

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



Bakalářská práce

NUMERICKÁ SIMULACE PROUDĚNÍ MĚLKÉ VODY

NUMERICAL SIMULATION OF SHALLOW WATER
FLOWS

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Autor: Martin Jakubec

Vedoucí práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Jakubec** Jméno: **Martin** Osobní číslo: **466547**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerická simulace proudění mělké vody

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical simulation of shallow water flows

Pokyny pro vypracování:

Sestavte program pro řešení jednorozměrného proudění mělké vody pomocí relaxačního schématu. Program aplikujte na řešení problému protřetí hráze. Výsledky srovnajte s daty dostupnými v literatuře a s výpočtem založeným na řešení systému Navierových-Stokesových rovnic pro proudění vícefázové nestlačitelné tekutiny. V práci proveďte odvození výchozích rovnic, popište relaxační schéma a proveďte studii závislosti numerického řešení na velikosti diskretizačního kroku a relaxačního parametru.

Seznam doporučené literatury:

DELIS, A. I. a Th. KATSAOUNIS. Relaxation schemes for the shallow water equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids [online]. 2003, 41(7), 695–719. ISSN 0271-2091. Dostupné z: doi:10.1002/flid.462
MOUKALLED, F., L. MANGANI a M. DARWISH. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics [online]. Cham: Springer International Publishing, 2016. Fluid Mechanics and Its Applications. ISBN 978-3-319-16873-9. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-319-16874-6

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **02.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: _____



doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce doc. Ing. Jiřímu Füstovi, Ph.D. za čas, přátelský přístup, cenné rady a odborné vedení při tvorbě této bakalářské práce.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracoval samostatně s přispěním vedoucího práce. Všechna použitá literatura je uvedena v seznamu zdrojů.

Dále prohlašuji, že nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze,dne:

.....
Podpis

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zaměřuje na numerické řešení hyperbolického systému rovnic popisujících proudění mělké vody pomocí relaxační metody v jedné prostorové dimenzi. V práci je tento systém odvozen, je ukázáno řešení lineární konvekce, řešení nelineární skalární rovnice, složené z lineárního hyperbolického systému a nelineárního zdrojového členu. Dále je toto řešení rozšířeno na systém rovnic pro mělkou vodu.

Klíčová slova - Rovnice mělké vody, relaxační metoda, nelineární skalární rovnice, hyperbolický systém

Abstract

This bachelor thesis is concerned with numerical method for a hyperbolic system of equations for shallow water flow in one spatial dimension using relaxation method. In this work, we derive this hyperbolic system, show a numerical method for linear convection, relaxation method for nonlinear scalar equation, consisting of a linear hyperbolic system and a nonlinear source term. This method is then expanded for the shallow water equations system.

Keywords - Shallow water equations, relaxation method, nonlinear scalar equation, hyperbolic system

Obsah

1	Úvod	8
2	Odvození rovnic mělké vody	9
2.1	Bilance hmoty	9
2.2	Bilance hybnosti	10
3	Numerické řešení konvekce	12
3.1	Lineární konvekce v 1D	12
3.2	Nelineární konvekce	13
3.2.1	Numerické řešení hyperbolického systému bez zdroje	15
3.2.2	Relaxační systém se zdrojovým členem	17
3.2.3	Řešení Burgersovy rovnice	17
4	Numerické řešení rovnic mělké vody	19
4.1	Odvození numerického řešení	19
4.2	Výsledky numerické simulace	21
4.3	Řád konvergence	26
5	Závěr	28

Seznam značení

$L[m]$ - šířka dna

u - hledaná veličina

$h[m]$ - výška hladiny

$\rho[kg \cdot m^{-3}]$ - hustota

$m[kg]$ - hmotnost

$\dot{m}[kg \cdot s^{-1}]$ - hmotnostní tok

$i[kg \cdot m \cdot s^{-1}]$ - hybnost

$F[N]$ - síla

$g[m \cdot s^{-2}]$ - gravitační zrychlení

$t[s]$ - čas

$\varepsilon[-]$ - relaxační parametr

$\Delta x[m]$ - prostorový krok

$\Delta t[s]$ - časový krok

λ_i - vlastní číslo

q, v, w - pomocné veličiny

1

Úvod

Cílem této bakalářské práce je seznámení s problematikou rovnic popisujících proudění mělké vody, jejich odvození a jejich numerické řešení. Rovnice pro mělkou vodu jsou systémem hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic (popř. parabolických, pokud uvažujeme vazké tření). Mohou být použity za předpokladu, že vertikální dynamické efekty jsou zanedbatelné proti horizontálním. Lze ukázat, že vertikální gradienty tlaku jsou téměř hydrostatické a že horizontální gradienty tlaku vznikají vlivem různé výšky hladiny, což značí, že horizontální pole rychlosti bude konstantní napříč hloubkou tekutiny.

Případy v dynamice tekutin, kde můžeme uvažovat mělké dno jsou zčásti rozsáhlé. Rovnice mělké vody mají uplatnění například při předpovědi vln tsunami, řešení atmosférického proudění, záplavových vln, proudění kolem objektů, atd. Rovnice se nedají použít v případě, kdy začnou být relevantní efekty ve třetím rozměru (např. když se vlny moc zkrátí či zvýší).[4]

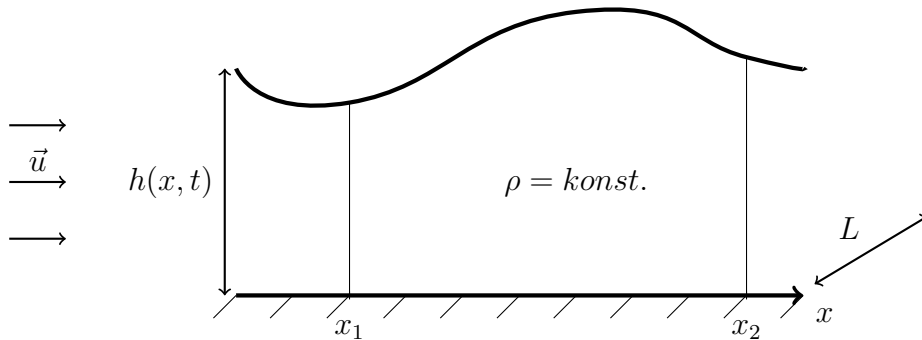
V první kapitole provedeme odvození rovnic popisujících proudění mělké vody. Dále ukážeme metodu pro řešení lineární konvekce a následně relaxační metodu pro nelineární skalární rovnici konvekce sestavenou z řešení lineárního hyperbolického systému s nelineárním zdrojovým členem. V další kapitole poté popíšeme rozšíření relaxační metody na systém rovnic mělké vody a ukážeme řešení několika vybraných případů. V závěru nakonec shrneme dosažené výsledky.

2

Odvození rovnic mělké vody

2.1 Bilance hmoty

Uvažujeme proudění vody s konstantní hustotou ρ kanálem s rovným dnem o šířce $L = 1m$.



Obr. 2.1: Proudění mělké vody bez uvažování vlivu dna

Hmostnost tekutiny v námi vymezeném úseku od $x_1(t)$ do $x_2(t)$ je dána

$$m_{12}(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} L\rho h(x, t) dx \quad (2.1)$$

kde $h(x, t)$ je výška hladiny. Zároveň platí, že

$$\frac{dm_{12}}{dt} = \dot{m}(t) = 0 \quad (2.2)$$

Jelikož $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou funkcí času, zavedeme substituci $x_1 = x_1(X_1, t)$ a $x_2 = x_2(X_2, t)$ kde X_1 a X_2 jsou referenční stavy pro $t = 0$ a dostaneme

$$m(t) = \int_{X_1}^{X_2} L\rho h(x(X, t), t) \frac{\partial x(X, t)}{\partial X} dX \quad (2.3)$$

L a ρ uvažujeme konstantní, proto můžeme vytknout před integrál a derivujeme rovnici 2.3

$$\dot{m}(t) = L\rho \int_{X_1}^{X_2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_X \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + h \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial X} \right) dX \quad (2.4)$$

Kde

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.5)$$

A parciální derivaci u druhého členu lze upravit do tvaru

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} \quad (2.6)$$

Po dosazení do 2.4 dostaneme

$$\dot{m}(t) = L\rho \int_{X_1}^{X_2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + h \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} \right] dX \quad (2.7)$$

Dále můžeme vytknutím upravit do tvaru

$$\dot{m}(t) = L\rho \int_{X_1}^{X_2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} h \right) \frac{\partial x}{\partial X} dX \quad (2.8)$$

Kde

$$\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} h = \frac{\partial(hu)}{\partial x} \quad (2.9)$$

A tedy po zpětném dosazení substituce dostaneme

$$\dot{m}(t) = L\rho \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.10)$$

Což platí pro všechna x_1 a x_2 a tedy dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

2.2 Bilance hybnosti

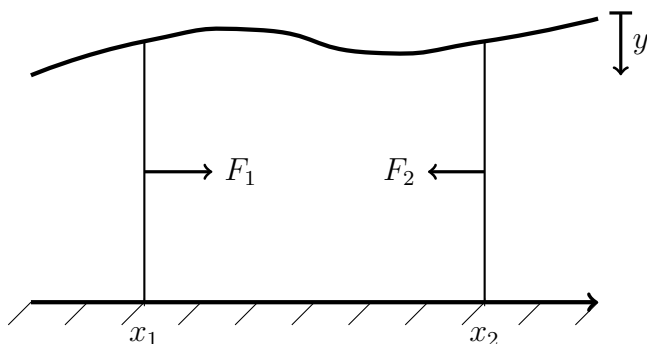
Hybnost je dána vztahem

$$i_{12}(t) = \int_{x_1}^{x_2} L\rho h(x, t) u(x, t) dx \quad (2.12)$$

Stejným postupem, kterým jsme dostali rovnici 2.11 dosaneme

$$\frac{di_{12}}{dt} = L\rho \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} \right) dx \quad (2.13)$$

Dále víme, že derivace hybnosti vyjadřuje silovou bilanci viz obr.2.2



Obr. 2.2: Silové poměry

$$\frac{di_{12}}{dt} = F_{12} = F_1 - F_2 \quad (2.14)$$

Kde

$$F_{12} = \int_0^{h_1} L\rho g(h_1 - y)dy - \int_0^{h_2} L\rho g(h_2 - y)dy \quad (2.15)$$

Po integraci

$$F_{12} = \frac{1}{2}L\rho gh_1^2 - \frac{1}{2}L\rho gh_2^2 \quad (2.16)$$

A nyní dáme do rovnosti s rovnicí 2.13

$$L\rho \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} \right) dx = \frac{L\rho g}{2}(h_1^2 - h_2^2) \quad (2.17)$$

Zavedeme Δx , kde $\Delta x = x_2 - x_1$ a celou rovnici dělíme

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} \right) dx = \frac{g}{2} \frac{h_1^2 - h_2^2}{\Delta x} \quad (2.18)$$

Pro limitu, když $x_1 \rightarrow x_2$ můžeme psát

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -\frac{g}{2} \frac{\partial(h^2)}{\partial x} \quad (2.19)$$

A po převedení na levou stranu dostáváme finální podobu

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

3

Numerické řešení konvekce

3.1 Lineární konvekce v 1D

Rovnice pro lineární konvekci vychází z Navier-Stokesovy rovnice

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f} \quad (3.1)$$

zachováním pouze akumulativního a konvektivního členu pro složku rychlosti ve směru osy x (souřadný systém můžeme vždy zavést tak, aby bylo možné toto značení použít). Aby byla rovnice lineární, musí být koeficient, tj. v našem případě rychlost a konstantní a dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Tato rovnice popisuje šíření vlny bez změny tvaru s rychlostí a a počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$. Exaktní řešení této rovnice je

$$u(x, t) = u_0(x - at) \quad (3.3)$$

Diskretizací rovnice 3.2 metodou upwind dostáváme

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.4)$$

kde jedinou neznámou je člen u_i^{n+1} a tedy upravíme do tvaru

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (3.5)$$

Pro jednoduchý příklad určíme počáteční podmínku jako

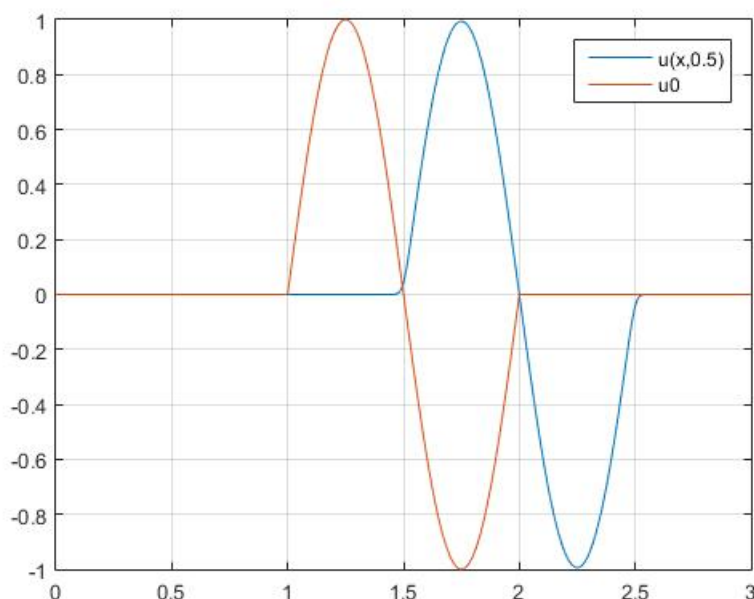
$$u_0(x) = 0 \quad \text{pro} \quad \begin{cases} x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$$

$$u_0(x) = \sin(2\pi x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

a uvažujeme konstantní rychlost $a = 1$. Pro stabilitu schématu je nutno dodržet podmínku maximální velikosti časového kroku

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a} \quad (3.6)$$

Výsledek pro $u(x, 0.5s)$ je možný vidět na obr. 3.1 . Je patrné, že se vlna pouze posunula v kladném směru rychlostí $a > 0$ za čas $t = 0.5s$.



Obr. 3.1: $u(x, 0.5s)$, $n = 1000$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{a}$, $a = 1 \text{ ms}^{-1}$, $\Delta x = \frac{3}{n-1}$

Můžeme si všimnout, že v čase $t = 0s$ je přechod na změnách počátečních podmínek ostrý, kdežto v čase $t = 0.5s$ je plynulý, což je způsobeno chybou metody, která se dá minimalizovat zjemněním sítě.

3.2 Nelineární konvekce

Relaxační systém

Nyní uvažujeme relaxční systémy v d prostorových dimenzích složených z N rovnic, který v obecném tvaru můžeme psát jako

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U})}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{R}(\mathbf{U}) \quad (3.7)$$

kde $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ je lokální relaxační člen reprezentující relaxaci k rovnovážnému stavu, charakterizovaném jako $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$. Pro systémy ve tvaru 3.7 je kritický předpoklad, že je levá strana hyperbolická.[2]

V našem případě uvažujeme skalární rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} u_t + f'(u)u_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde $f'(u)$ je nelineárním členem, který v relaxačním systému zohledníme na pravé straně. Relaxační systém pro rovnici 3.8 bude ve tvaru

$$\begin{aligned} u_t + v_x &= 0 \\ v_t + c^2 u_x &= \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v) \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde v případě, že platí subcharakteristická podmínka: $|f'(u)| < c$ v relaxační limitě $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaneme zpět systém 3.8.[1]

Subcharakteristická podmínka

Vyjádřením v z druhé rovnice ze systému 3.9 dostaneme

$$v = f(u) - \varepsilon(v_t + c^2 u_x) = f(u) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.10)$$

a následně její derivací podle prostorové souřadnice

$$v_x = f(u)_x - \varepsilon(v_{tx} + c^2 u_{xx}) = f(u)_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.11)$$

kde

$$v_{tx} = f(u)_{tx} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.12)$$

Z první rovnice ze systému 3.9 vyjádříme

$$u_t = -v_x = -f'(u)u_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.13)$$

a dosazením z rovnice 3.13 píšeme

$$f(u)_{tx} = (f(u)_t)_x = (f'(u)u_t)_x = -(f'(u)f'(u)u_x)_x \quad (3.14)$$

Dosazením do první rovnice systému 3.9 vyplývá

$$u_t + f(u)_x - \varepsilon[-((f'(u))^2 u_x)_x + c^2 u_{xx}] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.15)$$

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon[(c^2 - (f'(u))^2)u_x]_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.16)$$

kde člen $(c^2 - (f'(u))^2)$ může představovat např. dynamickou viskozitu, která musí být nezáporná a tedy

$$\varepsilon(c^2 - (f'(u))^2) = \mu \geq 0 \quad (3.17)$$

a tedy dostáváme naši subcharakteristickou podmínku $c^2 \geq (f'(u))^2$.

Hyperbolický systém

Náš relaxační systém 3.9 lze rozdělit na lineární hyperbolický systém na levé straně a zdrojový člen na pravé straně rovnice. Nejprve se budeme zabývat řešením tohoto hyperbolického systému.

Uvažujeme lineární systém N zákonů zachování v jedné prostorové dimenzi

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

kde $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ je N -vektor zachovaných veličin a \mathbf{A} je $N \times N$ matice. Systém ve tvaru 3.18 je hyperbolický, pokud je matice \mathbf{A} diagonalizovatelná jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R} \quad (3.19)$$

Kde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ je diagonální maticí reálných vlastních čísel.[2]

3.2.1 Numerické řešení hyperbolického systému bez zdroje

V této části budeme uvažovat systém ve tvaru 3.9 s nulovou pravou stranou, tj.

$$\begin{aligned} u_t + v_x &= 0 \\ v_t + c^2 u_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pro následující operace zavedeme vektor \mathbf{W}

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

a systém přepíšeme do vektorového tvaru

$$\mathbf{W}_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}_x = 0 \quad (3.21)$$

kde matici u druhého členu označíme jako \mathbf{A} , tedy dostaneme tvar

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}\mathbf{W}_x = 0 \quad (3.22)$$

Matici \mathbf{A} nyní rozložíme jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \quad (3.23)$$

kde $\mathbf{\Lambda}$ je diagonální maticí vlastních čísel a \mathbf{R} je maticí vlastních vektorů.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ c^2 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - c^2 \quad \text{kde } \lambda_{1,2} = \pm c \quad (3.24)$$

A tedy

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2c} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2c} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Náš systém

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}_x = 0 \quad (3.26)$$

nyní vynásobíme maticí \mathbf{R}^{-1} a dostaneme

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W})_t + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R})\mathbf{\Lambda}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W})_x = 0 \quad (3.27)$$

a když zavedeme $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}$ píšeme

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_x = 0 \quad (3.28)$$

Po rozepsání rovnice 3.28 do složkového tvaru

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2c}\right)_t + c\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2c}\right)_x &= 0 \\ \left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2c}\right)_t - c\left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2c}\right)_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

zavedeme substituci

$$\begin{aligned}\frac{u}{2} + \frac{v}{2c} &= p \\ \frac{u}{2} - \frac{v}{2c} &= q\end{aligned}\tag{3.30}$$

a konečně dostáváme systém ve tvaru

$$\begin{aligned}p_t + cp_x &= 0 \\ q_t - cq_x &= 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

Nyní, obdobně jako u případu lineární konvekce systém diskretizujeme a dostáváme

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + c \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} = 0\tag{3.32}$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} - c \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} = 0\tag{3.33}$$

Čímž získáme systém 2 rovnic o 2 neznámých p_i^{n+1} a q_i^{n+1} , tedy po úpravě

$$p_i^{n+1} = p_i^n - \frac{\Delta tc}{\Delta x}(p_i^n - p_{i-1}^n)\tag{3.34}$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \frac{\Delta tc}{\Delta x}(q_{i+1}^n - q_i^n)\tag{3.35}$$

A po zpětném dosazení substituce 3.30 a vynásobení systému $/ \cdot 2$

$$u_i^{n+1} + \frac{v_i^{n+1}}{c} = u_i^n + \frac{v_i^n}{c} - \frac{\Delta tc}{\Delta x} \left(u_i^n + \frac{v_i^n}{c} - u_{i-1}^n - \frac{v_{i-1}^n}{c} \right)\tag{3.36}$$

$$u_i^{n+1} - \frac{v_i^{n+1}}{c} = u_i^n - \frac{v_i^n}{c} + \frac{\Delta tc}{\Delta x} \left(u_{i+1}^n - \frac{v_{i+1}^n}{c} - u_i^n + \frac{v_i^n}{c} \right)\tag{3.37}$$

Nyní sečtením rovnice 3.36 a 3.37 a roznásobením výsledku $\frac{1}{2}$ dostáváme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\tag{3.38}$$

A rozdílem rovnice 3.36 a 3.37 a roznásobením výsledku $\frac{c}{2}$ dostáváme

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta tc^2}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc^2}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)\tag{3.39}$$

Kde rovnice 3.38 a 3.39 tvoří konečnou podobu naší relaxační metody pro lineární hyperbolický systém bez zdrojového členu.

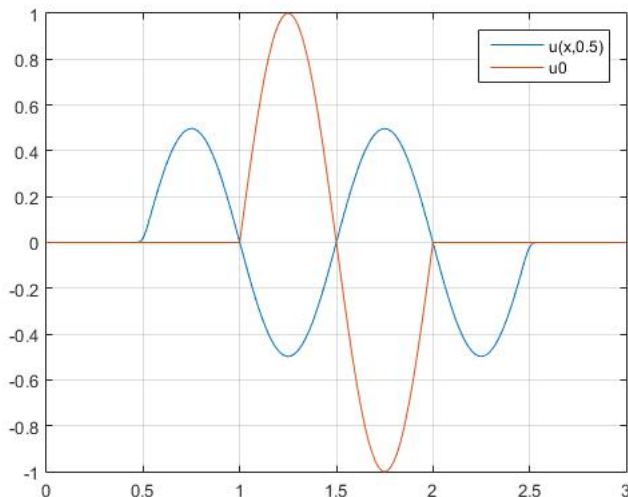
Pro jednoduchý případ budeme uvažovat stejné počáteční podmínky jako v případě lineární konvekce

$$u_0(x) = 0 \quad \text{pro} \quad \begin{cases} x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$$

$$u_0(x) = \sin 2\pi x \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

a $c = 1$ dostáváme výsledek viz. 3.2

Můžeme si všimnout, že vlna se nyní posunula do obou stran a její amplituda se o polovinu zmenšila.



Obr. 3.2: $c = 1, n = 1000, \delta t = 0.8 \frac{\delta x}{a}$

3.2.2 Relaxační systém se zdrojovým členem

V této části se budeme zabývat řešením systému 3.9 s relaxačním zdrojovým členem ve tvaru

$$\begin{aligned} u_t + v_x &= 0 \\ v_t + c^2 u_x &= \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pro numerické řešení zůstane první rovnice stejná. V druhé rovnici musíme zohlednit zdrojový člen a dostaneme systém v podobě

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.41)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t c^2}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c^2}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_i^{n+1}) - v_i^{n+1}) \quad (3.42)$$

a po převedení neznámých na levou stranu výsledný systém ve tvaru

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.43)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t c^2}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c^2}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} f(u_i^{n+1}) \quad (3.44)$$

3.2.3 Řešení Burgersovy rovnice

Obecná forma Burgersovy rovnice (také známá jako vazká Burgersova rovnice) v jedné prostorové dimenzi má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.45)$$

V této části se budeme zabývat řešením neviské Burgersovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.46)$$

která je jednou ze základních modelových rovnic pro zákony zachování se vznikem nespojitostí - rázových vln. Pro numerickou integraci je rovnici vhodnější přepsat do tvaru

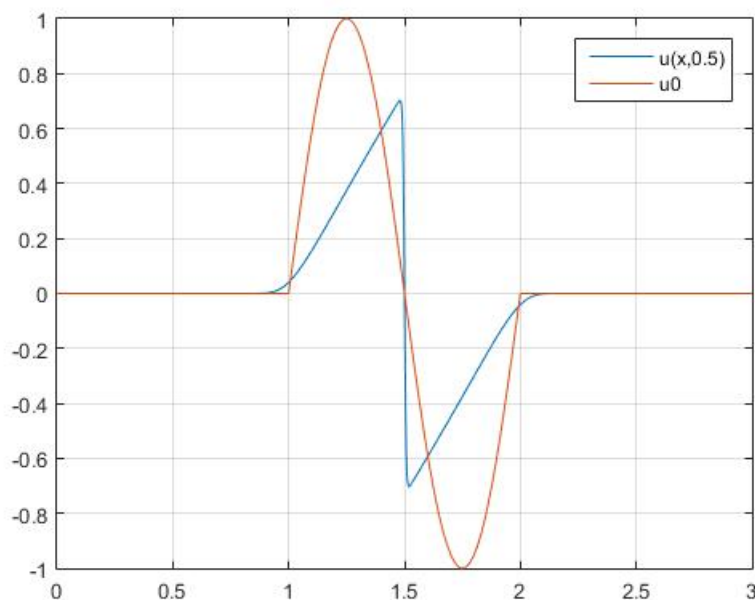
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0 \quad (3.47)$$

Počáteční podmínky ponecháme ve tvaru

$$u_0(x) = 0 \quad \text{pro } \begin{cases} x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$$

$$u_0(x) = \sin 2\pi x \quad \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

a řešení pro čas $t = 0.5$ s je vidět na obr. 3.3



Obr. 3.3: $c = 1, n = 1000, \delta t = 0.8 \frac{\delta x}{a}$

Všimneme si, že se začíná tvořit nespojitost - rázová vlna.

4

Numerické řešení rovnic mělké vody

4.1 Odvození numerického řešení

Rovnice pro mělkou vodu jsou systém hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic (při zanedbání vazkého tření) ve tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{bmatrix}$$

Systém 4.3 popisuje proudění v čase $t \geq 0$ v bodě $x \in \mathbb{R}$, kde $h(x, t) \geq 0$ je výška hladiny, $u(x, t)$ je průměrná rychlost v horizontálním směru a g je gravitační zrychlení. Dále zavedeme značení $hu = q$. Podobně jako u řešení konvekce, rozšíříme systém do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_x = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Všimněme si, že po zavedení vektoru

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

dostáváme lineární hyperbolický systém (viz kapitola 3.2.1. Bez zdrojového členu tedy máme

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}\mathbf{W}_x = 0 \quad (4.7)$$

Numerická metoda pro homogenní systém bude nyní mít tvar

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta tc}{2\Delta x} \mathbf{A}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |\mathbf{A}| (\mathbf{W}_{i+1}^n - 2\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_{i-1}^n) \quad (4.8)$$

Kde nám nyní schází hodnota $|\mathbf{A}|$, kterou získáme rozkladem

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{R}^{-1} \quad (4.9)$$

kde

$$|\mathbf{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_4| \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

A po dosazení

$$|\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

konečně rozepíšeme systém 4.8 složkově a dostáváme

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n) \quad (4.12)$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (w_{i+1}^n - w_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n) \quad (4.13)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \quad (4.14)$$

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) \quad (4.15)$$

Dále zbývá do systému 4.8 zavést zdrojový člen a tedy píšeme ve tvaru

$$h_t + v_x = 0 \quad (4.16)$$

$$q_t + w_x = 0 \quad (4.17)$$

$$v_t + c^2 h_x = \frac{1}{\varepsilon} (f^h(h, q) - v) \quad (4.18)$$

$$w_t + c^2 q_x = \frac{1}{\varepsilon} (f^q(h, q) - w) \quad (4.19)$$

Nebo složkově

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n) \quad (4.20)$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (w_{i+1}^n - w_{i-1}^n) + \frac{\Delta tc}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n) \quad (4.21)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f^h(h_i^{n+1}, q_i^{n+1}) - v_i^{n+1}) \quad (4.22)$$

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) + \frac{\Delta t c}{2\Delta x}(w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f^q(h_i^{n+1}, q_i^{n+1}) - w_i^{n+1}) \quad (4.23)$$

Kde

$$f^h(h, q) = q \quad (4.24)$$

$$f^q(h, q) = hu^2 + \frac{g}{2}h^2 = \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \quad (4.25)$$

Rovnice 4.20 až 4.25 představují výsledný tvar explicitní numerické metody. Podmínka stability bude

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c} \quad (4.26)$$

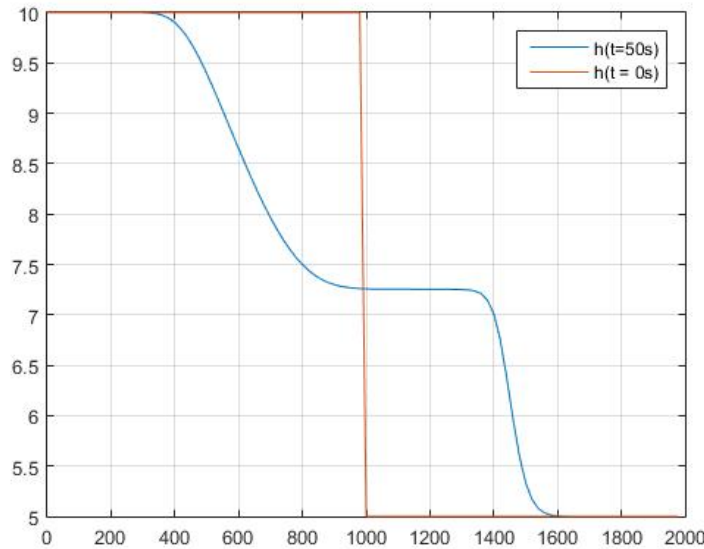
4.2 Výsledky numerické simulace

Pro ukázkou metody využijeme známé problematiky prolomení hráze. Nejprve uvedeme příklad kanálu s plochým dnem a délkou $L = 2000\text{m}$ a počátečními podmínkami

$$h_0(x) = 10 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (0, 1000)$$

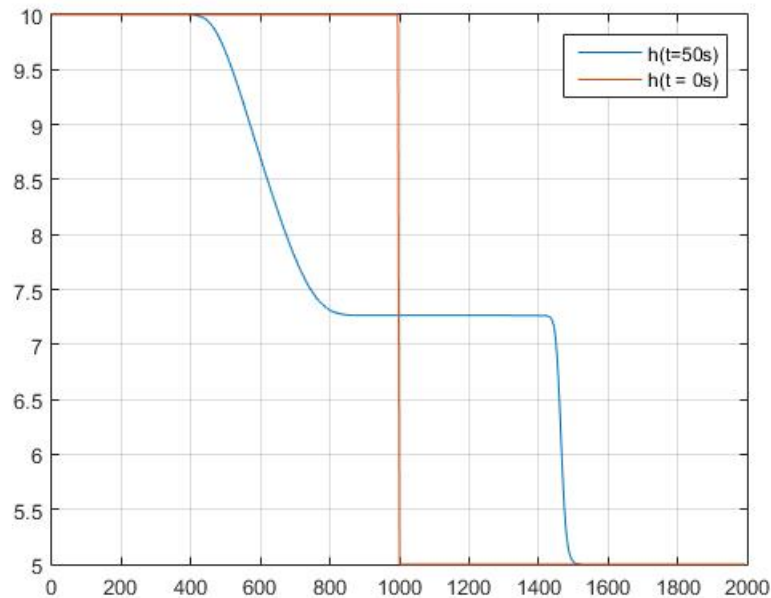
$$h_0(x) = 5 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (1000, 2000)$$

Na obr. 4.1 můžeme vidět výsledek numerické simulace pro čas $t = 50 \text{ s}$ a dělení sítě na 100 částí, s prostorovým krokem $\Delta x = 20 \text{ m}$



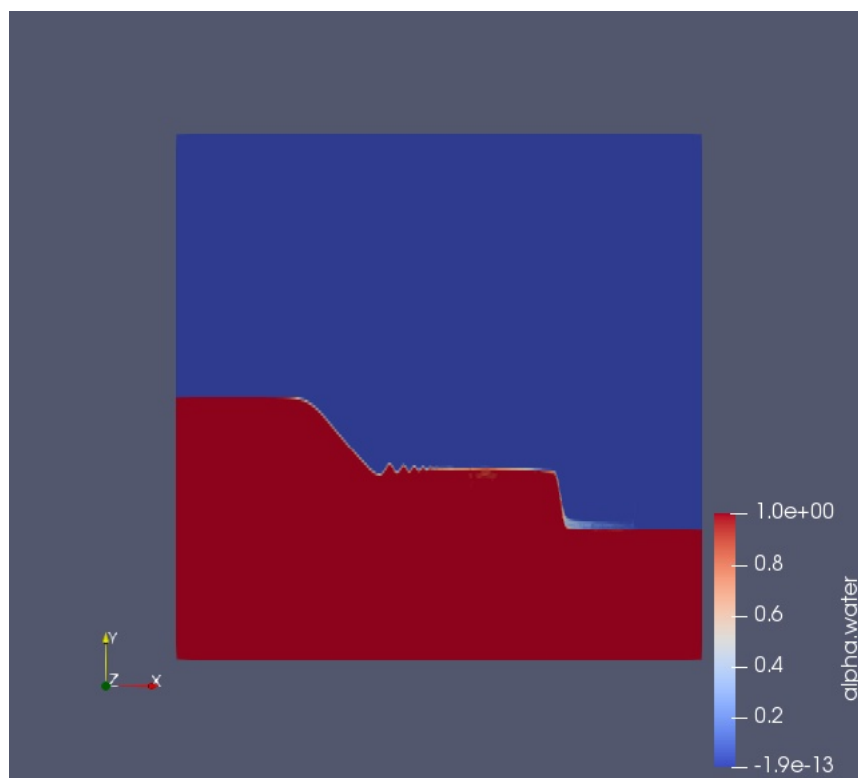
Obr. 4.1: Prolomení hráze - $h(x, 50 \text{ s})$, $n = 100$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{c}$, $c = 12$, $\Delta x = 20 \text{ m}$

Na obr. 4.2 je výsledek simulace pro stejné poč. podmínky jako na obr 4.1, pouze s jemnější sítí kde $n = 400$ a tedy $\Delta x = 5 \text{ m}$. Je možné si všimnout, že se řešení

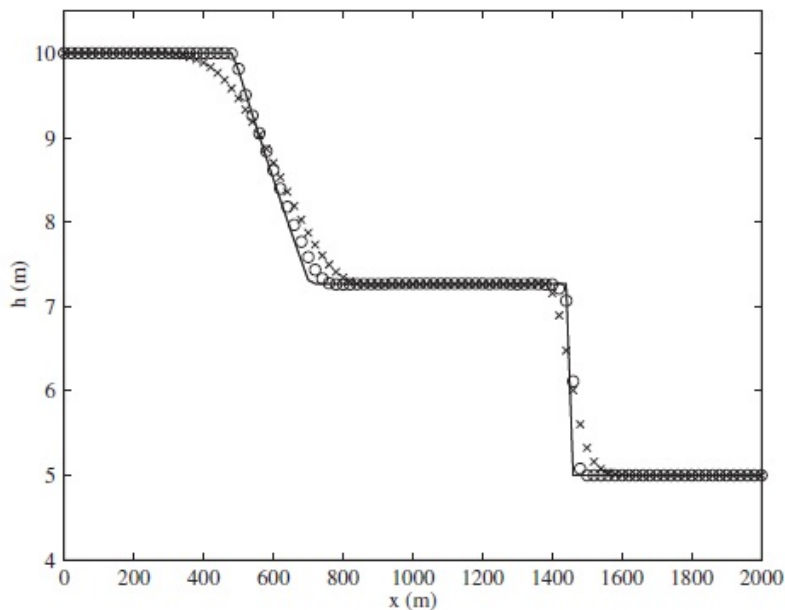


Obr. 4.2: Prolomení hráze - $h(x, 50 \text{ s})$, $n = 400$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{c}$, $c = 12$, $\Delta x = 5 \text{ m}$

při zjemnění sítě přibližuje řešení analytickému. Na obr. 4.3 je pro srovnání simulace stejného případu v programu OpenFOAM, ve kterém je problém řešen numerickou integrací Navier-Stokesových rovnic. Můžeme si všimnout, že v jedné části se objevují fluktuace, které v MATLABové simulaci vidět nejsou. Je to způsobeno průměrováním rychlostí a uvažováním pouze jednoho směru.



Obr. 4.3: Simulace prolomení hráze v programu OpenFOAM



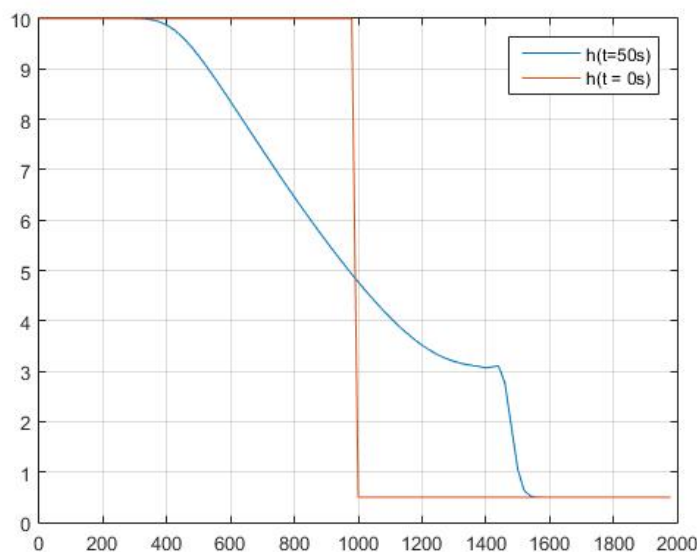
Obr. 4.4: Výsledky viz [1] - $h_0/h_1 = 0.5$, $\Delta x = 20 \text{ m}$, $c_1 = 5$, $c_2 = 12$

Na obr. 4.4 je porovnání řešení s využitím relaxační metody pro metody upwind a MUSCL s MC limiterem s téměř totožnými vstupy (\times -upwind, \circ - MUSCL). Další řešený případ je pro poč. podmínky

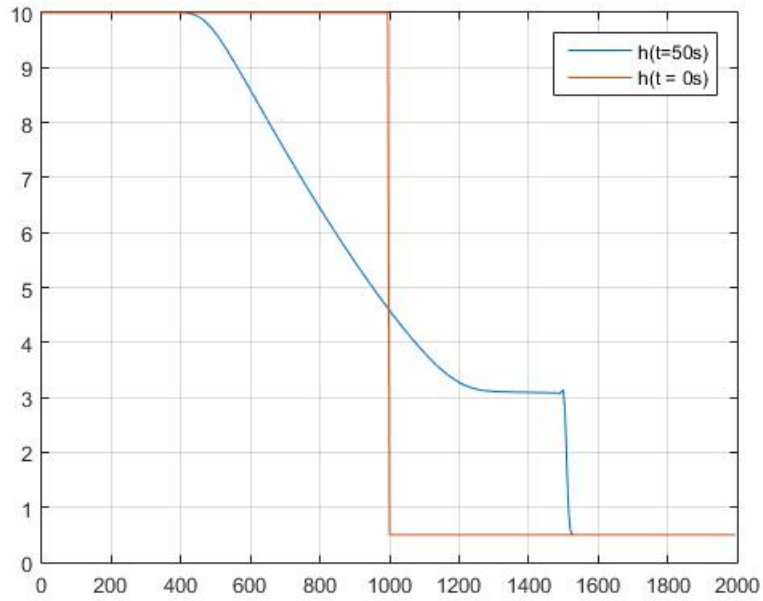
$$h_0(x) = 10 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (0, 1000)$$

$$h_0(x) = 0.5 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (1000, 2000)$$

které se více blíží suchému stavu. Na obr. 4.5 je řešení znovu vidět pro hrubší síť, tedy v našem případě $n = 100$ a $\Delta x = 20 \text{ m}$, dále potom na obr. 4.6 pro jemnější síť, tedy $n = 400$ a $\Delta x = 5 \text{ m}$



Obr. 4.5: Prolomení hráze - $h(x, 50 \text{ s})$, $n = 100$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{c}$, $c = 12$, $\Delta x = 20 \text{ m}$

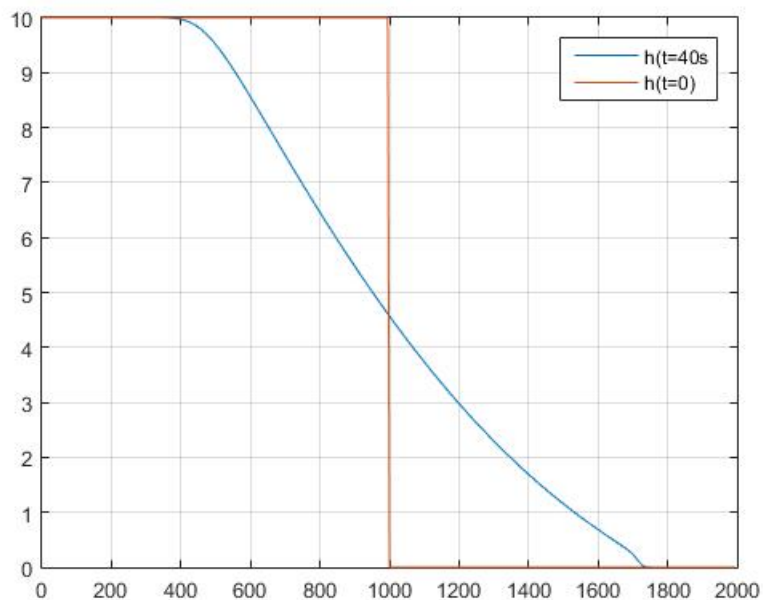


Obr. 4.6: Prolomení hráze - $h(x, 50 \text{ s})$, $n = 400$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{c}$, $c = 12$, $\Delta x = 5 \text{ m}$

V poslední řadě zbývá uvažovat případ se suchým dnem. Na obr. 4.7 je výsledek simulace pro počáteční podmínky

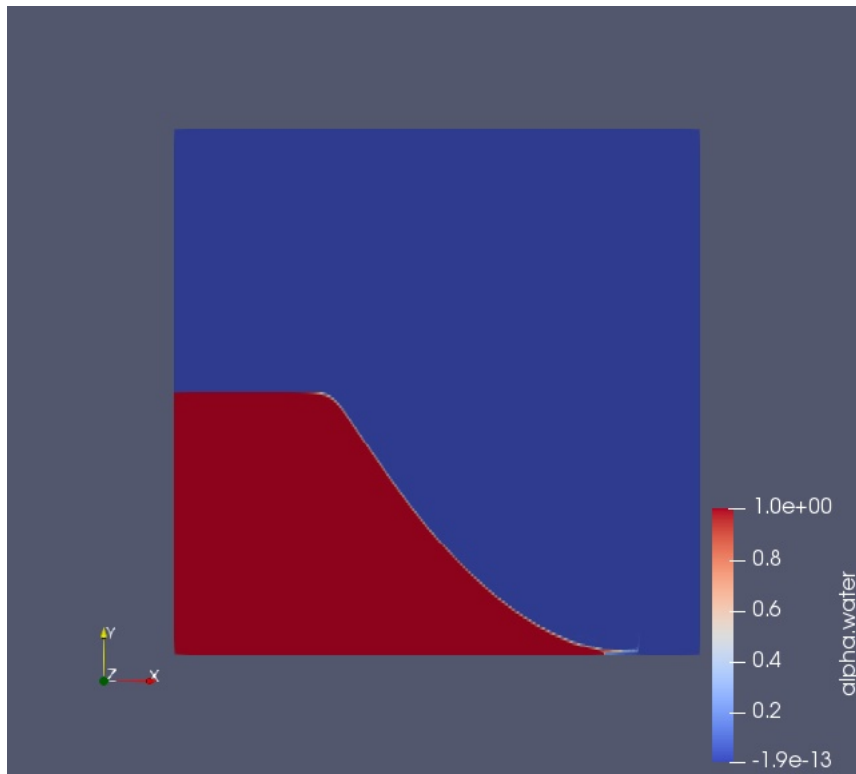
$$h_0(x) = 10 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (0, 1000)$$

$$h_0(x) = 0 \text{ m} \quad \text{pro } x \in (1000, 2000)$$

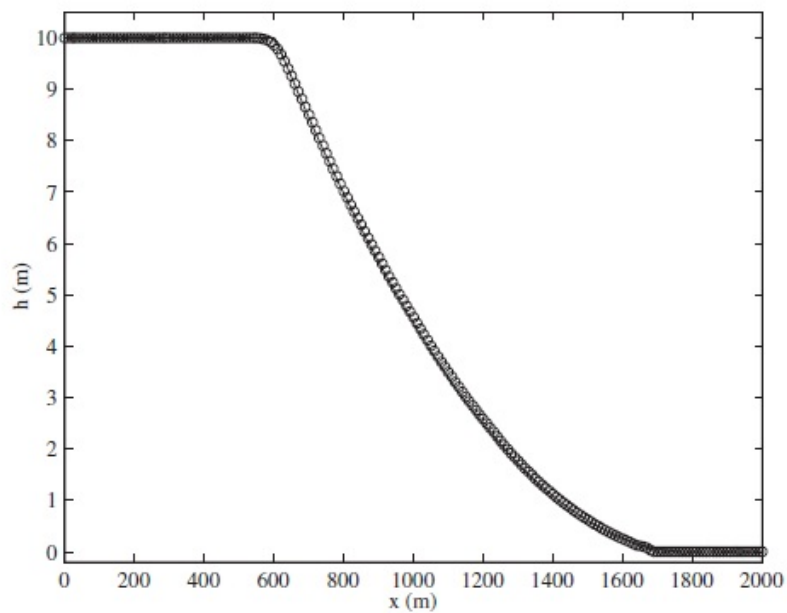


Obr. 4.7: Prolomení hráze - $h(x, 50 \text{ s})$, $n = 100$, $\Delta t = 0.8 \frac{\Delta x}{c}$, $c = 12$, $\Delta x = 20 \text{ m}$

Na obr. 4.8 můžeme vidět simulaci



Obr. 4.8: Simulace prolomení hráze v programu OpenFOAM



Obr. 4.9: Výsledek viz [1] - MUSCL s MM limiterem - $\Delta x = 10 \text{ m}$, $c_1 = 18$, $c_2 = 16$

U problematiky suchého dna vzniká singularita pro $h = 0 \text{ m}$ ve členu

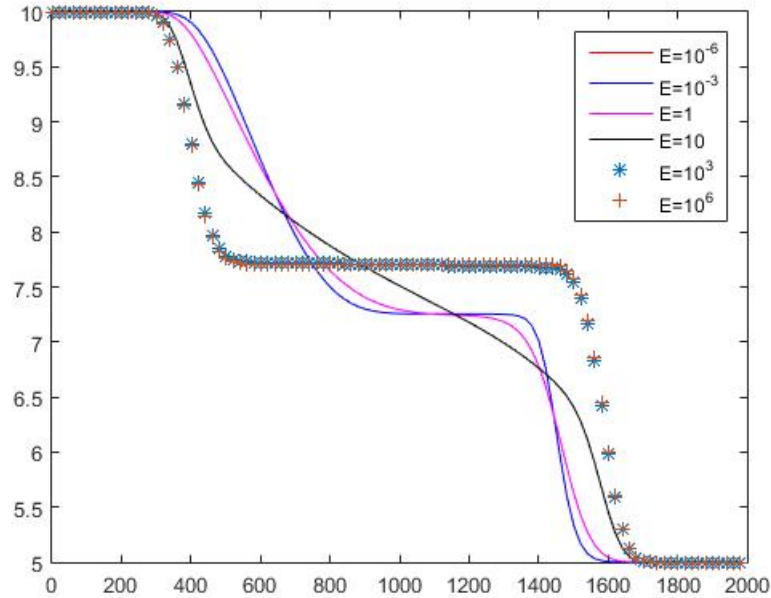
$$f^q(h, q) = \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \quad (4.27)$$

Tu lze ale jednoduše odstranit využitím tvaru

$$f^q(h, q) = hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \quad (4.28)$$

Závislost na velikosti relaxačního parametru

Relaxační parametr ε má značný vliv na výsledné řešení. Na obr. 4.10 je zobrazeno několik případů pro jeho různé velikosti



Obr. 4.10: Závislost řešení na velikosti parametru ε

Je zřejmé, že volená hodnota parametru by měla být $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

4.3 Řád konvergence

Chybu numerické metody můžeme vyjádřit ve tvaru

$$E = u_h - u^* \approx Kh^p + H.O.T \quad (4.29)$$

kde E je chyba metody, u_h je řešení dané numerickou metodou, u^* je analytické řešení, K je konstanta, h je krok prostorového dělení, p je řád konvergence a $H.O.T$ jsou členy vyšších řádů (z anglického "Higher Order Terms"). S využitím normy

$$\|u_h\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_i^h| \quad (4.30)$$

můžeme tedy psát

$$\|u_h - u^*\| = Kh^p \quad (1)$$

$$\|u_{h/2} - u^*\| = K\left(\frac{h}{2}\right)^p \quad (2)$$

$$\|u_{h/4} - u^*\| = K\left(\frac{h}{4}\right)^p \quad (3)$$

Rozdíl rovnic (1) a (2) dostáváme

$$\|u_h - u_{h/2}\| = Kh^p \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \quad (4.31)$$

a obdobně rozdíl rovnic (2) a (3) dostaneme

$$\|u_{h/2} - u_{h/4}\| K \frac{h^p}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \quad (4.32)$$

ze kterých můžeme vyjádřit řád konvergence p

$$p = \log \frac{\|u_h - u_{h/2}\|}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|} / \log 2 \quad (4.33)$$

Po dosazení hodnot z prvního příkladu viz.4.2 dostáváme $p = 0.999990045 \approx 1$, tj. jedná se o metodu prvního řádu.[3]

5

Závěr

V této práci byla řešena problematika numerického řešení hyperbolických systémů, konkrétně potom rovnic pro proudění mělké vody. Diskretizací rovnic pomocí metody upwind a využití relaxační metody byla dále odvozena numerická řešení a následně diskutovány jejich výsledky v závislostech na jemnosti sítě a velikosti relaxačního parametru ε . Řešena byla i problematika se suchým dnem. Všechny výstupy byly dále porovnány s řešením v softwaru OpenFOAM a nakonec diskutován řád konvergence metody.

Zdroje

[1] DELIS, ARGIRIS & KATASAOUNIS, THEODOROS. (2003). *Relaxation schemes for the shallow water equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 41. 695 - 719. 10.1002/fld.462.

[2] AURSAND, Peder Kristian. *Hyperbolic conservation laws with relaxation terms*. Trondheim, 2011. Diplomová práce. Norwegian University of Science and Technology. Department of Physics.

[3] *Examining Spatial (Grid) Convergence* . NASA Glenn Research Center [online]. Dostupné z: <https://www.grc.nasa.gov/www/wind/valid/tutorial/spatconv.html>

[4] *Shallow water equations* - Wikipedia. [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations