

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní, Ústav technické matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vliv sítě na numerické řešení šíření elektrického výboje

Autor:

Aleš Benda

Vedoucí práce:

Ing. Jan Karel, Ph.D.

Rok:

2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Benda** Jméno: **Aleš** Osobní číslo: **467305**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Vliv sítě na numerické řešení šíření elektrického výboje

Název bakalářské práce anglicky:

Effects of a grid on a numerical solution of an electric discharge propagation

Pokyny pro vypracování:

Popis modelu elektrického výboje - streameru
Naprogramování jednoduché metody lineárního 1D transportu Gaussova pulzu a otestování vlivu hustoty hustoty sítě na snížení maxima řešení.
Základní popis numerického algoritmu řešení soustavy rovnic elektrického výboje.
Otestování vlivu typu sítě na řešení elektrického výboje.
Grafické zpracování a popis výsledků.

Seznam doporučené literatury:

Karel J.: Numerical Simulation of Streamer Propagation on Unstructured Dynamically Adapted Grids, ČVUT 2014
Blazek J.: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001
Leveque R. J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Jan Karel, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

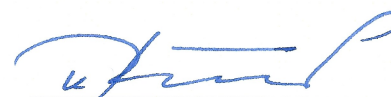
Datum zadání bakalářské práce: **15.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: _____


Ing. Jan Karel, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30. 4. 2019
Datum převzetí zadání

Benda
Podpis studenta

Název práce: **Vliv sítě na numerické řešení šíření elektrického výboje**

Anotace

Cílem této práce je porovnání jednotlivých numerických metod a parametrů sítě na řešení šíření elektrického výboje. Mezi dílčí cíle dále patřilo seznámení se s matematickým modelem elektrického výboje, naprogramování 1D transportu Gaussova pulsu a základní popis numerického algoritmu řešení soustavy rovnic elektrického výboje. Elektrický výboj může nabývat více podob (koróna, obloukový výboj, doutnavý výboj, ...), tato práce se však zaměřuje výhradně na šíření tzv. streameru (jiskrový výboj ve vysokonapětovém elektrickém poli).

Klíčová slova: numerická simulace, elektrický výboj, streamer, síť, Gaussov puls, metoda konečných objemů

Title: **Effects of a grid on a numerical solution of an electric discharge propagation**

Abstract

The goal of this work is to compare individual numerical methods and grid parameters to the solution of electric discharge propagation. Partial objectives included acquaintance with the mathematical model of electrical discharge, programming of 1D Gaussian pulse transport and a basic description of a numerical algorithm for solving a system of electrical discharge equations. Electric discharge can take more forms (corona, arc discharge, glow discharge, ...), but this work focuses purely on the propagation of the so-called streamer (filamentary discharge in a high voltage electric field).

Key words: numerical simulation, electric discharge, streamer, grid, Gaussian pulse, finite volume method

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Vliv sítě na numerické řešení šíření elektrického výboje“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jana Karla, Ph.D. a s použitím literatury uvedené na konci mé bakalářské práce.

V Praze dne

.....

Aleš Benda

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Janu Karlovi, Ph.D. za odborný dohled, konzultace, vedení a čas, který mi věnoval, a které mi značně pomohly k vypracování této bakalářské práce. Dále bych rád poděkoval mé rodině za podporu.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Struktura práce.....	1
1.2	Technické aplikace.....	1
2	Matematický model	2
2.1	Elektrický výboj	2
2.2	Elektrický výboj bez fotoionizace.....	3
2.2.1	Počáteční podmínky	5
2.2.2	Okrajové podmínky	5
2.3	Elektrický výboj s fotoionizací.....	6
3	Numerická simulace	8
3.1	Algoritmus.....	8
3.2	Dynamická adaptace sítě.....	8
3.2.1	Kritérium	9
3.3	Diskretizace	10
4	Numerické metody	11
4.1	Transportní rovnice.....	11
4.1.1	Počáteční podmínky	12
4.1.2	Okrajové podmínky	13
4.2	Metoda konečných objemů	13
4.2.1	Schéma Upwind 1. řádu	15
4.2.2	Schéma Upwind 2. řádu v prostoru.....	17
4.2.3	Kroková metoda Runge-Kutta.....	19
4.2.4	Metoda Lax – Wendroff.....	19
4.3	Metoda konečných diferencí.....	20
4.4	Grafické porovnání výsledků.....	21
4.5	Interpretace výsledků	28
5	Numerické experimenty	29
5.1	Šíření výboje bez fotoionizace.....	31
5.1.1	Metoda 1. řádu.....	31

5.1.2	Metoda 2. řádu.....	32
5.1.3	Porovnání metody 1. a 2. řádu.....	33
5.2	Šíření výboje s fotoionizací	34
5.2.1	Metoda 1. řádu.....	34
5.2.2	Metoda 2. řádu.....	34
5.2.3	Porovnání metody 1. a 2. řádu.....	35
6	Závěr.....	36

Seznam použitých symbolů

A	$[cm^{-2} \cdot Torr^{-2}]$	„fitting parameter“
A_l	$[dm^3 \cdot mol^{-1} \cdot cm^{-1}]$	absorpční koeficient
C_i		buňka
c	$[cm \cdot s^{-1}]$	rychlost světla
D_e	$[cm^2 \cdot s^{-1}]$	difusní koeficient
\vec{E}	$[V \cdot cm^{-1}]$	intenzita elektrického pole
e	[1]	Eulerovo číslo
F	[1]	numerický tok
I	[1]	emisivita iontů
l	$[cm]$	diskrétní vlnová délka
m_e	$[kg]$	hmotnost elektronů
m_p	$[kg]$	hmotnost kladně nabitých iontů
N	$[cm^{-3}]$	hustota neionizovaného plynu
\vec{n}	[1]	jednotkový normálový vektor
n_e	$[cm^{-3}]$	hustota elektronů
n_n	$[cm^{-3}]$	hustota záporně nabitých iontů
n_p	$[cm^{-3}]$	hustota kladně nabitých iontů
\vec{n}_s	[1]	vnější jednotková normála
p	$[Torr]$	celkový tlak
p_e	$[Torr]$	parciální tlak elektronů
p_p	$[Torr]$	parciální tlak kladně nabitých iontů
p_{O_2}	$[Torr]$	parciální tlak kyslíku
p_q	$[Torr]$	„quenching pressure“
Q	$[cm^{-1}]$	aproximace q
\tilde{Q}	$[cm^{-1}]$	lineárně interpolovaná Q na stěně buňky

q	$[cm^{-1}]$	hustota elektronů v 1D prostoru
q_e	$[C]$	elementární elektrický náboj
R	$[1]$	reziduum
S_e	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	zdrojový člen elektronů
S_p	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	zdrojový člen kladně nabitých iontů
S_{ph}	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	zdrojový člen fotoionizace
t	$[s]$	čas
Δt	$[s]$	časový krok
u	$[cm \cdot s^{-1}]$	rychlost
V	$[V]$	elektrický potenciál
\vec{v}_e	$[cm \cdot s^{-1}]$	rychlost elektronů
\vec{v}_n	$[cm \cdot s^{-1}]$	rychlost záporně nabitých iontů
\vec{v}_p	$[cm \cdot s^{-1}]$	rychlost kladně nabitých iontů
x, y	$[cm]$	souřadnice
Δx	$[cm]$	délka buňky
α	$[cm^{-1}]$	koeficient ionizace
α_k	$[1]$	koeficient pro metodu Runge – Kutta
β_{att}	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	koeficient navázání
β_{ep}	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	koeficient rekombinace elektron – kladný iont
β_{np}	$[cm^3 \cdot s^{-1}]$	koeficient rekombinace záporný – kladný iont
ε_0	$[F \cdot m^{-1}]$	permitivita
λ	$[1]$	„fitting parameter“
λ_l	$[cm^{-1} \cdot Torr^{-1}]$	absorpční koeficient
ξ	$[1]$	účinnost fotoionizace
ν	$[1]$	Courantovo číslo
ν_i	$[s^{-1}]$	koeficient ionizace pro fotoionizaci
ν_u	$[s^{-1}]$	efektivní koeficient excitace dusíku
ψ	$[1]$	Barth – Jespersenův limiter

1 Úvod

1.1 Struktura práce

Práce je rozdělena na čtyři hlavní části, které jednak tvoří logické celky a zároveň reflektují časovou posloupnost s jakou bylo k této práci přistupováno. Kapitola **Matematický model** se věnuje obecné problematice popisu fyzikálních jevů matematickým aparátem, formulací konkrétního problému a popisu rovnic zabývajících se šířením elektrického výboje – streameru. Navazující **Numerická simulace** principiálně popisuje algoritmus řešení soustavy rovnic elektrického výboje. Kapitola **Numerické metody** pak obecně představuje několik běžně používaných numerických metod (především pak metodu konečných objemů) a jejich porovnání na konkrétním případě – lineární 1D transport Gaussova pulsu. Ve čtvrté kapitole, **Numerické experimenty**, jsou porovnávány výsledky 2D šíření elektrického výboje v závislosti na vstupních parametrech (geometrie sítě, řád metody a fyzikální podmínky).

1.2 Technické aplikace

Elektrický výboj je jev, který se běžně vyskytuje v přírodě, kde jeho typickým reprezentantem je blesk, který může nabývat v atmosféře rozdílných podob.

Kromě toho však elektrický výboj našel uplatnění i v technických aplikacích. Průkopníkem těchto aplikací byl v 18. století anglický fyzik Joseph Priestley, který objevil jeho erozní efekt, což později vedlo k vývoji elektrojiskrového obrábění [1]. Od té doby došlo k významnému rozšíření aplikací elektrického výboje – konkrétně streameru, a to i mimo oblasti povrchových úprav (leptání, nanášení tenkých vrstev, zvyšování odolnosti vůči korozi). Streamer se vzhledem k emitaci reaktivních radikálů používá pro úpravu kontaminovaných médií (spaliny, znečištěná voda, bioplyn). Mezi oblastmi dalšího možného využití se řadí atmosférické plasmové trysky. Vzhledem k produkování různých biocidních látek, UV záření a nabitých částí, se mohou uplatnit v biomedicíně. V budoucnu se nabízí využití slabě ionizovaného plynu k regulaci rychlosti proudění vzduchu u nadzvukových dopravních prostředků přesahujících rychlosti 6 Machů, kde tradiční prostředky (vzhledem k rozdílným fyzikálně-chemickým vlastnostem vzduchu panujícím při těchto rychlostech) selhávají [2].

2 Matematický model

Matematické modelování je proces formulace abstraktního matematického modelu, který reprezentuje fyzikální realitu. Matematický model je popsán matematickým aparátem, nejčastěji diferenciálními a parciálními diferenciálními rovnicemi (typickým případem může být rovnice vedení tepla nebo rovnice šíření vlny). Případně můžeme uvažovat i statistický model [3]. Jedná se o multidisciplinární obor, který nalézá široké spektrum uplatnění a díky rozvoji výpočetní techniky umožňuje stále přesnější simulace a analýzy. Kromě využití v typicky technických aplikacích jako je aerokosmický průmysl se s ním můžeme setkat při simulacích počasí, chemických procesů, chování populací nebo volebních modelů [4].

Daný model můžeme následně řešit analyticky, nebo numericky. Analytické řešení spočívá v nalezení přesného řešení pomocí analytických matematických metod, zatímco numerické řešení se používá u modelů, které analyticky řešit nelze, nebo je toto řešení příliš náročné [5]. Řešení nám následně umožní simulovat realitu popsanou matematickým modelem. Vzhledem ke komplexnosti a složitosti reality je matematický model často více, či méně zjednodušen a idealizován (například linearizace) [3].

2.1 Elektrický výboj

Za stavu, kdy je elektricky neutrální plyn vystaven působení elektrického pole s vysokou intenzitou, dochází k nerovnovážným ionizačním procesům. Tyto procesy způsobují rozklad elektricky neutrálního plynu na elektrony unášené elektrickým polem k anodě a výrazně těžší ionty přitahované katodou. Výboj může nabývat více podob v závislosti na intenzitě elektrického pole, hustotě a tlaku média. V případě streameru se jedná o nestacionární jiskrový výboj, jež lze popsat vícero modely, lišícími se svou komplexností [2].

Velmi častý je model tvořený ze tří rovnic konvekce – difuze – reakce (2.1), (2.2), (2.3) pro elektricky nabitě částice, doplněný Poissonovou rovnicí pro elektrické pole (2.4) a Helmholtzovou rovnicí pro fotoionizaci (2.5)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) - \nabla \cdot (D_e \nabla n_e) = S_{ph} + n_e \alpha |\vec{v}_e| - n_e \beta_{att} |\vec{v}_e| - n_e n_p \beta_{ep}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \nabla \cdot (n_p \vec{v}_p) = S_{ph} + n_e \alpha |\vec{v}_e| - n_e n_p \beta_{ep} - n_n n_p \beta_{np}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_n \vec{v}_n) = n_e \beta_{att} |\vec{v}_e| - n_n n_p \beta_{np}, \quad (2.3)$$

$$\Delta V = -\frac{q_e}{\varepsilon_0}(n_p - n_n - n_e), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad (2.4)$$

$$\Delta S_{ph} - (\lambda p_{O_2})^2 S_{ph} = -A p_{O_2}^2 I, \quad (2.5)$$

kde n_e, n_p, n_n jsou hustoty elektronů, kladně a záporně nabitých iontů, $\vec{v}_e, \vec{v}_p, \vec{v}_n$ jsou rychlosti šíření těchto částic a D_e je difusní koeficient. Zdrojové členy z rovnic konvekce – difuze – reakce vynásobené konstantou α vyjadřují ionizaci, konstantou β_{att} navázání a konstantami β_{ep}, β_{np} pak rekombinaci elektron – kladný iont, respektive záporný – kladný iont. Elektrické pole je charakterizováno elektrickým potenciálem V a intenzitou elektrického pole \vec{E} . Helmholtzova rovnice vyjadřuje zdrojový člen fotoionizace S_{ph} , kde p_{O_2} je parciální tlak kyslíku, I představuje emisi fotonů popsanou vztahem $I = A \cdot n_e \cdot \vec{v}_e \cdot \lambda$. Členy A a λ jsou parametry [2], [6].

Další z možných modelů, použitý např. v [7], se sestává rovněž z rovnic konvekce – difuze – reakce doplněných rovnicemi kontinuity a Poissonovou rovnicí

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \nabla \cdot (n_p \vec{v}_p) = 0, \quad (2.6)$$

$$m_p \left[\frac{\partial (n_p \vec{v}_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_p \vec{v}_p \otimes \vec{v}_p) \right] + \nabla p_p (n_p) = q_e n_p E, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \quad (2.8)$$

$$m_e \left[\frac{\partial (n_e \vec{v}_e)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e \otimes \vec{v}_e) \right] + \nabla p_e (n_p) = -q_e n_e E, \quad (2.9)$$

$$\Delta V = -\frac{q_e}{\varepsilon_0}(n_p - n_e), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad (2.10)$$

kde p_e, p_p představuje parciální tlak elektronů, respektive kladně nabitých iontů, m_e, m_p pak jejich hmotnosti. Zbylé symboly mají stejný význam, jako v předchozím modelu [2].

2.2 Elektrický výboj bez fotoionizace

V kapitole **Numerické experimenty** jsou v závislosti na volených parametrech porovnávány řešení šíření streameru, popsaného tzv. minimálním modelem. Ten se skládá z rovnic konvekce – difuze – reakce pro elektrony, obyčejné diferenciální rovnice pro kladné ionty a Poissonovy rovnice pro elektrické pole

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e - D_e \nabla n_e) = S_e, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = S_p, \quad (2.12)$$

$$\Delta V = Q, \quad \vec{E} = -\nabla V, \quad (2.13)$$

kde S_e a S_p představují zdrojové členy, $Q = -(q_e/\varepsilon_0)(n_i - n_e)$, přičemž q_e je elementární elektrický náboj a ε_0 označuje permitivitu. n_e , n_p , \vec{v}_e a D_e mají stejný význam, jako v předchozích modelech.

Rychlost šíření elektronů \vec{v}_e je stejně tak jako difusní koeficient D_e a zdrojové členy S_e , S_p funkcí intenzity elektrického pole. Difusní součinitel pak závisí právě na rychlosti šíření elektronů a zdrojové členy na jejich hustotě. Rovnice (2.14) - (2.17) představují vztahy pro výpočet těchto členů:

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= - \left[7.4 \cdot 10^{21} \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{N} + 7.1 \cdot 10^6 \right] \cdot \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|}, & \text{pro } \frac{\|\vec{E}\|}{N} > 2 \cdot 10^{-15}, \\ \vec{v}_e &= - \left[1.03 \cdot 10^{22} \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{N} + 1.3 \cdot 10^6 \right] \cdot \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|}, & \text{pro } 10^{-16} < \frac{\|\vec{E}\|}{N} \leq 2 \cdot 10^{-15}, \\ \vec{v}_e &= - \left[7.2973 \cdot 10^{21} \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{N} + 1.63 \cdot 10^6 \right] \cdot \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|}, & \text{pro } 2.6 \cdot 10^{-17} < \frac{\|\vec{E}\|}{N} \leq 10^{-16}, \\ \vec{v}_e &= - \left[6.87 \cdot 10^{22} \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{N} + 3.38 \cdot 10^4 \right] \cdot \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|}, & \text{pro } \frac{\|\vec{E}\|}{N} \leq 2.6 \cdot 10^{-17}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde $N = 2.5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ a představuje hustotu neutrálního plynu [2]. Pro difusní součinitel dále platí:

$$D_e = \left[0.3341 \cdot 10^9 \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{N} \right]^{0.54069} \cdot \frac{\|\vec{v}_e\|}{\|\vec{E}\|}. \quad (2.15)$$

A pro zdrojové členy:

$$S_e = \frac{\alpha}{N} \cdot \|\vec{v}_e\| \cdot N,$$

$$S_p = S_e,$$

$$(2.16)$$

kde poměr α/N [cm^2] se vypočítává dle následujícího algoritmu:

$$\begin{aligned} \text{pokud } \frac{\|\vec{E}\|}{N} > 1.5 \cdot 10^{-15}, \quad \frac{\alpha}{N} &= 2 \cdot 10^{-16} \cdot \exp\left(\frac{-7.248 \cdot 10^{-15}}{\frac{\|\vec{E}\|}{N}}\right), \\ \text{jinak,} \quad \frac{\alpha}{N} &= 6.619 \cdot 10^{-17} \cdot \exp\left(\frac{-5.593 \cdot 10^{-15}}{\frac{\|\vec{E}\|}{N}}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Z porovnání rovnic a (2.1) - (2.3) a (2.11) - (2.13) je patrné, že minimální model zanedbává rychlost šíření kladných iontů (oproti rychlosti elektronů je mnohem nižší), záporné ionty a všechny zdrojové členy, kromě zdrojového členu ionizace. Zdrojový člen fotoionizace je v tomto modelu nahrazen elektrickým pozadím.

2.2.1 Počáteční podmínky

Pro vznik streameru je nezbytný fotoionizační efekt způsobující rozpad neutrálních částic. Ten je však v tomto modelu nahrazen elektrickým pozadím, kde pro dvoudimenzionální případ platí následující počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} n_e(x, y, 0) &= 10^{14} \cdot e^{-\frac{(x-0.2)^2 + (y-0.25)^2}{\sigma^2}} + 10^7 \text{ [cm}^{-3}\text{]}, \quad \sigma = 0.001, \\ n_p(x, y, 0) &= n_e(x, y, 0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Spouštěčem streameru je pak porucha v elektrickém poli daná Gaussovým pulsem [2].

2.2.2 Okrajové podmínky

Elektrické pole je v tomto případě tvořeno dvěma elektrodami, kde katoda je uzemněna a na anodě je 25 000 V. Tento fakt je reprezentován následující Dirichtelovou podmínkou pro katodu a anodu:

$$\begin{aligned} \text{pro katodu} \quad V &= 0 \text{ [V]}, \\ \text{pro anodu} \quad V &= 25\,000 \text{ [V]}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Na zbylých hranicích je předepsaná Neumannova homogenní podmínka (2.20)

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (2.20)$$

Pro hustotu elektronů na všech hranicích platí Neumannova homogenní podmínka (2.21)

$$\frac{\partial n_e}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (2.21)$$

2.3 Elektrický výboj s fotoionizací

Pokud v minimálním modelu popsaném rovnicemi (2.11) - (2.13) ponecháme zdrojový člen fotoionizace S_{ph} , pak bude model

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e - D_e \vec{\nabla} n_e) = S_e + S_{ph}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = S_p + S_{ph}, \quad (2.23)$$

doplněný opět Poissonovou rovnicí (2.13) popisovat šíření streameru včetně vlivu fotoionizace.

Zdrojový člen fotoionizace S_{ph} je začleněn pomocí třískupinového modelu SP₃, tvořeného $N_g = 3$ efektivními monochromatickými radiačními rovnicemi. Vzhledem k zanedbání rozptylu fotonů a faktu, že časový rozsah šíření fotonů je vůči elektronům nepatrný, lze popsat rozdělení fotonů funkcí $\Psi_l(x, \Omega)$, kde x udává pozici a Ω směr. Tato funkce pak splňuje radiační transportní rovnici

$$\Omega \cdot \nabla \Psi_l(x, \Omega) + \lambda_l p_{O_2} \Psi_l(x, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{p_q}{p + p_q} \left(\xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c \xi}, \quad l = 1, \dots, N_g, \quad (2.24)$$

kde l představuje diskretní vlnovou délku, λ_l absorpční koeficient, p_{O_2} je parciální tlak kyslíku, p celkový tlak a p_q tzv. „quenching pressure“. $\xi = 0.1$ určuje účinnost fotoionizace, ν_u je efektivní koeficient excitace dusíku, ν_i ionizační koeficient a n_e pak stejně jako v předchozích případech hustota elektronů. Člen $(\xi \nu_u / \nu_i)$ je funkcí redukovaného elektrického pole a c je rychlost světla [8].

Rovnice (2.24) mají rozdílné absorpční koeficienty, ale mají stejný zdrojový člen, který závisí na lokálním elektrickém poli E/N_{air} , měnícím se v čase a prostoru. SP₃ aproximace těchto rovnic vede na sadu dvou eliptických rovnic pro funkce $\phi_{1,l}(x)$ a $\phi_{2,l}(x)$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{1,l}(x) - \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_1^2} \phi_{1,l}(x) &= -\frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_1^2} \frac{p_q}{p+p_q} \left(\xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c \xi}, \\
\Delta\phi_{2,l}(x) - \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_2^2} \phi_{2,l}(x) &= -\frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_2^2} \frac{p_q}{p+p_q} \left(\xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c \xi},
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

kde $\kappa_{1,2} = (1/7)(3 \pm 2\sqrt{6/5})$ [8].

Rovnice (2.25) jsou doplněné okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_{1,l}(x) \cdot \vec{n}_s &= -\lambda_l p_{O_2} \alpha_1 \phi_{1,l}(x) - \lambda_l p_{O_2} \beta_2 \phi_{2,l}(x), \\
\nabla\phi_{2,l}(x) \cdot \vec{n}_s &= -\lambda_l p_{O_2} \alpha_2 \phi_{2,l}(x) - \lambda_l p_{O_2} \beta_1 \phi_{1,l}(x),
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

které musí funkce $\phi_{1,l}(x)$ a $\phi_{2,l}(x)$ splňovat na hranici, kde nedochází ani k reflexivitě, ani k emisivitě. n_s je vnější jednotková normála k povrchu hranice, $\alpha_{1,2} = (5/96)(34 \pm 11\sqrt{6/5})$ a $\beta_{1,2} = (5/96)(34 \pm 2\sqrt{6/5})$. Obvyklý postup řešení rovnic (2.25) spolu s okrajovými podmínkami (2.26) spočívá v proložení $\beta_{1,2} = 0$, následnými iteracemi a opětovným začleněním $\beta_{1,2}$ [8].

Izotropická část funkce $\Psi_l(x, \Omega)$ se zapisuje jako lineární kombinace funkcí $\phi_{1,l}(x)$ a $\phi_{2,l}(x)$:

$$\Psi_l(x) = \frac{\gamma_2 \phi_{1,l}(x) - \gamma_1 \phi_{2,l}(x)}{\gamma_2 - \gamma_1},
\tag{2.27}$$

kde $\gamma_{1,2} = (5/7)(1 \pm 3\sqrt{5/6})$ [8].

Následně lze zdrojový člen fotoionizace S_{ph} zapsat ve tvaru

$$S_{ph}(x) = \sum_{l=1}^{N_g} A_l \xi p_{O_2} c \Psi_l(x),
\tag{2.28}$$

kde parametry A_l a λ_l jsou uvedeny v tabulce 2.1 [8]

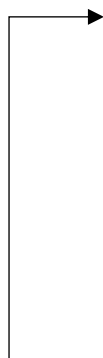
Tabulka 2.1 [8]: Parametry zdrojového členu fotoionizace

l	A_l [$cm^{-1}Torr^{-1}$]	λ_l [$cm^{-1}Torr^{-1}$]
1	0.0067	0.0447
2	0.0346	0.1121
3	0.3059	0.5994

3 Numerická simulace

3.1 Algoritmus

Jak bylo zmíněno v předchozích kapitolách, šíření streameru je popsáno rovnicí konvekce – difuze – reakce (2.11), respektive (2.22), obyčejnou diferenciální rovnicí pro kladné ionty (2.12), respektive (2.23) a Poissonovou rovnicí pro elektrický potenciál (2.13). Principiálně je systém těchto rovnic řešen následujícím algoritmem [2]

- 
- výpočet nových hodnot hustoty elektronů n_e a iontů n_i explicitním schématem
 - dosazení n_e, n_p a stanovení elektrického potenciálu V řešením Poissonovy rovnice
 - výpočet intenzity elektrického pole \vec{E} z elektrického potenciálu V
 - napočítání nové vrstvy – nové hodnoty n_e a n_p
 - vytvoření nové sítě po několika iteracích dynamickou adaptací
 - interpolace neznámých hodnot z předchozí sítě do nové

3.2 Dynamická adaptace sítě

K dosažení přesnějších výsledků je vhodné volit co nejjemnější výpočetní síť, to však výrazně zvyšuje výpočetní čas a tím pádem i cenu výpočtu. K překonání tohoto problému je vhodná dynamická adaptace sítě. Tu lze aplikovat jak u stacionárních, tak i nestacionárních případů a existuje několik možností, jak lze dynamické adaptace sítě dosáhnout [2].

U stacionárních případů je jednou z používaných metod progresivní zjemnění. Slouží k zachycení významných jevů, jako je například šíření rázové vlny v tekutinách. Principem této metody je zjemnění (rozdělení) buněk ve směru šíření rázové vlny. Další možností je deformace buněk, kdy dochází k posunu vrcholů buněk, případně k vynechání některých uzlů [2].

U nestacionárních případů dochází k adaptaci sítě v každém časovém kroku a v ideálním případě se síť zjemňuje pouze v oblasti zájmu. U šíření streameru je takovou oblastí čelo náboje, kde se vyskytují velké gradienty. Buňky se zde rozdělí do „podbuněk“, které kopírují tvar původní buňky. Druhý, kvazi-stacionární způsob, který používá program použitý v této práci, je založen na referenční buňce. V této referenční buňce je spočítáno kritérium, které uvádí, zda a na kolik buněk má být referenční buňka rozdělena. Buňky jsou poté rozděleny (je však nutné splňovat podmínku konformity – viz níže) a následně proběhne na zjemněné síti výpočet pro daný počet kroků. Po uplynutí těchto kroků dojde k další adaptaci sítě, kdy hodnoty předchozích

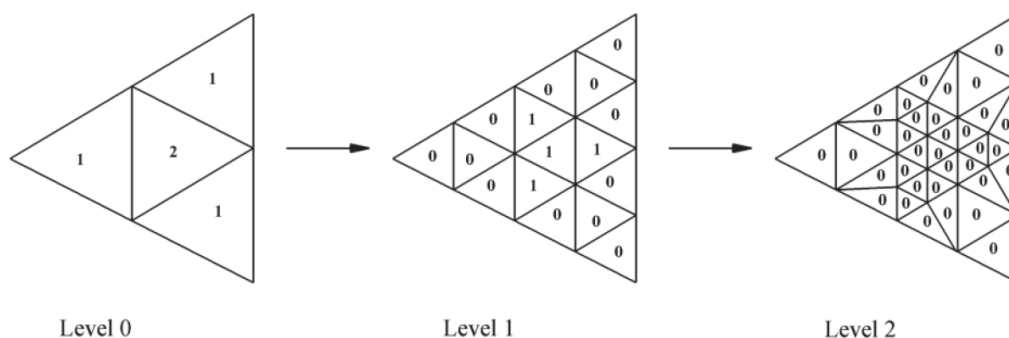
buněk jsou interpolovány do nových. Dochází tak ke snížení zátěže CPU a použité paměti [2].

3.2.1 Kritérium

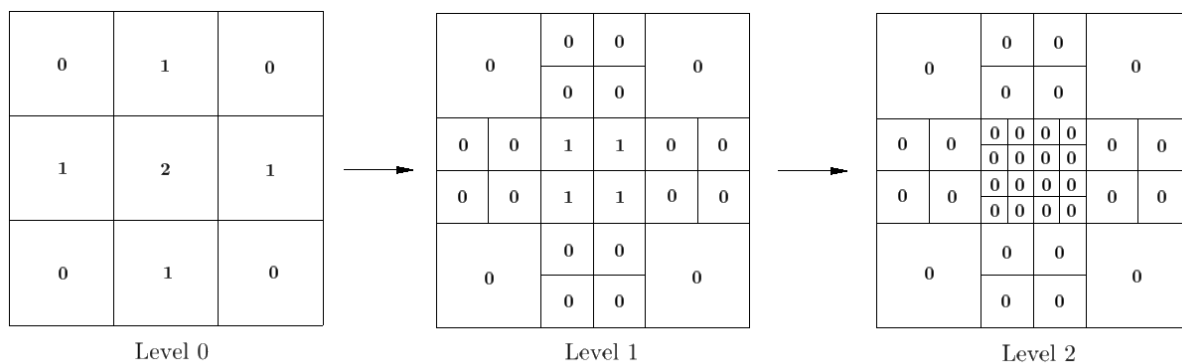
Algoritmus počítající kritérium buňky se skládá z následujících kroků:

- na určité oblasti dojde k napočítání kritéria, obsahující několik parametrů
- kritérium je přeškolováno na interval $\langle 0,1 \rangle$
- proběhne deset iterací difuzní rovnice
- po iteracích je kritérium opět přeškolováno na interval $\langle 0,1 \rangle$
- interval je rozdělen na podintervaly, určující úroveň rozdělení buňky

Kritérium zároveň zajišťuje, aby byla dodržena podmínka konformity. Tato podmínka říká, že rozdíl úrovně rozdělení buněk, které mají společnou stěnu, nesmí být vyšší než jedna. Mechanismus zjemňování trojúhelníkové sítě je zobrazen na obrázku 3.1, zjemňování čtyřúhelníkové sítě pak na obrázku 3.2.



Obrázek 3.1 [2]: Zjemňování trojúhelníkové sítě



Obrázek 3.2 Zjemňování čtyřúhelníkové sítě

3.3 Diskretizace

Vzhledem k tomu, že diskretizace rovnic a členů přesahuje rámec této práce, je zde uveden pouze stručný přehled použitých metod.

- rovnice pro hustotu elektronů: metoda konečných objemů
 - konvektivní členy: schéma Upwind
 - disipativní členy: „Diamond type scheme“ + metoda nejmenších čtverců
 - čas: tříkroková metoda Runge – Kutta
- rovnice pro hustotu kladných iontů: metoda Runge – Kutta
- Poissonova rovnice: centrální aproximace a LU faktorizace následných lineárních rovnic vzniklých diskretizací
- intenzita elektrického pole: „Diamond type scheme“
- rychlost šíření elektronů: viz (2.14)
- difusní koeficient: viz (2.15)
- zdrojové členy: viz (2.16), (2.17)

Některé z metod jsou podrobněji popsány v následující kapitole **Numerické metody**.

4 Numerické metody

Principem různých matematických metod je nalézt řešení systému rovnic popisujících matematický model. Nebudeme-li uvažovat analytický způsob řešení, který lze použít pouze v ojedinělých a jednoduchých případech, pak téměř všechny numerické metody používají podobnou strategii, spočívající v pokrytí fyzikální oblasti sítí [9]. V této kapitole jsou na lineárním 1D transportu Gaussova pulsu demonstrovány některé z numerických metod.

4.1 Transportní rovnice

Uvažujme médium o hustotě $q(x, t)$, rychlosti $u(x, t)$, distribuované na přímce s vytyčeným libovolným úsekem $x_1 \leq x \leq x_2$. Integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx \quad (4.1)$$

představuje celkovou hmotu procházející intervalem $\langle x_1, x_2 \rangle$ za daný čas t . Pokud nedochází k vytváření ani zániku média uvnitř dané oblasti, pak k jediným změnám dochází kvůli toku částic na hranicích intervalu. Vztah

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = F_1(t) - F_2(t), \quad (4.2)$$

kde $F_{1,2}$ jsou toky na stěnách intervalu, představuje integrální formu zákona zachování. Předpokládejme dále, že tok F je závislý na rychlosti a hustotě média dle vztahu

$$F = u(x, t)q(x, t). \quad (4.3)$$

Je-li $u(x, t)$ známá funkce, pak

$$F = f(q, (x, t)) = u(x, t)q. \quad (4.4)$$

V případě, že je rychlost nezávislá na souřadnici x a čase t (je tedy konstantou) lze napsat

$$F = f(q) = \bar{u}q. \quad (4.5)$$

V tomto případě lze tok v jakémkoliv bodě a časovém okamžiku určit pouze z množství média v daném bodě. Hodnota toku tedy nezávisí na umístění tohoto bodu v čase a prostoru a jedná se o tzv. autonomní rovnici. Zákon zachování (4.2) pak lze zapsat jako

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)). \quad (4.6)$$

Jsou-li funkce $q(x, t)$ a $f(q(x, t))$ dostatečně hladké¹, lze dále zapsat

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) dx \quad (4.7)$$

a následně

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) \right] dx = 0. \quad (4.8)$$

Vzhledem k tomu, že integrál musí být pro všechny intervaly $\langle x_1, x_2 \rangle$ roven nule, pak totéž platí i pro integrand a získáváme rovnici zachování v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) = 0, \quad (4.9)$$

kterou lze zároveň zapsat jako

$$q_t(x, t) + f_x(q(x, t)) = 0. \quad (4.10)$$

Pro případ (4.12) má tato rovnice tvar

$$q_t + \bar{u} q_x = 0 \quad (4.11)$$

a nazývá se transportní rovnice. Konkrétně v této práci je zvoleno $\bar{u} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.1.1 Počáteční podmínky

Transportní rovnice v tomto případě přenáší Gaussův puls. Ten je popsán Gaussovou funkcí, která je zároveň počáteční podmínkou

$$q(x, 0) = e^{-\frac{(x-0,2)^2}{\sigma^2}}, \quad \sigma = 0.05. \quad (4.12)$$

¹ Funkce je hladká, má-li na dané množině všechny (parciální) derivace všech řádů.

4.1.2 Okrajové podmínky

Pro obě hranice je předepsaná Neumannova homogenní podmínka

$$\frac{\partial q}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (4.13)$$

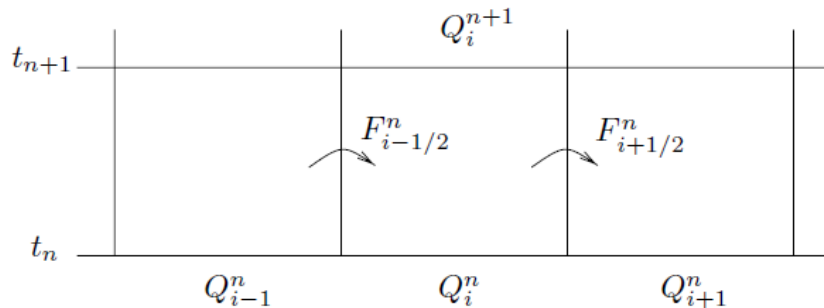
4.2 Metoda konečných objemů

V jedné dimenzi je metoda konečných objemů (finite volume method) založena na rozdělení fyzikálního prostoru na intervaly (konečné objemy), které představují buňky. Nad každou z těchto buněk je aproximován integrál funkce $q(x, t)$, který je v každém časovém kroku aktualizován aproximacemi toků na stěnách buněk.

Označíme-li dle obrázku 4.1 buňku i jako $C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, pak Q_i^n je aproximací střední hodnoty funkce $q(x, t)$ na buňce C_i v čase t_n

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx, \quad (4.14)$$

kde $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ a označuje délku buňky.



Obrázek 4.1 [10]: Časoprostorová síť pro metodu konečných objemů

Z integrální formy zákona zachování (4.2) vyplývá

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t)). \quad (4.15)$$

Následně integrujeme přes časový interval $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$

$$\left[\int_{C_i} q(x, t) dx \right]_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t))) dt,$$

$$\begin{aligned}
& \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} q(x, t_n) dx \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Úpravou a vydělením Δx získáme rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \\
&- \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt \right],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

kteřá představuje exaktní střední hodnotu funkce $q(x, t)$ v následujícím časovém kroku t_{n+1} . Vzhledem k tomu, že nelze nalézt exaktní řešení integrálů na pravé straně (4.17), zavádí se vztah

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \tag{4.18}$$

kde Q_i^{n+1} je aproximace střední hodnoty funkce $q(x, t)$ v následujícím časovém kroku t_{n+1} . Q_i^n je dle (4.14) aproximace střední hodnoty téže funkce v čase t_n , Δt je časový krok pro který platí $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, Δx je délka buňky pro kterou platí již výše zmíněný vztah a nakonec $F_{i\pm 1/2}^n$ jsou aproximace průměrných hodnot toků

$$F_{i\pm 1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i\pm 1/2}, t)) dt. \tag{4.19}$$

Lze-li tento průměrný tok aproximovat pouze hodnotami Q_i^n , jedná se o plně diskrétní metodu. Vzhledem k hyperbolickému přenosu informace konečnou rychlostí, budeme uvažovat, že $F_{i-1/2}^n$ závisí pouze na hodnotách Q_{i-1}^n a Q_i^n [10], tedy

$$F_{i-1/2}^n = \Gamma(Q_{i-1}^n, Q_i^n), \tag{4.20}$$

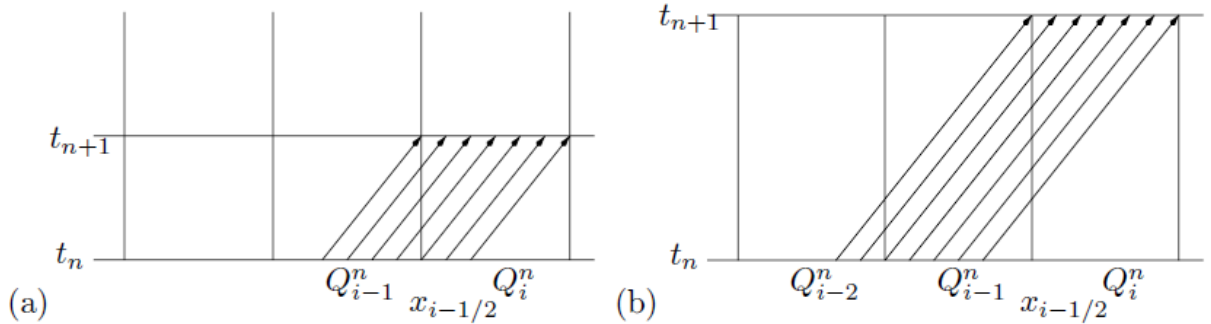
kde Γ je numerická funkce toku. Vztah (4.18) pak zapíšeme ve tvaru

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\Gamma(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - \Gamma(Q_{i-1}^n, Q_i^n)]. \tag{4.21}$$

Jedná se o explicitní metodu s tříbodovým schématem, což znamená že hodnota Q_i^{n+1} závisí na třech hodnotách z předchozí časové hladiny – Q_{i-1}^n , Q_i^n , Q_{i+1}^n [10]. Výpočet numerické funkce toku pro metody různých řádů je probrán v následujících kapitolách.

Každá explicitní metoda s časovým krokováním zachovává stabilitu pouze do určité hodnoty časového kroku Δt . Aby byla stabilita zachována, je nutné splnit tzv. CFL podmínku. Ta říká, že pro explicitní metodu musí být časový krok roven nebo menší než čas potřebný pro přenos informace přes schéma [9].

Uvažujeme-li pro transportní rovnici (4.11) rychlost šíření $\bar{u} > 0$, pak vzdálenost uražená za jeden časový krok Δt je rovna $\bar{u}\Delta t$. Na obrázku 4.2 (a) je zobrazena situace $\bar{u}\Delta t < \Delta x$, kdy informace urazí za jeden časový krok kratší vzdálenost, než je délka buňky. Tok na stěně $x_{i-1/2}$ tak závisí pouze na hodnotě Q_{i-1}^n , což je v souladu s (4.20). Naproti tomu obrázek 4.2 (b) zobrazuje situaci $\bar{u}\Delta t > \Delta x$, kdy delší časový krok dovolí informaci urazit delší vzdálenost, než je délka buňky a tok $F_{i-1/2}^n$ stejně jako hodnota Q_i^{n+1} tedy závisí i na Q_{i-2}^n . To je v rozporu s metodou (4.21) a způsobilo by to její nestabilitu.



Obrázek 4.2 [10]: Transport informace pro $\bar{u}\Delta t < \Delta x$ (a) a $\bar{u}\Delta t > \Delta x$ (b)

Z toho vyplývá, že pro třibodové schéma platí

$$\nu = \left| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (4.22)$$

kde ν je Courantovo číslo vycházející z CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) podmínky, které bylo konkrétně v této práci zvoleno $\nu = 0.1$. Ze vztahu (4.22) pak lze vyjádřit vzorec pro časový krok

$$\Delta t = \nu \frac{\Delta x}{\bar{u}}. \quad (4.23)$$

4.2.1 Schéma Upwind 1. řádu

Vzhledem k tomu, že pro transportní rovnici je charakteristické, že se informace šíří vlnovou charakteristikou, je výhodné použít schéma Upwind, které je zaměřené na směr, odkud očekáváme informaci. Pro skalární transportní rovnici (4.11), kde rychlost \bar{u} může nabývat buď kladné, nebo záporné hodnoty je pak schéma Upwind zaměřeno na hodnoty nalevo, nebo napravo [10]. V této práci je rychlost zvolena $\bar{u} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

a pro výpočet Q_i^{n+1} tedy zvolíme zpětnou prostorovou diferenci a určující budou hodnoty nalevo.

Z obrázku 4.2 (a) je patrné, že pro konstantní rychlost \bar{u} závisí tok na stěně $x_{i-1/2}$ pouze na hodnotě Q_{i-1}^n . Z toho se nabízí definovat tok jako

$$F_{i-1/2}^n = \bar{u}Q_{i-1}^n, \quad (4.24)$$

což vede na schéma Upwind 1. řádu

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n). \quad (4.25)$$

To lze také zapsat ve tvaru

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \bar{u} \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} \right) = 0, \quad (4.26)$$

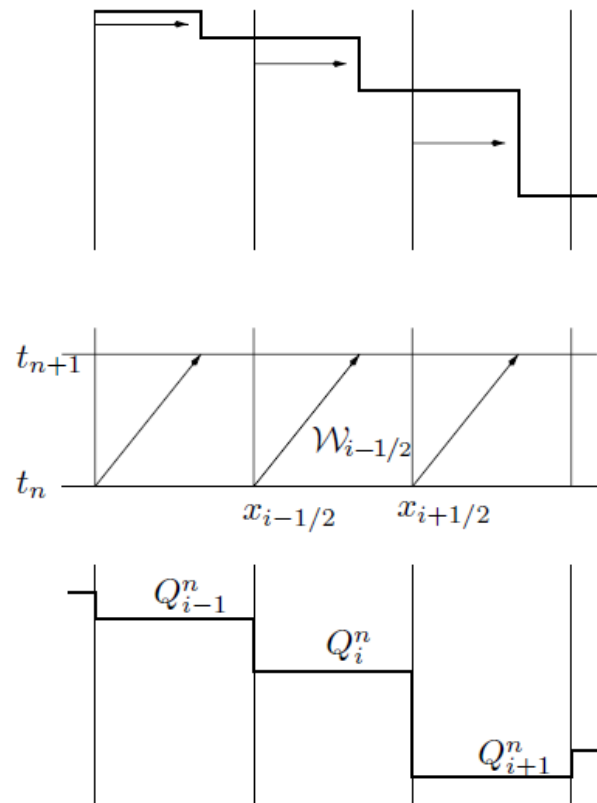
kde je patrné, že derivace q_x je nahrazena jednostrannou aproximací.

Jednou z možných interpretací schématu Upwind reprezentuje obrázek 4.3. Hodnota Q_i^n zde představuje průměrnou hodnotu funkce q na buňce C_i , kterou má každý bod této buňky. Tím vzniká po částech konstantní funkce, která má v čase t_n na buňce C_i hodnotu Q_i^n . S postupujícím časem se tato funkce posouvá směrem doprava rychlostí \bar{u} a na vzdálenosti $\bar{u}\Delta t$ nabývá z hodnoty Q_{i-1}^n hodnotu Q_i^n . Na konci časového kroku dochází k napočítání hodnoty Q_i^{n+1} , která je průměrem po částech konstantní funkce zobrazené v horní části obrázku 4.3 a platí pro ni vztah

$$Q_i^{n+1} = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}Q_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}\right)Q_i^n, \quad (4.27)$$

který je ekvivalentní vztahu (4.25) [10].

Další z interpretací nahlíží na změnu hodnot jako na důsledek šíření vlny. Skok $W_{i-1/2} \equiv Q_i^n - Q_{i-1}^n$ lze interpretovat jako vlnu, která se šíří přes buňky rychlostí \bar{u} a při vstupu do buňky C_i pozmění hodnotu funkce q v každém bodě této buňky o



Obrázek 4.3 [10]: Interpretace schématu Upwind, jako šíření vlny

$-W_{i-1/2}$. Za jeden časový krok urazí vlna $\bar{u}\Delta t/\Delta x$ buňky. Průměrná hodnota buňky je pak touto pozměněnou částí ovlivněna a platí

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(-W_{i-1/2}), \quad (4.28)$$

což je opět ekvivalentní vztahu (4.25) [10].

4.2.2 Schéma Upwind 2. řádu v prostoru

V kapitole 4.2.1 byla pro schéma Upwind 1. řádu uvažována konstantní hodnota Q_i^n po celé délce buňky C_i . Pro schéma 2. řádu je uvažována tato hodnota jako proměnná, která má po celé délce buňky lineární charakter. K výpočtu toků na stěnách buňky je pak používána lineární rekonstrukce doplněná limitrem [9].

Po částech konstantní funkce, která u schématu 1. řádu pokrývá kontrolní objemy buněk je zde nahrazena funkcí po částech lineární. Na stěně buňky C_i jsou metodou lineární interpolace napočítány hodnoty \widetilde{Q}_L a \widetilde{Q}_R , pro které platí

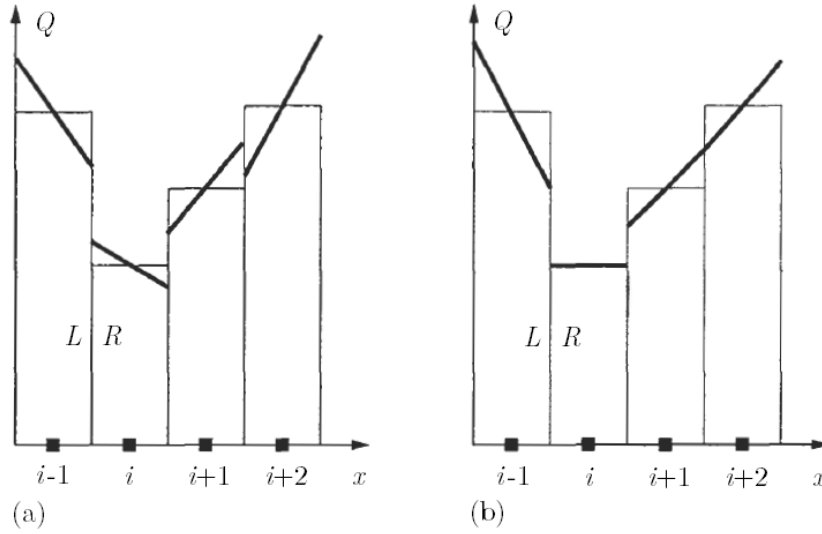
$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_L &= Q_{i-1}^n + \psi_{i-1} \nabla Q_{i-1}^n \frac{\Delta x}{2}, \\ \widetilde{Q}_R &= Q_i^n - \psi_i \nabla Q_i^n \frac{\Delta x}{2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde ∇Q_i^n je gradient funkce Q_i^n , pro který v jednodimenzionálním prostoru platí $\nabla Q_i^n = \partial Q_i^n / \partial x$ a je nahrazen centrální diferencí

$$q'(x_i) \approx \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (4.30)$$

ψ je Barth – Jespersenův limiter. Je patrné, že lineární rekonstrukce odpovídá Taylorovu rozvoji, neboť rovnice (4.29) jsou vlastně rovnice tečen.

Limiter zajišťuje, aby v oblastech velkých gradientů nedocházelo k oscilacím, tedy aby maximum toku bylo nerostoucí, minimum neklesající a nedocházelo k vzniku nových lokálních extrémů. Toho je dosaženo omezením gradientu používaného v lineární interpolaci k určení toku na stěně buňky. Jak je znázorněno na obrázku 4.4, v oblastech velkých nespojitostí nabývá limiter nulové hodnoty a zcela tak omezí vliv gradientu [9].



Obrázek 4.4 [9]: Porovnání přímé (a) a limitované (b) interpolace.

Barth – Jespersenův limiter, použitý v této práci, se napočítává dle následujícího algoritmu

$$\psi_i = \min_j \begin{cases} \min \left(1, \frac{Q_{max}^n - Q_{i-1}^n}{\Delta_2} \right), & \text{pokud } \Delta_2 > 0, \\ \min \left(1, \frac{Q_{min}^n - Q_{i-1}^n}{\Delta_2} \right), & \text{pokud } \Delta_2 < 0, \\ 1, & \text{pokud } \Delta_2 = 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \nabla Q_i^n \frac{\Delta x}{2}, \\ Q_{min}^n &= \min(Q_i^n, \min_j Q_j^n), \\ Q_{max}^n &= \max(Q_i^n, \max_j Q_j^n). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Index j v rovnicích (4.31) a (4.32) označuje buňky přímo sousedící s buňkou C_i , tedy buňky C_{i-1} a C_{i+1} .

Dosadíme-li lineárně interpolované hodnoty analogicky, jako v kapitole 4.2.1, získáme

$$F_{i-1/2}^n = \bar{u} \widetilde{Q}_L. \quad (4.33)$$

4.2.3 Kroková metoda Runge – Kutta

Schéma představené v kapitole 4.2.2 má 2. řád přesnosti v prostoru, nikoliv však v čase. K dosažení 2. řádu přesnosti i v čase je vhodné toto schéma doplnit krokovou metodou Runge – Kutta. Princip této metody je založený v postupném aktualizování řešení v několika krocích (úrovních), v této práci konkrétně ve třech. Koncept této metody znázorňují vztahy

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n, \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} + \alpha_k R_i^{(k-1)}, \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(3)}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

kde $R_i^{(k-1)}$ představuje reziduum pro které platí

$$R_i^{(k-1)} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{(k-1)} - F_{i-1/2}^{(k-1)}). \tag{4.35}$$

Výpočet toků zde probíhá identicky, jako v kapitole 4.2.2. Indexy k a koeficienty α_k jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Indexy a koeficienty pro tříkrokovou metodu Runge – Kutta

k [1]	α_k [1]
1	0.5
2	0.5
3	1

4.2.4 Metoda Lax – Wendroff

Metoda Lax – Wendroff pro transportní rovnici (4.11) je založena na Taylorově rozvoji

$$q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) + \Delta t q_t(x, t_n) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 q_{tt}(x, t_n) + \dots \tag{4.36}$$

Z transportní rovnice vyplývá $q_t = -\bar{u}q_x$, následnou derivací dostáváme $q_{tt} = -\bar{u}q_{xt}$ a při použití $q_{xt} = q_{tx} = (-\bar{u}q_x)_x$ získáme $q_{tt} = (\bar{u})^2 q_{xx}$. Doplněním těchto výrazů do (4.36) vzniká

$$q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) - \Delta t \bar{u} q_x(x, t_n) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (\bar{u})^2 q_{xx}(x, t_n) + \dots \tag{4.37}$$

Nahradíme-li derivace centrálními diferencemi a vezmeme-li v potaz pouze první tři členy Taylorova rozvoje, dostaneme metodu Lax – Wendroff

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{2\Delta x}(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}\right)^2(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n), \quad (4.38)$$

založenou na interpretaci metody konečných diferencí, kde Q_i^n je bráno jako bodová hodnota. Nicméně (4.38) lze zapsat ve formě (4.18), tedy jako interpretaci metody konečných objemů a to vztahem

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}\bar{u}(Q_{i-1}^n + Q_i^n) - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}\right)^2(Q_i^n - Q_{i-1}^n). \quad (4.39)$$

Výše odvozená metoda Lax – Wendroff je 2. řádu jak v prostoru, tak i čase.

4.3 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí je principálně podobná metodě konečných objemů, která z ní vychází. Budeme opět uvažovat transportní rovnici (4.11) s počáteční podmínkou (4.12) a okrajovou podmínkou (4.13). Na rozdíl od metody konečných objemů, kde aproximací je po částech spojitá funkce, v metodě konečných diferencí je aproximací funkce bodová. Tyto body jsou od sebe vzdáleny Δx a rozdělují fyzikální prostor na intervaly, tvořící síť znázorněnou na obrázku 4.5. Z Taylorova rozvoje v čase funkce $q(x, t)$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t q'(t) \quad (4.40)$$

platí

$$q'(t) \approx \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \quad (4.41)$$

Pak můžeme nahradit $\partial q/\partial t$ aproximací

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_i^n \approx \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (4.42)$$

a analogicky

$$\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_i^n \approx \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (4.43)$$

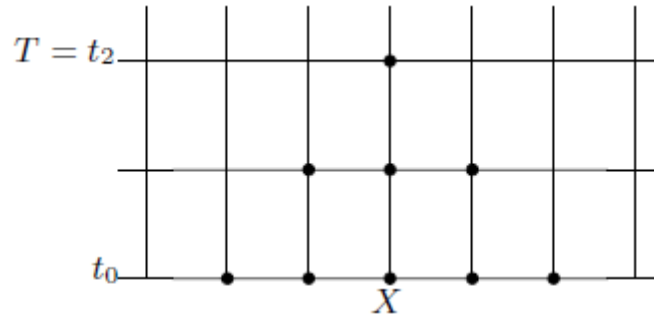
Dosazením do transportní rovnice (4.11) získáme

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \bar{u} \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.44)$$

a následnou úpravou

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n). \quad (4.45)$$

Tento vztah je ekvivalentní vztahu pro Upwind 1. řádu metody konečných objemů a musí stejně jako vztahy v kapitole 4.2 splňovat podmínku CFL.

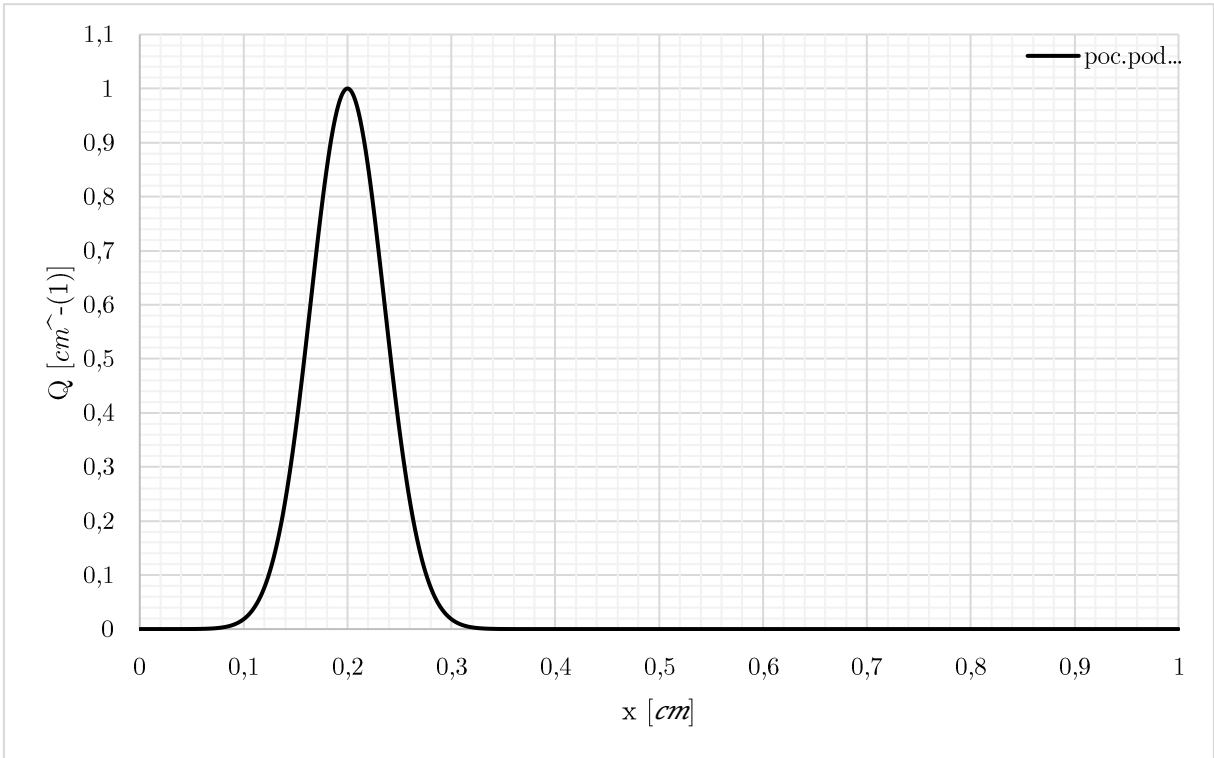


Obrázek 4.5 [9]: Časoprostorová síť pro tříbodovou metodu konečných diferencí

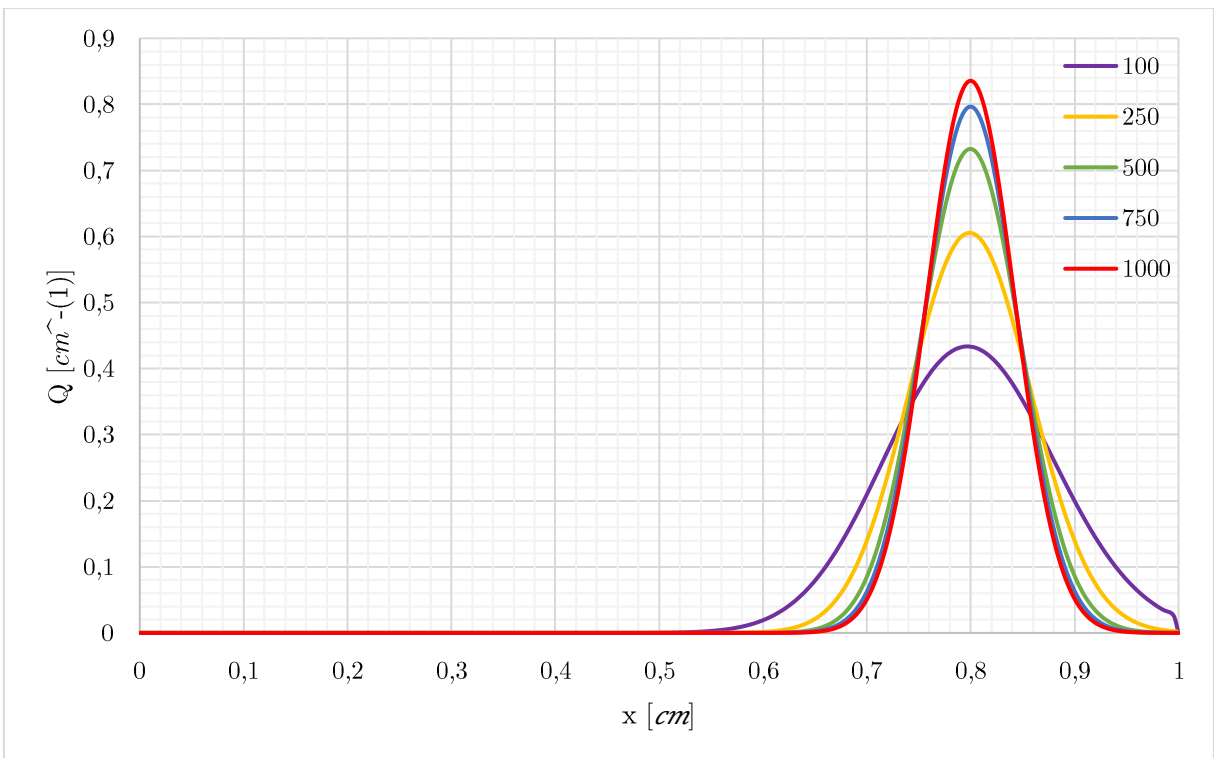
4.4 Grafické porovnání výsledků

Následující grafy porovnávají řešení transportní rovnice (4.11) s počáteční podmínkou (4.12) a okrajovou podmínkou (4.13) pro rychlost $\bar{u} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, Courantovo číslo $\nu = 0.1$ a celkový fyzikální čas $t = 0.6 \text{ s}$. Testován byl vliv hustoty sítě (100 buněk, 250 buněk, 500 buněk, 750 buněk, 1000 buněk) a použité metody.

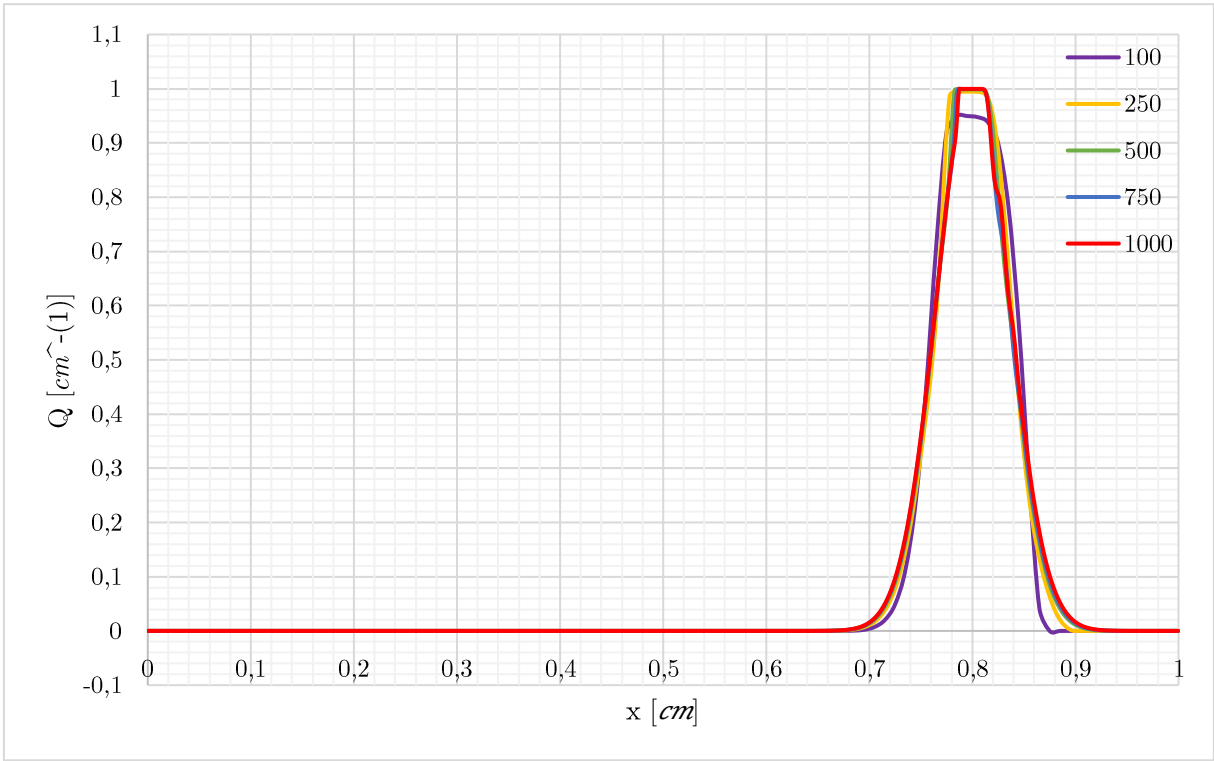
Schéma Upwind 1. řádu pro diskretizaci metodou konečných objemů a metodou konečných diferencí vykazuje zanedbatelné rozdíly, způsobené pouze rozdílným způsobem diskretizace, a proto je zde uvedeno pouze pro diskretizaci metodou konečných diferencí.



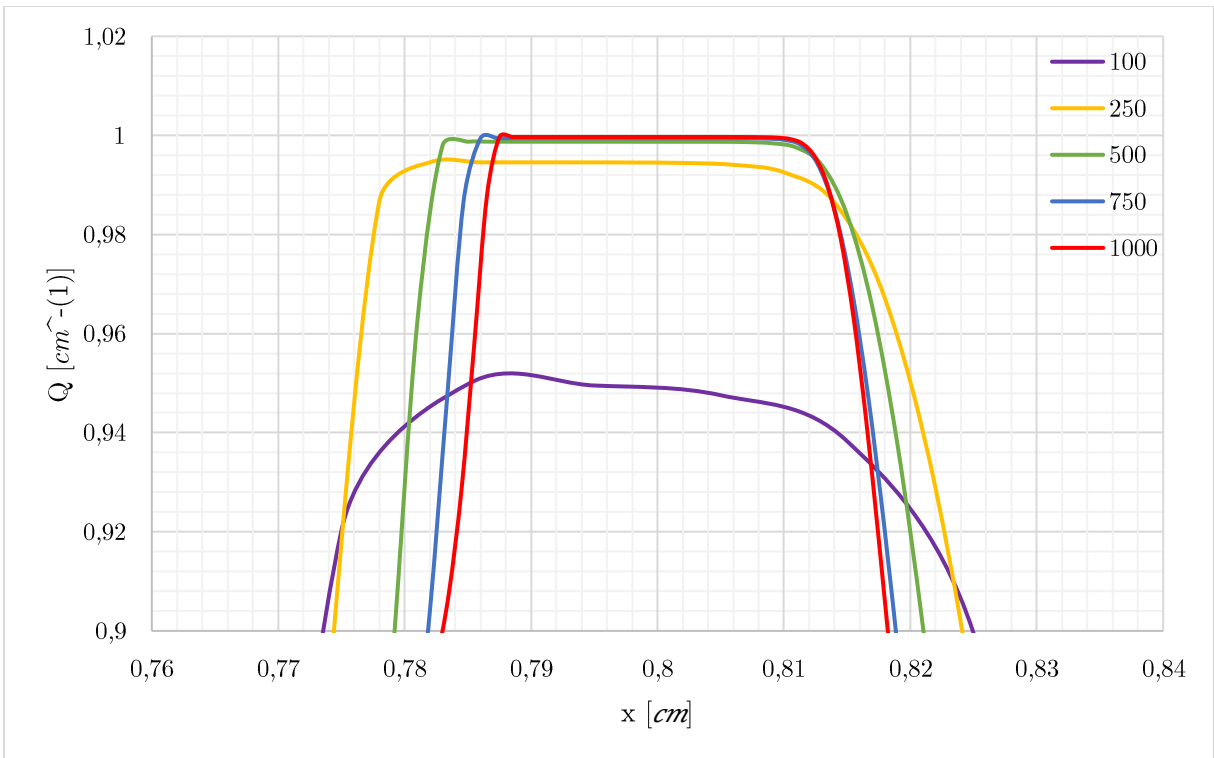
Graf 4.1: Počáteční podmínka



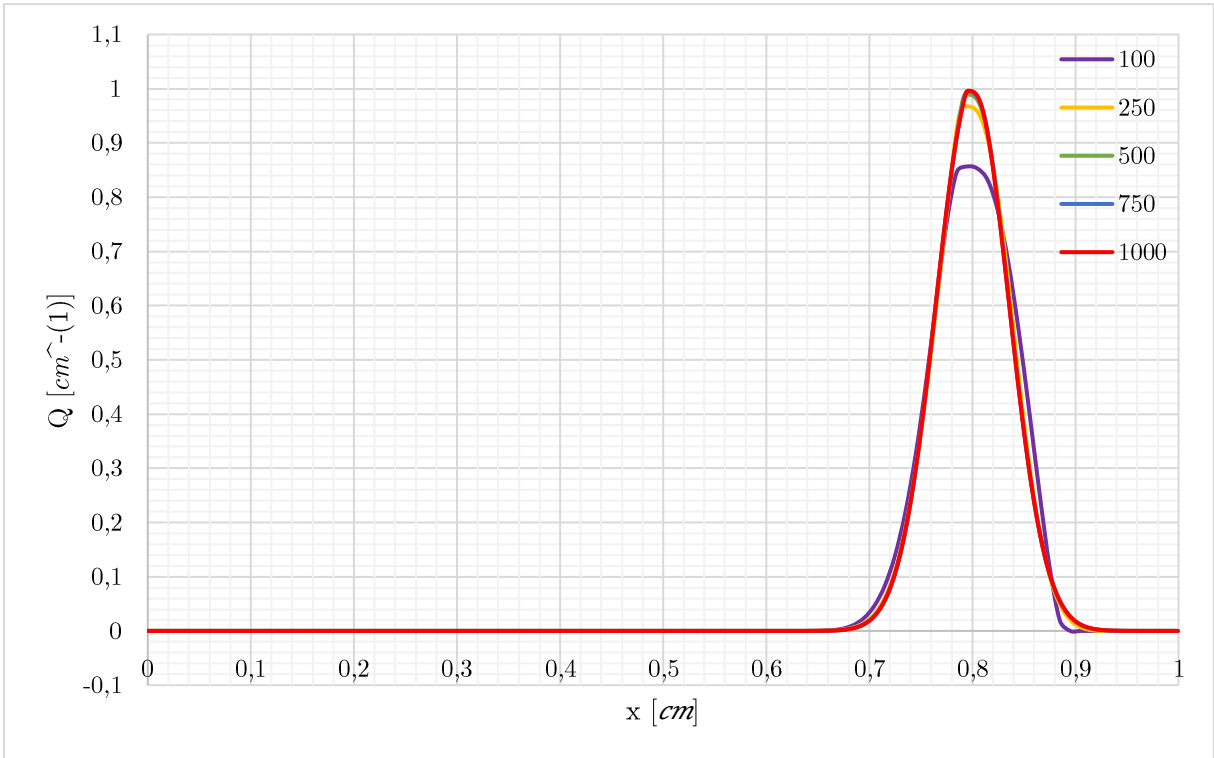
Graf 4.2: Schéma Upwind 1. řádu



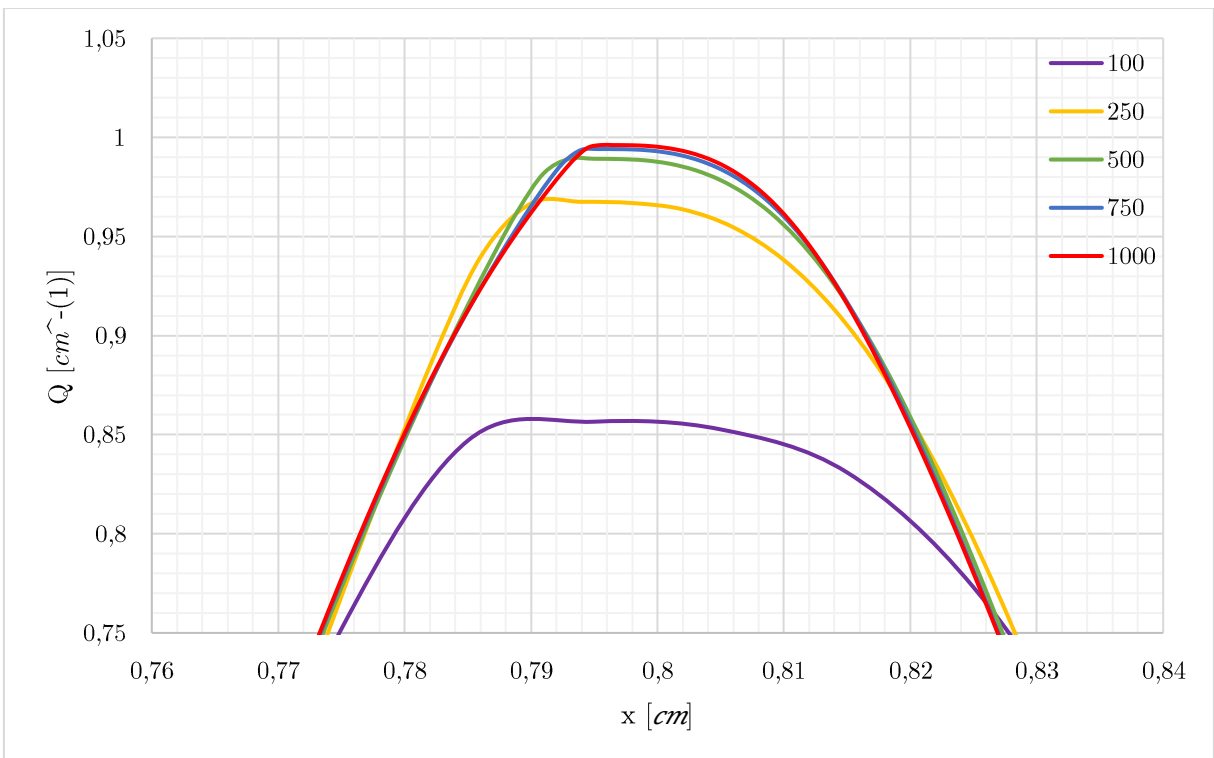
Graf 4.3: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru



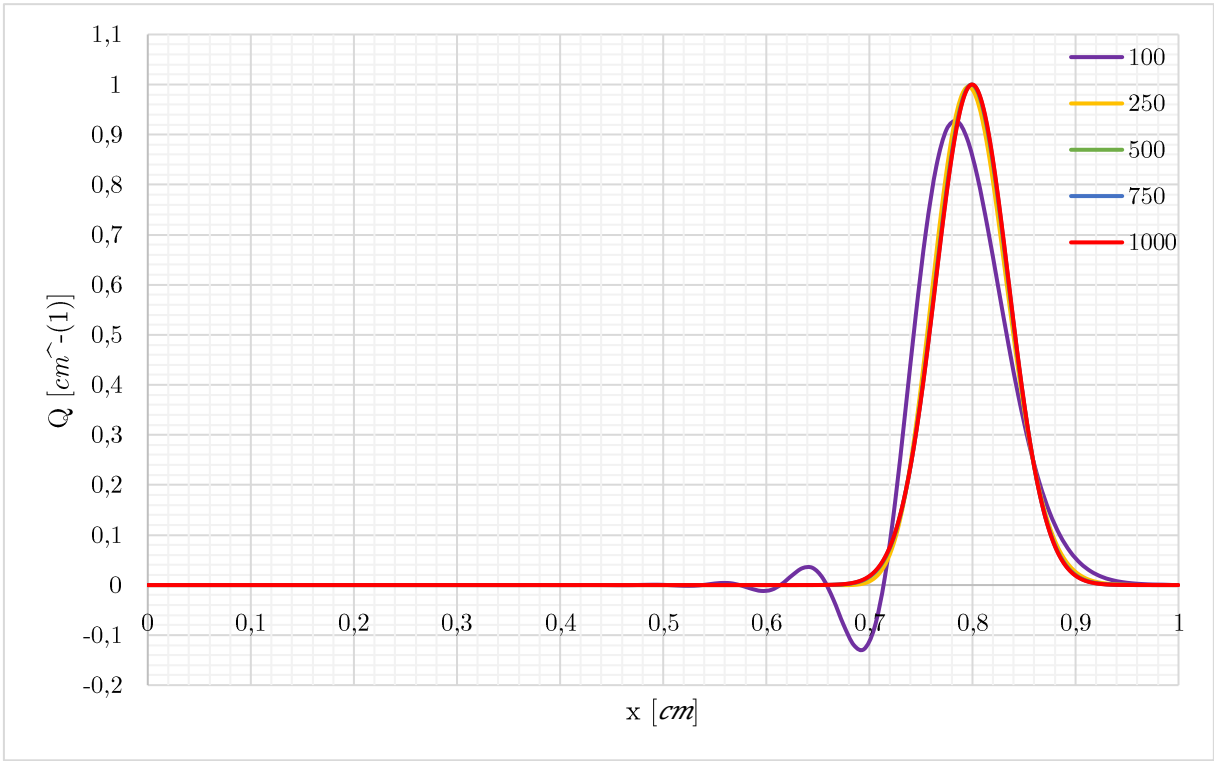
Graf 4.4: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru (detail)



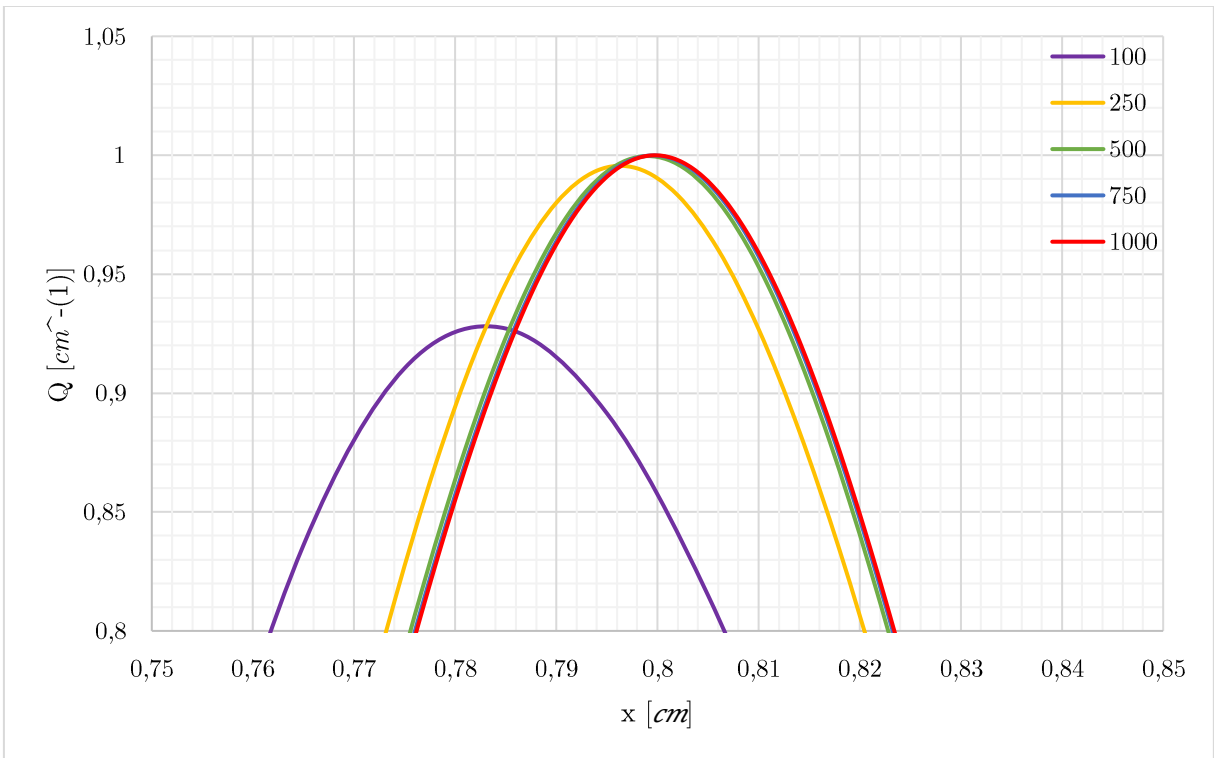
Graf 4.5: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta



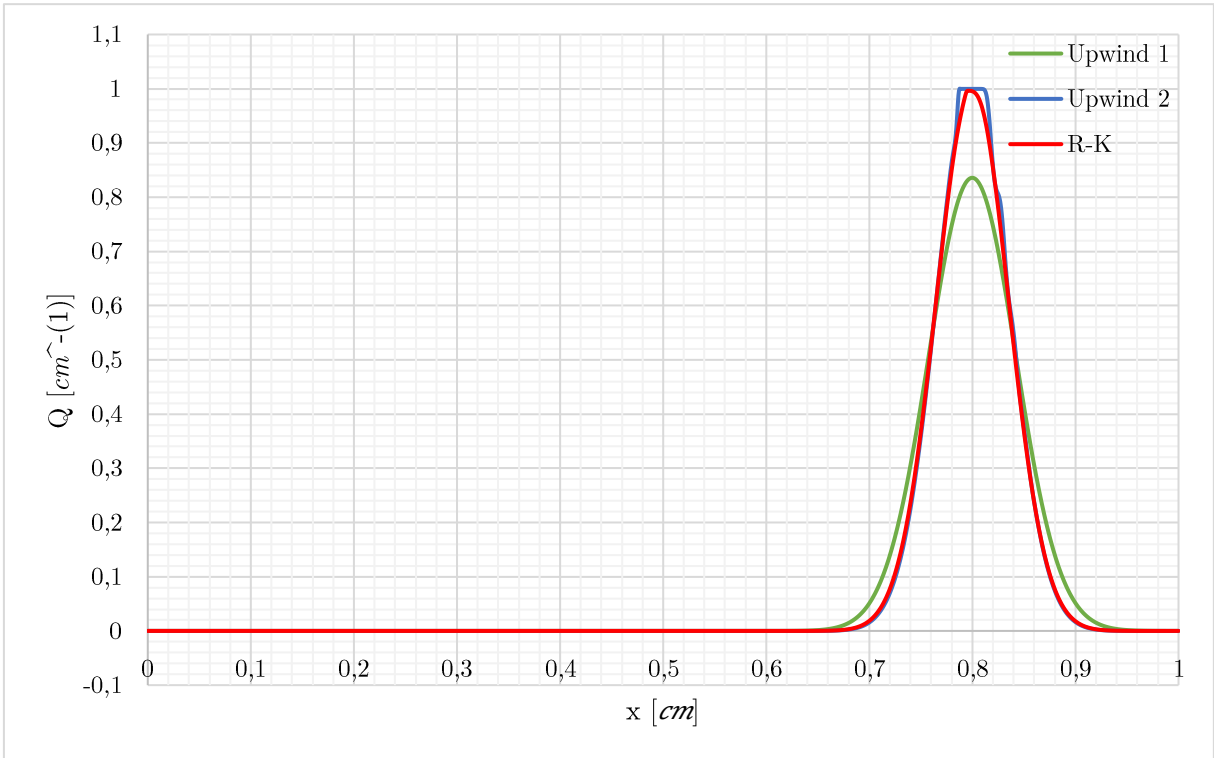
Graf 4.6: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta (detail)



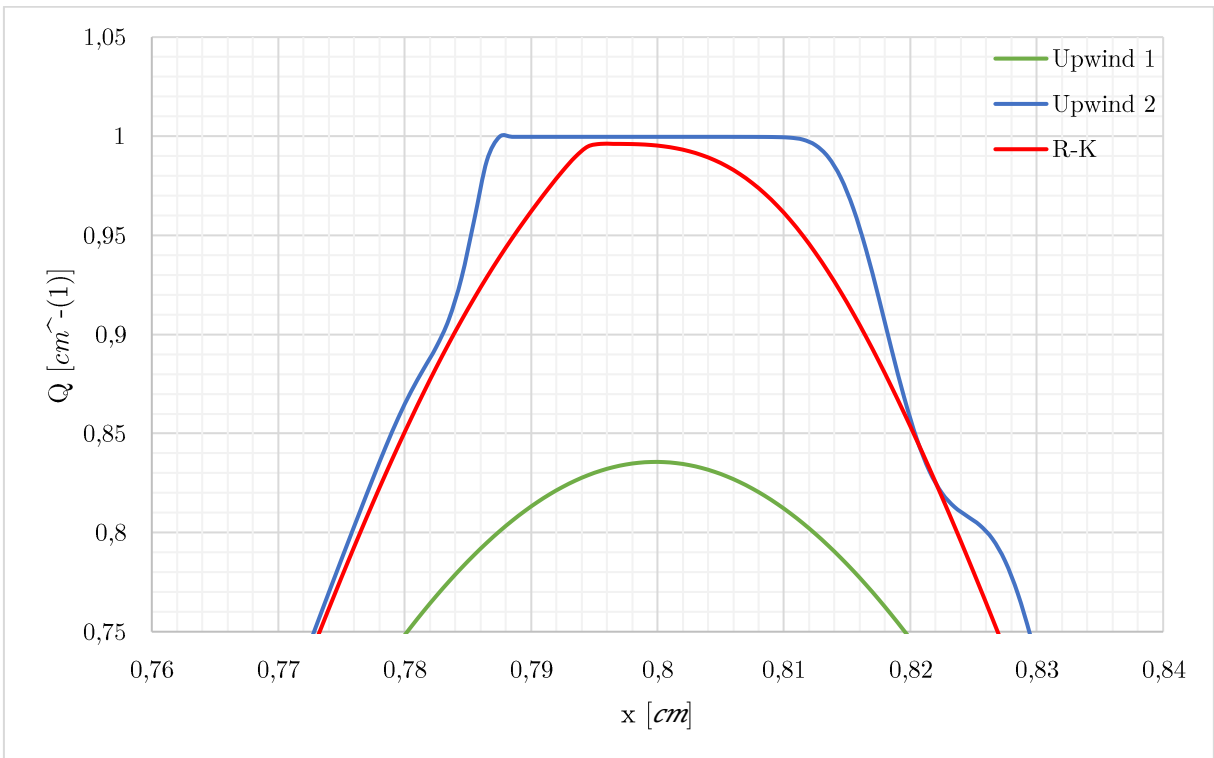
Graf 4.7: Metoda Lax – Wendroff



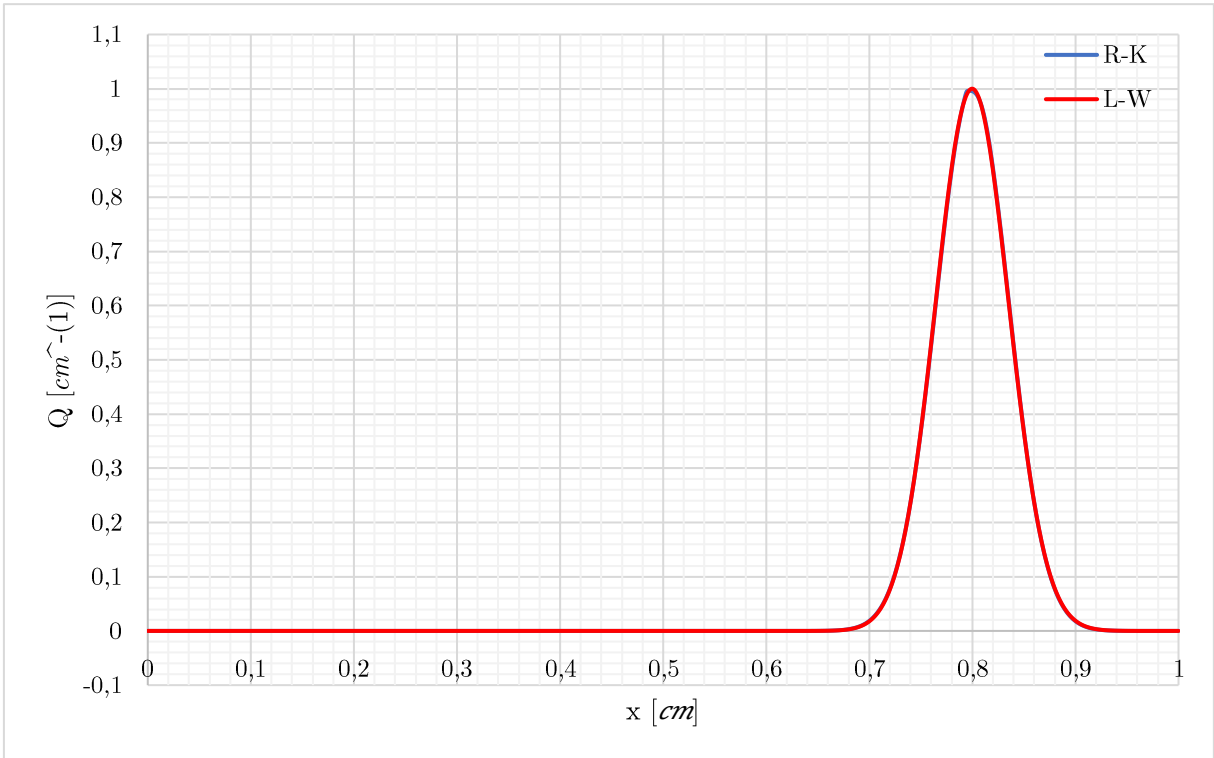
Graf 4.8: Metoda Lax – Wendroff (detail)



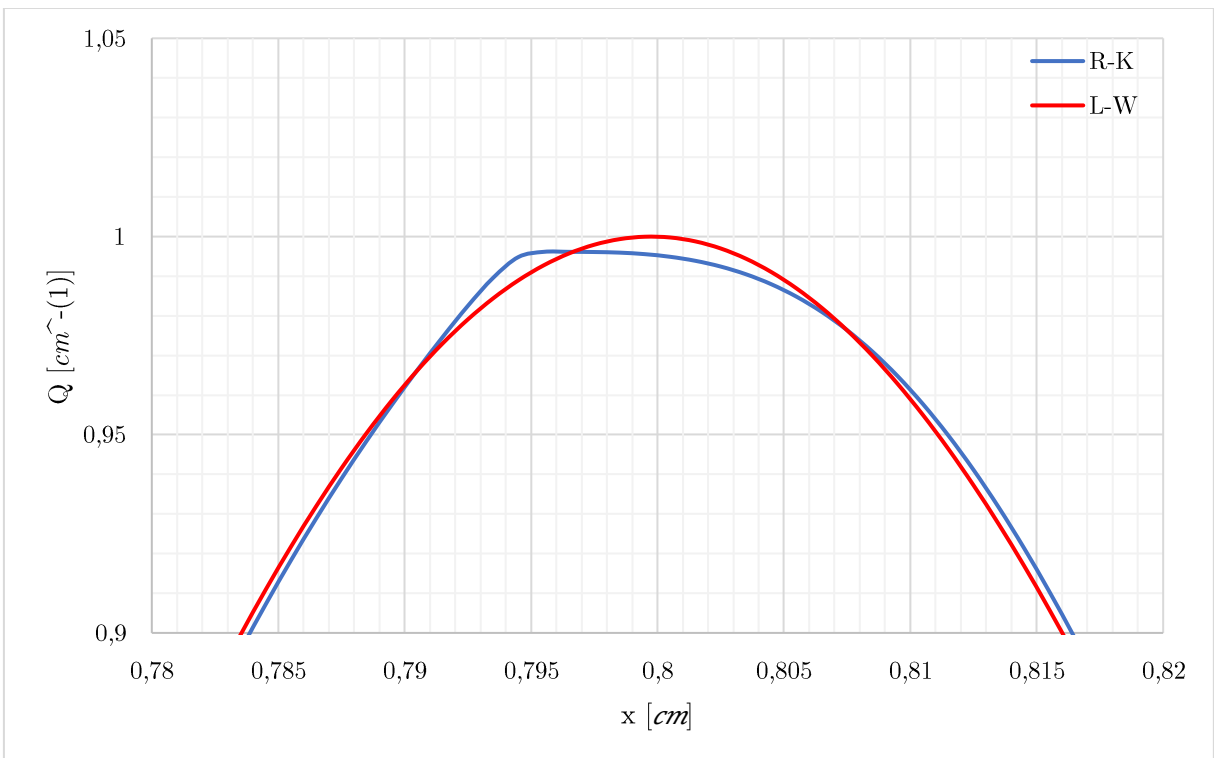
Graf 4.9: Schéma Upwind 1. řádu, Upwind 2. řádu v prostoru, Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta



Graf 4.10: Schéma Upwind 1. řádu, Upwind 2. řádu v prostoru, Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta (detail)



Graf 4.11: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta, metoda Lax – Wendroff



Graf 4.12: Schéma Upwind 2. řádu v prostoru + metoda Runge – Kutta, metoda Lax – Wendroff (detail)

4.5 Interpretace výsledků

Vzhledem k faktu, že je z počáteční podmínky, zobrazené na grafu 4.1, známá ideální hodnota, kterou by mělo řešení ve svém maximu nabývat, nabízí se porovnat jednotlivá schémata a metody na základě jejich schopnosti dosáhnout tohoto maxima – konkrétně hodnoty 1 v bodě $x = 0.8$. Tabulka 4.2 vyjadřuje v procentech s přesností na dvě desetinná místa odchylku od maximální ideální hodnoty v bodě $x = 0.8$.

Tabulka 4.2: Odchylky od ideální hodnoty

schéma/metoda	100 buněk	250 buněk	500 buněk	750 buněk	1000 buněk
Upwind 1. řád	56.75 %	39.50 %	26.77 %	20.35 %	16.44 %
Upwind 2. řád v prostoru	5.15 %	0.55 %	0.13 %	0.06 %	0.03 %
Runge – Kutta	14.54 %	3.47 %	1.25 %	0.71 %	0.48 %
Lax – Wendroff	14.68 %	1.12 %	0.11 %	0.03 %	0.02 %

Z tabulky 4.2 lze vyčíst, že s rostoucí hustotou sítě se očekávaně zlepšuje přesnost řešení. Jak je ovšem patrné z grafu 4.2, u schématu Upwind 1. řádu se vyskytují výrazné disipace a ani na husté síti nebylo dosaženo uspokojivých výsledků. Z grafu 4.9 a 4.10 vyplývá, že pro schéma Upwind má výrazný vliv hodnota řádu přesnosti. Upwind 2. řádu přesnosti v prostoru dosahuje odchylky v řádu jednotek procent již při velmi nízké hustotě sítě, avšak z grafu 4.3 a 4.4 je patrná nevýhoda tohoto schématu – nepřesný průběh řešení. Z tohoto důvodu se jako nejvhodnější ukázalo schéma Upwind 2. řádu v prostoru doplněné metodou Runge – Kutta a metoda Lax – Wandroff. Graf 4.5 a především 4.6 demonstruje, že doplnění metody Runge – Kutta výrazně vyhladilo průběh řešení. Na grafu 4.11 je vidět, že toto řešení je téměř identické s metodou Lax – Wendroff, pouze v okolí maxima je z grafu 4.12 patrné, že metoda Lax – Wendroff má ideálnější průběh řešení a dosahuje vůbec nejnižší odchylky – 0.2 %. Navíc je na grafu 4.8 vidět, že i na hrubších sítích dosahuje dobrých výsledků a hladkého řešení. Nevýhodou této metody je její obtížné rozšíření na hodnoty vyšších řádů a vícedimenzionální problémy, kde se stává problematické získávání derivací Taylorova polynomu [10]. Jak je vidět na grafu 4.7, další nevýhodou je výskyt oscilací na hrubých sítích.

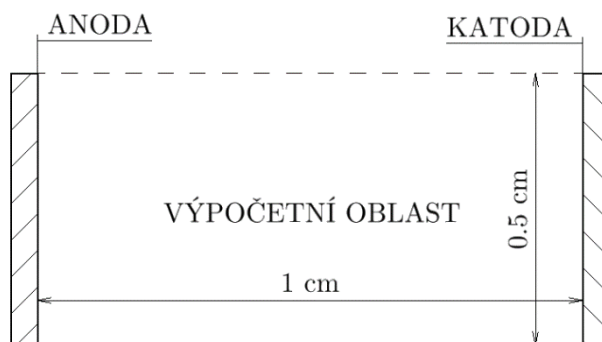
5 Numerické experimenty

Tato kapitola obsahuje porovnání a vyhodnocení numerických experimentů, provedených na software dodaném Ústavem technické matematiky FS ČVUT. Objektem těchto experimentů bylo 2D šíření elektrického výboje – streameru v závislosti na rozdílných parametrech. Tyto parametry jsou následující:

- fyzikální podmínky: elektrické pozadí/fotoionizace
- řád numerické metody: 1./2.
- geometrie sítě: trojúhelníková/čtyřúhelníková
- maximální úroveň dělení buněk: 2/3/4/5

Pro experiment bez fotoionizace byl zvolen celkový fyzikální čas $5.25 \cdot 10^{-8}$ s, při uvažování fotoionizace pak $10.25 \cdot 10^{-8}$ s. Výsledná data byla zpracována v programu ParaView. Vodorovné osy grafů udávají vzdálenost x v cm , svislé hustotu elektronů n_e v cm^{-3} .

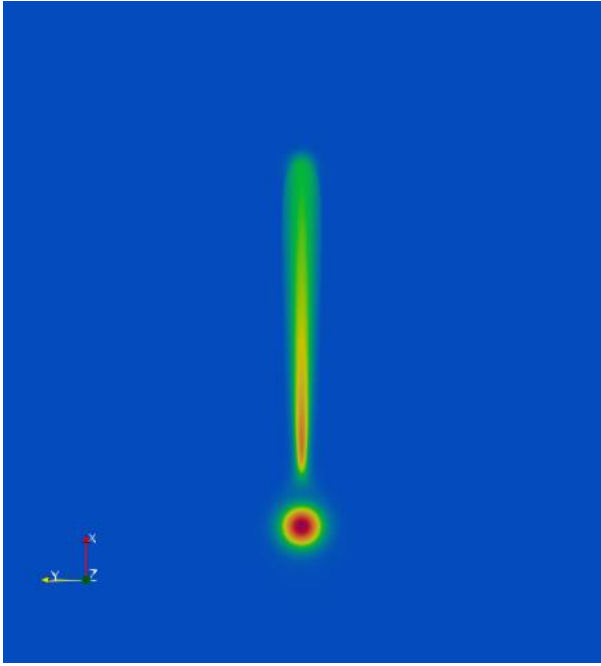
Výpočet probíhal na výpočetní oblasti zobrazené na obrázku 5.1. Základní trojúhelníková síť byla pokryta 4 700 buňkami, čtyřúhelníková 5 000 buňkami. Tato oblast o délce 1 cm byla ohraničena zleva anodou a zprava katodou. Na šířku byla oblast ohraničena tzv. umělými hranicemi ve vzdálenosti 0.5 cm , což je vzdálenost, která by měla být dostatečná na to, aby neovlivňovala výpočet.



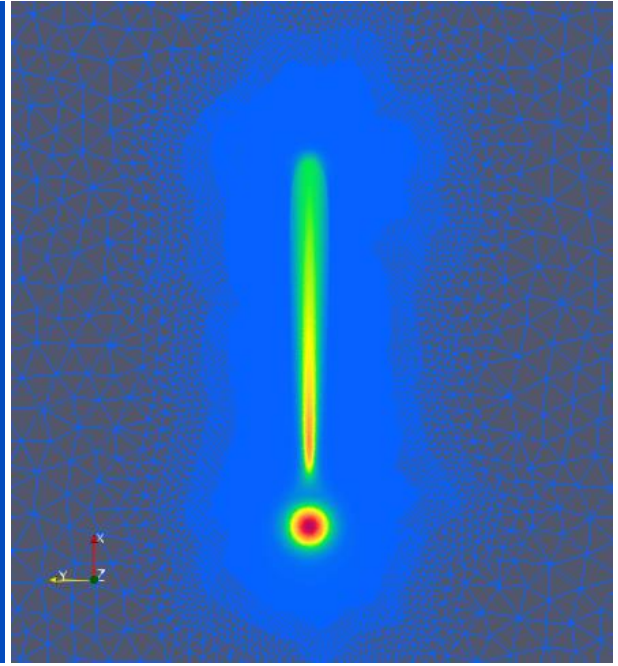
Obrázek 5.1: Výpočetní oblast

Obrázek 5.2 zobrazuje ukázkový případ šíření streameru. Jedná se konkrétně o metodu 2. řádu na trojúhelníkové síti s maximálním dělením buněk 5. úrovně a s vlivem fotoionizace. Na obrázku 5.3 je vidět znatelné zhuštění výpočetní sítě v oblasti šíření elektrického výboje. Pro některé parametry může nastat situace, kdy výboj opustí výpočetní oblast a dojde tak ke zhroucení výpočtu. Tuto situaci zobrazuje obrázek 5.4. Parametry jsou zde téměř totožné, jako u obrázků 5.2, 5.3., nicméně z obrázku 5.5 je patrné, že maximální úroveň dělení buněk je v tomto případě podstatně nižší, konkrétně se jedná pouze o 2. úroveň.²

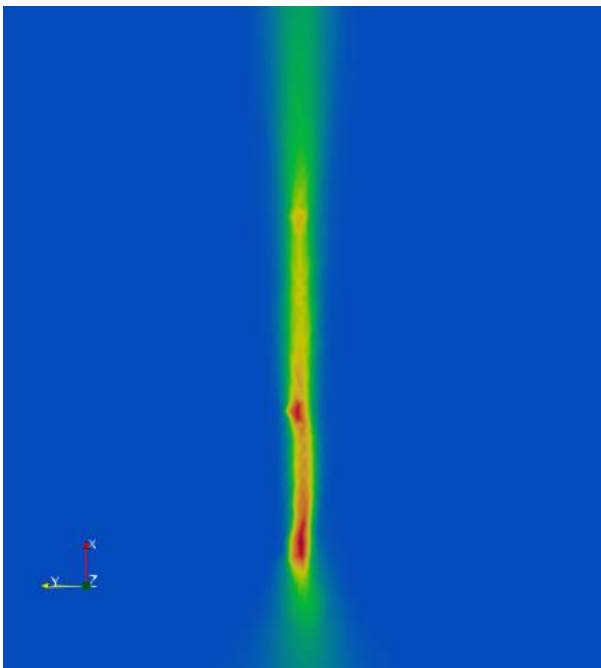
² Obrázky 5.2–5.5 jsou otočeny o 90° proti směru hodinových ručiček.



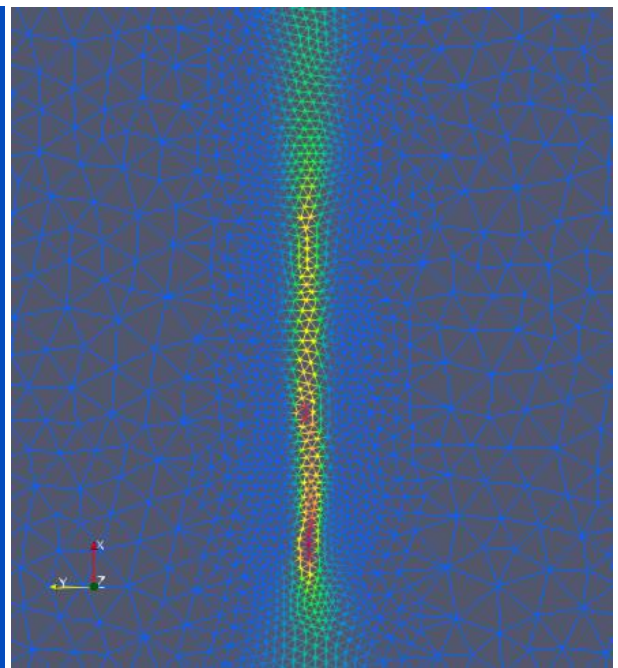
Obrázek 5.2: Úspěšný výpočet



Obrázek 5.3: Jemná výpočetní síť

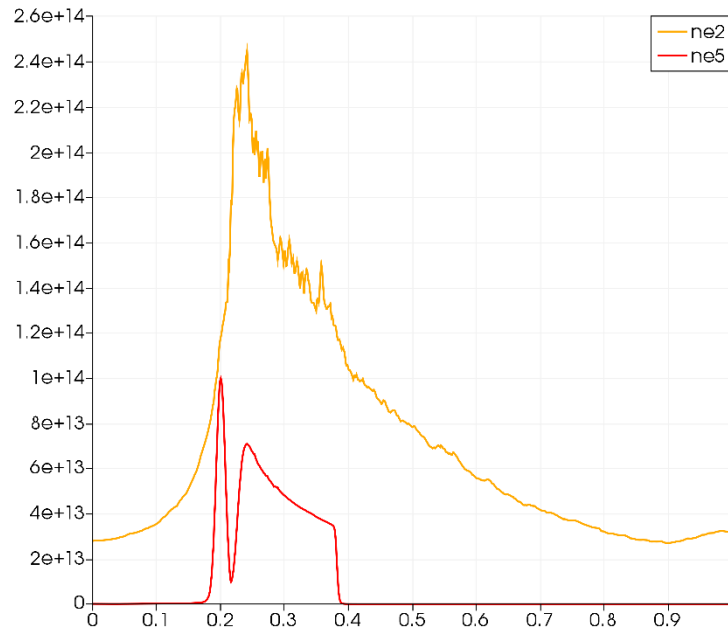


Obrázek 5.4: Neúspěšný výpočet



Obrázek 5.5: Hrubá výpočetní síť

Graf 5.1 znázorňuje průběh hustoty elektronů n_e podél osy streameru pro dva výše uvedené případy. Jak již bylo zmíněno, je na něm dobře patrné, že výboj zobrazený na obrázcích 5.3 a 5.4 opustil výpočetní oblast, došlo k zhroucení výpočtu a hodnota hustoty elektronů nabývá zcela rozdílných hodnot.

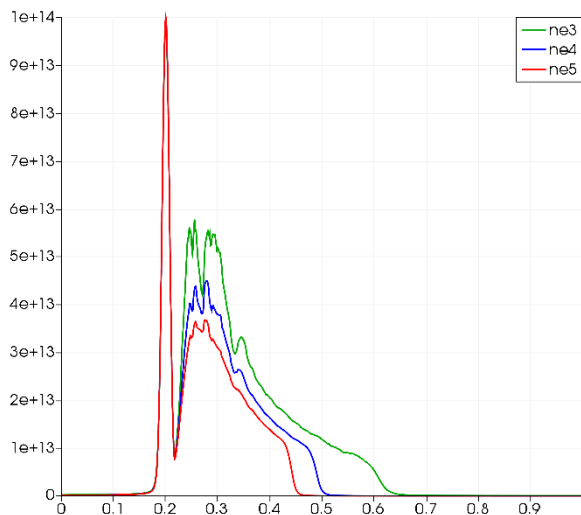


Graf 5.1: Porovnání úspěšného a neúspěšného výpočtu

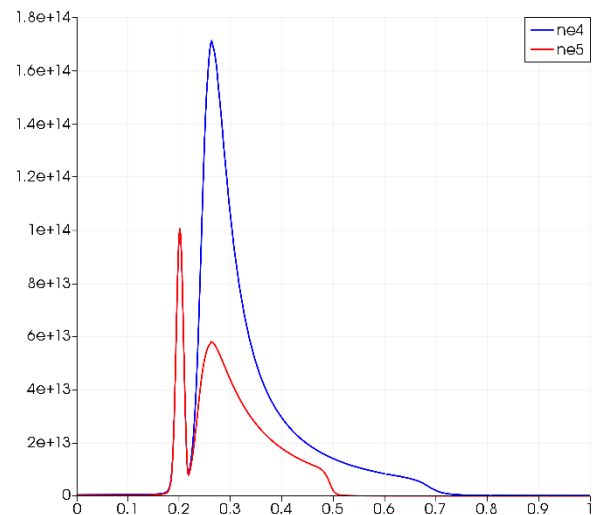
V následujících kapitolách nejsou tyto případy, kdy dojde ke zhroucení výpočtu, zahrnuty a obsahují pouze korektně proběhlé výpočty.

5.1 Šíření výboje bez fotoionizace

5.1.1 Metoda 1. řádu



Graf 5.2: Řešení na trojúhelníkové síti

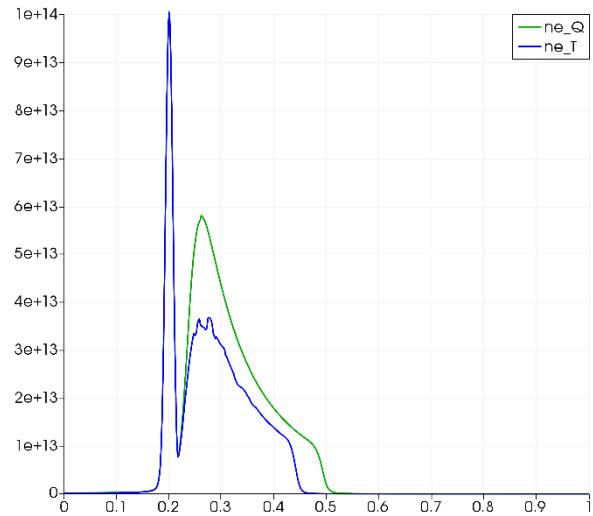


Graf 5.3: Řešení na čtyřúhelníkové síti

Z porovnání řešení na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti vyplývá, že pro tyto parametry řešení výrazně lépe konvergují na trojúhelníkové síti. Zároveň je z grafu 5.2 patrné, že na trojúhelníkové síti proběhly úspěšně i výpočty s nižšími úrovněmi dělení

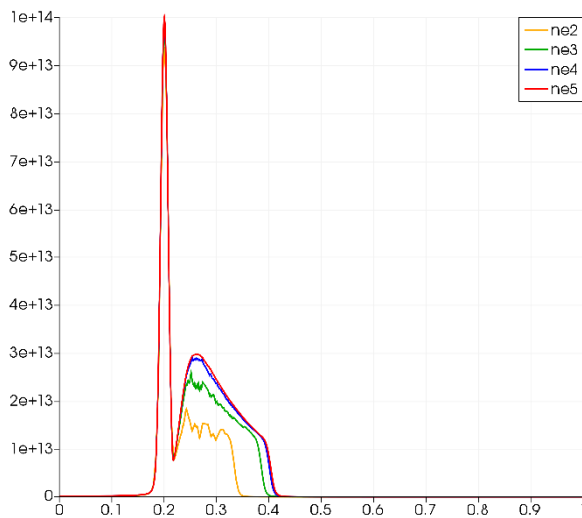
buněk, avšak tato řešení obsahují výrazné oscilace hustoty elektronů. Naproti tomu, na grafu 5.3 je vidět, že výhodou čtyřúhelníkové sítě je hladký průběh řešení bez oscilací.

Z porovnání řešení na grafu 5.4 je patrná hladkost řešení na čtyřúhelníkové síti. Naproti tomu, na trojúhelníkové síti je šíření streameru lépe zachyceno již na hrubší síti. Společný jev pro řešení na obou sítích je zpomalování šíření streameru a snižování hustoty elektronů se zjemňováním sítě. Vzhledem k lepší konvergenci se jeví lepší zvolit síť trojúhelníkovou.

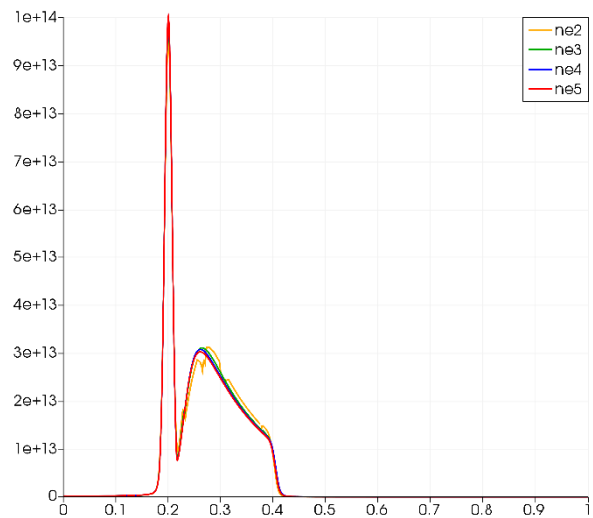


Graf 5.4: Porovnání řešení na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti

5.1.2 Metoda 2. řádu



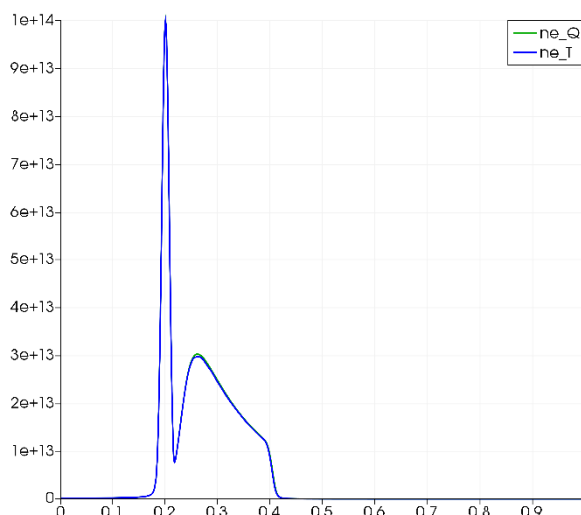
Graf 5.5: Řešení na trojúhelníkové síti



Graf 5.6: Řešení na čtyřúhelníkové síti

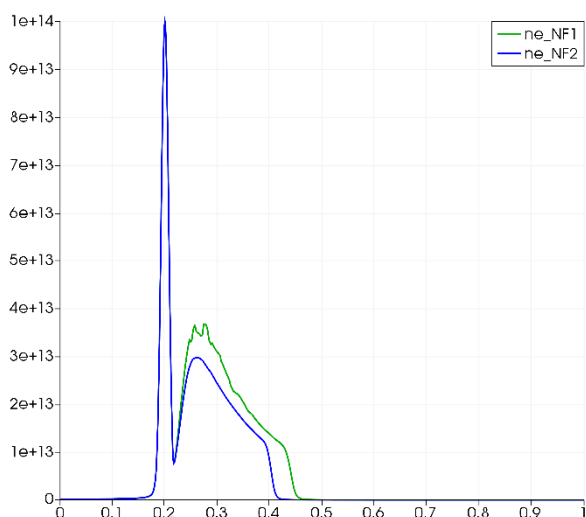
Na grafech 5.5 a 5.6 je vidět, že při použití metody vyššího řádu dochází k výrazně lepší konvergenci, zvláště na čtyřúhelníkové síti, kde rozdíly řešení na sítích s maximálním dělením buněk třetí a páté úrovně jsou zanedbatelné.

Z grafu 5.7 je patrné, že při použití 5. úrovně dělení buněk není mezi řešením na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti téměř žádný rozdíl. Obě řešení jsou hladká a dosahují téměř stejného průběhu. Nicméně na čtyřúhelníkové síti stačí k dosažení uspokojivého řešení nižší úroveň dělení buněk a jeví se tedy jako vhodnější.

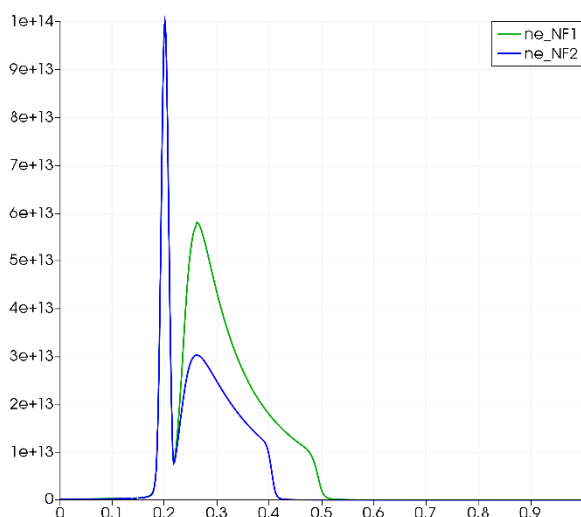


Graf 5.7: Porovnání řešení na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti

5.1.3 Porovnání metody 1. a 2. řádu



Graf 5.8: Řešení na trojúhelníkové síti

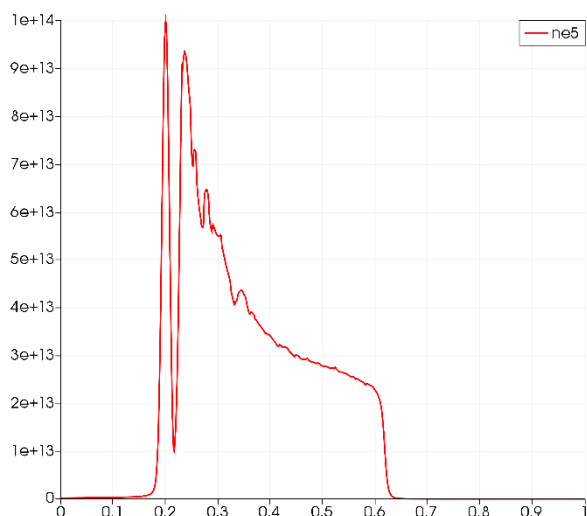


Graf 5.9: Řešení na čtyřúhelníkové síti

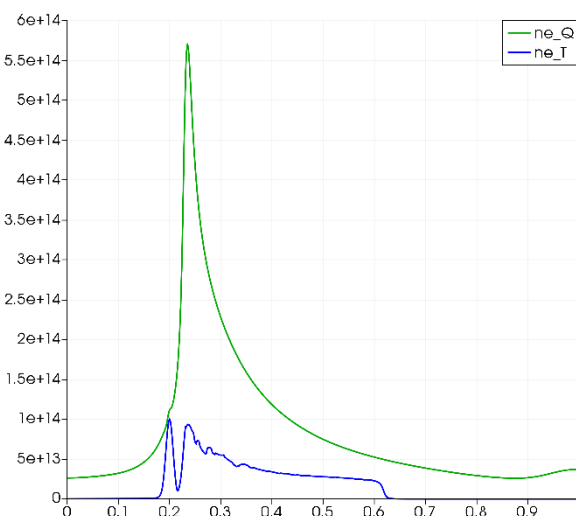
Z porovnání na grafech 5.8 a 5.9 je patrné, že zvláště na čtyřúhelníkové síti ovlivňuje hodnota řádu významně průběh hustoty elektronů. Metody vyšších řádů lépe zachycují šíření výboje a u trojúhelníkové sítě pak dochází k vyhlazení průběhu řešení. Pro řešení na obou sítích platí, že při použití metody vyššího řádu se oproti nižšímu řádu výboj šíří pomaleji a hustota elektronů dosahuje nižších hodnot. K získání podobných výsledků metodou 1. řádu by byla zapotřebí mnohem jemnější síť.

5.2 Šíření výboje s fotoionizací

5.2.1 Metoda 1. řádu



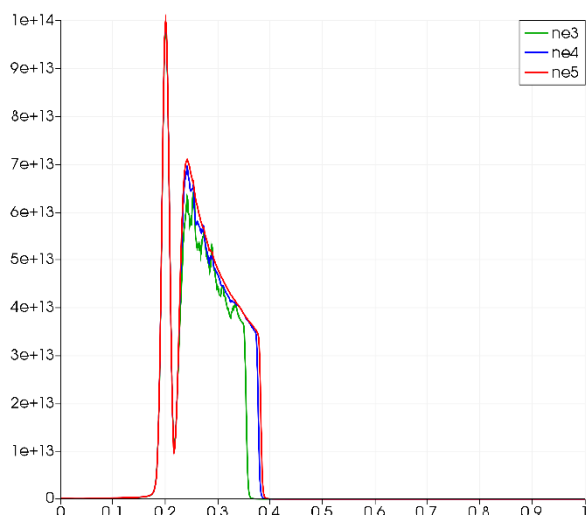
Graf 5.10 Řešení na trojúhelníkové síti



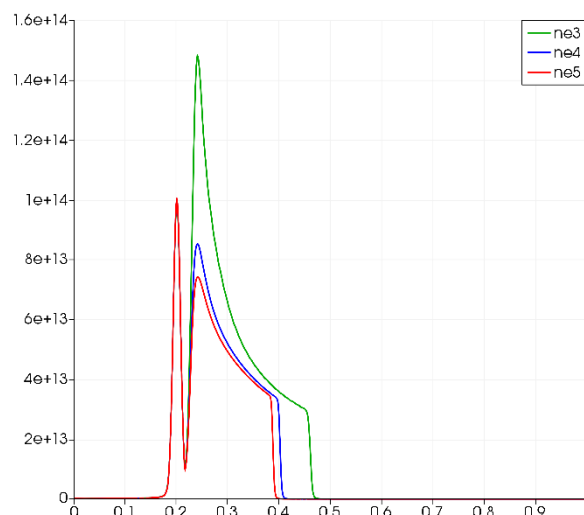
Graf 5.11: Porovnání řešení na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti

Čtyřúhelníková síť se jeví pro zvolené parametry jako velmi nevhodná, výboj s vlivem fotoionizace se na ní šíří velmi rychle, opouští výpočetní oblast a z grafu 5.11 je patrné, že i pro 5. úroveň dělení buněk dochází ke zhroutilí výpočtu. Výpočet proběhl správně pouze na trojúhelníkové síti s 5. úrovní dělení buněk, avšak na grafu 5.10 je vidět, že průběh řešení obsahuje výrazné oscilace.

5.2.2 Metoda 2. řádu

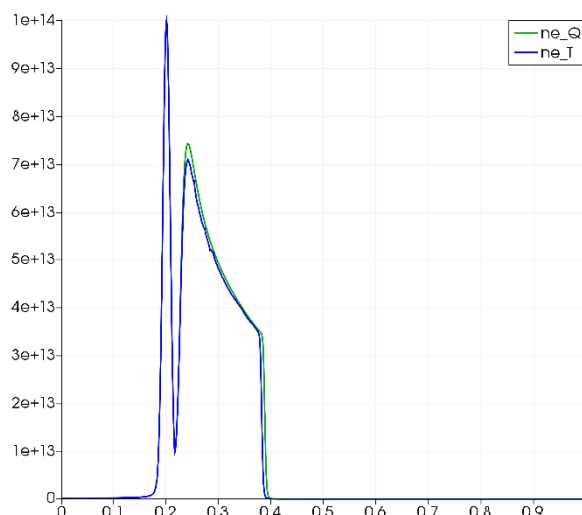


Graf 5.12: Řešení na trojúhelníkové síti



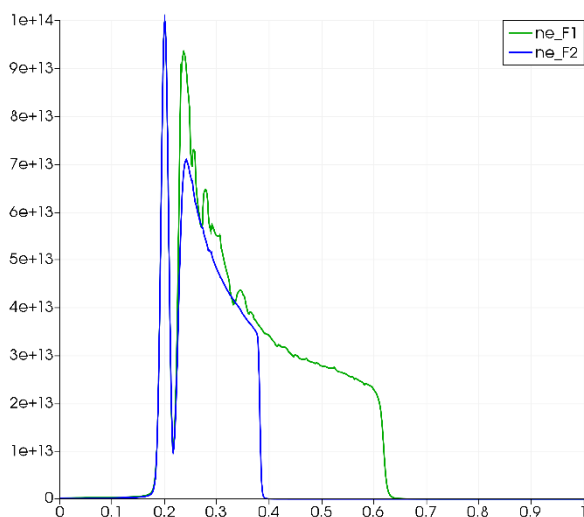
Graf 5.13: Řešení na čtyřúhelníkové síti

Stejně jako při šíření výboje bez fotoionizace, použití 2. řádu výrazně zlepšuje konvergenci, což je vidět na grafech 5.12, 5.13. Zajímavým jevem je, že na trojúhelníkové síti dochází se zjemňováním sítě ke zrychlování šíření výboje a zvyšování hustoty elektronů, zatímco na čtyřúhelníkové síti dochází k pravému opaku. Při použití 5. úrovně dělení buněk se však řešení na obou sítích velmi podobají.

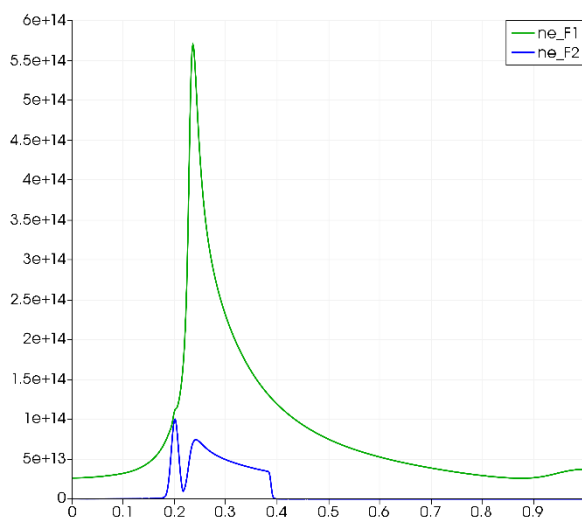


Graf 5.14: Porovnání řešení na trojúhelníkové a čtyřúhelníkové síti

5.2.3 Porovnání metody 1. a 2. řádu



Graf 5.15: Řešení na trojúhelníkové síti



Graf 5.16: Řešení na čtyřúhelníkové síti

Graf 5.16 ukazuje, že na čtyřúhelníkové síti je metoda 1. řádu nepoužitelná, výboj se šíří velmi rychle a opouští výpočetní oblast. Dále je pak patrné, že použití metody vyššího řádu má na řešení, zvláště pak na čtyřúhelníkové síti, významný vliv – výboj se šíří pomaleji a dochází k dobré konvergenci. Na grafu 5.15 je vidět že metoda vyššího řádu zajišťuje na trojúhelníkové síti výrazně hladší průběh řešení. Opět platí, že pro získání podobných výsledků metodou 1. řádu by byla zapotřebí výrazně jemnější síť.

6 Závěr

Práce obsahuje stručný úvod do problematiky matematického modelování, konkrétně šíření elektrického výboje – streameru. Ten lze popsat několika možnými modely, z nichž tzv. minimálnímu modelu, dále doplněnému o vliv fotoionizace, je v práci věnována rozsáhlejší pozornost – popis rovnic, uvedení počátečních a okrajových podmínek, seznámení s numerickým algoritmem.

Jedním z dílčích cílů bylo seznámení se se základními numerickými metodami a jejich aplikace na řešení 1D šíření Gaussova pulsu, které bylo naprogramováno v jazyce C++. Tyto programy jsou součástí přílohy této práce. Jako nejvhodnější se ukázala metoda Runge – Kutta a Lax – Wendroff, zároveň vyšlo najevo, že řád metody má na řešení podstatnější vliv, než hustota sítě.

Dalším z dílčích úkolů byly numerické experimenty provedené na software dodaným Ústavem technické matematiky FS ČVUT. Předmětem těchto experimentů bylo porovnání řešení 2D šíření streameru na základě rozdílných parametrů. Stejně jako u šíření Gaussova pulsu byl rozhodující řád použité metody. Naopak geometrie buněk se při dostatečné hustotě sítě ukázala jako nepříliš významná. Při kombinaci některých parametrů, např. metody 1. řádu a nízké hustoty sítě docházelo k jevu, kdy se streamer šířil příliš rychle, opustil výpočetní oblast a došlo ke zhroucení výpočtu. Tomu by se dalo předejít nastavením kratšího výpočetního času, nicméně kombinace těchto parametrů obecně nedosahovala kvalitních řešení. Zajímavostí je, že při použití metody 1. řádu docházelo se zjemňováním sítě ke zpomalení šíření streameru a poklesu hodnot hustoty elektronů, při použití 2. řádu docházelo k tomuto jevu pouze na čtyřúhelníkové síti. Na trojúhelníkové síti docházelo k pravému opaku. K dosažení podobných výsledků metodou 1. řádu a by byla zapotřebí výrazně jemnější síť

Dále stojí za zmínění, že numerické metody použité v této práci mají široké spektrum uplatnění, a kromě řešení šíření elektrického výboje nebo Gaussova pulsu, se používají k řešení mnoha rozdílných matematických modelů napříč obory.

Reference

- [1] L. Liu: *Physics of Electrical Discharge Transitions in Air* [online], 2017 [cit. 2019-07-01]. Dostupné z: <http://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:1088880/FULLTEXT01.pdf> Dissertation, KTH.
- [2] J. Karel: *Numerical Simulation of Streamer Propagation on Unstructured Dynamically Adapted Grids*, 2014, dissertation, ČVUT.
- [3] X-S. Yang: *Mathematical Modeling with Multidisciplinary Applications* [online], John Wiley & Sons, Incorporated, 2013 [cit. 2019-07-02], ISBN 9781118462690. Dostupné z: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=918257>
- [4] R. Melnik: *Mathematical and Computational Modeling: With Applications in Natural and Social Sciences, Engineering, and the Arts* [online], John Wiley & Sons, Incorporated, 2015 [cit. 2019-07-02], ISBN 9781118854112. Dostupné z: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=1895662>
- [5] J. Hřebíček, M. Škrdla: *Úvod do matematického modelování* [online], 2006 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Bi3101/um/skripta.pdf>
- [6] L. Papageorgiou, C. Metaxas, G. E. Georghiou: *Three-dimensional numerical modelling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photoionization phenomena. Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, 2011, 44 (4), pp.45203.
- [7] P. Crispel, P. Degond, M. H. Vignal: *Quasi-neutral fluid models for current-carrying plasmas, Journal of Computational Physics*, 205, 2005.
- [8] M. Duarte, Z. Bonaventura, M. Massot, A. Bourdon: *A numerical strategy to discretize and solve the Poisson equation on dynamically adapted multiresolution grids for time-dependent streamer discharge simulations, Journal of Computational Physics*, vol. 289, Elsevier, 2015.
- [9] J. Blazek: *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Elsevier, 2001, ISBN 0080430090.
- [10] R. LeVeque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002, ISBN 9780521810876.