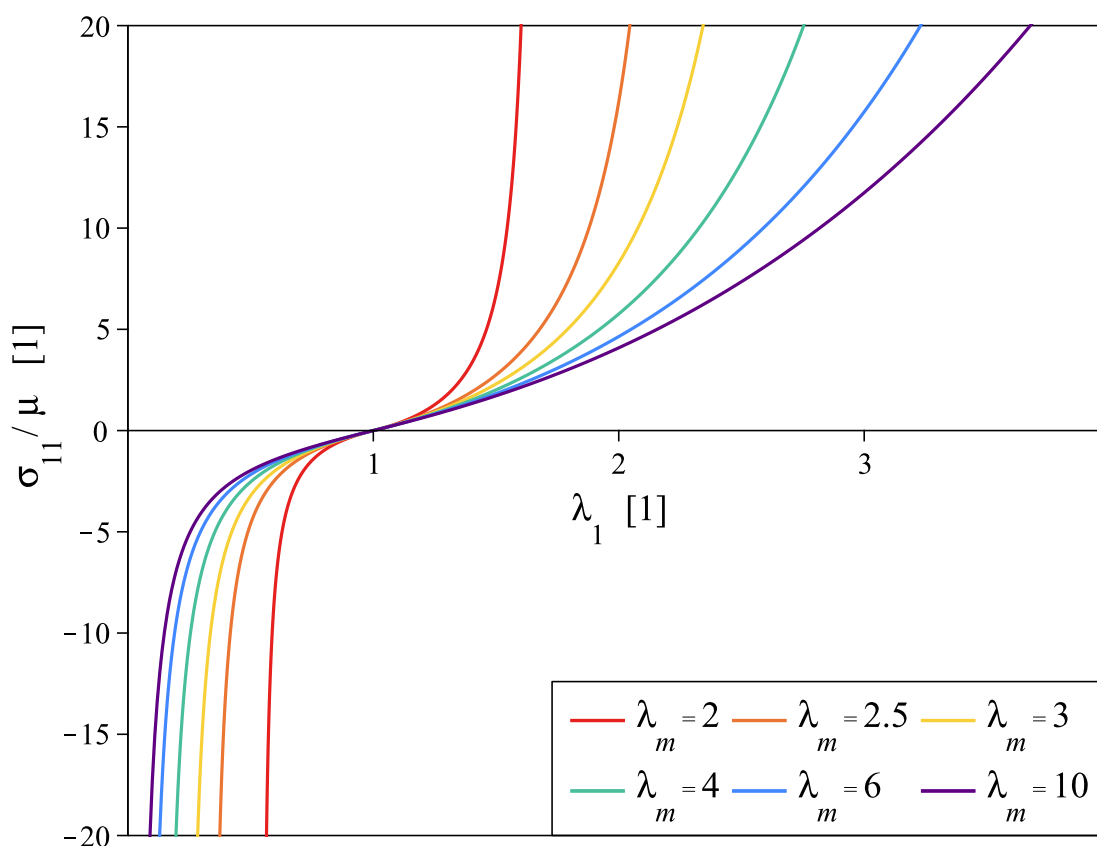
Obrázek 5.4: Kinematically přípustné deformace Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti pro proměnný parametr  $\beta$

rostoucím parametrem  $\beta$  dochází v tlaku (tj. pro  $0 < \lambda_1 < 1$ ) k zmenšení podoblasti kinematically přípustných deformací, viz detail A na Obr. 5.4. Popsaná změna monotónnosti modelového chování v tahu a tlaku odráží míru zapojení druhého hlavního invariantu pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $I_2(\mathbf{C})$  skrze vztah (4.13).

Pravdivost tvrzení ověříme na libovolně zvoleném parametru z intervalu hodnot  $\lambda_m \in (\sqrt{3}, \infty)$ . Uvažujme např. hodnoty parametrů  $\lambda_m = 4$  a  $\beta = 0.5$ , pro které přibližně vypočteme kladné kořeny rovnice  $Q_{1W} = 0$ , a tím obdržíme:  $\lambda_{1c} \approx 0.213$ ,  $\lambda_{1d} \approx 4.703$ .

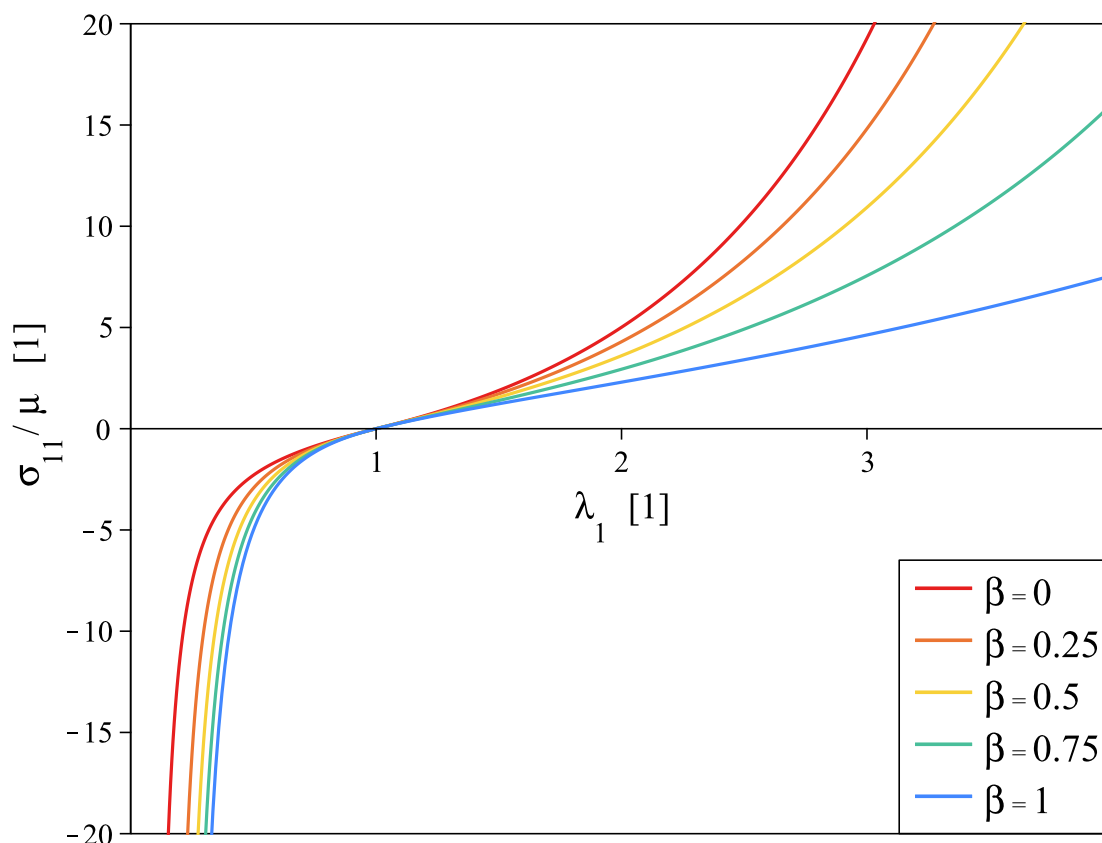
### 5.1.3.3 Interpretace výsledků

Normované Cauchyho napětí (5.21) je funkcí směřujícího parametru  $\beta$ , parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a deformace prostřednictvím hlavního protažení  $\lambda_1$ . K interpretaci výsledků Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti použijeme dvou-rozměrné grafické závislosti pro vybrané sady parametrů. Obr. 5.5 znázorňuje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$  a fixní volbu  $\beta = 0$ . Lze pozorovat, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám, kterých dosahují pro hodnoty nezávisle proměnné  $\lambda_1$  blíží se ke kladným kořenům rovnice  $Q_{1W} = 0$  s uvážením odpovídajících hodnot  $\lambda_m$  a  $\beta$ . Z grafu je patrné, že Van der Waalsův model při jednoosé napjatosti do jisté míry vystihuje jev tuhnutí materiálu pozorovaný v oblastech velkých deformací.



Obrázek 5.5: Předpověď Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti pro fixní parametr  $\beta = 0$  a proměnný parametr  $\lambda_m$

Obr. 5.6 vykresluje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro pět zvolených hodnot materiálového parametru  $\beta$  a fixní volbu  $\lambda_m = 5$ . Vidíme, že v tahové části ( $\lambda_1 > 1$ ) se s rostoucím parametrem  $\beta$  model stává poddajnějším, ovšem v tlakové části ( $\lambda_1 < 1$ ) se s rostoucím parametrem  $\beta$  model stává tužším. Tato skutečnost přímo souvisí se zvětšením, resp. zmenšením kinematicky přípustné oblasti deformace v tahu, resp. v tlaku, ke které dochází s vzrůstajícím parametrem  $\beta$ , jak bylo ukázáno v předchozí sekci 5.1.3.2. Jednotlivé křivky se opět asymptoticky blíží svým limitním hodnotám a taktéž sledují jev tuhnutí materiálu v oblastech velkých deformací nezávisle na volbu parametru  $\beta$ .



Obrázek 5.6: Předpověď Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti pro fixní parametr  $\lambda_m = 5$  a proměnný parametr  $\beta$

### 5.1.4 Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu

#### Cauchyho napětí

Následuje rekapitulace nenulové složky normovaného Cauchyho napětí pro Gentův model při jednoosé napjatosti:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{(\lambda_m^2 - 3)(\lambda_1^3 - 1)}{\lambda_1 \lambda_m^2 - \lambda_1^3 - 2} \quad (5.23)$$

Následuje rekapitulace nenulové složky normovaného Cauchyho napětí pro Van der Waalsův model při jednoosé napjatosti:

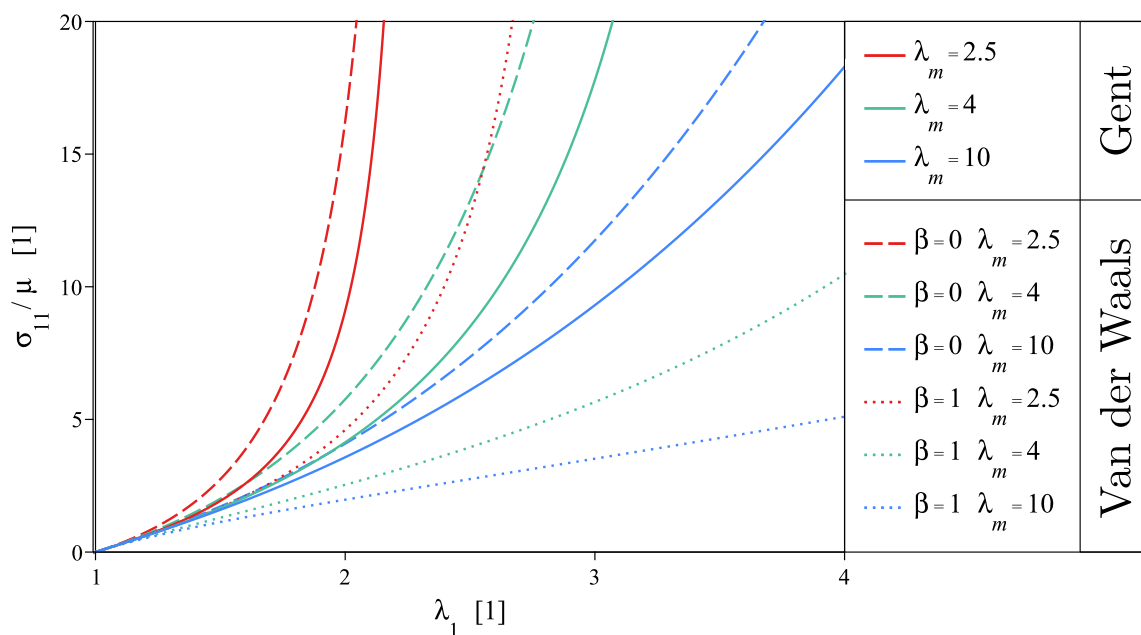
$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{((\beta - 1)\lambda_1 - \beta)(\lambda_1 - 1)(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1)}{\lambda_1^2 \left( -1 + \left( \frac{(1-\beta)\lambda_1^4 + 2\beta\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2 + (2-2\beta)\lambda_1 + \beta}{(\lambda_m^2 - 3)\lambda_1^2} \right)^{1/2} \right)} \quad (5.24)$$

Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu provedeme pro zvolenou sadu hodnot parametru limitního protažení  $\lambda_m$ . Pro Van der Waalsův model navíc vykreslíme závislost

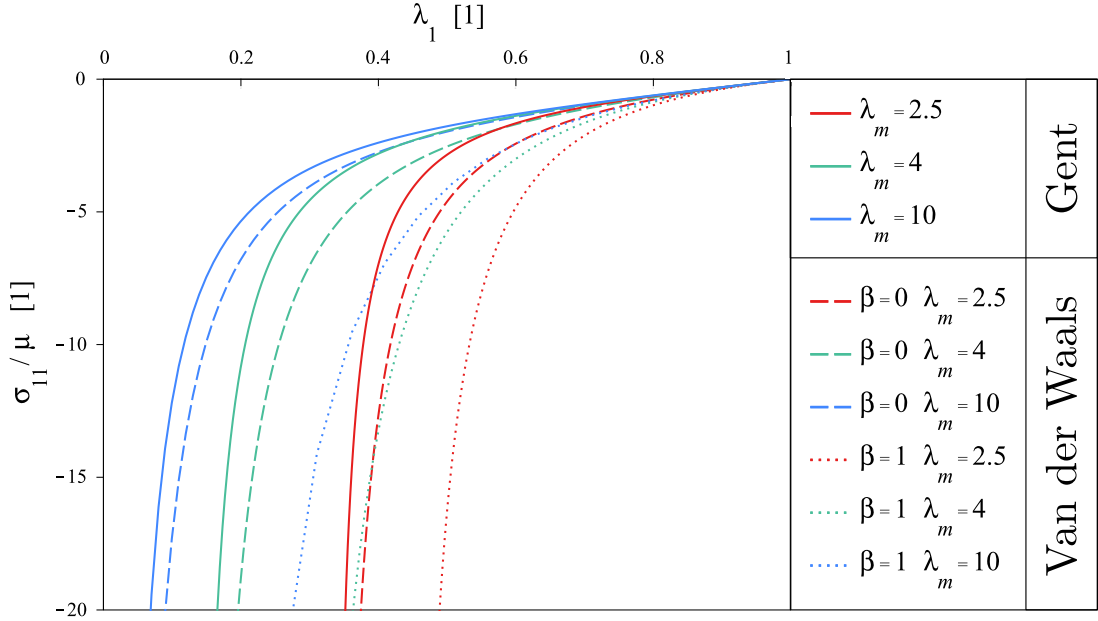
bezrozměrného napětí na deformaci pro dvě varianty směřujícího parametru  $\beta$ . Obr. 5.7 zobrazuje závislost normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$  v tahu na hlavním protažení  $\lambda_1$ . Totéž pouze pro tlakovou napjatost vykresluje Obr. 5.8.

Na základě obou níže uvedených grafických vyobrazení lze tvrdit, že Gentův i Van der Waalsův model ukazují stejné fenomény. Pozvolný růst napětí v tahové oblasti, kde hlavní protažení  $\lambda_1$  dosahuje řádově hodnot desetin odpovídajícího parametru limitního protažení  $\lambda_m$ , střídá strmý nárůst. Napětí obou modelů se limitně blíží nekonečnu, a to neohledně na volbu materiálových parametrů. Mechanická odezva Van der Waalsova modelu s hodnotou parametru  $\beta = 0$  při jednoosé napjatosti v tahu je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  tužší nežli odezva Gentova modelu. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se odezva Van der Waalsova modelu stává více poddajnější, a tím se nejprve přibližuje odezvě Gentova modelu, až se v jeden okamžik stane poddajnější.

Předpověď obou modelů při jednoosé napjatosti v tlaku zobrazuje graf na Obr. 5.8. Mechanická odezva Gentova modelu je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  poddajnější nežli odezva Van der Waalsova modelu. Se zvyšující se hodnotou parametru  $\beta$  se snižuje poddajnost Van der Waalsova modelu.



Obrázek 5.7: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti v tahu



Obrázek 5.8: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti v tlaku

### Kinematicky přípustné deformace

Pokud srovnáme grafy kinematicky přípustných deformací obou modelů z Obr. 5.2 a 5.4, můžeme si všimnout podoby hraniční křivky Van der Waalsova modelu pro parametr  $\beta = 0$  s hraniční křivkou Gentova modelu. Jejich shodu ověříme porovnáním příslušných předpisů hraničních křivek  $Q_{1G} = 0$  a  $Q_{1W}(\beta = 0) = 0$ , viz rovnice (5.15) a (5.22). Po dosazení  $\beta = 0$  do rovnice  $Q_{1W} = 0$  získáme vyjádření

$$Q_{1W}(\beta = 0) = -1 + \sqrt{\frac{\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1}{(\lambda_m^2 - 3)\lambda_1^2}} = 0 \quad (5.25)$$

Triviálními úpravami tohoto vyjádření (5.25) dospějeme k rovnosti implicitních předpisů obou hraničních křivek.

### Elasticita

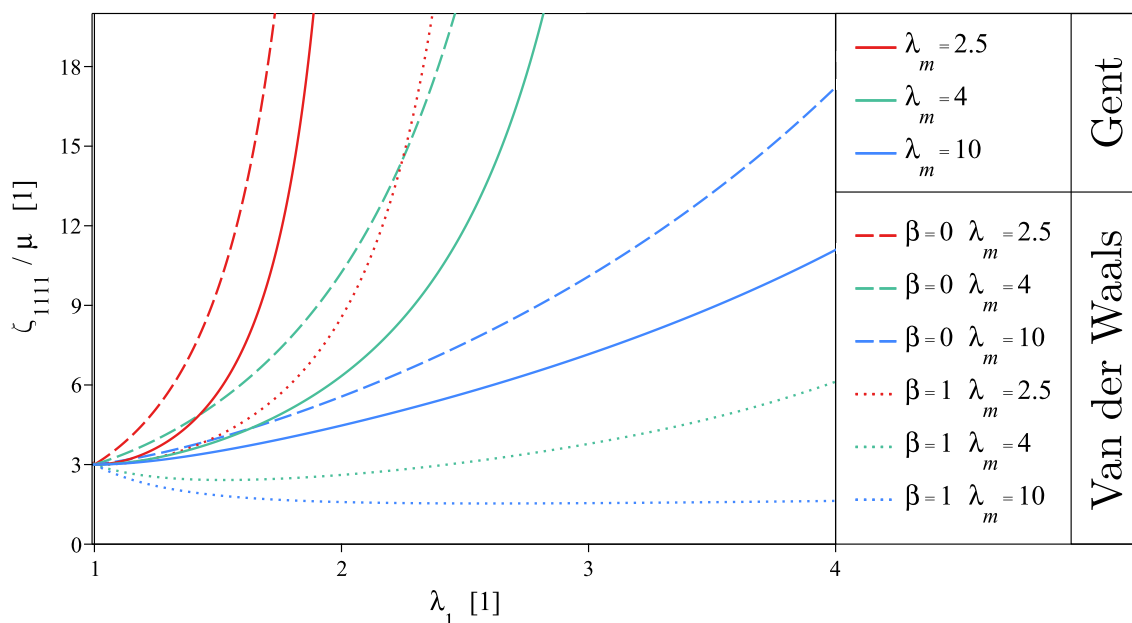
Nakonec porovnejme tenzor elasticity  $\zeta$ , který vzhledem k vyjádření deformačního gradientu (5.4) a normovaných skutečných napětí (5.14), (5.21), obsahuje jedinou nenulovou složku (viz definici (3.57)), kterou vyjádříme symbolicky

$$\zeta_{1111} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial F_{11}} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \lambda_1} \quad (5.26)$$

Složka tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}$  reprezentuje směrnici tečny grafu funkce napětí  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\lambda_1)$ . Vyjádříme-li pro Van der Waalsův model funkci  $\zeta_{1111}$  pomocí derivace  $\sigma_{11}$  dle  $\lambda_1$ , obdržíme poměrně složitý výraz, v jehož jmenovateli se vyskytuje mimo jiné deformace  $\lambda_1$  v různých mocninách. Pokud tento jmenovatel položíme roven nule, získáme hodnoty hlavního protažení  $\lambda_1$  vyloučené z definičního oboru. Konkrétně jsou to hodnoty  $\lambda_1$  rovné kladným kořenům

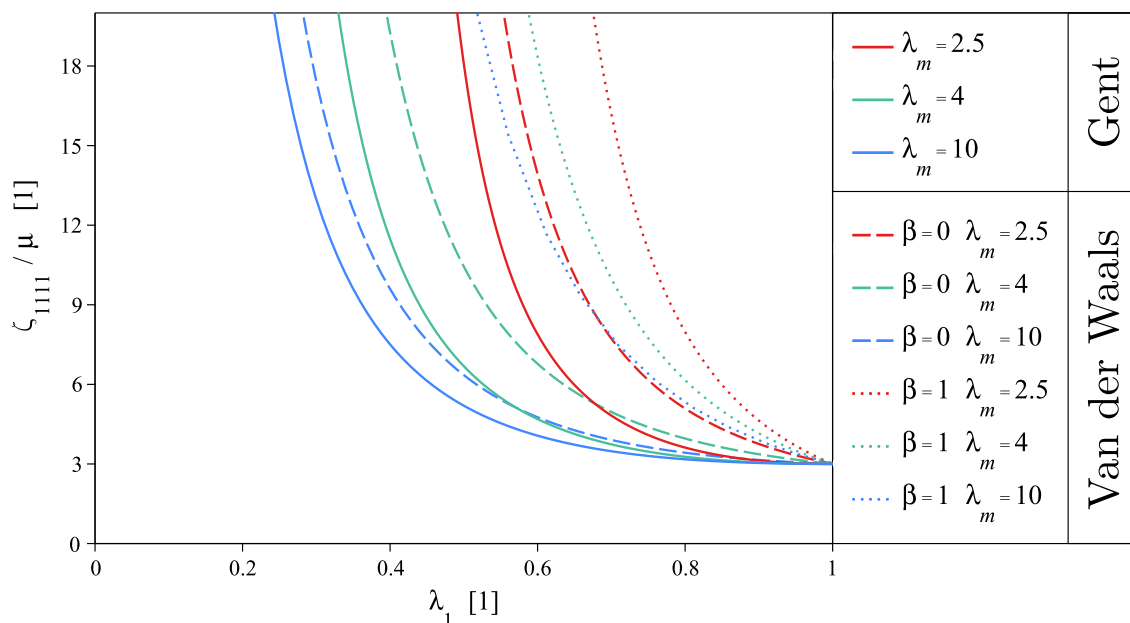
rovnice  $Q_{1W} = 0$  a hodnota odpovídající nezdeformovanému stavu, tj.  $\lambda_1 = 1$ . Mohlo by se zdát, že v bodě  $\lambda_1 = 1$  narazíme na problém, který je důsledkem zavedení tenzoru elasticity prostřednictvím derivace Cauchyho tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  dle deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ . Ovšem není tomu tak. Výše uvedené průběhy Cauchyho napětí při jednoosé napjatosti nám naznačují, že i pro hodnotu  $\lambda_1 = 1$  jsme schopni vyčíslit (ať už graficky, či limitně) směrnici tečny grafu funkce napětí  $\sigma_{11}$ . Domníváme se, že existuje úprava výrazu  $\partial\sigma_{11}/\partial\lambda_1$ , která povede k zahrnutí hodnoty  $\lambda_1 = 1$  do definičního oboru.

Na Obr. 5.9 se nachází vynesená grafická závislost normované složky tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro tři hodnoty parametru limitního protažení  $\lambda_m$  v porovnání pro Gentův a Van der Waalsův model při jednoosé napjatosti v tahu. De facto se jedná o derivace předpisů funkcí (5.14), (5.21), které můžeme vidět na Obr. 5.7. Z grafu pozorujeme, že směrnice tečny normovaného Cauchyho napětí pro hodnotu  $\lambda_1 \rightarrow 1$  se limitně blíží  $\zeta_{1111}/\mu \rightarrow 3$ , a to neohledně na volbu modelu. Pro hodnoty hlavního protažení  $\lambda_1 > 1$  nabývá složka tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}/\mu$  kladné hodnoty, avšak není tomu tak, že by se pro libovolnou volbu materiálových parametrů  $\lambda_m$  a  $\beta$  jednalo o monotónní funkce. Např. složka  $\zeta_{1111}/\mu$  při uvážení Van der Waalsova modelu s hodnotami parametrů  $\lambda_m = 4$  a  $\beta = 1$  s rostoucí deformací nejprve klesá a po dosažení svého minima postupně roste do nekonečna.



Obrázek 5.9: Porovnání elasticity Gentova a Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti v tahu

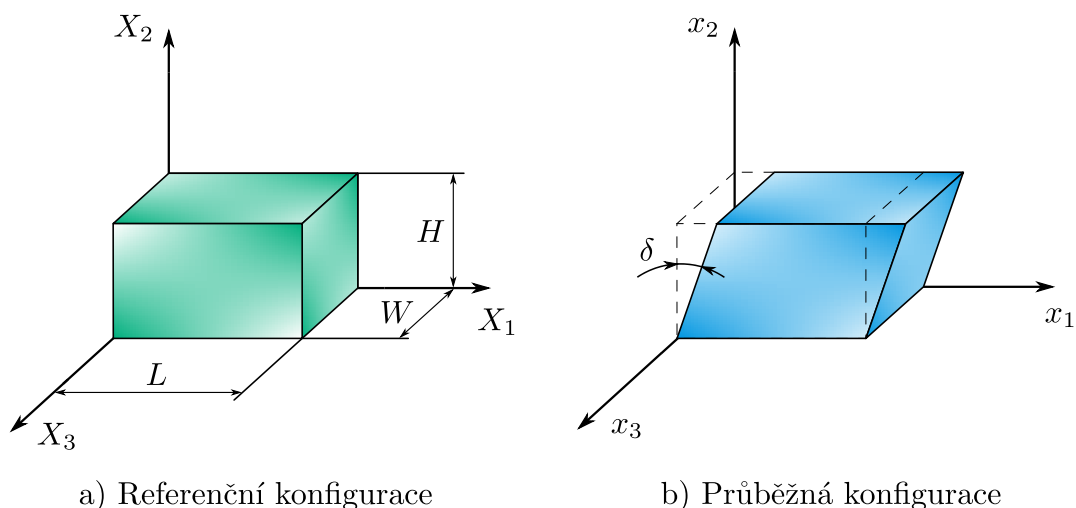
Obdobně Obr. 5.10 vykresluje grafickou závislost normované složky tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro tři hodnoty parametru limitního protažení  $\lambda_m$  v porovnání pro Gentův a Van der Waalsův model při jednoosé napjatosti v tlaku. Opět se jedná o derivace předpisů funkcí (5.14), (5.21), které můžeme vidět na Obr. 5.8. Vidíme, že pro hodnoty hlavního protažení  $\lambda_1 < 1$  nabývá složka tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}/\mu$  kladné hodnoty, které s rostoucí proměnnou  $\lambda_1$  monotónně klesají k limitní hodnotě  $\zeta_{1111}/\mu \rightarrow 3$ , a to neohledně na volbu modelu.



Obrázek 5.10: Porovnání elasticity Gentova a Van der Waalsova modelu při jednoosé napjatosti v tlaku

## 5.2 Prostý smyk

### 5.2.1 Formulace úlohy



Obrázek 5.11: Prostý smyk – přetvoření kvádru v rovnoběžnostěn

Uvažujme kvádr o počáteční délce  $L$ , výšce  $H$  a šířce  $W$ , jenž umístíme do počátku materiálového kartézského souřadnicového systému  $X_K$  tak, že jeho hrany budou rovno-

běžné s odpovídajícími hlavními osami  $X_1$ ,  $X_2$  a  $X_3$ . Referenční těleso v čase podrobíme kinematickému módu prostý smyk, pak kvádr přejde v rovnoběžnostěn, viz schematický Obr. 5.11. Prostý smyk popisuje přetvoření, při kterém rovnoběžné roviny kontinua v průběhu deformace zachovávají rovnoběžnost, a navíc jejich vzdálenost zůstává neměnná. Jedná se o rovinnou deformaci. Vztah mezi referenční a průběžnou konfigurací je charakterizován úhlem zkosu  $\delta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ . Pohybový předpis pro deformaci prostým smykem zapíšeme následovně

$$x_1 = X_1 + \operatorname{tg}(\delta)X_2 \quad (5.27)$$

$$x_2 = X_2 \quad (5.28)$$

$$x_3 = X_3 \quad (5.29)$$

$X_K$  zde reprezentují složky polohového vektoru  $\vec{X}$  z referenční konfigurace, resp.  $x_i$  složky polohového vektoru  $\vec{x}$  v průběžné konfiguraci, kde  $K, i \in \{1, 2, 3\}$ . Jedná o izochorické přetvoření kontinua.

## 5.2.2 Gentův model

### 5.2.2.1 Určení Cauchyho napětí

K určení Cauchyho napětí budeme postupovat přímou metodou. Odvození provedeme pro obecné vyjádření deformačního gradientu a příslušné vyjádření Cauchy-Greenova tenzoru deformace (viz definice (3.6) a (3.36))

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 & F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32} & F_{11}F_{13} + F_{31}F_{33} + F_{21}F_{23} \\ F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32} & F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 & F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33} + F_{12}F_{13} \\ F_{11}F_{13} + F_{31}F_{33} + F_{21}F_{23} & F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33} + F_{12}F_{13} & F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Prostřednictvím deformačního gradientu (5.30) nejprve vyjádříme první hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnice (3.67) s využitím matice pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace (5.31)), tedy

$$I_1(\mathbf{C}) = F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{21}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{32}^2 \quad (5.32)$$

Následně první hlavní invariant (5.32) dosadíme do Gentova modelu hustoty deformační energie (4.9), a důsledkem toho obdržíme vyjádření

$$\Psi_{Gent} = -\frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{2} \ln \left( 1 - \frac{F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{21}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{32}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right) \quad (5.33)$$

V dalším kroku využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76) k určení složek Cauchyho tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ , tedy



$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\mu(F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2)}{\Delta_G} - p & \frac{\mu(F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23})}{\Delta_G} & \frac{\mu(F_{11}F_{31} + F_{12}F_{32} + F_{13}F_{33})}{\Delta_G} \\ \frac{\mu(F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23})}{\Delta_G} & \frac{\mu(F_{21}^2 + F_{22}^2 + F_{23}^2)}{\Delta_G} - p & \frac{\mu(F_{21}F_{31} + F_{22}F_{32} + F_{23}F_{33})}{\Delta_G} \\ \frac{\mu(F_{11}F_{31} + F_{12}F_{32} + F_{13}F_{33})}{\Delta_G} & \frac{\mu(F_{21}F_{31} + F_{22}F_{32} + F_{23}F_{33})}{\Delta_G} & \frac{\mu(F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{33}^2)}{\Delta_G} - p \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

kde

$$\Delta_G = 1 - \frac{F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{21}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{32}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \quad (5.35)$$

Následuje vyčíslení složek deformačního gradientu dle vztahu (3.6) z pohybového předpisu pro případ prostého smyku (5.27) až (5.29)

$$F_{13} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = 0 \quad (5.36)$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 1 \quad (5.37)$$

$$F_{12} = \operatorname{tg}(\delta) \quad (5.38)$$

Po dosazení složek deformačního gradientu (5.36) až (5.38) do matice Cauchyho tenzoru napětí (5.34) a úpravách obdržíme tvar

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{(\mu\lambda_m^2 - 3\mu + p)\operatorname{tg}^2(\delta) + (\lambda_m^2 - 3)(\mu - p)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} & \frac{\mu\operatorname{tg}(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} & 0 \\ \frac{\mu\operatorname{tg}(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} & \frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} - p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} - p \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Lagrangeův multiplikátor  $p$  určíme pomocí silové okrajové podmínky. Vzhledem k výše zmíněné formulaci úlohy 5.2.1 a uvážení rovinné deformace předpokládáme okrajovou podmínku pro Cauchyho napětí ve tvaru  $\sigma_{33} = 0$ . Pak ze vztahu (5.39) plyne vyjádření

$$p = \frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} \quad (5.40)$$

Na závěr dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.40) do matice (5.39). Takto získáme složku Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$ , kterou dále upravíme do bezrozměrného tvaru dělením parametru  $\mu$ . Cauchyho tenzor napětí  $\underline{\sigma}$  po finálních úpravách popíšeme rovnicemi

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\operatorname{tg}^2(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} \quad (5.41)$$

$$\frac{\sigma_{12}}{\mu} = \frac{\operatorname{tg}(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} \quad (5.42)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad (5.43)$$

a pro úplnost dodáme, že ze symetrie tenzoru  $\underline{\sigma}$  plyne  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Nakonec si povšimněme vztahu mezi složkami  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{12}$ , tj. možného vyjádření

$$\sigma_{11} = \sigma_{12}\operatorname{tg}(\delta) \quad (5.44)$$

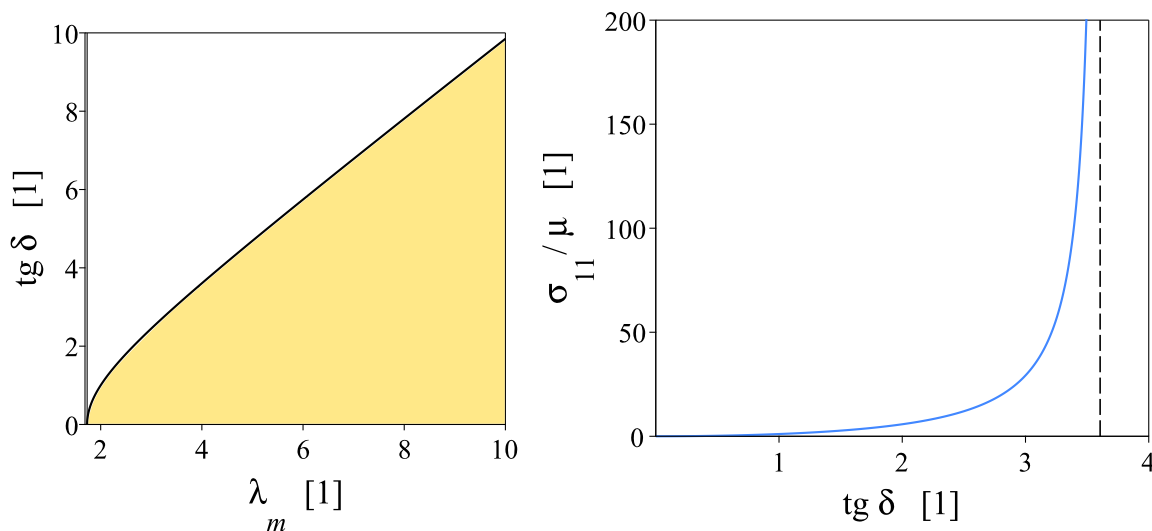
### 5.2.2.2 Kinematicky přípustné deformace

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.10)), který se vyskytuje v Gentově modelu hustoty deformační energie (4.9) a z vyjádření složek normovaného Cauchyho napětí (5.41), (5.42) plyne omezení kladené na úhel zkosu  $\delta$  v závislosti na volbě parametru  $\lambda_m$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem rovnice (5.41), resp. (5.42). Pokud se výraz ve jmenovateli

$$Q_{2G} = \lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3 \quad (5.45)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{2G}$  rovno nule. Levá strana Obr. 5.12 vykresluje implicitní funkci  $Q_{2G} = 0$  rozdělující rovinu na dvě podoblasti. Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose tangens zkosu  $\operatorname{tg}(\delta)$ . Žlutou barvou je vyznačena podoblast kinematicky přípustných deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$  a bílou barvou podoblast kinematicky nepřípustných deformací.

Pravdivost tvrzení ověříme na libovolně zvoleném parametru z intervalu hodnot  $\lambda_m \in (\sqrt{3}, \infty)$ . Uvažujme např. hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$ , pro kterou vypočteme kladný kořen kvadratické rovnice  $Q_{2G} = 0$ , a tím obdržíme:  $\operatorname{tg}(\delta_a) = \sqrt{13} \approx 3.606$ . Limitní hodnota  $\operatorname{tg}(\delta_a)$  koresponduje s polohou asymptoty na pravé straně Obr. 5.12, kde je vynesena závislost normovaného Cauchyho napětí (5.41) na tangensu zkosu  $\operatorname{tg}(\delta)$  pro hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m = 4$ .

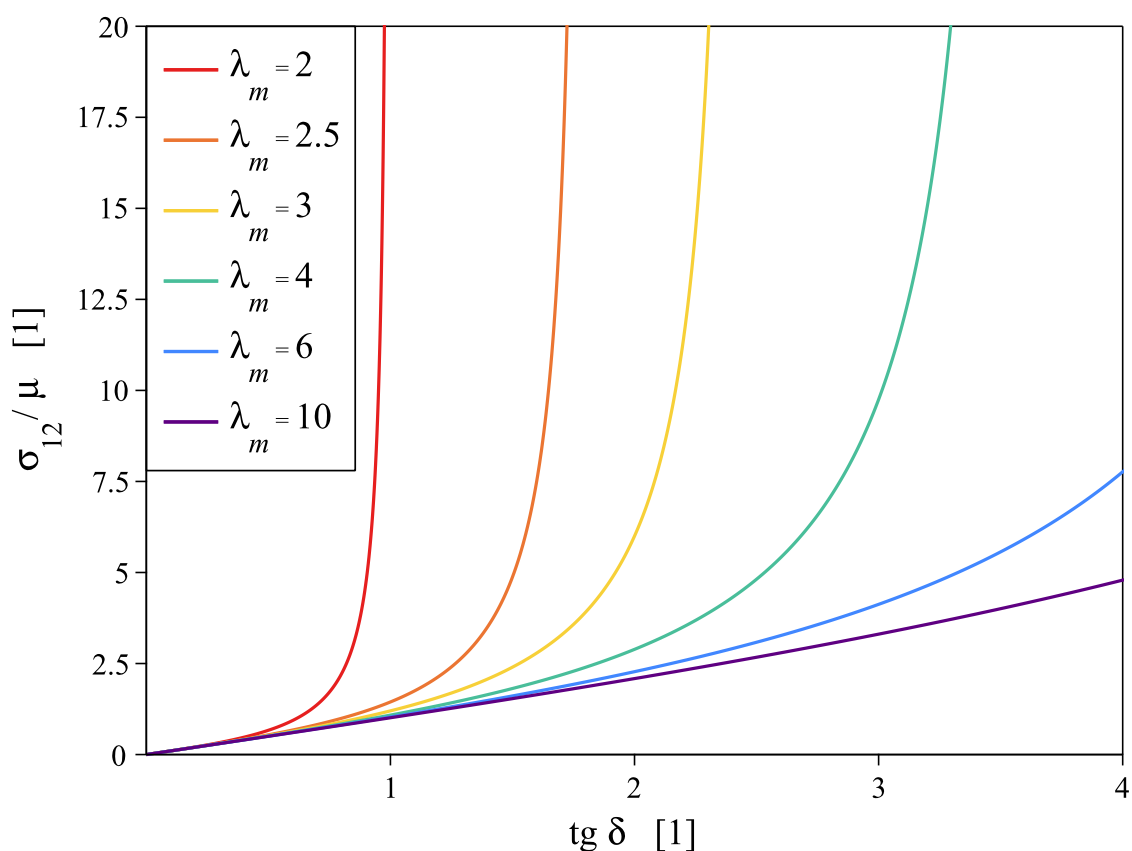


Obrázek 5.12: Kinematicky přípustné deformace Gentova modelu při prostém smyku (vlevo) a předpověď Gentova modelu při prostém smyku pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  (vpravo)

### 5.2.2.3 Interpretace výsledků

V předchozí části byly odvozeny nenulové složky normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$ ,  $\sigma_{12}/\mu$ , a to v závislosti na parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a nezávisle proměnné  $\operatorname{tg}(\delta)$ . Výsledky interpretujeme formou grafické závislosti. Obr. 5.13 zobrazuje předpověď Gentova

materiálového modelu při prostém smyku. Tento graf znázorňuje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{12}/\mu$  na tangensu zkosu  $\text{tg}(\delta)$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$ . Vidíme, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Každá jednotlivá křivka se asymptoticky blíží své limitní hodnotě, které dosahuje pro hodnotu nezávisle proměnné  $\text{tg}(\delta)$  blížíci se ke kladnému kořenu kvadratické rovnice  $Q_{2G} = 0$ . Dále je patrné, že Gentův model při prostém smyku do jisté míry vystihuje jev tuhnutí materiálu. K tomuto jevu dochází u hyperelastických materiálů v oblastech velkých deformací. Na závěr zmíníme, že složka  $\sigma_{11}/\mu$  je větší nežli  $\sigma_{12}/\mu$ , a to právě o násobek  $\text{tg}(\delta)$ . Tato skutečnost vyplývá z rovnice (5.44). Z toho důvodu bylo k interpretaci výsledků vyneseno normované napětí  $\sigma_{12}/\mu$ , ovšem trend chování sdílí s normovaným napětím  $\sigma_{11}/\mu$  totožný.



Obrázek 5.13: Předpověď Gentova modelu – složka napětí  $\sigma_{12}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$

## 5.2.3 Van der Waalsův model

### 5.2.3.1 Určení Cauchyho napětí

Odvození vztahu pro Cauchyho napětí s využitím Van der Waalsova materiálového modelu obnáší obdobnou posloupnost kroků, jako tomu bylo pro Gentův materiálový model v sekci 5.2.2.1. Odvození opět provedeme pro obecné vyjádření deformačního gradientu (5.30) a příslušné vyjádření pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace (5.31). Prostřednictvím

deformačního gradientu (5.30) nejprve vyjádříme první, viz vztah (5.32), a druhý hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnic (3.67) a (3.68) doplněných o vzorec (5.31))

$$\begin{aligned}
 I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} & \left( (F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{21}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{32}^2)^2 - (F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2)^2 \right. \\
 & - (F_{22}^2 + F_{12}^2 + F_{32}^2)^2 - (F_{33}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2)^2 - 2(F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32})^2 \\
 & \left. - 2(F_{11}F_{13} + F_{31}F_{33} + F_{21}F_{23})^2 - 2(F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33} + F_{12}F_{13})^2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Následně oba hlavní invarianty (5.32), (5.46) dosadíme do Van der Waalsova modelu hustoty deformační energie (4.11), a tím získáme vyjádření  $\Psi_{VanderWaals}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_m$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  a všech devíti složkách deformačního gradientu (5.30). Pro jednoduchost budeme nadále uvažovat parametr globální interakce  $a$  roven nule. K určení složek Cauchyho napětí využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76). Obdržíme matici tenzoru Cauchyho napětí  $\underline{\sigma}$ , avšak vzhledem k množství členů, které jednotlivé složky napětí obsahují, ponecháme výpis až na další krok, kdy dojde k výraznému zjednodušení. Následuje vyčíslení složek deformačního gradientu dle vztahu (3.6) z pohybového předpisu pro případ prostého smyku (5.27) až (5.29), viz rovnice (5.36) až (5.38). Po úpravách dospějeme k vyjádření

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{-\mu(\operatorname{tg}^2(\delta)+\beta+1)}{\Delta_V} - p & \frac{-\mu\operatorname{tg}(\delta)}{\Delta_V} & 0 \\ \frac{-\mu\operatorname{tg}(\delta)}{\Delta_V} & \frac{-\mu(\beta+1)}{\Delta_V} - p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\mu(\beta+1+\beta\operatorname{tg}^2(\delta))}{\Delta_V} - p \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

kde

$$\Delta_V = -1 + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2(\delta)}{\lambda_m^2 - 3}} \tag{5.48}$$

Lagrangeův multiplikátor  $p$  určíme pomocí silové okrajové podmínky. Vzhledem k výše zmíněné formulaci úlohy 5.2.1 a uvážení rovinné deformace předpokládáme okrajovou podmínku pro Cauchyho napětí ve tvaru  $\sigma_{33} = 0$ . Pak ze vztahu (5.47) plyne vyjádření

$$p = \frac{-\mu(\beta + 1 + \beta\operatorname{tg}^2(\delta))}{\Delta_V} \tag{5.49}$$

Na závěr dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.49) do matice (5.47). Takto získáme složky Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$ , které dále upravíme do bezrozměrných tvarů dělením parametru  $\mu$ . Cauchyho tenzor napětí  $\underline{\sigma}$  po finálních úpravách popíšeme rovnicemi

$$\boxed{\frac{\sigma_{11}}{\mu} = -\frac{(1 - \beta)\operatorname{tg}^2(\delta)}{\Delta_V}} \tag{5.50}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{\beta\operatorname{tg}^2(\delta)}{\Delta_V}} \tag{5.51}$$

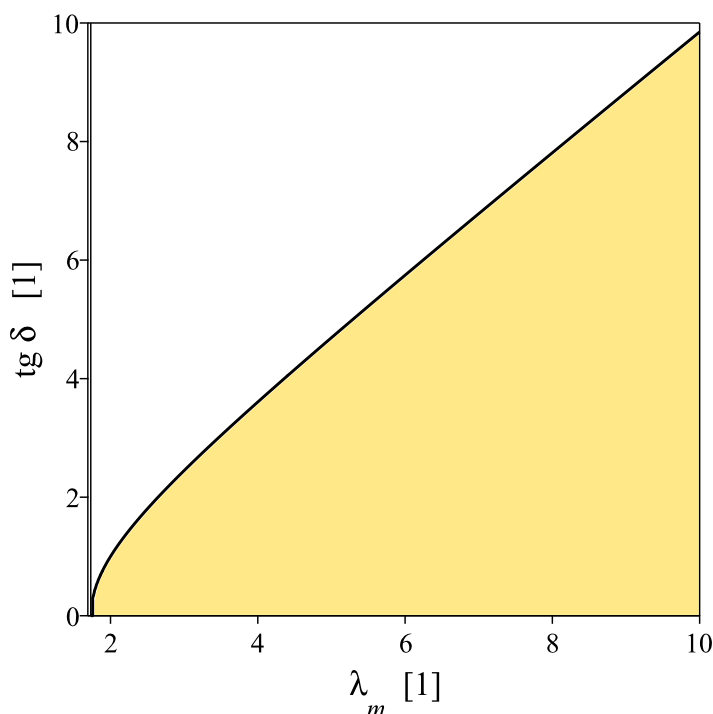
$$\boxed{\frac{\sigma_{12}}{\mu} = -\frac{\operatorname{tg}(\delta)}{\Delta_V}} \quad (5.52)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad (5.53)$$

a pro úplnost dodáme, že ze symetrie tenzoru  $\boldsymbol{\sigma}$  plyne  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Nakonec si povšimněme vztahu mezi složkami  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{12}$ , tj. možného vyjádření

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} - \frac{\operatorname{tg}^2(\delta)}{\Delta_V} = \sigma_{22} + \operatorname{tg}(\delta)\sigma_{12} \quad (5.54)$$

### 5.2.3.2 Kinematicky přípustné deformace



Obrázek 5.14: Kinematicky přípustné deformace Van der Waalsova modelu při prostém smyku

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.14)), který se vyskytuje ve Van der Waalově modelu hustoty deformační energie (4.11) a z vyjádření složek normovaného Cauchyho napětí (5.50), (5.51) a (5.52) plyne omezení kladené na úhel zkosu  $\delta$  v závislosti na volbě parametru  $\lambda_m$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem složek napětí (5.48). Pokud se výraz ve jmenovateli

$$Q_{2W} = -1 + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2(\delta)}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (5.55)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{2W}$  rovno nule. Obr. 5.14 vykresluje implicitní funkci

$Q_{2W} = 0$  rozdělující rovinu na dvě podoblasti. Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose tangens zkosu  $\text{tg}(\delta)$ . Žlutou barvou je vyznačena podoblast kinematicky přípustných deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$  a bílou barvou podoblast kinematicky nepřípustných deformací.

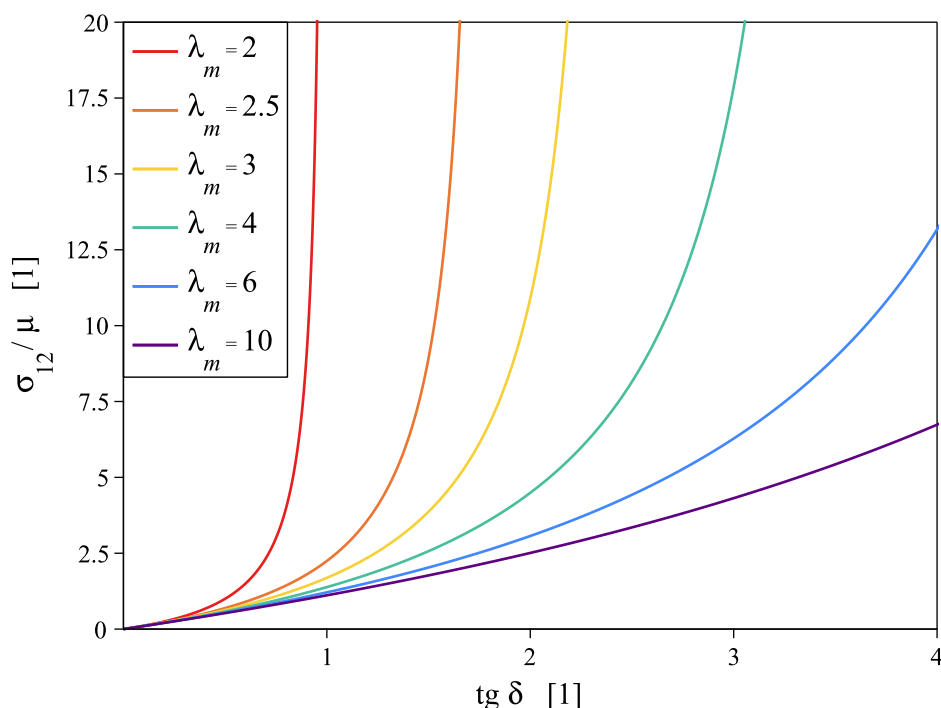
### 5.2.3.3 Interpretace výsledků

Nejprve provedeme rozbor možných hodnot složek Cauchyho napětí (5.50) a (5.51), které připadají v úvahu s přihlédnutím k materiálovému parametru  $\beta$ , viz (5.56) a (5.57)

$$\sigma_{11} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \beta = 1, \\ \neq 0 & \text{je-li } \beta \neq 1. \end{cases} \quad (5.56)$$

$$\sigma_{22} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \beta = 0, \\ \neq 0 & \text{je-li } \beta \neq 0. \end{cases} \quad (5.57)$$

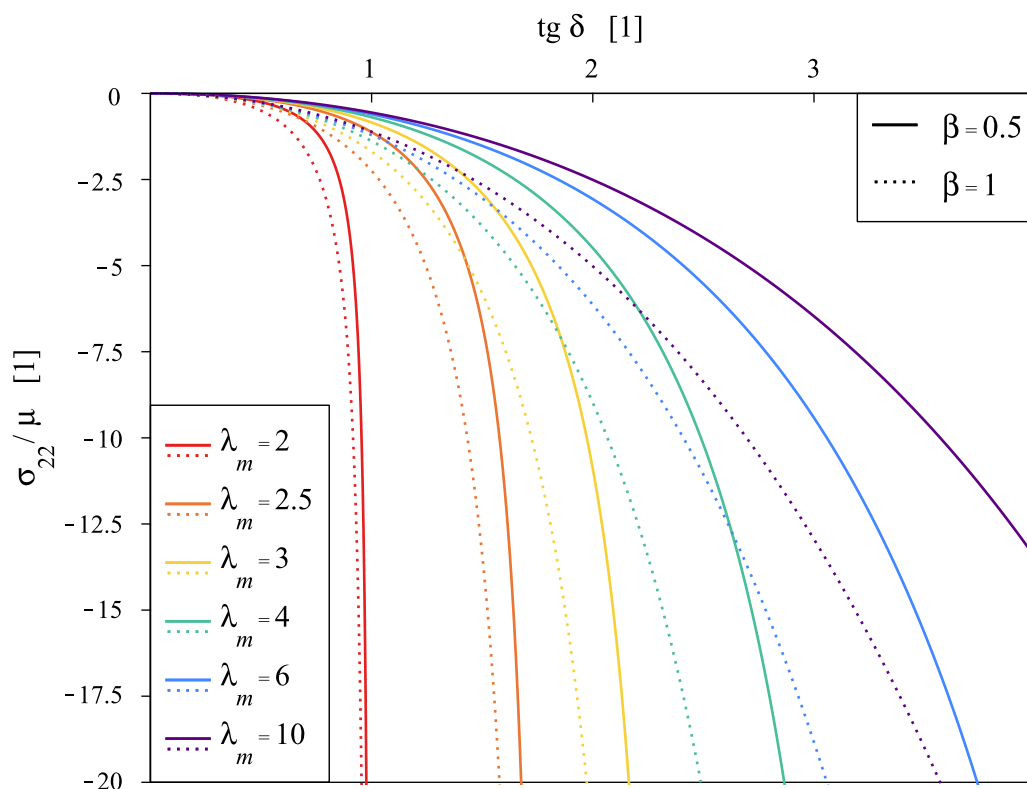
Jak můžeme vidět, směřující parametr  $\beta$  váhově ovlivňuje výstupy složek napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$ , a to dramatickým způsobem. Míra zapojení hlavního invariantu  $I_1(\mathbf{C})$ , resp.  $I_2(\mathbf{C})$  prostřednictvím parametru  $\beta$  má přímý dopad na konstitutivní chování modelu.



Obrázek 5.15: Předpověď Van der Waalsova modelu – složka napětí  $\sigma_{12}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$

Obr. 5.15 zobrazuje předpověď Van der Waalsova materiálového modelu při prostém smyku. Tento graf znázorňuje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{12}/\mu$  na tangensu zkosu  $\text{tg}(\delta)$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$ . Vidíme, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Každá jednotlivá křivka se asymptoticky blíží

své limitní hodnotě, které dosahuje pro hodnotu nezávisle proměnné  $\text{tg}(\delta)$  blíží se ke kladnému kořenu kvadratické rovnice  $Q_{2W} = 0$ . Složka napětí  $\sigma_{12}$  je nezávislá na směšujícím parametru  $\beta$ .

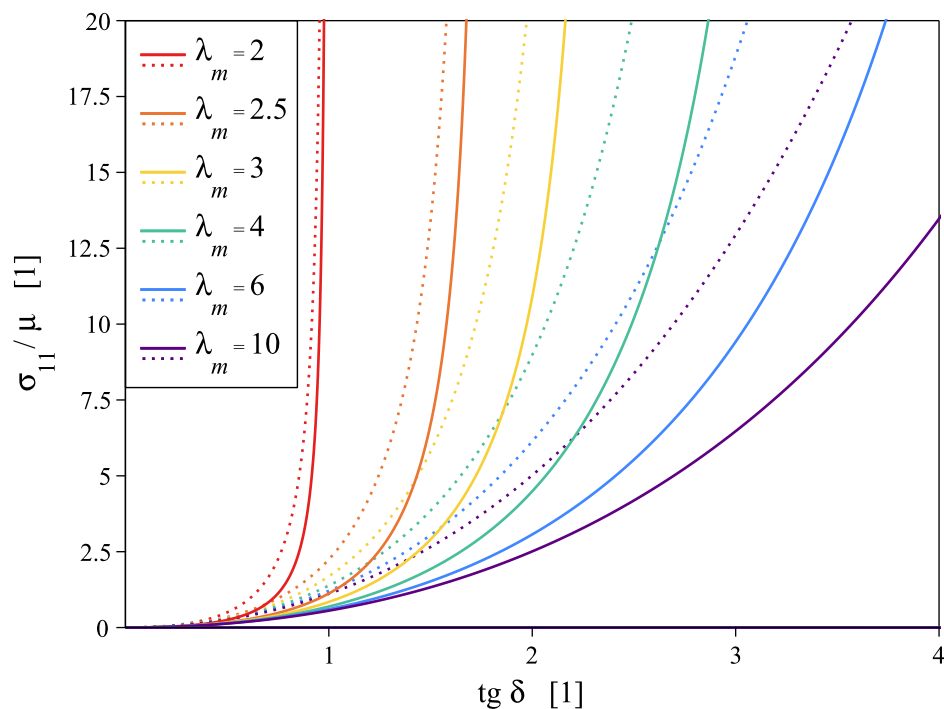


Obrázek 5.16: Předpověď Van der Waalsova modelu – složka napětí  $\sigma_{22}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$  a dvě hodnoty fixního parametru  $\beta = 0.5$  (plnou čarou) a  $\beta = 1$  (tečkovanou čarou)

Obr. 5.16 vykresluje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{22}/\mu$  na tangensu zkosu  $\text{tg}(\delta)$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$  ve dvou sadách křivek pro hodnoty směšujícího parametru  $\beta = 0.5$  (plnou čarou) a  $\beta = 1$  (tečkovanou čarou). Nehledě na volbu parametru  $\beta$  lze pozorovat, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Naproti tomu s rostoucím parametrem  $\beta$  pro každou zvolenou deformaci vzrůstá absolutní hodnota napětí  $\sigma_{22}/\mu$ . Každá jednotlivá křivka se opět asymptoticky blíží své limitní hodnotě.

Níže uvedený Obr. 5.17 vykresluje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na tangensu zkosu  $\text{tg}(\delta)$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$  ve dvou sadách křivek pro hodnoty směšujícího parametru  $\beta = 0.5$  (plnou čarou) a  $\beta = 0$  (tečkovanou čarou). Nehledě na volbu parametru  $\beta$  lze pozorovat, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Naproti tomu s rostoucím parametrem  $\beta$  pro každou zvolenou deformaci klesá hodnota napětí  $\sigma_{11}/\mu$ . Každá jednotlivá křivka se opět asymptoticky blíží své limitní hodnotě.

Na základě pozorování Obr. 5.15, 5.16 a 5.17 lze na závěr konstatovat, že Van der Waalsův model při prostém smyku do jisté míry vystihuje jev tuhnutí materiálu. K tomuto jevu dochází u hyperelastických materiálů v oblastech velkých deformací.



Obrázek 5.17: Předpověď Van der Waalsova modelu – složka napětí  $\sigma_{11}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$  a dvě hodnoty fixního parametru  $\beta = 0.5$  (plnou čarou) a  $\beta = 0$  (tečkovanou čarou)

## 5.2.4 Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu

### Cauchyho napětí

Následuje rekapitulace nenulových složek normovaného Cauchyho napětí pro Gentův model při prostém smyku:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\operatorname{tg}^2(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} \quad (5.58)$$

$$\frac{\sigma_{12}}{\mu} = \frac{\operatorname{tg}(\delta)(\lambda_m^2 - 3)}{\lambda_m^2 - \operatorname{tg}^2(\delta) - 3} \quad (5.59)$$

Následuje rekapitulace nenulových složek normovaného Cauchyho napětí pro Van der Waalsův model při prostém smyku:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = -\frac{(1 - \beta)\operatorname{tg}^2(\delta)}{\Delta_V} \quad (5.60)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{\beta\operatorname{tg}^2(\delta)}{\Delta_V} \quad (5.61)$$

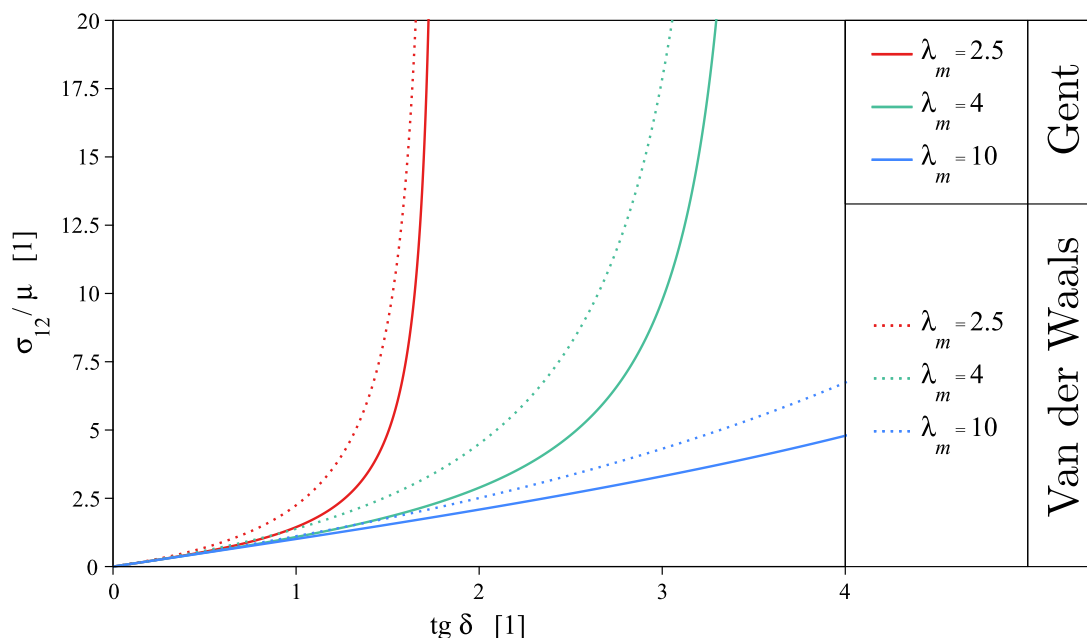


$$\frac{\sigma_{12}}{\mu} = -\frac{\operatorname{tg}(\delta)}{\Delta_V} \quad (5.62)$$

Ze všeho nejdříve vezměme v úvahu kvalitativní rozdíl v předpovědi Cauchyho napětí mezi Gentovým a Van der Waalsovým modelem v případě prostého smyku. Pro Gentův model hustoty deformační energie jsme získali tři nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  a  $\sigma_{21}$  (viz rovnice (5.41), (5.42) a (5.43)). Naproti tomu pro Van der Waalsův model jsme obdrželi čtyři nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  a  $\sigma_{21}$  (viz rovnice (5.50), (5.51), (5.52) a (5.53)). Pro případ Van der Waalsova modelu se v závislosti na materiálovém parametru  $\beta$  váhově mění výstupní hodnota složek napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$ , viz rozbor možných hodnot (5.56) a (5.57). Kvalitativní rozdíl v předpovědi napětí považujeme za přímý důsledek míry zapojení hlavních invariantů tenzoru deformace  $I_1(\mathbf{C})$  a  $I_2(\mathbf{C})$  prostřednictvím směřujícího parametru  $\beta$ .

Začneme porovnáním složky normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{22}/\mu$ . Můžeme tvrdit, že Van der Waalsův model předpovídá složku Cauchyho napětí  $\sigma_{22}$  v absolutní hodnotě vždy větší nebo rovnou než předpověď té samé složky Gentova modelu.

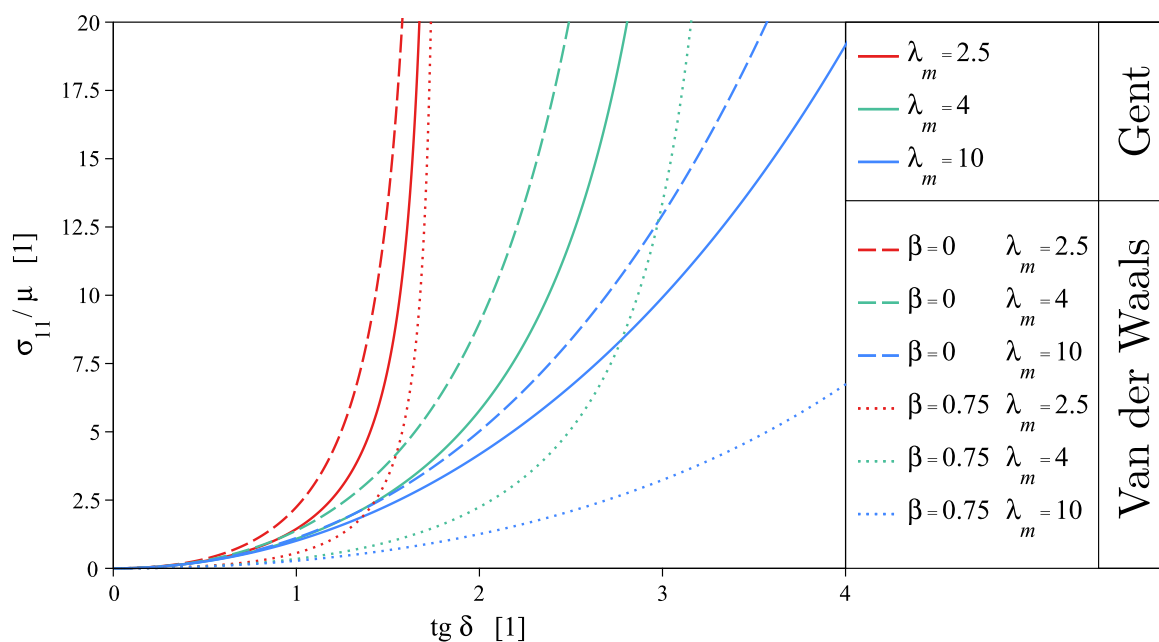
Pokročíme k porovnání složky napětí  $\sigma_{12}/\mu$ , které provedeme pro zvolenou sadu hodnot parametru limitního protažení  $\lambda_m$ . Obr. 5.18 znázorňuje závislost normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{12}/\mu$  na tangensu zkosu  $\operatorname{tg}(\delta)$  postupně pro tři zvolené hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Z grafu lze vyčíst, že mechanická odezva Van der Waalsova modelu je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  ve složce napětí  $\sigma_{12}$  tužší nežli odezva Gentova modelu.



Obrázek 5.18: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu – složka napětí  $\sigma_{12}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$

Následuje porovnání složky napětí  $\sigma_{11}/\mu$ , které opět provedeme pro zvolenou sadu hodnot parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a směšujícího parametru  $\beta$ . Graf na Obr. 5.19 znázorňuje závislost normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na tangensu zkosu  $\operatorname{tg}(\delta)$  postupně pro tři

zvolené hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Van der Waalsův model předpovídá  $\sigma_{11}/\mu = 0$  pro hodnotu parametru  $\beta = 1$  (viz rovnici (5.50)), proto pro něj napětí  $\sigma_{11}/\mu$  vykreslujeme pro dvě hodnoty parametru  $\beta$  různé od jedné. Z grafu lze vyčíst, že mechanická odezva Van der Waalsova modelu s parametrem  $\beta = 0$  je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  ve složce napětí  $\sigma_{11}$  tužší nežli odezva Gentova modelu. S rostoucím parametrem  $\beta$  se odezva Van der Waalsova modelu stává více poddajnější, a tím se nejprve přibližuje odezvě Gentova modelu, až se v jednu chvíli stane poddajnější.



Obrázek 5.19: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu – složka napětí  $\sigma_{11}$  – při prostém smyku pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$  a dvě hodnoty fixního parametru  $\beta = 0$  (čárkovanou čarou) a  $\beta = 0.75$  (tečkovanou čarou)

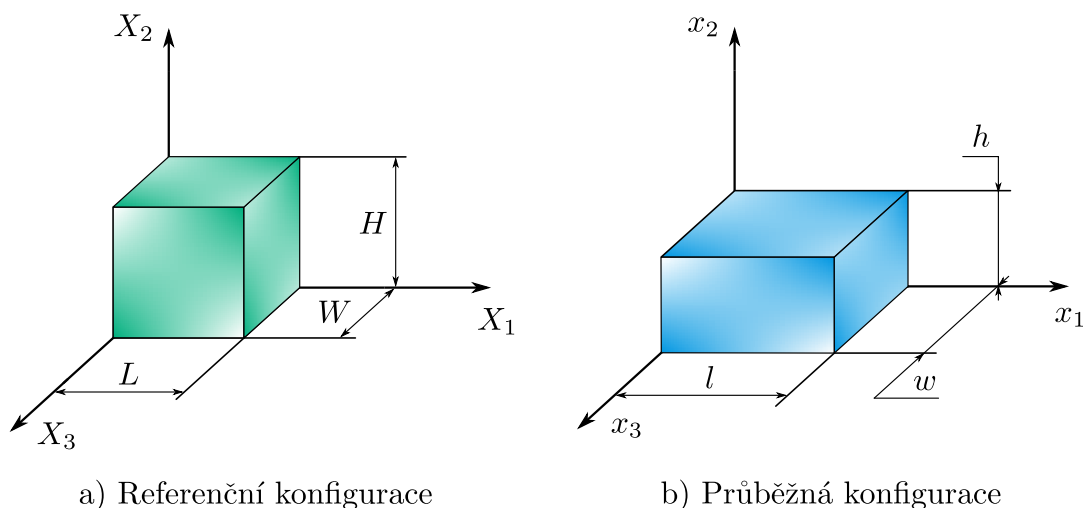
Na základě výše uvedených srovnání lze tvrdit, že Gentův i Van der Waalsův model sdílí totožný trend. Nenulové složky skutečných napětí obou uvažovaných modelů se v absolutní hodnotě limitně blíží nekonečnu, a to neohledně na volbu materiálových parametrů (mimo hodnoty parametrů, které by zapříčinily vymizení složek diskutovaných složek napětí).

### Kinematicky přípustné deformace

Pokud srovnáme grafy kinematicky přípustných deformací obou modelů z Obr. 5.12 a 5.14 můžeme si všimnout podoby obou hraničních křivek. Jejich shodu ověříme porovnáním příslušných předpisů hraničních křivek  $Q_{2G} = 0$  a  $Q_{2W} = 0$ , viz rovnice (5.45) a (5.55). Triviálními úpravami  $Q_{2W} = 0$  dospějeme k rovnosti implicitních předpisů obou hraničních křivek. Pro každou zvolenou hodnotu parametru  $\lambda_m$  tudíž budou kinematicky přípustné deformace Gentova a Van der Waalsova modelu ekvivalentní, a to neohledně na volbu parametrů  $\beta$  a  $\mu$ .

## 5.3 Rovnoosá rovinná deformace

### 5.3.1 Formulace úlohy



Obrázek 5.20: Ilustrace rovnoosé rovinné deformace

Uvažujme kvádr o počáteční délce  $L$ , výšce  $H$  a šířce  $W$ , jenž umístíme do počátku materiálového kartézského souřadnicového systému  $X_K$  tak, že jeho hrany délky, výšky a šířky budou rovnoběžné s odpovídajícími hlavními osami  $X_1$ ,  $X_2$  a  $X_3$ . Referenční těleso v čase podrobíme rovnoosé rovinné deformaci, viz Obr. 5.20. Vztah mezi referenční a průběžnou konfigurací charakterizujeme následujícím pohybovým předpisem

$$x_1 = \frac{l}{L} X_1 = \lambda_1 X_1 \quad (5.63)$$

$$x_2 = \frac{h}{H} X_2 = \lambda_2 X_2 \quad (5.64)$$

$$x_3 = \frac{w}{W} X_3 = \lambda_3 X_3 \quad (5.65)$$

Přetvoření kvádrů popisuje zobrazení  $\xi$ , které polohovému vektoru  $\vec{X}$  z referenční konfigurace zaměřující bod kvádrů přiřazuje polohový vektor  $\vec{x}$  v průběžné konfiguraci zaměřující bod přetvořeného kvádrů. Jedná o izochorické přetvoření kontinua. Podíly průběžných a referenčních délek hran kvádrů udávají hlavní protažení  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$ . Základní aspekt rovnoosé rovinné deformace vymežíme kinematickou podmínkou

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad (5.66)$$

Z pohybového předpisu s odvoláním na vzorec (3.6) vypočteme deformační gradient a dle vztahu (3.36) vyjádříme příslušný pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

### 5.3.2 Gentův model

#### 5.3.2.1 Určení Cauchyho napětí

Prostřednictvím deformačního gradientu (5.67) nejprve vyjádříme první hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnice (3.67) s využitím matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.68)), tedy

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (5.69)$$

Následně první hlavní invariant (5.69) dosadíme do Gentova modelu hustoty deformační energie (4.9), a důsledkem toho obdržíme vyjádření  $\Psi_{Gent}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$

$$\Psi_{Gent} = -\frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{2} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right) \quad (5.70)$$

V dalším kroku využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76) k určení složek Cauchyho napětí. Vzhledem k faktu, že pro tento konkrétní případ jsou složky deformačního gradientu  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{23}$ ,  $F_{31}$  a  $F_{32}$  nulové, zjišťujeme, že se rovněž složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  a  $\sigma_{32}$  rovnají nule. Pak diagonální složky, jež jsou v důsledku vztahů (5.63), (5.64), (5.65), (5.67) a (5.68) hlavními napětími, nabývají tvar

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 - p = \mu \lambda_1^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.71)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 - p = \mu \lambda_2^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.72)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 - p = \mu \lambda_3^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.73)$$

Nyní vyčíslíme Lagrangeův multiplikátor  $p$  pomocí silové okrajové podmínky. Z výše zmíněné formulace úlohy 5.3.1 vyplývá, že ve směru prostorové souřadnice  $x_2$  dvě stěny kvádrů v průběžné konfiguraci nejsou vystaveny vnějšímu silovému působení. Konkrétně se jedná o dvě stěny kolmé na souřadnicovou osu  $x_2$ . Díky této okrajové podmínce položíme složku Cauchyho napětí  $\sigma_{22}$  rovnou nule a z rovnice (5.72) vyjádříme Lagrangeův multiplikátor

$$p = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = \mu \lambda_2^2 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} \quad (5.74)$$

Následně výpočet doplníme o předpoklad nestlačitelnosti (3.70), díky kterému uvedeme hlavní protažení  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  do společného vztahu. S odvoláním na uvažovanou kinematickou podmínku (5.66) vyjádříme hlavní protažení  $\lambda_2$  v závislosti na  $\lambda_1$  nebo případně v závislosti na  $\lambda_3$ . S využitím vztahu pro výpočet jacobíanu (3.8) poté souhrnně píšeme

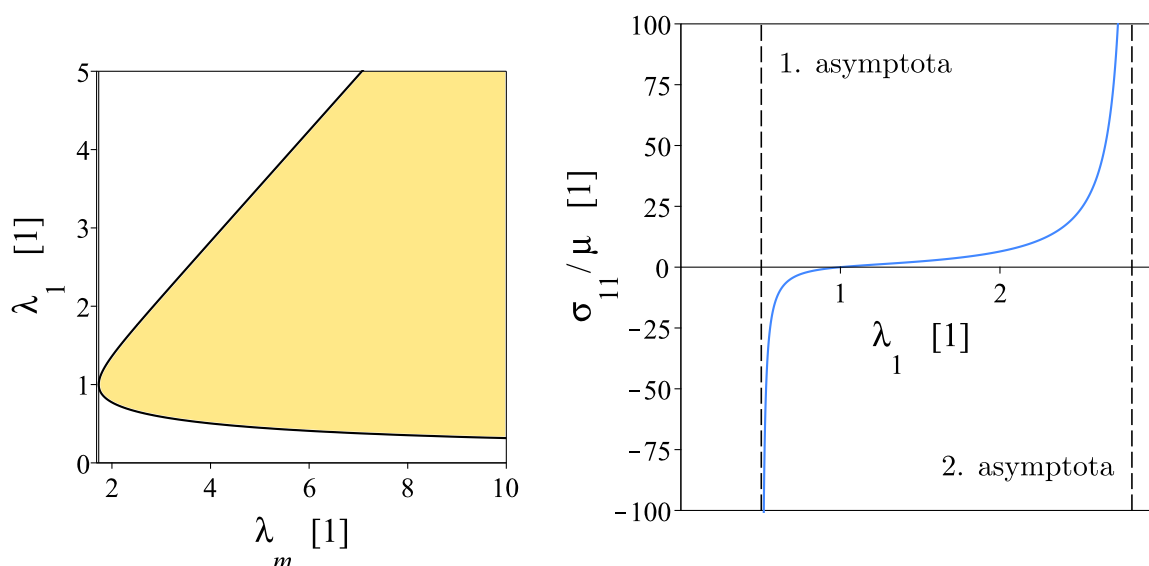
$$J = \det |F| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (5.75)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_3^2} \quad (5.76)$$

Na závěr dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.74) do rovnice (5.71), resp. (5.73), kam vzápětí zavedeme substituce (5.66), (5.76), a celou složku  $\sigma_{11}$ , resp.  $\sigma_{33}$ , tak vyjádříme v závislosti na deformaci  $\lambda_1$  a materiálových parametrech  $\lambda_m$  a  $\mu$ . Takto získáme jediné nenulové složky Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{33}$ , které lze vyjádřit v bezrozměrném tvaru normováním rovnic (5.71) a (5.73) parametrem  $\mu$ , tedy

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\mu} = \frac{(\lambda_m^2 - 3)(\lambda_1^6 - 1)}{\lambda_1^4 \lambda_m^2 - 2\lambda_1^6 - 1} \quad (5.77)$$

### 5.3.2.2 Kinematicky přípustné deformace



Obrázek 5.21: Kinematicky přípustné deformace Gentova modelu při rovnoosé rovinné deformaci (vlevo) a předpověď Gentova modelu při rovnoosé rovinné deformaci pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  (vpravo)

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.10)), který se vyskytuje v Gentově modelu hustoty deformační energie (4.9) a z vyjádření normovaného Cauchyho napětí (5.77) plyne omezení kladené na hlavní protažení  $\lambda_1$  v závislosti na volbě parametru  $\lambda_m$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem rovnice (5.77). Pokud se výraz ve jmenovateli

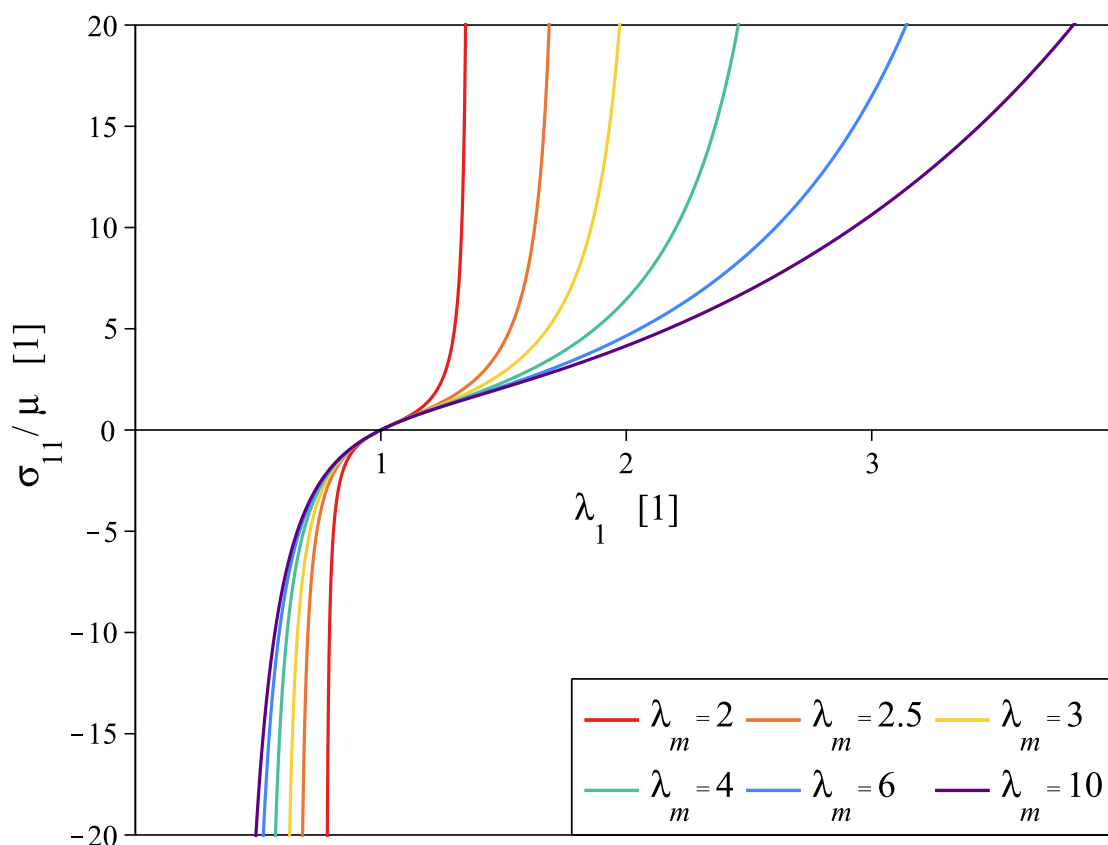
$$Q_{3G} = \lambda_1^4 \lambda_m^2 - 2\lambda_1^6 - 1 \quad (5.78)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{3G}$  rovno nule. Levá strana Obr. 5.21 vykresluje implicitní

funkci  $Q_{3G} = 0$  rozdělující rovinu na dvě podoblasti. Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose hlavní protažení  $\lambda_1$ . Žlutou barvou je vyznačena podoblast kinematically přípustných deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$  a bílou barvou podoblast kinematically nepřípustných deformací.

Pravdivost tvrzení ověříme na libovolně zvoleném parametru z intervalu hodnot  $\lambda_m \in (\sqrt{3}, \infty)$ . Uvažujme např. hodnotu  $\lambda_m = 4$ , pro kterou přibližně vypočteme kladné kořeny rovnice  $Q_{3G} = 0$ , a tím obdržíme:  $\lambda_{1e} \approx 0.504$ ,  $\lambda_{1f} \approx 2.827$ . Limitní hodnota  $\lambda_{1e}$ , resp.  $\lambda_{1f}$  koresponduje s polohou první, resp. druhé asymptoty na pravé straně Obr. 5.21, kde je vynesena závislost normovaného Cauchyho napětí (5.77) na hlavním protažení  $\lambda_1$  pro hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m = 4$ .

### 5.3.2.3 Interpretace výsledků



Obrázek 5.22: Předpověď Gentova modelu při rovnoosé rovinné deformaci pro proměnný materiálový parametr  $\lambda_m$

V předchozí části byly odvozeny nenulové složky normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$  a  $\sigma_{33}/\mu$ , a to v závislosti na parametru  $\lambda_m$  a nezávisle proměnné  $\lambda_1$ . Výsledky interpretujeme formou jediné grafické závislosti, vzhledem k tomu, že si jsou obě nenulová napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{33}$  v případě rovnoosé rovinné deformaci rovna, viz (5.77). Obr. 5.22 zobrazuje předpověď Gentova materiálového modelu při rovnoosé rovinné deformaci. Tento graf znázorňuje závislost bezrozměrného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro šest zvolených

hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$ . Vidíme, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám, kterých dosahují pro hodnoty nezávisle proměnné  $\lambda_1$  blížící se ke kladným kořenům rovnice  $Q_{3G} = 0$ . Z grafu je rovněž patrné, že Gentův model při jednoosé napjatosti do jisté míry vystihuje fenomén tuhnutí materiálu. K tomuto jevu dochází u hyperelastických materiálů v oblastech velkých deformací.

### 5.3.3 Van der Waalsův model

#### 5.3.3.1 Určení Cauchyho napětí

Odvození vztahu pro Cauchyho napětí s využitím Van der Waalsova materiálového modelu obnáší srovnatelnou poslopnost kroků, jako tomu bylo pro Gentův materiálový model v sekci 5.3.2.1. Prostřednictvím deformačního gradientu (5.67) nejprve vyjádříme první a druhý hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnic (3.67) a (3.68) doplněných o vyjádření matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.68)). Shodně obdržíme první (5.69) a druhý hlavní invariant

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left( (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4 - \lambda_2^4 - \lambda_3^4 \right) \quad (5.79)$$

Následně oba hlavní invarianty (5.69), (5.79) dosadíme do Van der Waalsova modelu hustoty deformační energie (4.11), a tím získáme vyjádření  $\Psi_{VanderWaals}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_m$ ,  $\beta$  a  $\mu$ . Pro jednoduchost budeme nadále uvažovat parametr globální interakce  $a$  roven nule. K určení složek Cauchyho napětí využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76). Díky skutečnosti, že pro případ rovnoosé rovinné deformace matice deformačního gradientu (5.67) obsahuje nenulové pouze diagonální složky, budou mimodiagonální prvky Cauchyho tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  rovny nule. Složky  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{33}$ , jež jsou ve skutečnosti hlavními napětími, nabývají odpovídající tvar

$$\sigma_{11} = \frac{\left( (1 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)\beta - 1 \right) \mu \lambda_1^2}{\Gamma_{V1}} - p \quad (5.80)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\left( (1 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\beta - 1 \right) \mu \lambda_2^2}{\Gamma_{V1}} - p \quad (5.81)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\left( (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\beta - 1 \right) \mu \lambda_3^2}{\Gamma_{V1}} - p \quad (5.82)$$

kde

$$\Gamma_{V1} = -1 + \sqrt{\frac{\left( (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1)\lambda_1^2 + (\lambda_3^2 - 1)\lambda_2^2 - \lambda_3^2 \right) \beta + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (5.83)$$

Lagrangeův multiplikátor  $p$  určíme ze silové okrajové podmínky. Z výše zmíněné formulace úlohy 5.3.1 vyplývá, že ve směru prostorové souřadnice  $x_2$  dvě stěny kvádrů v průběžné konfiguraci nejsou vystaveny vnějšímu silovému působení. Konkrétně se jedná o dvě stěny

kolmé na souřadnicovou osu  $x_2$ . Díky této okrajové podmínce položíme složku Cauchyho napětí  $\sigma_{22}$  rovnou nule a z rovnice (5.81) vyjádříme Lagrangeův multiplikátor

$$p = \frac{\left((1 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_2^2}{\Gamma_{V1}} \quad (5.84)$$

Do výpočtu dále zavedeme předpoklad nestlačitelnosti (3.70), díky kterému uvedeme hlavní protažení  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  do společného vztahu (5.75). S odvoláním na uvažovanou kinematickou podmínku (5.66) vyjádříme hlavní protažení  $\lambda_2$  v závislosti na  $\lambda_1$  nebo případně v závislosti na  $\lambda_3$ , viz vztah (5.76). Nakonec dosadíme Lagrangeův multiplikátor (5.84) do rovnice (5.80), resp. (5.82), kam vzápětí zavedeme substituce (5.66), (5.76), a celou složku  $\sigma_{11}$ , resp.  $\sigma_{33}$ , tak vyjádříme v závislosti na deformaci  $\lambda_1$  a materiálových parametrech  $\lambda_m$ ,  $\beta$  a  $\mu$ . Takto získáme jediné nenulové složky Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{33}$ , které lze vyjádřit v bezrozměrném tvaru normováním rovnic (5.80) a (5.82) parametrem  $\mu$ , tedy

$$\boxed{\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\mu} = -\frac{\beta\lambda_1^8 - \beta\lambda_1^6 + \lambda_1^6 - \beta\lambda_1^2 + \beta - 1}{\Gamma_{V2}}} \quad (5.85)$$

kde

$$\Gamma_{V2} = \lambda_1^4 \left( -1 + \sqrt{\frac{\beta\lambda_1^8 + (2 - 2\beta)\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 2\beta\lambda_1^2 - \beta + 1}{\lambda_1^4(\lambda_m^2 - 3)}} \right) \quad (5.86)$$

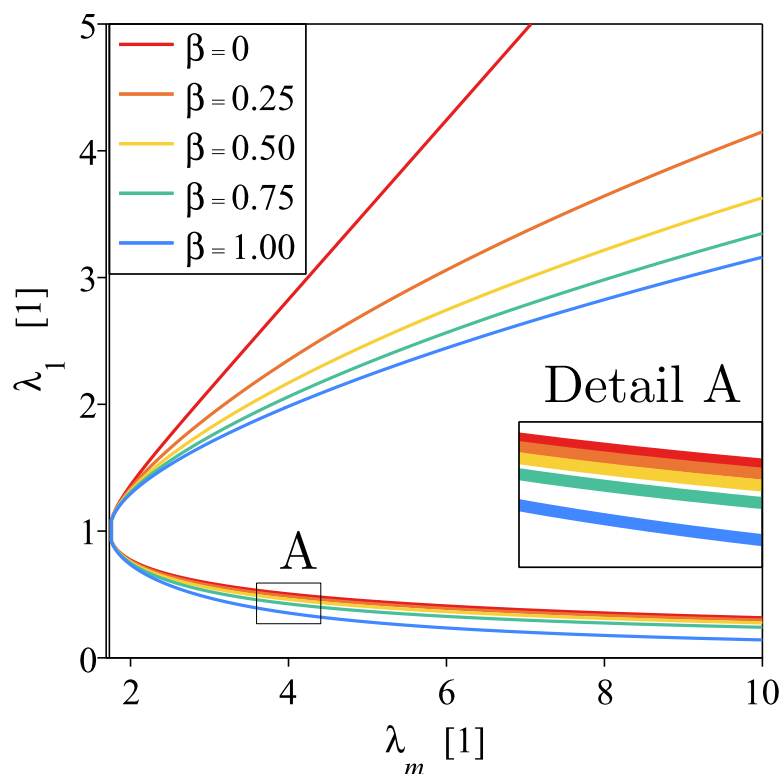
### 5.3.3.2 Kinematicky přípustné deformace

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.14)), který se vyskytuje ve Van der Waalsově modelu hustoty deformační energie (4.11) a z vyjádření složek normovaného Cauchyho napětí (5.85) plyne omezení kladené na hlavní protažení  $\lambda_1$  v závislosti na volbě parametrů  $\lambda_m$  a  $\beta$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovatelem rovnice (5.85). Pokud se výraz ve jmenovateli

$$Q_{3W} = -1 + \sqrt{\frac{\beta\lambda_1^8 + (2 - 2\beta)\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 2\beta\lambda_1^2 - \beta + 1}{\lambda_1^4(\lambda_m^2 - 3)}} \quad (5.87)$$

bude blížit nule, normované napětí půjde k nekonečnu. Hraniční křivku přípustných deformací získáme, pokud položíme  $Q_{3W}$  rovno nule. Obr. 5.23 vykresluje implicitní funkci  $Q_{3W} = 0$  pro pět hodnot parametru  $\beta$ . Na horizontální ose se nachází parametr limitního protažení  $\lambda_m$  a na vertikální ose hlavní protažení  $\lambda_1$ . Každá hraniční křivka rozděluje rovinu na dvě podoblasti, konvexní a konkávní plochu. Konvexní plocha určuje kinematicky přípustnou oblast deformací pro zvolený parametr  $\lambda_m$ . Zato konkávní plocha určuje kinematicky nepřípustnou oblast deformací. Všimněme si, že se rostoucím parametrem  $\beta$  dochází v rovnoosém tahu (tj. pro  $\lambda_1 > 1$ ) k zmenšení podoblasti kinematicky přípustných deformací. Na druhou stranu s rostoucím parametrem  $\beta$  dochází v tlaku (tj. pro  $0 < \lambda_1 < 1$ ) k zvětšení podoblasti kinematicky přípustných deformací, viz detail A na Obr. 5.23. Popsaná změna monotónnosti modelového chování v tahu a tlaku odráží míru zapojení druhého hlavního invariantu pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $I_2(\mathbf{C})$  skrze vztah (4.13).



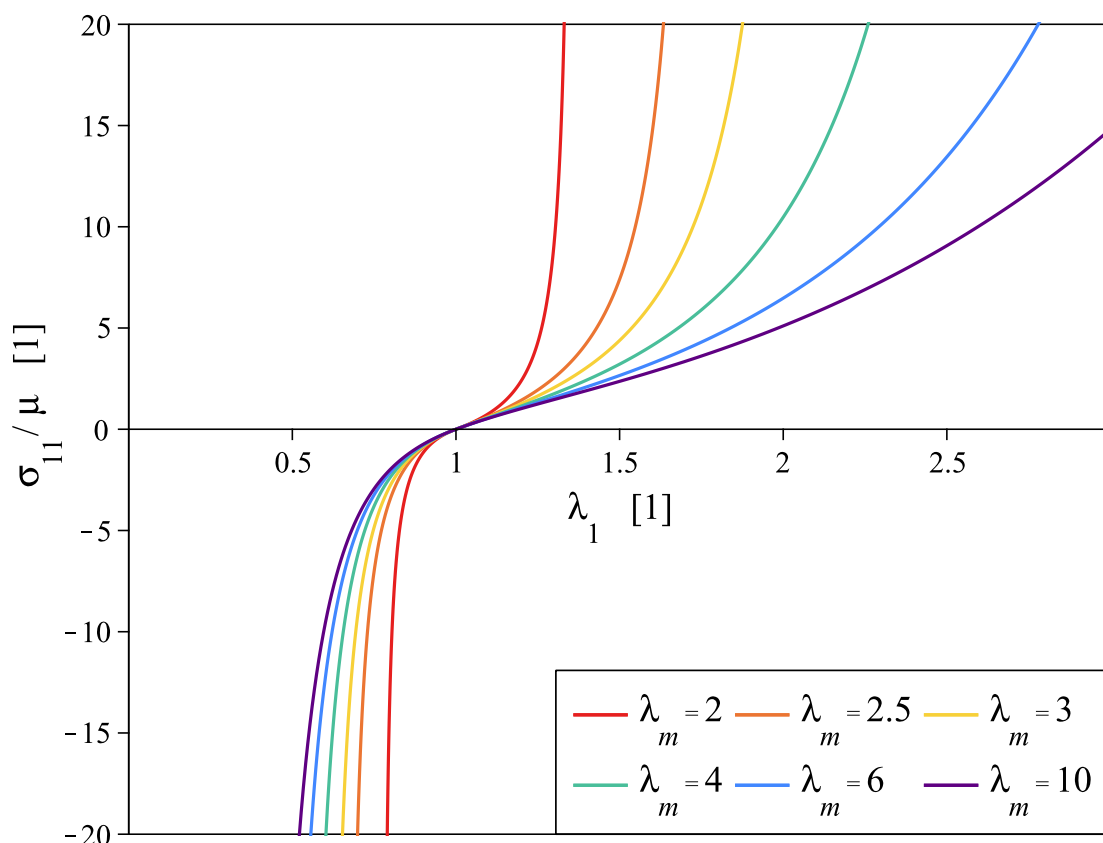


Obrázek 5.23: Kinematically přípustné deformace Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci pro proměnný parametr  $\beta$

Pravdivost tvrzení ověříme na libovolně zvoleném parametru z intervalu hodnot  $\lambda_m \in (\sqrt{3}, \infty)$ . Uvažujme např. hodnoty parametrů  $\lambda_m = 4$  a  $\beta = 0.5$ , pro které přibližně vypočteme kladné kořeny rovnice  $Q_{3W} = 0$ , a tím obdržíme:  $\lambda_{1g} \approx 0.461$ ,  $\lambda_{1h} \approx 2.169$ .

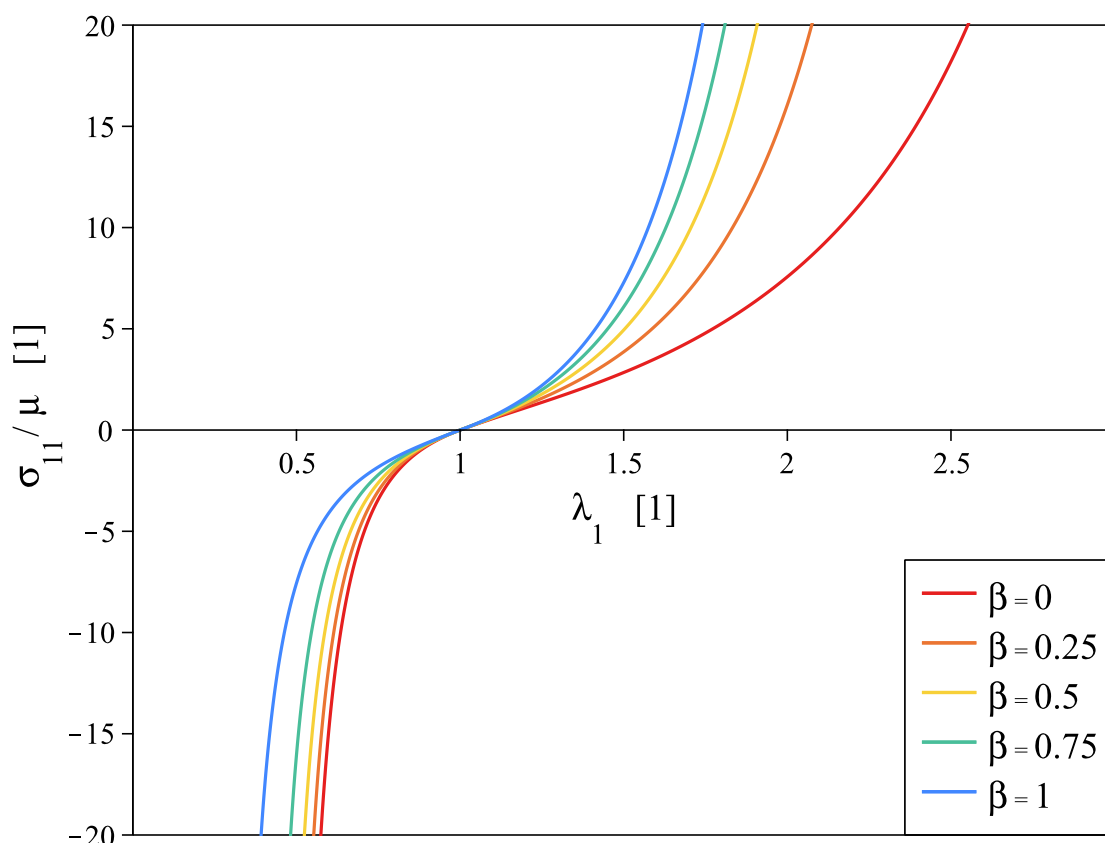
### 5.3.3.3 Interpretace výsledků

Vzhledem k rovnosti složek Cauchyho napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{33}$  výsledky interpretujeme formou grafických závislostí pouze pro napětí  $\sigma_{11}$ . Závěry pro  $\sigma_{33}$  budou totožné. Normované Cauchyho napětí (5.85) je funkcí směřujícího parametru  $\beta$ , parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a deformace prostřednictvím hlavního protažení  $\lambda_1$ . Obr. 5.24 znázorňuje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro šest zvolených hodnot materiálového parametru  $\lambda_m$  a fixní volbu  $\beta = 0$ . Lze pozorovat, že s rostoucím parametrem  $\lambda_m$  se model stává poddajnějším. Jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám, kterých dosahují pro hodnoty nezávisle proměnné  $\lambda_1$  blíží se ke kladným kořenům rovnice  $Q_{3W} = 0$  s uvážením odpovídajících hodnot  $\lambda_m$  a  $\beta$ . Z grafu je patrné, že Van der Waalsův model pro případ rovnoosé rovinné deformace do jisté míry vystihuje jev tuhnutí materiálu pozorovaný v oblastech velkých deformací.



Obrázek 5.24: Předpověď Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci pro fixní parametr  $\beta = 0$  a proměnný parametr  $\lambda_m$

Obr. 5.25 vykresluje závislost bezrozměrného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na hlavním protažení  $\lambda_1$  postupně pro pět zvolených hodnot materiálového parametru  $\beta$  a fixní volbu  $\lambda_m = 5$ . Vidíme, že v tahové části ( $\lambda_1 > 1$ ) se s rostoucím parametrem  $\beta$  model stává tužším, ovšem v tlakové části ( $\lambda_1 < 1$ ) se s rostoucím parametrem  $\beta$  model stává poddajnějším. Tato skutečnost přímo souvisí se zmenšením, resp. zvětšením kinematically přípustné oblasti deformace v tahu, resp. v tlaku, ke které dochází s vzrůstajícím parametrem  $\beta$ , jak bylo ukázáno v předchozí sekci 5.3.3.2. Jednotlivé křivky se opět asymptoticky blíží svým limitním hodnotám a taktéž sledují jev tuhnutí materiálu v oblastech velkých deformací nezávisle na volbu parametru  $\beta$ .



Obrázek 5.25: Předpověď Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci pro fixní parametr  $\lambda_m = 5$  a proměnný parametr  $\beta$

### 5.3.4 Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu

#### Cauchyho napětí

Následuje rekapitulace nenulových složek normovaného Cauchyho napětí pro Gentův model při rovnoosé rovinné deformaci:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\mu} = \frac{(\lambda_m^2 - 3)(\lambda_1^6 - 1)}{\lambda_1^4 \lambda_m^2 - 2\lambda_1^6 - 1} \quad (5.88)$$

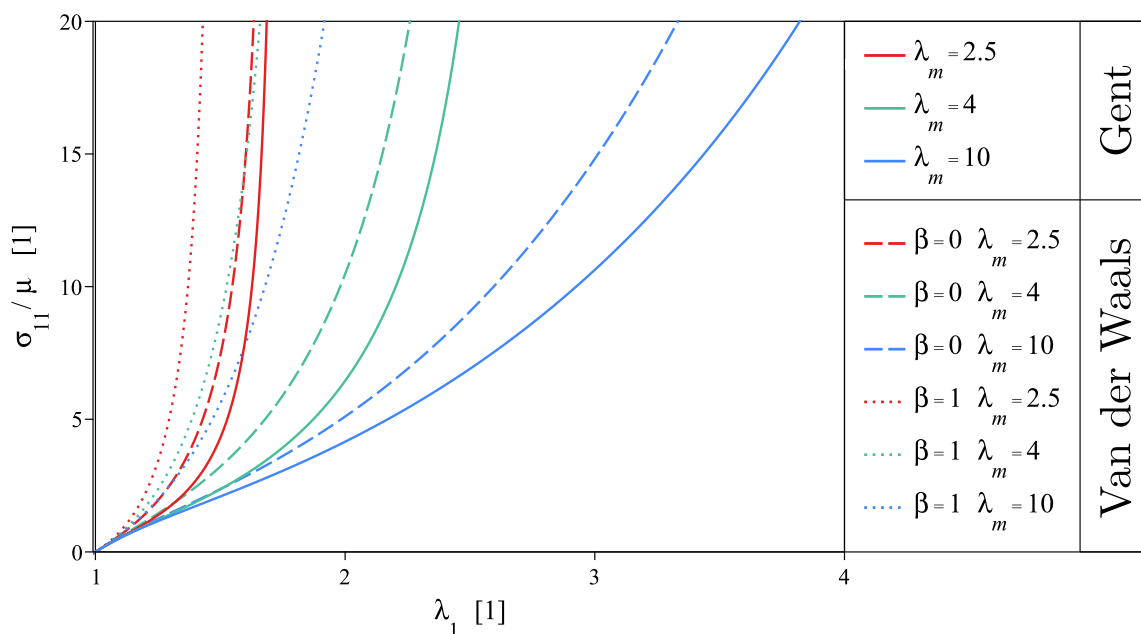
Následuje rekapitulace nenulových složek normovaného Cauchyho napětí pro Van der Waalsův model při rovnoosé rovinné deformaci:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\mu} = -\frac{\beta\lambda_1^8 - \beta\lambda_1^6 + \lambda_1^6 - \beta\lambda_1^2 + \beta - 1}{\Gamma_{V2}} \quad (5.89)$$

Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci provedeme pro zvolenou sadu hodnot parametru limitního protažení  $\lambda_m$ . Pro Van der Waalsův model navíc vykreslíme závislost bezrozměrného napětí na deformaci pro dvě varianty směřujícího parametru  $\beta$ . Obr. 5.26 zobrazuje závislost normovaného Cauchyho napětí  $\sigma_{11}/\mu$  v tahu (tj.

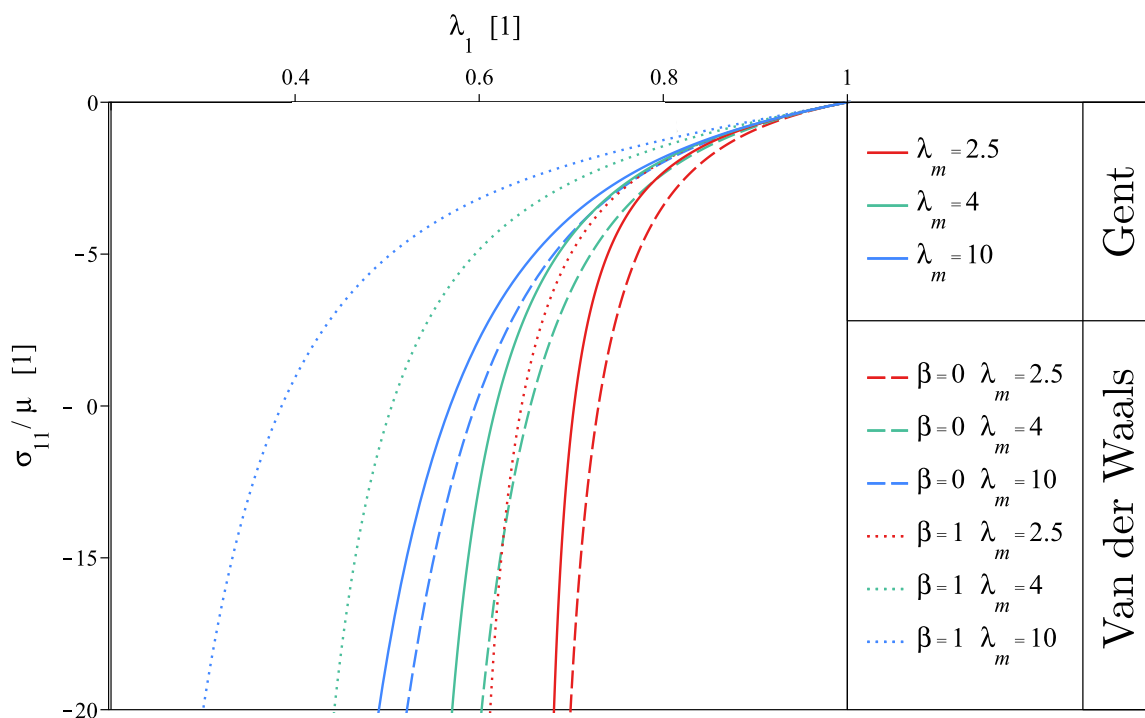
$\lambda_1 > 1$ ) na hlavním protažení  $\lambda_1$ . Totéž pouze pro tlakovou oblast deformace (tj.  $0 < \lambda_1 < 1$ ) vykresluje Obr. 5.27.

Na základě obou níže uvedených vyobrazení lze tvrdit, že Gentův i Van der Waalsův model sdílí totožný trend. Pozvolný růst absolutní hodnoty napětí střídá strmý nárůst. Napětí obou modelů se limitně blíží nekonečnu, a to neohledně na volbu materiálových parametrů. Z grafu na Obr. 5.26 pozorujeme, že mechanická odezva Van der Waalsova modelu v tahové oblasti deformace je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  tužší nežli odezva Gentova modelu. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  navíc Van der Waalsův model nabývá na tuhosti.



Obrázek 5.26: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci v tahu

Předpověď napětí obou modelů pro tlakovou oblast deformace zobrazuje graf na Obr. 5.27. Mechanická odezva Van der Waalsova modelu s hodnotou parametru  $\beta = 0$  při rovnoosé rovinné deformaci v tlaku je pro tytéž hodnoty parametru  $\lambda_m$  tužší nežli odezva Gentova modelu. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se odezva Van der Waalsova modelu stává více poddajnější, a tím se nejprve přibližuje odezvě Gentova modelu, až se v jeden okamžik stane poddajnější.



Obrázek 5.27: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při rovnoosé rovinné deformaci v tlaku

### Kinematicky přípustné deformace

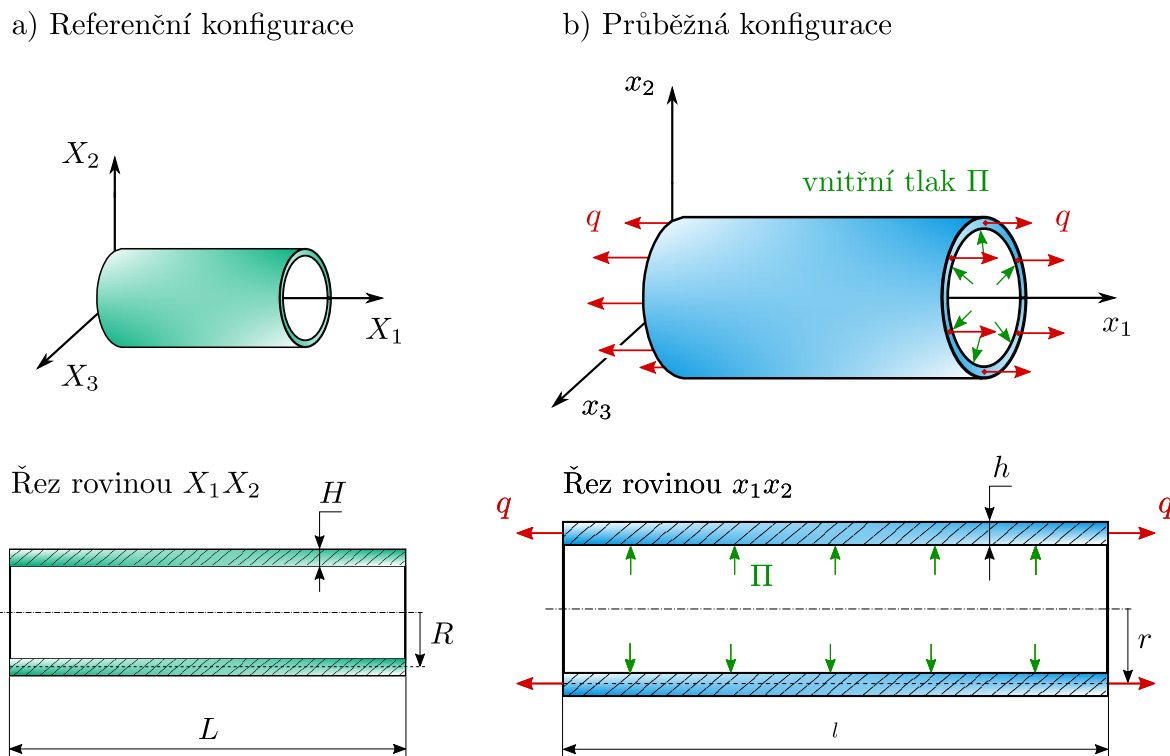
Porovnáme-li grafy kinematicky přípustných deformací obou modelů z Obr. 5.21 a 5.23, můžeme si všimnout podoby hraniční křivky Van der Waalsova modelu pro parametr  $\beta = 0$  s hraniční křivkou Gentova modelu. Jejich shodu ověříme porovnáním příslušných předpisů hraničních křivek  $Q_{3G} = 0$  a  $Q_{3W}(\beta = 0) = 0$ , viz rovnice (5.78) a (5.87). Po dosazení  $\beta = 0$  do rovnice  $Q_{3W} = 0$  získáme vyjádření

$$Q_{3W}(\beta = 0) = -1 + \sqrt{\frac{1 + 2\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4}{\lambda_1^4(\lambda_m^2 - 3)}} = 0 \quad (5.90)$$

Triviálními úpravami tohoto vyjádření (5.90) dospějeme k rovnosti implicitních předpisů obou hraničních křivek.

## 5.4 Nafukování tenkostěnné membrány

### 5.4.1 Formulace úlohy



Obrázek 5.28: Ilustrace nafukování tenkostěnné membrány

Uvažujme dlouhou uzavřenou tenkostěnnou válcovou trubici o počáteční délce  $L$ , tloušťce  $H$  a středním poloměru  $R$ , jež umístíme do počátku materiálového kartézského souřadnicového systému  $X_K$  tak, že osa trubice bude splývat s hlavní souřadnicovou osou  $X_1$ . Obr. 5.28 schematicky zachycuje uvažovaný výřez z uzavřené trubice, jenž je dostatečně vzdálený od okrajů. Předpokládáme, že tento výřez již není ovlivněn uzavřenými konci trubice. Za tenkostěnnou považujeme geometrii válce, jehož střední poloměr bude mnohonásobně převyšovat tloušťku stěny, tj.  $R \gg H$ . V souvislosti s tím zavádíme *parametr tenkostěnnosti*

$$\Upsilon = \frac{H}{R} \quad (5.91)$$

Uzavřenou válcovou trubici v čase zatížíme konstantní axiální silou  $F_{red}$  a vnitřním tlakem  $\Pi$ . Axiální síla  $F_{red}$  působí na obou koncích trubice a v průřezu stěny je rovnoměrně rozprostřena po obvodu kružnice o poloměru  $r$ . Zavádíme ji vztahem  $F_{red} = 2\pi r q$  prostřednictvím poměrné síly vztážené na délku obvodu  $q$ . Nejprve provedeme transformaci do systému cylindrických souřadnic, která nám zjednoduší práci s válcovou geometrií. Bod tělesa v referenční konfiguraci  $[X_1, X_2, X_3]$ , resp. bod tělesa v průběžné konfiguraci  $[x_1, x_2, x_3]$ , jednoznačně popíšeme referenční axiální souřadnicí  $Z$ , referenčním poloměrem  $R$  a referenčním úhlem  $\Theta$ , resp. průběžnou axiální souřadnicí  $z$ , průběžným poloměrem  $r$  a průběžným úhlem  $\theta$  (kladný

úhel  $\Theta$ , resp.  $\theta$ , zavádíme v rovinách rovnoběžných s rovinou  $X_2X_3$  od kladné osy  $X_2$  pravidlem pravé ruky, resp. v rovinách rovnoběžných s rovinou  $x_2x_3$  od kladné osy  $x_2$  pravidlem pravé ruky).

Nadále budeme uvažovat idealizovanou kinematiku deformace, která předpokládá rovnoměrné nafukování a prodloužení (nebo zkrácení) trubice. Krut v tomto případě nepřipouštíme, tj. pro každý bod uvažovaného tělesa v průběhu deformace platí:  $\theta = \Theta$ . Připouštíme pouze taková zdeformovaná tělesa, která budou nabývat tvaru válcové trubice s konečnou délkou  $l$ , tloušťkou  $h$  a středním poloměrem  $r$ . Vztah mezi referenční a průběžnou konfigurací charakterizujeme následujícím kinematickým předpisem

$$h = \lambda_{rR}H \quad (5.92)$$

$$r = \lambda_{\theta\Theta}R \quad (5.93)$$

$$z = \lambda_{zZ}Z \quad (5.94)$$

kde  $\lambda_{rR}$  označuje *radiální hlavní protažení*,  $\lambda_{\theta\Theta}$  *obvodové hlavní protažení* a  $\lambda_{zZ}$  *axiální hlavní protažení*. Pomocí výše uvedených hlavních protažení vztahem s odvoláním na vzorec (3.6) vypočteme deformační gradient a dle vztahu (3.36) vyjádříme příslušný pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^2 \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

Na závěr představení úlohy rekapitulujeme předpoklady, jež budeme ve výpočtech nadále aplikovat. Uvažujeme:

1. výřez trubice, který je dostatečně vzdálený od okrajů, aby byl v celém průběhu deformace zachován válcovitý tvar trubice,
2. tenkostěnnou počáteční geometrii, tj.  $R \gg H$ ,
3. vazby působící na střední ploše, které nijak neomezují natočení a radiální posuv,
4. zatížení vnitřním tlakem  $\Pi$  a axiální silou  $F_{red}$  rovnoměrně rozprostřenou po obvodu kružnice o poloměru  $r$ ,
5. rovinnou homogenní napjatost a prostorové homogenní deformace,
6. velké posuvy a deformace [23].

## 5.4.2 Gentův model

### 5.4.2.1 Určení Cauchyho napětí

Prostřednictvím deformačního gradientu (5.95) nejprve vyjádříme první hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnice (3.67) s využitím matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.96)), tedy

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 \quad (5.97)$$

Následně první hlavní invariant (5.97) dosadíme do Gentova modelu hustoty deformační energie (4.9), a důsledkem toho obdržíme vyjádření  $\Psi_{Gent}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_{rR}$ ,  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$

$$\Psi_{Gent} = -\frac{\mu(\lambda_m^2 - 3)}{2} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right) \quad (5.98)$$

V dalším kroku využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76) k určení složek Cauchyho napětí. Vzhledem k faktu, že pro tento konkrétní případ jsou složky deformačního gradientu  $F_{r\Theta}$ ,  $F_{rZ}$ ,  $F_{\theta R}$ ,  $F_{\theta Z}$ ,  $F_{zR}$  a  $F_{z\Theta}$  nulové, zjišťujeme, že se rovněž složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{\theta r}$ ,  $\sigma_{\theta z}$ ,  $\sigma_{zr}$  a  $\sigma_{z\theta}$  rovnají nule. Pak diagonální složky, jež jsou v důsledku vztahů (5.95) a (5.96) hlavními napětími, nabývají tvar

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_{rR}} \lambda_{rR} - p = \mu \lambda_{rR}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.99)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \lambda_{\theta\Theta} - p = \mu \lambda_{\theta\Theta}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.100)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial \Psi_{Gent}}{\partial \lambda_{zZ}} \lambda_{zZ} - p = \mu \lambda_{zZ}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p \quad (5.101)$$

Dále vyjdeme z Laplaceova popisu tenkostěnné trubice, abychom výše uvedené konstitutivní vztahy doplnili o následující rovnice rovnováhy platné pro uzavřenou tenkostěnnou membránu zatíženou vnitřním tlakem  $\Pi$  a axiální silou  $F_{red}$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (5.102)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{r\Pi}{h} \quad (5.103)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{r\Pi}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi r h} \quad (5.104)$$

kde radiální složku Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{rr}$  předpokládáme vzhledem k uvažované tenkostěnnosti trubice rovnou nule. V následujícím kroku uvedeme do rovnosti vztahy pro složky Cauchyho tenzoru napětí získané z konstitutivních rovnic (5.99), (5.100), (5.101) a rovnic rovnováhy (5.102), (5.103), (5.104) tedy

$$\mu \lambda_{rR}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p = 0 \quad (5.105)$$



$$\mu\lambda_{\theta\Theta}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p = \frac{r\Pi}{h} \quad (5.106)$$

$$\mu\lambda_{zZ}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} - p = \frac{r\Pi}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi rh} \quad (5.107)$$

Nyní vyčíslíme Lagrangeův multiplikátor  $p$  pomocí silové okrajové podmínky  $\sigma_{rr} = 0$ , která je zakomponována v rovnici (5.105)

$$p = \mu\lambda_{rR}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right)^{-1} \quad (5.108)$$

Výpočet doplníme o předpoklad nestlačitelnosti (3.70), díky kterému radiální hlavní protažení  $\lambda_{rR}$  vyjádříme prostřednictvím obvodového hlavního protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$ . S využitím vztahu pro výpočet jacobiana (3.8) poté souhrnně píšeme

$$J = \det |\underline{F}| = \lambda_{rR}\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ} = 1 \quad (5.109)$$

$$\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ}} \quad (5.110)$$

Vztahy pro Lagrangeův multiplikátor (5.108), radiální hlavní protažení (5.110) a kinematický předpis  $h = \lambda_{rR}H$  a  $r = \lambda_{\theta\Theta}R$  (viz rovnice (5.92), (5.93)) dosadíme do rovnic (5.106), (5.107), a tak získáme

$$\frac{\mu\lambda_{\theta\Theta}^2}{\omega_{G1}} - \frac{\mu}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2\omega_{G1}} = \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{\Upsilon} \quad (5.111)$$

$$\frac{\mu\lambda_{zZ}^2}{\omega_{G1}} - \frac{\mu}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2\omega_{G1}} = \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{2\Upsilon} + \frac{F_{red}\lambda_{zZ}}{2\pi\Upsilon R^2} \quad (5.112)$$

kde

$$\omega_{G1} = 1 - \frac{(\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2)^{-1} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \quad (5.113)$$

Tímto jsme obdrželi dvě rovnice (5.111), (5.112) pro dvě neznámé  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ , čtyři volené veličiny  $\Pi$ ,  $F_{red}$ ,  $\Upsilon$ ,  $R$  a dva materiálové parametry  $\lambda_m$  a  $\mu$ .

### Úloha optimalizace

Jednou z možných cest k řešení uvedené soustavy rovnic, kterou se v této práci vydáme, je postup ve smyslu matematické úlohy optimalizace. Za tímto účelem zavedeme dvě pomocné veličiny

$$\chi_{circ} = \frac{\mu\lambda_{\theta\Theta}^2}{\omega_{G1}} - \frac{\mu}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2\omega_{G1}} - \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{\Upsilon} \quad (5.114)$$

$$\chi_{ax} = \frac{\mu\lambda_{zZ}^2}{\omega_{G1}} - \frac{\mu}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2\omega_{G1}} - \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{2\Upsilon} - \frac{F_{red}\lambda_{zZ}}{2\pi\Upsilon R^2} \quad (5.115)$$

jež využijeme k sestavení cílové funkce

$$\chi = \chi_{circ}^2 + \chi_{ax}^2 \quad (5.116)$$

K nalezení hodnot obvodového hlavního protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$  pro zvolené hodnoty vnitřního tlaku  $\Pi$ , axiální síly  $F_{red}$ , parametru tenkostěnnosti  $\Upsilon$ , referenčního středního poloměru  $R$ , parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a počátečního smykového modulu pružnosti  $\mu$  budeme minimalizovat cílovou funkci  $\chi$ . Optimalizační úloha se v tomto případě opírá o fakt, že hustota deformační energie  $\Psi_{Gent}$  je polykonvexní funkce [9]. Tato skutečnost zajišťuje existenci globálního minima funkce  $\Psi_{Gent}$ . Hodnoty neznámých  $\lambda_{\theta\Theta}$  a  $\lambda_{zZ}$  získáme následujícím postupem:

1. zvolíme hodnoty veličin  $\Upsilon$ ,  $R$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$ , které budeme v níže uvedených krocích uvažovat,
2. zvolíme požadovanou hodnotu počátečního předpětí trubice, tj.  $\lambda_{zZ} = \lambda_{zZini}$ , provedeme prvotní minimalizaci cílové funkce  $\chi$  pro trubici nezátíženou vnitřním tlakem, tj.  $\Pi = 0$  MPa, a tím obdržíme příslušnou hodnotu axiální síly  $F_{red}$  a počátečního obvodového hlavního protažení  $\lambda_{\theta\Theta} = \lambda_{\theta\Theta ini}$ ,
3. provedeme finální minimalizaci cílové funkce  $\chi$ , a to právě  $v$ -krát pro  $v$  zvolených hodnot  $\lambda_{\theta\Theta} > \lambda_{\theta\Theta ini}$ , takto získáme konkrétní hodnoty tlaku  $\Pi$  a axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$  v  $v$  stavech deformace nafukované předepjaté válcové tenkostěnné membrány

Nakonec zpětným dosazením vyčíslených veličin  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$  (s využitím substituce (5.110) a vztahu pro Lagrangeův multiplikátor (5.108)) do rovnic (5.100), (5.101) dopočteme nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zZ}$ . Z kinematického předpisu (5.92) až (5.94) pak lze dopočíst průběžné veličiny  $h$ ,  $r$  a  $z$ . Na závěr dodáme, že k minimalizaci cílové funkce  $\chi$  byl v této práci využit příkaz „NLPsolve“ zabudovaný v optimalizačním balíčku softwaru Maple 2018.0.

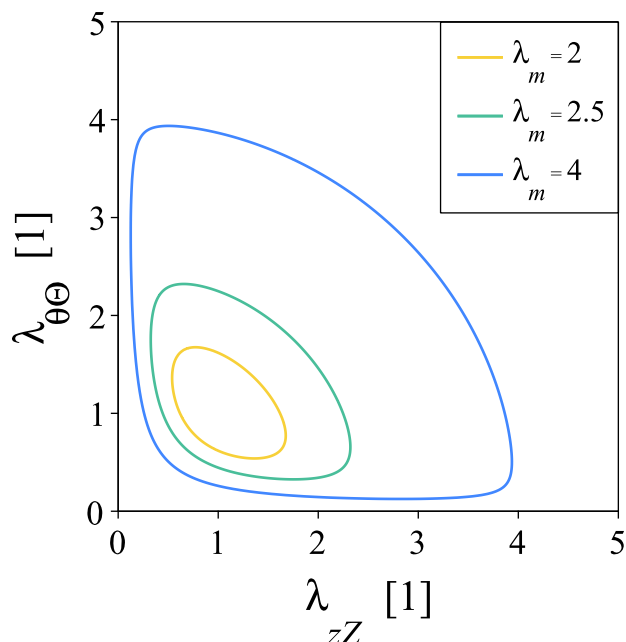
#### 5.4.2.2 Kinematicky přípustné deformace

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.10)), který se vyskytuje v Gentově modelu hustoty deformační energie (4.9) a z vyjádření složek Cauchyho tenzoru napětí (5.111), (5.112) plyne omezení kladené na obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  v závislosti na volbě parametru  $\lambda_m$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovateli levých stran rovnic (5.111), (5.112), jelikož jmenovatele pravých stran těchto rovnic budou pro skutečné případy různé od nuly. Pokud se výraz ve jmenovateli

$$\omega_{G1} = 1 - \frac{(\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2)^{-1} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3} \quad (5.117)$$

bude blížit nule, složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  půjdou k nekonečnu. Hraniční plochu přípustných deformací získáme, pokud položíme  $\omega_{G1}$  rovno nule. Hraniční křivku přípustných deformací pro zvolenou hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m$  pak představuje konkrétní vrstevnice hraniční plochy. Obr. 5.29 vykresluje implicitní funkci  $\omega_{G1} = 0$  vyčíslenou pro tři hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Na horizontální ose se nachází axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  a na vertikální ose obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$ . Vidíme, že jednotlivé hraniční křivky jsou ve skutečnosti křivky uzavřené. Podoblast kinematicky přípustných deformací se pro zvolenou hodnotu parametru  $\lambda_m$  nachází uvnitř příslušné hraniční křivky. Podoblast kinematicky nepřípustných deformací se nachází vně příslušné hraniční křivky. Z níže uvedeného

grafu vyplývá, že s vzrůstající hodnotou parametru  $\lambda_m$  se zvětšuje podoblast kinematically přípustných deformací.



Obrázek 5.29: Kinematically přípustné deformace Gentova modelu při nafukování tenkostěnné membrány pro tři hodnoty parametru  $\lambda_m$

### 5.4.2.3 Interpretace výsledků

V sekci 5.4.2.1 byl uveden postup, kterým lze dospět k popisu stavu deformace pro případ nafukované předepjaté válcové tenkostěnné membrány. V této části využijeme tohoto postupu k vynesení grafů: vnitřní tlak vs. deformace a napětí vs. deformace. Učiníme tak pro dvě různé hodnoty parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a tři různé hodnoty počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini}$ , abychom získali povědomí o chování Gentova modelu v širším kontextu.

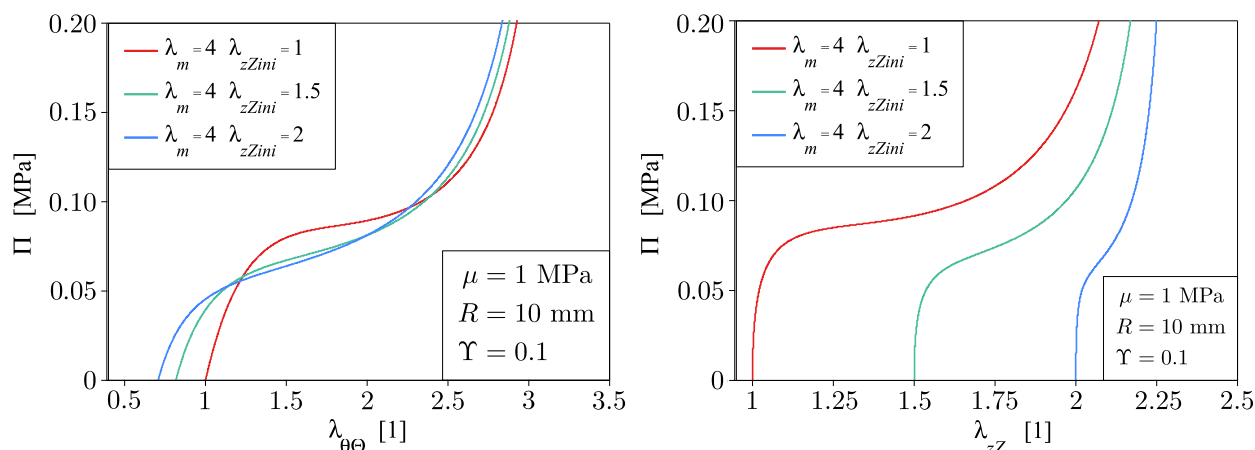
K sestrojení grafů v celé této sekci 5.4.2.3 byl využit Gentův model hustoty deformační energie  $\Psi_{Gent}$  spolu s následujícími hodnotami materiálových parametrů a výpočetních veličin: počáteční smykový modul pružnosti  $\mu = 1$  MPa, parametr tenkostěnnosti  $\Upsilon = 0.1$  a referenční střední poloměr  $R = 10$  mm. Jednotlivé křivky níže uvedených grafů sestávají z  $v$  diskretních bodů, kde pro sekci 5.4.2.3 platí  $v = 5000$ . Tyto body jsou výsledkem minimalizace cílové funkce  $\chi$ , která proběhla právě  $v$ -krát, pro neznámé veličiny  $\Pi$ ,  $\lambda_{zZ}$  a volené veličiny  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $F_{red}$ ,  $\lambda_m$ ,  $\mu$ ,  $\Upsilon$  a  $R$ .

#### Vnitřní tlak vs. deformace ( $\lambda_m = 4$ )

Levá strana Obr. 5.30 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m = 4$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ , které odpovídají konstantní axiální síle předpětí  $F_{red} = 0$  N,  $F_{red} \approx 69.44$  N a  $F_{red} \approx 129.95$  N. Pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám. Jedná se o důsledek existence podoblasti

kinematically přípustných deformací, která je obklopena hraniční křivkou pro  $\lambda_m = 4$ , viz Obr. 5.29. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí hodnotou tlaku  $\Pi$  deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  monotónně roste. Křivky lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední o velké poddajnosti, asymptotická o velmi malé poddajnosti. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se projevuje snížením hodnoty počáteční deformace  $\lambda_{\theta\Theta ini}$ , tj. pro  $\Pi = 0$  a zvýšením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  v průběhu nafukování.

Pravá strana Obr. 5.30 znázorňuje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$  za stejných podmínek výpočtu, jako v předchozím odstavci. Opět pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky opět blíží svým limitním hodnotám. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí hodnotou tlaku  $\Pi$  deformace  $\lambda_{zZ}$  monotónně roste. Křivky lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední o velké poddajnosti, asymptotická o velmi malé poddajnosti. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se u vykreslených křivek projevuje snížením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{zZ}$  v průběhu nafukování. Tento fenomén lze pozorovat např. u předepjatých lidských tepen, které v průběhu tlakových změn v krvi vyvolaných srdeční revolucí minimalizují svou axiální deformaci [22][23]. Z pravé strany Obr. 5.30 usuzujeme, že může existovat konkrétní hodnota axiálního předpětí  $\lambda_{zZini}$ , která by zajistila přibližně konstantní hodnotu axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$  v celém průběhu nafukování válcové tenkostěnné membrány.



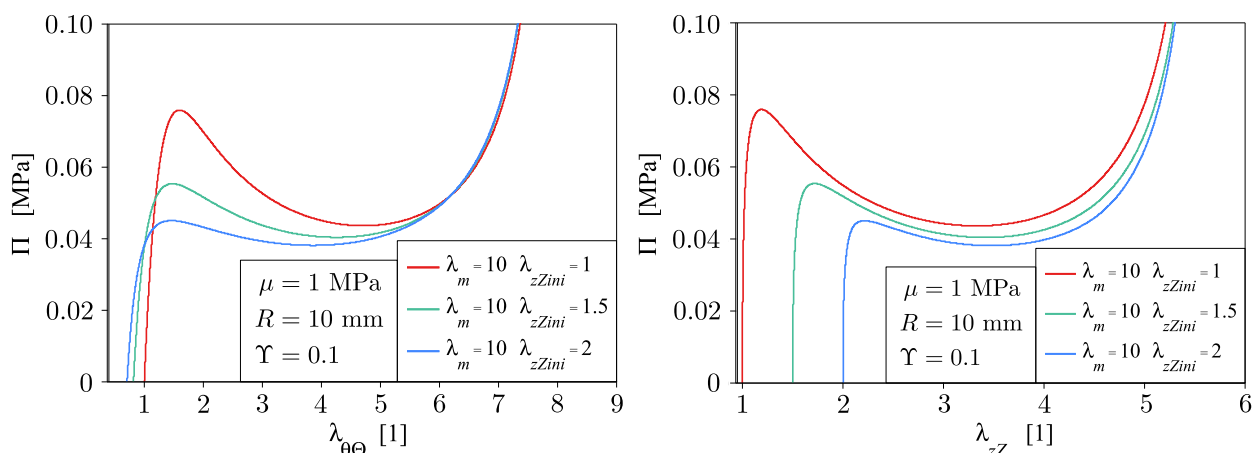
Obrázek 5.30: Předpověď Gentova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 4$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$

### Vnitřní tlak vs. deformace ( $\lambda_m = 10$ )

Levá strana Obr. 5.31 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m = 10$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ , které odpovídají konstantní axiální síle předpětí  $F_{red} = 0$  N,  $F_{red} \approx 66.72$  N a  $F_{red} \approx 112.27$  N. Pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám. Jedná se o důsledek existence podoblasti kinematically přípustných deformací, která je obklopena hraniční křivkou pro  $\lambda_m = 10$ . Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  monotónně roste k prvnímu lokálnímu extrému, kde se modelové chování změní a s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  začne klesat k druhému lokálnímu extrému. Od něj dále tlak  $\Pi$  s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  monotónně

roste do nekonečna. V popsané oblasti, kde s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  klesá, Gentův model předpovídá ztrátu stability tenkostěnné membrány. Křivky lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední vykazující ztrátu stability, asymptotická o velmi malé poddajnosti. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se projevuje snížením hodnoty počáteční deformace  $\lambda_{\theta\Theta ini}$ , tj. pro  $\Pi = 0$ , zvýšením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  v průběhu nafukování a poklesem hodnoty tlaku  $\Pi$  v bodě prvního a druhého lokálního extrému.

Pravá strana Obr. 5.31 znázorňuje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$  za stejných podmínek výpočtu, jako v předchozím odstavci. Opět pozorujeme, že jednotlivé křivky se opět asymptoticky blíží svým limitním hodnotám. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  monotónně roste k prvnímu lokálnímu extrému, kde se modelové chování změní a s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  začne klesat k druhému lokálnímu extrému. Od něj dále tlak  $\Pi$  s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  monotónně roste do nekonečna. V popsané oblasti, kde s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  klesá, Gentův model předpovídá ztrátu stability tenkostěnné membrány. Křivky lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední vykazující ztrátu stability, asymptotická o velmi malé poddajnosti. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se u vykreslených křivek projevuje snížením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{zZ}$  v průběhu nafukování a poklesem hodnoty tlaku  $\Pi$  v bodě prvního a druhého lokálního extrému.



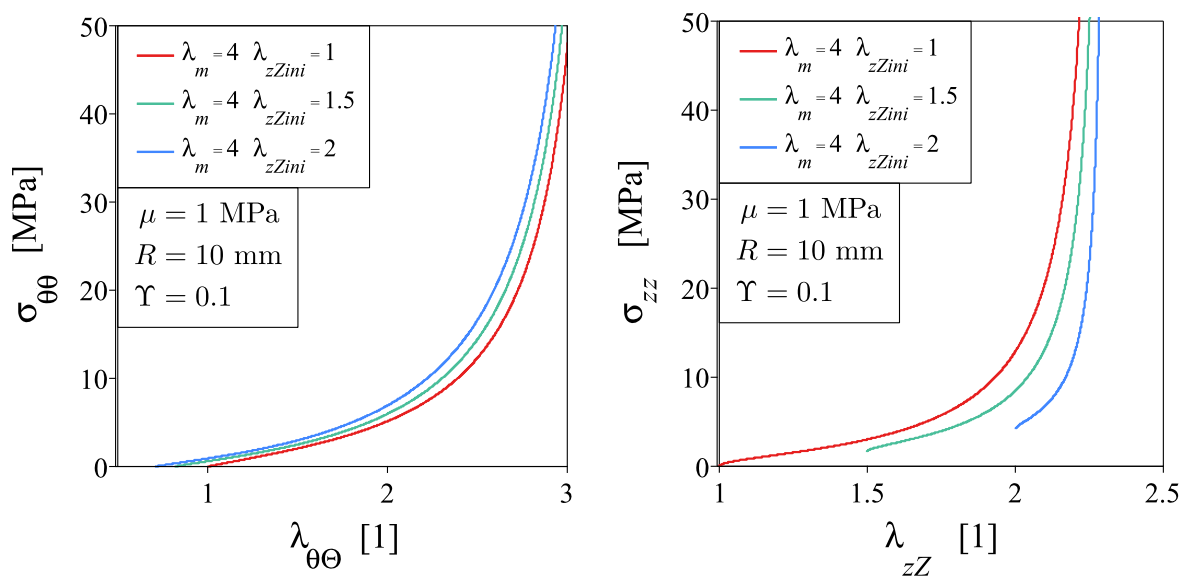
Obrázek 5.31: Předpověď Gentova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 10$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$

### Cauchyho napětí vs. deformace

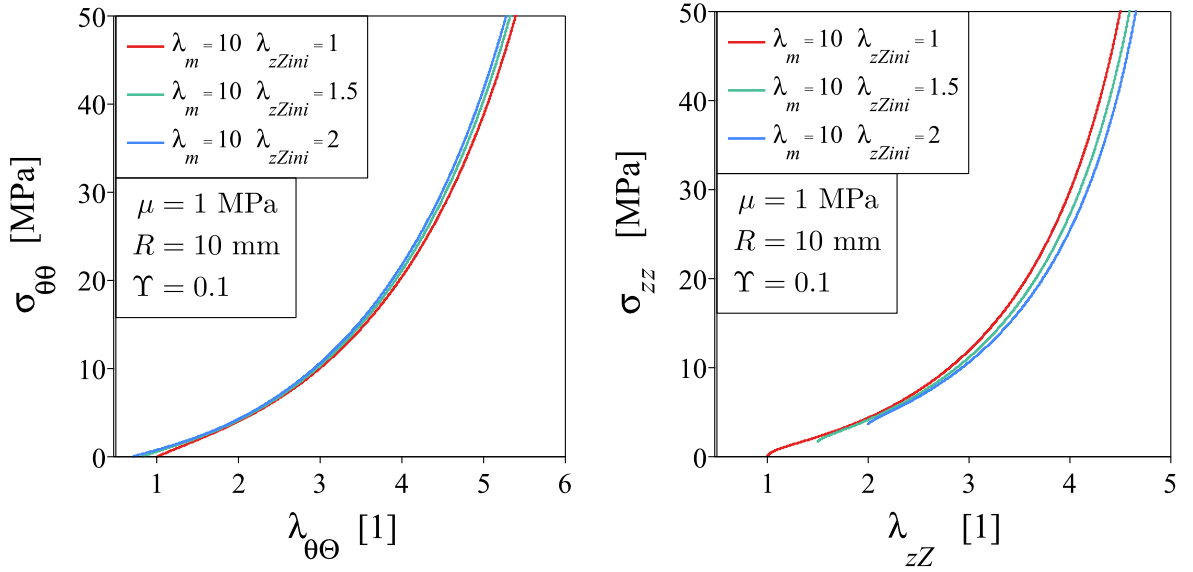
Nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  v jednotlivých stavech deformace válcové tenkostěnné membrány obdržíme zpětným dosazením veličin  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$  do rovnic (5.100), (5.101) s využitím vztahů pro Lagrangeův multiplikátor (5.108) a radiální hlavní protažení (5.110). Na Obr. 5.32 je vynesena závislost obvodového napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na obvodové deformaci  $\lambda_{\theta\Theta}$  (v levé části) a závislost axiálního napětí  $\sigma_{zz}$  na axiální deformaci  $\lambda_{zZ}$  (v pravé části) pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ . Tyto dva grafy korespondují s modelovou odezvou z Obr. 5.30, tj. jedná se o shodné stavy deformace za totožných podmínek výpočtu. Můžeme pozorovat, že obě napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  jsou monotónně rostoucí funkce příslušných

deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ . Pro hodnoty hlavních protažení blíží se hraniční křivce o implicitním předpisu  $\omega_{G1}(\lambda_m = 4) = 0$  se obě složky Cauchyho tenzoru napětí limitně blíží nekonečnu. Dále vidíme, že s rostoucím axiálním předpětím  $\lambda_{zZini}$  hodnota napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  pro zvolenou hodnotu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  vzrůstá. Naopak s rostoucím axiálním předpětím  $\lambda_{zZini}$  hodnota napětí  $\sigma_{zz}$  pro zvolenou hodnotu deformace  $\lambda_{zZ}$  klesá. Za povšimnutí rovněž stojí viditelný rozdíl počátků křivek axiálního napětí  $\sigma_{zz}$  vs. axiální deformace  $\lambda_{zZ}$ . Jedná se o stav napjatosti válcové tenkostěnné membrány, který byl vyvozen aplikovaným předpětím  $\lambda_{zZini}$  a nulovým vnitřním tlakem  $\Pi$ . Z tohoto důvodu křivka napětí  $\sigma_{zz}$  začíná v nule jen pro případ nepředepjaté válcové membrány.

Obr. 5.33 vykresluje závislost obvodového napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na obvodové deformaci  $\lambda_{\theta\Theta}$  (v levé části) a závislost axiálního napětí  $\sigma_{zz}$  na axiální deformaci  $\lambda_{zZ}$  (v pravé části) pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ . Tyto dva grafy korespondují s modelovou odezvou z Obr. 5.36, tj. jedná se o shodné stavy deformace za totožných podmínek výpočtu. Obě napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  jsou monotónně rostoucí funkce příslušných deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ . Nakonec pozorujeme, že s rostoucí hodnotou parametru  $\lambda_m$  se předpověď Van der Waalsova modelu pro napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  stává poddajnější.



Obrázek 5.32: Předpověď Gentova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – obvodová složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo), axiální složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{zz}$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 4$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$



Obrázek 5.33: Předpověď Gentova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – obvodová složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\theta}$  (vlevo), axiální složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{zz}$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zz}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 10$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zzini}$

## 5.4.3 Van der Waalsův model

### 5.4.3.1 Určení Cauchyho napětí

Odvození Cauchyho napětí s využitím Van der Waalsova materiálového modelu obnáší srovnatelnou posloupnost kroků, jako tomu bylo pro Gentův materiálový model v sekci 5.4.2.1. Prostřednictvím deformačního gradientu (5.95) nejprve vyjádříme první a druhý hlavní invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  (dle rovnic (3.67) a (3.68) doplněných o vyjádření matice pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace (5.96)). Shodně obdržíme první (5.97) a druhý hlavní invariant

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left( (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zz}^2)^2 - \lambda_{rR}^4 - \lambda_{\theta\theta}^4 - \lambda_{zz}^4 \right) \quad (5.118)$$

Následně oba hlavní invarianty (5.97), (5.118) dosadíme do Van der Waalsova modelu hustoty deformační energie (4.11), a tím získáme vyjádření  $\Psi_{VanderWaals}$  v závislosti na veličinách  $\lambda_{rR}$ ,  $\lambda_{\theta\theta}$ ,  $\lambda_{zz}$ ,  $\lambda_m$ ,  $\beta$  a  $\mu$ . Pro jednoduchost budeme nadále uvažovat parametr globální interakce  $a$  roven nule. K určení složek Cauchyho napětí využijeme konstitutivní rovnici pro nestlačitelný hyperelastický materiál (3.76). Díky skutečnosti, že pro tento konkrétní případ jsou složky deformačního gradientu  $F_{r\theta}$ ,  $F_{rZ}$ ,  $F_{\theta r}$ ,  $F_{\theta Z}$ ,  $F_{zR}$  a  $F_{z\theta}$  nulové, zjišťujeme, že se rovněž složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{\theta r}$ ,  $\sigma_{\theta z}$ ,  $\sigma_{zr}$  a  $\sigma_{z\theta}$  rovnají nule. Pak diagonální složky, jež jsou v důsledku vztahů (5.95) a (5.96) hlavními napětími, nabývají tvar

$$\sigma_{rr} = \frac{\left( (1 - \lambda_{\theta\theta}^2 - \lambda_{zz}^2)\beta - 1 \right) \mu \lambda_{rR}^2}{\omega_{V1}} - p \quad (5.119)$$



$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\left((1 - \lambda_{rR}^2 - \lambda_{zz}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{\theta\Theta}^2}{\omega_{V1}} - p \quad (5.120)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\left((1 - \lambda_{rR}^2 - \lambda_{\theta\Theta}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{zZ}^2}{\omega_{V1}} - p \quad (5.121)$$

kde

$$\omega_{V1} = -1 + \sqrt{\frac{\left((\lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 1)\lambda_{rR}^2 + (\lambda_{zZ}^2 - 1)\lambda_{\theta\Theta}^2 - \lambda_{zZ}^2\right)\beta + \lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (5.122)$$

Dále vyjdeme z Laplaceova popisu tenkostěnné trubice, abychom výše uvedené konstitutivní vztahy doplnili o následující rovnice rovnováhy platné pro uzavřenou tenkostěnnou membránu zatíženou vnitřním tlakem  $\Pi$  a axiální silou  $F_{red}$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (5.123)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{r\Pi}{h} \quad (5.124)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{r\Pi}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi rh} \quad (5.125)$$

kde radiální složku Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{rr}$  předpokládáme vzhledem k uvažované tenkostěnnosti trubice rovnou nule. V následujícím kroku uvedeme do rovnosti vztahy pro složky Cauchyho tenzoru napětí získané z konstitutivních rovnic (5.119), (5.120), (5.121) a rovnic rovnováhy (5.123), (5.124), (5.125) tedy

$$\frac{\left((1 - \lambda_{\theta\Theta}^2 - \lambda_{zz}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{rR}^2}{\omega_{V1}} - p = 0 \quad (5.126)$$

$$\frac{\left((1 - \lambda_{rR}^2 - \lambda_{zz}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{\theta\Theta}^2}{\omega_{V1}} - p = \frac{r\Pi}{h} \quad (5.127)$$

$$\frac{\left((1 - \lambda_{rR}^2 - \lambda_{\theta\Theta}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{zZ}^2}{\omega_{V1}} - p = \frac{r\Pi}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi rh} \quad (5.128)$$

Nyní vyčíslíme Lagrangeův multiplikátor  $p$  pomocí silové okrajové podmínky  $\sigma_{rr} = 0$ , která je zakomponována v rovnici (5.126)

$$p = \frac{\left((1 - \lambda_{\theta\Theta}^2 - \lambda_{zz}^2)\beta - 1\right)\mu\lambda_{rR}^2}{\omega_{V1}} \quad (5.129)$$

Výpočet doplníme o předpoklad nestlačitelnosti (3.70), díky kterému radiální hlavní protažení  $\lambda_{rR}$  vyjádříme prostřednictvím obvodového hlavního protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$ . Vztahy pro Lagrangeův multiplikátor (5.129), radiální hlavní protažení (5.110) a kinematický předpis  $h = \lambda_{rR}H$  a  $r = \lambda_{\theta\Theta}R$  (viz rovnice (5.92), (5.93)) dosadíme do rovnic



(5.127), (5.128), a tak získáme

$$-\frac{\left(\beta\lambda_{\theta\Theta}^4\lambda_{zZ}^4 + (\lambda_{\theta\Theta}^4 - \beta\lambda_{\theta\Theta}^4 - \beta)\lambda_{zZ}^2 + \beta - 1\right)\mu}{\omega_{V2}\lambda_{zZ}^2\lambda_{\theta\Theta}^2} = \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{\Upsilon} \quad (5.130)$$

$$-\frac{\left(\beta\lambda_{\theta\Theta}^4\lambda_{zZ}^4 + (\lambda_{zZ}^4 - \beta\lambda_{zZ}^4 - \beta)\lambda_{\theta\Theta}^2 + \beta - 1\right)\mu}{\omega_{V2}\lambda_{zZ}^2\lambda_{\theta\Theta}^2} = \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{2\Upsilon} + \frac{F_{red}\lambda_{zZ}}{2\pi\Upsilon R^2} \quad (5.131)$$

kde

$$\omega_{V2} = -1 + \sqrt{\frac{\left(\beta\lambda_{zZ}^4 + (1 - \beta)\lambda_{zZ}^2\right)\lambda_{\theta\Theta}^4 + \left((1 - \beta)\lambda_{zZ}^4 - 3\lambda_{zZ}^2 + \beta\right)\lambda_{\theta\Theta}^2 + \beta\lambda_{zZ}^2 - \beta + 1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2(\lambda_m^2 - 3)}} \quad (5.132)$$

Tímto jsme obdrželi dvě rovnice (5.130), (5.131) pro dvě neznámé  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ , čtyři volené veličiny  $\Pi$ ,  $F_{red}$ ,  $\Upsilon$ ,  $R$  a tři materiálové parametry  $\beta$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$ .

### Úloha optimalizace

Za účelem řešení výše uvedené soustavy rovnic zavedeme dvě pomocné veličiny

$$\iota_{circ} = -\frac{\left(\beta\lambda_{\theta\Theta}^4\lambda_{zZ}^4 + (\lambda_{\theta\Theta}^4 - \beta\lambda_{\theta\Theta}^4 - \beta)\lambda_{zZ}^2 + \beta - 1\right)\mu}{\omega_{V2}\lambda_{zZ}^2\lambda_{\theta\Theta}^2} - \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{\Upsilon} \quad (5.133)$$

$$\iota_{ax} = -\frac{\left(\beta\lambda_{\theta\Theta}^4\lambda_{zZ}^4 + (\lambda_{zZ}^4 - \beta\lambda_{zZ}^4 - \beta)\lambda_{\theta\Theta}^2 + \beta - 1\right)\mu}{\omega_{V2}\lambda_{zZ}^2\lambda_{\theta\Theta}^2} - \frac{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}\Pi}{2\Upsilon} - \frac{F_{red}\lambda_{zZ}}{2\pi\Upsilon R^2} \quad (5.134)$$

jež využijeme k sestavení cílové funkce

$$\iota = \iota_{circ}^2 + \iota_{ax}^2 \quad (5.135)$$

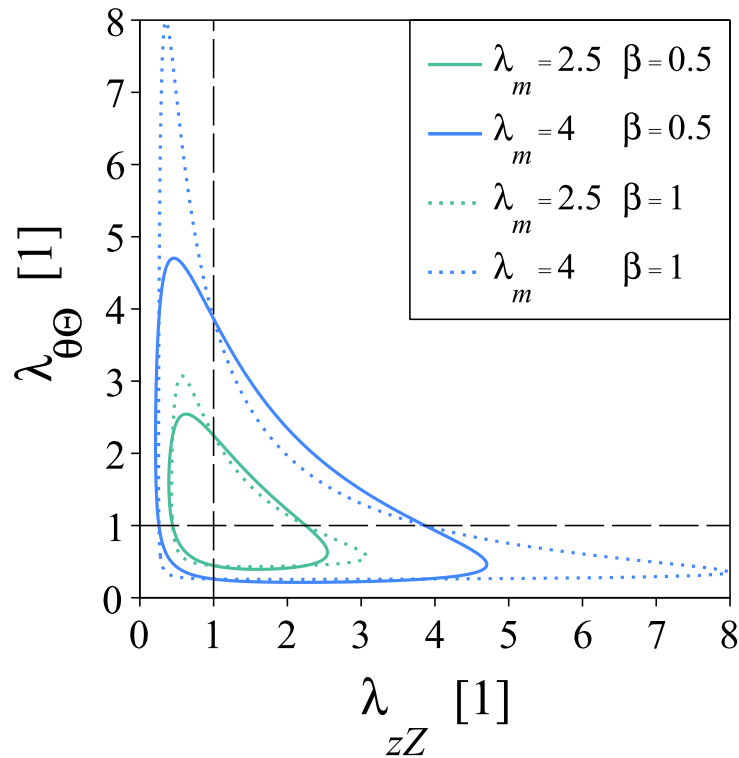
K nalezení hodnot obvodového hlavního protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiálního hlavního protažení  $\lambda_{zZ}$  pro zvolené hodnoty vnitřního tlaku  $\Pi$ , axiální síly  $F_{red}$ , parametru tenkostěnnosti  $\Upsilon$ , referenčního středního poloměru  $R$ , parametru limitního protažení  $\lambda_m$  a počátečního smykového modulu pružnosti  $\mu$  budeme minimalizovat cílovou funkci  $\iota$ . Popis jednotlivých kroků řešení této optimalizační úlohy je detailně uveden v sekci 5.4.2.1.

#### 5.4.3.2 Kinematicky přípustné deformace

Z definičního oboru přirozeného logaritmu (viz podmínku (4.14)), který se vyskytuje ve Van der Waalově modelu hustoty deformační energie (4.11) a z vyjádření složek Cauchyho tenzoru napětí (5.130), (5.131) plyne omezení kladené na obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  a axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  v závislosti na volbě parametrů  $\lambda_m$  a  $\beta$ . Pro určení kinematicky přípustných deformací vycházíme z diskuze nad jmenovateli levých stran rovnic (5.130), (5.131), jelikož jmenovatele pravých stran těchto rovnic budou pro skutečné případy různé od nuly. Pokud se výraz ve jmenovateli

$$\omega_{V2} = -1 + \sqrt{\frac{(\beta\lambda_{zZ}^4 + (1-\beta)\lambda_{zZ}^2)\lambda_{\theta\Theta}^4 + ((1-\beta)\lambda_{zZ}^4 - 3\lambda_{zZ}^2 + \beta)\lambda_{\theta\Theta}^2 + \beta\lambda_{zZ}^2 - \beta + 1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2(\lambda_m^2 - 3)}} \quad (5.136)$$

bude blížit nule, složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  půjdou k nekonečnu. Hraniční plochu přípustných deformací získáme pro zvolenou hodnotu parametru  $\beta$ , pokud položíme  $\omega_{V2}$  rovno nule. Hraniční křivku přípustných deformací pro zvolenou hodnotu parametru limitního protažení  $\lambda_m$  pak představuje konkrétní vrstevnice hraniční plochy. Obr. 5.34 vykresluje implicitní funkci  $\omega_{V2} = 0$  vyčíslenou pro dvě hodnoty parametru  $\beta$  a pro dvě hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Na horizontální ose se nachází axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  a na vertikální ose obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$ . Vidíme, že jednotlivé hraniční křivky jsou ve skutečnosti křivky uzavřené. Podoblast kinematically přípustných deformací se pro zvolené hodnoty parametrů  $\beta$  a  $\lambda_m$  nachází uvnitř příslušné hraniční křivky. Podoblast kinematically nepřípustných deformací se nachází vně příslušné hraniční křivky. Z níže uvedeného grafu vyplývá, že s vzrůstající hodnotou parametru  $\lambda_m$  se zvětšuje podoblast kinematically přípustných deformací. S vzrůstající hodnotou parametru  $\beta$  dochází ke změně tvaru hraniční křivky a taktéž mírnému zvětšení podoblasti kinematically přípustných deformací. Míra zapojení druhého hlavního invariantu pravého Cauchy–Greenova tenzoru deformace  $I_2(\mathbf{C})$  se zdatelně odráží na zvětšení kinematically přípustné deformace  $\lambda_{zZ}$  pro  $\lambda_{\theta\Theta} < 1$ , resp.  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro  $\lambda_{zZ} < 1$ . Za povšimnutí stojí, že vykreslené hraniční křivky lze pomyslně rozdělit na křivky, jejichž průběh se podobá grafu hyperboly  $\lambda_{\theta\Theta} = 1/(\lambda_{zZ})$ . S vzrůstající hodnotou parametru  $\beta$  se pak viditelně zmenšuje délka hlavních os těchto hyperbol.



Obrázek 5.34: Kinematically přípustné deformace Van der Waalsova modelu při nafukování tenkostěnné membrány pro dvě hodnoty parametru  $\beta$  a dvě hodnoty parametru  $\lambda_m$

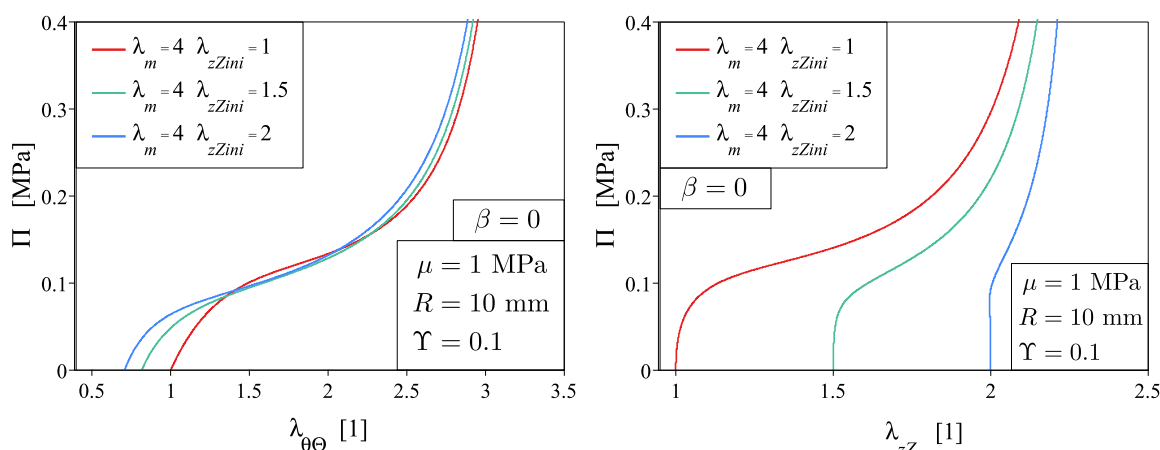
### 5.4.3.3 Interpretace výsledků

K sestavení grafů v celé této sekci 5.4.2.3 byl použit Van der Waalsův model hustoty deformační energie  $\Psi_{VanderWaals}$  spolu s následujícími hodnotami materiálových parametrů a výpočetních veličin: počáteční smykový modul pružnosti  $\mu = 1$  MPa, parametr tenkostěnnosti  $\Upsilon = 0.1$  a referenční střední poloměr  $R = 10$  mm. Jednotlivé křivky níže uvedených grafů sestávají z  $\nu = 5000$  diskrétních bodů. Tyto body jsou výsledkem minimalizace cílové funkce  $\iota$ , která proběhla právě  $\nu$ -krát, pro neznámé veličiny  $\Pi$ ,  $\lambda_{zZ}$  a volené veličiny  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $F_{red}$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_m$ ,  $\mu$ ,  $\Upsilon$  a  $R$ .

#### Vnitřní tlak vs. deformace ( $\lambda_m = 4$ , $\beta = 0$ )

Levá strana Obr. 5.35 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro hodnoty parametrů  $\lambda_m = 4$ ,  $\beta = 0$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ , které odpovídají konstantní axiální síle předpětí  $F_{red} = 0$  N,  $F_{red} \approx 84.15$  N a  $F_{red} \approx 180.92$  N. Pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám, viz Obr. 5.34. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí hodnotou tlaku  $\Pi$  deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  monotónně roste. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se projevuje snížením hodnoty počáteční deformace  $\lambda_{\theta\Theta ini}$ , tj. pro  $\Pi = 0$  a zvýšením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  v průběhu nafukování.

Pravá strana Obr. 5.35 znázorňuje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$  za stejných podmínek výpočtu, jako v předchozím odstavci. Opět pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky opět blíží svým limitním hodnotám. Vidíme, že pro případy počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$  a  $\lambda_{zZini} = 1.5$  s rostoucí hodnotou tlaku  $\Pi$  deformace  $\lambda_{zZ}$  monotónně roste. Naopak u modré křivky ( $\lambda_{zZini} = 2$ ) dochází mimo jiné k mírnému poklesu v průběhu nafukování. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se u vykreslených křivek projevuje snížením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{zZ}$  v průběhu nafukování. Křivky z pravé i levé strany Obr. 5.35 lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední o velké poddajnosti, asymptotická o velmi malé poddajnosti.

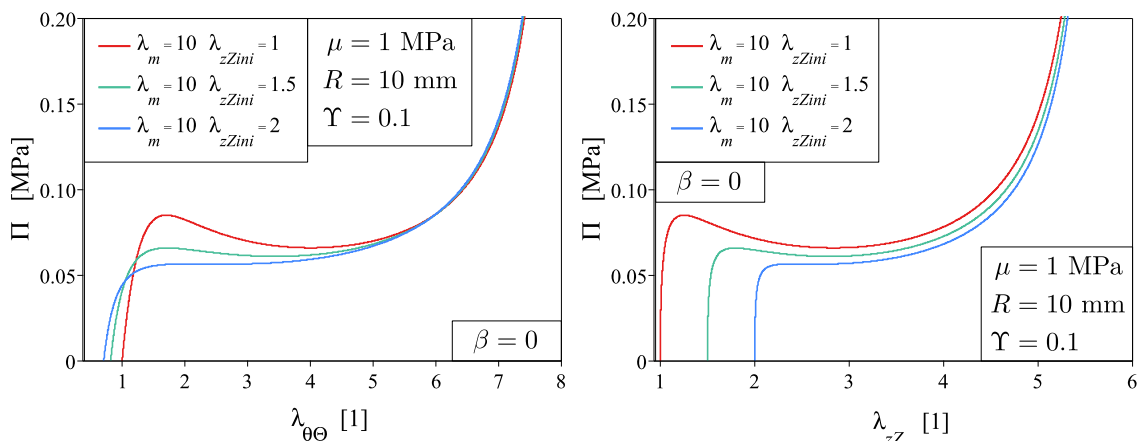


Obrázek 5.35: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametry  $\lambda_m = 4$ ,  $\beta = 0$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$

**Vnitřní tlak vs. deformace** ( $\lambda_m = 10$ ,  $\beta = 0$ )

Levá strana Obr. 5.36 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro hodnoty parametrů  $\lambda_m = 10$ ,  $\beta = 0$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ , které odpovídají konstantní axiální síle předpětí  $F_{red} = 0$  N,  $F_{red} \approx 71.90$  N a  $F_{red} \approx 128.40$  N. Pozorujeme, že jednotlivé křivky se asymptoticky blíží svým limitním hodnotám. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  monotónně roste k prvnímu lokálnímu extrému, kde se modelové chování změní a s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  začne klesat k druhému lokálnímu extrému. Od něj dále tlak  $\Pi$  s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  monotónně roste do nekonečna. Popsané chování neplatí pro modrou křivku s hodnotou počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 2$ . V oblasti, kde s rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  tlak  $\Pi$  klesá, Van der Waalsův model předpovídá ztrátu stability tenkostěnné membrány. Zdá se, že s rostoucí hodnotou  $\lambda_{zZini}$  model ustupuje od předpovědi ztráty stability. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se dále projevuje snížením hodnoty počáteční deformace  $\lambda_{\theta\Theta ini}$ , tj. pro  $\Pi = 0$ , zvýšením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  v průběhu nafukování a poklesem hodnoty tlaku  $\Pi$  v bodě prvního a druhého lokálního extrému.

Pravá strana Obr. 5.36 znázorňuje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$  za stejných podmínek výpočtu, jako v předchozím odstavci. Opět pozorujeme, že jednotlivé křivky se opět asymptoticky blíží svým limitním hodnotám. Vidíme, že pro tento konkrétní případ s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  monotónně roste k prvnímu lokálnímu extrému, kde se modelové chování změní a s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  začne klesat k druhému lokálnímu extrému. Od něj dále tlak  $\Pi$  s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  monotónně roste do nekonečna. Popsané chování opět neplatí pro modrou křivku s hodnotou počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 2$ . V oblasti, kde s rostoucí deformací  $\lambda_{zZ}$  tlak  $\Pi$  klesá, Van der Waalsův model předpovídá ztrátu stability tenkostěnné membrány. Přítomnost předpětí  $\lambda_{zZini}$  se u vykreslených křivek projevuje snížením celkového rozsahu deformace  $\lambda_{zZ}$  v průběhu nafukování a poklesem hodnoty tlaku  $\Pi$  v bodě prvního a druhého lokálního extrému. Křivky z pravé i levé strany Obr. 5.36 lze pomyslně rozdělit na tři části: počáteční o malé poddajnosti, střední vykazující ztrátu stability (resp. střední o velké poddajnosti), asymptotická o velmi malé poddajnosti.

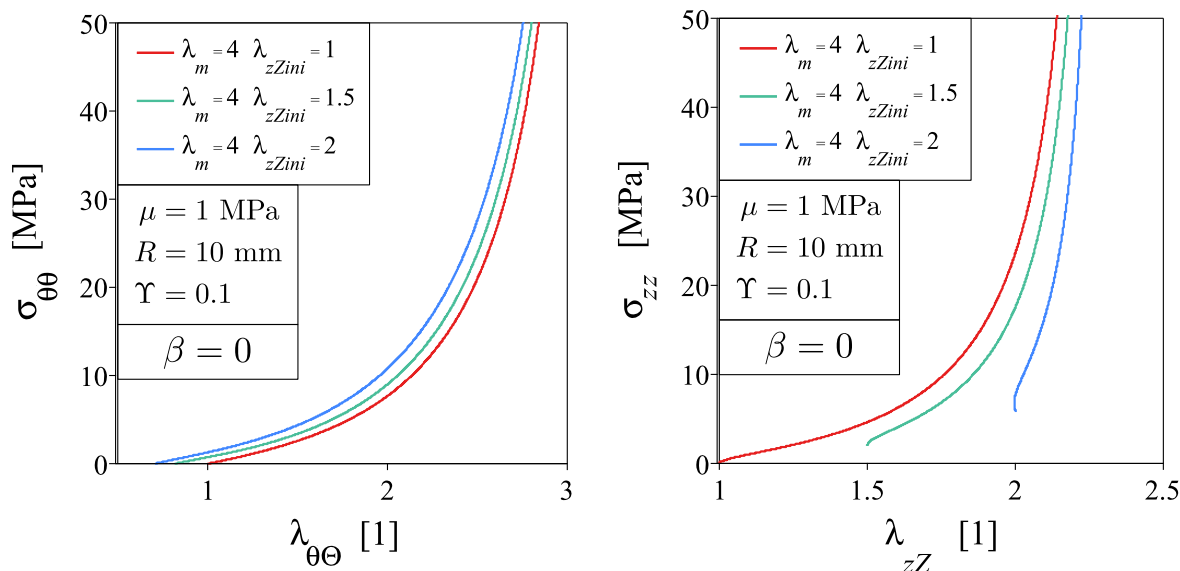


Obrázek 5.36: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametry  $\lambda_m = 10$ ,  $\beta = 0$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$

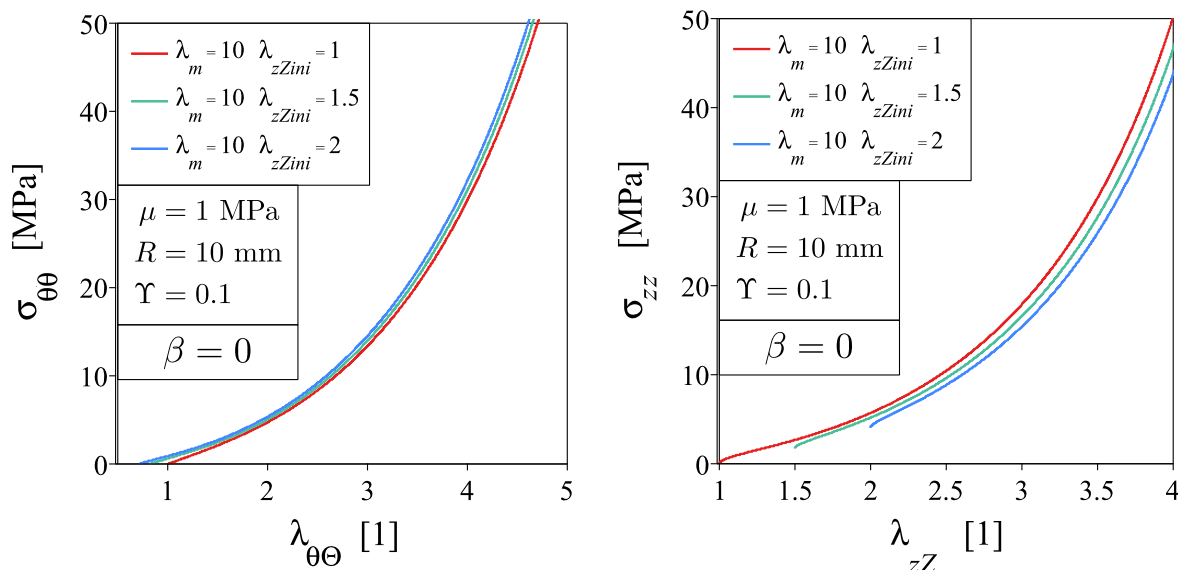
### Cauchyho napětí vs. deformace

Nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  v jednotlivých stavech deformace válcové tenkostěnné membrány obdržíme zpětným dosazením veličin  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ ,  $\lambda_m$  a  $\mu$  do rovnic (5.120), (5.121) s využitím vztahů pro Lagrangeův multiplikátor (5.129) a radiální hlavní protažení (5.110). Na Obr. 5.37 je vynesena závislost obvodového napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na obvodové deformaci  $\lambda_{\theta\Theta}$  (v levé části) a závislost axiálního napětí  $\sigma_{zz}$  na axiální deformaci  $\lambda_{zZ}$  (v pravé části) pro hodnoty parametrů  $\lambda_m = 4$ ,  $\beta = 0$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ . Tyto dva grafy korespondují s modelovou odezvou z Obr. 5.35, tj. jedná se o shodné stavy deformace za totožných podmínek výpočtu. Můžeme pozorovat, že obě napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  jsou až na modrou křivku o hodnotě  $\lambda_{zZini} = 2$  monotónně rostoucí funkce příslušných deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ . Pro hodnoty hlavních protažení blízké se hraniční křivce o implicitním předpisu  $\omega_{V2}(\lambda_m = 4, \beta = 0) = 0$  se obě složky Cauchyho tenzoru napětí limitně blíží nekonečnu. Dále vidíme, že s rostoucím axiálním předpětím  $\lambda_{zZini}$  hodnota napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  pro zvolenou hodnotu deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  vzrůstá. Naopak s rostoucím axiálním předpětím  $\lambda_{zZini}$  hodnota napětí  $\sigma_{zz}$  pro zvolenou hodnotu deformace  $\lambda_{zZ}$  klesá.

Obr. 5.38 vykresluje závislost obvodového napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  na obvodové deformaci  $\lambda_{\theta\Theta}$  (v levé části) a závislost axiálního napětí  $\sigma_{zz}$  na axiální deformaci  $\lambda_{zZ}$  (v pravé části) pro hodnoty parametrů  $\lambda_m = 4$ ,  $\beta = 0$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ . Tyto dva grafy korespondují s modelovou odezvou z Obr. 5.31, tj. jedná se o shodné stavy deformace za totožných podmínek výpočtu. Mimo výše uvedené závěry, které identicky aplikujeme na sérii křivek složek Cauchyho napětí vs. deformace s uvažovanou hodnotou parametru  $\lambda_m = 10$ , vyzdvihneme postřeh, že s rostoucí hodnotou parametru  $\lambda_m$  se předpověď Gentova modelu pro napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  stává poddajnější.



Obrázek 5.37: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – obvodová složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo), axiální složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{zz}$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametry  $\lambda_m = 4$ ,  $\beta = 0$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$



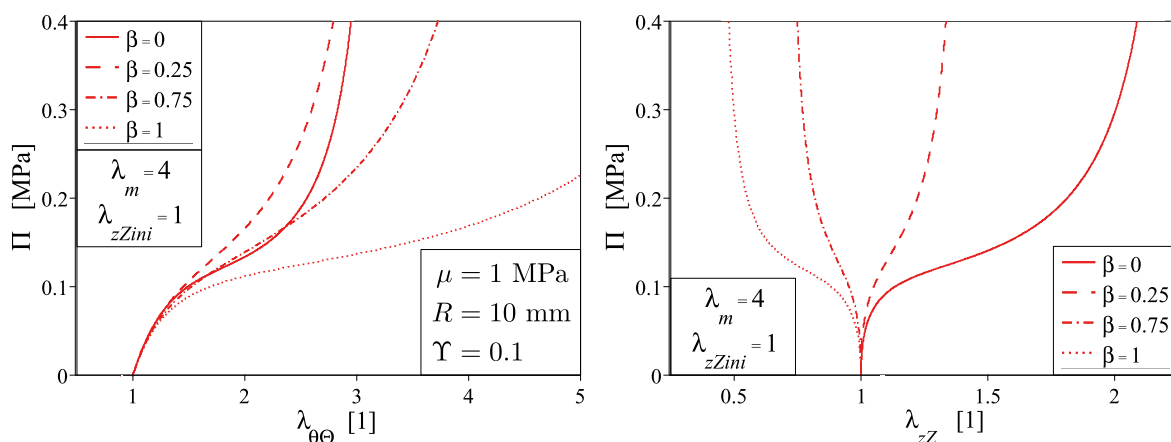
Obrázek 5.38: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – obvodová složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\theta}$  (vlevo), axiální složka Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{zz}$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zz}$  (vpravo) – pro fixní parametry  $\lambda_m = 10$ ,  $\beta = 0$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zzini}$

### Vliv parametru $\beta$

Vliv směřujícího parametru  $\beta$  na předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování tenkostěnné membrány demonstrujeme na dvou relevantních sadách grafů pro dvě hodnoty počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zzini}$  a čtyři proměnné hodnoty parametru  $\beta$ . Levá strana, resp. pravá strana, Obr. 5.39 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\theta}$ , resp. axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zz}$ , pro hodnotu fixního parametru  $\lambda_m = 4$  a čtyři hodnoty parametru  $\beta$  v jedné variantě počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zzini} = 1$ . Levá strana obrázku nám ukazuje, že s rostoucím parametrem  $\beta$  se model v obvodovém směru stává nejprve tužším, pro určitou hodnotu parametru  $\beta$  dosáhne maximální tuhosti a od této hodnoty model s rostoucím  $\beta$  zvyšuje svou poddajnost. Zmíněnou zlomovou hodnotu parametru odhadujeme na  $\beta = 0.5$ . Na pravé straně obrázku zaznamenáváme pozoruhodnou změnu chování modelu v axiálním směru deformace. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se v průběhu nafukování nejprve snižuje rozsah axiální deformace  $\lambda_{zz} > 1$ , pro zlomovou hodnotu parametru  $\beta = 0.5$  nastává nafukování membrány s přibližně konstantní axiální deformací  $\lambda_{zz}$  a s nadále rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se zvyšuje rozsah axiální deformace v opačném směru  $\lambda_{zz} < 1$ . Zdá se být zajímavé, že míra zapojení druhého hlavního invariantu pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace  $I_2(\mathbf{C})$  významně ovlivňuje směr deformace v axiálním směru v průběhu nafukování.

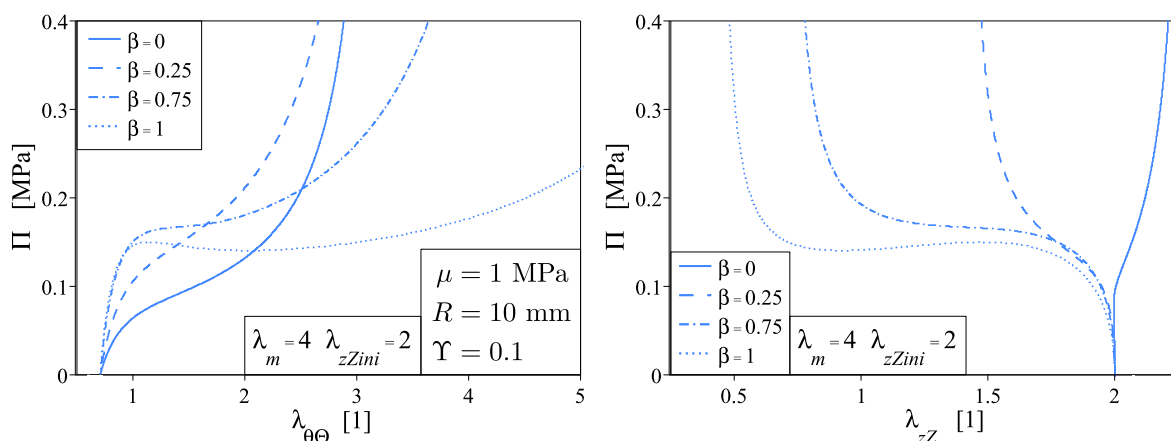
Levá strana, resp. pravá strana, Obr. 5.40 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\theta}$ , resp. axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zz}$ , pro hodnotu fixního parametru  $\lambda_m = 4$  a čtyři hodnoty parametru  $\beta$  v jedné variantě počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zzini} = 2$ , která odpovídá konstantní axiální síle  $F_{red} \approx 180.92$  N pro hodnotu parametru  $\beta = 0$ , resp.  $F_{red} \approx 153.54$  N pro  $\beta = 0.25$ , resp.  $F_{red} \approx 102.96$  N pro  $\beta = 0.75$ , resp.

$F_{red} \approx 79.69$  N pro  $\beta = 1$ . Levá strana obrázku nám ukazuje, že s rostoucím parametrem  $\beta$  se model v obvodovém směru stává jednak tužším pro malé hodnoty deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$ , ale také



Obrázek 5.39: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování nepředepjaté válcové tenkostěnné membrány (tj.  $\lambda_{zzini} = 1$ ) – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zz}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 4$  a proměnný parametr  $\beta$

poddajnějším pro velké hodnoty deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$ . Zdá se, že od jisté hodnoty parametru  $\beta$  model předpovídá ztrátu stability. Na pravé straně obrázku opět pozorujeme změnu chování modelu v axiálním směru deformace. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se v průběhu nafukování nejprve snižuje rozsah axiální deformace  $\lambda_{zz} > 1$ , pro jistou zlomovou hodnotu parametru  $\beta$  nastává nafukování membrány s přibližně konstantní axiální deformací  $\lambda_{zz}$  a s nadále rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se zvyšuje rozsah axiální deformace v opačném směru  $\lambda_{zz} < 1$ . Nakonec dodáme, že rozsah deformace  $\lambda_{zz}$  předepjaté ( $\lambda_{zzini} = 2$ ) tenkostěnné membrány je pro hodnotu parametru  $\beta = 1$  násobně vyšší než pro hodnotu  $\beta = 0$ .



Obrázek 5.40: Předpověď Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zz}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 4$ , fixní počáteční axiální předpětí  $\lambda_{zzini} = 2$  a proměnný parametr  $\beta$

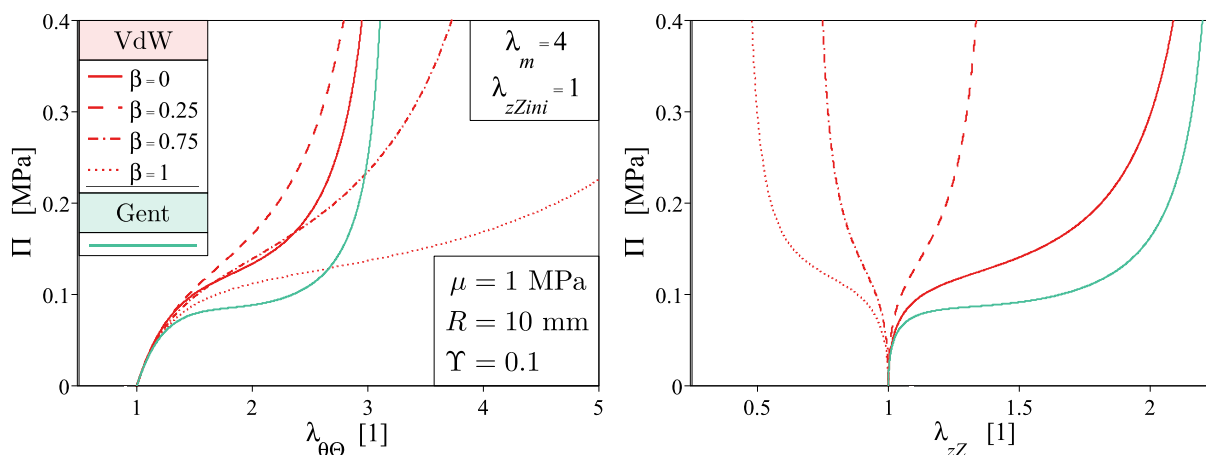


### 5.4.4 Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu

#### Cauchyho napětí

Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při nafukování tenkostěnné membrány provedeme pro vybrané hodnoty materiálových parametrů a vstupních výpočetních veličin vzhledem k rozmanitosti této úlohy. Z tohoto důvodu se formulované závěry nad jednotlivými grafy vztahují pouze k příslušným vstupním hodnotám výpočtu.

Na Obr. 5.41 je zobrazeno porovnání Gentova modelu (zeleně) a Van der Waalsova modelu (červeně). Levá strana, resp. pravá strana, Obr. 5.41 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$ , resp. axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$ , pro hodnotu fixního parametru  $\lambda_m = 4$  a čtyři hodnoty parametru  $\beta$  v jedné variantě počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ . Na levé straně obrázku vidíme, že předpověď Gentova modelu je v obvodovém směru pro malé hodnoty deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vztažené k příslušné limitní hodnotě deformace) poddajnější než předpověď Van der Waalsova modelu, a to nehledě na volbu parametru  $\beta$ . Ovšem toto tvrzení neplatí pro velké hodnoty deformace. Pravá strana obrázku nám ukazuje, že předpověď Gentova modelu je v axiálním směru poddajnější než předpověď Van der Waalsova modelu, a to pro libovolnou hodnotu parametru  $\beta$ . Na obou uvedených grafech sledujeme, že nejvíce jsou si podobné předpovědi Gentova modelu a Van der Waalsova modelu o hodnotě parametru  $\beta = 0$ .

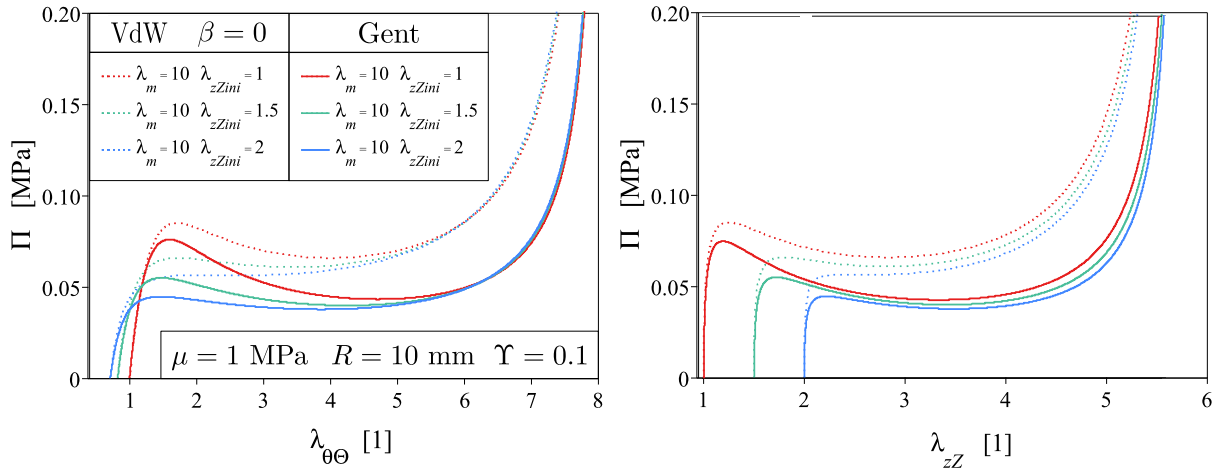


Obrázek 5.41: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při nafukování nepředepjaté válcové tenkostěnné membrány (tj.  $\lambda_{zZini} = 1$ ) – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 4$  a proměnný parametr  $\beta$  (legenda společná pro oba grafy)

Na Obr. 5.42 je zobrazeno porovnání Gentova modelu (plnou čarou) a Van der Waalsova modelu (tečkovanou čarou). Levá strana, resp. pravá strana, Obr. 5.42 vykresluje závislost vnitřního tlaku  $\Pi$  na obvodovém hlavním protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$ , resp. axiálním hlavním protažení  $\lambda_{zZ}$ , pro hodnoty fixních parametrů  $\lambda_m = 10$ ,  $\beta = 0$  v třech variantách počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini} = 1$ ,  $\lambda_{zZini} = 1.5$  a  $\lambda_{zZini} = 2$ . Levá strana obrázku ukazuje, že předpověď Gentova modelu v obvodovém směru sleduje předpověď Van der Waalsova modelu pro malé hodnoty deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vztažené k příslušné limitní hodnotě deformace). Pro velké hodnoty deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$  se předpověď Gentova modelu v obvodovém směru stává poddajnější než



předpověď Van der Waalsova modelu, a to nehledě na hodnotu předpětí  $\lambda_{zZini}$ . Na pravé straně obrázku pozorujeme opět shodu křivek Gentova a Van der Waalsova modelu pro malé hodnoty deformací. Pro velké hodnoty deformací se předpověď Gentova modelu v axiálním směru opět stává poddajnější než předpověď Van der Waalsova modelu, a to bez ohledu na hodnotu předpětí  $\lambda_{zZini}$ . Zdá se, že volba Gentova modelu inklinuje k předpovědi ztráty stability tenkostěnné membrány více než volba Van der Waalsova modelu. Ztrátu stability můžeme pozorovat na obou grafech, projevuje se rostoucí deformací  $\lambda_{\theta\Theta}$ , resp.  $\lambda_{zZ}$ , a klesajícím vnitřním tlakem  $\Pi$ . Např. pokud se podíváme na pravou stranu Obr. 5.42, vidíme, že u modré křivky ( $\lambda_{zZini} = 2$ ) Gentova modelu dochází ke ztrátě stability, ačkoliv pro tytéž vstupy u Van der Waalsova modelu k ní nedochází.



Obrázek 5.42: Porovnání Gentova a Van der Waalsova modelu při nafukování válcové tenkostěnné membrány – tlak  $\Pi$  vs. obvodové hlavní protažení  $\lambda_{\theta\Theta}$  (vlevo) a tlak  $\Pi$  vs. axiální hlavní protažení  $\lambda_{zZ}$  (vpravo) – pro fixní parametr  $\lambda_m = 10$  a proměnné počáteční axiální předpětí trubice  $\lambda_{zZini}$  (legenda společná pro oba grafy)

### Kinematicky přípustné deformace

Porovnáme-li grafy kinematicky přípustných deformací obou modelů z Obr. 5.29 a 5.34, můžeme si všimnout jisté podoby hraničních křivek Van der Waalsova modelu s hraničními křivkami Gentova modelu, a to nezávisle na volbě hodnoty parametru  $\lambda_m$ . Ve skutečnosti se kinematicky přípustné deformace obou modelů shodují právě pro volbu hodnoty parametru  $\beta = 0$ . Toto tvrzení ověříme porovnáním příslušných předpisů hraničních křivek  $\omega_{G1} = 0$  a  $\omega_{V2}(\beta = 0) = 0$ , viz rovnice (5.117) a (5.132). Po dosazení  $\beta = 0$  do rovnice  $\omega_{V2}(\beta = 0) = 0$  získáme vyjádření

$$\omega_{V2}(\beta = 0) = -1 + \sqrt{\frac{\lambda_{\theta\Theta}^4 \lambda_{zZ}^2 + (\lambda_{zZ}^4 - 3\lambda_{zZ}^2) \lambda_{\theta\Theta}^2 + 1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2 (\lambda_m^2 - 3)}} = 0 \quad (5.137)$$

Triviálními úpravami tohoto vyjádření (5.137) dospějeme k rovnosti implicitních předpisů obou hraničních křivek.

# Kapitola 6

## Závěr

### 6.1 Shrnutí

Tato práce se zabývá porovnáním dvou hyperelastických konstitutivních modelů, jmenovitě Gentova a Van der Waalsova modelu. Oba jsou založeny na myšlence limitního protažení polymerního řetězce. K tomu, aby bylo možné tyto modely dále využívat, byly v počáteční kapitole představeny základy teorie nelineární elasticity. K popisu přetvoření kontinua jsme přistupovali Lagrangeovou metodou, která zahrnuje mimo jiné zavedení deformačního gradientu a Cauchy-Greenova tenzoru deformace. Dále bylo zavedeno první a druhé Piola-Kirchhoffovo napětí a Cauchyho (skutečné) napětí, které bylo v práci výhradně aplikováno. Jednotlivé tenzory napětí mezi sebou svazují uvedené přepočtové vztahy. Na závěr byly popsány konstitutivní rovnice pro hyperelastický nestlačitelný materiál, které dávají do vztahu stav napětí se stavem deformace skrze hustotu deformační energie.

V další kapitole byla provedena klasifikace hyperelastických konstitutivních modelů. Z pestré škály v současnosti známých modelů byl představen Neo-hookeův, Arrudy-Boyceův, zobecněný Rivlinův, Ogdenův a samozřejmě Gentův a Van der Waalsův materiálový model. Každý z nich byl v práci charakterizován definicí hustoty deformační energie a přímočarým vysvětlením hlavní myšlenky daného modelu, případně stručným odvozením.

Hlavní kapitola je věnována aplikaci Gentova a Van der Waalsova materiálového modelu na jednoosé napjatosti, prostém smyku, rovnoosé rovinné deformaci a nafukování tenkostěnné membrány. Pro každý případ byla provedena formulace úlohy a následně určení Cauchyho napětí, diskuze kinematicky přípustných deformací a interpretace výsledků pro oba zkoumané materiálové modely.

### 6.2 Výsledky

V příslušných kapitolách této diplomové práce byly detailně popsány dílčí závěry nad jednotlivými uvažovanými případy kinematiky deformace. V této části provedeme závěrečné porovnání obou materiálových modelů, a to na obecné úrovni. Pro jednoduchost a přehlednost výsledků zavedeme následující značení:

- „ $GE$ “ značí Gentův model hustoty deformační energie,

- „ $VdW$  ( $\beta = B$ )“ značí Van der Waalsův model hustoty deformační energie vyčíslený pro hodnotu směřujícího parametru  $\beta = B$ , kde  $B$  substituuje příslušnou hodnotu z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . Globální parametr interakce  $a$  byl v celé práci uvažován roven nule.

### 6.2.1 Jednoosá napjatost

Jednoosou napjatost charakterizujeme jedinou nenulovou složkou Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{11}$ . Porovnání v sekci 5.1.4 ukázalo, že předpověď  $VdW$  ( $\beta = 1$ ) je v tahu poddajnější než předpověď  $GE$  a dále, že předpověď  $GE$  je v tahu poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ). V tlaku se pak ukázalo, že předpověď  $GE$  je poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ) a dále, že předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ) je poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 1$ ).

Porovnání omezujících podmínek obou modelů přineslo zjištění, že oblast kinematically přípustných deformací  $GE$  se shoduje s oblastí  $VdW$  ( $\beta = 0$ ). S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se oblast kinematically přípustných deformací Van der Waalsova modelu v tahu zvětšuje a v tlaku zmenšuje.

### 6.2.2 Prostý smyk

Kinematically předepsaný prostý smyk generuje dvouosou napjatost nehledě na volbu modelu. Gentův model vede k dvěma nenulovým složkám Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{12}$ . Na druhou stranu Van der Waalsův model vede k třem nenulovým složkám Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{12}$  s tím, že složky  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$  váhově závisí na hodnotě parametru  $\beta$ . Pro  $VdW$  ( $\beta = 0$ ) bude vždy platit  $\sigma_{22} = 0$  a pro  $VdW$  ( $\beta = 1$ ) bude vždy platit  $\sigma_{11} = 0$ . Složka  $\sigma_{12}$  jako jediná není závislá na hodnotě parametru  $\beta$ . Nenulové složky napětí nehledě na volbu modelu svazuje vztah (6.1), ve kterém figuruje deformace prostřednictvím tangensu zkosu  $\text{tg}(\delta)$ .

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} + \sigma_{12} \text{tg}(\delta) \quad (6.1)$$

Porovnání v sekci 5.2.4 ukázalo, že pro složku napětí  $\sigma_{11}$  je předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0.75$ ) poddajnější než předpověď  $GE$  a dále, že předpověď  $GE$  je poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ). Pro složku napětí  $\sigma_{12}$  je předpověď  $GE$  poddajnější než předpověď Van der Waalsova modelu.

Porovnání omezujících podmínek obou modelů přineslo zjištění, že oblast kinematically přípustných deformací Gentova modelu se shoduje s oblastí Van der Waalsova modelu. Směřující parametr  $\beta$  pro případ prostého smyku nemá na oblast kinematically přípustných deformací vliv.

### 6.2.3 Rovnoosá rovinná deformace

Případ rovnoosé rovinné deformace charakterizujeme dvěma nenulovými složkami Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{33}$ , které se sobě rovnají. Porovnání v sekci 5.3.4 ukázalo, že předpověď  $GE$  je v tahu poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ) a dále, že předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ) je v tahu poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 1$ ). V tlaku se pak ukázalo, že předpověď  $VdW$  ( $\beta = 1$ ) je poddajnější než předpověď  $GE$  a dále, že předpověď  $GE$  je poddajnější než předpověď  $VdW$  ( $\beta = 0$ ).

Porovnání omezujících podmínek obou modelů přineslo zjištění, že oblast kinematically přípustných deformací  $GE$  se shoduje s oblastí  $VdW$  ( $\beta = 0$ ). S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se oblast kinematically přípustných deformací Van der Waalova modelu v tahu zmenšuje a v tlaku zvětšuje.

## 6.2.4 Nafukování tenkostěnné membrány

Nafukování válcové předepjaté tenkostěnné membrány generuje dle předpokladu dvouosou napjatost. Konkrétně se jedná o nenulové složky Cauchyho tenzoru napětí  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$  v cylindrických souřadnicích. Porovnání v sekci 5.4.4 ukázalo, že mechanická odezva  $GE$  je pro malé hodnoty deformace (vztažené k příslušné limitní hodnotě deformace) v obvodovém směru poddajnější než odezva Van der Waalova modelu, a to nehledě na hodnotu parametru  $\beta$ . Parametr  $\beta$  ovlivňuje mechanickou odezvu Van der Waalova modelu v obvodovém směru tímto způsobem: s rostoucí hodnotou parametru nejprve  $\beta$  klesá poddajnost, pro určitou hodnotu parametru  $\beta$  dosáhne minima poddajnosti a s následným zvyšováním hodnoty parametru  $\beta$  poddajnost roste. V axiální směru je mechanická odezva  $GE$  poddajnější než odezva Van der Waalova modelu nehledě na velikost axiální deformace.

Za zmínku stojí fakt, že počáteční axiální předpětí u obou modelů, resp. hodnota parametru  $\beta$  u Van der Waalova modelu, má značný vliv na rozsah axiální deformace  $\lambda_{zZ}$ . Je velice pravděpodobné, že pro oba uvažované modely existuje kombinace hodnot parametrů a počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini}$ , která by zapříčinila téměř konstantní axiální deformaci  $\lambda_{zZ}$  v průběhu nafukování válcové tenkostěnné membrány.

Velmi zajímavé zjištění bylo pozorováno na pravé straně Obr. 5.39 a 5.40. Ukázalo se, že parametr  $\beta$  Van der Waalova modelu má vliv na hodnotu axiální deformace  $\lambda_{zZ}$ , resp. na její směr. Jak bylo zmíněno výše, pro určitou hodnotu parametru  $\beta$  by axiální deformace dosáhla přibližně konstantní hodnoty. Pokud bychom tuto hodnotu parametru  $\beta$  nadále zvyšovali, axiální deformace by v průběhu nafukování membrány nabývala hodnot menších nebo rovných jedné, tj.  $\lambda_{zZ} \leq 1$ .

Porovnáním mechanické odezvy obou modelů s rozdílnou volbou hodnoty parametru  $\lambda_m$  bylo potvrzeno, že  $GE$  je poddajnější než  $VdW$  ( $\beta = 0$ ), a to dokonce pro různé hodnoty počátečního axiálního předpětí  $\lambda_{zZini}$ .

Porovnání omezujících podmínek obou modelů přineslo zjištění, že oblast kinematically přípustných deformací  $GE$  se shoduje s oblastí  $VdW$  ( $\beta = 0$ ). S rostoucí hodnotou parametru  $\lambda_m$  se oblast kinematically přípustných deformací zvětšuje u obou modelů. S rostoucí hodnotou parametru  $\beta$  se oblast kinematically přípustných deformací Van der Waalova modelu také zvětšuje, avšak současně mění tvar, který umožňuje dosažení velkých hodnot axiální deformace  $\lambda_{zZ}$  pro hodnoty obvodové deformace  $\lambda_{\theta\Theta} < 1$ , resp. velkých hodnot obvodové deformace  $\lambda_{\theta\Theta}$  pro hodnoty axiální deformace  $\lambda_{zZ} < 1$ .

Nakonec byla pozorována kinematically ztráta stability válcové tenkostěnné membrány u obou modelů, ovšem pouze pro určité kombinace parametrů. Naopak grafy Cauchyho napětí vs. deformace, které byly uvedeny v sekci 5.4, potvrdily, že k materiálové nestabilitě v průběhu nafukování nedochází.

## 6.3 Doplnující rozbor

### Jednoosá napjatost

Na Obr. 5.7 a 5.8 v sekci 5.1.4, kde porovnávané oba modely při jednoosé napjatosti v tahu a tlaku, si můžeme povšimnout jisté skutečnosti. Rozdíl deformace  $\lambda_1$  *GE* a *VdW* ( $\beta = 0$ ) pro zvolenou hodnotu normovaného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  dosahuje v tahu i v tlaku svého maxima. Rozdíl normovaného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  *VdW* ( $\beta = 0$ ) a *GE* se limitně blíží k nekonečnu v tahové oblasti, resp. k minus nekonečnu v tlakové oblasti, pro hodnotu deformace  $\lambda_1$  blížíící se své limitní hodnotě v tahu, resp. v tlaku.

Pokud zvolíme hodnotu parametru  $\lambda_m = 2.5$ , obdržíme maximální hodnotu rozdílu deformace v tahu  $\lambda_{1dif} \approx 0.153$ , která odpovídá hodnotě  $\sigma_{11}/\mu \approx 6.3$  a maximální hodnotu rozdílu deformace v tlaku  $\lambda_{1dif} \approx 0.074$ , která odpovídá hodnotě  $\sigma_{11}/\mu \approx -2.5$ . Obdobně pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  získáme maximální hodnotu rozdílu deformace v tahu  $\lambda_{1dif} \approx 0.318$ , která odpovídá hodnotě  $\sigma_{11}/\mu \approx 18.5$  a maximální hodnotu rozdílu deformace v tlaku  $\lambda_{1dif} \approx 0.076$ , která odpovídá hodnotě  $\sigma_{11}/\mu \approx -3.1$ . Obecně ovšem neplatí, že by s rostoucí hodnotou parametru  $\lambda_m$  rostla maximální hodnota rozdílu deformace  $\lambda_{1dif}$  v tahu i v tlaku.

Hledání výše popsaného rozdílu deformace  $\lambda_1$  pro zvolenou hodnotu normovaného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  má smysl výhradně pro *GE* a *VdW* ( $\beta = 0$ ), a to z toho důvodu že pouze pro hodnotu parametru  $\beta = 0$  se oblast kinematicky přípustných deformací Gentova i Van der Waalsova modelu shoduje. Vlastnost existence maxima rozdílu deformace pro zvolenou hodnotu normovaného napětí vykazují také popsané případy prostého smyku a rovnoosé rovinné deformace s uvažováním Gentova a Van der Waalsova materiálového modelu, viz Obr. 5.18, 5.19, 5.26 a 5.27.

Porovnání normované složky tenzoru elasticity  $\zeta_{1111}/\mu$  vykreslené na Obr. 5.9 poukázalo na zajímavý fakt. Pro určité kombinace hodnot materiálových parametrů  $\beta$  a  $\lambda_m$  Van der Waalsova modelu složka  $\zeta_{1111}/\mu$  není v tahové části monotónně rostoucí funkcí deformace  $\lambda_1$ . Pro hodnoty  $\beta = 1$  a  $\lambda_m = 4$  jsme v tahu pozorovali nejprve mírný pokles funkční hodnoty  $\zeta_{1111}/\mu$  ke svému minimu, od kterého funkce monotónně rostla. Tato skutečnost se samozřejmě promítá na průběhu odpovídající křivky v grafu normovaného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  vs. deformace  $\lambda_1$  (Obr. 5.7), která v tahové oblasti přechází z konkávní do konvexní části. Ověření na hodnotách parametru  $\lambda_m$  v řádu milionů ukázalo, že u Gentova modelu v tahu k tomuto porušení monotónnosti funkce  $\zeta_{1111}/\mu$  nedochází. Van der Waalsův model v tomto ohledu tedy dokáže lépe vystihnout charakteristický průběh napětí vs. deformace reálného hyperelastického materiálu, jenž v tahové oblasti taktéž tvoří přechod z konkávní do konvexní části (v literatuře tvarově obvykle připodobňován obrácenému ležatému písmenu „S“).

### Prostý smyk

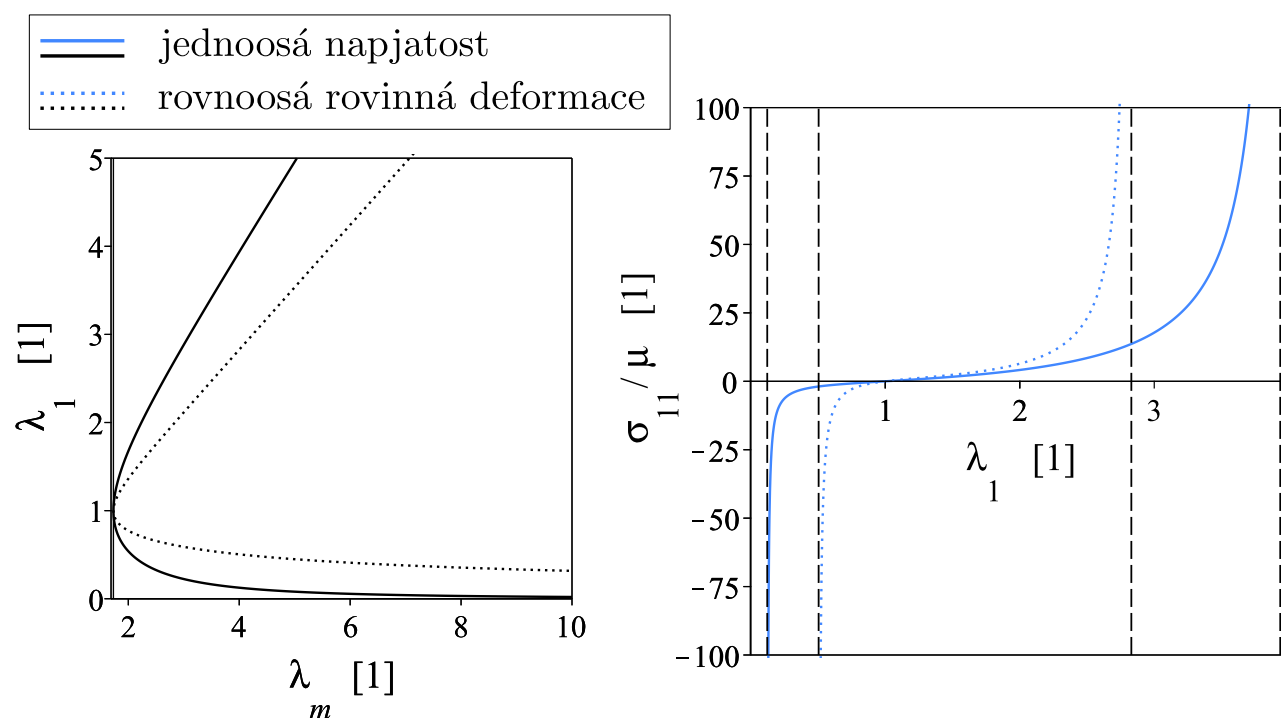
Porovnání obou modelů přineslo pozoruhodný závěr, a to že se pro každou zvolenou hodnotu parametru  $\lambda_m$  kinematicky přípustné deformace pro případ prostého smyku sobě rovnají nehledě na hodnoty parametrů  $\beta$  a  $\mu$ .

Při odvození Cauchyho napětí jsme v případě prostého smyku narazili na otázku volby silové okrajové podmínky k určení Lagrangeova multiplikátoru. Ačkoliv jsme si vědomi různých možností přístupu, zvolili jsme klasickou variantu okrajové podmínky ve formě  $\sigma_{33} = 0$ . Mezi

netradiční okrajové podmínky patří např. volba nulové normálové složky tažné síly působící na sklopenou plochu.

### Rovnoosá rovinná deformace

Výsledky pro rovnoosou rovinnou deformaci se ukazují být velice podobné výsledkům pro jednoosou napjatost. Na levé straně níže uvedeného Obr. 6.1 můžeme vidět pro oba případy namáhání vykreslenou oblast kinematically přípustných deformací Gentova modelu, která se shoduje s oblastí Van der Waalsova modelu o hodnotě parametru  $\beta = 0$ . Z grafu zjišťujeme, že oblast kinematically přípustných deformací pro případ rovnoosé rovinné deformace je menší než odpovídající oblast pro případ jednoosé napjatosti. Tato skutečnost se odráží na polohách asymptot, které vidíme čárkovanou čarou na pravé straně Obr. 6.1, kde je vynesena závislost napětí  $\sigma_{11}/\mu$  na deformaci  $\lambda_1$  pro oba zmíněné případy namáhání s totožnou hodnotou materiálového parametru  $\lambda_m = 4$  Gentova modelu. Pozorujeme, že předpověď normovaného napětí  $\sigma_{11}/\mu$  Gentova, potažmo Van der Waalsova modelu je v případě jednoosé napjatosti poddajnější než daná předpověď v případě rovnoosé rovinné deformace.



Obrázek 6.1: Porovnání jednoosé napjatosti a rovnoosé rovinné deformace. Kinematically přípustné deformace Gentova modelu při jednoosé napjatosti a rovnoosé rovinné deformaci (vlevo) a předpověď Gentova modelu při jednoosé napjatosti a rovnoosé rovinné deformaci pro hodnotu parametru  $\lambda_m = 4$  (vpravo)

# Literatura

- [1] VALENTA, Jaroslav, NĚMEC, Jaroslav. *Biomechanika*. Praha: Academia, 1985.
- [2] FUNG, Y. C. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. ISBN 3540979476.
- [3] SAWHNEY, G. S. *Fundamentals of Biomedical Engineering*. 1st ed. New Delhi: New Age International Pvt Ltd Publishers, 2007. ISBN 8122421024.
- [4] OGDEN, R. W., 2001. Elements of the Theory of Finite Elasticity. In: Y. B. FU and R. W. OGDEN, eds. *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications* [online]. [31. 3. 2019]. Cambridge: Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series, 1–57. Záznam dostupný z: doi:10.1017/CBO9780511526466.002
- [5] PLEŠEK, Jiří, 2015. Mechanika kontinua [studijní text]. Praha: Fakulta strojní ČVUT. *Nelineární mechanika kontinua s příklady* [online]. [31. 3. 2019]. Záznam dostupný z: <http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/MK/MK2015.pdf>
- [6] HORNÝ, Lukáš. Úvod do nelineární pružnosti [prezentace]. Praha: Fakulta strojní ČVUT. *fs.cvut.cz* [online]. [23. 7. 2019]. Záznam dostupný z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Nelinearni-pruznost-projekt-I.pdf>
- [7] FOŘT, Jaroslav, KOZEL Karel a Jiří NEUSTUPA. *Matematika pro mechaniku I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03125-X.
- [8] HORNÝ, Lukáš. *Patobiomechanika srdečněcévního systému, 1.díl*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2014. ISBN 978-80-01-05473-4. Záznam dostupný z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Patobiomechanika-srdecnecevního-systemu-I.pdf>
- [9] HOLZAPFEL, Gerhard A. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. New York: Wiley, 2000. ISBN 0471823198.
- [10] GILLES, Marckmann, ERWAN, Verrin. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*. 2006, 79 (5), 835-858. Záznam dostupný z: <https://doi.org/10.5254/1.3547969>
- [11] RIVLIN, R. S., TAYLOR, Geoffrey Ingram. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1948, 240, 822. ISSN 2054-0272.
- [12] RIVLIN, R. S., SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1951, 243, 865. ISSN 2054-0272.



- 
- [13] KIM, B., LEE, S.B., LEE, J., CHO, S., PARK, H., YEOM, S., PARK, S. H. A Comparison Among Neo-Hookean Model, Mooney-Rivlin Model, and Ogden Model for Chloroprene Rubber. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*. 2012, 13, 5. ISSN 2005-4602.
- [14] OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1972, 326, 1567. Záznam dostupný z: <http://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
- [15] ELLEN, M. Arruda, BOYCE, C. MARY. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993, 41, 2, 389-412. ISSN 0022-5096.
- [16] ENDERLE, H. F., KILIAN, H. G. General deformation modes of a van der Waals network. *Progress in Colloid Polymer Science*. 1987, 75, 55-61. ISBN 978-3-7985-1696-0.
- [17] GENT, Alan N. *Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components*. 3rd edition. Munich: Hanser, 2012. ISBN 9783446427648.
- [18] KILIAN, H. G., ENDERLE, H. F., UNSELD, K. The use of the van der Waals model to elucidate universal aspects of structure-property relationships in simply extended dry and swollen rubbers. *Colloid Polymer Sci*. 1986, 264, 866-876. ISSN 1435-1536.
- [19] TSHAI, K. Y., HARKIN-JONES, E. M. A., MARTIN, P. J. Performance of Hyperelastic Material Laws in Simulating Biaxial Deformation Response of Polypropylene and High Impact Polystyrene. *Numerical Modeling of Materials Under Extreme Conditions*. 2014, 35, 199-230. ISBN 978-3-642-54258-9.
- [20] Abaqus Analysis User's Guide. *Abaqus Documentation version 6.14*. Dassault Systèmes, 2014.
- [21] GENT, A. N. A New Constitutive Relation for Rubber. *Rubber Chemistry and Technology*. 1996, 69, 59-61. ISSN 0035-9475.
- [22] HORNÝ, Lukáš, NETUŠIL Marek. How does axial prestretching change the mechanical response of nonlinearly elastic incompressible thin-walled tubes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016, 106, 95-106. ISSN 0020-7403.
- [23] HORNÝ, Lukáš. Biomechanika II, modely napjatosti a deformace cév, vliv zbytkových napětí a aktivní vlastnosti [prezentace]. Praha: Fakulta strojní ČVUT. [fs.cvut.cz](http://fs.cvut.cz) [online]. [26. 7. 2019]. Záznam dostupný z: [http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika\\_II\\_2016.pdf](http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika_II_2016.pdf)