

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY

Odbor mechaniky a mechatroniky



Diplomová práce

Energeticky efektivní pohyb rovinných mechanismů

Praha, 2019

Bc. Jan Tomsa

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Tomsa** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **473477**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Mechatronika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Energeticky efektivní pohyb rovinných mechanismů

Název diplomové práce anglicky:

Energy efficient motion of planar mechanisms

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s metodou řízení Computed torques.
- 2) Seznamte se s konceptem energeticky efektivního pohybu (Eigenmotion).
- 3) Vyzkoušejte koncept Eigenmotion na mechanismu s jedním stupněm volnosti.
- 4) Aplikujte princip Eigenmotion na rovinného robota.
- 5) Optimalizujte parametry robota pro dosažení energeticky efektivního pohybu.
- 6) Výsledky ověřte na simulačním modelu.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Stejskal, V., Valášek, M.: Kinematics and Dynamics of Machinery, Marcel Dekker, Inc., New York 1996.
- [2] Schwarzfischer, F., Hüsing, M., Corves, B.: The Dynamic Synthesis of an Energy-Efficient Watt-II-Mechanism, In: Multibody Mechatronic Systems, MuSM 2017, Mechanisms and Machine Science, vol 54. Springer, Cham 2018, s. 213-222.
- [3] Schwarzfischer, F., Hüsing, M., Corves, B.: The Dynamic Synthesis of an Energy-Efficient Slider-Crank-Mechanism, In: Proceedings of the Second International Symposium of Mechanism and Machine Science, ISMMS-2017, Baku 2017, s.156-163.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Petr Beneš, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **29.04.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **16.08.2019**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Petr Beneš, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

| | |
|---------------------------------|--|
| Jméno autora: | Bc. Jan Tomsa |
| Název diplomové práce: | Energeticky efektivní pohyb rovinných mechanismů |
| Anglický název: | Energy efficient motion of planar mechanisms |
| Akademický rok: | 2018/2019 |
| Obor studia: | Mechatronika |
| Ústav/odbor: | Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor Mechaniky a mechatroniky |
| Vedoucí diplomové práce: | Ing. Petr Beneš, Ph.D. |
| Bibliografické údaje: | Počet stran: 96 Počet obrázků: 64 Počet příloh: 1 CD |
| Klíčová slova: | Přirozený pohyb, Optimalizace mechanismu, Computed torque, Simplexová metoda |
| Keywords: | Eigenmotion, Optimization of mechanism, Computed torque, Simplex method |

Anotace:

Cílem této práce je nalézt pomocí optimalizační metody takové parametry zadaných mechanismů, se kterými bude mechanismus konat požadovanou trajektorii přirozeným pohybem. Po nalezení takové trajektorie je cílem porovnat energetickou náročnost mechanismu konajícího právě přirozený pohyb po trajektorii s mechanismem, který není nijak optimalizovaný a je poháněn pouze motory.

Abstract:

The aim of this work is to find, by means of the optimization method, those parameters of the given mechanisms with which the mechanism will perform the desired trajectory by eigenmotion. After finding such a trajectory, the aim is to compare the energy demand of the optimized mechanism acting naturally along the defined trajectory with a mechanism that is not optimized in any way and follows the trajectory only due to effort of actuators.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze, dne

.....

Podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří se podíleli na vzniku této práce. Jmenovitě svému vedoucímu panu Ing. Petru Benešovi, Ph.D., za ochotu a čas věnovaný konzultacím. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům, kteří mi umožnili studovat VŠ.

Obsah

| | |
|---|----|
| ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE | 1 |
| Anotační list..... | 3 |
| Prohlášení..... | 4 |
| Poděkování | 5 |
| Obsah..... | 6 |
| Seznam obrázků..... | 9 |
| 1. Úvod | 12 |
| 2. Cíle práce | 13 |
| 3. Druhy kinematických vazeb v rovině | 14 |
| 3.1. Obecný předpis pro těleso..... | 14 |
| 3.2. Schématické značení kinematických vazeb | 14 |
| 4. Lagrangeovy rovnice druhého druhu..... | 16 |
| 5. Model tření pro Lagrangeovy rovnice 2. řádu | 17 |
| 5.1. Problematika tření pro Lagrangeovy rovnice 2. řádu | 17 |
| 5.2. Model viskózního tření | 17 |
| 6. Computed torque | 19 |
| 6.1. Definice metody | 19 |
| 6.2. Computed torque s použitím PID regulátoru | 21 |
| 7. Současný stav zkoumané problematiky EM | 21 |
| 7.1. Uvedení EM podstaty | 21 |
| 7.1.1. Představení metody..... | 21 |
| 7.1.2. Teoretická ukázka na klikovém mechanismu | 22 |
| 8. Simplexová metoda optimalizace..... | 24 |
| 8.1. Historie metody | 24 |
| 8.2. Princip Nelder-Meadovy metody..... | 24 |
| 9. Praktická část – Klikový mechanismus..... | 26 |

| | | |
|---------|---|----|
| 9.1. | Popis těžišť a momentů setrvačnosti..... | 27 |
| 9.1.1. | Těleso 2..... | 27 |
| 9.1.2. | Těleso 3..... | 29 |
| 9.1.3. | Těleso 4..... | 30 |
| 9.2. | Řešení pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu | 30 |
| 9.2.1. | Počet stupňů volnosti | 31 |
| 9.2.2. | Vazbová rovnice..... | 31 |
| 9.2.3. | Vyjádření poloh a rychlostí k jednotlivým těžištím mechanismu | 32 |
| 9.2.4. | Určení kinetické energie | 33 |
| 9.2.5. | Výpočet členu $\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2}$ | 34 |
| 9.2.6. | Výpočet členu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} \right)$ | 35 |
| 9.2.7. | Výpočet zobecněné síly Q..... | 36 |
| 9.2.8. | Doplnění chybějících derivací | 37 |
| 9.2.9. | Výsledné dosazení substituovaných proměnných..... | 38 |
| 9.3. | Dopředná úloha dynamiky..... | 39 |
| 9.3.1. | Tvorba modelu..... | 39 |
| 9.3.2. | Kontrola modelu..... | 40 |
| 9.4. | Inverzní úloha dynamiky..... | 43 |
| 9.4.1. | Tvorba modelu..... | 43 |
| 9.4.1. | Kontrola modelu..... | 44 |
| 9.5. | Simplexová optimalizace EM modelu | 45 |
| 9.5.1. | Cílové funkce | 45 |
| 9.5.2. | Požadavky optimalizace mechanismu | 46 |
| 9.5.3. | Neměnné parametry mechanismu..... | 47 |
| 9.5.4. | Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů mechanismu | 48 |
| 9.5.5. | Průběh a výsledek optimalizace modelu | 48 |
| 9.6. | Computed torque | 50 |
| 9.6.1. | Tvorba modelu..... | 50 |
| 9.6.2. | Kontrola modelu..... | 51 |
| 9.6.3. | Požadované momenty pro neoptimalizovaný model | 52 |
| 9.6.4. | Požadované momenty pro optimalizovaný model | 52 |
| 10. | Praktická část – Tříramenný robot..... | 55 |
| 10.1. | Popis těžišť a momentů setrvačnosti..... | 55 |
| 10.1.1. | Těleso 2..... | 55 |

| | | |
|---------|---|----|
| 10.1.2. | Těleso 3..... | 57 |
| 10.1.3. | Těleso 4..... | 58 |
| 10.1. | Řešení pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu | 59 |
| 10.1.1. | Počet stupňů volnosti | 59 |
| 10.1.2. | Vyjádření poloh a rychlostí k jednotlivým těžištím mechanismu | 59 |
| 10.1.3. | Určení kinetické energie | 60 |
| 10.1.4. | Výpočet členu $\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_r}$ | 60 |
| 10.1.5. | Výpočet členu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_r} \right)$ | 61 |
| 10.1.6. | Výpočet zobecněné síly Q..... | 64 |
| 10.1.7. | Výsledné dosazení substituovaných proměnných | 67 |
| 10.2. | Dopředná úloha dynamiky..... | 67 |
| 10.2.1. | Tvorba modelu..... | 67 |
| 10.2.2. | Kontrola modelu | 68 |
| 10.3. | Inverzní úloha dynamiky..... | 72 |
| 10.3.1. | Tvorba modelu..... | 72 |
| 10.3.2. | Kontrola modelu | 74 |
| 10.4. | Simplexová optimalizace EM modelu | 76 |
| 10.4.1. | Požadavky optimalizace mechanismu | 76 |
| 10.4.2. | Cílové funkce | 77 |
| 10.4.3. | Neměnné parametry mechanismu | 79 |
| 10.4.4. | Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů mechanismu | 80 |
| 10.4.5. | Průběh optimalizace | 81 |
| 10.4.6. | Výsledek optimalizace | 85 |
| 10.5. | Computed torque | 89 |
| 10.5.1. | Tvorba modelu..... | 89 |
| 10.5.2. | Kontrola modelu | 89 |
| 10.5.3. | Požadované momenty pro nevyvážený model..... | 90 |
| 10.5.1. | Požadované momenty pro EM model | 90 |
| 11. | Závěr | 92 |
| 12. | Literatura | 95 |

Seznam obrázků

| | |
|--|----|
| Obr. 1 Popis tělesa v prostoru | 14 |
| Obr. 2 Rotační vazba..... | 15 |
| Obr. 3 Obecná vazba | 15 |
| Obr. 4 Posuvná vazba | 15 |
| Obr. 5 Vazba vetknutím..... | 16 |
| Obr. 6 Model viskózního tření..... | 17 |
| Obr. 7 Průběh třecího momentu..... | 18 |
| Obr. 8 Schéma Computed torque | 19 |
| Obr. 9 EM pro klikový mechanismus..... | 22 |
| Obr. 10 Schéma optimalizace metody EM..... | 23 |
| Obr. 11 Nelder-Mead schéma optimalizace..... | 24 |
| Obr. 12 Klikový mechanismus..... | 27 |
| Obr. 13 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 2 | 27 |
| Obr. 14 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 3 | 29 |
| Obr. 15 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 4 | 30 |
| Obr. 16 Okótované schéma klikového mechanismu..... | 31 |
| Obr. 17 Schéma klikového mechanismu s vnějšími silami | 36 |
| Obr. 18 Schéma zapojení dopředné dynamiky | 39 |
| Obr. 19 Energie klikového mechanismu bez vnějších sil..... | 40 |
| Obr. 20 Simulace dopředné dynamiky bez tření..... | 41 |
| Obr. 21 Průběh polohy φ_2 bez tření..... | 41 |
| Obr. 22 Průběh polohy φ_2 se třením..... | 42 |
| Obr. 23 Simulace dopředné dynamiky se třením..... | 42 |
| Obr. 24 Schéma zapojení inverzní dynamiky | 43 |
| Obr. 25 Simulace inverzní dynamiky | 44 |
| Obr. 26 Průběh hnacího momentu pro funkci $\sin(x)$ na vstupu..... | 45 |

| | |
|--|----|
| Obr. 27 Požadovaný pohyb klikového mechanismu..... | 47 |
| Obr. 28 Průběh cílové funkce..... | 48 |
| Obr. 29 Výsledný optimalizovaný pohyb mechanismu | 49 |
| Obr. 30 Průběh polohy optimalizovaného a neoptimalizovaného klik. mech..... | 50 |
| Obr. 31 Schematické znázornění modelu Computed torque | 51 |
| Obr. 32 Výsledný potřebný akční zásah – kontrola modelu..... | 51 |
| Obr. 33 Potřebný moment pro neoptimalizovaný model | 52 |
| Obr. 34 Potřebný moment pro optimalizovaný model..... | 53 |
| Obr. 35 Průběh optimalizovaného modelu se třením | 54 |
| Obr. 36 Schématický popis tříramenného robotu | 55 |
| Obr. 37 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 2 | 55 |
| Obr. 38 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 3 | 57 |
| Obr. 39 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 4 | 58 |
| Obr. 40 Okótované schéma robotu..... | 59 |
| Obr. 41 Schéma robotu s působením vnějšího zatížení | 64 |
| Obr. 42 Schéma zapojení dopředné dynamiky robotu | 68 |
| Obr. 43 Energie soustavy robotu | 69 |
| Obr. 44 Průběh poloh robotu bez vnějšího zatížení | 70 |
| Obr. 45 Simulace dopředné dynamiky robotu bez tření..... | 70 |
| Obr. 46 Průběh poloh robotu bez vnějšího zatížení | 71 |
| Obr. 47 Simulace dopředné dynamiky se třením..... | 72 |
| Obr. 48 Schéma zapojení dopředné dynamiky robotu | 73 |
| Obr. 49 Simulace inverzní dynamiky | 74 |
| Obr. 50 Průběh vstupních poloh robotu | 75 |
| Obr. 51 Průběh hnacích momentů pro vstupní funkce $\sin(x)$ | 75 |
| Obr. 52 Simulace požadovaného pohybu mechanismu | 77 |
| Obr. 53 Mezivýsledek optimalizace | 81 |
| Obr. 54 Mezivýsledek optimalizace s odhadnutou požadovanou trajektorií | 82 |

| | |
|--|----|
| Obr. 55 Mezivýsledek poloh mechanismu s nevyhovující délkou ramene | 83 |
| Obr. 56 Simulace mezivýsledku optimalizace | 84 |
| Obr. 57 Průběh cílové funkce optimalizace robotu..... | 85 |
| Obr. 58 Výsledný průběh poloh optimalizovaného robotu | 87 |
| Obr. 59 Simulace výsledku optimalizace robotu..... | 87 |
| Obr. 60 Výsledný průběh koncového bodu robotu | 88 |
| Obr. 61 Kontrola modelu Computed torque | 89 |
| Obr. 62 Výsledný požadovaný moment pro nevyvážený model robotu..... | 90 |
| Obr. 63 Výsledný požadovaný moment pro vyvážený model robotu..... | 91 |
| Obr. 64 Průběh poloh optimalizovaného modelu se třením..... | 92 |

1. Úvod

Při provozu strojů a manipulátorů se výrobní podniky potýkají s nemalými náklady za energie. Představme si, že již při návrhu konstrukce bude stroj navrhován tak, aby požadavek na trajektorii v požadovaném čase byl vykonáván samovolně přirozeným pohybem stroje a bude do soustavy dodávána pouze energie, která byla pohlcena ztrátami. To je i cílem návržení energeticky efektivního pohybu, nebo také nazýváno metodou Eigenmotion. Cílem je navrhnout mechanismus tak, aby požadovaný pohyb vykonával přirozeně a byla mu pouze dodávána energie na eliminaci tření. Mechanismus může vykonávat nekonečně mnoho trajektorií a jednou z nich je právě trajektorie přirozená. Ideálním stavem je, pokud je přirozená trajektorie stejná jako pracovní. Po návržení mechanismu a nalezené přirozené trajektorie mechanismu je cílem porovnat energetickou náročnost právě takového mechanismu s mechanismem, který pohyb po dané trajektorii přirozeně nekoná. Z důvodu snazšího značení bude model Eigenmotion zkrácen na EM model.

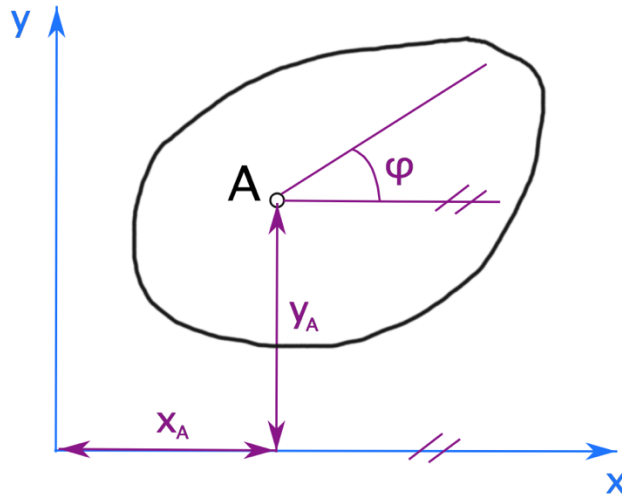
2. Cíle práce

Cíle práce vychází ze zadání a jsou popsány v následujících bodech:

- 1) Seznamte se s metodou řízení Computed torques.
- 2) Seznamte se s konceptem energeticky efektivního pohybu (Eigenmotion).
- 3) Vyzkoušejte koncept Eigenmotion na mechanismu s jedním stupněm volnosti.
- 4) Aplikujte princip Eigenmotion na rovinného robota.
- 5) Optimalizujte parametry robota pro dosažení energeticky efektivního pohybu.
- 6) Výsledky ověřte na simulačním modelu.

3. Druhy kinematických vazeb v rovině

3.1. Obecný předpis pro těleso



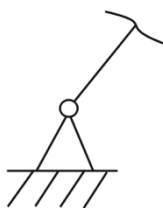
Obr. 1 Popis tělesa v prostoru

Poloha volného tělesa v rovině je demonstrována na (Obr. 1). Učení polohy docílíme třemi na sobě nezávislými souřadnicemi, tj. dvěma souřadnicemi bodu A, a úhlem φ , který svírá libovolná přímka tělesa s rovnoběžkou s kladným směrem osy x. Tyto tři nezávislé souřadnice určují 3 stupně volnosti tělesa, které není nijak vázáno k základnímu rámu. Rámem označujeme základní nepohyblivé těleso. Poloha tělesa je tedy dána [1]:

$$A = [x_a, y_a, \varphi] \quad (1)$$

3.2. Schématické značení kinematických vazeb

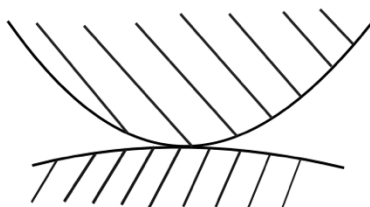
Při schématickém navrhování mechanismů je používána soustava schématických značek, která nám pomáhá jednoznačně rozlišit, kolik stupňů volnosti daná vazba odebírá.



Obr. 2 Rotační vazba

$$r_{kloub.} = 2^{\circ} \quad (2)$$

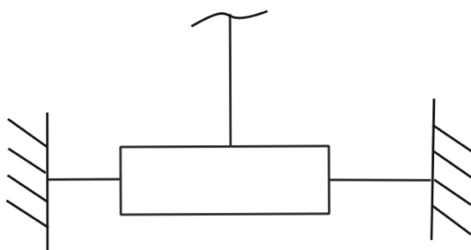
Na (Obr. 2) je vyobrazena rotační vazba v rovině, která odebírá dva stupně volnosti.



Obr. 3 Obecná vazba

$$r_{ob.} = 1^{\circ} \quad (3)$$

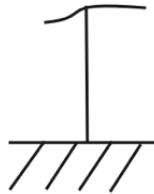
Na (Obr. 3) je vyobrazena obecná vazba, která odebírá jeden stupeň volnosti.



Obr. 4 Posuvná vazba

$$r_{pos.} = 2^\circ \quad (4)$$

Na (Obr. 4) je schématické zobrazení posuvné vazby, která odebrává dva stupně volnosti.



Obr. 5 Vazba vetknutím

$$r_{vetkn.} = 3^\circ \quad (5)$$

Na (Obr. 5) je vyobrazena vazba vetknutí, která odebrává tři stupně volnosti.

Obecné vyjádření počtu stupňů volnosti popisuje rovnice (6), kde i je výsledný počet stupňů volnosti a n je počet těles včetně rámu. Dále jsou zde členy pro každou vazbu zvlášť, kde n_i počet obsažených kinematických vazeb, vždy násobeno příslušnou konstantou vyjadřující odebrané stupně volnosti [1].

$$i = 3 * (n - 1) - r_{vetkn.} * n_{vetkn.} - r_{rot.} * n_{rot.} - r_{pos.} * n_{pos.} - r_{ob.} * n_{ob.} \quad (6)$$

4. Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Lagrangeovy rovnice jsou základní metodou sestavování dynamických rovnic pro systémy, založené na principech analytických mechanismů. Pokud je systém popsán v nezávislých souřadnicích q_r , pak lze použít Lagrangeovy rovnice druhé druhu [2]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, \dots, i \quad (7)$$

Kde Q_r je zobecněná síla odpovídající r -té souřadnici v těchto rovnicích. Zobecněnou sílu popisuje rovnice virtuálních prací [3]:

$$Q_r \delta q_r = \sum_l F_l^T \delta r_l + \sum_m M_m^T \delta \varphi_m \quad (8)$$

Kde F_l je pracovní silou na souřadnicích r_l a M_m je pracovní moment na souřadnicích φ_m .

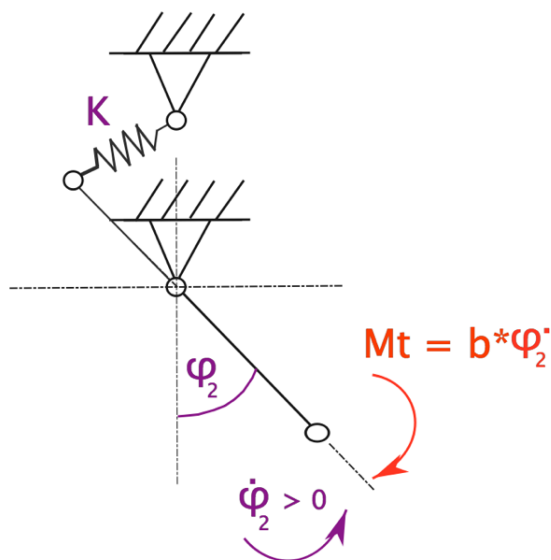
5. Model tření pro Lagrangeovy rovnice 2. řádu

5.1. Problematika tření pro Lagrangeovy rovnice 2. řádu

Pro popis modelu využijeme Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Pro simulaci tření bude použit model viskózního tření. Byly vyzkoušeny i jiné modely, například model Coulombova tření, ale výsledky nebyly příliš odlišné. Výhodou viskózního modelu tření bylo také urychlení simulačních výpočtů oproti jiným modelům. To má význam zejména během optimalizací, kdy je dynamický model spouštěn opakovaně.

5.2. Model viskózního tření

Pro EM model hraje tření jednu z klíčových rolí, jak přiblížit výsledky realitě. Cílem je porovnání nevyváženého modelu řízeným přímo motory s modelem, který koná požadovaný pohyb vlastním přirozeným pohybem a je mu dodávána pouze energie, kterou pohltilo tření.



Obr. 6 Model viskózního tření

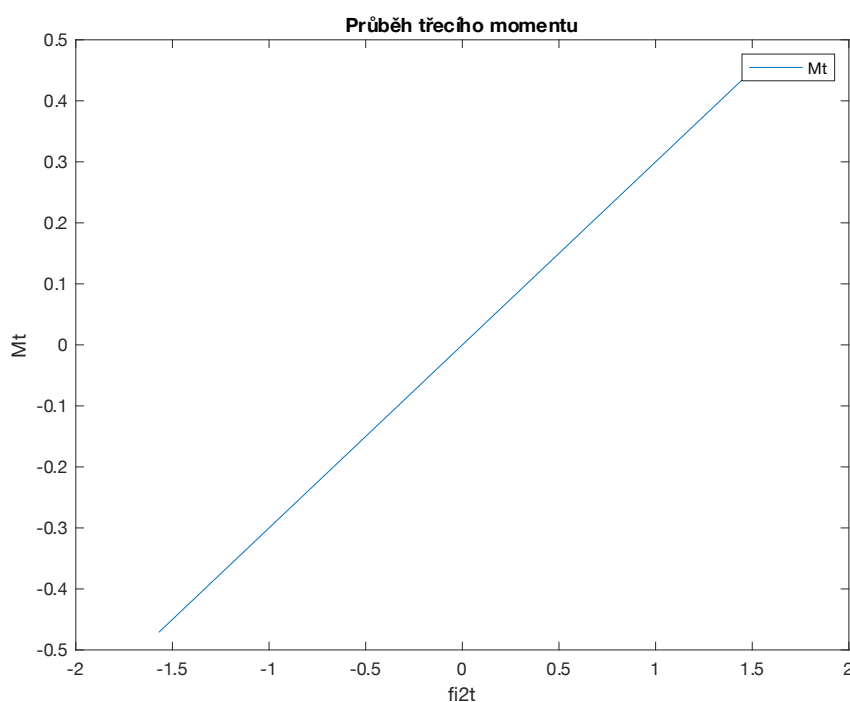
Schematické znázornění (Obr. 6) popisuje pohyb jednoduchého kyvadla. Směr otáčení značí φ_2 , kde proti pohybu bude působit třecí moment M_t a K je uvažována jako torzní pružina. K demonstraci viskózního tlumení nám poslouží pohybová rovnice (9):

$$\ddot{\varphi}_2 \cdot I + \underbrace{\dot{\varphi}_2 \cdot b}_{M_t} + K \cdot \varphi_2 = 0 \quad (9)$$

Pro účel simulování tření nás bude nejvíce zajímat prostřední člen rovnice, kde b obsahuje konstantu, která charakterizuje tlumič a $\dot{\varphi}_2$ je rychlost. Definujeme třecí moment v následujícím znění:

$$M_t = \dot{\varphi}_2 \cdot b \quad (10)$$

K „přepínání“ třecího momentu dochází přímo díky výskytu rychlosti.



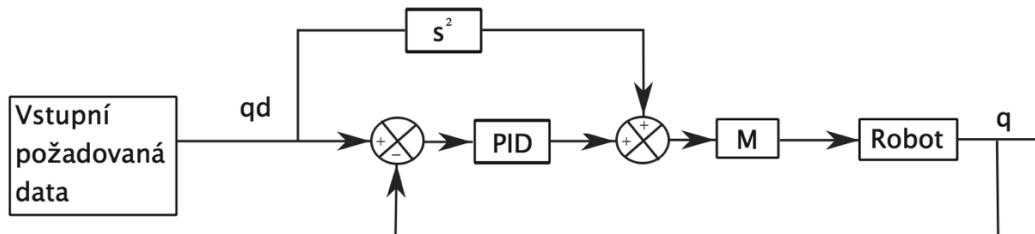
Obr. 7 Průběh třecího momentu

Grafické znázornění (Obr. 7) vykresluje průběh pro třecí moment. Z průběhu lze vysledovat, že čím menší bude rychlost, tím menší bude i třecí moment. Pro nulovou rychlost nám funkce vrátí nulový třecí moment.

6. Computed torque

6.1. Definice metody

Metoda řízení Computed torque je založená na dopočítávání akčního zásahu, a to na základě poloh, rychlosti a zrychlení, kterých je požadováno vůči reálným.



Obr. 8 Schéma Computed torque

Na (Obr. 8) se nachází návrh řízení pomocí metody Computed torque. V prvním bloku zleva nám vstupují naše požadovaná data s indexem d . Velikost akčního zásahu značená F je počítána taktéž s ohledem na reálná data vystupující z modelu. Požadované zrychlení je přičteno k dopočtenému zrychlení z regulátoru. Poté je vše převedeno do vztahů, kde M značí matici hmotnosti. Poté je vypočten potřebný akční zásah, který vstupuje do reálného modelu. Výchozí rovnice je definována [4]:

$$M(q) \cdot \ddot{q} + V_m \cdot \dot{q} + F(q) + G(q) + \tau_d = \tau \quad (11)$$

Část $N(q, \dot{q})$ reprezentuje vektor nelineárních členů s předpokládaným zásahem $\tau_d = 0$. Proměnná F je označení vnějších sil. Vyjádřením vektoru nelineárních sil z rovnice (11) získáváme:

$$N(q, \dot{q}) = V_m \cdot \dot{q} + F(q) + G(q) \quad (12)$$

Rovnici zjednodušíme na tvar:

$$M(q) \cdot \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (13)$$

Nyní zapíšeme vektor x pomocí pozicově rychlostního tvaru:

$$x = [q^T \quad \dot{q}^T]^T \quad (14)$$

Po derivování vektoru x podle času a úpravě získáme:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1} \cdot N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \cdot \tau \quad (15)$$

Z rovnice (15) vyjádříme člen zrychlení:

$$\ddot{q} = -M^{-1} \cdot N + M^{-1} \cdot \tau = u \quad (16)$$

Zjednodušením rovnice získáme řízení:

$$u = -M^{-1} \cdot (N - \tau) \quad (17)$$

Při zavedení zpětnovazební linearizace dostaneme rovnici regulační odchylky, kde od sebe odečítáme žádanou polohu od aktuální [4]:

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (18)$$

Rovnici (18) dvakrát derivujeme podle času a získáme:

$$\ddot{e}(t) = \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t) = \ddot{q}_d(t) - M^{-1} \cdot (N - \tau) \quad (19)$$

Výsledné řešení regulačních odchylek zapíšeme v maticovém tvaru:

$$\frac{d}{dt} \cdot \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot u \quad (20)$$

Jestliže najdeme takové $u(t)$, které rovnici stabilizuje, s podmínkou $e \rightarrow \emptyset$, tak lze vyjádřit potřebné akční zásahy v následující formě:

$$\tau = M \cdot (q_d \ddot{\cdot} - u) + N \quad (21)$$

6.2. Computed torque s použitím PID regulátoru

PID regulátor je regulátorem spojitým složený ze tří složek a to proporcionální, derivační a integrační. Do regulátoru vstupuje regulační odchylka e a vystupuje akční veličina. Regulátor je popsán následující rovnicí [4]:

$$u(t) = K_p \cdot e + K_i \cdot \int_0^t e(\zeta) \cdot d\zeta + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (22)$$

Parametry K_p , K_i , K_d jsou regulační konstanty a $u(t)$ je výstupním signálem regulátoru. Následně provedeme aplikaci PID regulátoru do rovnice (21) a získáme akční zásah v následujícím tvaru:

$$\tau = M \cdot \left(q_d \ddot{\cdot} + K_p \cdot e + K_i \cdot \int_0^t e(\zeta) \cdot d\zeta + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) + N \quad (23)$$

7. Současný stav zkoumané problematiky EM

7.1. Uvedení EM podstaty

Když je mechanismus provozován v takzvaném EM, je vstup energie pro urychlení a zpomalení tohoto mechanismu roven nule. Musí být překonány pouze zbývající síly, jako jsou procesní síly, třecí síly apod. [5]

7.1.1. Představení metody

Mechanismy jsou součástí mnoha různých výrobních strojů. Energetická účinnost zabudovaných mechanismů je klíčová pro ziskovost těchto strojů. Následující rovnice platí pro rovinné mechanismy s otočným vstupním článkem (klikou). Potřebný výkon P_d pro pohánění takového mechanismu je součinem hnacího momentu M_d a vstupní rychlosti $\dot{\varphi}$:

$$P_d = M_d \cdot \dot{\varphi} \quad (24)$$

Řídící moment může být zapsán jako [6]:

$$M_d = M_{kin} + M_{pot} + M_{dis} + M_{proc} \quad (25)$$

M_{kin} je točivý moment, který je nezbytný k překonání odporů zrychlení a zpomalení členů mechanismu. M_{pot} je nezbytný točivý moment k překonání odporů, které vyplývají z gravitace nebo pružin. M_{dis} a M_{proc} obsahují odpory vyplývající z disipačních efektů a procesních sil.

Točivý moment M_{kin} je odvozen z kinetické energie E_{kin} mechanismu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu [5]:

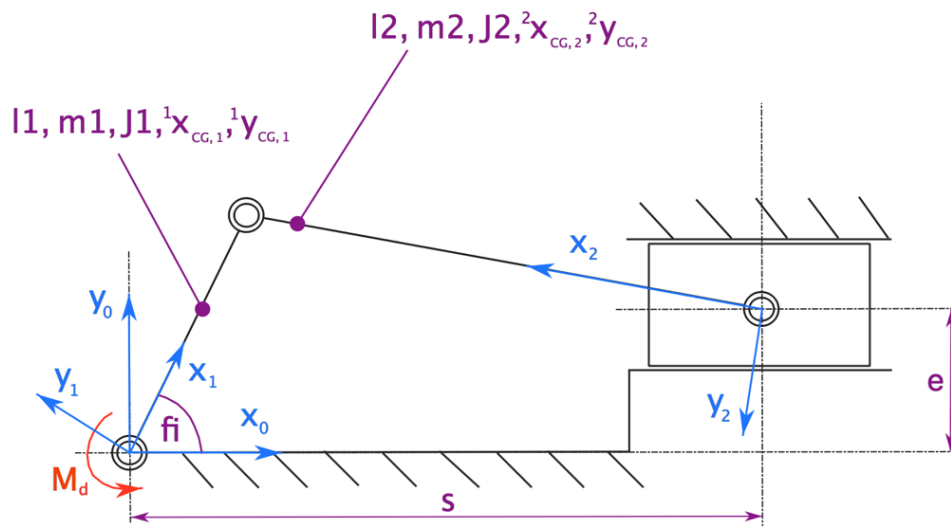
$$M_{kin} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} \quad (26)$$

Je zřejmé, že moment M_{kin} zmizí pro konstantní kinetickou energii mechanismu. Koncept řízení mechanismu v tzv. EM tuto skutečnost využívá. EM je specifický pohyb kliky, který má za následek konstantní kinetickou energii mechanismu po celou dobu pohybu.

Klasická dimenzionální syntéza mechanismů má za cíl nalezení optimálních kinematických parametrů pro mechanismus. Cílem metod dynamického vyvažování je najít optimální hmotnostní parametry pro mechanismus s danými kinematickými parametry. Dynamická syntéza kombinuje oba koncepty. Cílem je nalézt optimální hmotnostní a kinematické parametry mechanismu [5].

Výsledky řízení ukazují, že řízení mechanismu v EM může snížit potřebný vstupní moment a může mít za následek nižší spotřebu energie. Syntéza mechanismu s konkrétním EM je formulována jako optimalizační problém. Parametry rovinného systému klikového mechanismu jsou považovány za konstrukční parametry optimalizace [7].

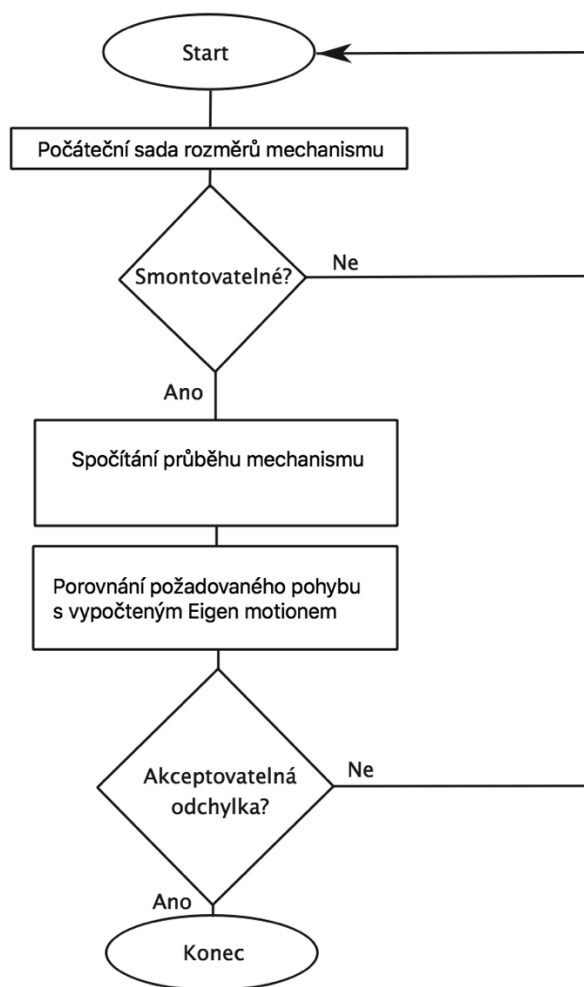
7.1.2. Teoretická ukázka na klikovém mechanismu



Obr. 9 EM pro klikový mechanismus

Cílem dynamické syntézy je najít mechanismus, který je schopen plnit požadovaný pohyb, když je poháněn vlastním přirozeným pohybem. Cílem optimalizace je najít nejlepší

sadu návrhových parametrů pro určitý rozsah pohybů. Cílová funkce je formulována tak, že nejlepší kombinace parametrů tuto funkci minimalizuje. Mohou být také zohledněna omezení, tj. Omezení týkající se kombinace parametrů např. maximální hmotnost apod. [5].



Obr. 10 Schéma optimalizace metody EM

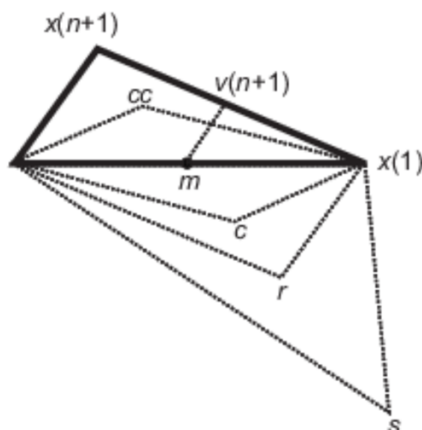
Na (Obr. 10) jsou znázorněny jednotlivé kroky optimalizace. V počátku je definována počáteční sada rozměrů a vyhodnotí se, zda je mechanismus schopen vykonávat pohyb v daném rozsahu. Pokud ne, dojde k vrácení o krok zpět a dojde k změně parametrů. Pokud je mechanismus smontovatelný, dojde ke propočítání průběhu mechanismu a poté k porovnání požadovaného pohybu s pohybem vypočteného EM modelu. V případě, že je odchylka modelů zanedbatelná, tak je optimalizační proces ukončen. Pokud odchylka není zanedbatelná, tak se optimalizační proces vrátí na počátek [7].

8. Simplexová metoda optimalizace

8.1. Historie metody

Tvůrcem Simplexové metody byl americký matematik George Bernard Dantzig. Světu ji představil v roce 1947. Ve svém díle se opírá o mnoho dřívějších poznatků a teorií jiných významných matematiků, ale právě on formuloval základní algoritmus této metody. Jeho práce vycházela z praxe. V době vzniku této metody pracoval jako civilista na velitelství US Air Force a simplexová metoda byla zkonstruována právě pro potřeby amerického letectva. Za své zásluhy získal Dantzig mnohá ocenění. Od doby vzniku této metody uběhla již řada let a svět se posunul zas o krok dál, simplexová metoda ale stále patří k nejefektivnějším způsobům řešení lineárních optimalizačních úloh [8].

8.2. Princip Nelder-Meadovy metody



Obr. 11 Nelder-Mead schéma optimalizace

Metoda Nelder-Mead se oproti obyčejné simplexové metodě liší v nerovnostrannosti simplexu. Směr simplexu je „natáhnut“ ve směru nejlepší hodnoty cílové funkce. Znázornění na (Obr. 11) ukazuje tučnou čarou vyobrazený původní simplex a tečkovanými čarami jsou znázorněny případné modifikace simplexů. Algoritmus je prováděn, dokud nejsou splněny podmínky optimalizace.

Algoritmus využívá simplex o $n + 1$ vrcholcích, kde n je dimenze prostoru a x je n -rozměrný vektor. Prvně je definován počáteční vektor x_0 s přidáním přírůstku 5% ke každé hodnotě $x_0(i)$ do x_0 . Algoritmus využívá tyto n vektory jako elementy simplexu společně s x_0 . Poté algoritmus modifikuje simplex opakovaně podle následujícího postupu [9]:

1. Necht' $x(i)$ označuje seznam bodů v současném simplexu, kde $i = 1, \dots, n + 1$
2. V tomto kroku dojde k seřazení bodů simplexu, od nejnižší funkční hodnoty $f(x(1))$ po nejvyšší $f(x(n + 1))$. V každém kroku iterace algoritmus zahodí aktuální nejhorší bod $x(n + 1)$ a přijme další bod do simplexu. Nebo v případě níže uvedeného kroku 7 změni všechny n body hodnotami většími než $f(x(1))$.
3. Generování odrazového bodu:

$$r = 2 \cdot m - x \cdot (n + 1) \quad (27)$$

$$\text{kde } m = \sum_1^n \frac{x(i)}{n}$$

a následně je vypočítána funkční hodnota $f(r)$.

4. Pokud je $f(x(1)) \leq f(r) < f(x(n))$ pak akceptujeme r a ukončujeme tuto iteraci.

Odražení

5. Pokud je $f(r) < f(x(1))$ dojde k vypočtení bodu expanze s , kde

$$s = m + 2 \cdot (m - x \cdot (n + 1)) \quad (28)$$

a následně k určení funkční hodnoty $f(s)$.

- a) Pokud je $f(s) < f(r)$, pak je s přijmuto a iterace je ukončena. **Expanze**

- b) Pokud podmínka není splněna, dojde k přijmutí r a iterace je ukončena.

Odražení

6. Pokud je $f(r) \geq f(x(n))$ je provedena kontrakce mezi m a lepší hodnotou $x(n + 1)$ a r :

- a) Pokud je $f(r) < f(x(n + 1))$ pak je r lepší než $x(n + 1)$, pak je vypočteno

$$c = m + \frac{(r-m)}{2} \quad (29)$$

a následně určena funkční hodnota $f(c)$. V případě, že je $f(c) < f(r)$, pak je c přijmuto a iterace je ukončena. **Zkrácení zvenku**

V opačném případě algoritmus pokračuje na krok 7. **Zmenšení**

b) Pokud je $f(r) > f(x(n+1))$, pak je určena hodnota, kde

$$cc = m + \frac{(x(n+1)-m)}{2} \quad (30)$$

poté je následně vypočtena funkční hodnota $f(cc)$. Pokud je

$$f(cc) < f(x(n+1)),$$

pak je přijata hodnota cc a iterace ukončena. **Zkrácení uvnitř**

V opačném případě algoritmus pokračuje na krok 7. **Zmenšení**

7. Vypočtení n bodů podle předpisu:

$$v(i) = x(1) + \frac{(x(i) - x(1))}{2} \quad (31)$$

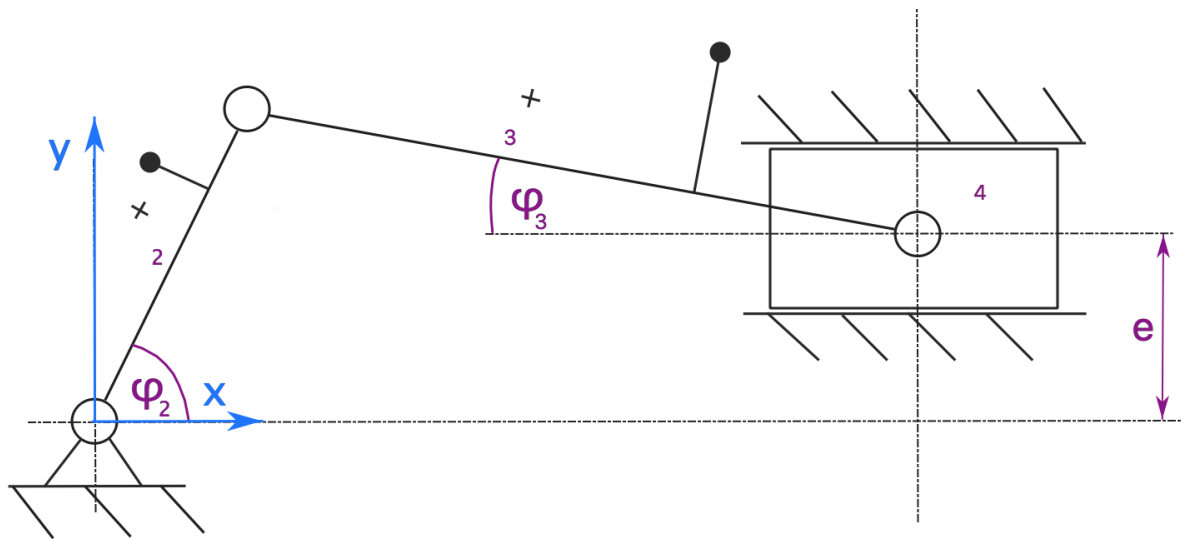
poté jsou určeny funkční hodnoty $f(v(i))$, $i = 2, \dots, n+1$. Simplex v další iteraci dostává hodnoty $x(1), v(2), \dots, v(n+1)$. **Zmenšení**

Simplexová metoda je použita, jako nástroj optimalizace pro zadané mechanismy. Cílem optimalizace je najít takové parametry mechanismu, pro které bude mechanismus splňovat požadovaný pohyb.

9. Praktická část – Klikový mechanismus

Pro aplikaci metody EM na mechanismus s jedním stupněm volnosti byl vybrán právě klikový mechanismus z článku [5]. Cílem bude optimalizovat průběh trajektorie, která má být splněna za určitý čas.

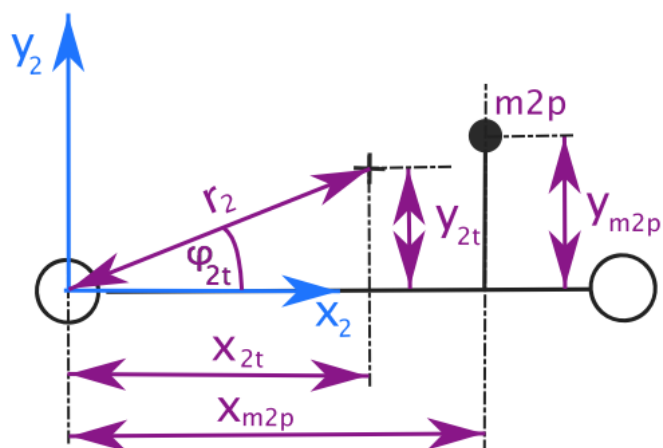
9.1. Popis těžišť a momentů setrvačnosti



Obr. 12 Klikový mechanismus

Pro využití EM metody je potřeba mít možnost měnit výrazně hmotnostní a setrvačností charakteristiky mechanismu. V popisu metody na v kapitole (7.1.2) jsou měněny jednotlivá tělesa a celkové parametry těles. Naším cílem není optimalizovat mechanismus, jako celek, ale jeho hmotnostní a setrvačností charakteristiky a docílit tak, změny trajektorie v daném čase. Proto jsou na jednotlivá tělesa mechanismu nasazeny hmoty, které lze posouvat a měnit jejich velikost. Na (Obr. 12) jsou schematicky znázorněny body černými tečkami a výsledná těžiště, ke kterým budeme mechanismus kótovat jsou znázorněna černými křížky.

9.1.1. Těleso 2



Obr. 13 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 2

Na (Obr. 13) se nachází okótovaný popis tělesa 2. Parametry s dolním indexem m_{2p} jsou hodnoty vázané s přidanou hmotou pro těleso 2. Černým křížem je vyznačena poloha těžiště. Pro jednoduchost budeme používat pro popis pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu přeponu r_2 a svírající úhel φ_{2t} .

Prvně vyjádříme polohy těžišť pomocí následujících rovnic:

$$x_{2t} = \frac{(x_{2t \text{ Tyč}} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} + x_{m_{2p}} \cdot m_{2p})}{m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p}} \quad (32)$$

$$y_{2t} = \frac{(y_{2t \text{ Tyč}} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} + y_{m_{2p}} \cdot m_{2p})}{m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p}} \quad (33)$$

Nyní již známe polohy těžišť a můžeme vyjádřit parametr r_2 a φ_{2t} které budeme používat k popisu soustavy:

$$r_2 = \sqrt{(x_{2t}^2 + y_{2t}^2)} \quad (34)$$

$$\varphi_{2t} = \text{atan}\left(\frac{y_{2t}}{x_{2t}}\right) \quad (35)$$

Celková hmotnost tělesa 2 bude rovna součtu přidané hmoty s hmotností tyče:

$$m_2 = m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p} \quad (36)$$

Celkový moment setrvačnosti tělesa zapíšeme pomocí následujících vztahů:

$$I_{2 \text{ Tyč kolem težiště}} = \frac{1}{12} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} \cdot l_2^2 + m_{2 \text{ Tyč}} \cdot [(x_{2t \text{ Tyč}} - x_{2t})^2 + (y_{2t \text{ Tyč}} - y_{2t})^2] \quad (37)$$

Moment setrvačnosti tyče kolem těžiště rozšíříme o přidanou hmotu:

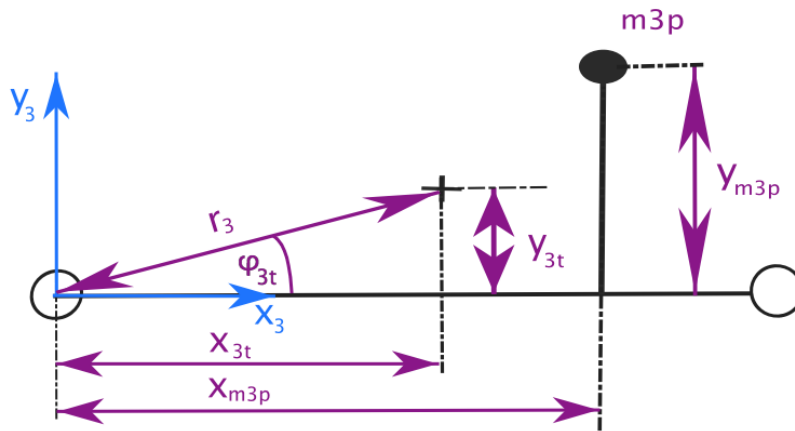
$$I_{2 \text{ Celkové kolem težiště}} = I_{2 \text{ Tyč kolem težiště}} + m_{2p} \cdot [(x_{2p} - x_{2t})^2 + (y_{2p} - y_{2t})^2] \quad (38)$$

Nyní zbývá posunout moment setrvačnosti do koncového bodu, kde těleso rotuje:

$$I_2 = I_{2 \text{ Celkové kolem težiště}} + m_2 \cdot r_2^2 \quad (39)$$

Pomocí této soustavy rovnic jsou definovány potřebné parametry pro těleso 2.

9.1.2. Těleso 3



Obr. 14 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 3

Na (Obr. 14) se nachází okótovaný popis tělesa 3. Způsob určení charakteristik je identický jako pro těleso 2. Parametry definujeme následující sestavou rovnic:

$$x_{3t} = \frac{(x_{3t \text{ Tyč}} \cdot m_{3 \text{ Tyč}} + x_{m3p} \cdot m_{3p})}{m_{3 \text{ Tyč}} + m_{3p}} \quad (40)$$

$$y_{3t} = \frac{(y_{3t \text{ Tyč}} \cdot m_{3 \text{ Tyč}} + y_{m3p} \cdot m_{3p})}{m_{3 \text{ Tyč}} + m_{3p}} \quad (41)$$

$$r_3 = \sqrt{(x_{3t}^2 + y_{3t}^2)} \quad (42)$$

$$\varphi_{3t} = \text{atan}\left(\frac{y_{3t}}{x_{3t}}\right) \quad (43)$$

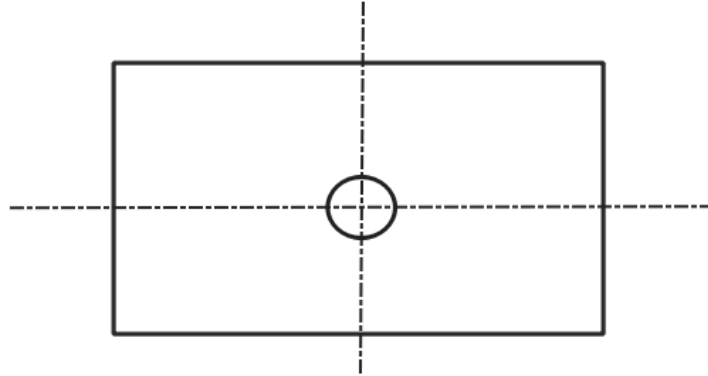
$$m_3 = m_{3 \text{ Tyč}} + m_{3p} \quad (44)$$

$$I_{3 \text{ Tyč kolem težiště}} = \frac{1}{12} \cdot m_{3 \text{ Tyč}} \cdot l_3^2 + m_{3 \text{ Tyč}} \cdot [(x_{3t \text{ Tyč}} - x_{3t})^2 + (y_{3t \text{ Tyč}} - y_{3t})^2] \quad (45)$$

$$I_{3 \text{ Celkové kolem težiště}} = I_{3 \text{ Tyč kolem težiště}} + m_{3p} \cdot [(x_{3p} - x_{3t})^2 + (y_{3p} - y_{3t})^2] \quad (46)$$

$$I_3 = I_{3 \text{ Celkové kolem težiště}} + m_3 \cdot r_3^2 \quad (47)$$

9.1.3. Těleso 4



Obr. 15 Popis těžiště a charakteristik pro těleso 4

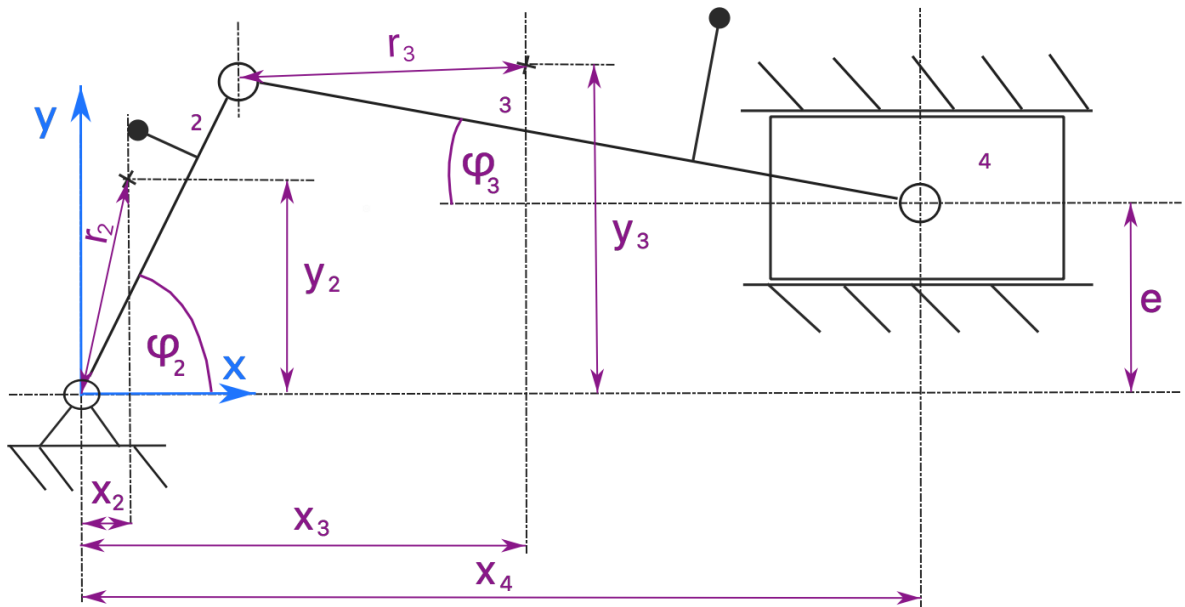
Schematicky znázorněné těleso 4 na (Obr. 15) neobsahuje žádné přidané hmotnosti a je uchyceno na posuvné vazbě. Nekoná rotační pohyb, a tudíž pro popis soustavy nebude potřeba moment setrvačnosti.

9.2. Řešení pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu

Pro řešení mechanismu použijeme tvar rovnic z kapitoly (4). Potřebujeme zjistit kinetickou energii soustavy a poté provést příslušné derivace, a to včetně určení členu zobecněných sil. Uvažovat budeme rovnicí v následujícím tvaru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial E_k}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, \dots, i \quad (48)$$

9.2.1. Počet stupňů volnosti



Obr. 16 Okótnované schéma klikového mechanismu

Prvně určíme počet stupňů z rovnice:

$$i = 3 \cdot (4 - 1) - 3^{\circ}_{\text{vetkn.}} \cdot 0 - 2^{\circ}_{\text{kloub.}} \cdot 3 - 2^{\circ}_{\text{pos.}} \cdot 1 = 1^{\circ} \quad (49)$$

9.2.2. Vazbová rovnice

Pro popis soustavy zvolíme úhel φ_2 . Úhel φ_3 (φ_3) popíšeme pomocí následující vazbové rovnice:

$$l_2 \cdot \sin(\varphi_2) = l_3 \cdot \sin(\varphi_3) + e \quad (50)$$

Z rovnice (50) vyjádříme φ_3 :

$$\varphi_3 = \text{asin}\left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right) \quad (51)$$

Provedeme derivaci rovnice (51) podle času a zavedeme novou proměnnou $R(\varphi_2)$:

$$\dot{\varphi}_3 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}}}_{R(\varphi_2)} \cdot \left(\frac{l_2 \cdot \cos(\varphi_2)}{l_3}\right) \cdot \dot{\varphi}_2 = R(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (52)$$

9.2.3. Vyjádření poloh a rychlostí k jednotlivým těžištím mechanismu

Popis těžišť určíme podle následující sady rovnic:

$$x_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (53)$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (54)$$

$$x_3 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \quad (55)$$

$$y_3 = l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \quad (56)$$

$$x_4 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_3) \quad (57)$$

$$y_4 = e \quad (58)$$

Derivováním poloh podle času získáme jednotlivé rychlosti:

$$\dot{x}_2 = -r_2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (59)$$

$$\dot{y}_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (60)$$

$$\dot{x}_3 = -l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 - r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (61)$$

$$\dot{y}_3 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 - r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (62)$$

$$\dot{x}_4 = -l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 - l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (63)$$

$$\dot{y}_4 = 0 \quad (64)$$

Předchozí soustavu rovnic budeme potřebovat pro vyjádření kin. energie. Proto prvně rovnice umocníme a poté příslušné rychlosti sečteme.

$$\dot{x}_3^2 = l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 + r_3^2 \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3^2 \quad (65)$$

$$\dot{y}_3^2 = l_2^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 - 2 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 + r_3^2 \cdot \cos^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3^2 \quad (66)$$

Rovnice (65, 66) sečteme:

$$\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + r_3^2 \cdot \dot{\varphi}_3^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (67)$$

Do rovnice (67) dosadíme za rychlost $\dot{\varphi}_3$ z již vyjádřené rovnice (52):

$$\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + r_3^2 \cdot R(\varphi_2)^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (68)$$

Rovnici (63) umocníme a dosadíme za rychlost $\dot{\varphi}_3$ z již vyjádřené rovnice (52):

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^2 = l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \\ + l_3^2 \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \quad (69)$$

9.2.4. Určení kinetické energie

Prvně definujeme rovnici kinetické energie v základním tvaru:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \quad (70)$$

Do rovnice (70) dosadíme vztahy z předešlé kapitoly a získáme tak rovnici kin. en. Závislou pouze na φ_2 :

$$\begin{aligned} E_k = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot R(\varphi_2)^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\ + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + r_3^2 \cdot R(\varphi_2)^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \\
& \quad \cdot \dot{\varphi}_2 + l_3^2 \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2)
\end{aligned}$$

Z rovnice (71) vytkneme $\dot{\varphi}_2^2$ a dosadíme substituci za vytknuté členy:

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} \cdot (I_2 + I_3 \cdot R(\varphi_2)^2) & (72) \\
& + m_3 \cdot (l_2^2 + r_3^2 \cdot R(\varphi_2)^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)) \\
& + m_4 \cdot (l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) + l_3^2 \\
& \quad \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)^2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\
& = \frac{1}{2} \cdot A(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2
\end{aligned}$$

9.2.5. Výpočet členu $\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2}$

Prvně vyjádříme obecnou formulaci derivace kinetické energie podle polohy:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (73)$$

Derivaci substituce provedeme řešením následující rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} &= 2 \cdot I_3 \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} & (74) \\
& + m_3 \cdot \left(r_3^2 \cdot 2 \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} + 2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) - 2 \right. \\
& \quad \left. \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_4 \cdot \left(2 \cdot l_2^2 \cdot \sin(\varphi_2) \right. \\
& \quad \cdot \cos(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \\
& \quad \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} \cdot R(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\
& \quad \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} + 2 \cdot l_3^2 \\
& \quad \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} \cdot R(\varphi_2)^2 + 2 \cdot l_3^2 \\
& \quad \left. \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \right)
\end{aligned}$$

9.2.6. Výpočet členu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} \right)$

Vyjádríme derivaci substituované rovnice (72):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} = A(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (75)$$

Následně provedeme zbývající derivaci podle času:

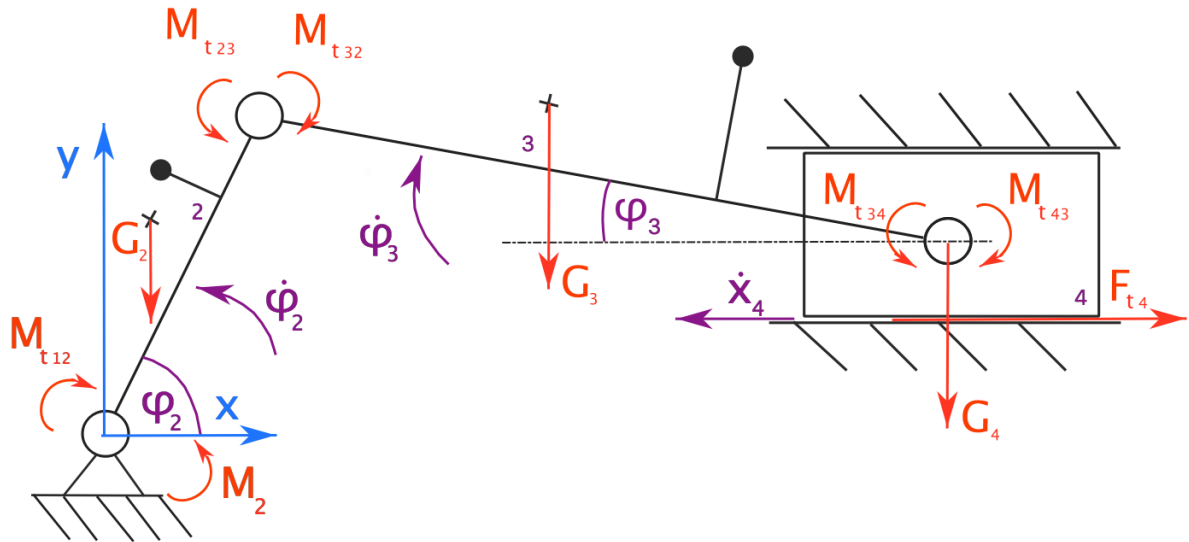
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \dot{A}(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 + A(\varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 \quad (76)$$

Z rovnice (76) jsou členy známé, až na $\dot{A}(\varphi_2)$, který popisuje následující rovnice (77):

$$\begin{aligned}
\frac{dA(\varphi_2)}{dt} &= 2 \cdot l_3 \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{dR(\varphi_2)}{dt} \\
& + m_3 \cdot \left(r_3^2 \cdot 2 \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{dR(\varphi_2)}{dt} + 2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \right. \\
& \quad \left. \cdot R(\varphi_2) - 2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{dR(\varphi_2)}{dt} \right)
\end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned}
& +m_4 \cdot \left(2 \cdot l_2^2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2) \right. \\
& \quad \cdot \dot{\varphi}_2 + 2 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \\
& \quad \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot R(\varphi_2) + 2 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\
& \quad \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \frac{dR(\varphi_2)}{dt} + 2 \cdot l_3^2 \\
& \quad \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot R(\varphi_2)^2 + 2 \cdot l_3^2 \\
& \quad \left. \cdot \sin^2(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \frac{dR(\varphi_2)}{dt} \right)
\end{aligned}$$

9.2.7. Výpočet zobecněné síly Q



Obr. 17 Schéma klikového mechanismu s vnějšími silami

Na (Obr. 17) se nachází jednotlivé členy klikového mechanismu. Hnací moment je značen M_2 , třecí silové účinky jsou značeny dolním indexem t . Třecí momenty jsou definovány následující soustavou rovnic:

$$M_{t12} = b \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (78)$$

$$M_{t32} = b \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (79)$$

$$M_{t23} = b \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (80)$$

$$M_{t43} = b \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (81)$$

$$F_{t4} = G_4 \cdot f \cdot \dot{x}_4 \quad (82)$$

Člen zobecněné síly je definován v následující podobě:

$$Q \cdot \delta\varphi_2 = M_2 \cdot \delta\varphi_2 - M_{t12} \cdot \delta\varphi_2 - M_{t32} \cdot \delta\varphi_2 + M_{t23} \cdot \delta\varphi_3 - M_{t43} \cdot \delta\varphi_3 - F_{t4} \cdot \delta x_4 - G_2 \cdot \delta y_2 - G_3 \cdot \delta y_3 - G_4 \cdot \delta y_4 \quad (83)$$

Následující soustavou rovnic získáme přímo závislost na φ_2 :

$$\delta\varphi_3 = R(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 \quad (84)$$

$$\delta y_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \delta\varphi_2 \quad (85)$$

$$\delta y_3 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 - r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 \quad (86)$$

$$\delta x_4 = -l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 - l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 \quad (87)$$

$$\delta y_4 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 - l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 \quad (88)$$

Vypočtené rovnice (84, 85, 86, 87, 88) dosadíme do rovnice (83):

$$Q = M_2 - M_{t12} - M_{t32} + M_{t23} \cdot R(\varphi_2) - M_{t34} \cdot R(\varphi_2) \quad (89)$$

$$- F_{t4} \cdot (-l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)) - G_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t})$$

$$- G_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2))$$

$$- G_4 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2))$$

9.2.8. Doplnění chybějících derivací

Nyní máme vyjádřené jednotlivé členy LR2. Průběhu derivování ale vznikly parciální derivace některých členů, které jsou prozatím neznámé a popisuje je následující soustava rovnic:

$$\frac{dR(\varphi_2)}{dt} = \frac{-l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2}{\left(l_3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}\right)^2} \quad (90)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot \left(1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right) \cdot \left(\frac{l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2}{l_3}\right)}{\left(l_3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial R(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} = \frac{-l_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\left(l_3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}\right)^2} \quad (91)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot \left(1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right) \cdot \left(\frac{l_2 \cdot \cos(\varphi_2)}{l_3}\right)}{\left(l_3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - e}{l_3}\right)^2}} \quad (92)$$

Vyjádřením těchto tří derivací máme plně řešitelnou dynamickou rovnici

9.2.9. Výsledné dosazení substituovaných proměnných

Do základní rovnice LR2 (48) dosadíme rovnice (73, 77, 89). Tím získáme jednoduchý a přehledný vztah, ze kterého lze jednoduše vyjádřit jak zrychlení $\ddot{\varphi}_2$, tak hnací moment M_2 . Substituovaná dynamická rovnice je zapsána ve tvaru:

$$\dot{A}(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 + A(\varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 = Q \quad (93)$$

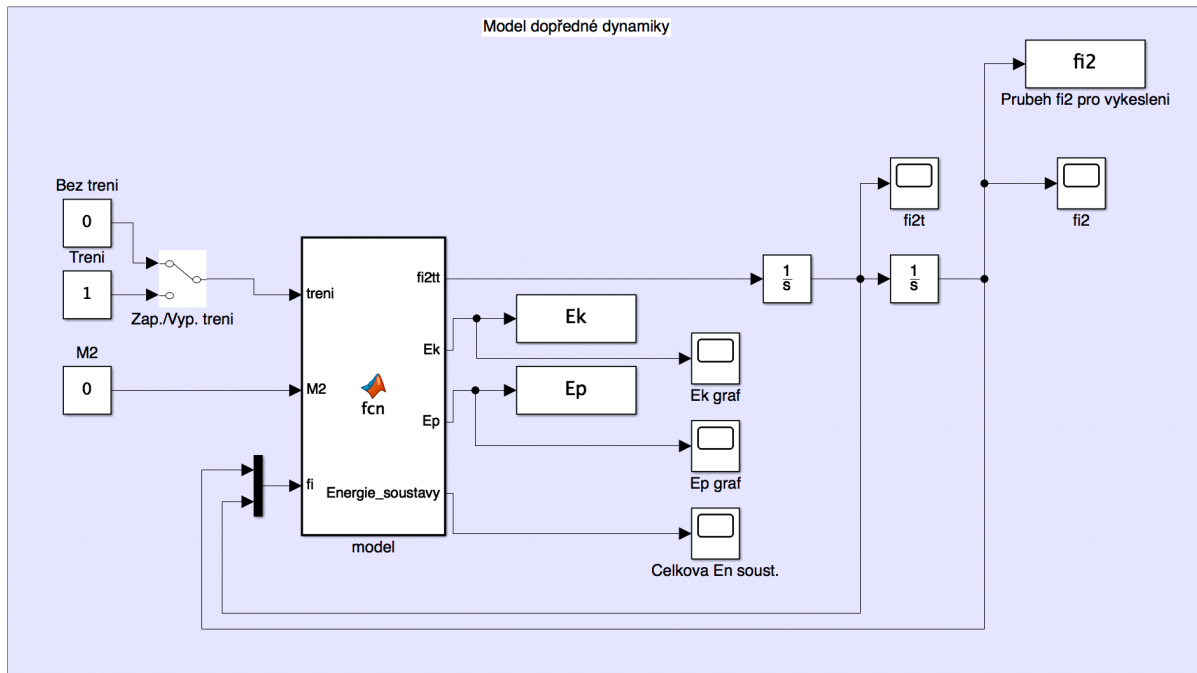
9.3. Dopředná úloha dynamiky

V předchozí kapitole (9.2.9) se nachází výsledná rovnice dynamiky, která hraje klíčovou roli při stavbě dynamických modelů. Dopřednou úlohou se rozumí takové řešení, kdy je vstupem do našeho modelu vnější silové zatížení, poloha a rychlost. Výstupem modelu je zrychlení.

9.3.1. Tvorba modelu

Z dynamické rovnice vyjádříme zrychlení $\ddot{\varphi}_2$, které bude výstupem modelu:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{Q + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 - \dot{A}(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2}{A(\varphi_2)} \quad (94)$$



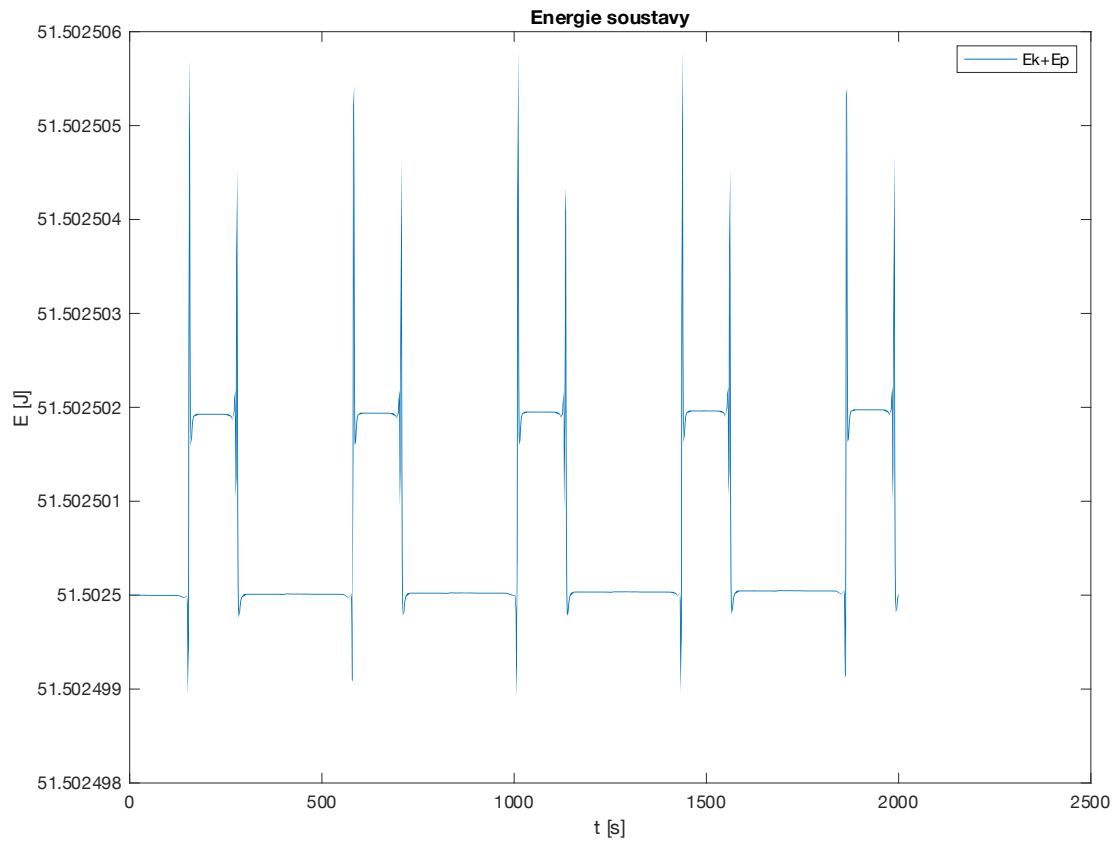
Obr. 18 Schéma zapojení dopředné dynamiky

Na (Obr. 18) je vyobrazeno schéma zapojení v programu Simulink. Z modelu vystupuje zrychlení, které je ve zpětné smyčce dvakrát integrováno a vráceno do modelu v podobě polohy a zrychlení. Dalším vstupem je řídicí moment M_2 . Posledním vstupem modelu je informace o tření. Pokud je tření zapnuté, pak jsou v modelu v průběhu výpočtu zohledněna tření, v opačném případě zohledněna nejsou.

9.3.2. Kontrola modelu

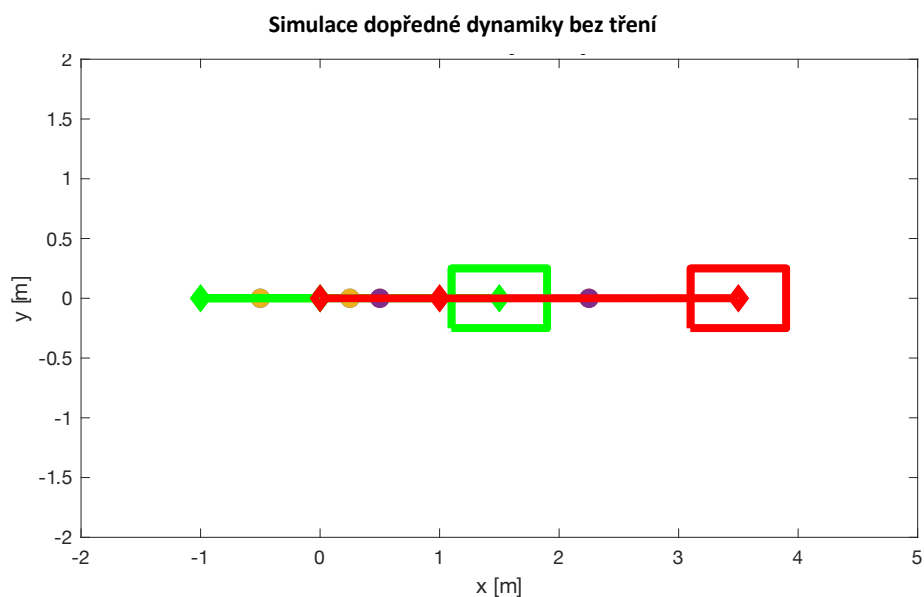
Pokud nebude do modelu vstupovat žádná vnější síla a tření, poté musí platit rovnice:

$$E_k + E_p = konst. \quad (95)$$



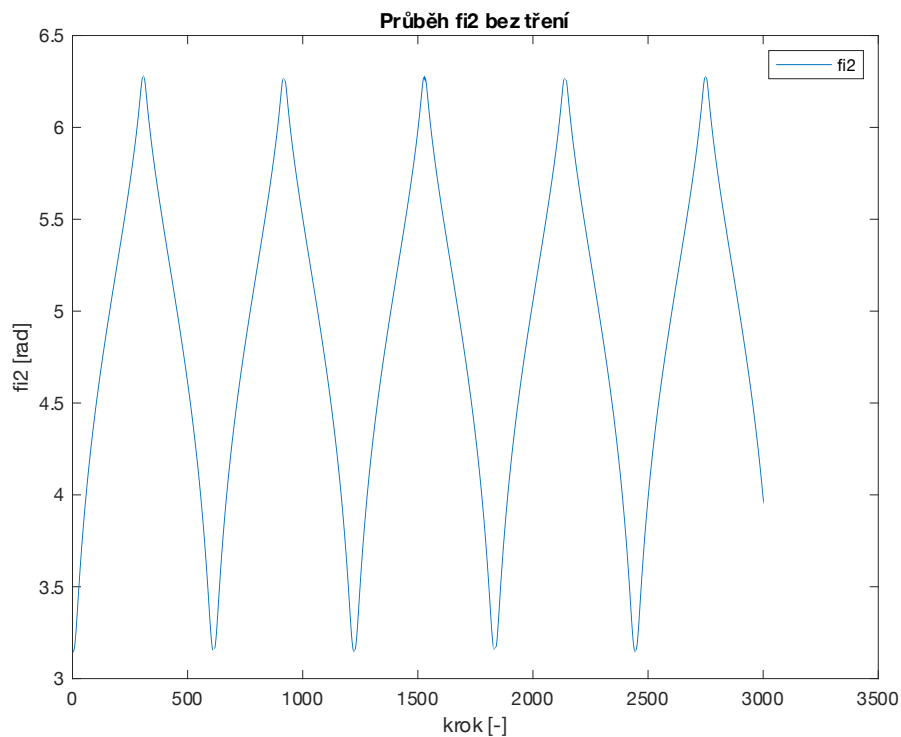
Obr. 19 Energie klikového mechanismu bez vnějších sil

Výsledný průběh součtu energií znázorňuje obrázek (Obr. 19). Mechanismus byl spuštěn „na prázdno“ bez tření a hnacího momentu z polohy $\varphi_2 = \pi$. Energie soustavy lze považovat za konstantní, neboť svislá osa, značící energii má stálou hodnotu $E \cong 51,503 J$, kde rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou $e = -7 \times 10^{-6}$.



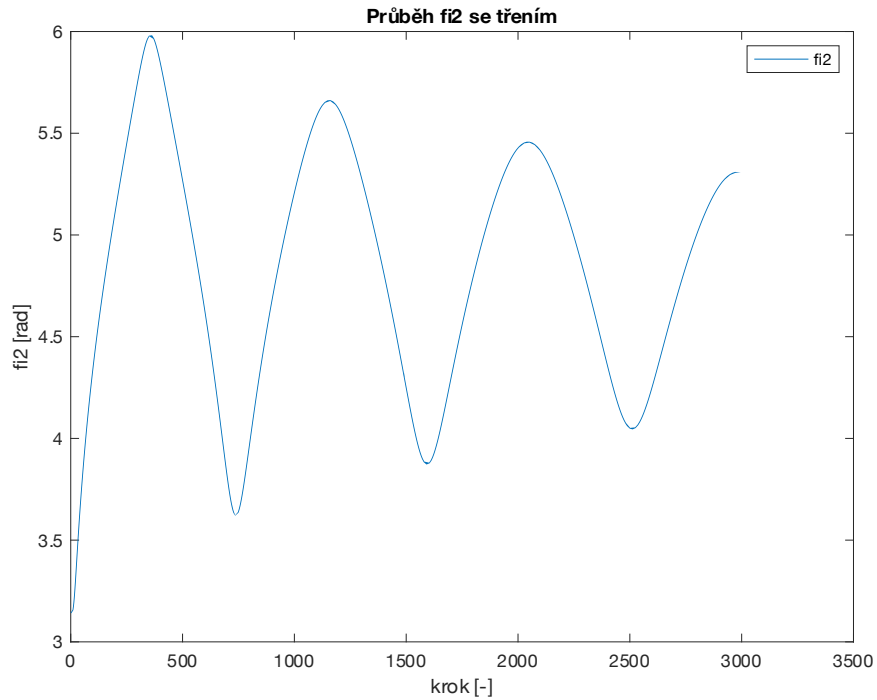
Obr. 20 Simulace dopředné dynamiky bez tření

(Obr. 20) znázorňuje mechanismus v počáteční a konečné poloze. Počáteční poloha mechanismu je znázorněna zelenou barvou, kdežto konečná poloha barvou červenou. Počáteční podmínka je definována pomocí úhlu φ_2 . Po spuštění z počáteční podmínky $\varphi_2 = \pi$ mechanismus dosáhne polohy, kde $\varphi_2 = 2\pi$ a poté se vrátí zpět do původní polohy.



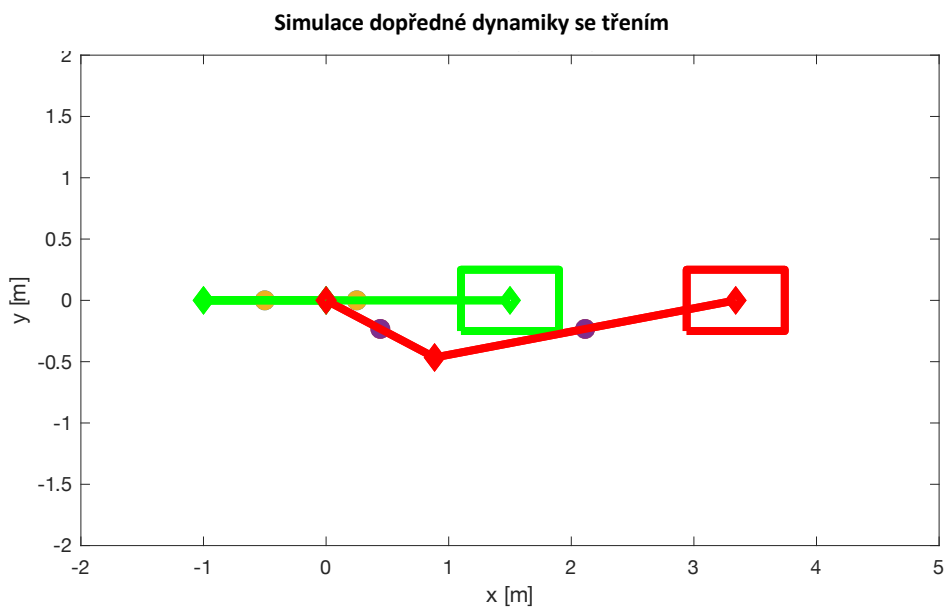
Obr. 21 Průběh polohy φ_2 bez tření

Na (Obr. 21) je znázorněn průběh úhlu φ_2 pro mechanismus bez vnějšího silového zatížení a tření. Mechanismus se v průběhu vykonávaných cyklů neutlumuje, neboť energie nemá kam disipovat.



Obr. 22 Průběh polohy φ_2 se třením

(Obr. 22) znázorňuje průběh polohy φ_2 pro mechanismus bez vnějšího silového zatížení, ale zohledňující tření. Po spuštění z počáteční podmínky $\varphi_2 = \pi$ mechanismus dosáhne polohy, kde $\varphi_2 = 5,89 \text{ rad}$ a poté se postupně utlumuje.



Obr. 23 Simulace dopředné dynamiky se třením

(Obr. 23) vykresluje dvě polohy průběhu klikového mechanismu. Zeleně značená je počáteční poloha spuštění a červeně značená je nejvyšší dosažená poloha. Po dosažení červené polohy je mechanismus dále utlumován dle (Obr. 22).

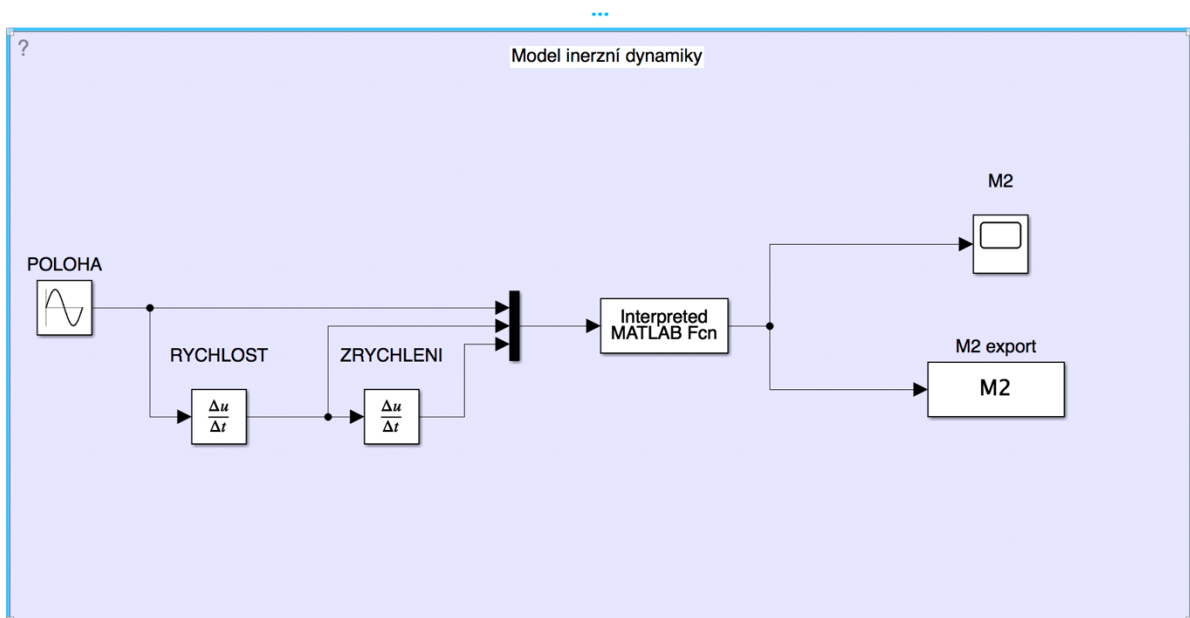
9.4. Inverzní úloha dynamiky

Inverzní úlohou se rozumí taková úloha, kdy máme vstupem do modelu polohy, rychlosti a zrychlení. Výstupem je naše vnější zatížení, tedy moment M2.

9.4.1. Tvorba modelu

Z dynamické rovnice (93) vyjádříme hnací moment M_2 , který bude výstupem modelu:

$$\begin{aligned}
 M_2 = & \dot{A}(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 + A(\varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A(\varphi_2)}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + M_{t_{12}} \cdot \tanh(\dot{\varphi}_2) + M_{t_{32}} \\
 & \cdot \tanh(\dot{\varphi}_2) - M_{t_{23}} \cdot \tanh(\dot{\varphi}_3) \cdot R(\varphi_2) \\
 & + M_{t_{12}} + M_{t_{32}} - M_{t_{23}} \cdot R(\varphi_2) + M_{t_{34}} \cdot R(\varphi_2) \\
 & + F_{t_4} \cdot (-l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)) + G_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \\
 & + G_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - r_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2)) \\
 & + G_4 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_{3t}) \cdot R(\varphi_2))
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

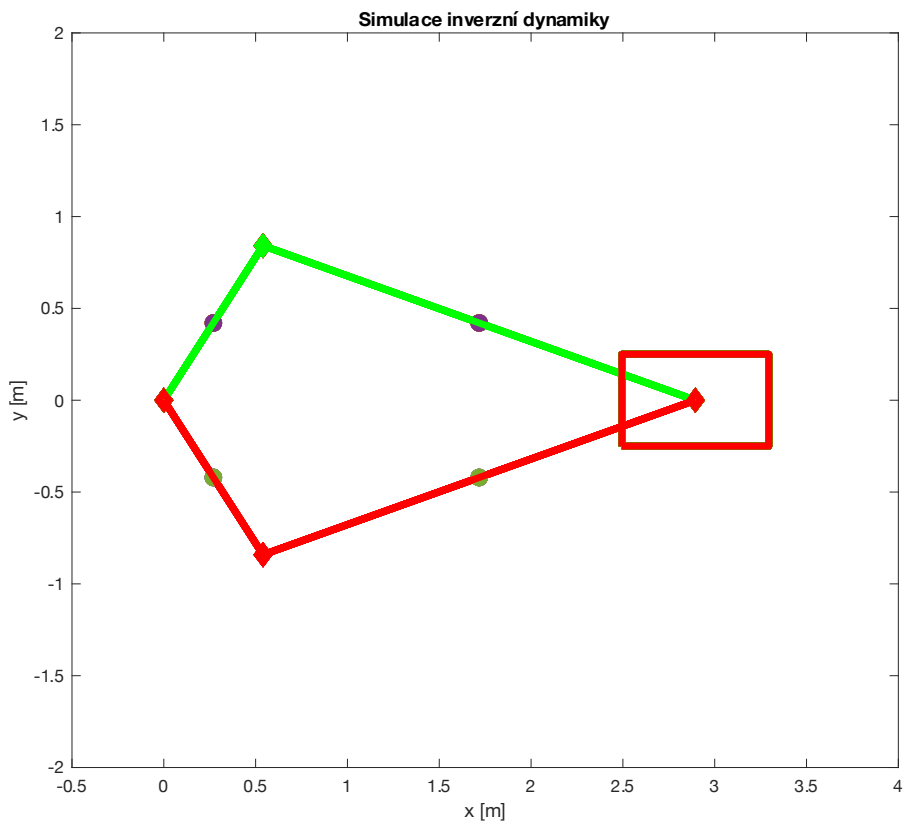


Obr. 24 Schéma zapojení inverzní dynamiky

Na (Obr. 24) se nachází schematické zapojení v programu Simulink. Vstupem do našeho modelu je poloha, rychlost a zrychlení, výstupem je hnací moment.

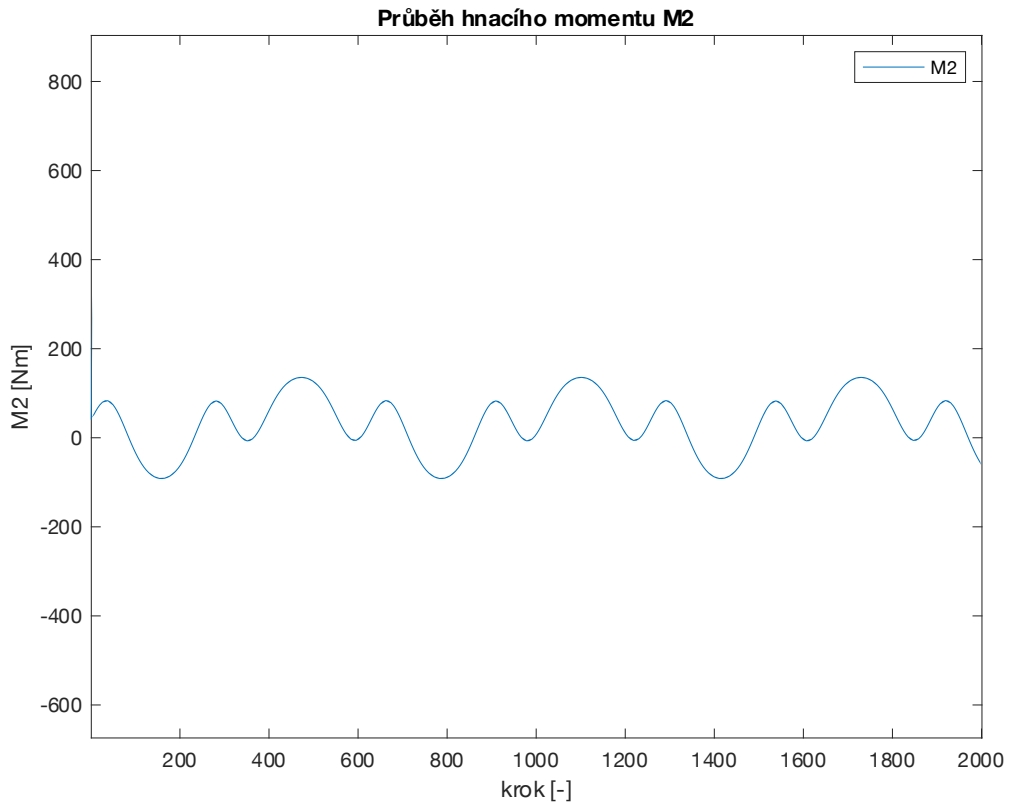
9.4.1. Kontrola modelu

Ověření modelu provedeme jednoduchou simulací, kdy vstupuje do modelu funkce $\sin(x)$, která generuje hodnoty od $\langle -1, 1 \rangle$, což lze považovat za rozsah úhlu přibližně $\langle -60^\circ, 60^\circ \rangle$. Poloha φ_2 by tedy neměla nabývat větších hodnot a zároveň výstupní moment by měl mít periodický průběh.



Obr. 25 Simulace inverzní dynamiky

(Obr. 25) vykresluje maximální dosažené polohy mechanismu. Zelenou čarou je zvýrazněna horní maximální dosažená výchylka a červenou minimální dosažená výchylka. Což přesně odpovídá vstupní funkci v daném intervalu.



Obr. 26 Průběh hnacího momentu pro funkci $\sin(x)$ na vstupu

(Obr. 26) zobrazuje průběh výstupního hnacího momentu, kdy je vstupem funkce $\sin(x)$. Průběh je periodický a největší moment je potřeba k překonání polohy $\varphi_2 = 0$, kdy jsou obě ramena položena ve vodorovné poloze.

9.5. Simplexová optimalizace EM modelu

9.5.1. Cílové funkce

Cílem optimalizace je vyvážit mechanismus takovým způsobem, aby přesně docílil požadované konečné polohy v čase t_{kon} . Požadovaný rozsah je popsán pomocí polohy $\varphi_{2\ kon}$ a počáteční podmínky. Model klikového mechanismu, na který nepůsobí vnější síly a tření se po spuštění z libovolné polohy vždy vrátí přesně do místa, kde byl spuštěn. Postačí nám tedy použití dvou cílových funkcí. Výsledná cílová funkce je dána následující rovnicí:

$$CF = p_1 \cdot CF_1 + p_2 \cdot CF_2 \quad (97)$$

První cílovou funkcí předepíšeme mechanismu konečnou polohu v požadovaném čase dosažení:

$$CF_1 = \left| |\varphi_2^{t_{kon}}| - |\varphi_{2\ kon}| \right| \quad (98)$$

V rovnici (98) od sebe odečítáme polohu $\varphi_2^{t_{kon.}}$, což je poloha mechanismu v požadovaném čase a $\varphi_{2_{kon.}}$ je požadovaná konstantní poloha, kterou má mechanismus v daném čase dosáhnout.

$$CF_2 = |\dot{\varphi}_2(t_{kon.})| \quad (99)$$

V rovnici (99) minimalizujeme rychlost mechanismu v blízkosti koncové polohy. Víme, že mechanismus musí v dosažené maximální poloze nabývat nulové rychlosti. Proto rychlost v požadované poloze minimalizujeme. V průběhu optimalizace bylo za potřebí omezit souřadnice x_{2p} a x_{3p} , aby nedošlo k umístění mimo těleso.

9.5.2. Požadavky optimalizace mechanismu

Cílem optimalizace je vymezení přesného pohybu mechanismu. Mechanismus bude spuštěn z počáteční polohy $\varphi_{2_{poč.}} = \pi/2$ odkud se vykývá do $\varphi_{2_{kon.}} = 2\pi$ v čase $t_{pož} = 4s$. Požadavky jsou dány následovně:

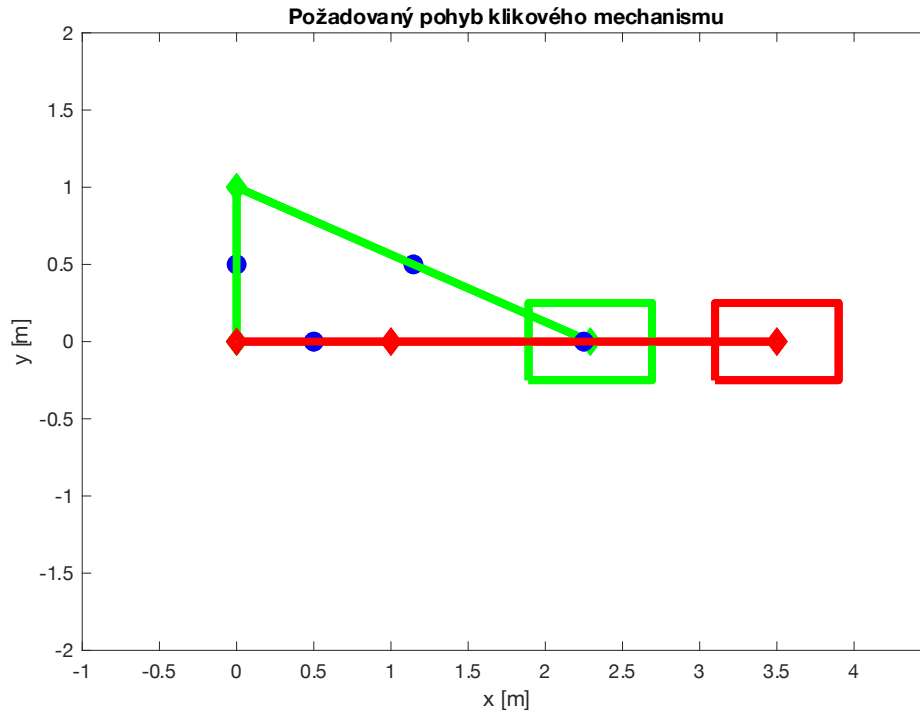
$$\varphi_2 = \left\langle \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\rangle \quad (100)$$

$$t_{pož} = 4s \quad (101)$$

$$p_1 = 10 \quad (102)$$

$$p_2 = 10 \quad (103)$$

$$\text{směr otáčení z poč. pod.} = \text{proti směru hod. ruč.} \quad (104)$$



Obr. 27 Požadovaný pohyb klikového mechanismu

(Obr. 27) znázorňuje průběh požadované trajektorie, přičemž zelený obrys značí mechanismus v počáteční poloze. Poté je požadováno, aby došlo k otočení kliky proti směru pohybu hodinových ručiček a bylo dosaženo červeně vyznačené polohy mechanismu.

9.5.3. Neměnné parametry mechanismu

| Rozměry mechanismu | |
|--------------------|------|
| l_2 [m] | 1 |
| $m_{2\ tyc}$ [kg] | 2,37 |
| l_3 [m] | 2,5 |
| $m_{3\ tyc}$ [kg] | 5,92 |
| m_4 [kg] | 10 |
| e [m] | 0 |

Tabulka 1

Rozměry mechanismu, definované v (Tabulka 1) jsou rozměry pevně danými a nejsou v průběhu optimalizace měněny. Tělesa mechanismu 2 a 3 jsou definována jako trubky o vnějším průměru 50mm a tloušťce stěny 4mm. Těleso 4 uvažujeme jako zatěžující hmotu.

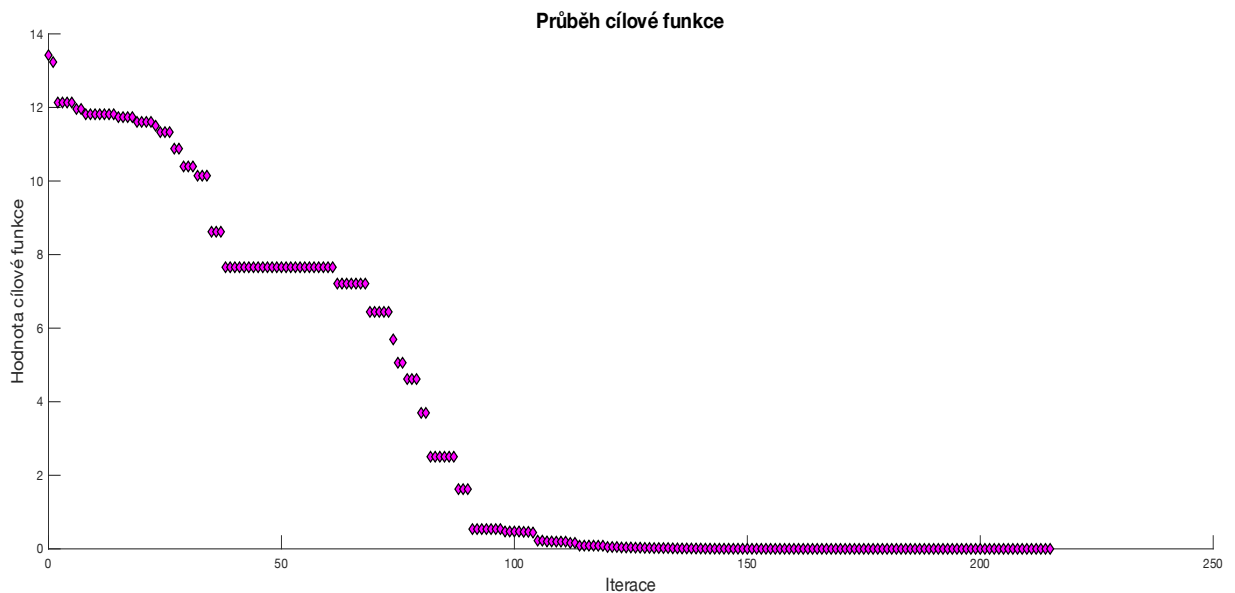
9.5.4. Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů mechanismu

| Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů | |
|--|-----|
| m_{2p} [kg] | 30 |
| x_{2p} [m] | 0,5 |
| y_{2p} [m] | 2 |
| m_{3p} [kg] | 30 |
| x_{3p} [m] | 0,5 |
| y_{3p} [m] | 0,5 |

Tabulka 2

V (Tabulka 2) jsou definované optimalizované parametry mechanismu. Optimalizujeme velikost a polohu přidaných hmot na tělesech 2 a 3. Popis okótovaných parametrů definuje (Obr. 16). Na první pohled se mohou zdát počáteční hmotnosti obrovské, ale při nastavení velkých hmot na počátku dochází mnohem rychleji k minimalizaci cílové funkce.

9.5.5. Průběh a výsledek optimalizace modelu



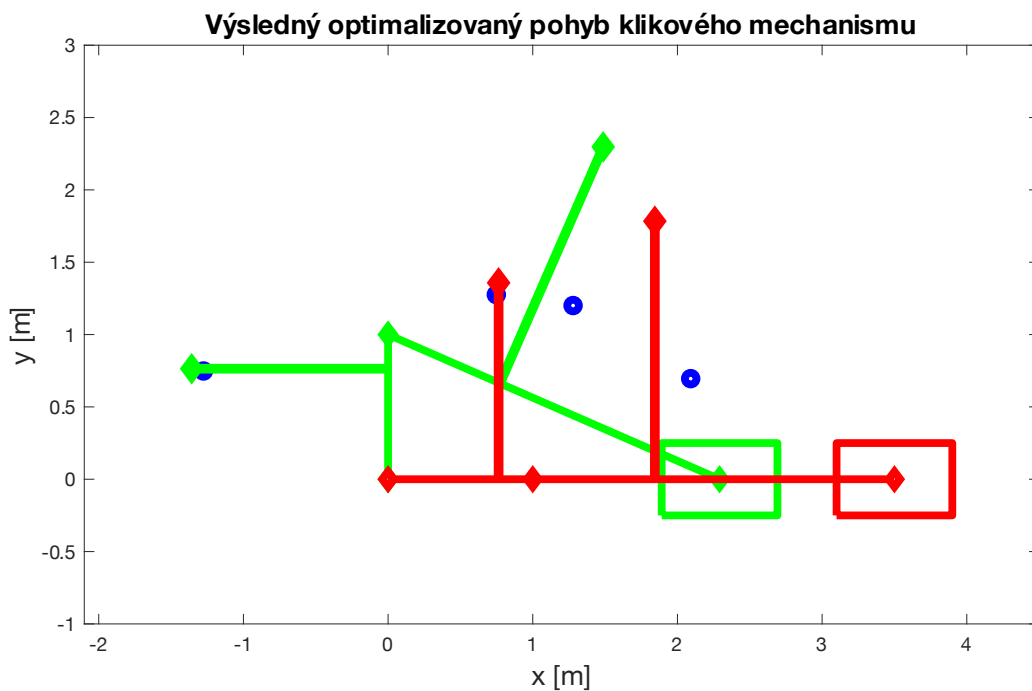
Obr. 28 Průběh cílové funkce

Na (Obr. 28) je znázorněn průběh cílové funkce v závislosti na iteraci. Celkem bylo provedeno 215 iteračních kroků s konečným výsledkem $CF = 3,94 \times 10^{-6}$.

| Počáteční vs. optimalizované hodnoty parametrů | | |
|--|-------------------|--------------|
| Parametr | Počáteční hodnoty | Opt. hodnoty |
| m_{2p} [kg] | 30 | 37,18 |
| x_{2p} [m] | 0,5 | 0,76 |
| y_{2p} [m] | 2 | 1,36 |
| m_{3p} [kg] | 30 | 3,78 |
| x_{3p} [m] | 0,5 | 0,84 |
| y_{3p} [m] | 0,5 | -1,78 |

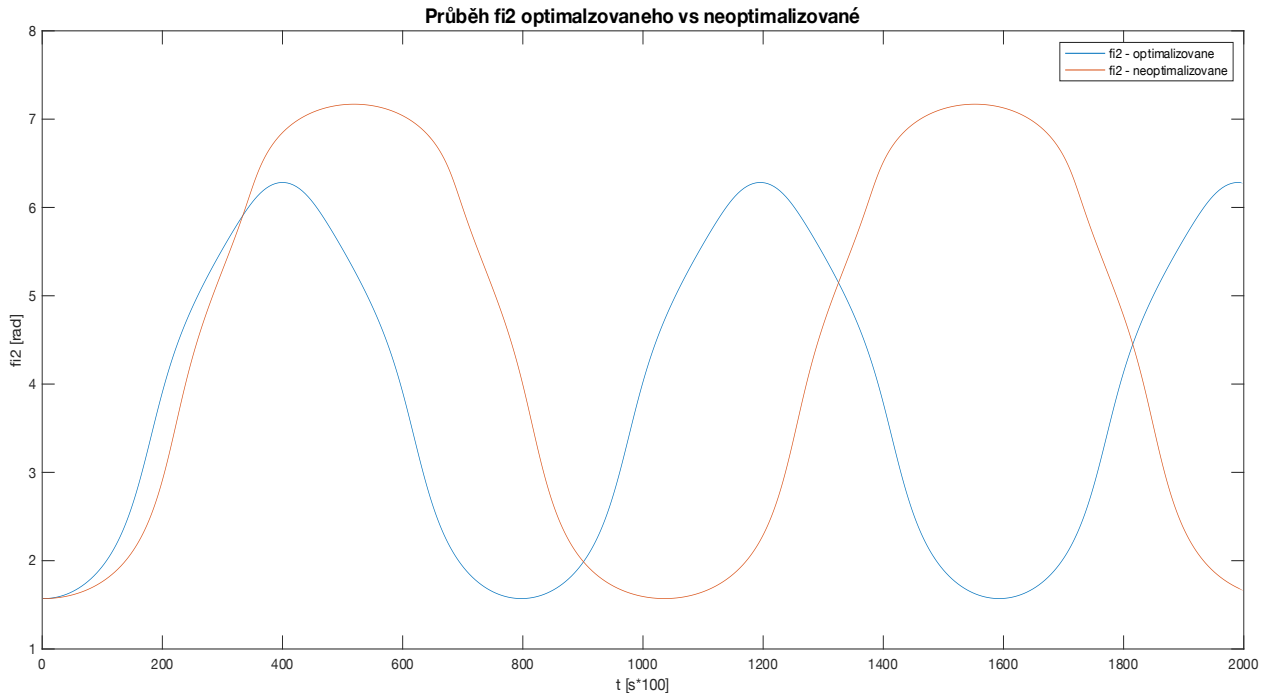
Tabulka 3

Výsledek optimalizace zobrazuje (Tabulka 3). Největší změnou prošly parametry přidané hmoty na tělese 3. Došlo k odebrání téměř celé hmotnosti a přemístění hmoty ve svislé souřadnici na opačnou stranu.



Obr. 29 Výsledný optimalizovaný pohyb mechanismu

(Obr. 29) znázorňuje optimalizovaný mechanismus ve dvou polohách. Zelený obrys mechanismu vyznačuje počáteční polohu mechanismu. Červeně vyznačený obrys vyznačuje maximální dosaženou výchylku mechanismu, což je $\varphi_{2kon.} = 2\pi$ v čase $t_{pož} = 4s$.



Obr. 30 Průběh polohy optimalizovaného a neoptimalizovaného klik. mech.

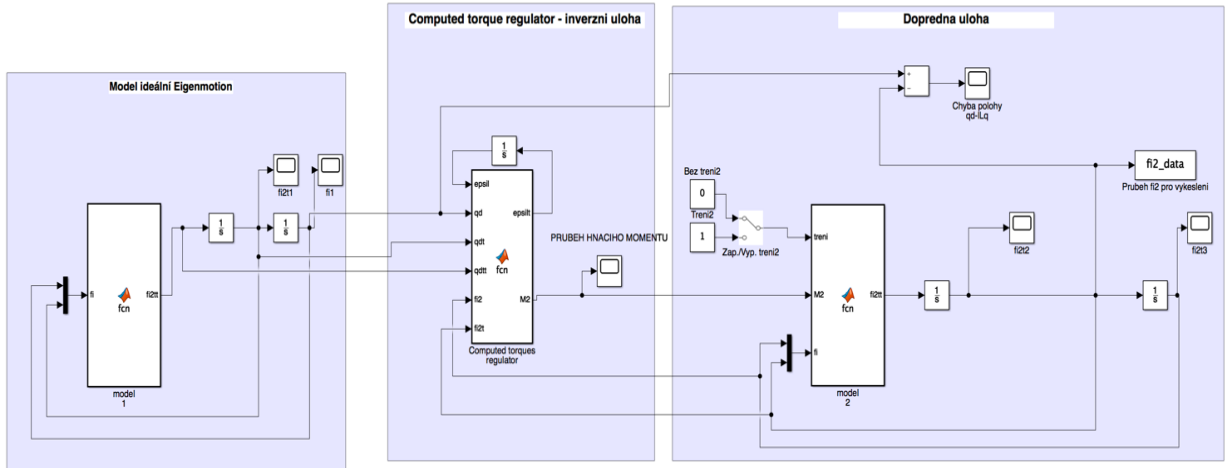
Průběh znázorněný na (Obr. 30) porovnává polohu φ_2 optimalizovaného a neoptimalizovaného modelu s počátečními parametry optimalizace z (Tabulka 2). Optimalizací bylo přesně splněno požadované polohy v čase s chybou v prvním cyklu $e_{\varphi_{kon.}} = 1,24 \times 10^{-4}$.

9.6. Computed torque

Důvodem aplikace metody Computed torque a modelu EM je porovnání nevyváženého klikového mechanismu s mechanismem, který koná požadovaný rozsah trajektorie vlastním přirozeným pohybem.

9.6.1. Tvorba modelu

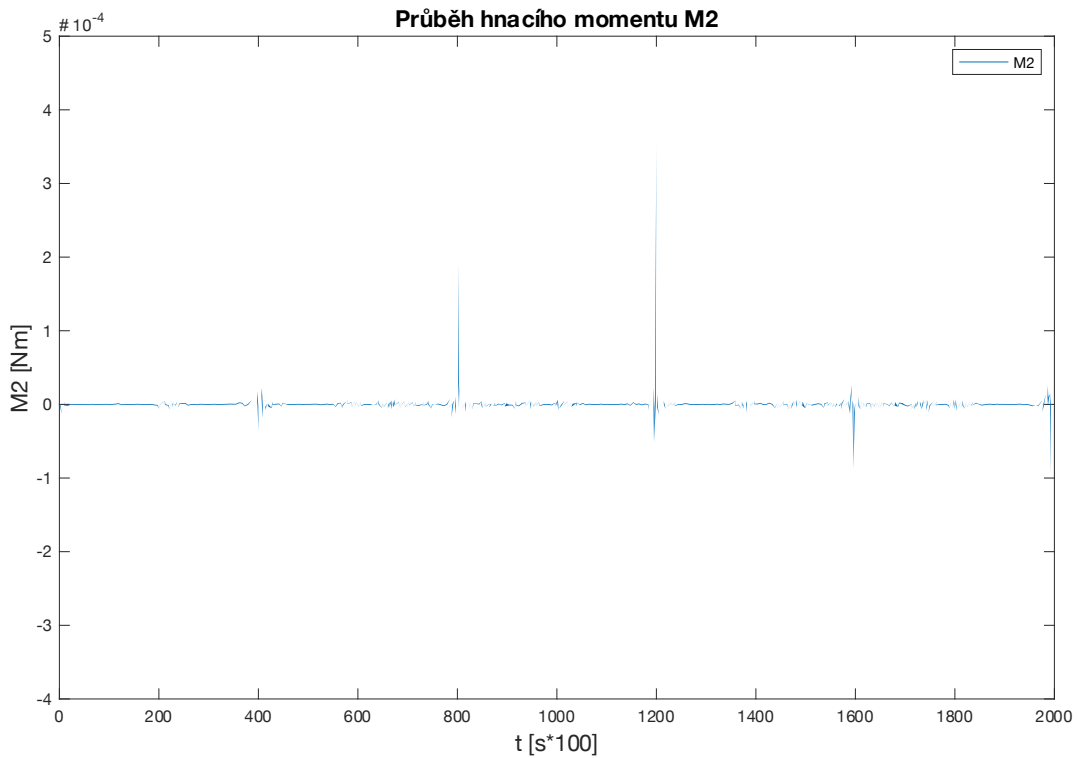
Předepsaný pohyb vstupující do regulátoru Computed torque je výsledný optimalizovaný model konající přirozený pohyb vykreslený na (Obr. 29) (bez tření). Regulátor přijímá také vstup z dopředné úlohy znázorněné na (Obr. 31). V regulátoru je vypočten potřebný akční zásah, aby se model pohyboval právě po předepsané trajektorii.



Obr. 31 Schematické znázornění modelu Computed torque

9.6.2. Kontrola modelu

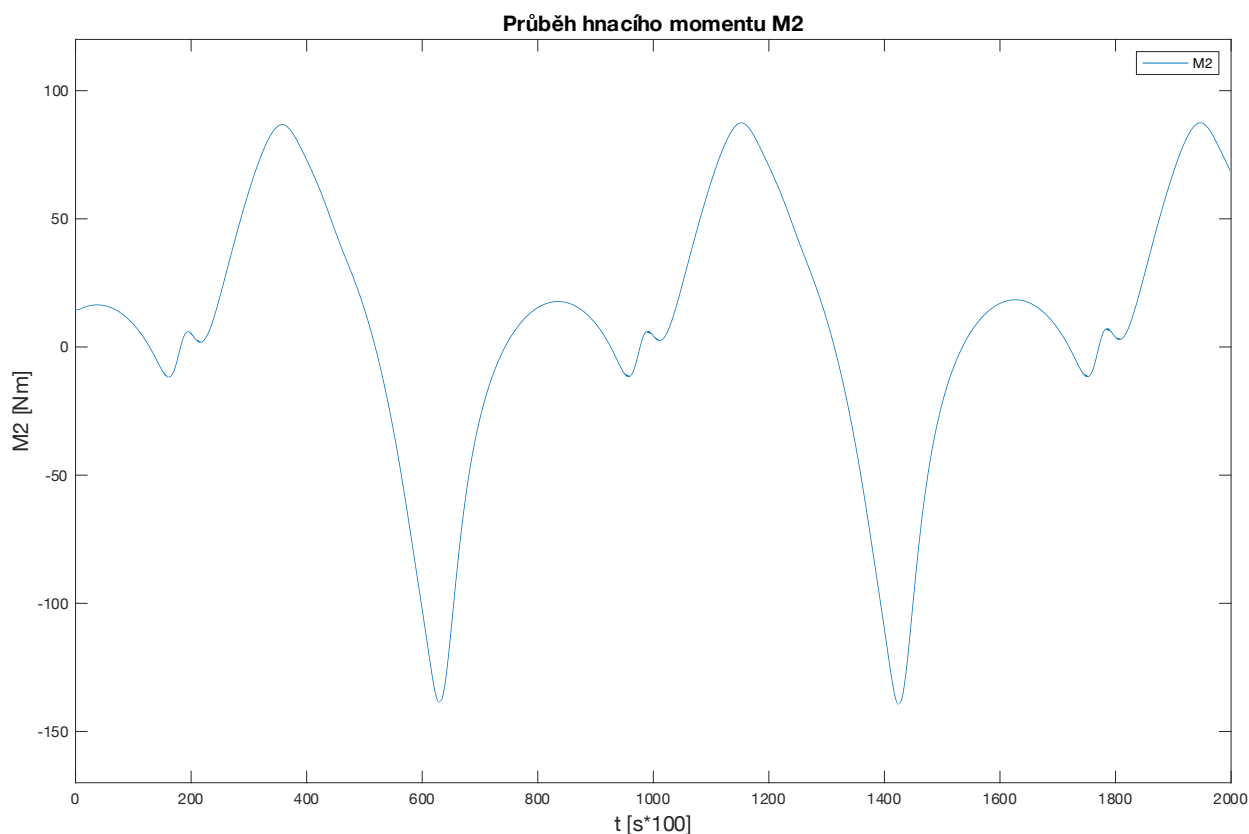
Pokud bude vstupem do modelu ideální optimalizovaný model EM. Inverzní dynamika obsažená v regulátoru a zároveň reálný dopředný model bude nastaven na stejné parametry, tak musí vyjít nulový akční zásah. Důvodem je, že vstupující model je totožný s výstupním a není potřeba akčního zásahu.



Obr. 32 Výsledný potřebný akční zásah – kontrola modelu

Na (Obr. 32) se nachází výsledek kontroly modelu. Akční zásah lze považovat za konstantní, neboť největší dosažená hodnota je zanedbatelného řádu 10^{-4} .

9.6.3. Požadované momenty pro neoptimalizovaný model



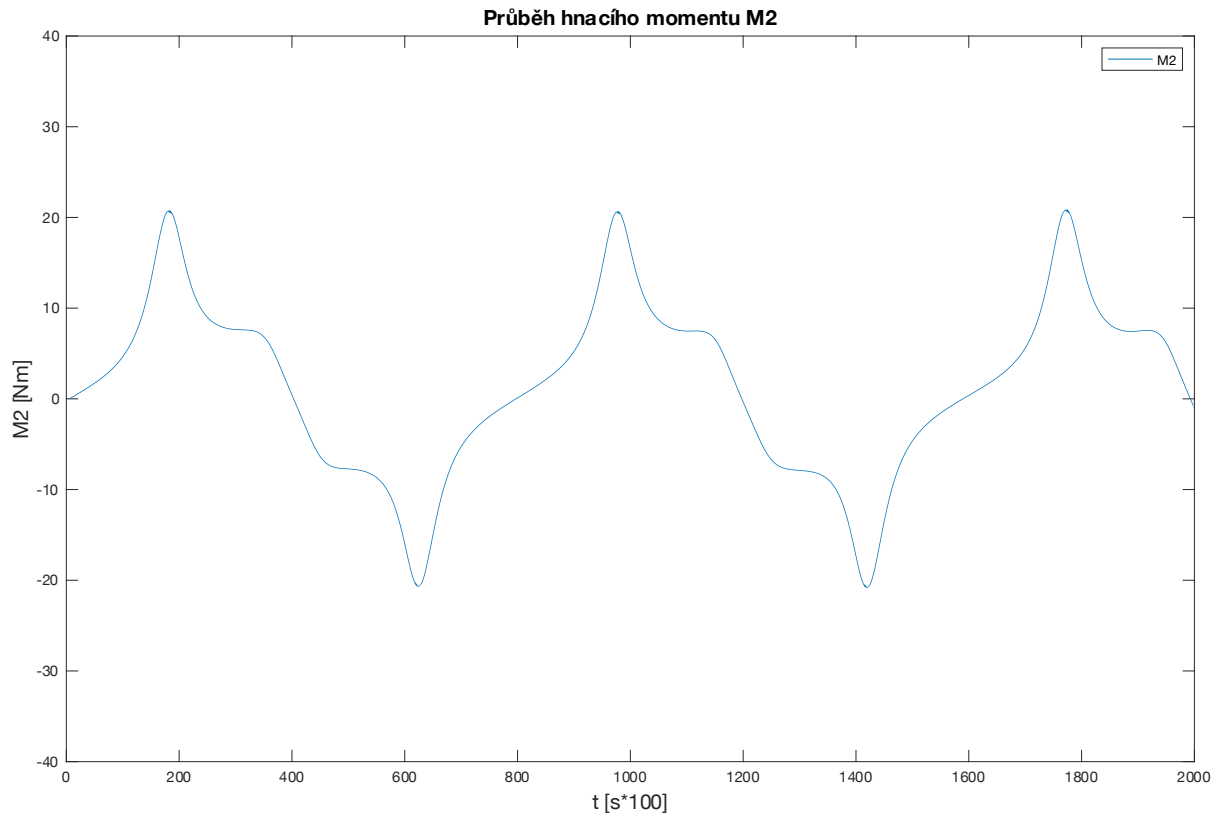
Obr. 33 Potřebný moment pro neoptimalizovaný model

Na (Obr. 33) je znázorněn výsledný hnací moment pro neoptimalizovaný model. Hodnoty momentu se pohybují v hodnotách $M_2 \in \langle -147,3; 86,7, \rangle Nm$

K získání požadovaného momentu pro nevyvážený model jsou odebrány veškeré přidané hmoty v dopředné a inverzní úloze. Tření je uvažováno dle následujícího průběhu (Obr. 35).

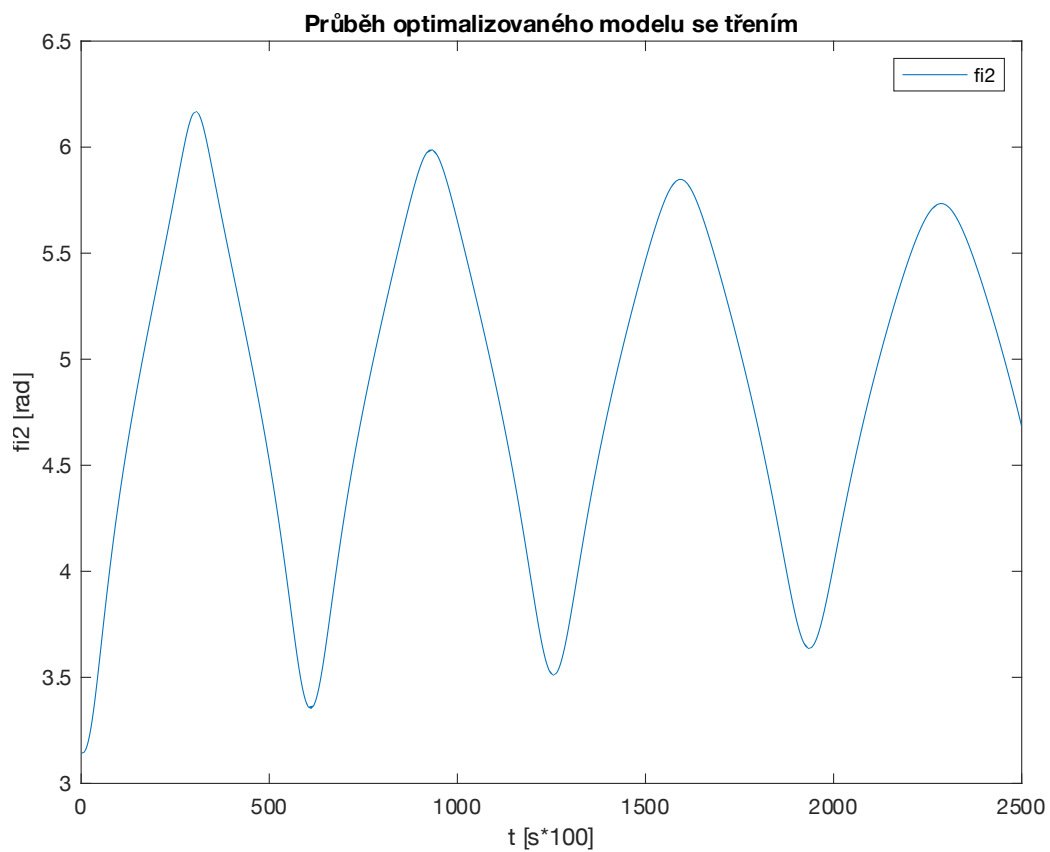
9.6.4. Požadované momenty pro optimalizovaný model

Pro získání požadovaného akčního zásahu optimalizovaného modelu byly použity již zmíněné parametry z (Tabulka 3). Tření bylo uvažováno stejné jako v případě modelu neoptimalizovaného s průběhem znázorněným dle (Obr. 35)



Obr. 34 Potřebný moment pro optimalizovaný model

(Obr. 34) znázorňuje průběh hnacího momentu pro optimalizovaný model. Hodnoty potřebného momentu mají symetrický průběh. Z obrázku lze vysledovat, že v počátku cyklu je dodávaný moment nulový. Poté narůstá z důvodu eliminace tření. V čase čtyř sekund je moment opět nulový, což je dosažení konečné požadované polohy, předepsané v kapitole (9.5.2). Potřebný moment se pohybuje v rozmezí $M_2 \in (-21,7; 21,7) Nm$

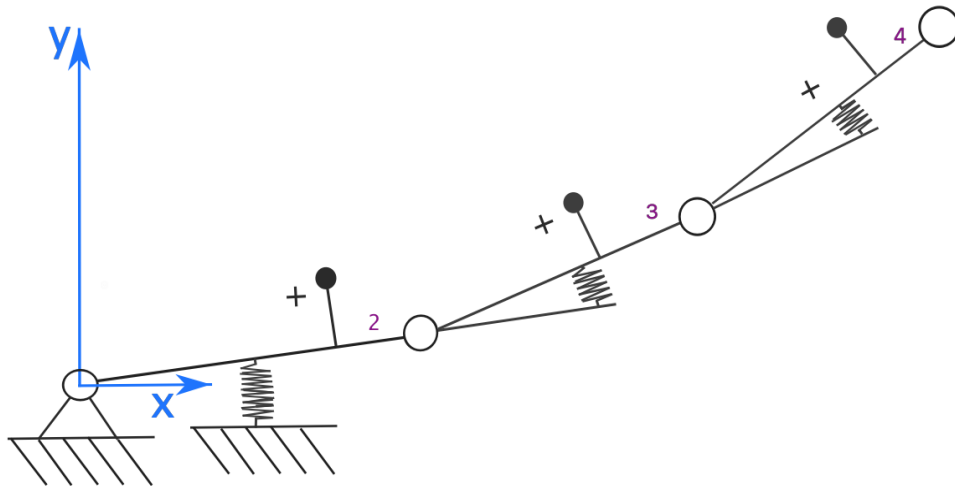


Obr. 35 Průběh optimalizovaného modelu se třením

Na (Obr. 35) lze vidět průběh utlumující se polohy φ_2 . Hodnoty třecích momentů byly použity shodné pro učení potřebných zásahů pro obě úlohy. Účel přítomnosti tohoto obrázku je demonstrace, jaká míra tření byla uvažována.

10. Praktická část – Tříramenný robot

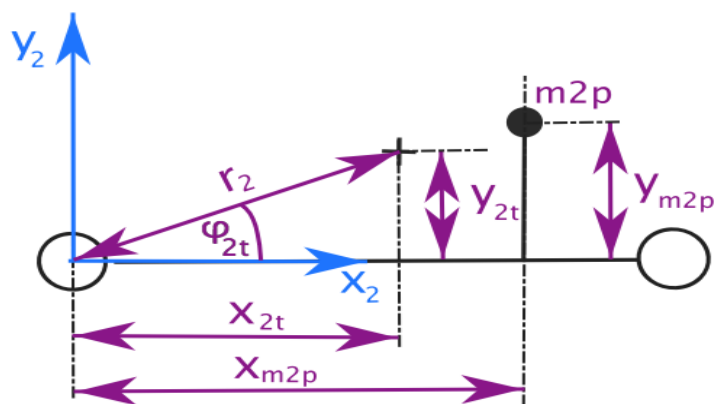
10.1. Popis těžišť a momentů setrvačnosti



Obr. 36 Schématický popis tříramenného robotu

Pro aplikaci metody EM na robota se třemi rameny je zapotřebí mít možnost manipulovat s hmotnostními a setrvačnostními charakteristikami. Oproti předchozí úloze klikového mechanismu, budou použity pružiny v kloubech mechanismu. Ty nám výrazně sníží hmotnost mechanismu. Na (Obr. 36) jsou schématicky znázorněny přidané hmotnosti pomocí bodů černých bodů a výsledná těžiště ke kterým budeme mechanismus kótovat jsou znázorněna černými křížky.

10.1.1. Těleso 2



Obr. 37 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 2

Na (Obr. 37) se nachází okótovaný popis tělesa 2. Hodnoty s dolním indexem m_{2p} jsou hodnoty vázané s přidanou hmotou pro těleso 2. Černým křížem je vyznačena poloha těžiště. Pro jednoduchost budeme používat pro popis pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu přeponu r_2 a svírající úhel φ_{2t} .

Prvně vyjádříme polohy těžišť pomocí následujících rovnic:

$$x_{2t} = \frac{(x_{2t \text{ Tyč}} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} + x_{m_{2p}} \cdot m_{2p})}{m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p}} \quad (105)$$

$$y_{2t} = \frac{(y_{2t \text{ Tyč}} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} + y_{m_{2p}} \cdot m_{2p})}{m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p}} \quad (106)$$

Nyní již známe polohy těžišť a můžeme vyjádřit parametr r_2 a φ_{2t} které budeme používat k popisu soustavy:

$$r_2 = \sqrt{(x_{2t}^2 + y_{2t}^2)} \quad (107)$$

$$\varphi_{2t} = \text{atan}\left(\frac{y_{2t}}{x_{2t}}\right) \quad (108)$$

Celková hmotnost tělesa 2 bude rovna součtu přidané hmoty s hmotností tyče:

$$m_2 = m_{2 \text{ Tyč}} + m_{2p} \quad (109)$$

Celkový moment setrvačnosti tělesa zapíšeme pomocí následujících vztahů:

$$I_{2 \text{ Tyč kolem težiště}} = \frac{1}{12} \cdot m_{2 \text{ Tyč}} \cdot l_2^2 + m_{2 \text{ Tyč}} \cdot [(x_{2t \text{ Tyč}} - x_{2t})^2 + (y_{2t \text{ Tyč}} - y_{2t})^2] \quad (110)$$

Moment setrvačnosti tyče kolem těžiště rozšíříme o přidanou hmotu:

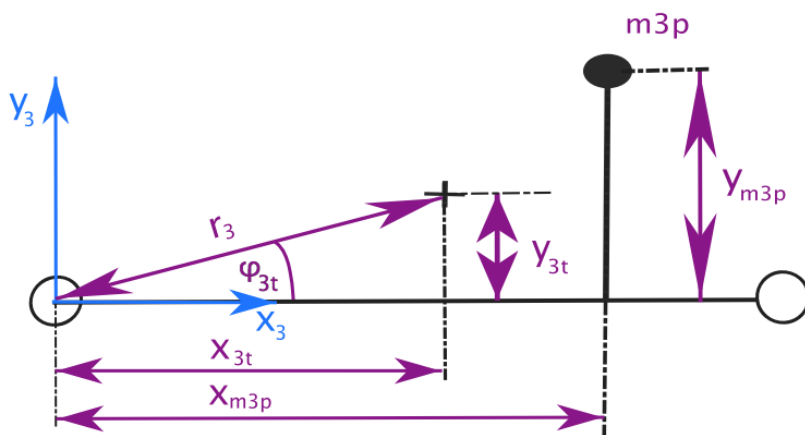
$$I_{2 \text{ Celkové kolem težiště}} = I_{2 \text{ Tyč kolem težiště}} + m_{2p} \cdot [(x_{2p} - x_{2t})^2 + (y_{2p} - y_{2t})^2] \quad (111)$$

Nyní zbývá posunout moment setrvačnosti do koncového bodu, kde těleso rotuje:

$$I_2 = I_{2 \text{ Celkové kolem težiště}} + m_2 \cdot r_2^2 \quad (112)$$

Pomocí této soustavy rovnic jsou definovány potřebné parametry pro těleso 2.

10.1.2. Těleso 3



Obr. 38 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 3

Na (Obr. 38) se nachází okótovaný popis tělesa 3. Způsob určení charakteristik je identický jako pro těleso 2. Parametry definujeme následující sestavou rovnic:

$$x_{3t} = \frac{(x_{3t\ Tyč} \cdot m_{3\ Tyč} + x_{m3p} \cdot m_{3p})}{m_{3\ Tyč} + m_{3p}} \quad (113)$$

$$y_{3t} = \frac{(y_{3t\ Tyč} \cdot m_{3\ Tyč} + y_{m3p} \cdot m_{3p})}{m_{3\ Tyč} + m_{3p}} \quad (114)$$

$$r_3 = \sqrt{(x_{3t}^2 + y_{3t}^2)} \quad (115)$$

$$\varphi_{3t} = \text{atan}\left(\frac{y_{3t}}{x_{3t}}\right) \quad (116)$$

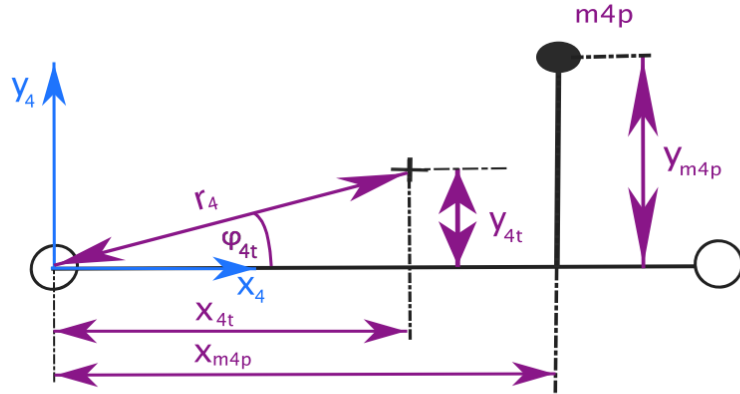
$$m_3 = m_{3\ Tyč} + m_{3p} \quad (117)$$

$$I_{3\ Tyč\ kolem\ težiště} = \frac{1}{12} \cdot m_{3\ Tyč} \cdot l_3^2 + m_{3\ Tyč} \cdot [(x_{3t\ Tyč} - x_{3t})^2 + (y_{3t\ Tyč} - y_{3t})^2] \quad (118)$$

$$I_{3\ Celkové\ kolem\ težiště} = I_{3\ Tyč\ kolem\ težiště} + m_{3p} \cdot [(x_{3p} - x_{3t})^2 + (y_{3p} - y_{3t})^2] \quad (119)$$

$$I_3 = I_{3\ Celkové\ kolem\ težiště} + m_3 \cdot r_3^2 \quad (120)$$

10.1.3. Těleso 4



Obr. 39 Popis těžiště a charakteristik robotu pro těleso 4

Na (Obr. 39) se nachází okótovaný popis tělesa 4. Způsob určení charakteristik je identický jako pro těleso 2. Parametry definujeme následující sestavou rovnic:

$$x_{4t} = \frac{(x_{4t\ Tyč} \cdot m_{4\ Tyč} + x_{m4p} \cdot m_{4p})}{m_{4\ Tyč} + m_{4p}} \quad (121)$$

$$y_{4t} = \frac{(y_{4t\ Tyč} \cdot m_{4\ Tyč} + y_{m4p} \cdot m_{4p})}{m_{4\ Tyč} + m_{4p}} \quad (122)$$

$$r_4 = \sqrt{(x_{4t}^2 + y_{4t}^2)} \quad (123)$$

$$\varphi_{4t} = \text{atan}\left(\frac{y_{4t}}{x_{4t}}\right) \quad (124)$$

$$m_4 = m_{4\ Tyč} + m_{4p} \quad (125)$$

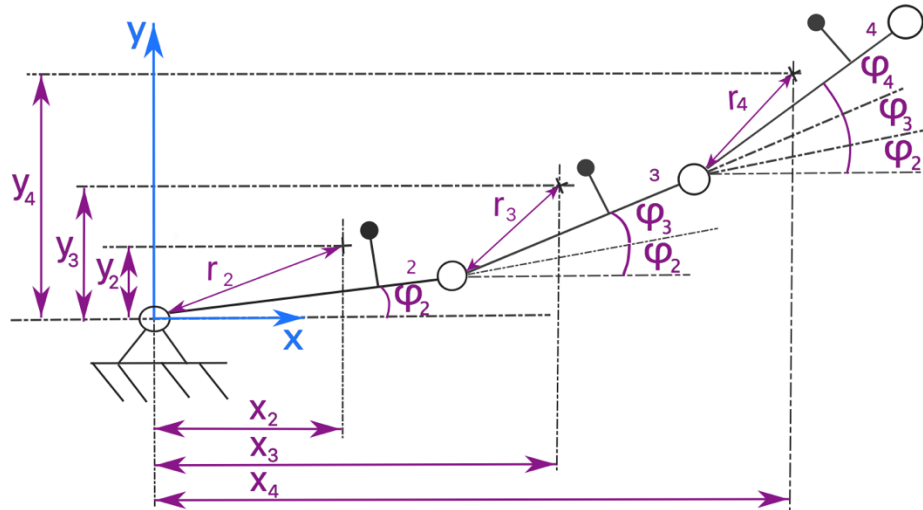
$$I_{4\ Tyč\ kolem\ težiště} = \frac{1}{12} \cdot m_{4\ Tyč} \cdot l_4^2 + m_{4\ Tyč} \cdot \left[(x_{4t\ Tyč} - x_{4t})^2 + (y_{4t\ Tyč} - y_{4t})^2 \right] \quad (126)$$

$$I_{4\ Celkové\ kolem\ težiště} = I_{4\ Tyč\ kolem\ težiště} + m_{4p} \cdot \left[(x_{4p} - x_{4t})^2 + (y_{4p} - y_{4t})^2 \right] \quad (127)$$

$$I_4 = I_{4\ Celkové\ kolem\ težiště} + m_4 \cdot r_4^2 \quad (128)$$

10.1. Řešení pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu

10.1.1. Počet stupňů volnosti



Obr. 40 Okótované schéma robotu

Prvně určíme počet stupňů z rovnice:

$$i = 3 \cdot (4 - 1) - 3_{\text{vetkn.}}^{\circ} \cdot 0 - 2_{\text{rot}}^{\circ} \cdot 3 - 2_{\text{pos.}}^{\circ} \cdot 0 = 3^{\circ} \quad (129)$$

10.1.2. Vyjádření poloh a rychlostí k jednotlivým těžištím mechanismu

Popis těžišť určíme podle následující sady rovnic:

$$x_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (130)$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (131)$$

$$x_3 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \quad (132)$$

$$y_3 = l_2 \cdot \sin(\varphi_2) + r_3 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \quad (133)$$

$$x_4 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (134)$$

$$y_4 = l_2 \cdot \sin(\varphi_2) + l_3 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (135)$$

Derivováním poloh podle času získáme jednotlivé rychlosti:

$$\dot{x}_2 = -r_2 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (136)$$

$$\dot{y}_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (137)$$

$$\dot{x}_3 = -l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 - r_3 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \quad (138)$$

$$\dot{y}_3 = +l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \quad (139)$$

$$\dot{x}_4 = -l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 - l_3 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) - r_4 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4) \quad (140)$$

$$\dot{y}_4 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4) \quad (141)$$

10.1.3. Určení kinetické energie

Prvně definujeme rovnici kinetické energie v základním tvaru:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) + \frac{1}{2} \cdot I_4 \cdot \dot{\varphi}_4^2 \quad (142)$$

Definováním kinetické energie rovnicí (142) dosadíme již vyjádřené rychlosti v rovnicích (136 - 141). Poté lze definovat členy $\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r}$, $\frac{\partial E_k}{\partial q_r}$. Pro přehlednost nebudou uvedeny jednotlivé derivace, ale pouze výsledné řešení soustavy.

10.1.4. Výpočet členu $\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_r}$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (143)$$

Výsledek rovnice (143), vzbuzuje jisté obavy, zda je derivace opravdu nulová. Důvodem je umocnění všech členů rychlosti a následný součet. Rovnice se potom zjednoduší pomocí díky vzorci $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$. Derivace členu vychází nulová, protože po zjednodušení se již tento člen v rovnici nevyskytuje.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} = -l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot (m_4 \cdot r_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3) \quad (144)$$

$$\begin{aligned}
& +m_4 \cdot r_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3 + m_4 \cdot r_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_4 \\
& +m_3 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3 + \\
& +m_4 \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_2 + m_4 \cdot l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_3
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} = -r_4 \cdot m_4 \cdot (l_2 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 + l_3 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \tag{145}$$

$$+ l_3 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

10.1.5. Výpočet členu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_r} \right)$

Výsledek derivovaného členu je definován dle rovnice (146). Proměnná M je matice hmotnosti, násobená vzniklými zrychleními a $M_{prava strana}$ je matice obsahující členy bez zrychlení:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_r} \right) = M \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + M_{prava strana} \tag{146}$$

Matice hmotnosti je popsána ve tvaru:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \tag{147}$$

Jednotlivé členy matice hmotnosti definuje následující soustava rovnic:

$$\begin{aligned}
M_{11} = & l_2 + l_2^2 \cdot m_3 + l_2^2 \cdot m_4 + l_3^2 \cdot m_4 + r_3^2 \cdot m_3 + r_4^2 \cdot m_4 \\
& + 2 \cdot l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) + 2 \cdot l_2 \cdot m_4 \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3)
\end{aligned} \tag{148}$$

$$+2 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot r_3 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_{3t}) + 2 \cdot l_3 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t})$$

$$M_{12} = l_2^2 \cdot m_4 + r_3^2 \cdot m_3 + l_3^2 \cdot m_4 + r_4^2 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (149)$$

$$+2 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot r_3 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_{3t}) + 2 \cdot l_3 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t})$$

$$+l_2 \cdot m_4 \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$M_{13} = l_4^2 \cdot m_4 + r_4^2 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) + l_3 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (150)$$

$$M_{21} = l_3^2 \cdot m_4 + r_3^2 \cdot m_3 + r_4^2 \cdot m_4 + l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (151)$$

$$+l_2 \cdot m_3 \cdot r_3 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_{3t}) + 2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t})$$

$$+l_2 \cdot m_4 \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$M_{22} = l_3 + l_3^2 \cdot m_4 + r_3^2 \cdot m_3 + r_4^2 \cdot m_4 + 2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (152)$$

$$M_{23} = r_4^2 \cdot m_4 + l_3 \cdot m_3 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (153)$$

$$M_{31} = r_4^2 \cdot m_4 + l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) + l_3 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (154)$$

$$M_{32} = r_4^2 \cdot m_4 + l_2 \cdot m_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \quad (155)$$

$$M_{33} = I_4 + r_4^2 \cdot m_4 \quad (156)$$

Vektor členů pravé strany je definován následovně:

$$M_{prava\ strana} = \begin{pmatrix} M_{1\ prava\ strana} \\ M_{2\ prava\ strana} \\ M_{3\ prava\ strana} \end{pmatrix} \quad (157)$$

$$M_{1\ prava\ strana} = -l_2 \cdot l_3 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_3^2 - 2 \cdot l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot \dot{\varphi}_4 \quad (158)$$

$$-l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_4^2 - 2 \cdot l_2 \cdot r_3 \cdot m_3 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3$$

$$-l_2 \cdot r_3 \cdot m_3 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_3^2 - 2 \cdot l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_4$$

$$-2 \cdot l_2 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

$$-2 \cdot l_2 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_4 \cdot (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

$$-2 \cdot l_2 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

$$-2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3$$

$$M_{2\ prava\ strana} = -l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_4^2 \quad (159)$$

$$-2 \cdot l_2 \cdot r_3 \cdot m_3 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3$$

$$-2 \cdot l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_4$$

$$-2 \cdot l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot \dot{\varphi}_4$$

$$-l_2 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

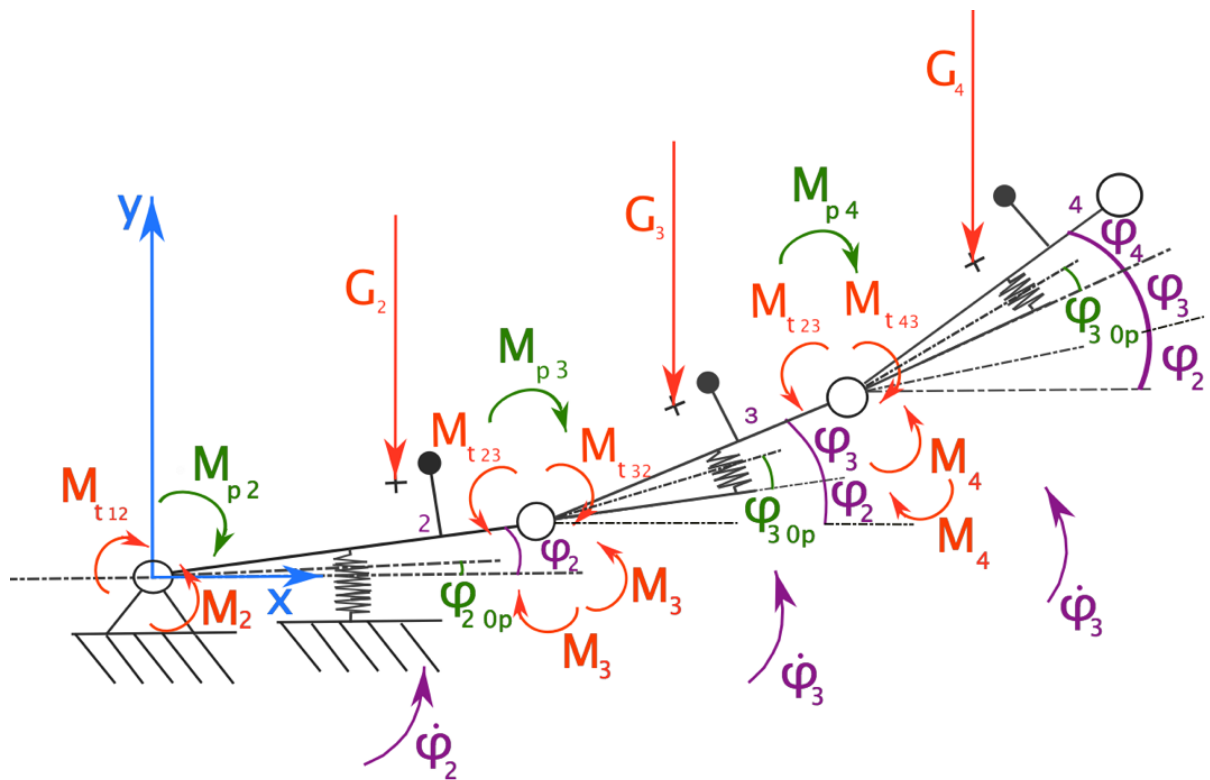
$$-2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3$$

$$M_{3 \text{ prava strana}} = -l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_4 \quad (160)$$

$$-l_3 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot \dot{\varphi}_4$$

$$-l_2 \cdot r_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4)$$

10.1.6. Výpočet zobecněné síly Q



Obr. 41 Schéma robotu s působením vnějšího zatížení

Na (Obr. 41) se nachází jednotlivé členy mechanismu včetně působení vnějších sil. Hnací moment je značen M_i , momenty od pružin jsou označeny s dolním indexem p , třecí moment je značen dolním indexem t .

Člen zobecněné síly je definován v následující podobě:

$$\begin{aligned}
Q \cdot \delta \varphi_i = & M_2 \cdot \delta \varphi_2 - M_3 \cdot \delta \varphi_2 - M_{t_{12}} \cdot \delta \varphi_2 - M_{p_2} \cdot \delta \varphi_2 + M_{t_{32}} \cdot \delta \varphi_2 + M_{p_3} \cdot \delta \varphi_2 \quad (161) \\
& + M_3 \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) - M_4 \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) - M_{t_{23}} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) \\
& + M_{t_{43}} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) - M_{p_3} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) + M_{p_4} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) \\
& + M_4 \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3 + \delta \varphi_4) - M_{t_{34}} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3 + \delta \varphi_4) \\
& - M_{4p} \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3 + \delta \varphi_4) - G_2 \cdot \delta y_2 - G_3 \cdot \delta y_3 - G_4 \cdot \delta y_4
\end{aligned}$$

Členy Q obsahující svislou souřadnici vyjádříme jako funkce natočení, kterými je soustava popsána:

$$\delta y_2 = r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \delta \varphi_2 \quad (162)$$

$$\delta y_3 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta \varphi_2 + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) \quad (163)$$

$$\delta y_4 = l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta \varphi_2 + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) \quad (164)$$

$$+ r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3 + \delta \varphi_4)$$

Rovnice (161) se zjednoduší do následujícího tvaru:

$$Q_i \cdot \delta \varphi_i = M_2 \cdot \delta \varphi_2 + M_3 \cdot \delta \varphi_3 + M_4 \cdot \delta \varphi_4 \quad (165)$$

$$- M_{t_2} \cdot \delta \varphi_2 - M_{t_3} \cdot \delta \varphi_3 - M_{t_4} \cdot \delta \varphi_4$$

$$- M_{p_2} \cdot \delta \varphi_2 - M_{p_3} \cdot \delta \varphi_3 - M_{p_4} \cdot \delta \varphi_4$$

$$- G_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \cdot \delta \varphi_2$$

$$- G_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta \varphi_2 + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3))$$

$$\begin{aligned}
- G_4 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \delta \varphi_2 + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3) + r_4 \\
\cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}) \cdot (\delta \varphi_2 + \delta \varphi_3 + \delta \varphi_4))
\end{aligned}$$

Z rovnice (165) vyjádříme jednotlivé členy:

$$Q_2 = M_2 - M_{t2} - M_{p2} - G_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (166)$$

$$- G_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}))$$

$$- G_4 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}))$$

$$Q_3 = M_3 - M_{t3} - M_{p3} - G_3 \cdot (r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t})) \quad (167)$$

$$- G_4 \cdot (l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}))$$

$$Q_4 = M_4 - M_{t4} - M_{p4} - G_4 \cdot (r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t})) \quad (168)$$

Celkový člen zobecněné síly definujeme následující rovnicí:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (169)$$

Třecí momenty jsou definovány následující soustavou rovnic:

$$M_{t2} = b \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (170)$$

$$M_{t3} = b \cdot \dot{\varphi}_3 \quad (171)$$

$$M_{t4} = b \cdot \dot{\varphi}_4 \quad (172)$$

Momenty od pružin jsou definovány následující soustavou rovnic:

$$M_{p2} = K_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_{20p}) \quad (173)$$

$$M_{p3} = K_3 \cdot (\varphi_3 - \varphi_{30p}) \quad (174)$$

$$M_{p4} = K_4 \cdot (\varphi_4 - \varphi_{40p}) \quad (175)$$

10.1.7. Výsledné dosazení substituovaných proměnných

Do základní rovnice (7) dosadíme rovnice (143, 144, 145, 146), tím získáme substituovaný tvar dynamické rovnice:

$$M \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + M_{prava strana} - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (176)$$

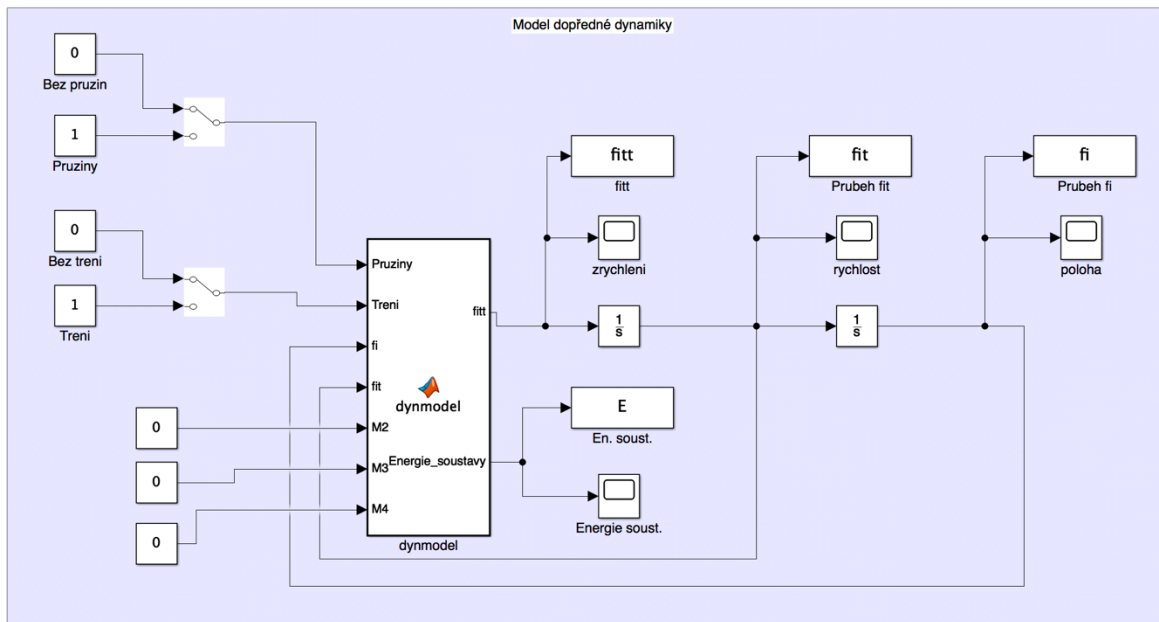
10.2. Dopředná úloha dynamiky

Dopředou úlohou se rozumí takové řešení, kdy je vstupem do našeho modelu vnější silové zatížení, poloha a rychlost. Výstupem modelu je zrychlení.

10.2.1. Tvorba modelu

Z dynamické rovnice (176) vyjádříme vektor zrychlení, který bude výstupem modelu:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} - M_{prava strana} + \begin{pmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} \end{pmatrix} \right) \quad (177)$$



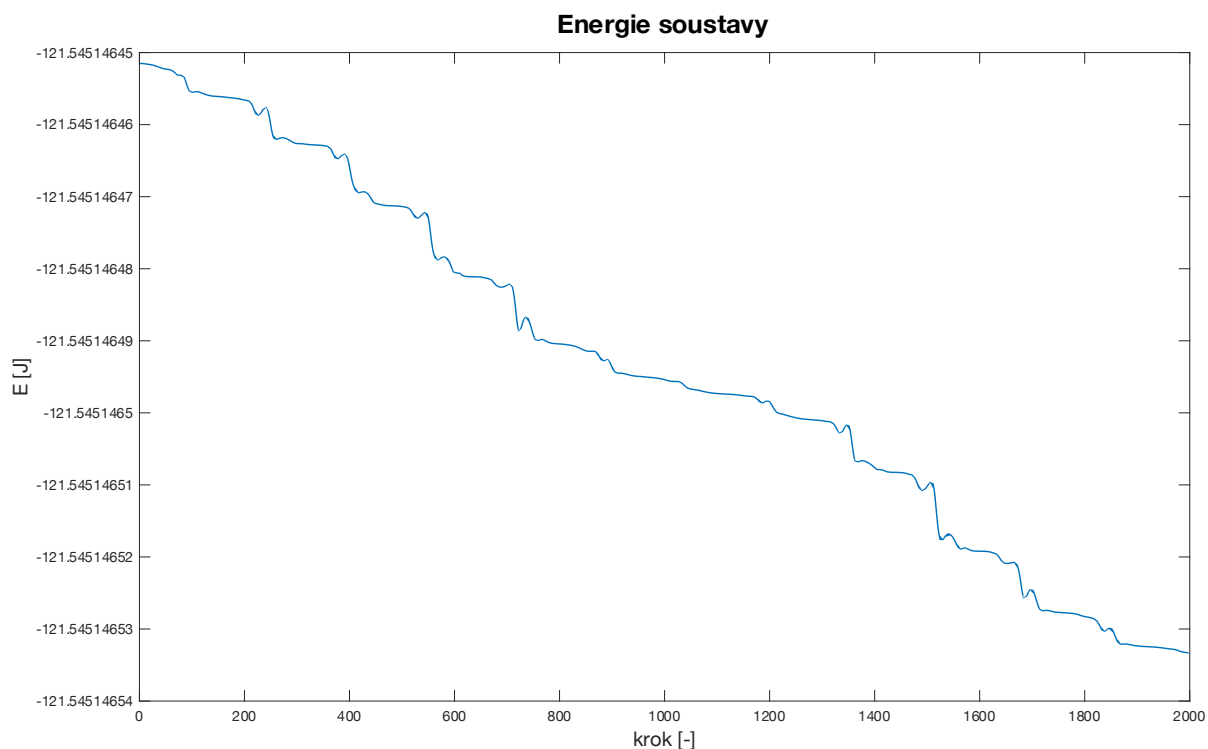
Obr. 42 Schéma zapojení dopředné dynamiky robotu

Na (Obr. 42) je vyobrazeno schéma zapojení v programu Simulink. Z modelu vystupuje zrychlení, které je ve zpětné smyčce dvakrát integrováno a vráceno do modelu v podobě polohy a rychlosti. Dalšími vstupy jsou řídicí momenty, informace o tření a pružinách, které lze přepínat dle potřeb.

10.2.2. Kontrola modelu

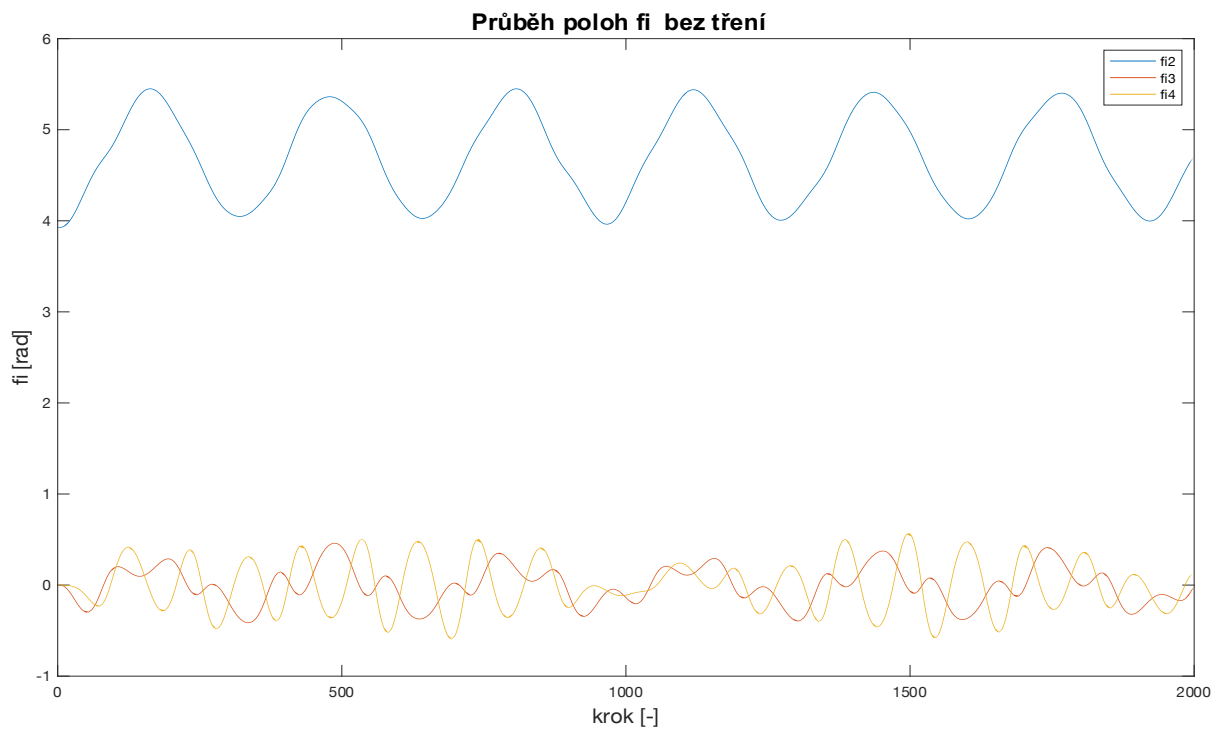
Pokud nebude do modelu vstupovat žádná vnější síla a tření, poté musí platit rovnice:

$$E_k + E_p = konst. \quad (178)$$



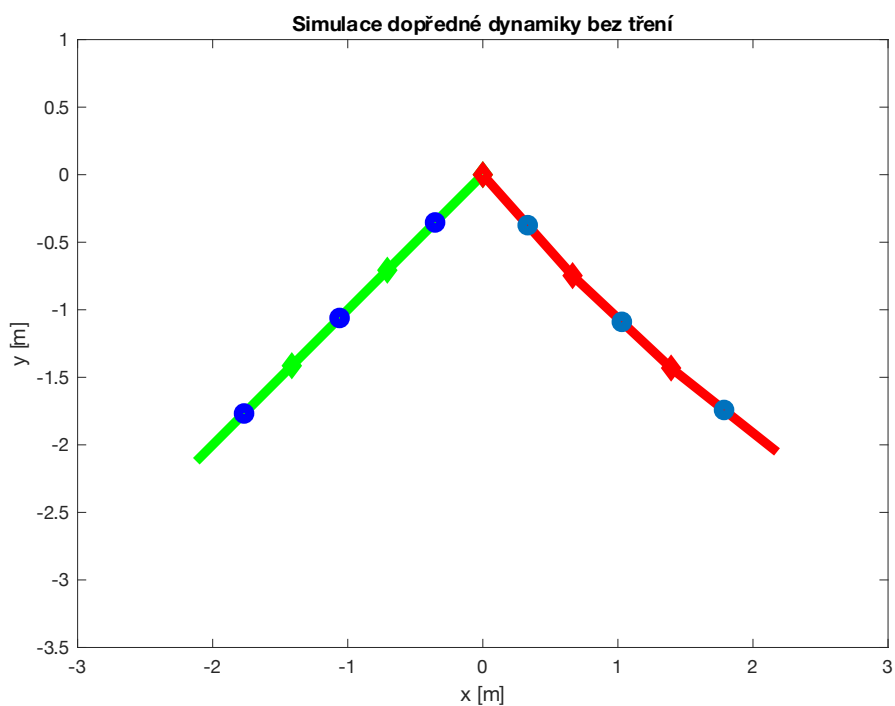
Obr. 43 Energie soustavy robotu

Výsledný průběh součtu energií znázorňuje obrázek (Obr. 43). Mechanismus byl spuštěn „na prázdno“ z polohy $\varphi = [\pi \cdot \frac{5}{4}, 0, 0]$, bez tření a hnacího momentu. Energie soustavy lze považovat za konstantní, neboť je rozdíl maximální a minimální hodnoty $e = 4.7 \times 10^{-7}$, což je zanedbatelná chyba.



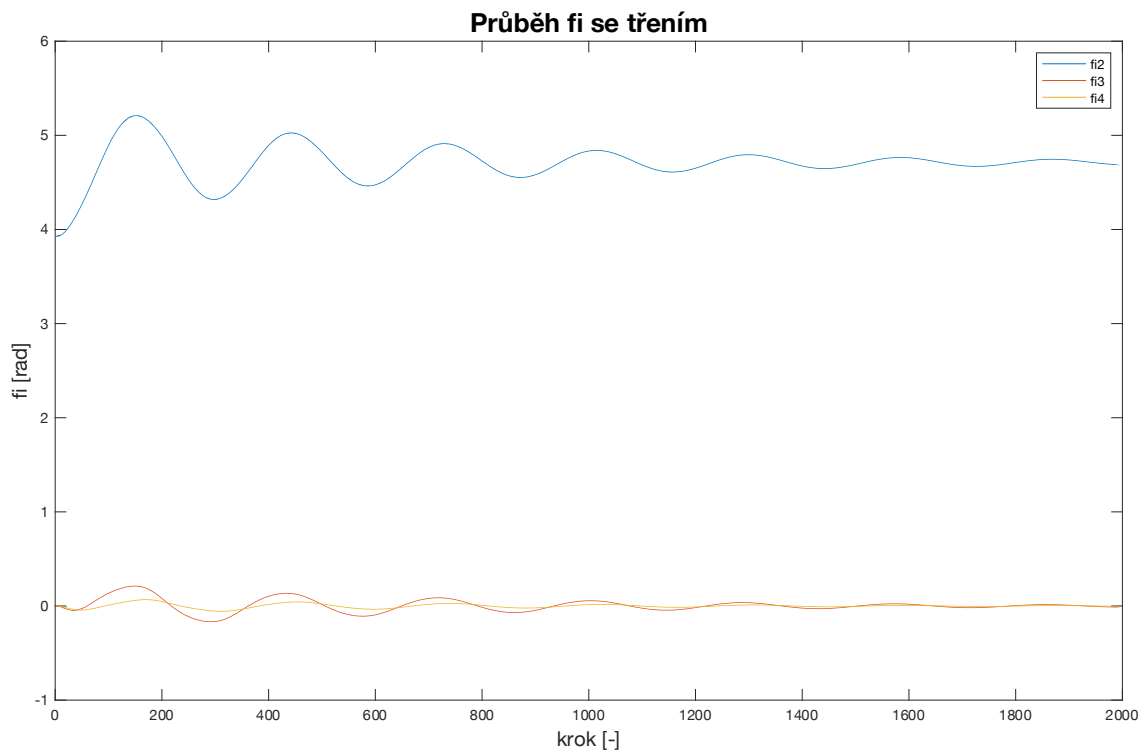
Obr. 44 Průběh poloh robotu bez vnějšího zatížení

Na (Obr. 44) je znázorněn průběh poloh pro mechanismus bez vnějšího silového zatížení a tření. Po spuštění z počáteční podmínky $\varphi = [\pi \cdot \frac{5}{4}, 0, 0]$ mechanismus vykonává kývavý pohyb dle simulace na (Obr. 45)



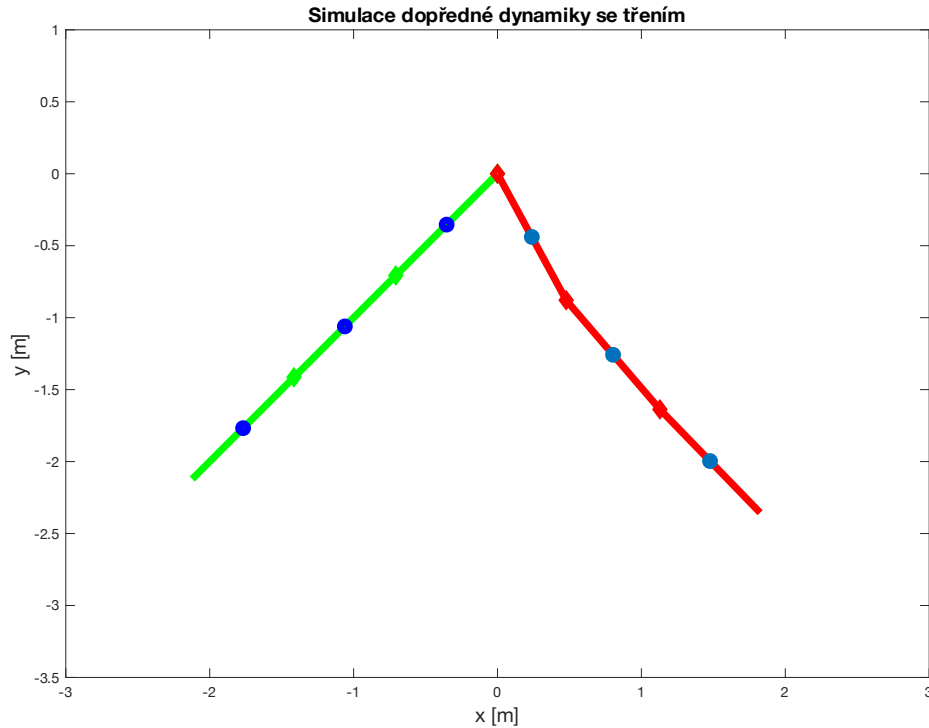
Obr. 45 Simulace dopředné dynamiky robotu bez tření

(Obr. 45) znázorňuje mechanismus v počáteční a konečné poloze. Počáteční poloha mechanismu je znázorněna zelenou barvou, kdežto konečná poloha barvou červenou. Modré body na jednotlivých tělesech značí těžiště mechanismu. Mechanismus koná kývavý ale ne plně periodický pohyb, což vykazuje (Obr. 44).



Obr. 46 Průběh poloh robotu bez vnějšího zatížení

Na (Obr. 46) je znázorněn průběh polohy pro mechanismus bez vnějšího silového zatížení, ale zohledňující tření. Po spuštění z počáteční podmínky $\varphi = [\pi \cdot \frac{5}{4}, 0, 0]$. V průběhu kývání se mechanismus postupně utlumuje.



Obr. 47 Simulace dopředné dynamiky se třením

(Obr. 47) vykresluje dvě polohy průběhu klikového mechanismu. Zeleně značená je počáteční poloha spuštění červeně značená je nejvyšší dosažená poloha. Po dosažení červené polohy je mechanismus dále utlumován dle (Obr. 46).

10.3. Inverzní úloha dynamiky

Inverzní úlohou se rozumí taková úloha, kdy máme vstupem do modelu polohy, rychlosti a zrychlení. Výstupem jsou momenty.

10.3.1. Tvorba modelu

Z dynamické rovnice (176) vyjádříme vektor hnacích momentů, které jsou výstupem modelu:

$$\begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + M_{prava\ strana} - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2\ bez\ M_2 \\ Q_3\ bez\ M_3 \\ Q_4\ bez\ M_4 \end{pmatrix} \quad (179)$$

$$Q_2 \text{ bez } M_2 = -M_{t_2} - M_{p_2} - G_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{2t}) \quad (180)$$

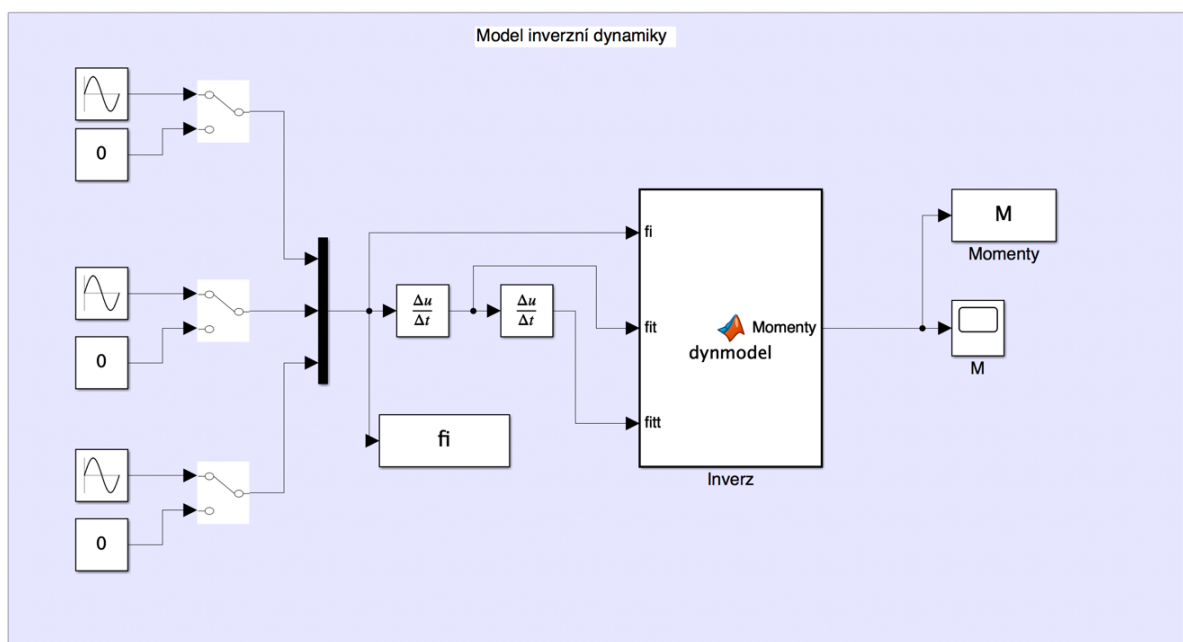
$$- G_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t}))$$

$$- G_4 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}))$$

$$Q_3 \text{ bez } M_3 = -M_{t_3} - M_{p_3} - G_3 \cdot (r_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{3t})) \quad (181)$$

$$- G_4 \cdot (l_3 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t}))$$

$$Q_4 \text{ bez } M_4 = -M_{t_4} - M_{p_4} - G_4 \cdot (r_4 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_{4t})) \quad (182)$$

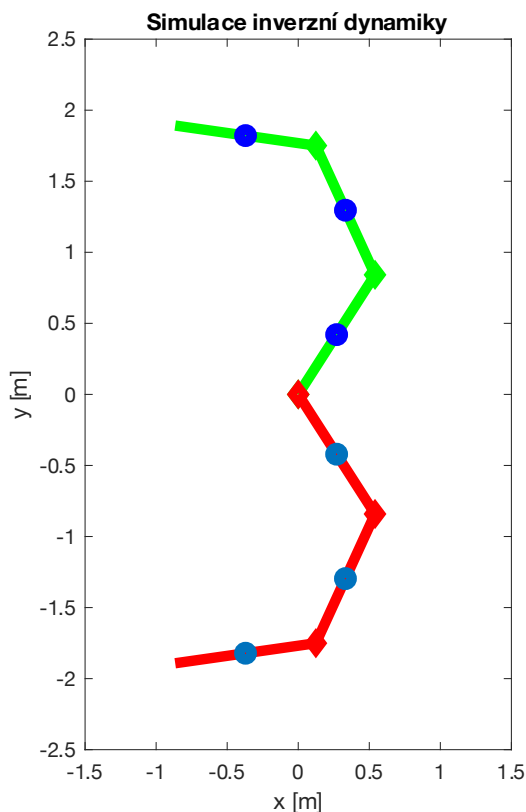


Obr. 48 Schéma zapojení dopředné dynamiky robotu

Na (Obr. 48) se nachází schematické zapojení v programu Simulink. Vstupem do našeho modelu je poloha, rychlost a zrychlení. Výstupem jsou hnací momenty.

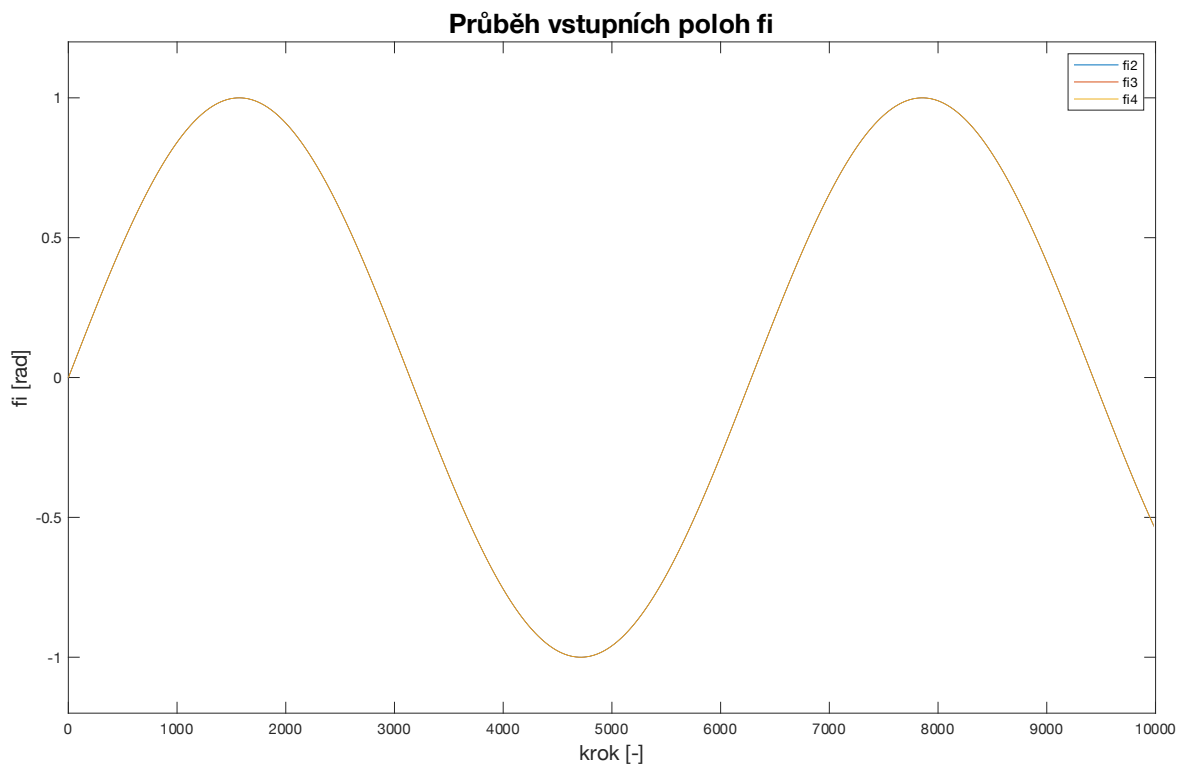
10.3.2. Kontrola modelu

Ověření modelu provedeme jednoduchou simulací stejně jako tomu bylo u klikového mechanismu. Do modelu vstupují funkce $\sin(x)$, které generují hodnoty od $(-1, 1)$, což lze považovat za rozsah úhlu přibližně $(-60^\circ, 60^\circ)$. Jejich derivace dodávají také rychlost a zrychlení. Ovládané polohy jsou uvažovány jako relativní.



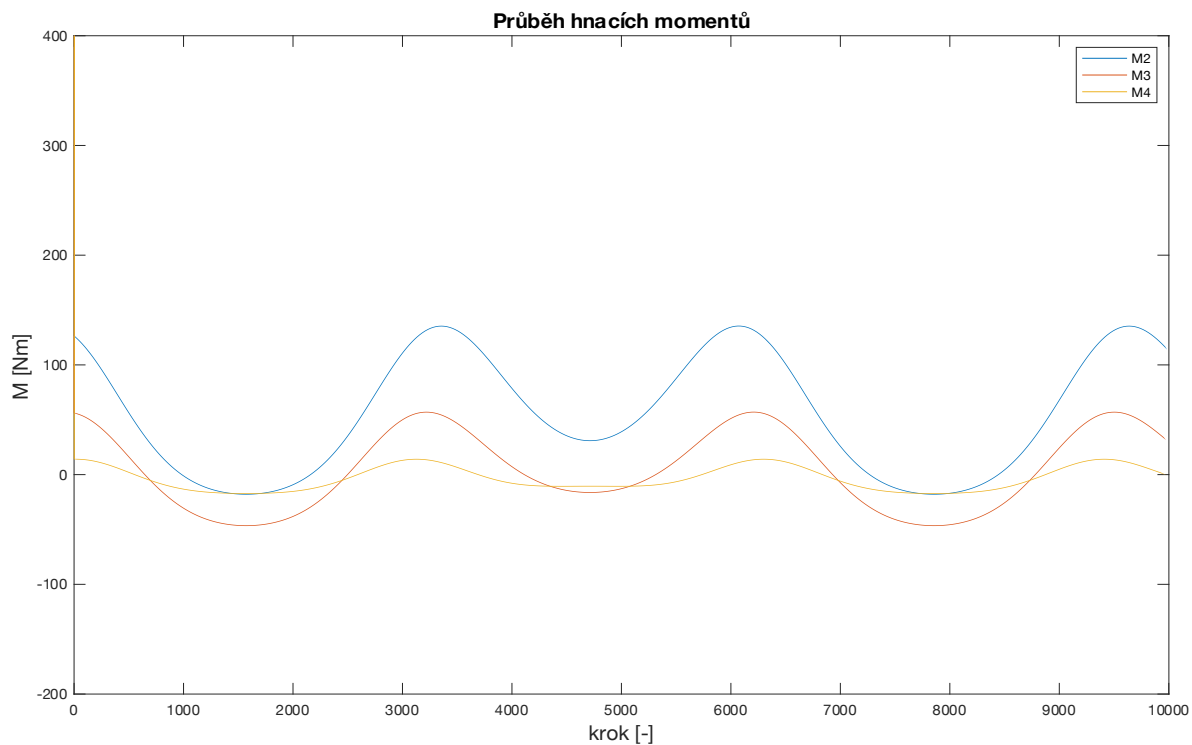
Obr. 49 Simulace inverzní dynamiky

(Obr. 49) vykresluje maximální dosažené polohy mechanismu. Zelenou čarou je zvýrazněna horní maximální dosažená výchylka a červenou minimální dosažená výchylka. Jelikož bereme souřadnice jako relativní, tak je každé rameno natáčeno v součtu s hodnotou natočení předešlého ramene. V absolutních souřadnicích by natočení ramen bylo shodné polohou natočení u prvního ramene.



Obr. 50 Průběh vstupních poloh robotu

Na (Obr. 50) jsou uvedeny poskytované vstupy. Jedná o již zmíněné funkce $\sin(x)$, které se na obrázku překrývají.



Obr. 51 Průběh hnacích momentů pro vstupní funkce $\sin(x)$

(Obr. 51) zobrazuje průběh výstupního hnacího momentu, kdy je vstupem funkce $\sin(x)$. Průběhy jsou hladké a periodické. Největší výstupní moment je na prvním tělese 2, což lze přisoudit tomu, že na toto těleso působí svou hmotou další dvě ramena. Nejmenší moment je na tělese posledním, protože hýbe pouze s hmotou tělesa samotného a žádné další tělesa na něj nepůsobí.

10.4. Simplexová optimalizace EM modelu

Cílem optimalizace je najít takového rozložení hmot a parametrů pružin, které zajistí přesné splnění požadovaných poloh v určitém čase.

10.4.1. Požadavky optimalizace mechanismu

Mechanismus optimalizujeme pomocí třech požadovaných kritérií. Počátečním bodem, konečným bodem a požadovaným časem, kdy má být konečného bodu dosaženo. Počáteční bod je definovaný jako koncový bod ramene na tělese 4 ve tvaru $P_{poč.} = [x_{4\ poč.}, y_{4\ poč.}, \varphi_{4\ poč.}]$. Požadovaný koncový bod je definovaný $P_{kon.} = [x_{4\ kon.}, y_{4\ kon.}, \varphi_{4\ kon.}]$. Posledním kritériem optimalizace je $t_{kon.}$, což je požadovaný čas dosažení koncové polohy. Požadované pracovní body a $t_{kon.}$ je definované následovně:

$$P_{poč.} = \left[1, 1,73, -\frac{2\pi}{3}\right] \quad (183)$$

$$P_{kon.} = [3, 0, 0] \quad (184)$$

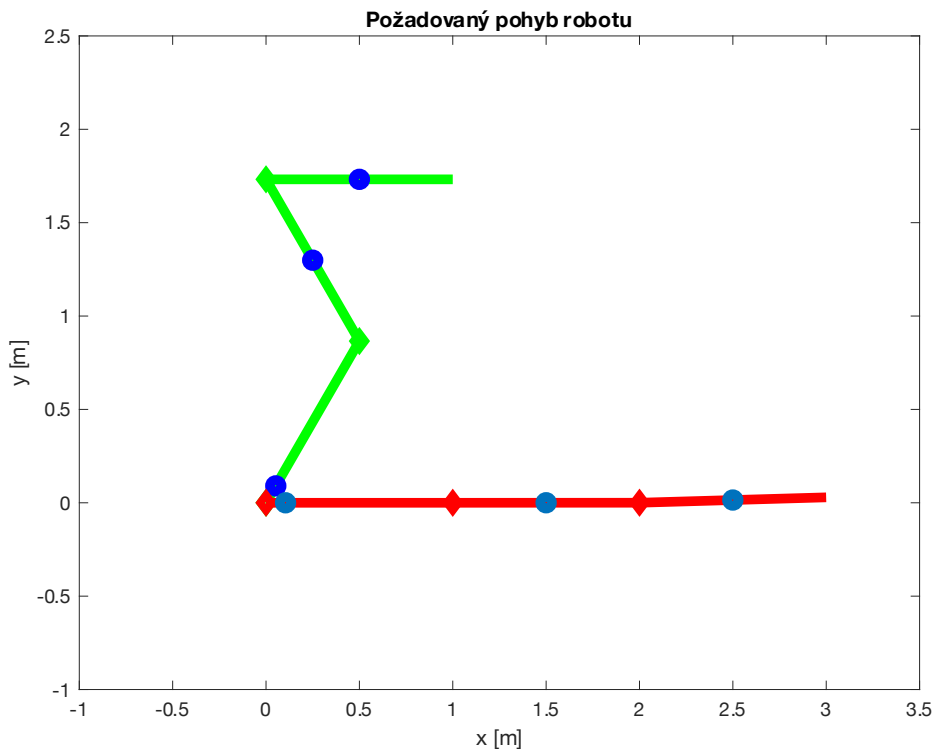
$$t_{kon.} = 4s \quad (185)$$

Modely, zpracované v předešlých kapitolách jsou popsány pomocí natočení kloubů. Po přepočítání počátečního a koncového bodu do relativních souřadnic lze definovat následující rozsahy natočení. Spodní hranice intervalu je počáteční poloha, horní hranice je požadovaná poloha, která musí být splněna v $t_{kon.}$. Rozsahy definují následující tři rovnice:

$$\varphi_2 = \left\langle \frac{\pi}{3}, 0 \right\rangle \quad (186)$$

$$\varphi_3 = \left\langle \frac{\pi}{3}, 0 \right\rangle \quad (187)$$

$$\varphi_4 = \left\langle -\frac{2\pi}{3}, 0 \right\rangle \quad (188)$$



Obr. 52 Simulace požadovaného pohybu mechanismu

(Obr. 52) graficky znázorňuje požadované polohy mechanismu. Přičemž zelená poloha znázorňuje mechanismus v počáteční poloze a červený mechanismus v poloze konečné.

10.4.2. Cílové funkce

Jelikož má mechanismus 3° volnosti a je doplněn o pružiny v kloubech, tak neplatí, že se vrátí do místa, kde byl spuštěn. Proto bude zapotřebí zahrnout do cílových funkcí i požadavek na dosažení počáteční polohy. Pro optimalizaci použijeme soustavu cílových funkcí v následující podobě:

Výslednou hodnotu cílové funkce definuje následující rovnice, kde p_i je váhový parametr a CF_i je hodnota cílové funkce.

$$CF = \sum_i p_i \cdot CF_i \quad (189)$$

Pro každé těleso předepíšeme cílovou funkci předepisující dosažení konečné polohy.

$$CF_1 = \left| |\varphi_2^{t_{kon.}}| - |\varphi_{2\ kon.}| \right| \quad (190)$$

$$CF_2 = \left| |\varphi_3^{t_{kon.}}| - |\varphi_{3\ kon.}| \right| \quad (191)$$

$$CF_3 = \left| |\varphi_4^{t_{kon.}}| - |\varphi_{4\ kon.}| \right| \quad (192)$$

$$p_{1,2,3} = 10 \quad (193)$$

Rovnice (190, 191, 192) zajistí, že mechanismus dosáhne konečných poloh. Poloha $\varphi_i^{t_{kon.}}$ je proměnnou polohou. Poloha $\varphi_i^{t_{kon.}}$ musí být dosažena v požadovaném čase. Poloha $\varphi_{i\ kon.}$ značí konstantní polohu, kterou vyžadujeme od mechanismu a je definována na počátku optimalizace.

$$CF_4 = |\dot{\varphi}_2(t_{pož})| \quad (194)$$

$$CF_5 = |\dot{\varphi}_3(t_{pož})| \quad (195)$$

$$CF_6 = |\dot{\varphi}_6(t_{pož})| \quad (196)$$

$$p_{4,5,6} = 8 \quad (197)$$

Cílové funkce definované v rovnicích (194, 195, 196) využívají poznatku, že rychlost v konečné poloze musí být nulová. Rychlost $\dot{\varphi}_i(t_{pož})$ je hodnota rychlosti v čase dosažení požadované polohy.

$$CF_7 = \left| |\max(\varphi_2^{t>1})| - |\varphi_{2\ poč.}| \right| \quad (198)$$

$$CF_8 = \left| |\max(\varphi_3^{t>1})| - |\varphi_{3\ poč.}| \right| \quad (199)$$

$$CF_9 = \left| |\min(\varphi_4^{t>1})| - |\varphi_{4\ poč.}| \right| \quad (200)$$

$$p_{7,8,9} = 9 \quad (201)$$

Rovnice (198, 199, 200) zajistí, že mechanismus se po dosažení konečné polohy vrátí do pozice, kde byl spuštěn. Horní index u polohy značí, že maximum vybíráme pro čas větší, než sekundu. Mechanismus by bez této podmínky vždy polohu přesně splnil, neboť se v této počáteční poloze ocitl v momentě spuštění. Opatření nám zajistí, že se bude vybírat dosažená poloha při

návratu zpět. V rovnici (198, 199) využíváme u poloh funkce *max* a *min*. Přičemž *max* využíváme u poloh, které směřují v průběhu cyklu k záporným hodnotám. Což je definované v návaznosti na intervaly (186, 187). Avšak při pohledu na interval (188) lze vysledovat, že počáteční hodnota intervalu je hodnotou minimální a nikoliv maximální. Proto je v rovnici (200) použita funkce *min*.

10.4.3. Neměnné parametry mechanismu

V průběhu optimalizace neměníme rozměry mechanismu a hmotnosti jednotlivých členů.

| Parametry mechanismu | |
|----------------------|------|
| l_2 [m] | 1 |
| l_3 [m] | 1 |
| l_4 [m] | 1 |
| $m_{2\ tyc}$ [kg] | 3,35 |
| $m_{3\ tyc}$ [kg] | 3,35 |
| $m_{4\ tyc}$ [kg] | 3,35 |

Tabulka 4

V (Tabulka 4) jsou definované rozměry mechanismu. Jednotlivá ramena jsou uvažována jako ocelové trubky s vnějším průměrem 70mm a tloušťkou stěny 4mm.

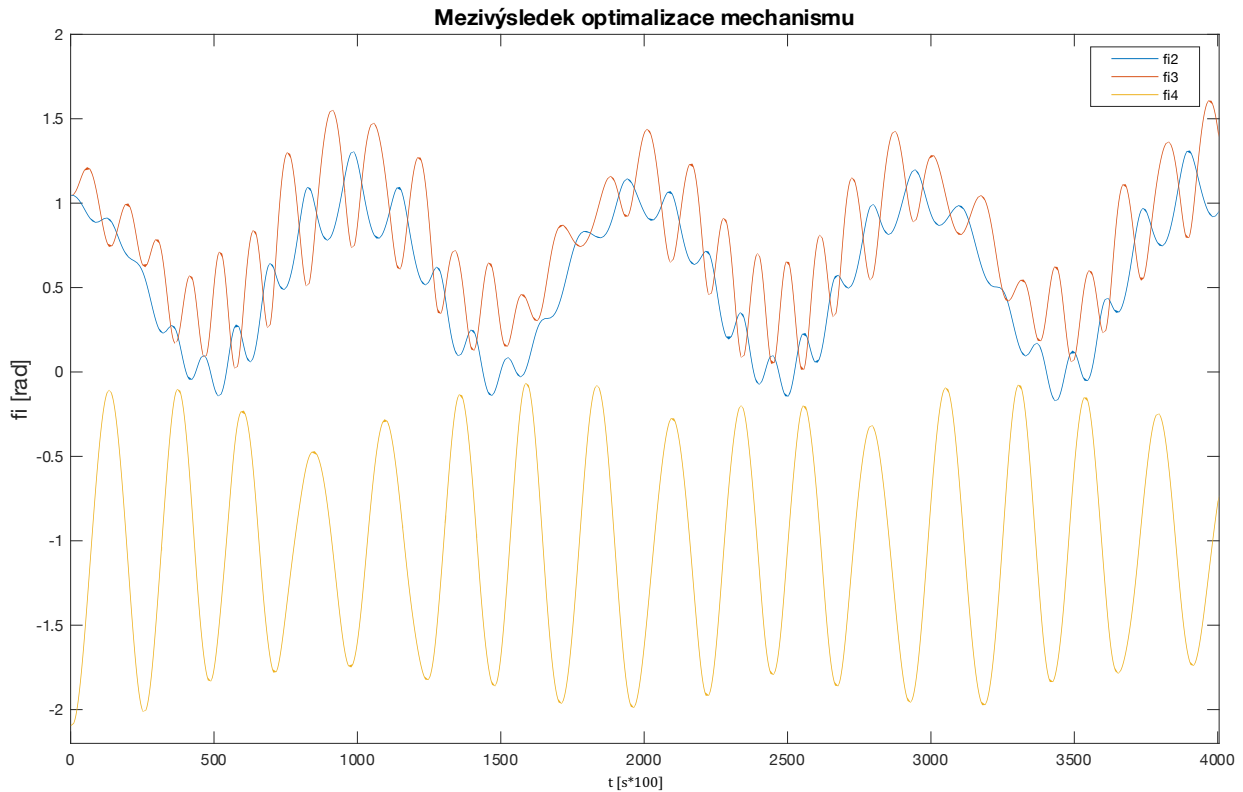
10.4.4. Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů mechanismu

| Počáteční hodnoty optimalizovaných parametrů | |
|--|--------------------|
| m_{2p} [kg] | 30 |
| x_{2p} [m] | 0,5 |
| y_{2p} [m] | -0,5 |
| m_{3p} [kg] | 30 |
| x_{3p} [m] | 0,5 |
| y_{3p} [m] | -0,5 |
| m_{4p} [kg] | 30 |
| x_{4p} [m] | 0,5 |
| y_{4p} [m] | -0,5 |
| K_{2p} [Nm ⁻¹] | 9000 |
| K_{3p} [Nm ⁻¹] | 7000 |
| K_{4p} [Nm ⁻¹] | 7000 |
| φ_{20p} [rad] | $\pi/3$ |
| φ_{30p} [rad] | $\pi/3$ |
| φ_{40p} [rad] | $-\pi \cdot (2/3)$ |

Tabulka 5

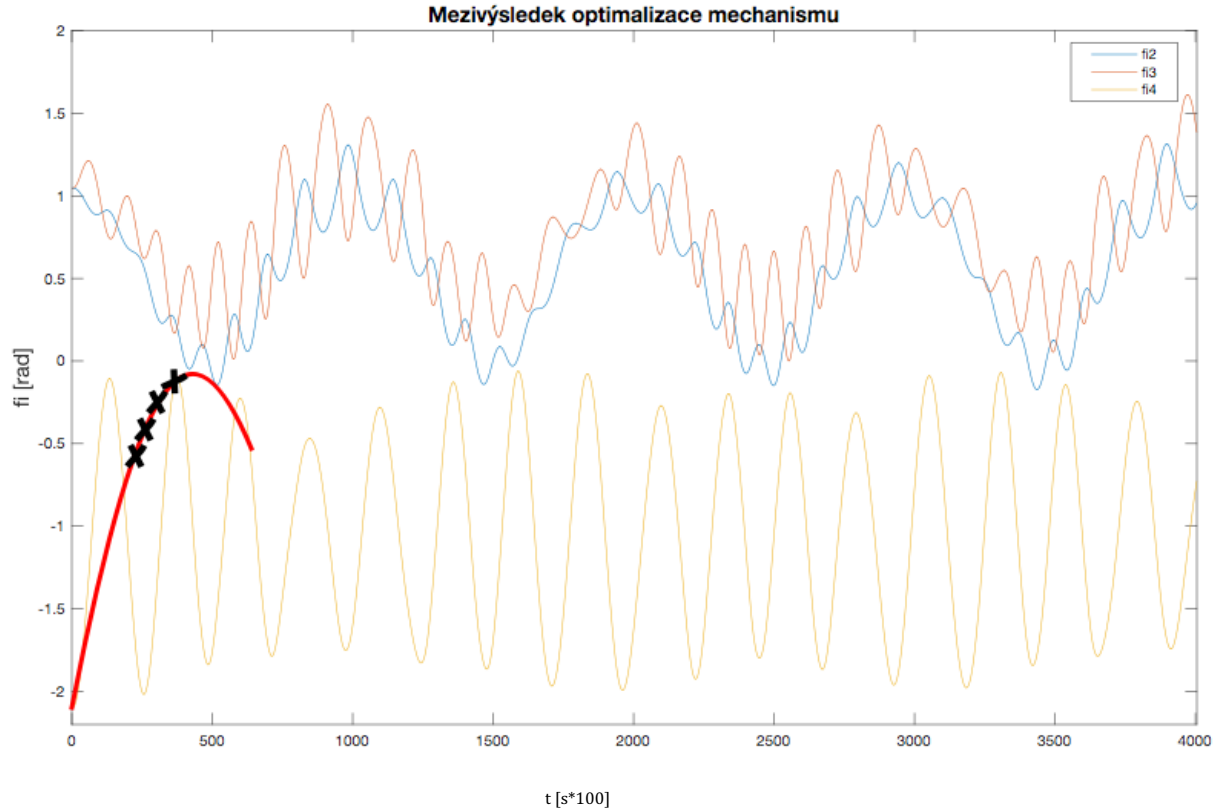
V (Tabulka 5) jsou definované optimalizované parametry mechanismu. Pro každé těleso optimalizujeme polohu a velikost přidané hmoty, tuhost a volnou délku pružin. Popis okótovaných parametrů definuje (Obr. 40). Tuhosti jsou definovány tak, aby se mechanismus po spuštění „nezbortil“ a volné délky pružin jsou nastaveny na stejné hodnoty, jako počáteční polohy mechanismu.

10.4.5. Průběh optimalizace



Obr. 53 Mezivýsledek optimalizace

(Obr. 53) znázorňuje mezivýsledek poloh robotu. Algoritmus přibližuje hodnoty natočení kloubů nule v čase $t_{kon.} = 4s$ k nulovému natočení, což je požadované. Problémem ale je kmitající těleso 4 (průběh vyznačen žlutou čarou). Podmínka optimalizace bude splněna i pro tento kmitající případ. Problém je, že těleso 4 vykoná 2-3 opakování v předepsaném intervalu zatím co tělesa 2 a 3 se pohybují přímo jedním cyklem do požadované polohy. Cílem optimalizace je navrhnout mechanismus tak, aby tělesa neplnila požadované polohy v rozkmitání a náhodně splnila požadovaný bod, ale splnila požadovanou polohu pro shodnou periodu průběhu. Proto do výpočtu zohledníme další cílové funkce, kde budeme požadovat natočení tělesa 4 v konkrétním čase.



Obr. 54 Mezivýsledek optimalizace s odhadnutou požadovanou trajektorií

(Obr. 54) se nachází červenou barvou odhadnutý požadovaný průběh natočení tělesa 4. Do cílové funkce přidáme černě vyznačené body, které budou požadovány. Jedná se o stabilizační body, které nám pomohou najít takové řešení, při kterém bude počet vykonaných cyklů shodný pro všechna tělesa.

$$CF_{10} = \left| \left| \varphi_2^{t_{2,4}} \right| - |0,55| \right| \quad (202)$$

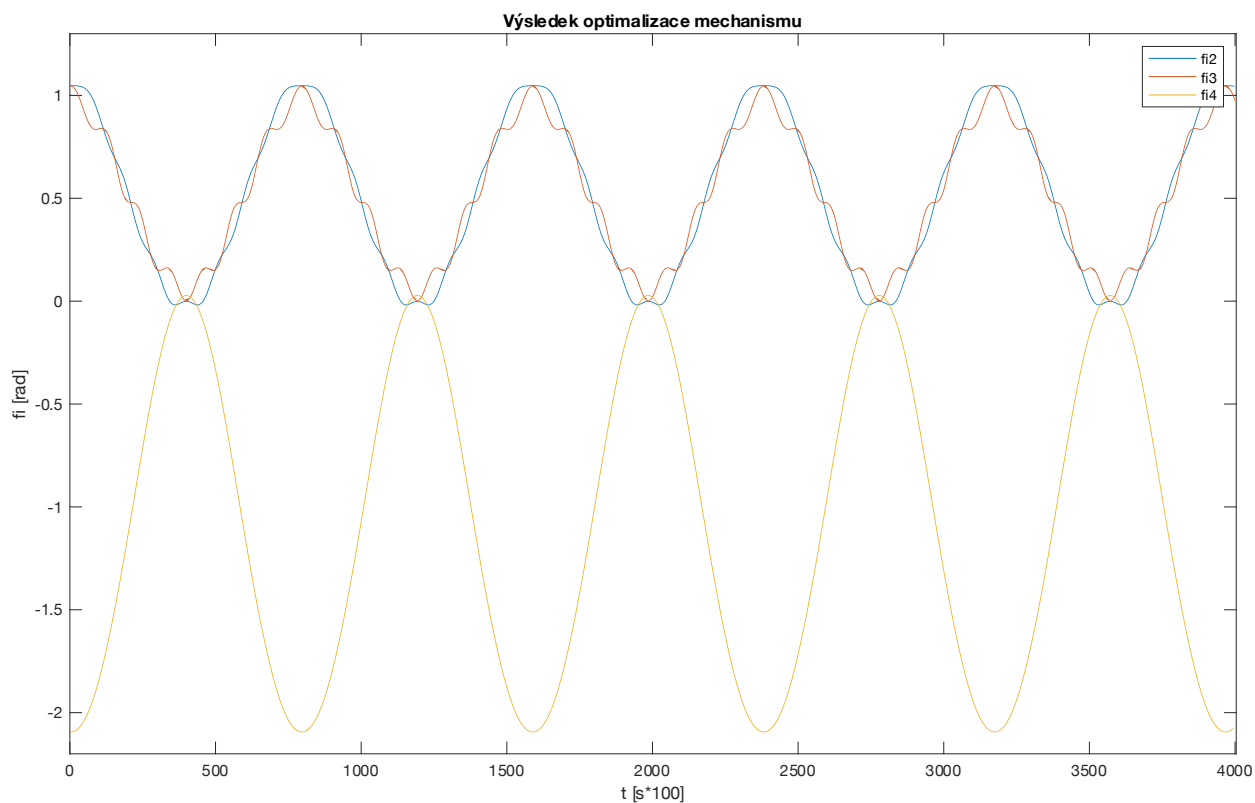
$$CF_{11} = \left| \left| \varphi_3^{t_3} \right| - |-0,4| \right| \quad (203)$$

$$CF_{12} = \left| \left| \varphi_4^{t_{3,2}} \right| - |-0,25| \right| \quad (204)$$

$$CF_{13} = \left| \left| \varphi_4^{t_{3,7}} \right| - |-0,1| \right| \quad (205)$$

$$p_{10,11,12,13} = 2 \quad (206)$$

Rovnice (202, 203, 204, 205) vnáší do optimalizace čtyři stabilizační body. Natočení $\varphi_2^{t_{2,4}}$ v rovnici (202) nese význam proměnné hodnoty v čase 2,4s. Hodnota natočení $\varphi_2 = 0,55$ rad je přibližnou hodnotou, která byla odhadnuta z (Obr. 54).



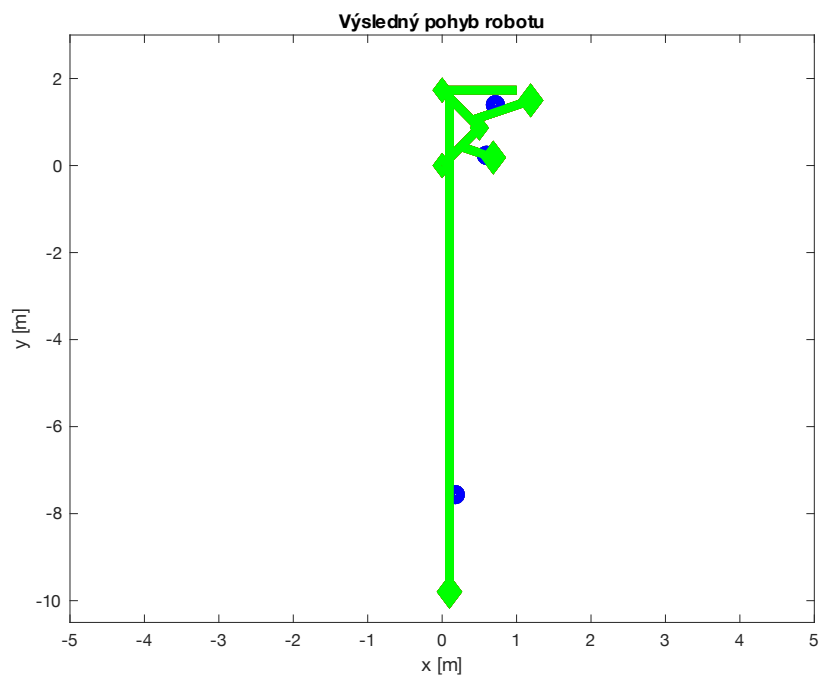
Obr. 55 Mezivýsledek poloh mechanismu s nevhovující délkou ramene

(Obr. 55) znázorňuje výsledný zoptimalizovaný průběh natočení jednotlivých kloubů. Průběhy poloh mají stejné periody a mechanismus se vrátí do počáteční polohy. Došlo také k výraznému vyhlazení průběhů poloh v porovnání s (Obr. 53).

| Hodnoty optimalizovaných parametrů | | |
|------------------------------------|--------------------|------------------------|
| Parametr | Počáteční odhad | Optimalizované hodnoty |
| m_{2p} [kg] | 30 | 18,28 |
| x_{2p} [m] | 0,5 | 0,50 |
| y_{2p} [m] | -0,5 | -0,50 |
| m_{3p} [kg] | 30 | 4,74 |
| x_{3p} [m] | 0,5 | 0,20 |
| y_{3p} [m] | -0,5 | -0,91 |
| m_{4p} [kg] | 30 | 20,11 |
| x_{4p} [m] | 0,5 | 0,10 |
| y_{4p} [m] | -0,5 | -11,55 |
| K_{2p} [Nm ⁻¹] | 9000 | 10498,34 |
| K_{3p} [Nm ⁻¹] | 7000 | 6968,51 |
| K_{4p} [Nm ⁻¹] | 7000 | 3107,78 |
| φ_{20p} [rad] | $\pi/3$ | 1,01 |
| φ_{30p} [rad] | $\pi/3$ | 0,78 |
| φ_{40p} [rad] | $-\pi \cdot (2/3)$ | -0,89 |

Tabulka 6

(Tabulka 6) zobrazuje výsledky optimalizace. Velkými změnami prošly parametry tělesa 4. Došlo k posunutí volné délky pružiny a výrazně se snížila tuhost pružiny. Nežádoucím výsledkem optimalizace je však posunutí hmoty 4 ve svislé souřadnici. Rameno o délce 1m obdrželo přidanou hmotu ve vzdálenosti 11,6m.



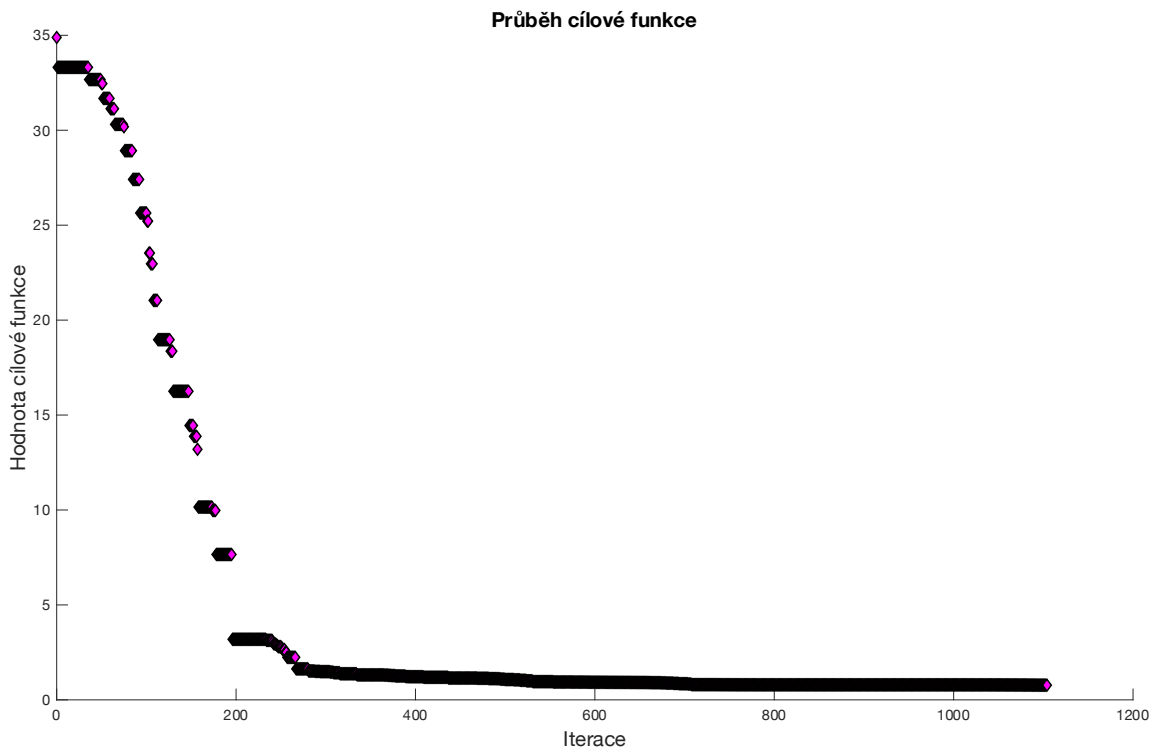
Obr. 56 Simulace mezivýsledku optimalizace

(Obr. 56) znázorňuje smontovaný mechanismus s optimalizovanými parametry v počáteční poloze. Veškeré výsledné parametry optimalizace nabývají reálných hodnot až na právě zmíněnou y_{4p} , která dosahuje nereálné velikosti. Proto vytvoříme další cílovou funkci, která bude minimalizovat polohu y_{4p} . Cílem bude snížit velikost ramene na délku 2m. Počáteční parametry optimalizace zvolíme poslední výsledné parametry optimalizace zapsané v (Tabulka 6).

$$CF_{14} = \left| 2 - |y_{4p}| \right| \quad (207)$$

$$p_{14} = 0,4 \quad (208)$$

10.4.6. Výsledek optimalizace



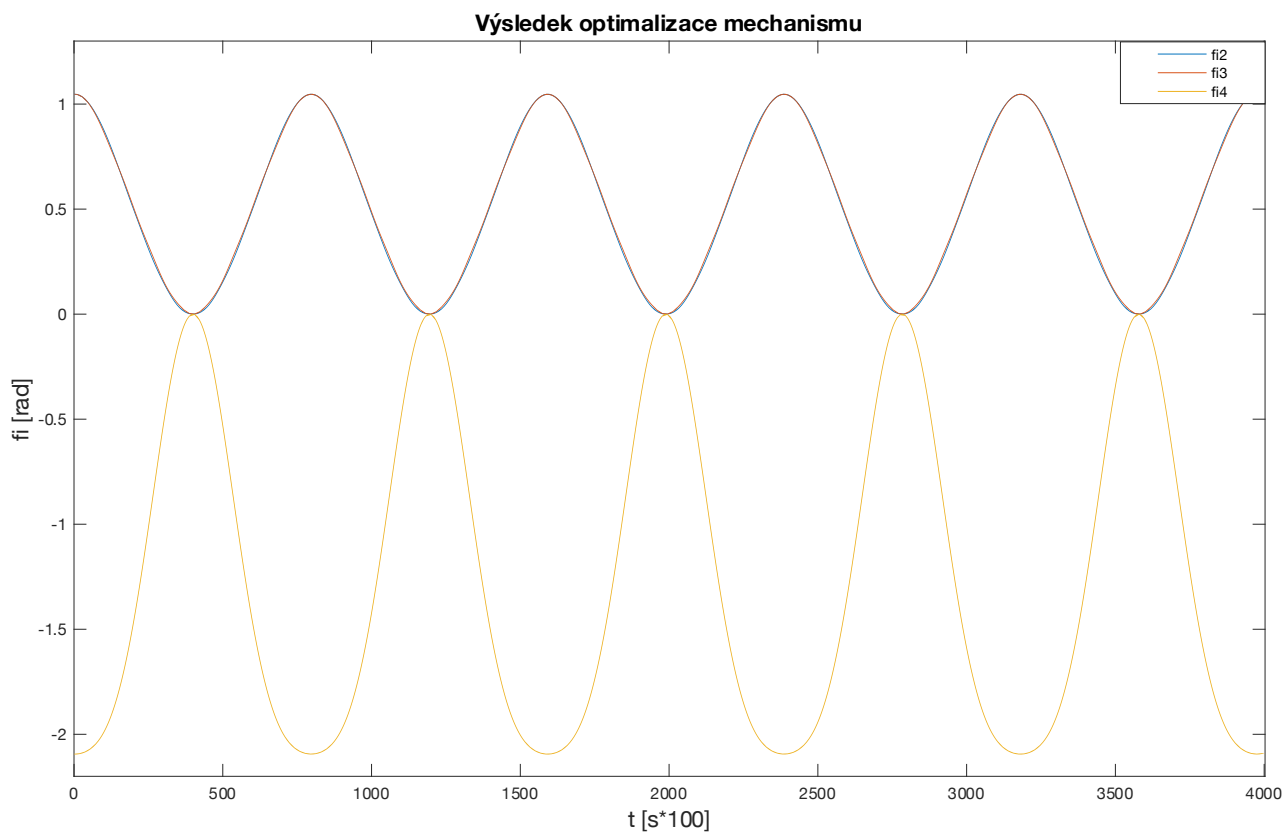
Obr. 57 Průběh cílové funkce optimalizace robotu

Na (Obr. 57) lze vidět průběh cílové funkce s přidáním požadavku na snížení délky y_{4p} . Optimalizace byla automaticky ukončena z důvodu neměnicích se parametrů s konečnou hodnotou $CF = 0,576$.

| Hodnoty optimalizovaných parametrů | | | |
|------------------------------------|--------------------|--------------|------------------|
| Parametr | Počáteční odhad | Mezivýsledek | Výsledné hodnoty |
| m_{2p} [kg] | 30 | 18,28 | 33,07 |
| x_{2p} [m] | 0,5 | 0,50 | 0,54 |
| y_{2p} [m] | -0,5 | -0,50 | -0,72 |
| m_{3p} [kg] | 30 | 4,74 | 1,46 |
| x_{3p} [m] | 0,5 | 0,20 | 0,32 |
| y_{3p} [m] | -0,5 | -0,91 | -0,66 |
| m_{4p} [kg] | 30 | 20,11 | 26,18 |
| x_{4p} [m] | 0,5 | 0,10 | 0,10 |
| y_{4p} [m] | -0,5 | -11,55 | -2,34 |
| K_{2p} [Nm ⁻¹] | 9000 | 10498,34 | 11597,55 |
| K_{3p} [Nm ⁻¹] | 7000 | 6968,51 | 6835,48 |
| K_{4p} [Nm ⁻¹] | 7000 | 3107,78 | 733,53 |
| φ_{20p} [rad] | $\pi/3$ | 1,01 | 0,98 |
| φ_{30p} [rad] | $\pi/3$ | 0,78 | 0,78 |
| φ_{40p} [rad] | $-\pi \cdot (2/3)$ | -0,89 | -0,61 |

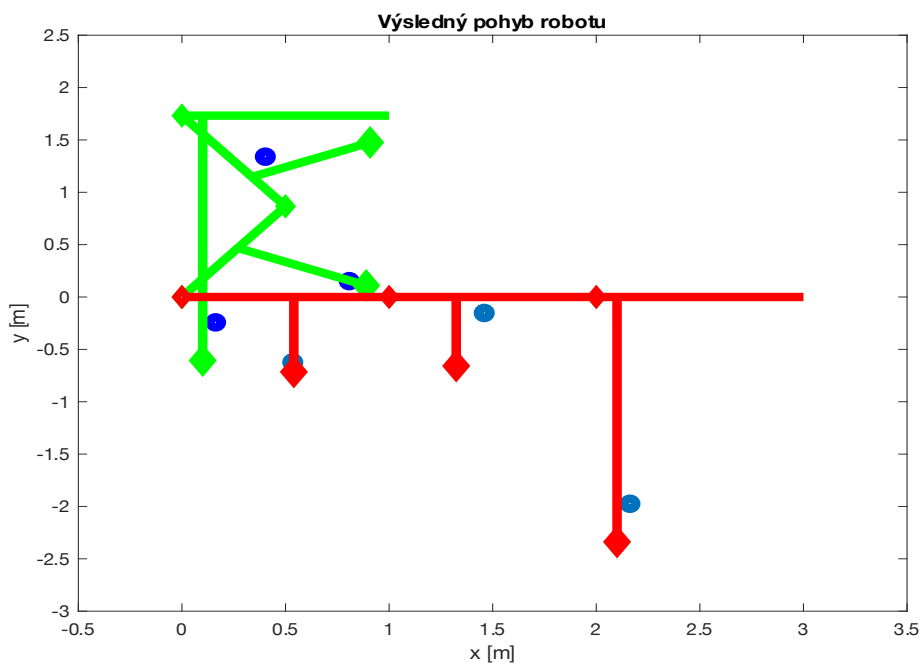
Tabulka 7

(Tabulka 7) obsahuje hodnoty parametrů. Druhý sloupec zleva obsahuje počáteční odhad. Třetí sloupec obsahuje mezivýsledek, kde jsme získali optimalizovanou trajektorii v požadovaném čase, ale s nerealistickou hodnotou y_{4p} . Třetí sloupec obsahuje výsledné parametry mechanismu. Požadavek na snížení hodnoty $y_{4p} = -2m$ nebyl přesně splněn, ale podařilo se hodnotu snížit na -2,34m a poté byla optimalizace zastavena dle průběhu na (Obr. 57).



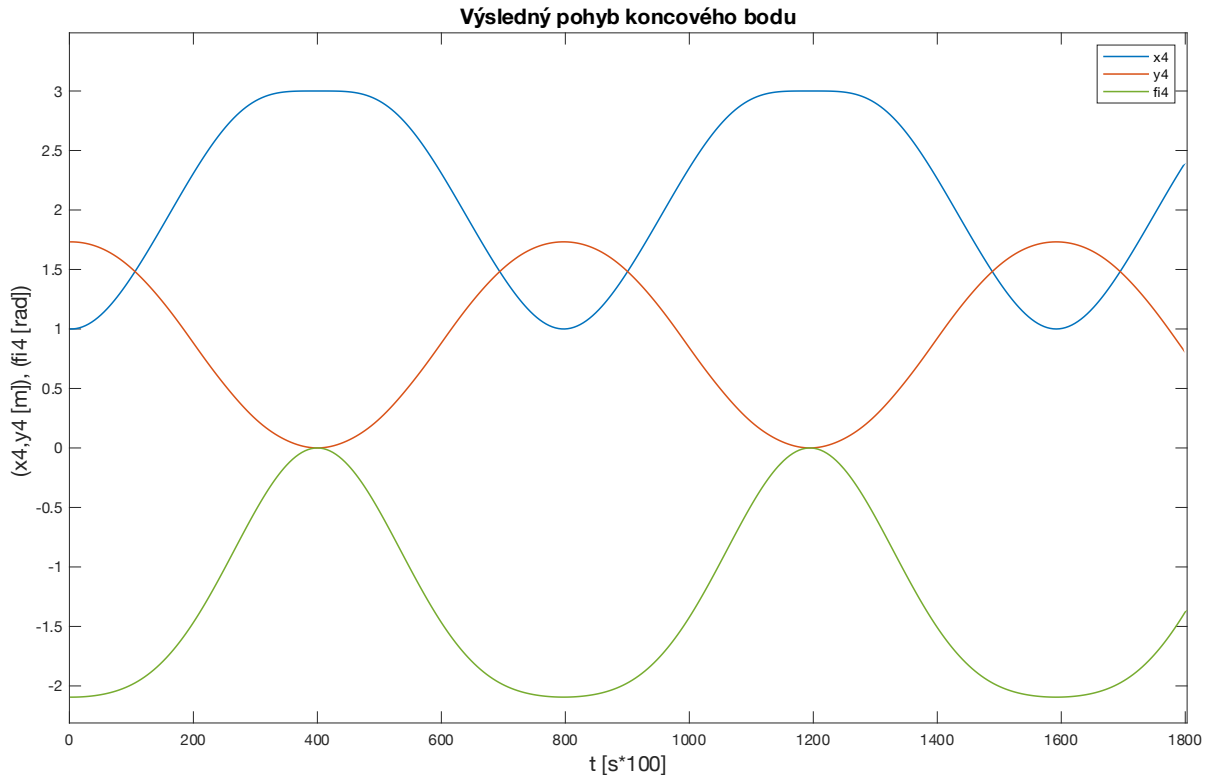
Obr. 58 Výsledný průběh poloh optimalizovaného robotu

(Obr. 58) Vykresluje konečný výsledek optimalizace. Byl zachován periodický průběh. Došlo také k vyhlazení průběhu natočení φ_3 , které obsahovalo malé kmity, které lze vidět na (Obr. 55).



Obr. 59 Simulace výsledku optimalizace robotu

(Obr. 59) vykresluje výsledný zoptimalizovaný mechanismus. Zelený obrys mechanismu definuje rozložení v počáteční poloze. Červeně vykreslený obrys mechanismu definuje konečnou polohu. Modré body značí výsledná těžiště pro jednotlivá tělesa. Po dosažení konečné polohy se mechanismus vrátí zpět do počáteční polohy.



Obr. 60 Výsledný průběh koncového bodu robotu

(Obr. 60) vykresluje průběhy poloh koncového bodu robotu v souřadnicích (183), které byly definované jako požadované. Požadovaná již zmíněná kritéria optimalizace byla definována následující sestavou parametrů:

$$P_{poč.} = \left[1, 1,73, -\frac{2\pi}{3} \right] \quad (183)$$

$$P_{kon.} = [3, 0, 0] \quad (184)$$

$$t_{kon.} = 4s \quad (185)$$

Na (Obr. 60) lze vysledovat, že na počátku cyklu se nacházel mechanismus přesně v požadované poloze a po provedení cyklu se vrátil zpět do počáteční polohy. V čase 4 sekund mechanismus dosáhl bodu $P_{kon.}$ s odchylkou od konečné požadované polohy $e_{kon.} = [0, 1,28 \times 10^{-4}, 6,435 \times 10^{-5}]$.

10.5. Computed torque

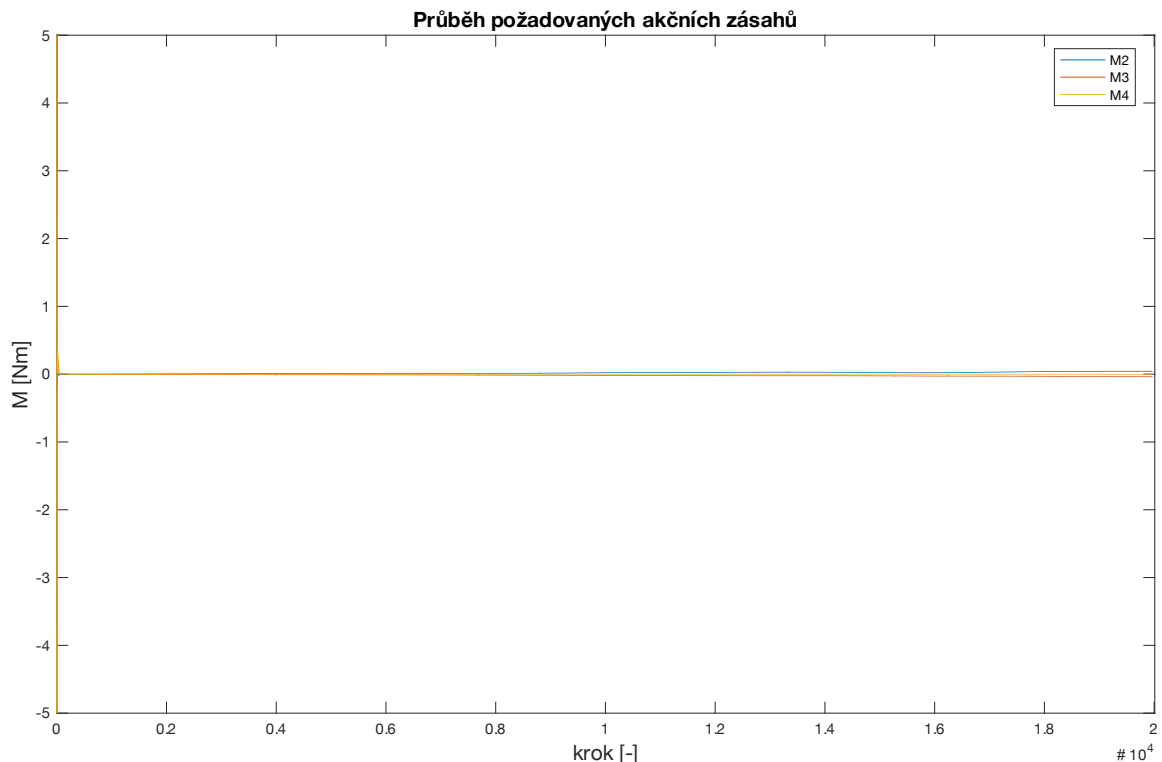
Pro model Computed torque je použito jak dopředné dynamiky, tak inverzní. Cílem je porovnání energetické náročnosti vyváženého EM modelu s modelem nevyváženým, který je poháněn pouze motory. Vstupem pro požadovanou trajektorii bude ideální EM model, s trajektorií znázorněnou na (Obr. 58).

10.5.1. Tvorba modelu

Vstupem do regulátoru Computed torque je poloha, rychlost a zrychlení z ideálního EM modelu (bez tření), který je naladěn na hodnoty, které byly dosaženy optimalizací v předchozí kapitole (Tabulka 7). Ideální EM model nám generuje požadovanou trajektorii dle (Obr. 58 Výsledný průběh poloh optimalizovaného robotu), rychlost a zrychlení. Dalším vstupem do regulátoru je poloha a rychlost z reálného modelu. Reálný model dostává z regulátoru potřebný akční zásah, který dorovná chybu polohy a rychlosti.

10.5.2. Kontrola modelu

Pokud vstupem do regulátoru bude ideální EM a reálný model je naladěn na stejné parametry, tak akční zásah z regulátoru musí být nulový.

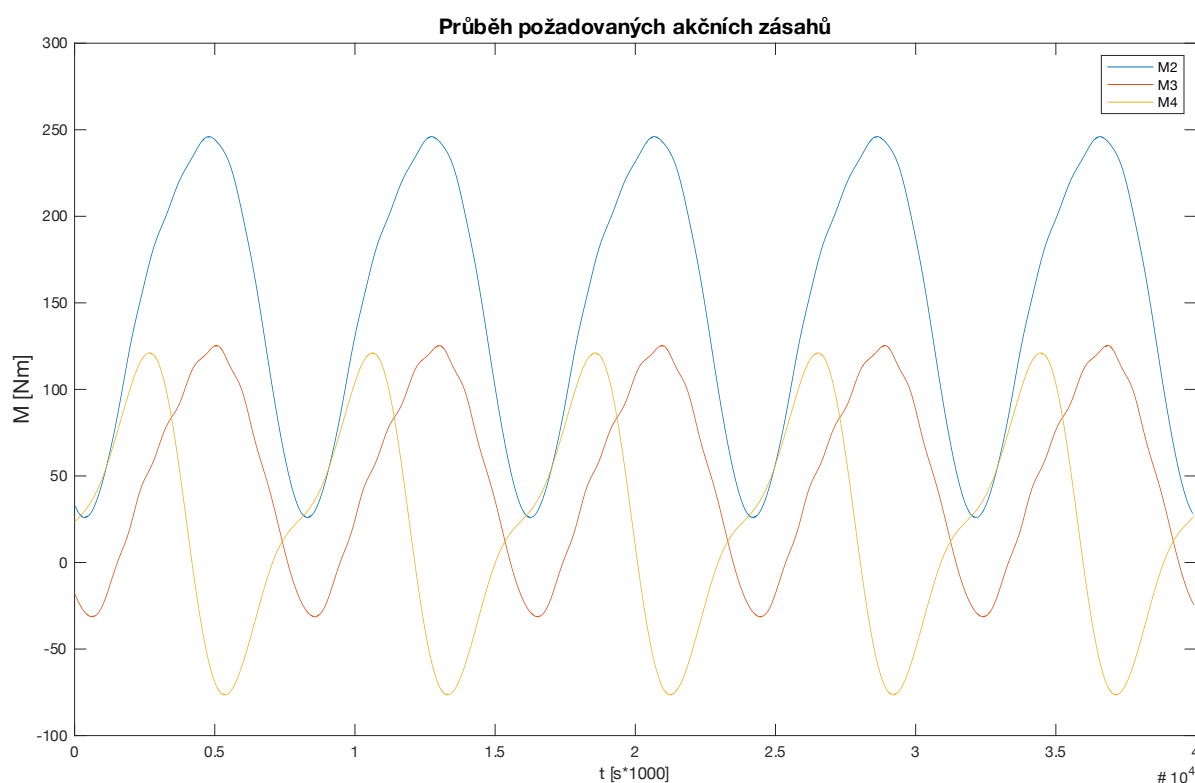


Obr. 61 Kontrola modelu Computed torque

Na (Obr. 61) je znázorněn potřebný hnací moment pro reálný model. Momenty jsou nulové, jelikož je reálný model shodný s ideálním EM.

10.5.3. Požadované momenty pro nevyvážený model

Požadované vstupy do regulátoru jsou generovány z modelu ideálního EM modelu. V reálném modelu odebereme veškeré přidané hmoty a pružiny. Ponecháme tak mechanismus v základní modifikaci a určíme potřebné momenty pro případ, že by se mechanismus pohyboval po dané trajektorii pouze pomocí motorů. Tření v kloubech budeme uvažovat dle průběhu na (Obr. 64).

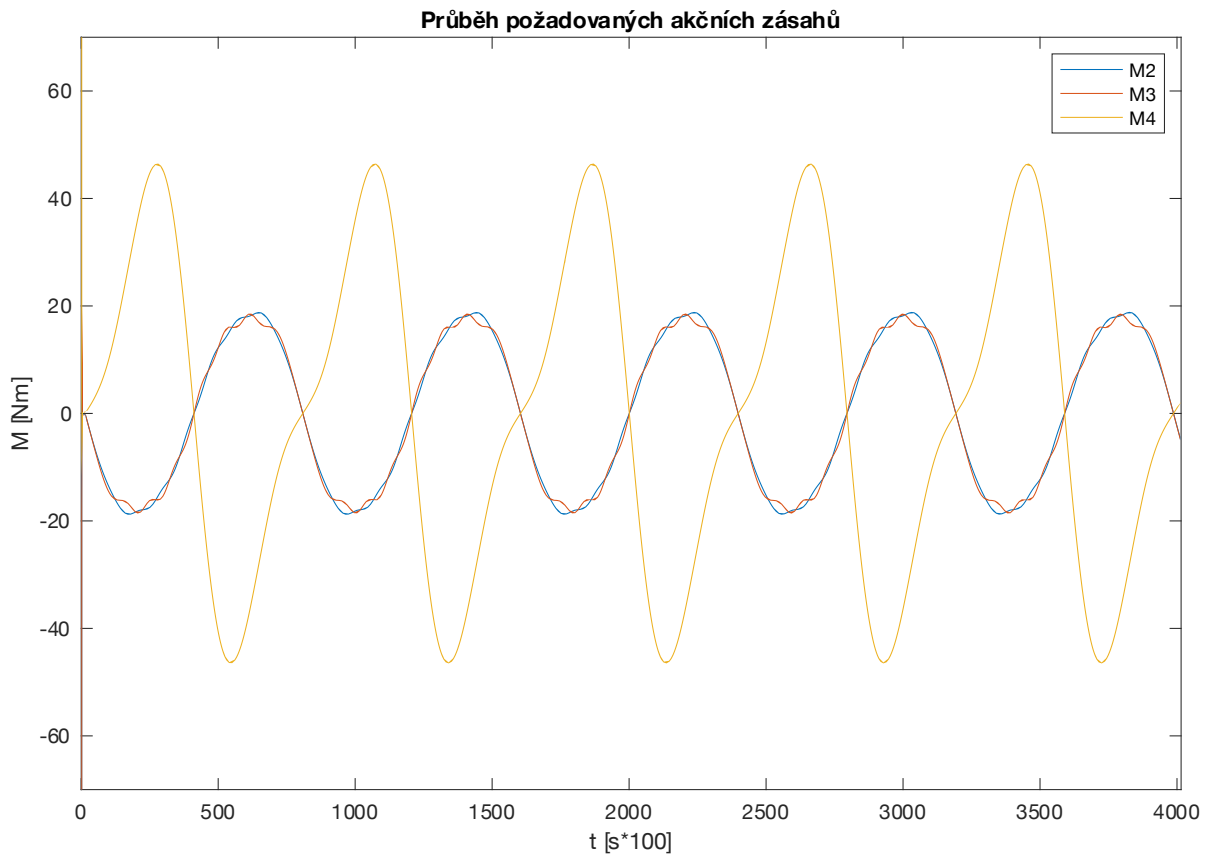


Obr. 62 Výsledný požadovaný moment pro nevyvážený model robotu

(Obr. 62) znázorňuje průběh hnacích momentů pro model bez hmot a pružin. Největší moment je potřebný na motoru tělesa 2, který nese celou hmotu, a to právě v čase, kdy mechanismus dosáhl koncového bodu a „leží“.

10.5.1. Požadované momenty pro EM model

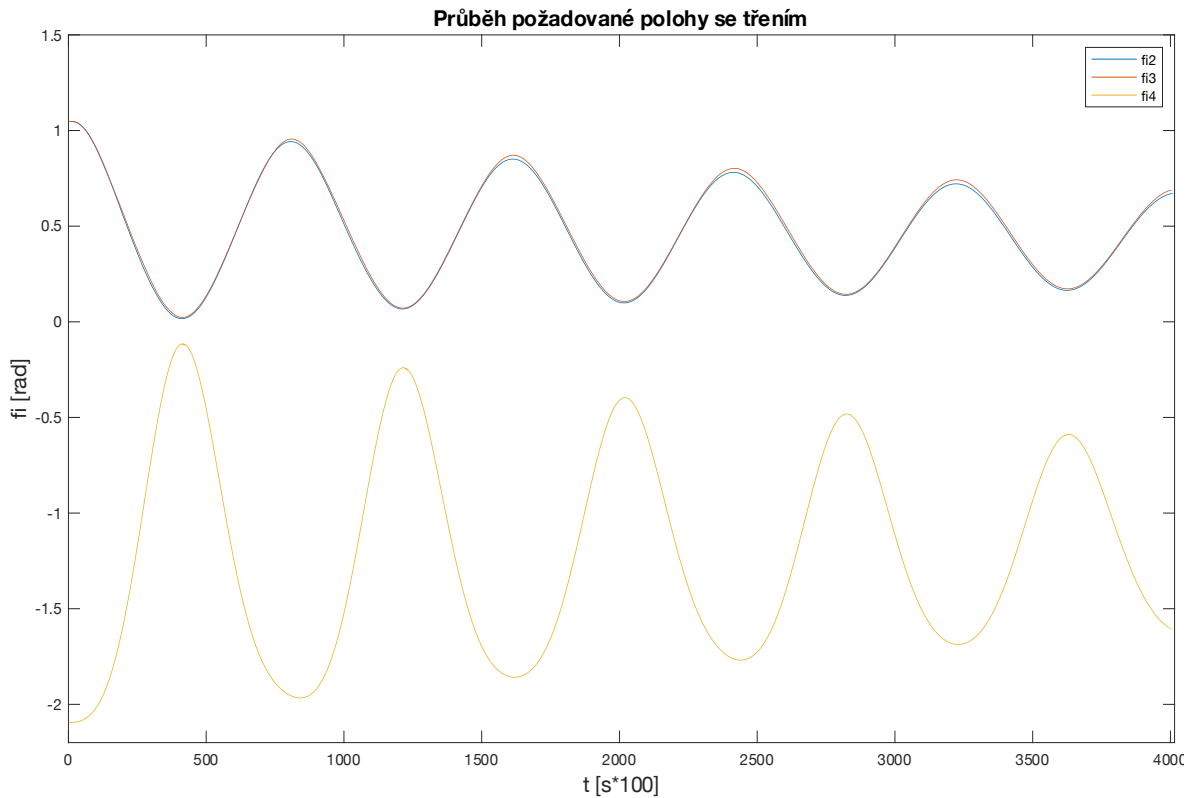
Do reálného modelu vložíme parametry z optimalizace (Tabulka 7). Pokud by nebylo uvažováno tření, tak by průběh akčního zásahu v podobě momentů byl nulový, stejně jako je tomu na (Obr. 61). Cílem je ale zjistit, jaký bude potřebný dodávaný moment, pokud budeme uvažovat tření.



Obr. 63 Výsledný požadovaný moment pro vyvážený model robotu

(Obr. 63) vykresluje potřebné momenty dodávané modelu se třením. Lze vysledovat, že čase 4s, což je čas koncové polohy je dodávaný moment nulový. Největší potřebný moment je na motoru 4.

Velikost požadovaných momentů pro EM výrazně závisí na tření. Pro abstrakci, jaká míra tření byla uvažována je popsáno (Obr. 64). Pro oba modely byly uvažovány stejné hodnoty tření.



Obr. 64 Průběh poloh optimalizovaného modelu se třením

(Obr. 64) vykresluje utlumující se soustavu EM se třením a bez dodávaných akčních zásahů. Cílem je pouze demonstrovat, jakým způsobem se soustava uklidní a reaguje na třecí moment.

11. Závěr

Cílem diplomové práce bylo aplikovat metodu energeticky efektivního pohybu na dva zadané mechanismy. Pro oba modely byl zvolen způsob řešení dynamického modelu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu. Před použitím modelů pro optimalizaci a metodu řízení Computed torque byly provedeny příslušné kontroly modelů. Pro dopřednou úlohu byla kontrola provedena díky poznatku, že součet kinetické a potenciální energie musí být konstantní, za předpokladu nepůsobících vnějších sil. Pro inverzní úlohu byla provedena kontrola pomocí simulovaných vstupů v podobě funkcí $\sin(x)$. Polohy generované funkcemi dávaly modelu periodický průběh momentu na výstupu.

Prvním optimalizovaným mechanismem byl klikový mechanismus. Cílem bylo optimalizovat parametry mechanismu tak, aby jeho vlastní přirozená EM trajektorie byla shodná s požadovanou pracovní trajektorií. Jak potvrzuje výsledek optimalizace v kapitole (9.5.5), lze pomocí definovaných cílových funkcí najít takové rozložení hmotnostních a setrvačností charakteristik, aby mechanismus konal předepsanou trajektorií v požadovaném čase vlastním

přirozeným pohybem. Požadovaná koncová poloha byla splněna v požadovaném čase s odchylkou $e_{\varphi_{kon.}} = 1,24 \times 10^{-4} \text{ rad}$. Počáteční odhad rozložení hmot včetně výsledného rozložení lze najít v (Tabulka 3). Poté bylo provedeno porovnání nároků na pohony při řízení metodou Computed torque. Porovnávali jsme dva modely, a to optimalizovaný model konající požadovanou trajektorii přirozeným pohybem s modelem, kde je mechanismus zcela bez přidaných hmot. Výsledek popsáný v kapitole (9.6) ukazuje zcela rozdílné potřebné momenty pro optimalizovaný a neoptimalizovaný model. Pro model neoptimalizovaný, který nekoná pohyb po trajektorii přirozeným pohybem, je moment v rozsahu $M_{2_{neopt.}} \in \langle -147,3; 86,7 \rangle \text{ Nm}$. Pro model, který je optimalizovaný a koná pohyb po trajektorii přirozeným pohybem je potřebný moment periodický a v rozsahu $M_{2_{opt.}} \in \langle -21,7; 21,7 \rangle \text{ Nm}$. Rozdíl v potřebných momentech je obrovský. V porovnání maximálních momentů, moment pro model konající přirozený pohyb je téměř sedminásobně menší.

Druhým optimalizovaným mechanismem byl tříramenný robot. Cílem bylo nalézt pomocí optimalizace sadu parametrů obsahující pro každé těleso přidanou hmotu a pružinu, přičemž se optimalizovala tuhost a volná délka pružiny. Požadavkem opět shoda požadované trajektorie s EM trajektorií. Výsledkem optimalizace popsáným v kapitole (10.4.6) je zdařilé nalezení takové trajektorie, která je zároveň trajektorií přirozenou. Pro provoz takového mechanismu je zapotřebí dodat pouze energii, která je ztracena třením apod. Požadovaná konečná poloha byla splněna s odchylkou $e_{kon.} = [0 \text{ m}; 1,28 \times 10^{-4} \text{ m}; 6,435 \times 10^{-5} \text{ rad}]$. Počáteční odhad parametrů mechanismu lze najít v (Tabulka 7). Po úspěšné optimalizaci bylo přistoupeno k další požadované metodě, a to porovnání nároků na pohony pomocí metody řízení Computed torque. Opět jako v případě klikového mechanismu byl porovnáván model, který není nijak optimalizovaný a jsou mu odebrány přidané hmoty a pružiny, s modelem, který koná požadovaný pohyb přirozeně. Výsledek porovnání potřebných momentů pro provoz mechanismů je popsán v kapitole (10.5). Model mechanismu, který nekoná pohyb po požadované trajektorii přirozeným pohybem a neobsahuje žádné přidané hmoty a pružiny potřebuje pro vykonání předepsané trajektorie následující maximální a minimální hodnoty příslušných momentů $M_{2_{neopt.}} \in \langle -26,7; 247,5 \rangle \text{ Nm}$, $M_{3_{neopt.}} \in \langle -38,9; 126,7 \rangle \text{ Nm}$, $M_{4_{neopt.}} \in \langle -121,4; -82,4 \rangle \text{ Nm}$. Pro model, který je optimalizovaný a koná pohyb po trajektorii přirozeným pohybem jsou intervaly maxima a minima potřebných momentů $M_{2_{opt.}} \in \langle -19,9; 19,2 \rangle \text{ Nm}$, $M_{3_{opt.}} \in \langle -18,9; 18,2 \rangle \text{ Nm}$, $M_{4_{opt.}} \in \langle -49,6; 49,6 \rangle \text{ Nm}$. Opět jsou potřebné momenty pro provoz optimalizovaného modelu znatelně menší. Nejmenší rozdíl je v porovnání minimálního momentu na motoru 2, kde je potřebný moment pouze o 34 % menší. V porovnání maximálního potřebného momentu pro optimalizovaný a

neoptimalizovaný model na tomtéž motoru je pak potřebný moment optimalizovaného modelu téměř třináctkrát menší.

Při pohledu na výsledky neoptimalizovaného mechanismu v porovnání s mechanismem konajícím pohyb po požadované trajektorii vlastním přirozeným pohybem je pokládána otázka, proč v průmyslu nejsou jenom stroje využívající této metody. Metoda je jednoznačně použitelná převážně pro jednoúčelové stroje. Problém nastává v ten moment, kdy je potřeba pracovní cyklus stroje zrychlit, nebo zpomalit. Stroj je poté vychýlen z trajektorie přirozeného pohybu a může pak být energeticky náročnější dosáhnout požadované trajektorie, neboť motor poté musí překonávat přidané hmoty a odpor pružin apod.

Výsledky této práce potvrzují, že lze pomocí optimalizačních metod najít takové parametry mechanismu, pro které bude jeho vlastní trajektorie shodná s trajektorií požadovanou. Také se potvrdilo, že provoz takového mechanismu jednoznačně vykazuje menší nároky na pohony, oproti mechanismu, který trajektorii přirozeným pohybem nekoná.

12. Literatura

- [1] J. KUNZ, „Technická mechanika,“ v *Statika s příklady*, Praha, ČVUT, 09/2014.
- [2] J. LEECH, „Classical Mechanics,“ Frome, Bulter and Tanner Ltd. , 1958.
- [3] M. V. Vladimír Stejskal, „Kinematics and Dynamics of Machinery,“ CRC Press; 1 edition (July 11, 1996).
- [4] F. L. Lewis, D. M. Dawson a C. T. Abdallah, „Robot Manipulator Control,“ v *Theory and Practice*, CRC Press, 12. 12. 2003, p. 638.
- [5] F. SCHWARZFISCHER, M. HÜSING a B. CORVES, The Dynamic Synthesis of an Energy-Efficient Slider-Crank-Mechanism, Baku, Azerbaijan: Azerbaijan Technical University, September 2017.
- [6] 2. VDI-Richtlinie, Getriebedynamik: Starrkörper Mechanismen Norm, Beuth, 2008.
- [7] F. SCHWARZFISCHER, „The Dynamic Synthesis of an Energy-Efficient Slider-Crank-Mechanism,“ RWTH Aachen University, Department of Mechanism Theory and Dynamics of Machines, Aachen, 2017.
- [8] P. Pavla, Z historie lineárního programování George B. Dantzig (1914-2005), Praha: The Czech Digital Mathematics Library.
- [9] T. Thümmel, Experimentelle Mechanismendynamik, Messung, Modellierung, Simulation, Verifikation, Interpretation und Beeinflussung typischer Schwingungsphänomene an einem Mechanismenprüfstand, Düsseldorf: Verl, 2012.
- [10] A. A. SHABANA, Dynamics of multibody systems Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2005.
- [11] J. J. UICKER, G. R. PENNOCK a J. E. SHIGLEY, Theory of machines and mechanisms, New York: Oxford University Press, 4th ed, 2011.
- [12] H. DRESIG, Dynamik der Mechanismen Wien, New York: Springer, 1989.

- [13] R.-C. Soong a Y. Hong-Sen, Simultaneous Minimization of Shaking Moment, Driving Torque, and Bearing Reactions of Complete Force Balanced Linkages, China: Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, 2007.
- [14] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright a P. E. Wright., „Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,“ SIAM Journal of Optimization.