

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní – Ústav technické matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Matematické modelování proudění
ne-Newtonovských tekutin
s aplikacemi v hemodynamice**

Mathematical modelling of flows of non-Newtonian fluids
with applications in hemodynamics

Alena Beldíková

2018/2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Beldíková** Jméno: **Alena** Osobní číslo: **465367**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Matematické modelování proudění ne-Newtonovských tekutin s aplikacemi v hemodynamice

Název bakalářské práce anglicky:

Mathematical modelling of flows of non-Newtonian fluids with applications in hemodynamics

Pokyny pro vypracování:

- 1) Odvození základních rovnic popisujících proudění nestlačitelné tekutiny.
- 2) Vytvoření stručného přehledu rheologických modelů použitelných pro popis proudění krve.
- 3) Popis numerického řešení dvojrozměrné úlohy proudění nestlačitelné tekutiny metodou konečných diferencí.
- 4) Naprogramování metody, její odladění a provedení ověřovacích výpočtů.
- 5) Grafické zpracování a zhodnocení výsledků numerické simulace.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Kozel K. a kol.: Numerické řešení problémů proudění I - III, a skripta ČVUT, FS.
- [2] Mazumdar J.N.: Biofluid Mechanics, World Scientific (1992)
- [3] Galdi G.P., Rannacher R., Robertson A.M., Turek S., Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation, Birkhäuser (2008)
- [5] Ortel H.: Prandtl-Essentials of Fluid Mechanics, Series: Applied Mathematical Sciences, Vol. 158, 3rd ed., Springer (2010)
- [6] Dvořák R., Kozel K.: Matematické modelování v aerodynamice, Vydavatelství ČVUT (1996)

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

ing. Tomáš Bodnár, Ph.D., ústav technické matematiky FS

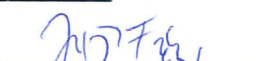
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: **17.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: _____


ing. Tomáš Bodnár, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

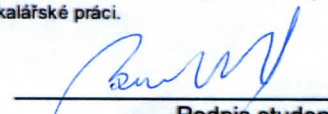

doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.4.2019
Datum převzetí zadání


Podpis studentky

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení vedoucího mé práce pana ing. Tomáše Bodnára, Ph.D. a s využitím uvedených literárních pramenů.

Datum:.....

.....

podpis

Poděkování

Chtěla bych především poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu ing. Tomášovi Bodnárovi, Ph.D., za jeho ochotu, odborné vedení a podnětné připomínky, které byly nezbytné pro napsání této práce. Můj dík také patří mým rodičům, kteří mi byli po celou dobu studia oporou.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je matematické modelování proudění nestlačitelných tekutin s aplikací v hemodynamice. Na začátku se práce zabývá popisem rheologických vlastností krve a zmiňuje nejčastější rheologické modely, které se pro modelování proudění krve používají. Následně se zabývá odvozením základních rovnic popisujících proudění nestlačitelné tekutiny a také odvozením analytického řešení speciálního případu Poiseuilleova proudění pro newtonovskou tekutinu a proudění popsaného pomocí power-law modelu pro tekutinu neneutronovskou. Na závěr práce je popsána dvourozměrná numerická simulace proudění, která může být využita jak pro simulaci proudění krve jakožto neneutronovské tekutiny, tak i pro simulaci proudění tekutin newtonovských. K numerickému řešení tato práce využívá metodu konečných diferencí. Numerická simulace je následně porovnána s analytickým řešením proudění odvozeného v této práci.

Klíčová slova:

Proudění, Poiseuilleovo proudění, power-law model, matematické modelování

Abstract

The aim of this bachelor thesis is mathematical modelling of flows of incompressible fluids with applications in hemodynamics. At the beginning this thesis deals with description of rheological properties of blood and mentions rheological models, which are used for modelling of blood flow. Then the thesis deals with derivation of the governing equations of incompressible fluids and also with derivation of an analytical solution for a particular case of Poiseuille's Flow for Newtonian fluid and the flow described using the power-law model for non-Newtonian fluid. Last chapter describes two-dimensional numerical flow simulation, which can be used for blood flow simulations as well as for Newtonian fluid flow. For the numerical simulation in this thesis is used the finite difference method. Numerical simulation is at the end compared with the analytical solutions, that were derivated in this thesis.

Key words:

Flow, Poiseuille's Flow, power-law model, mathematical modelling

Obsah

1 Fyzikální popis	8
1.1 Hemodynamika	8
1.2 Rheologie krve	8
1.2.1 Rheologie chování krve	10
1.3 Rheologické modely sloužící k popisu proudění krve	11
2 Matematický popis	14
2.1 Základní rovnice popisující proudění nestlačitelné tekutiny	14
2.1.1 Rovnice kontinuity	14
2.1.2 Pohybová rovnice	16
2.1.3 Navierovy-Stokesovy rovnice	18
2.1.4 Zjednodušení Navierových-Stokesových rovnic	20
3 Matematické modelování	21
3.1 Analytické řešení	21
3.1.1 Stacionární proudění newtonovské tekutiny mezi dvěma deskami	21
3.1.2 Stacionární proudění nenevtonovské tekutiny mezi dvěma deskami	23
3.2 Numerické metody	26
3.2.1 Metody řešení diferenciálních rovnic	26
3.2.2 Metoda konečných diferencí	26
3.2.3 Řešení Navierových-Stokesových rovnic pomocí metody konečných diferencí	28
3.3 Numerické testy	29
3.3.1 Úvodní simulace proudění newtonovských tekutin	29
3.3.2 Nastavení úloh	33
3.3.3 Simulace proudění nenevtonovské tekutiny	33
3.3.4 Simulace proudění newtonovské tekutiny	37
3.4 Výsledky numerického řešení a jejich porovnání s analytickým řešením	40
3.5 Vyhodnocení konvergence numerických simulací	42
4 Závěr	47

Seznam symbolů, značení a zkratek

Seznam zkratek

n_{it}	počet iterací
CFD	Computational fluid dynamics
FDM	Finite difference method
FEM	Finite element method
FVM	Finite volume method

Seznam symbolů

\mathbb{I}	jednotkový tenzor
α	index chování
β	koeficient umělé stlačitelnosti
Δt	časový krok
$\Delta x, \Delta y$	kroky sítě ve směru x a y
δ	koeficient tlumení
$\dot{\gamma}$	smyková rychlost
η	funkce viskozity
Λ	charakteristický čas spojený s pamětí tekutiny
λ	Druhý součinitel viskozity
μ	dynamická viskozita
ρ	hustota
τ	smykové napětí
\mathcal{F}_S	povrchové síly

\mathcal{T}	tenzor napětí
\mathcal{V}	objem
\mathcal{F}	síla
\mathcal{H}	hybnost
\mathcal{F}_v	objemové síly
\mathbb{D}	tenzor rychlosti deformace

Seznam značení

$\mathbf{T}(x, t, \mathbf{n})$	vektor napětí
C_1, C_2	integrační konstanty
G	gradient tlaku
H	vzájemná vzdálenost dvou desek
L	délka desek
L_x, L_y	délka výpočtové oblasti ve směru x a y
m	hmotnost
n_x, n_y	počet buněk sítě ve směru x a y
p	tlak
t	čas
U_{max}	maximální rychlost ve směru x
\mathbf{f}	výslednice všech vnějších sil
$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = (u, v)$	vektor rychlosti

Úvod

V této bakalářské práci se budeme zabývat matematickým modelováním proudění neneutonovských tekutin s aplikací v hemodynamice.

Hemodynamika je vědní obor zabývající se prouděním krve v krevním oběhu. Modelování proudění krve se může uplatňovat například při léčení lidských chorob, jako jsou cukrovka, různé revmatické nemoci nebo srdeční choroby, protože všechny tyto nemoci jsou spojeny se zvýšením viskozity krve. Doposud však neexistuje jednotný matematický model, který by dokázal popsat proudění krve ve všech částech lidského krevního oběhu, jelikož na toto proudění má vliv nespočet dalších faktorů a především, protože charakter krve může být různý v různých situacích – může být newtonovský i neneutonovský.

Kdy a za jakých podmínek je chování krve newtonovské, či neneutonovské se dozvíme v první části této práce.

Pro popis proudění nestlačitelných tekutin, kam řadíme i krev, jsou stěžejní Navierovy-Stokesovy rovnice, které vycházejí z rovnice kontinuity a pohybové rovnice. Všechny tyto rovnice budou odvozeny na následujících stránkách práce.

Dále, abychom mohli popsat takové proudění, využíváme tzv. rheologické modely. Tato práce obsahuje stručný přehled nejpoužívanějších rheologických modelů, které se používají pro popis proudění krve. Pro některé modely jsou známá i analytická řešení, jedním z nich je power-law model, kterým se budeme následně zabývat.

V současné době se složitější modely proudění řeší především numericky pomocí výpočetní techniky. V této práci se tedy zaměříme na řešení pomocí metody konečných diferencí v programu Matlab.

V závěru této práce se budeme zabývat vyhodnocením numerických simulací.

Kapitola 1

Fyzikální popis

1.1 Hemodynamika

Krev je viskózní, pro život nepostradatelná, tekutina, jejíž hlavní funkcí je doprava kyslíku a živin do všech tkání, odvádění tzv. odpadních produktů a ochrana organismu před infekcemi. Hemodynamika je věda zabývající se prouděním krve v krevním oběhu.

1.2 Rheologie krve

Krev je dle koncentrovaná suspenze tvořená krevními elementy, jako jsou červené krvinky (erythrocyty), bílé krvinky (leukocyty) a krevní destičky (trombocyty) obsažené v krevní plazmě. Tyto formované krevní elementy tvoří přibližně 45% z celkového objemu lidské krve. V této kapitole se budeme držet popisu z [5].

Krevní plazma

Plazma je tekutá složka krve složená primárně z vody (přibližně 90-92%). Zbytek tvoří především anorganické a organické látky (přibližně 1-2%) a bílkoviny (převážně albumin, globulin a fibrinogen).

Červené krvinky

Nejpočetnějším krevním elementem jsou červené krvinky, které jsou tvořeny vodným roztokem hemoglobinu, stejně jako anorganickými prvky (K, Na, Mg a Ca). Samy o sobě mají největší vliv na mechanické vlastnosti krve, které se však postupem času mění, jelikož krvinky stárnou (průměrná doba života červené krvinky je 100-120 dní). Tvar normálního erythrocytu je bikonkávní s průměrem 6 - 8 μm . Poměr mezi objemem červených krvinek a plné krve se nazývá *hematokrit*.

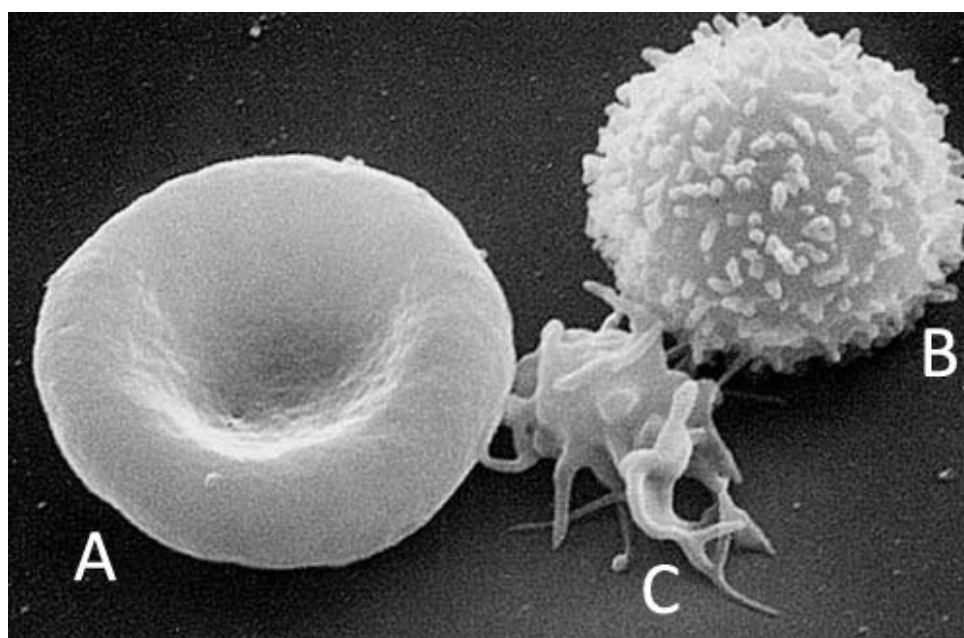
Bílé krvinky

Bílé krvinky jsou o mnoho méně početné, než krvinky červené (méně než 1% z celkového objemu krve). Hrají zásadní roli v ochraně těla proti infekcím, zejména v ničení bakterií a

virů a také tvorbě protilátek. Morfologicky rozlišujeme pět typů bílých krvinek: bazofily, eosinofily, neutrofilny, monocyty a lymfocyty. Leukocyty mají celkově malý vliv na rheologické vlastnosti krve, výjimkou jsou pouze extrémně malé cévy jako jsou kapiláry, nebo v případě onemocnění.

Krevní destičky

Krevní destičky jsou bezjaderné fragmenty buněk, které jsou o mnoho menší, než krvinky červené. Hrají důležitou roli v koagulaci a také v prevenci proti ztrátě krve. Pokud se dostanou do kontaktu s poškozenou stěnou cévy, dramaticky změny svou fyzickou formu a vypustí chemikálie, které aktivují nedaleké trombocyty a způsobí, že se začnou shlukovat a spolu s ostatními látkami vytvoří krevní sraženinu, která utěsní poškozenou stěnu cévy a tím zastaví krvácení.



Obrázek 1.1: Červená krvinka (A), Bílá krvinka (B) a Krevní destička (C). Převzato z [12].

1.2.1 Rheologie chování krve

V této kapitole si představíme, jaký je rozdíl mezi newtonovskou a neneutronovskou tekutinou a jaký charakter, zda newtonovský či neneutronovský, má krev. Informace uvedené v této kapitole jsme čerpali převážně z [7].

Newtonovská tekutina je taková tekutina, ve které je dynamická viskozita konstantní vůči všem smykovým rychlostem a tudíž vyhovuje Newtonovu zákonu viskozity:

$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

kde τ je smykové napětí, μ je dynamická viskozita a $\dot{\gamma}$ je smyková rychlost.

Nicméně existují tekutiny, které se neřídí lineární závislostí mezi smykovým napětím a smykovou rychlostí. Tekutiny, které vykazují nelineární závislost mezi smykovým napětím a smykovou rychlostí nazýváme *neneutronovské*.

Neneutronovské tekutiny mohou být rozděleny do tří základních kategorií:

1. Časově nezávislé neneutronovské tekutiny, ve kterých je smyková rychlost nelineární funkcí smykového napětí, nezávislým na smykovém čase a předchozích smykových rychlostech tekutiny.
2. Časově závislé neneutronovské tekutiny. Smykové rychlosti v těchto tekutinách závisí na smykovém čase nebo na předchozích smykových rychlostech tekutiny.
3. Viskoelastické tekutiny

Krev není ani homogenní, ani newtonovská. Samotná plazma by mohla být newtonovská s viskozitou asi 1,2 krát vyšší než má voda, nicméně viskozita pro celou krev se jeví závislá na smykové rychlosti a je měřena jako viskozita zdánlivá. Směs krevních elementů tedy dělá z krve tekutinu neneutronovskou.

Neneutronovské chování je do značné míry ovlivněno charakteristickým chováním červených krvinek, jelikož jejich podíl v krvi je ze všech krevních elementů nejvyšší. Jedná se hlavně o tyto tři schopnosti:

1. Tendence hromadit se při nízkých smykových rychlostech. Červené krvinky tvoří tvar připomínající komínky mincí, nazývaný také *rouleaux*.
2. Deformovat se při vysokých smykových rychlostech.
3. Tendence zarovnat se do směru proudění při vysokých smykových rychlostech.



Obrázek 1.2: Rouleaux. Převzato z [11]

V chování krve existují však určité anomálie. Tyto anomálie jsou dány vlastnostmi dvojího typu:

- (i) Při nízkých smykových rychlostech se zdánlivá viskozita výrazně navyšuje.
- (ii) Při vysokých hodnotách smykové rychlosti se červené krvinky začnou oddělovat a začne klesat viskozita, tudíž se krev začne chovat jako newtonovská kapalina s konstantní zdánlivou viskozitou.

Můžeme tedy usuzovat, že chování krve je při vysokých smykových rychlostech téměř newtonovské, zatímco při nízkých smykových rychlostech vykazuje mez kluzu a chování neneutronovské.

1.3 Rheologické modely sloužící k popisu proudění krve

V předchozí kapitole jsme si uvedli Newtonův zákon viskozity (1.1), kde viskozita μ byla konstantní. Abychom však mohli hovořit o viskozitě neneutronovské tekutiny, bylo nutné zavést jistá opatření a proto rheologové nahradili vztah pro nestlačitelnou newtonovskou tekutinu následujícím vztahem:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (1.2)$$

Jedná se o tvar pro takzvané *nestlačitelné zobecněné newtonovské tekutiny*, kde η je funkcí skalárních invariant smykové rychlosti $\dot{\gamma}$, [1].

Mezi nejznámější rheologické modely pro tyto zobecněné newtonovské tekutiny patří například Power-Law model, Binghamův model, Cassonův model nebo například model Carreau-Yasuda. Použití těchto modelů je často vhodné k popisu proudění krve.

Krev lze popsat pomocí mnoha matematických modelů, žádný z nich ale není schopný popsat všechny vlastnosti, jimiž se krev vyznačuje a tudíž se většinou model zaměřuje na jednu z vlastností.

Mezi další modely sloužící pro popsání nenewtonovských vlastností krve patří například Powell-Eyringův model, Herschel-Bulkleyův model nebo například Quemadův model (více o těchto modelech se dozvíme například v [1]). Tyto a výše zmíněné modely mají jedinou proměnnou a tou je smyková rychlost. Existují však i modely, které mají více proměnných a to například Walburn-Schneck model.

Níže vybrané modely si popíšeme podrobněji. Konstanty byly získány použitím nelineární regresní analýzy, pomocí dat získaných od 25 letého dárce ženského pohlaví. Více informací o tomto experimentu nalezneme v [5].

Carreau-Yasuda model

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_o - \eta_\infty} = \frac{1}{[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a]^{(1-n)/a}} \quad (1.3)$$

kde $\eta_o = 65,7 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\eta_\infty = 4,47 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\Lambda = 10,4 \text{ s}$, $n = 0,34$, $a = 1,76$

Modifikovaný Powell-Eyringův model

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_o - \eta_\infty} = \frac{\ln(1 + \Lambda\dot{\gamma})}{(\Lambda\dot{\gamma})^m} \quad (1.4)$$

kde $\eta_o = 57,46 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\eta_\infty = 4,93 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\Lambda = 5,97 \text{ s}$, $m = 1,16$

Crossův model

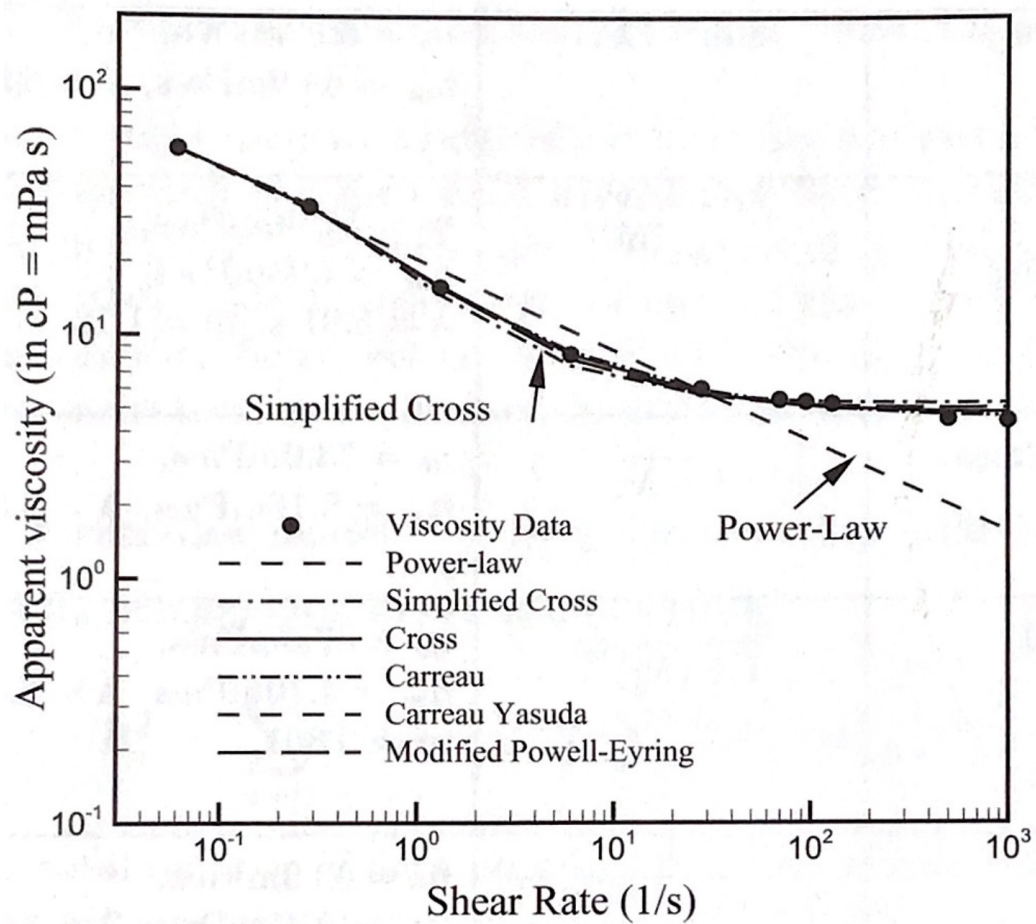
$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_o - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + (\Lambda\dot{\gamma})^m} \quad (1.5)$$

kde $\eta_o = 87,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\eta_\infty = 4,70 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\Lambda = 8,00 \text{ s}$, $m = 0,801$

Zatímco matematická definice η_o a η_∞ je vcelku jasná,

$$\eta_o = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}), \quad \eta_\infty = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma}) \quad (1.6)$$

v praxi může být η_o aproximováno pouze z experimentálních dat a η_∞ je pouze matematický konstrukt. Λ zde značí charakteristický čas spojený s pamětí tekutiny.



Obrázek 1.3: Závislost zdánlivé viskozity (Apparent viscosity) na smykové rychlosti (Shear Rate) porovnáním několika modelů. Převzato z [5].

Kapitola 2

Matematický popis

2.1 Základní rovnice popisující proudění nestlačitelné tekutiny

Výchozí rovnice dynamiky tekutin vycházejí ze základních fyzikálních zákonů - zákona zachování hmoty (Lavoisier, 1774), zachování energie (I. věta termodynamiky, kolem r. 1847) a z nezbytné rovnováhy sil (Newtonovy zákony).

V této kapitole se budeme zabývat odvozením těchto výchozích rovnic a to konkrétně odvozením rovnice kontinuity, pohybové rovnice a následně pomocí těchto rovnic odvodíme Navierovy-Stokesovy rovnice. Rovnice energetická odvozena nebude, jelikož v případě nestlačitelné tekutiny se stává nepodstatnou.

Budeme vycházet z odvození popsaných v [4], kde také najdeme více podrobností.

2.1.1 Rovnice kontinuity

V této kapitole budeme užívat následující značení: Pomocí \mathbb{R} budeme značit všechna reálná čísla. Ω bude značit souvislou oblast v \mathbb{R}^N . Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ je oblast. Potom $C(M)$ je lineární prostor všech funkcí spojitých na M . $C^k(\Omega)$ bude značit lineární prostor všech funkcí, které mají spojitě parciální derivace až do řádu k v Ω .

Hustotu tekutiny ρ můžeme vyjádřit jako funkci \mathcal{M} :

$$\rho : \mathcal{M} = \{(x, t); t \in (0, T), x \in \Omega_t\} \longrightarrow (0, +\infty)$$

která nám umožňuje určit hmotnost $m(\mathcal{V}, t)$ tekutiny obsažené v kterékoliv podoblasti $\mathcal{V} \subset \Omega_t$: jednotky

$$m(\mathcal{V}; t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) dx \tag{2.1}$$

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{M})$ a $\mathbf{v} \in [C^1(\mathcal{M})]^3$. Uvažujme libovolný časový okamžik $t_0 \in (0, T)$ a pohybující se část tekutiny, která je tvořena stejnými částicemi v každém okamžiku v čase t_0 ohraničenou oblastí $\mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \Omega_{t_0}$, nazývanou kontrolní objem. Pomocí $\mathcal{V}(t)$ označujeme oblast vymezenou touto částí tekutiny v čase $t \in (t_1, t_2)$, kde (t_1, t_2) je dostatečně malý

časový interval obsahující časový okamžik t_0 s vlastnostmi vymezenými podmínkami v lemmatu 2.1.1.

Lemma 2.1.1 *Nechť $t_0 \in (0, T)$, $\mathcal{V}(t_0)$ je ohraničená oblast a nechť $\overline{\mathcal{V}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. Potom existuje interval $(t_1, t_2) \ni t_0$, kde jsou splněny následující podmínky:*

a) *Zobrazení $t \in (t_1, t_2)$, $X \in \mathcal{V}(t_0) \rightarrow x = \varphi(X, t_0; t) \in \mathcal{V}(t)$ má spojitou derivaci prvního řádu vzhledem k proměnné t, X_1, X_2, X_3 a spojitou derivaci druhého řádu $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial X_i}$, $i = 1, 2, 3$.*

b) *Zobrazení $X \in \mathcal{V}(t_0) \rightarrow x = \varphi(X, t_0; t) \in \mathcal{V}(t)$*

c) *Inkluze*

$$\{(x, t); t \in [t_1, t_2], x \in \overline{\mathcal{V}(t)}\} \subset \mathcal{M}$$

platí a tím pádem zobrazení \mathbf{v} má spojitou a ohraničenou derivaci prvního řádu na $\{(x, t); t \in (t_1, t_2), x \in \mathcal{V}(t)\}$.

d) *$\mathbf{v}(\varphi(X, t_0; t), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t_0; t) \forall X \in \mathcal{V}(t_0), \forall t \in (t_1, t_2)$.*

Z toho důvodu se $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V}$ a podmínky a)-d) jsou splněny.

Jelikož oblast $\mathcal{V}(t)$ je tvořena stejnými částicemi v každém časovém okamžiku, zákon zachování hmotnosti může být formulován následujícím způsobem: *Hmotnost části tekutiny reprezentované oblastí $\mathcal{V}(t)$ nezávisí na čase t .*

To znamená, že

$$\frac{dm(\mathcal{V}(t); t)}{dt} = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \quad (2.2)$$

s ohledem na (2.1) získáváme:

$$m(\mathcal{V}(t); t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x, t) dx. \quad (2.3)$$

Věta 2.1.2 *Nechť podmínky a)-d) z Lemmatu 2.1.1 jsou splněny a nechť funkce $F = F(x, t)$ má spojitou omezenou derivaci prvního řádu v množině $\{(x, t); t \in (t_1, t_2), x \in \mathcal{V}(t)\}$. Potom pro všechny $t \in (t_1, t_2)$ existuje konečná derivace*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F(x, t) dx \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \text{grad } F(x, t) + F(x, t) \text{div } \mathbf{v}(x, t) \right] dx \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \text{div}(F\mathbf{v})(x, t) \right] dx. \end{aligned}$$

Důkaz této věty najdeme v [4].

S využitím Věty 2.1.2, jejíž předpoklady jsou splněny pro funkci $F=\rho$ z (2.2) a (2.3) dostáváme totožnou rovnici:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, t) \right] dx = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \quad (2.4)$$

Nyní pokud pro $t = t_0$ vezmeme v úvahu, že $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V}$, docházíme k závěru, že

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t_0) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, t_0) \right] dx = 0 \quad (2.5)$$

pro libovolný $t_0 \in (0, T)$ a pro libovolný kontrolní objem \mathcal{V} v Ω_{t_0} .

Lemma 2.1.3 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina.*

Pokud $f \in C^0(\Omega)$, potom $\int_{\mathcal{V}} f dx = 0$ pro jakoukoliv otevřenou ohraničenou množinu $\mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \Omega$.

Využitím spojitosti integrace v (2.5), Lemma 3.3 a zapsáním t namísto t_0 dostáváme následující rovnici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho(x, t) \mathbf{v}(x, t)) = 0, \quad t \in (0, T), x \in \Omega_t \quad (2.6)$$

Tato rovnice je odlišná forma zákona o zachování hmotnosti nazývaná *rovnice kontinuity pro stlačitelnou tekutinu*.

Uvažujeme-li pro nestlačitelnou tekutinu navíc $\rho = \text{konst.}$, zredukuje se tato rovnice pouze na podmínku

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

Tento vztah nazýváme rovnicí kontinuity pro nestlačitelné tekutiny.

2.1.2 Pohybová rovnice

Základní dynamická rovnice popisující pohyb tekutin bude odvozena ze *zákona zachování hybnosti*, který může být formulován následujícím způsobem: *Celková změna hybnosti části tekutiny, která je tvořena stejnými částicemi v každém časovém okamžiku a která zabírá oblast $\mathcal{V}(t)$ v okamžiku t , je rovna síle působící na $\mathcal{V}(t)$.*

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{M})$, $\mathbf{v} \in [C^1(\mathcal{M})]^3$. Celková hybnost částic obsažených v $\mathcal{V}(t)$ je dána jako:

$$\mathcal{H}(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) dx. \quad (2.8)$$

Mimoto označením síly působící na objem $\mathcal{V}(t)$ jako $\mathcal{F}(\mathcal{V}(t))$ můžeme zákon zachování hybnosti zapsat jako:

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathcal{V}(t))}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{V}(t)), \quad t \in (t_1, t_2). \quad (2.9)$$

Užitím Věty 2.1.2 dostáváme:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t) v_i(x, t)) + \operatorname{div}(\rho(x, t) v_i(x, t) \mathbf{v}(x, t)) \right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{V}(t)), \quad (2.10)$$

$$i = 1, 2, 3, t \in (t_1, t_2).$$

Nyní, pokud vezmeme v úvahu, že $t_0 \in (0, T)$ je libovolný časový okamžik a $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \Omega_{t_0}$, kde \mathcal{V} je libovolný kontrolní objem, dostáváme zákon o zachování hybnosti ve tvaru, kde namísto t píšeme t_0 :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t) v_i(x, t)) + \operatorname{div}(\rho(x, t) v_i(x, t) \mathbf{v}(x, t)) \right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{V}; t), \quad (2.11)$$

$$i = 1, 2, 3, \text{ pro libovolný } t \in (t_1, t_2) \text{ a libovolný kontrolní objem } \mathcal{V} \text{ v } \Omega_t.$$

Vektor $\mathcal{F}(\mathcal{V}; t)$ se složkami $\mathcal{F}_i(\mathcal{V}; t)$ označuje sílu působící na objem \mathcal{V} v čase t .

Jelikož si přejeme napsat rovnici (2.11) jako diferenciální, je nezbytné specifikovat charakter vektoru $\mathcal{F}(\mathcal{V}; t)$.

Rozlišujeme dvojí druh sil působících na tekutiny, takzvané síly objemové a síly povrchové.

- a) *Síly objemové* $\mathcal{F}_v(\mathcal{V}; t)$ působící v čase t na částice obsažené v kontrolním objemu $\mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \Omega_t$ jsou vyjádřeny pomocí vlastní hustoty (vztažené na jednotku hmotnosti) $\mathbf{f} \in C(\mathcal{M})^3$:

$$\mathcal{F}_v(\mathcal{V}; t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) dx. \quad (2.12)$$

- b) *Síly povrchové* \mathcal{F}_S , kterými tekutina obsažená vně \mathcal{V} působí na množinu $S \subset \partial\mathcal{V}$. Povrchová síla je vyjádřena pomocí vektoru napětí $\mathbf{T}(x, t, \mathbf{n})$ charakterizující hustotu povrchové síly:

$$\mathcal{F}_S = \int_S \mathbf{T}(x, t, \mathbf{n}(x)) dS. \quad (2.13)$$

$\mathbf{n}(x)$ je zde vnější jednotkový normálový vektor k $\partial\mathcal{V}$ na x . Budeme předpokládat, že $\mathbf{T} \in [C(\mathcal{M} \times S_1)]^3$, kde S_1 je povrch jednotkové sféry se středem v počátku. Potom celková povrchová síla působící na čas t v kontrolním objemu \mathcal{V} zvnějšku má podobu

$$\mathcal{F}_S(\mathcal{V}; t) = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{T}(x, t, \mathbf{n}(x)) dS. \quad (2.14)$$

Vektor napětí $\mathbf{T}(x, t, \mathbf{n})$ může být vyjádřen s pomocí některých jeho hodnot pro určité normálové vektory. Zvolíme si normály rovnoběžné se souřadnicovými osami

$$\tau_{ji} = T_i(x, t, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1),$$

$\tau_{ji} = \tau_{ji}(x, t)$, $i, j = 1, 2, 3$, nazýváme *komponenty tenzoru napětí*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$T_i(x, t, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 n_j \tau_{ji}(x, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Budeme předpokládat, že $\rho, v_i, \tau_{ij} \in C^1(\mathcal{M})$ a, že $f_i \in C(\mathcal{M})$ ($i, j = 1, 2, 3$). Vyjádřením celkové síly působící na tekutinu obsaženou v kontrolním objemu \mathcal{V} a dosazením do 2.11 dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho(x, t)v_i(x, t)) + \operatorname{div}(\rho(x, t)v_i(x, t)\mathbf{v}(x, t)) \right] dx \\ &= \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t)f_i(x, t)dx + \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{j=1}^3 \tau_{ji}(x, t)n_j(x)dS, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

pro každé $t \in (0, T)$ a pro libovolný kontrolní objem \mathcal{V} v Ω_t .

Mimoto použitím Greenovy věty získáváme pohybovou rovnici pro obecnou tekutinu v diferenciální formě:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Kterou můžeme také přepsat do vektorového tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathcal{T} \quad (2.19)$$

2.1.3 Navierovy-Stokesovy rovnice

Máme dány základní rovnice pro proudění stlačitelné tekutiny (viz [4]):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathcal{T} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho(x, t)\mathbf{v}(x, t)) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) = p\mathbf{f}\mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T}\mathbf{v}) + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (2.22)$$

Pro odvození Navierových-Stokesových rovnic použijeme pohybovou rovnici (2.20) a rovnici kontinuity (2.21). Rovnici energetickou (2.22) pro odvození nevyužijeme.

Budeme předpokládat, že tenzor napětí \mathcal{T} má tvar

$$\mathcal{T} = -p \mathbb{I} + \tau \quad (2.23)$$

kde \mathbb{I} je jednotkový tenzor

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τ popisuje smykové napětí a p tlak.

Pro určení viskózní části τ smykového napětí použijeme tzv. Stokesovy postuláty:

1. $\mathcal{T} = -p \mathbb{I} + \tau$
2. Tenzor \mathcal{T}' je spojitou funkcí tenzoru rychlosti deformace, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbf{v}) = (d_{ij})_{i,j=1}^3$, $d_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, a je nezávislý na jiných kinematických proměnných a také explicitně nezávislý na své pozici v tekutině ani na čase.
3. Tekutina je izotropní. To znamená, že všechny její vlastnosti jsou stejné ve všech směrech.
4. Pokud je tenzor rychlosti deformace nulový, znamená to, že v tekutině působí pouze tlaková síla. Proto pokud $\mathbb{D} = 0$ pak $\mathcal{T} = -p \mathbb{I}$
5. Závislost mezi τ a \mathbb{D} je lineární.

Tyto postuláty lze do matematického jazyka přeložit následujícím způsobem:

- 1.* $\mathcal{T} = -p \mathbb{I} + \tau$
- 2.* $\tau = f(\mathbb{D})$, f je spojitý
- 3.* Funkce f je invariantní vůči transformaci kartézského souřadnicového systému: $\mathbb{S}\mathcal{T}'\mathbb{S}^{-1} = f(\mathbb{S}\mathbb{D}\mathbb{S}^{-1})$ pro jakoukoliv ortonormální matici \mathbb{S}
- 4.* $f(0) = 0$
- 5.* Funkce f je lineární.

Po zahrnutí postulátů 1*-5* dostaneme tenzor napětí v následujícím tvaru:

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v}) \quad (2.24)$$

kde λ, μ jsou konstanty nebo skalární funkce termodynamických veličin.

Předpokládáme-li, že jsou dostatečně hladké tj. $\rho \in C^1(\mathcal{M})$ a $\frac{\partial v}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\mathcal{M})$ ($i, j = 1, 2, 3$) a pokud do pohybové rovnice (2.20) za \mathcal{T} dosadíme výraz (2.24) dostaneme takzvané *Navierovy-Stokesovy rovnice*:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})) \quad (2.25)$$

kde μ resp. λ jsou takzvaní první resp. druhý *součinitelé viskozity*. μ je nazývána *dynamická viskozita*.

Dynamická viskozita μ se uplatňuje se vazkých napětích, která vznikají při smykové deformaci elementu tekutiny. Druhá viskozita λ se uplatňuje ve vazkých napětích, která vznikají, mění-li se objem tekutiny při současném zachování jeho tvaru. Uplatňuje se též při rychlých změnách objemu a v reagující tekutině.

Předpokládáme-li, že se jedná o nestlačitelnou tekutinu, platí, že $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Po vyřazení pátého členu tedy dostáváme *Navierovy-Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění*:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})) \quad (2.26)$$

2.1.4 Zjednodušení Navierových-Stokesových rovnic

Vzhledem ke složitosti daných rovnic si pro účely naší další práce zavedeme další zjednodušení. Budeme tedy předpokládat, že:

1. Zanedbáváme vnější objemové síly, tudíž že $\mathbf{f} = 0$
2. Proudění je ve 2D.

Získáváme:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})) \quad (2.27)$$

respektive ve složkovém zápisu:

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.28)$$

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.29)$$

přeznačíme-li $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = (u, v)$, vydělíme rovnice hustotou ρ a použijeme-li vztah mezi kinematickou viskozitou ν a dynamickou viskozitou μ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.30)$$

dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (2.32)$$

Toto je tvar rovnic, se kterým budeme pracovat v další části věnované numerickým simulacím.

Kapitola 3

Matematické modelování

Matematické modelování můžeme dle [3] rozdělit na čtyři hlavní kroky.

Prvním krokem je formulace problému. V tomto kroku se snažíme vytvořit nejúplnější fyzikální model, který v sobě mimo jiné musí obsahovat například formulaci okrajových a počátečních podmínek, materiálové a termodynamické vztahy nebo vymezení platnosti všech vztahů.

V druhém kroku bychom se měli pokusit sestavit matematický model, který nám bude popisovat zvolený fyzikální model.

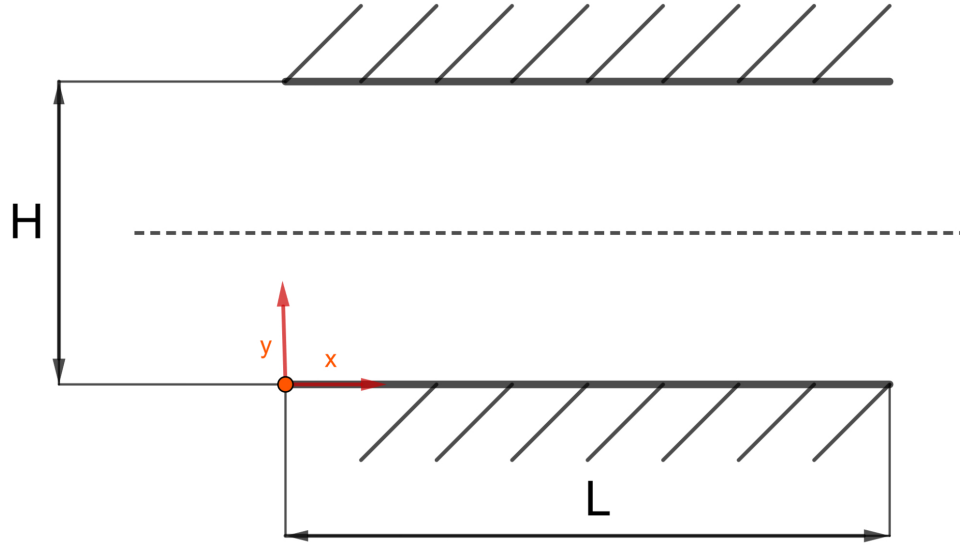
V kroku třetím bychom měli řešit okrajové, či počáteční úlohy pro naše konkrétní zadání a v závěrečném kroku bychom měli provést analýzu a interpretaci výsledků řešení našeho matematického modelu. V tomto kroku bychom mimo jiné měli posoudit vhodnost našeho použitého modelu, tzn. jestli a v jaké míře jeho výsledky souhlasí se skutečností.

3.1 Analytické řešení

V této kapitole se budeme zabývat analytickým řešením proudění newtonovské a následně nenewtonovské tekutiny pro vybraný jednoduchý případ. Toto analytické řešení dále využijeme pro validaci numerických simulací.

3.1.1 Stacionární proudění newtonovské tekutiny mezi dvěma deskami

Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami je speciální případ Poiseuillova proudění pro které známe analytické řešení, které si v této kapitole odvodíme. Budeme vycházet ze systému Navierových-Stokesových rovnic.



Obrázek 3.1: Schéma a parametry desek

Uvažujme, že rychlost $\mathbf{v} = (u(y); 0)$ a toto dosadíme do (2.28) a (2.29), po úpravách získáme:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.1)$$

Jelikož se nám tlak mění lineárně, můžeme předpokládat, že $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{konstantní}$ a můžeme si výraz $\frac{\partial p}{\partial x}$ upravit do následujícího tvaru:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} = G \quad (3.2)$$

kde L je délka desek a $\Delta p = p_{\text{výstup}} - p_{\text{vstup}}$ je rozdíl tlaku na výstupu a vstupu.

Po těchto předpokladech můžeme výraz (3.1) přepsat do následujícího tvaru:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\Delta p}{L\mu} \quad (3.3)$$

kde po integraci dostáváme:

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2L\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (3.4)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Máme dány okrajové podmínky $u(0) = 0$ a $u(H) = 0$, kde H je vzájemná vzdálenost dvou desek. Z okrajových podmínek jsme zjistili integrační konstanty jako:

$$C_1 = -\frac{\Delta p}{2L\mu} H \text{ a } C_2 = 0 \quad (3.5)$$

Po dosazení integračních konstant do (3.4) dostáváme profil rychlosti ve směru y :

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2L\mu}(y^2 - Hy) \quad (3.6)$$

Víme, že rychlostní profil je parabolický a za použití podmínek

$$u(0) = 0; \quad u(H) = 0; \quad u\left(\frac{H}{2}\right) = U_{max} \quad (3.7)$$

dostáváme

$$u(y) = \frac{4 \cdot U_{max}}{H} \left(-\frac{y^2}{H} + y \right). \quad (3.8)$$

Gradient tlaku G si můžeme vyjádřit jako:

$$G = \frac{\Delta p}{L} = \frac{2 \cdot \mu \cdot u(y)}{y^2 - H \cdot y} = -\frac{8 \cdot \mu \cdot U_{max}}{H^2} \quad (3.9)$$

3.1.2 Stacionární proudění newtonovské tekutiny mezi dvěma deskami

Viskozitu tekutiny v této kapitole budeme popisovat pomocí tzv. power-law modelu.

Budeme vycházet z odvození popsaném v [8] a budeme předpokládat Poiseuilleovo proudění ($\text{grad } p = (G, 0)$ a $\mathbf{v} = (u(y); 0)$), tudíž rovnice (2.27) přejde do tvaru

$$\text{grad } p = \text{div}(2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})) \quad (3.10)$$

a \mathbb{D} se nám zjednoduší do následujícího tvaru:

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Dále budeme předpokládat power-law model pro viskozitu, který může být zapsán jako

$$\eta = \mu(\epsilon + |\mathbb{D}|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.12)$$

kde α je index chování a pro newtonovskou tekutinu nabývá hodnoty $\alpha = 0$, $\epsilon > 0$ a kde smyková rychlost $\dot{\gamma} = 2\sqrt{\mathbb{D} : \mathbb{D}}$, tudíž si výraz (3.12) můžeme přepsat jako

$$\eta = \mu \left[\epsilon + \left(\frac{\dot{\gamma}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.13)$$

Dosazením (3.12) do (3.10) získáváme

$$\text{grad } p = \mu \text{div} \begin{pmatrix} 0 & (\epsilon + |\mathbb{D}|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \\ (\epsilon + |\mathbb{D}|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

což si můžeme rozepsat v následující dvě rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left((\epsilon + |\mathbb{D}|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.15)$$

a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.16)$$

Z rovnice (3.16) si můžeme ověřit, že tlak nezávisí na y .

Integrací rovnice (3.15) dostáváme:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot y + C_1 = \left[\epsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.17)$$

Abychom mohli dostat analytické řešení, budeme předpokládat, že $\epsilon = 0$. Tento předpoklad a drobné úpravy vedou k následujícímu tvaru:

$$2^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot y + C_1 \right) = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.18)$$

Pokud uvažujeme krev, součinitel α je záporný a proto se musíme ujistit, že $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$. Nicméně víme, že pro dvoudimenzionální Navierovy-Stokesovy rovnice je řešení jediné, proto pokud najdeme řešení, nebudeme se muset k tomuto omezení vrátit. Ze symetrie proudění a symetrických okrajových podmínek (viz obrázek 3.2) víme, že $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$. Toto vede k následujícímu tvaru rovnice:

$$-2^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot y + C_1 \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\alpha+1}. \quad (3.19)$$

Před pokračováním se musíme ujistit, že člen na levé straně rovnice není záporný. To platí pro $y > \frac{\mu}{G} C_1$ kde $G = \frac{\partial p}{\partial x}$, dostáváme na levé straně integrál

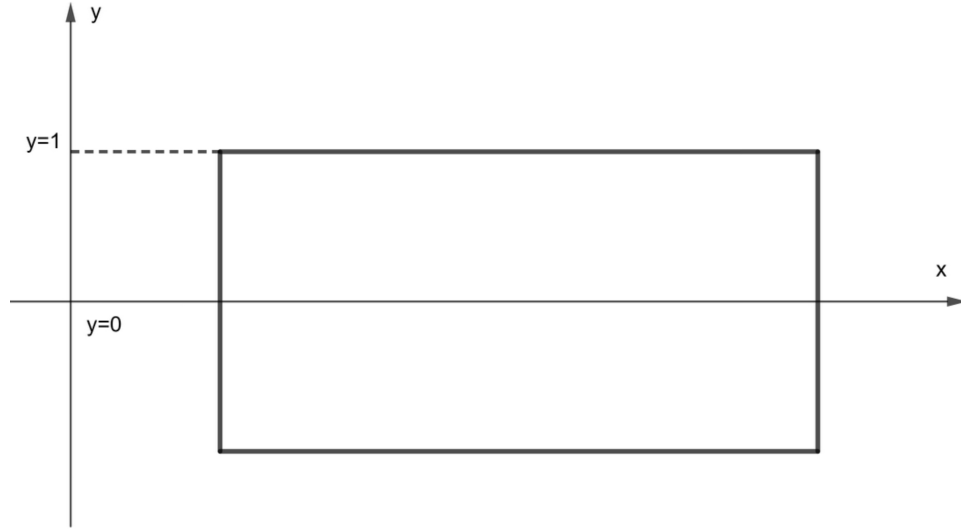
$$2^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \int \left(\frac{G}{\mu} y + C_1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} dy. \quad (3.20)$$

Tento integrál můžeme vyřešit substituční metodou a dostaneme:

$$u(y) = 2^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \frac{\mu(\alpha+1)}{G(\alpha+2)} \left(\frac{G}{\mu} y + C_1 \right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} + C_2 \quad (3.21)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Abychom dle [8] mohli jednodušeji určit integrační konstanty, musíme si zavést bezrozměrný a zjednodušený souřadný systém (viz obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Schéma desek s bezrozměrným a zjednodušeným souřadným systémem

V tomto systému budeme uvažovat tzv. *no-slip condition*, což nám předepisuje, že $u(y) = 0$ pro $y = 1$ a symetrické proudění, takže $\frac{\partial u}{\partial y}(y) = 0$ pro $y = 0$.

Použitím těchto okrajových podmínek získáváme tvar rovnice pro tekutinu aproximovanou pomocí power-law

$$u(y) = -2^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \left(-\frac{G}{\mu} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(y^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} - 1 \right). \quad (3.22)$$

Při dosazení $\alpha = 0$, což odpovídá newtonovské tekutině, do (3.22) vidíme, že dostáváme

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2L\mu} (y^2 - 1), \quad (3.23)$$

což je bezrozměrnou obdobou (3.6).

Převědeme-li naopak (3.22) do rozměrového tvaru odpovídajícímu souřadnému systému z obrázku 3.1, dostaneme

$$u(y) = 2^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \cdot \left(\frac{G}{\mu} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \cdot \left[\left| y - \frac{H}{2} \right|^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} - \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \right]. \quad (3.24)$$

Pokud opět dosadíme za $\alpha = 0$ dostáváme

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} (y^2 - Hy) \quad (3.25)$$

což přesně odpovídá řešení (3.6), které jsme dříve obdrželi pro newtonovskou tekutinu.

3.2 Numerické metody

Numerickou matematiku můžeme rozdělit dle [9] na teoretickou část, kde se provádí numerická analýza, jejíž cílem je rozbor vlastností numerických metod a algoritmů a na část praktickou, která se naopak zabývá použitím numerických metod a algoritmů.

V této kapitole se budeme zabývat částí praktickou, tedy numerickými metodami a to konkrétně diferenčními metodami. Tyto metody si představíme hlavně z toho důvodu, abychom mohli následně provádět numerické experimenty s využitím výpočetní techniky.

Abychom byli schopni naprogramovat řešení problému, musíme znát konečný počet vstupních i výstupních dat, což nám diferenciální rovnice samy o sobě znemožňují, jelikož představují nekonečně mnoho rovnic pro nekonečně mnoho neznámých funkčních hodnot.

3.2.1 Metody řešení diferenciálních rovnic

Metody řešení diferenciálních rovnic proudění lze realizovat pomocí různých schémat. Mezi hlavní metody diskretizace můžeme dle [10] řadit:

- Metodu konečných objemů (FVM Finite Volume Method). Tato metoda spočívá v zachování principů zákonů zachování bilancovaných veličin v konkrétním objemu v diskretizované podobě.
- Metodu konečných diferencí (FDM Finite Difference Method). Tuto metodu si blíže popíšeme v následující kapitole.
- Metoda konečných prvků (FEM Finite Element Method). Tato metoda dle [10] používá prvky namísto kontrolních objemů, na tyto prvky poté použije zákony bilancování proto, aby se následně mohli určit veličiny proudového pole v uzlových bodech prvku.

3.2.2 Metoda konečných diferencí

Pro termín diferenční metoda se také používá termín *metoda sítě*. V [10] se o metodě konečných diferencí dočteme, že je to metoda řešení, která je založená na konzervativním diferenciálním tvaru určujících rovnic v síti uzlových bodů proudového pole.

Uzlové body nejčastěji označujeme pomocí indexů i, j, k , které mají přirozenou celočíselnou hodnotu rostoucí ve směru os souřadnic x, y, z , [10].

V metodě konečných diferencí jsou derivace v původních rovnicích nahrazeny konečnými diferencemi.

Uvedeme si příklad na jednorozměrné diferenciální rovnici druhého řádu, který je uveden v [2].

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (3.26)$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami (to znamená, že hodnoty proměnné u jsou specifikovány na hranicích),

$$\begin{cases} u = 0 & \text{pro } x = 0 \\ u = 0 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

což v našem konkrétním případě bude tedy $u = x^2 - x$. Měli bychom poznamenat, že jednoduchá diferenciální rovnice s jednoduchými okrajovými podmínkami má hladké analytické řešení. Potom tedy všechny numerické metody (FDM, FEM a FVM) povedou k exaktnímu řešení, dokonce i při husté síti. Měli bychom také zmínit, že právě toto je náš zmiňovaný případ. Diferenční náhrady pro du/dx a d^2u/dx^2 jsou psány jako:

Dopředná diference

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (3.27)$$

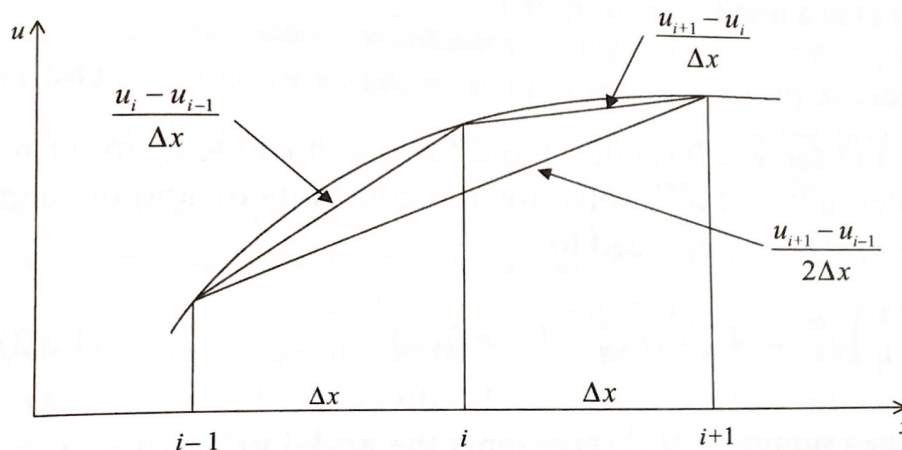
Zpětná diference

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.28)$$

Centrální diference

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx}\right) \cong \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_{i+1} - \left(\frac{du}{dx}\right)_i \right] = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right) \quad (3.30)$$



Obrázek 3.3: Porovnání uvedených diferencí. Převzato z [2].

Dosazením (3.30) do (3.26) a použitím tří bodů sítě získáme

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = 2 \quad (3.31)$$

Výsledek v $x = 1/2$ s $\Delta x = 1/2$ při současném dosazení za $u_{i-1} = 0, u_{i+1} = 0$ bude $u_i = -1/4$. Toto je stejný výsledek jako daný pomocí

$$u_i = (x^2 - x)_{x=1/2} = -\frac{1}{4}. \quad (3.32)$$

3.2.3 Řešení Navierových-Stokesových rovnic pomocí metody konečných diferencí

V této podkapitole si popíšeme, jakým způsobem jsme došli ke tvarům rovnic pro popis tlaku a složek rychlosti, které jsme následně použili v naší úvodní simulaci proudění.

Pro popis tlaku jsme použili tzv. *metodu umělé stlačitelnosti* (artificial compressibility method). Metoda dle [6] spočívá v tom, že k rovnici kontinuity (2.7) přidáme vhodně škálovanou časovou derivaci tlaku

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.33)$$

kde β je koeficient umělé stlačitelnosti.

Tudíž, pokud rovnici (3.33) upravíme, získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\beta^2 (\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (3.34)$$

Nyní pokud využijeme explicitní schéma časové diskretizace, můžeme rovnici (3.34) přepsat do následujícího tvaru

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \cdot \beta^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} \right). \quad (3.35)$$

Rovnici (3.35) jsme následně ještě rozšířili o koeficient tlumení δ , který jsme získali použitím zobecněného Lax-Friedrichsova schématu. Tudíž nám rovnice (3.35) přejde do tvaru

$$p_{i,j}^{n+1} = (1 - \delta) p_{i,j}^n + \delta \left(\frac{p_{i,j+1}^n + p_{i,j-1}^n + p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j}^n}{4} \right) - \Delta t \cdot \beta^2 \cdot \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} \right), \quad (3.36)$$

kde koeficient tlumení $\delta \in \langle 0; 1 \rangle$.

Pro popis horizontální složky rychlosti u a pro popis vertikální složky rychlosti v jsme použili následující rovnice, které jsme získali tím, že jsme na Navierovy-Stokesovy rovnice (2.31) a (2.32) aplikovali explicitní schéma časové diskretizace.

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left(-u_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} - v_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right), \quad (3.37)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left(-u_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} - v_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right). \quad (3.38)$$

3.3 Numerické testy

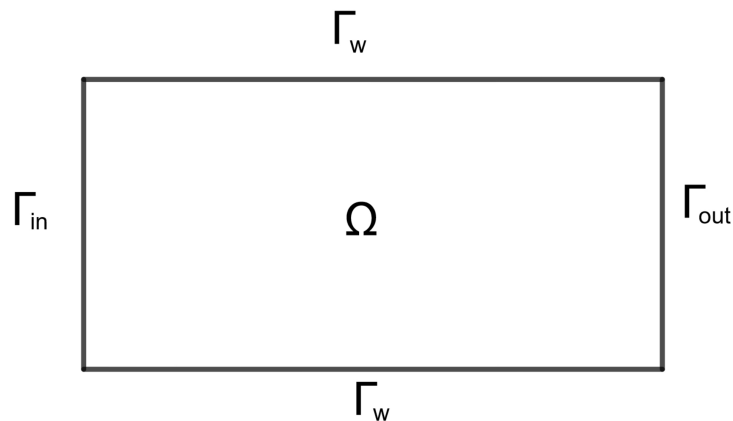
V následujících kapitolách se budeme zabývat numerickými testy, které byly prováděny v programu Matlab. Budeme zde konkrétně řešit dva případy - proudění mezi dvěma deskami pro newtonovskou a nenewtonovskou tekutinu. Tyto dva případy budou následně porovnány s již zmíněným analytickým řešením.

3.3.1 Úvodní simulace proudění newtonovských tekutin

Proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny mezi dvěma deskami můžeme v numerické simulaci popsat pomocí dvou variant. První variantou je, že na začátku předepíšeme rychlostní profil a tlakový spád nám se nám vyvine a nebo naopak zadáme tlakový spád mezi vstupem a výstupem a vyvine se nám rychlostní profil.

Jako úvodní simulaci si předvedeme proudění newtonovských tekutin s variantou předepsání rychlostního profilu na vstupu. Abychom však byli schopni simulaci uskutečnit, musíme si v první řadě určit okrajové podmínky.

Máme dānu výpočtovou oblast Ω (viz. obrázek 3.4), která má hranice $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{out}$.



Obrázek 3.4: Schéma výpočtové oblasti Ω

Na spodní a horní části oblasti použijeme tzv. *no-slip conditions*, to znamená, že proudící tekutina má nulovou rychlost vzhledem k této oblasti. Tlak zde bude popsán

pomocí tzv. *Neumannovy podmínky*. Okrajové podmínky jsme si tudíž určili následující:

$$\begin{aligned}\Gamma_{in} : \quad & u = U(y), \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \\ \Gamma_{out} : \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad p = 0 \\ \Gamma_w : \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0\end{aligned}$$

Dalším nezbytným předpokladem pro simulaci proudění je diskretizace fyzikálního prostoru ve kterém se proudění počítá. To znamená, že se prostor, ve kterém se numericky řeší rovnice proudění nejprve pokryje uzlovými body. Spojnice těchto dvou sousedních bodů tvoří hranu, ze které se následně sestaví různé prvky do dvourozměrné nebo třírozměrné sítě. Sítě mají několik podob např. strukturované, nestrukturované nebo hybridní, [10].

V našem případě se bude jednat o dvourozměrnou kartézskou síť se souřadným systémem x - y a počtem buněk sítě $n_x = 80$ a $n_y = 40$. Délka výpočtové oblasti je ve směru x $L_x = 2$ a ve směru y $L_y = 1$. Parametry sítě lze dle potřeby měnit, abychom dosáhli hustější nebo naopak řidší sítě.

Dále je nutné před spuštěním programu nastavit následující parametry numerické simulace: časový krok Δt , maximální rychlost ve směru x U_{max} , koeficient umělé stlačitelnosti β , dynamickou viskozitu μ , hustotu tekutiny ρ a koeficient tlumení δ . Dále je potřeba zadat počet iterací n_{it} , které má program vykonat.

Zvolili jsme následující nastavení:

- $\Delta t = 0,0006$ s
- $U_{max} = 1$ m/s
- $\beta = 30.0$
- $\mu = 10^2$ Pa · s
- $\rho = 1000.0$ kg · m⁻³
- $\delta = 0,04$
- $n_{it} = 30\ 000$

Po nastavení následujících hodnot již nemusíme do programu zasahovat.

Program si následně spočítá kroky sítě jako

$$\Delta x = \frac{L_x}{n_x} \quad \text{a} \quad \Delta y = \frac{L_y}{n_y} \quad (3.39)$$

a kinematickou viskozitu ν_0 jako

$$\nu_0 = \frac{\mu}{\rho} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (3.40)$$

Rychlostní profil na vstupu byl popsán pomocí funkce

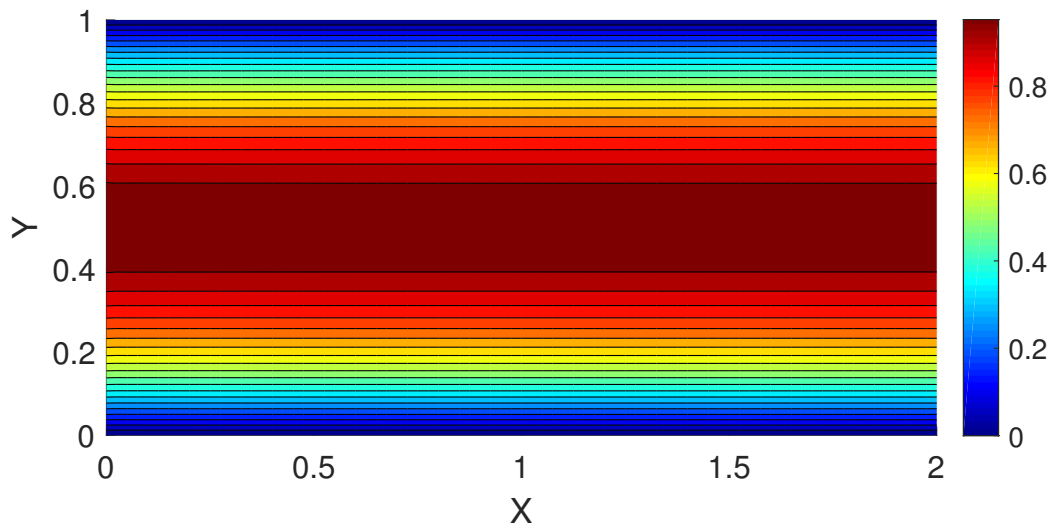
$$u = U(y) = \frac{4 \cdot U_{max}}{L_y} \cdot \left(-\frac{y^2}{L_y} + y \right). \quad (3.41)$$

Tento rychlostní profil jsme získali z analytického řešení. Konkrétně se jedná o výraz (3.8), který je pouze přepsaný tak, abychom mohli použít parametry zavedené v našem programu.

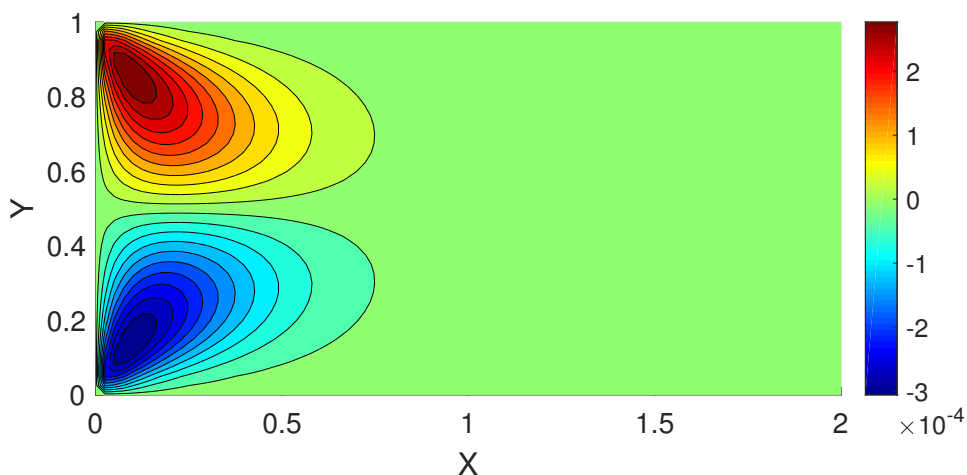
Hodnoty tlaku program počítá z rovnice (3.36), hodnoty horizontální složky u z (3.37) a hodnoty vertikální složky v z (3.38) a po vykonání uvedeného počtu iterací se program sám ukončí.

Numerickou simulaci lze vyhodnotit mnoha různými způsoby, v našem případě budou pro vyhodnocení použity pole veličin pro horizontální složku rychlosti, vertikální složku rychlosti a tlak.

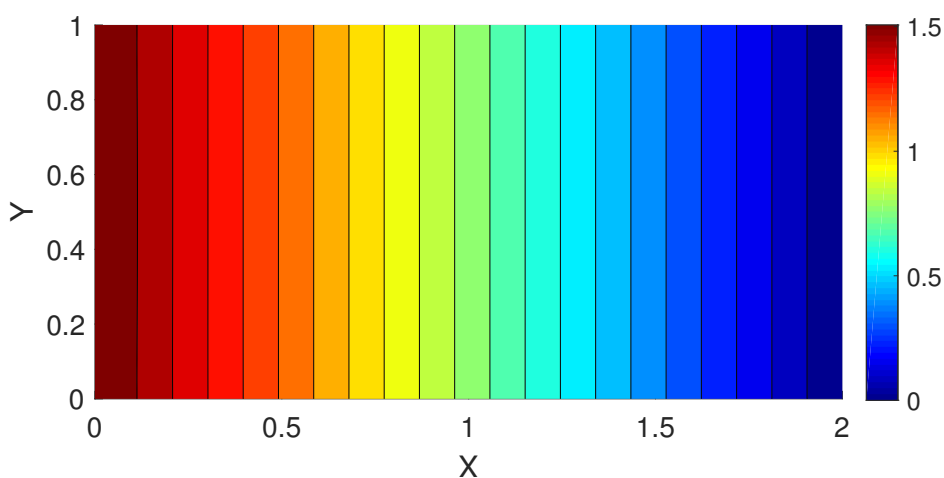
Na obrázcích vidíme tzv. izočáry, což jsou čáry, podle které má zvolená fyzikální veličina stejnou hodnotu, [10].



Obrázek 3.5: Izočáry horizontální složky u



Obrázek 3.6: Izočáry vertikální složky v



Obrázek 3.7: Izočáry tlaku p

Z těchto obrázků lze usoudit, že numerická simulace byla úspěšná a tudíž, že se jedná o ustálené proudění.

Na obrázku 3.5 se můžeme přesvědčit, že izočáry horizontální složky u jsou přímky rovnoběžné s osou x . Obdobně jsou na tom i izočáry tlaku (obrázek 3.7), které jsou zobrazeny jako přímky rovnoběžné s osou y , což znamená, že se tlak mění pouze ve směru x a navíc se na tomto obrázku můžeme přesvědčit, že jednotlivé izočáry jsou ekvidistantní, což nám potvrzuje, že je gradient tlaku konstantní.

Na obrázku 3.6 můžeme na vstupu vidět přechodový efekt, i přes to ale vidíme, že hodnota vertikální složky rychlosti je řádově menší než hodnota horizontální složky rychlosti a že na výstupu dochází k ustálení a dosažení nulových hodnot.

Jelikož nám simulace dopadla tak, jak jsme očekávali, můžeme se přesunout na další kapitolu, kde si představíme numerickou simulaci neneutronovské tekutiny.

3.3.2 Nastavení úloh

Jelikož u proudění neneutronovské tekutiny dopředu nevíme, jaký tvar bude mít rychlostní profil a kvůli následnému srovnání chceme vytvořit společný program pro oba dva případy (jak newtonovské, tak i neneutronovské tekutiny), musíme se přiklonit k variantě, která spočívá v předepsání tlakového spádu mezi vstupem a výstupem.

Použitím této varianty jsme byli schopni vytvořit jeden společný program pro oba dva typy tekutin. Pomocí námi zvolených parametrů je tedy následně možné mezi jednotlivými tekutinami program přepínat a nastavení úloh, jak geometrické, tak i parametrické, bude tedy pro oba dva případy stejné.

Zvolili jsme hodnoty pro krev z power-law modelu, které byly naměřeny ve stejném experimentu, jako materiálové konstanty uvedených rheologických modelů v kapitole 2.3, tudíž z [5]. Parametry sítě jsme zvolili stejné jako v kapitole 4.3.1., od které se tato simulace odvíjí.

Pro variantu předepsání tlakového spádu jsme použili tedy následující nastavení:

- $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $\delta = 0,01$
- $n_{it} = 100\,000$

Okrajové podmínky jsme museli kvůli změně varianty také pozměnit. Předepsali jsme tedy následující okrajové podmínky, které odpovídají obrázku 3.4 a tudíž i výpočtové oblasti Ω :

$$\begin{aligned}\Gamma_{in} : \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad p = 1 \\ \Gamma_{out} : \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad p = 0 \\ \Gamma_w : \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0\end{aligned}$$

3.3.3 Simulace proudění neneutronovské tekutiny

U newtonovských tekutin je viskozita konstantní, u neneutronovských tekutin však toto obecně neplatí. Viskozitu jsme si z tohoto důvodu museli předepsat jako funkci smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ a to

$$\nu = K \cdot \dot{\gamma}^\alpha \tag{3.42}$$

kde K je koeficient konzistence a kde $\alpha = 0$ volíme pro newtonovské tekutiny a $\alpha \neq 0$ pro neneutronovské tekutiny, tudíž se jedná o index chování.

Jak jsme si popsali v předchozí kapitole, volili jsme hodnoty pro krev z power-law modelu, které byly naměřeny v experimentu v [5]. Pro naši simulaci jsme tedy použili:

- $K = 20,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}^{\alpha+1}$
- $\alpha = -0,372$

Smykovou rychlost $\dot{\gamma}$ (v literatuře dále dohledatelnou jako smykový nebo rychlostní spád nebo smykový gradient) jsme si již dříve definovali jako

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{\mathbb{D} : \mathbb{D}} \quad (3.43)$$

V programu jsme si tedy zavedli diskretizovanou verzi

$$\dot{\gamma} = \left[\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.44)$$

Dále abychom zajistili, že hodnota viskozity neporoste do nekonečna, omezili jsme ji v programu následujícím způsobem

$$\nu_{i,j} = \min(K \cdot \dot{\gamma}^\alpha, \nu_0). \quad (3.45)$$

Jelikož viskozita již není v tomto případě konstantní, museli jsme v programu zavést okrajové podmínky i pro viskozitu. Pomocí lineární extrapolace jsme předepsali okrajové podmínky na vstupu jako $\nu_{1,j} = 2 \cdot \nu_{2,j} - \nu_{3,j}$, na výstupu jako $\nu_{nx+1,j} = 2 \cdot \nu_{nx,j} - \nu_{nx-1,j}$, na horní části oblasti jako $\nu_{i,ny+1} = 2 \cdot \nu_{i,ny} - \nu_{i,ny-1}$ a na spodní části oblasti jako $\nu_{i,1} = 2 \cdot \nu_{i,2} - \nu_{i,3}$.

Jak jsme již zmínili, u nenewtonovských tekutin je viskozita proměnná, z tohoto důvodu jsme museli modifikovat i předpis (3.37) pro horizontální složku u na

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left[-u_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} - v_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{\left(\frac{\nu_{i+1,j}^n + \nu_{i,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} - \left(\frac{\nu_{i,j}^n + \nu_{i-1,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\left(\frac{\nu_{i,j+1}^n + \nu_{i,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} - \left(\frac{\nu_{i,j}^n + \nu_{i,j-1}^n}{2} \right) \cdot \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y}}{\Delta y} \right) \right] \quad (3.46)$$

a předpis (3.38) pro vertikální složku v na

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left[-u_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} - v_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} + \left(\frac{\left(\frac{\nu_{i+1,j}^n + \nu_{i,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i,j}^n}{\Delta x} - \left(\frac{\nu_{i,j}^n + \nu_{i-1,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\left(\frac{\nu_{i,j+1}^n + \nu_{i,j}^n}{2} \right) \cdot \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta y} - \left(\frac{\nu_{i,j}^n + \nu_{i,j-1}^n}{2} \right) \cdot \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y}}{\Delta y} \right) \right]. \quad (3.47)$$

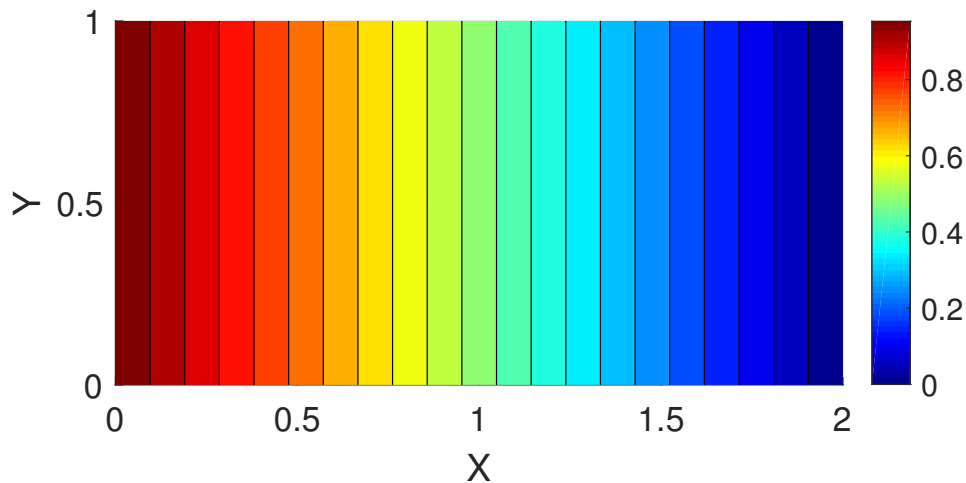
Předpis pro tlak zůstal nezměněný a to

$$p_{i,j}^{n+1} = (1 - \delta)p_{i,j}^n + \delta \left(\frac{p_{i,j+1}^n + p_{i,j-1}^n + p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j}^n}{4} - \Delta t \cdot \beta^2 \cdot \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y} \right) \right). \quad (3.48)$$

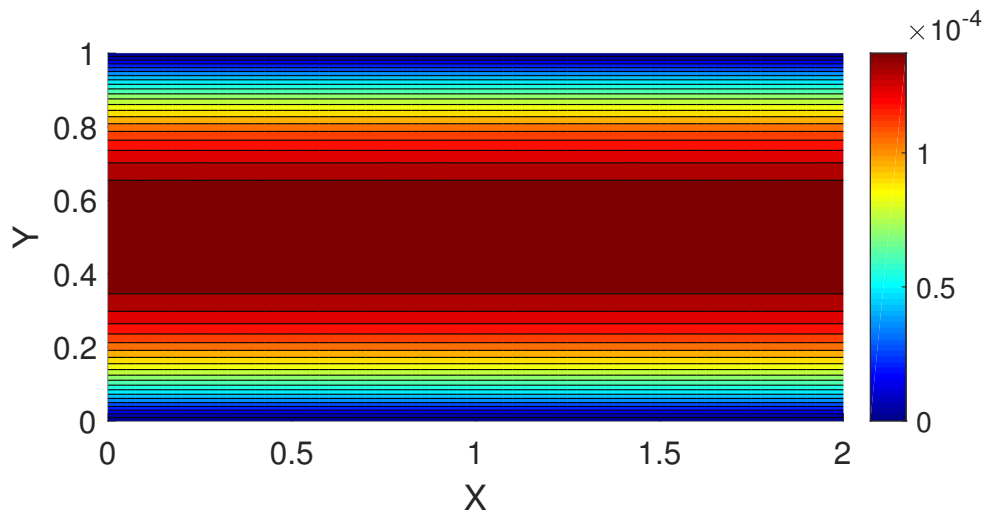
Pro simulaci proudění neneutronovské tekutiny jsme v programu nastavili následující hodnoty

- $\Delta t = 6 \cdot 10^{-5}$ s
- $\beta = 100$

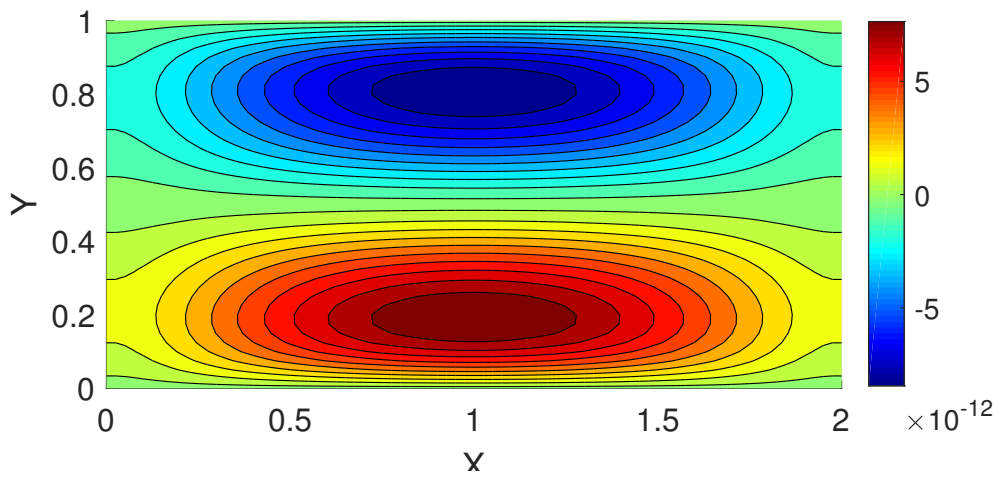
Z následujících obrázků lze usoudit, že numerická simulace pro případ neneutronovské tekutiny byla úspěšná. Izočáry tlaku jsou zde opět nezávislé na souřadnici y a jsou ekvidistantní. To samé platí i u horizontální složky rychlosti, kde jsou izočáry naopak rovnoběžné s osou x . Rychlosti, které můžeme vidět na následujících obrázcích, neodpovídají skutečným rychlostem krve v krevním oběhu. Toto je způsobeno tím, že jsme se nedrželi fyziologických rozměrů oblasti proudění.



Obrázek 3.8: Izočáry tlaku p

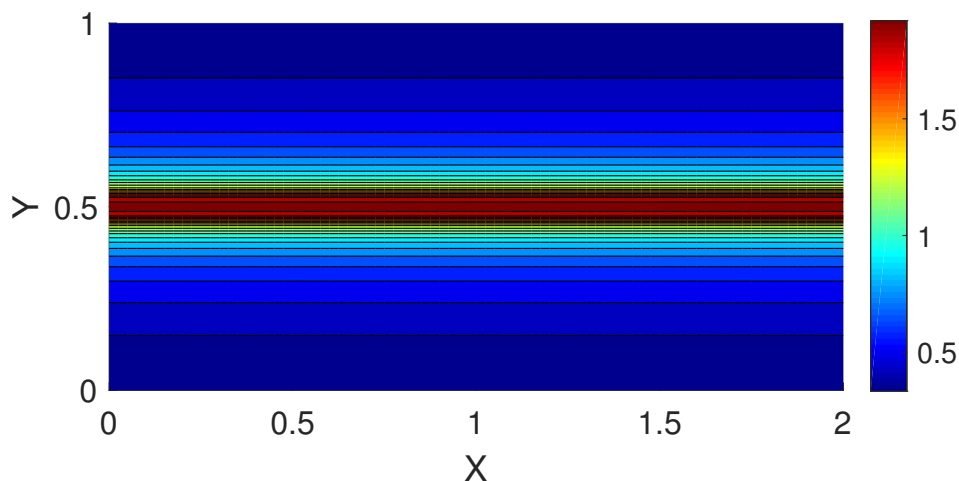


Obrázek 3.9: Izočáry horizontální složky u



Obrázek 3.10: Izočáry vertikální složky v

Jelikož se jedná o neneutronovskou tekutinu, jejíž viskozita není konstantní, můžeme si v tomto případě nechat vykreslit i izočáry pro viskozitu.



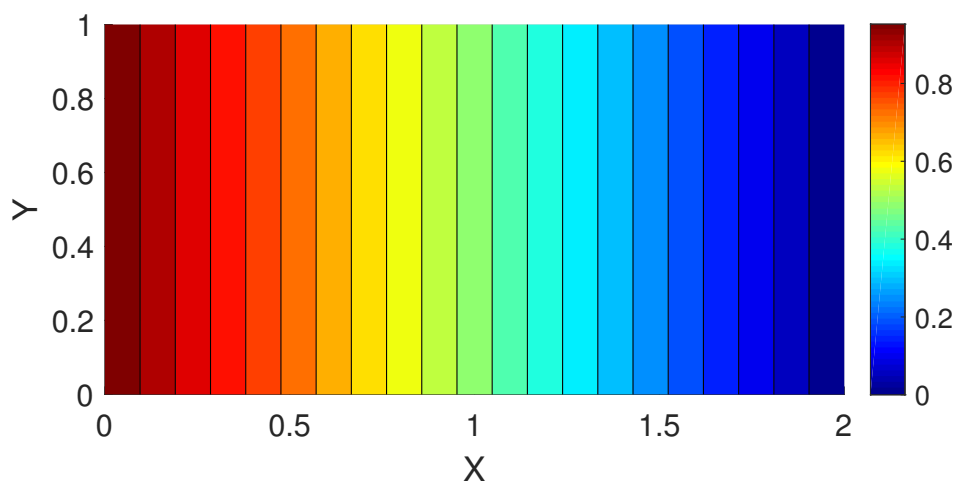
Obrázek 3.11: Izočáry viskozity ν

3.3.4 Simulace proudění newtonovské tekutiny

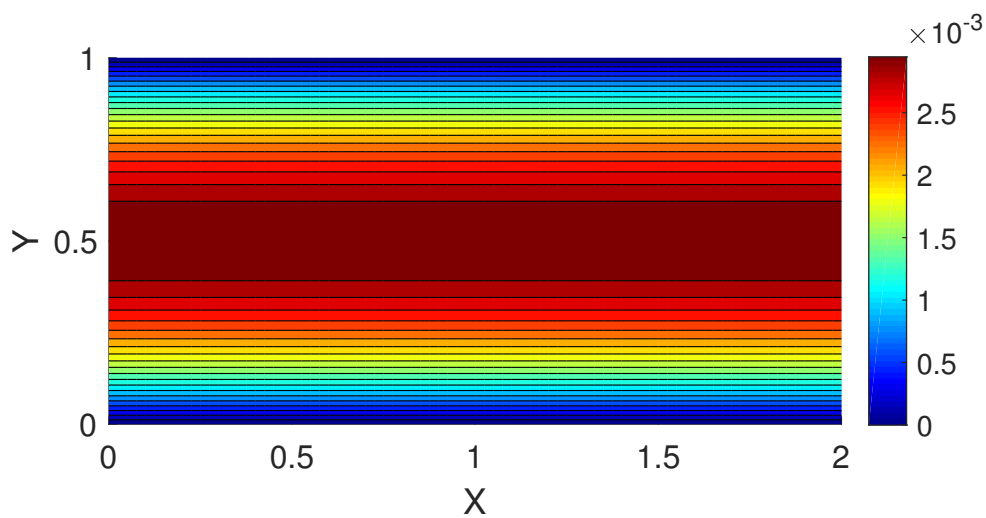
Jelikož nám nastavení naší numerické simulace dovoľovalo změnou pouze vybraných parametrů provést simulaci i newtonovské tekutiny, provedli jsme tuto simulaci také, abychom ji mohli následně porovnat s odvozeným analytickým řešením. Ke změnám došlo v následujících parametrech:

- $\Delta t = 240 \cdot 10^{-5}$ s
- $\alpha = 0$
- $\beta = 10$

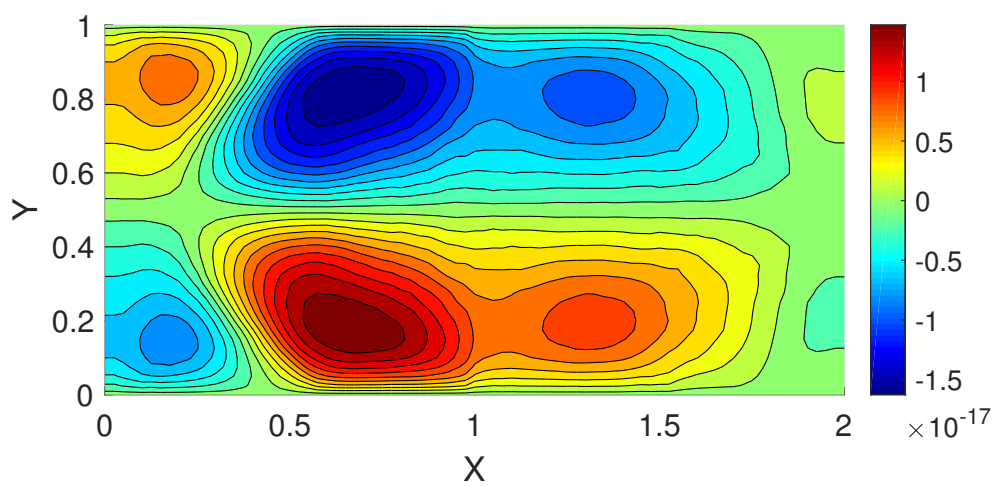
Výsledky, které si následně předvedeme, byly stejně uspokojivé, jako v případě neneutronovské tekutiny.



Obrázek 3.12: Izočáry tlaku p



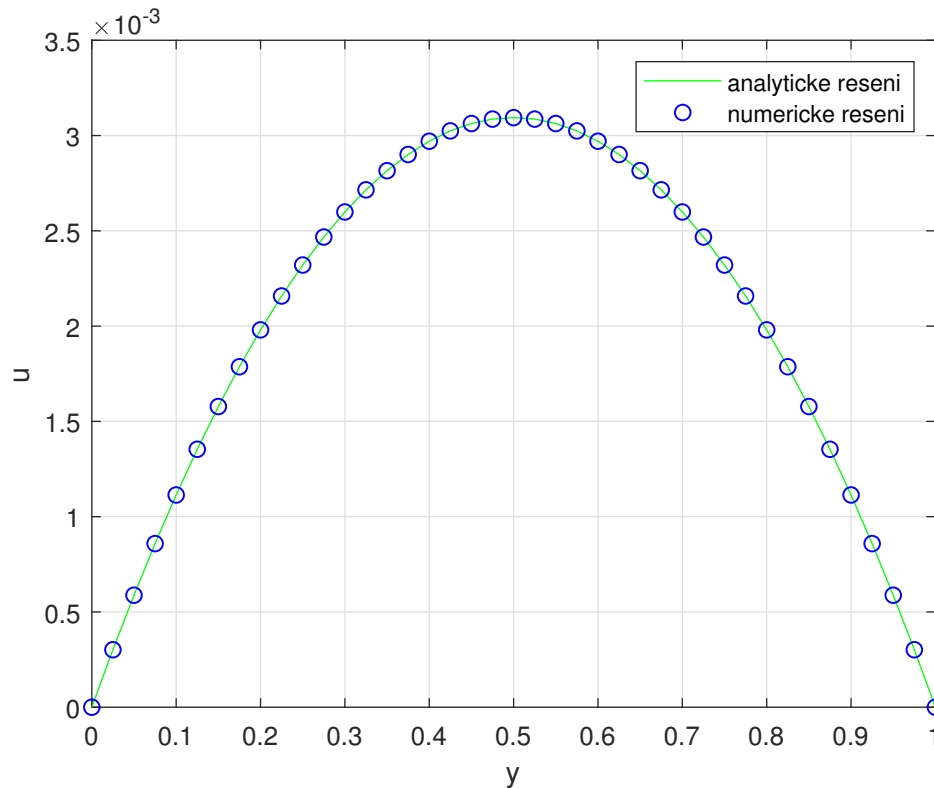
Obrázek 3.13: Izočáry horizontální složky u



Obrázek 3.14: Izočáry vertikální složky v

3.4 Výsledky numerického řešení a jejich porovnání s analytickým řešením

Nejprve budeme porovnávat analytické řešení (3.6) pro newtonovskou tekutinu, které jsme získali použitím speciálního případu Poiseuillova proudění, s numerickým řešením naprogramovaným v programu Matlab (kde $\alpha = 0$). Zbývající hodnoty byly nastaveny jako v kapitole 3.3.4.



Obrázek 3.15: Závislost horizontální složky rychlosti u na souřadnici y pro newtonovskou tekutinu

Jak je zřejmé z obr. 3.15 rozdíl řešení je malý. Abychom však mohli výsledek kvantifikovat, musíme chybu mezi jednotlivými metodami řešení spočítat jako

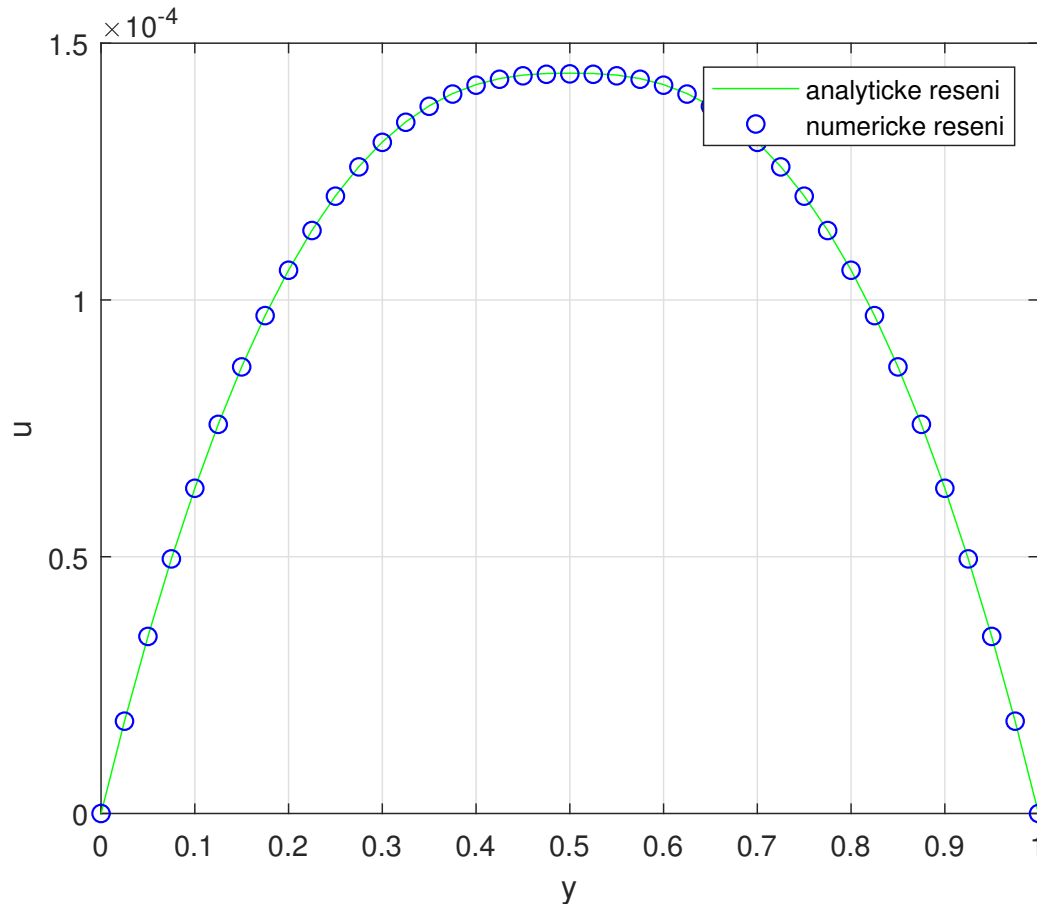
$$\text{err} = \frac{1}{n_y} \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y+1} (u_j - u(y_j))^2} \quad (3.49)$$

kde u_j je hodnota získaná z numerického řešení, kde $i = \frac{n_x}{2}$ (abychom rychlost odečítali v polovině výpočtové oblasti) a $u(y_j)$ je hodnota z analytického řešení.

Z tohoto vztahu dostaneme číslo, které vypovídá o hodnotě chyby, které se dopouštíme použitím numerického řešení na rozdíl od analytického. Chyba, které jsme se dopustili v tomto případě je rovna $1,3789 \cdot 10^{-18}$.

Jak je zřejmé ze vztahu (3.49), velikost chyby bude také záviset na velikosti buňky sítě n_y .

Nyní si předvedeme stejné srovnání, ale tentokrát pro nenewtonovskou tekutinu. Zde budeme porovnávat analytické řešení z power-law modelu (3.24) s numerickou simulací. Vykreslíme si tedy znovu porovnání jednotlivých metod.



Obrázek 3.16: Závislost horizontální složky rychlosti u na souřadnici y pro nenewtonovskou tekutinu

Již z grafu lze usoudit, že rozdíl mezi jednotlivými metodami není opět příliš výrazný. Abychom to však mohli posoudit i z jiného pohledu, dosadili jsme si hodnoty z tohoto grafu do výrazu (3.49). Z tohoto výrazu jsme dostali hodnotu chyby jako $err = 1,2174 \cdot 10^{-8}$. Můžeme si také všimnout změny tvaru rychlostního profilu.

Změnou parametrického nastavení sítě, tzn. jejím zhuštěním, můžeme dosáhnout menších chyb. Tohoto zmenšení však dosáhneme na úkor prodloužení výpočtového času. Proto se zde naskytne otázka, zda je chyba natolik velká, aby mělo smysl síť zhušťovat.

Jak z grafických výstupů, tak i z hodnot z výrazu (3.49) lze usoudit, že se numerická simulace v obou případech, jak v případě newtonovské, tak v případě nenewtonovské tekutiny velice blíží analytickým řešením, které jsme si v této práci odvodili. Avšak simulace

pro newtonovskou tekutinu byla přesnější na rozdíl od simulace pro tekutinu neneutronovskou. Jak jsme se již zmínili výše, hodnotu chyby pro neneutronovskou tekutinu můžeme snížit zhuštěním sítě.

3.5 Vyhodnocení konvergence numerických simulací

Konvergenci řešení lze vyhodnotit několika různými způsoby. V našem případě budeme konvergenci vyhodnocovat jako změnu řešení v závislosti na iteraci. Vypočítáme si tedy tzv. reziduum, které si následně vykreslíme do grafu v závislosti na proběhlých iteracích. Toto nám pak podá informaci o průběhu ustalování jednotlivých veličin.

Jelikož jsme řešili současně tlak i složky rychlosti, je nutné vyhodnotit rezidua pro všechny zvlášť.

Reziduum pro tlak spočítáme jako

$$\text{rez } p = \frac{\sqrt{\sum (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n)^2}}{n_x \cdot n_y}, \quad (3.50)$$

tedy jako Euklidovskou normu vydělenou počtem buněk sítě n_x a n_y .

Obdobně si spočítáme reziduum pro horizontální složku u

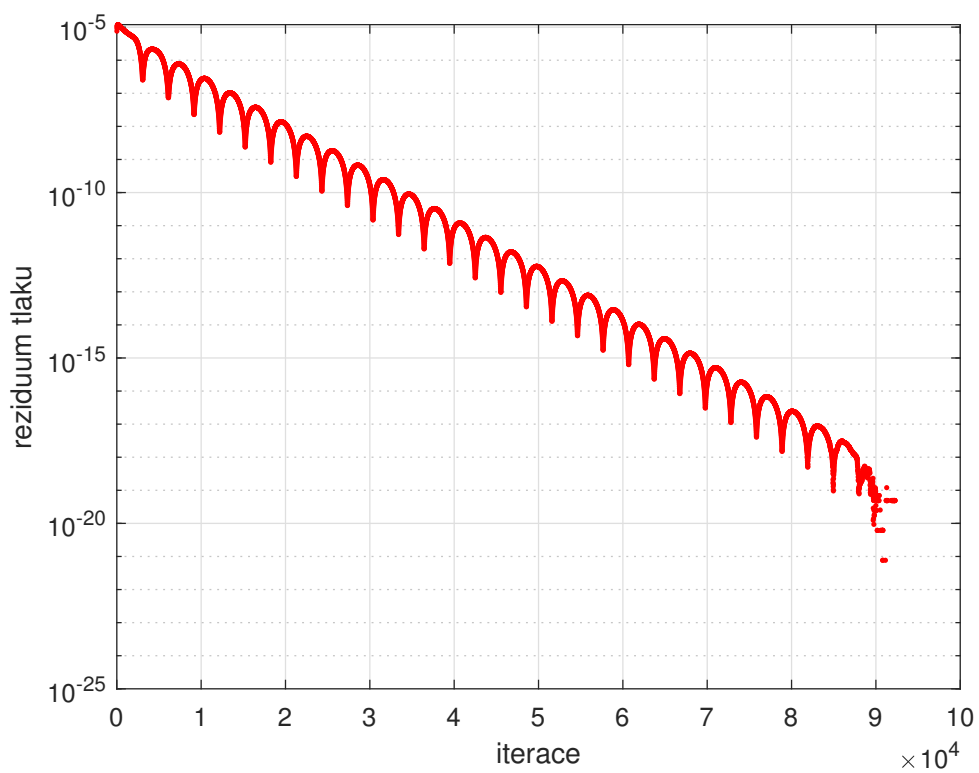
$$\text{rez } u = \frac{\sqrt{\sum (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)^2}}{n_x \cdot n_y} \quad (3.51)$$

a pro vertikální složku v

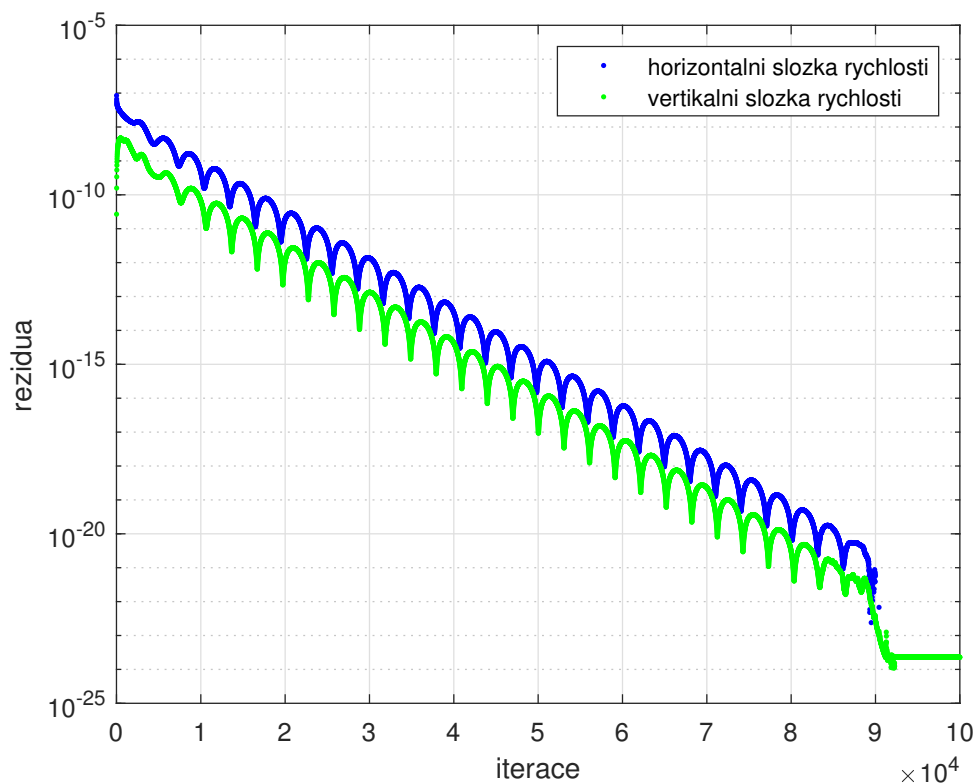
$$\text{rez } v = \frac{\sqrt{\sum (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n)^2}}{n_x \cdot n_y}. \quad (3.52)$$

Víme, že pokud reziduum dosáhne numerické nuly, dojde k ustálenému stavu jednotlivých veličin.

Abychom viděli řádové změny rezidua, vyneseme si jej v logaritmických souřadnicích. Nejdříve si uvedeme příklady reziduí pro newtonovskou tekutinu.



Obrázek 3.17: Závislost rezidua tlaku na počtu iterací



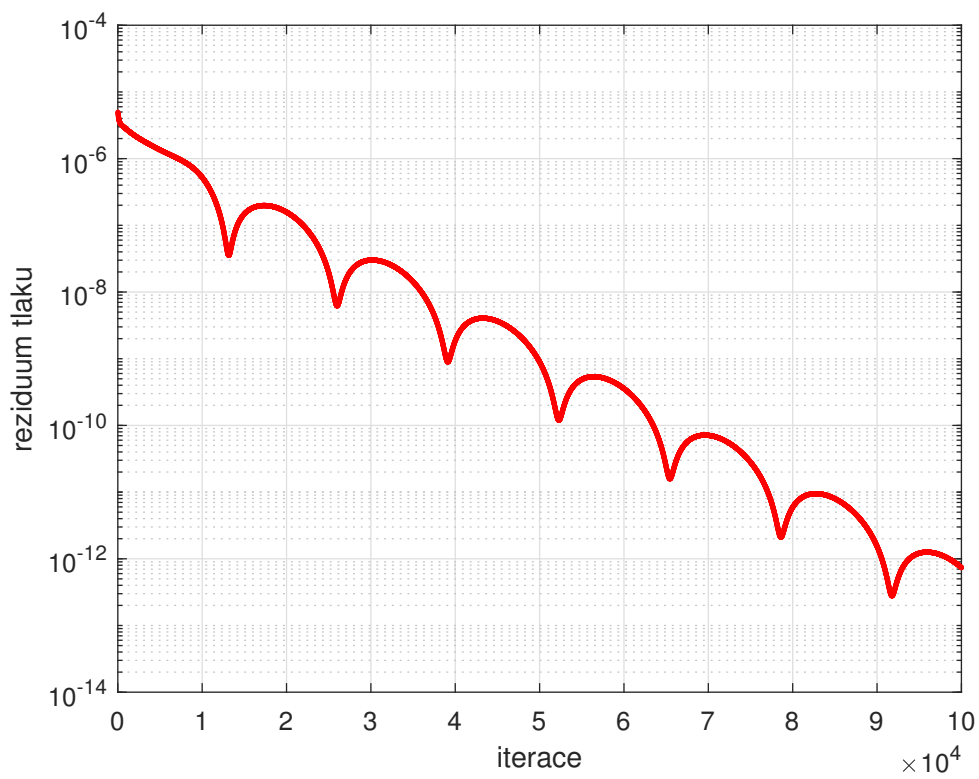
Obrázek 3.18: Závislost rezidua jednotlivých složek na počtu iterací

V [10] se dočteme, že konvergentní řešení nemusí mít vždy monotónní pokles rezidua a že se zpravidla objevují tzv. pseudonestacionarity. Toto můžeme sledovat i na průběhu rezidua tlaku a reziduí složek rychlosti.

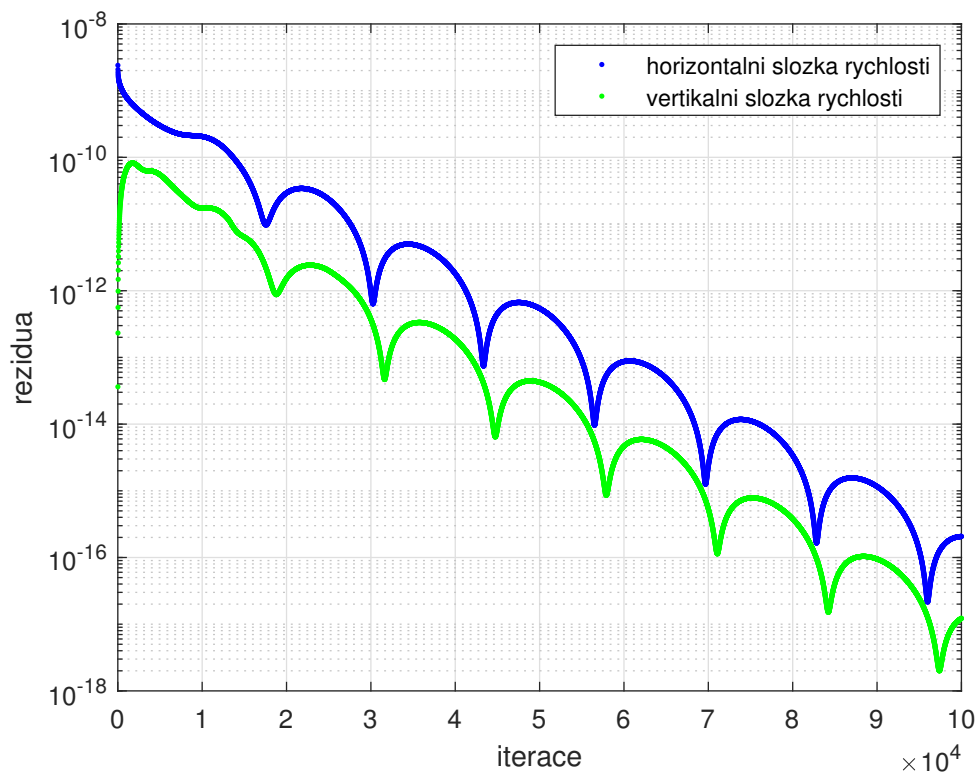
Důležité však na tomto průběhu je, že hodnota reziduí klesá (až o několik řádů), což se děje v obou případech - jak u tlaku, tak i u složek rychlosti. V obrázku 3.17 si můžeme všimnout, že hodnota rezidua tlaku se pohybuje na logaritmické stupnici výš, než je tomu u složek rychlosti na obrázku 3.18.

Hodnota rezidua tlaku a horizontální složky rychlosti se po proběhlých 90 000 iteracích ustálí a hodnota rezidua je v tomto případě natolik malá, že ji Matlab vyhodnotí jako nulovou.

Pro simulaci proudění neneutronovské tekutiny byla rezidua následující



Obrázek 3.19: Závislost rezidua tlaku na počtu iterací pro neneutronovskou tekutinu



Obrázek 3.20: Závislost rezidua jednotlivých složek na počtu iterací pro neneutronovskou tekutinu

V případě neneutronovské tekutiny můžeme opět pozorovat pseudonestacionarity a i přes to, že hodnota reziduí nedosáhne nulové hodnoty, tak vidíme, že rezidua mají klesající charakter a tudíž se hodnoty veličin použitých v naší numerické simulaci ustalují.

Závěr

Tato práce je členěna do tří hlavních kapitol. V první kapitole jsme si představili rheologické vlastnosti krve a následně rheologické modely, které se k popisu proudění krve nejčastěji používají.

V kapitole druhé se zabýváme odvozením základních rovnic popisujících proudění nestlačitelných tekutin. Jedná se konkrétně o rovnici kontinuity a pohybovou rovnici. Na základě těchto rovnic jsme si následně odvodili Navierovy-Stokesovy rovnice, které jsou potřebné k popisu proudění nestlačitelných tekutin a které jsme následně modifikovali, abychom je mohly využít k numerické simulaci proudění.

Tímto se dostáváme k poslední, třetí kapitole. V této kapitole je mimo jiné odvozeno analytické řešení pro speciální případ Poiseuilleova proudění, který se používá pro popis proudění newtonovské tekutiny mezi dvěma deskami. Další analytické řešení, které jsme si v této kapitole odvodili je proudění neneutronovské tekutiny popsané pomocí power-law modelu, kde již viskozita není konstantní jako v případě newtonovské tekutiny, nýbrž je zde viskozita popsána jako funkce.

Na závěr této kapitoly, a tudíž i práce, se dostáváme k dvourozměrným numerickým simulacím, které byly v této práci úspěšně provedeny a jejich výsledky by měli odpovídat fyzikálním předpokladům. Numerické simulace byly provedeny pro případ proudění newtonovské tekutiny, stejně jako pro případ proudění tekutiny neneutronovské. Tyto numerické simulace jsme si následně porovnali s analytickým řešením odvozeným v této práci. Také došlo k zhodnocení konvergence jednotlivých veličin, které se v numerické simulaci objevily.

Z tohoto shrnutí vyplývá, že byly splněny všechny v zadání stanovené cíle práce.

Kdybychom chtěli v této práci pokračovat, bylo by možné rozšířit numerickou simulaci například do následujících bodů:

- rozšíření do 3D
- převedení na proudění nestacionární
- modifikovat kód pro obtékání překážky, jakožto reakci na krevní sraženinu

Reference

- [1] R. B. Bird, R. C. Armstrong a O. Hassanger, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Volume I, John Wiley & Sons, second ed.(1987).
- [2] T.J.Chung, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge university press, 2002.
- [3] R. Dvořák, K. Kozel, *Matematické modelování v aerodynamice*, Vydavatelství ČVUT, 1996.
- [4] M. Feistauer, J. Felcman a I. Straškraba, *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*, Oxford University Press, 2003.
- [5] G. P. Galdi, R. Rannacher, A. M. Robertson a S. Turek, *Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation*, Birkhäuser, 2008.
- [6] K. Kozel, P. Louda a J. Příhoda, *Numerical solution of any unsteady flow using artificial compressibility method*, Proceedings of the Czech–Japanese Seminar in Applied Mathematics, 2006.
- [7] J. N. Mazumdar, *Biofluid Mechanics*, World Scientific, 1992.
- [8] M. Michalová, *Mathematical modeling of blood flows*, Praha, 2011. Bakalářská práce (Bc.). Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [9] S. Míka, P. Přikryl a M. Brandner. *Speciální numerické metody*, Vydavatelství servis Plzeň, 2006.
- [10] V. Molnár, *Počítačová dynamika tekutin: Interdisciplinárny prístup s aplikáciami CFD*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2011.
- [11] Rouleaux – Sonographic Tendencies. *Sonographic Tendencies – Seeing with sound* [online]. Dostupné z: <https://sonographictendencies.wordpress.com/2016/11/05/rouleaux/>
- [12] Mammalian Red Blood Cells, cell biology olm. *SteveGallik.org / SteveGallik.com - Home* [online]. Copyright 2011 Stephen Gallik, Ph. D. [cit. 17.08.2019]. Dostupné z: <http://cellbiologyolm.stevegallik.org/node/73>