

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

Ústav řízení a ekonomiky podniku



Optimalizace logistických tras pomocí matematických modelů

DISERTAČNÍ PRÁCE

Autor: Ing. Josef Košťálek

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Řízení a ekonomika podniku

Školitel: doc. Ing. Michal Kavan, CSc.

PRAHA 2018

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem svou disertační práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám námitky proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 27. 9. 2018

Ing. Josef Košťálek

PODĚKOVÁNÍ

Za cenné rady, podporu a trpělivost srdečně děkuji svému vedoucímu disertační práce doc. Ing. Michalu Kavanovi, CSc.
a vedení ústavu Řízení a ekonomiky podniku fakulty strojní ČVUT v Praze.

ANOTACE

Ve své disertační práci se zabývám optimalizací logistických tras pomocí matematických modelů. Schopnost vhodného plánování logistických tras je velmi důležitá z důvodu úspor nákladů i času. Tato problematika se vyskytuje v mnoha oborech lidské činnosti. Snažím se uvést a vysvětlit některé nové pohledy na řešení určitých problémů. Velkou pozornost ve své práci věnuji problému označovaném termínem: úloha obchodního cestujícího. Zde se mi podařilo vytvořit vlastní heuristickou metodu, vycházející z empirických poznatků, které jsem získal pozorováním a experimenty. Vysvětluji zde způsob jejího fungování, její experimentální ověření na konkrétních situacích i kvantifikaci jejích parametrů pomocí statistických testů. Weber-Steinerův rozmíst'ovací problém se mi podařilo rozšířit o další omezující podmínky, popsat způsob nalezeného řešení i vytvořit a popsat model sestavený k jeho řešení. Ve své práci používám metody zejména z oblasti operační analýzy a statistiky. Hlavní snahou mé disertační práce bylo rozšířit dosavadní lidské poznání alespoň o malý krůček kupředu, proto se snažím demonstrovat vlastní metody, jiné způsoby výpočtů i jiné úhly pohledu na problematiku.

ANNOTATION

In my dissertation work I deal with the optimization of logistic routes using mathematical models. A well-planned logistics route saves costs and time. This problem occurs in many fields of human activity. I try to explain and explain some new perspectives on solving certain problems. In my work, I pay attention to the problem referred to as the Traveling Salesman Problem. Here I managed to create my own heuristic method based on the empirical knowledge I gained by observation and experimentation. I explain here how it works, its experimental verification on specific situations and the quantification of its parameters using statistical tests. I succeeded in extending the Weber-Steiner's further constraining problem to other constraints. In my work I use methods especially in the field of operational analysis and statistics. The main aim of my dissertation was to extend the human knowledge so far, at least a small step forward, so I try to demonstrate my own methods, other ways of computing and other aspects of the problem.

OBSAH

1	ÚVOD	10
2	REŠERŠE.....	11
3	SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ	19
3.1	ÚVOD DO PROBLEMATIKY LOGISTIKY	19
3.2	ÚVOD DO PROBLEMATIKY MATEMATICKÝCH MODELŮ.....	21
3.2.1	MODIFIKACE PROBLÉMU.....	25
3.3	SOUČASNÉ MOŽNOSTI ŘEŠENÍ PROBLÉMU	29
3.3.1	EXAKTNÍ METODY	29
3.3.2	HEURISTICKÉ METODY	34
3.4	VÝZNAM NALEZENÍ EFEKTIVNÍHO ŘEŠENÍ.....	38
4	GLOBÁLNÍ CÍL A HYPOTÉZY DISERTAČNÍ PRÁCE	40
5	VLASTNÍ DOSAŽENÉ VÝSLEDKY	43
5.1	MAPOVÁNÍ MOŽNOSTÍ PRO ROZŠÍŘENÍ VĚDECKÉHO POZNÁNÍ	43
5.2	ALGORITMY TRANSFORMUJÍCÍ MATEMATICKÉ VÝSLEDKY	44
5.2.1	VYUŽITÍ PRINCIPŮ V JINÝCH OBLASTECH	51
5.2.2	SHRNUTÍ PODSTATNÝCH ZÁVĚRŮ PODKAPITOLY 5.2.....	56
5.3	PŘEDSTAVENÍ SVÉ VLASTNÍ HEURISTICKÉ METODY.....	57
5.3.1	ÚVODNÍ SLOVO K VLASTNÍ HEURISTICKÉ METODĚ	54
5.3.2	VYUŽITÍ POZNATKU O OPERÁTORU SELEKCE	60
5.3.3	APLIKACE OPERÁTORU SELEKCE V HEURISTICKÉ METODĚ	63
5.3.3.1	URČOVÁNÍ VELIKOSTI OPERÁTORU SELEKCE	64
5.3.4	OVĚŘENÍ FUNKČNOSTI HEURISTICKÉ METODY	69
5.3.4.1	OVĚŘENÍ NORMÁL. ROZDĚLENÍ U STATISTICKÝCH TESTŮ	70
5.3.5	MNOU POPSANÉ ZÁKONITOSTI, KORELACE A FUNKCE.....	81

5.3.6	APLIKACE NA ASYMETRICKÉ MATICE C_A	94
5.3.7	CELKOVÉ ZHODNOCENÍ HEURISTICKÉ METODY	100
6.	SOUVISEJÍCÍ PROBLÉMY A NÁVRHY ŘEŠENÍ	102
6.1	ROZŠÍŘENÍ STEINEROVA-WEBROVA PROBLÉMU	103
6.2	PRINCIP VÝPOČTŮ A VYTVOŘENÉHO MODELU	108
6.3	SHRNUTÍ ŠESTÉ KAPITOLY	111
7.	OPTIMALIZACE TRAS PŘI OMEZENÝCH ZDROJÍCH	113
7.1	POPIS PROBLÉMU	113
7.2	ALTERNATIVNÍ ZPŮSOB VÝPOČTU VÁZANÉHO EXTRÉMU	115
7.3	SROVNÁNÍ ALTERNATIVNÍHO VÝPOČTU S KONVENČNÍM	117
8.	NÁSTROJE K ODHADŮM DÉLKY OPTIMÁLNÍ TRASY	120
8.1	POPIS A VYUŽITÍ	120
8.2	ŘEŠENÍ POMOCÍ DOLNÍHO KVANTILU ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI	121
8.2.1	OVĚŘENÍ PODMÍNKY NORMALITY DÉLEK TRAS	122
8.2.2	HLEDÁNÍ ZÁKONITOSTI PRO DOLNÍ KVANTIL ROZDĚLENÍ.....	125
8.3	ODHAD DÉLKY POMOCÍ OBVODU KONVEXNÍHO OBALU BODŮ.....	126
9.	PROSTOR PRO DALŠÍ VÝZKUM	126
9.1	ZÁKONITOSTI V POSLOUPNOSTECH SOUŘADNIC A ŘEŠENÍCH	126
9.2	VYTVÁŘENÍ DATABÁZÍ ŘEŠENÍ	134
9.3	DALŠÍ ROZŠÍŘENÍ HEURISTICKÉ METODY	136
9.4	ROZŠÍŘENÍ ROZMISŤOVACÍHO PROBLÉMU	137
10.	ZÁVĚR	142
10.1	SPLNĚNÍ CÍLŮ A OVĚŘENÍ HYPOTÉZ	138
	POUŽITÁ LITERATURA	
141		
	VLASTNÍ PUBLIKACE	144

11. PŘÍLOHY 148

SEZNAM POUČITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

a	operátor selekce v matici C
b	operátor řádkové selekce v matici C
B	matice souřadnic
BLP	bivalentní lineární programování
C	matice vzájemných vzdáleností míst [km]
C_A	asymetrická matice vzájemných vzdáleností míst [km]
c_{ij}	prvek matice C
F	hodnota účelové funkce, hledané minimum (zpravidla délky) trasy [km]
f	počet stupňů volnosti
h	šířka intervalu
I_{yx}	korelační index
k	počet kroků algoritmu
K-S	Kolmogorovův-Smirnovův jedno výběrový statistický test
LP	lineární programování
n	počet míst
n_i	četnost
M	prohibitivní konstanta
N	počet statistických údajů
NP	nedeterministicky polynomiální algoritmus
P	polynomiální algoritmus
R	variační rozpětí
s	počet intervalů
T	časová náročnost algoritmu (při předpokladu, že časová náročnost je přímo úměrná počtu kroků) [s]
$t_{(1-\alpha)}$	kritická hodnota T-rozdělení (studentova rozdělení) pravděpodobnosti

- $u_{(1-\alpha)}$ kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti
- V matice výsledků
- w podíl obvodu konvexního obalu bodů a nejkratší trasy mezi těmito body
- α hladina významnosti ve statistických testech (doporučená hodnota 5 %)
- α_3 koeficient asymetrie pro rozdělení četností
- α_4 koeficient špičatosti pro rozdělení četností
- δ odchylka hodnot účelových funkcí mezi řešením heuristickým a exaktním [%]
- Φ hodnota distribuční funkce normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti
- $\chi^2_{(1-\alpha)}$ kritická hodnota „chí-kvadrát“ rozdělení pravděpodobnosti

1 ÚVOD

K tématu disertační práce mě přivedly poznatky získané během psaní své diplomové práce, kde jsem při optimalizaci tras ve vnitropodnikové logistice řešil matematický problémem označovaný jako problém čínského listonoše. Jako velice zajímavá se mi jevila možnost slovně formulované požadavky na plánování trasy přepsat do podoby matematického modelu a ten následně exaktně řešit tj. vypočítat hodnoty proměnných, které vytyčí optimální trasu (při minimalizaci délky). Touto problematikou jsem se chtěl dále zabývat, protože mě přišla z matematického hlediska nejen zajímavá, ale i krásná.

Zatím co v diplomové práci šlo o to prokázat schopnost aplikovat známé metody na konkrétní problém, v disertační práci jsem se začal zabývat hledáním nových řešení matematického problému, pro který se vžilo označení úloha obchodního cestujícího. Výstupy z disertační práce nejsou šity na míru jednomu konkrétnímu subjektu, jako tomu bylo v diplomové práci, ale mají obecnější význam. Obzvláště jsem si kladl na srdce hlavní poslání každé disertační práce, kterým je posunout lidské poznání, alespoň o malý krok kupředu. Na doktorské studium presenční formy jsem tedy nastoupil s jasným plánem o tom, jaké problematice se chci věnovat a čeho chci dosáhnout. Přitom mě velmi ovlivnila veřejná přednáška prof. RNDr. Jaroslava Nešetřila, Dr.Sc., která proběhla na fakultě elektrotechnické, tento profesor je jedním ze špičkových českých matematiků v oblasti diskrétní matematiky. Na téže fakultě opět při veřejné přednášce jsem měl možnost poslechnout si Dr. Václava Chvátala pohovořit o problému obchodního cestujícího. Dr. Václav Chvátal je Čech, který v roce 1968 emigroval do Kanady, kde působil na prestižních pracovištích a zabýval se teoriemi grafů, lineárním programováním, a právě problémem obchodního cestujícího. Nedělám si ambice, že bych se někdy mohl takovým vědcům vyrovnat, ale pokládám je za vzory hodné následování a možnost navštívit jejich přednášku je zážitkem na celý život. Předkládaná disertační práce je výslednicí mého několik let trvajících bádání, mé touhy po objevování nových souvislostí, postupů a zákonitostí.

2 REŠERŠE

Podstatou vědecké práce je podle mého názoru přispět k rozvoji současného stavu poznání, přičemž není žádoucí individuálně objevovat celou problematiku znovu, ale seznámit se dosavadní úrovní řešení daného problému v takové míře v jaké je to možné. Kritická literární rešerše je jakýmsi popisem toho poznávacího procesu, kde se navíc odráží mé názory i dílčí výsledky v dané problematice spolu s kritickým poukázáním na některé pasáže, se kterými si dovoluji nesouhlasit, případně je odsuzuji na základě konfrontace s jinými fakty a autory.

Níže uvedená literatura, představuje výchozí podloží poznání, na kterém jsem dále stavěl. Jak bylo výše uvedeno primárním předmětem mého zájmu je optimalizace logistických tras vycházející z Okružního dopravního problému.

Po stopách obchodního cestujícího. Matematika na hranicích možností.

Autor: Cook, W. J.
Vydáno v ČR: Praha: Dokořán, 2012
Počet stran: 255
ISBN: 978-80-7363-412-4

Tato kniha v sobě obsahuje obrovské množství informací a zajímavostí týkajících se matematického problému označovaného jako úloha obchodního cestujícího. Je zde popsána historie problému jeho aplikace, včetně aplikací mimo sféru logistiky, názory a vyjádření předních amerických matematiků zabývajících se tímto tématem. Pro mou disertační práci se mi obzvláště hodily některé informace týkající se teorií grafů. Stejně tak jako vysvětlení terminologie související s problémem obchodního cestujícího jako je např. P a NP. Rovněž metody pro odhady délky optimální trasy pro mě měly velký význam, protože touto otázkou se ve své práci také zabývám.

The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications

Autor: Reinelt, G.
Vydáno v SRN: Berlín: Springer, 1994
Počet stran: 210
ISBN: 978-3-540-60676-9

Na rozdíl od knihy Po stopách obchodního cestujícího. Matematika na hranicích možností autora W. J. Cooka, která vysvětluje historii problému obchodního cestujícího od jeho vzniku po současnost s mnohými zajímavostmi za účelem popularizovat tento problém, je tato kniha více konkrétní v oblasti metod pro řešení problému. Jsou zde představeny různé

metody řešení i různé metody přibližných řešení, kde ztráta přesnosti výsledku je kompenzována výrazným zrychlením při hledání řešení. Také je zde uvedena řada praktických příkladů s ukázkou jejich řešení.

Průmyslová logistika

Autor: Preclík, V.
Vydáno: Praha: ČVUT, 2006.
Počet stran: 359
ISBN: 80-01-03449-6

Tuto knihu napsal docent Vratislav Preclík v rámci řízení souvisejícího se získáním titulu profesor a tomu odpovídá komplexnost i hloubka díla. Logistika je zde chápána co by vědecká disciplína, která využívá poznatků celé řady jiných oborů. Průmyslová logistika je zde prezentována jako jakási odnož, která vznikla z řízení výroby a specializuje se především na oblasti materiálových a informačních toků nebo-li s řízením a plánováním výroby velice úzce souvisí, stejně tak jako s marketingem a finančním řízením podniku. Přitom jsou zde prezentovány metody a postupy vedoucí ke stavu, který je označován termínem „Princip tahu“ tj. situace, kdy výroba žádného pracoviště nemůže a nesmí probíhat samoúčelně, ale impulzem pro zahájení výroby čehokoliv je její reálná potřeba („objednávka“) pracovištěm následujícím potažmo finálním zákazníkem. Ať je to podkapitola popisující Kanbanový systém ve společnosti TPCA, zásady „lean production“, implementace prvků filozofie „Just in time“ nebo BOA = Belastungsorientierte Auftragsfreigabe což je koncepce přidělování zakázek podle stupně vytižení pracovišť pracující na stochastickém (pravděpodobnostním) principu. Publikace je souhrnným pojednáním o průmyslové logistice zasazeném do kontextu jejího okolí a působících okolností. Většina poznatků má svou platnost také mimo průmysl ovšem klíčová oblast této knihy se váže právě na logistické a organizační záležitosti spojené s průmyslovou výrobou.

Řízení provozu v logistických řetězcích

Autor: Štůsek, J.
Vydáno: Praha: C. H. Beck, 2007
Počet stran: 227
ISBN: 978-80-7179-534-6

Autor této publikace je pedagogickým a vědeckým pracovníkem ČZU a navíc se pohybuje v podnikatelské sféře, to mu umožňuje udržovat přímý kontakt se současnými trendy a propojovat je s teoretickými východisky, což je na této publikaci dobře patrné. Z toho jak je v této publikaci vykládán termín „logistický řetězec“ usuzují, že autor tímto pojmem míní velice široké pole veškerých činností, které přináší konečnému zákazníkovi nějakou

přidanou hodnotu. Počínaje úvahou o tom, na které zákazníky se zaměřit a s jakým produktem je oslovit, přes vývoj a výrobu produktu až po jeho distribuci. Logistický řetězec v sobě tedy obsahuje celou řadu úkolů marketingu.

Přesto že autor popisuje logistiku resp. logistické řetězce velice komplexně s celou řadou souvislostí, které mají do logistiky dopad, určitě se nedá tvrdit, že by to bylo na úkor hloubky a odbornosti.

Jediná pasáž, se kterou bych snad polemizoval je na s. 187 až 192 a pojednává o efektu, který je schopen přinést simulační software. Ve zmíněné kapitole se jedná o systém APS (Advanced Planning and Scheduling) sloužící ke kapacitnímu rozvrhování ve výrobním provozu. Autor zde uvádí možnost snížení zásob o 30 až 50 %, zkrácení průběžné doby výroby rovněž o 30 až 50 %, zvýšení dodavatelské spolehlivosti až o 100 % apod. Což je dle mého názoru přehnaně optimistické vidění situace, nehledě k tomu, že výsledky úrovně řízení a plánování s využitím moderních softwarů jsou stále silně odvislé od způsobu obsluhy zejména po stránce zadání pravdivých a bezchybných dat. Přínosy softwarů podporujících řízení a rozhodování jsou mimo veškerou pochybnost, ale je nutné nepodcenit jejich rizika a negativa jako náklady a to nejen na pořizování, ale zejména na provoz – jedná se o aktualizace, upgrady aj. (často po několika letech převyší pořizovací náklady). Tuto stránku věci zde autor vůbec nezmiňuje (na rozdíl např. od publikací M. Kavana: Výrobní management a Projektový management inovací, kde se o této problematice hovoří).

Přínos této publikace pro svou disertační práci vidím v rozšíření obzorů a informací z oblasti logistiky.

Časopis Logistika

Vydavatelství: Economia
ISSN: 1211-0957

Tento časopis neodebírám pravidelně, nýbrž jsem si pořídil 10 vydání tohoto měsíčníku. Ten obsahuje nové trendy, postupy, technologií, inovace a know how zahraničních společností působících v oblasti logistiky. Ať se jedná o regálové systémy a obecně vývoj v oblasti skladovacích technik, přepravních prostředků, manipulačních prostředků, komunikačních a softwarových technologií, přepravních obalů atd.

Statistická a rozhodovací analýza

Autor: Kožíšek, J. a B. Stieberová
Vydáno: Praha: ČVUT, 2008
Počet stran: 252
ISBN: 978-80-01-04209-0

Jedná se o publikaci, ze které jsem se již během vysokoškolského studia mnohé naučil. Obsahuje základní početní metody potřebné pro podnikové řízení (základy statistiky, síťové grafy, lineární programování, teorie front, tvorba náhodných čísel apod.). Za zcela unikátní toto dílo považuji z toho důvodu, že se v něm kombinuje teorie s řešenými příklady a vedle početního řešení je zde navíc uveden způsob jak řešit daný problém v prostředí MS Excel. Kromě teoretických východisek tak čtenáři poskytuje také návod k rychlému a komfortnímu nasazení v praxi při řešení opravdového problému.

Zejména použití nástroje MS Excelu „*řešitel*“ s jehož pomocí se dá velice snadno řešit problém nazývaný „lineární programování - LP“ a to i v nejrůznějších modifikacích včetně „nelineárního programování“. Dopravní optimalizační úlohy např. Okružní dopravní problém jdou ruku v ruce s „binárním lineárním programováním“. (Resp. jinými typy LP, např. matematický model řešící „Úlohu čínského listonoše“ se řeší „celočíslným lineárním programováním“). Lineární programování tedy představuje matematický aparát k řešení matematických modelů a MS Excel vybavený nástrojem „*řešitel*“¹ je schopen v omezeném rozsahu 200 proměnných řešit.

Považuji za důležité zdůraznit, že potenciál této publikace pro řešení problému, kterým se zabývám jsem již výtěžil. Tato kniha splnila svůj účel a poskytla mi znalosti, na kterých lze stavět dále. Proto použití např. matematické aplikace „lineárního programování“ je v mých pracích v mnohém odlišné a je jakousi nadstavbou představující zejména ulehčení práce při sestavování velkých modelů čítajících nikoliv desítky, ale řádově stovky proměnných.

Programy pro matematické modelování

Autor: Jablonský, J.
Vydáno: Praha: VŠE, 2007
Počet stran: 259
ISBN: 978-80-245-1178-8

Autor publikace profesor Jablonský působí jako vedoucí katedry Ekonometrie na VŠE v Praze a v tomto díle se mu myslím velice úspěšně podařilo popsat srozumitelnou a pochopitelnou formou problematiku různých druhů optimalizačních úloh včetně způsobů jejich řešení. Tato kniha spolu se Statistickou a rozhodovací analýzou velice ovlivnila nejen mou diplomovou práci, ale poskytla teoretický základ pro další práci.

Primárním předmětem mého zájmu byly a jsou optimalizační úlohy týkající se logistických tras. Zvláště cenné je vysvětlení fungování modelů na řešených příkladech, takže

¹ Nástroj *řešitel* lze doinstalovat bez instalačního CD.

čtenář dostane lepší představu. Oproti výše popsané Statistické a rozhodovací analýze je tato kniha profilována na užší oblast, takže proniká více do hloubky problematiky. Co považuji za velice přínosné z hlediska své disertační práce jsou ukázky nasazení dalších specializovaných programů poskytující matematický aparát k řešení složitých matematických modelů. Zatímco Excel je univerzální tak např. programy *LINDO* nebo *LINGO* jsou speciálně určeny k hledání výsledků optimalizačních úloh. Navíc jak jsem se z této publikace dozvěděl a i použil lze si u řady těchto programů zdarma stáhnout jejich demoverze či verze určené pro studenty. A v tom vidím nejvyšší přínos pro svou budoucí práci. Velmi užitečný pro mě byl také princip lineárního programování používající omezující podmínky typu implikace (když – potom) tento princip jsem aplikoval na Weber – Steinerův problém, abych docílil jeho rozšíření o omezení v podobě zakázaných oblastí.

Matematické modelování

Autor: Fábry, J.
Vydáno: Praha: VŠE, 2010.
Počet stran: 143
ISBN: 978-80-245-1266-2

Na rozdíl od dvou předchozích publikací je v této knize méně výpočtů a vzorců a více teorie. Konkrétně v oddílu pojednávajícím o optimalizačních dopravních úlohách je vysvětlen problém, naznačen způsob řešení, ale konkrétní řešení dokonce i obecný vzorec chybí. Autor se odvolává na publikaci, kterou napsal jeho kolega z VŠE v r. 2006 prof. Dr. Ing. Petra Fiala CSc., neuvádí ovšem o jakou publikaci jde.

Na druhé straně teoretičtější ladění publikace přináší velice zajímavé informace týkající se historického kontextu a vzniku jednotlivých úloh. Tak například, že Okružní dopravní problém, resp. výsledný okruh se také nazývá *Hamiltonův okruh* na počest irského matematika, který se tímto problémem v historii zabýval. Nebo historie problému, pro který se vžil termín „Úloha čínského listonoše“ a jehož řešení našel čínský matematik Kwan roku 1962. Tímto problémem se v roce 1736 zabýval L. Euler, když si kladl otázku jak naplánovat trasu procházky přes sedm mostů v městě Königsberg (dnešní Kaliningrad), tak aby prošel všechny mosty, ale aby každý prošel pouze jednou a vrátil se zpět do výchozího místa. Tehdy Euler dokázal, že taková trasa neexistuje. Dnes je známo, že řešitelnost tohoto problému je dána počtem hran vstupujících do určitého uzlu a jestliže je tento počet lichý, potom je třeba některou hranu nebo hrany projít dvakrát. Kwanův matematický model dává odpověď na otázku, které hrany ve výsledné trase zdvojit, aby ujetá vzdálenost byla nejmenší možná.

Tyto a další informace eventuálně poslouží v disertační práci co by zpestření a zajímavosti týkající se vývoje optimalizačních úloh.

Kvantitativní metody v manažerském rozhodování

Autor: Gros, I.
Vydáno: Praha: Grada, 2003
Počet stran: 432
ISBN: 978-80-247-0421-8

Tato kniha je rovněž průřezem užitečných početních metod, které dávají vedoucím pracovníkům data k rozhodování. Podobně jako v publikaci Statistická a rozhodovací analýza jsou zde ukázány možnosti provádění těchto výpočtů pomocí programu Excel i některých dalších specializovaných softwarů.

Pokud jde o oblast optimalizačních logistických úloh, za velice inspirativní považuji popsání a ukázkou řešení Okružního dopravního problému pomocí algoritmu, který se nazývá „maďarská metoda“. Jedná se o interakční postup, ve kterém se dojde k výsledku pomocí konečného počtu kroků. Tuto metodu je dobré znát, ovšem v papírové podobě by byla pro potřeby řešení mého problému prakticky nepoužitelná. Avšak nepovažuji tento způsob řešení za striktně zavržený hodný, neboť na rozdíl od postupu matematického modelu v té podobě, jak ho uvádí Jablonský nebo Kožíšek resp. Stieberová je „maďarská metoda“ schopná řešit více okruhový Okružní dopravní problém. Více okruhový Okružní dopravní problém řeší celou situaci v jiné dimenzi, kdy není možné propojit všechny vytyčené body pouze jedním okruhem. V praxi si lze snadno představit plánování trasy pro nákladní automobil, který má za úkol zásobovat prodejny v jednotlivých městech z centrálního skladu, ovšem kapacita nákladního automobilu nestačí na zásobení všech míst a proto je třeba naplánovat vícero okruhů tak, aby součty jejich vzdáleností či dob jízdy (záleží na hledisku optimalizace) byla minimální. Více okruhový okružní dopravní problém je téma, které je mi známo, v současnosti se touto modifikací nezajímám, ale nezříkám se jí do budoucna, jedná se o mnohonásobně složitější problém než jednookruhová typ.

Excel 2007 vzorce a funkce

Autor: Schels, I.
Vydáno v ČR: Praha: Grada Publishing, 2008
Počet stran: 506
ISBN: 978-80-247-1965-8

Tato kniha je velmi dobrým návodem, jak využívat široké možnosti programu Excel a jsou zde popsány nové funkce, jimiž je vybaven MS Excel 2007. Přínos této knihy pro mou práci nespočívá v získání nových poznatků o samotné výpočetní a matematické stránce mnou

řešené problematiky, ale a to je velice důležité, představuje cenný přínos pro neméně důležitou oblast, kterou je etapa transformace matematických výsledků z podoby nul a jedniček do uživatelsky komfortní podoby, kdy se vypíše jednotlivá např. města v pořadí, které tvoří optimální trasu. K tomuto účelu je třeba ovládat široký aparát funkcí programu Excel zejména funkce logické a vyhledávací stejně tak jako nástrojů podmíněného formátování aj. Bez těchto znalostí by rovněž nebylo možné sestavení takových algoritmů, které umožňují zobecnění tohoto problému ve smyslu libovolného počtu zadávaných měst až po určité maximální množství.

Systémové inženýrství a rozhodování

Autor: Dudorkin, J.
Vydáno v ČR: Praha: ČVUT, 2003
Počet stran: 164
ISBN: 80-01-02737-6

Z této publikace byla pro mou disertační práci přínosná kapitola popisující problematiku teorie grafů (myšleno síťových grafů). Seznámil jsem se zde s terminologií popisující problémy v teorii grafů a teoretickými východisky jak popisovat jednotlivé situace (např. uzly, hrany, orientované hrany, hodnota hrany, cyklický, acyklický graf apod.). Publikace dále popisuje způsob zápisu síťového grafu pomocí maticového zápisu. Stejně tak jako některé problémy, které lze v teorii grafů řešit jako je hledání: optimální cesty, minimální kostry, optimální tok sítí apod. Publikace popisuje algoritmy schopné tyto problémy řešit.

Network and Discrete Location, Models, Algorithms and Applications

Autor: Daskin, M., S.
Vydáno v USA: University of Michigan
Počet stran: 516
ISBN: 978-0-470-90536-4

Tato kniha se zaměřuje na popis problematiky spojené s teorií grafů a různými druhy rozmíst'ovacích problémů. Teoretická východiska jsou zde bohatě doplněna o ukázky praktických aplikací a obrázkových ilustrací. Pro účely disertační práce byly obzvláště užitečné a přínosné oblasti týkající se rozmíst'ovacích problémů spojených s distribučními řetězci, umístěním logistických hubů. Jsou zde popsány ukázky způsobů hledání optimálních řešení pomocí matematických modelů a ukázky programů schopných tyto optimalizační problémy řešit.

Modelování dodavatelských řetězců

Autor: Fiala, P.
Vydáno v ČR: Praha: Professional Publishing, 2005
Počet stran: 165
ISBN: 80-86419-62-2

Kniha popisuje zejména systémy vazeb v tocích výrobků mezi dodavateli a odběrateli. Popisuje nástroje pro rozhodování a hledání optimálních řešení. Kniha také popisuje optimalizační modely v dynamických situacích, kdy se prvky v logistickém řetězci mění. Dále jsou zde popsány metody sloužící k vyhodnocování výkonnosti dodavatelských řetězců. V systému mezi dodavatelem, výrobcem a zákazníkem existuje celá řada materiálových, informačních a finančních toků a vzniká zde prostor pro širokou škálu rozhodování, které má implikace na výši nákladů. Logickou snahou vedoucích pracovníků na všech úrovních je tyto náklady minimalizovat a to tím způsobem, že z přípustných řešení jsou vybírána řešení nejlepší. Nákladové funkce lze zformulovat pomocí matematických modelů obsahujících zpravidla velké množství proměnných, které jsou vzájemně provázány řadou omezujících podmínek různých druhů. Cílem je v takové situaci nalézat optimální řešení v podobně takových přípustných hodnot proměnných, pro které bude nákladová funkce nabývat svého minima. Zde se uplatňují metody jako vázané extrémní, lineární programování, nelineární programování, simulační metody apod. Autor nazírá na dodavatelsko-odběratelské řetězce jako na systém obsahující řadu subjektů, které se sledují vlastní cíle a nalézají optimální východiska pouze pro daný subjekt, což ovšem nepředstavuje optimální řešení celého řetězce. V publikaci jsou předkládána východiska jak tento stav změnit v tom smyslu, aby si jednotlivé subjekty nepočínaly autonomně a bylo hledáno globální nejlepší řešení optimalizující dodavatelsko-odběratelský řetězec jako celek.

3 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ

V této kapitole usiluji o to seznámit čtenáře se současným stavem poznáním i s danou problematikou, používanými termíny, vztahy, zákonitostmi apod. Jelikož se s těmito termíny a vztahy budu pracovat v následujících kapitolách mé práce.

3.1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY LOGISTIKY

Jak uvádí např. Gros (1996, s. 9 - 10) logistika je relativně mladým oborem, který se neustále vyvíjí a proto nemá jednotnou a stálou definici. Jednou z možností jak výstižně definovat široký záběr termínu logistika je pomocí definice Evropské logistické asociace, která podle Preclíka (2006, s. 7) zní: *„Logistika představuje organizaci, plánování, řízení a realizaci toků zboží vývojem a nákupem počínaje, výrobou a distribucí podle objednávky finálního zákazníka konče tak, aby byly splněny požadavky trhu při minimálních nákladech a minimálních kapitálových výdajích.“* Jinou definici uvádí Štůsek (2007, s. 4): *„Logistika představuje strategické řízení funkčnosti, účinnosti a efektivity hmotného toku surovin, polotovarů a zboží s cílem dodržet časové, místní, kvalitativní a hodnotové parametry požadované zákazníkem. Jeho nedílnou součástí je informační tok propojující vzájemně logistické články od poskytování produktů zákazníkům (zboží, služby, přeprava, dodávky) až po získávání zdrojů.“*

Samotný termín „logistika“ má původ v Řečtině ve slovech „logistikon“ = důmysl, rozum nebo „logos“ = myšlenka, rozum, pravidlo, zákon, jak uvádí Štůsek (2007, s. 1).

Logistika je interdisciplinárním oborem, což znamená, že pracuje s poznatky celé řady jiných oborů. Pokud budu na logistiku nazírat prizmatem mé disertační práce, bude předmětem mého zájmu zejména přeprava, bez které se neobejde žádná výroba ať už se jedná o zásobování jednotlivých pracovišť ve vnitropodnikové logistice, dovážku zásob vstupního materiálu a polotovarů nebo expedici hotových či rozpracovaných výrobků buď k finálnímu zákazníkovi a nebo k dalším etapám výroby. Na logistiku lze též nahlížet jako na důležitý článek propojující výrobce potažmo prodejce se zákazníkem. A právě distribuce zboží je důležitým prvkem přidané hodnoty pro zákazníka. Všechny tyto popsání přepravní činnosti více či méně pracují s jasným plánem přepravní trasy. Vhodné naplánování trasy má logické dopady na úsporu přepravních nákladů, jak uvádí Jurová (2016, s 89). Termínem optimální logistická trasa ve své práci rozumím nejlepší trasu, kde je třeba uvést podle jakého kritéria je uvažována nejlepší trasa. V praxi bývá zpravidla nejlepší trasou myšlena ta nejkratší nebo

nejrychlejší, případně kombinace obou těchto kritérií. Pro dosažení těchto cílů budu ve své práci implementovat do logistiky především matematické modely, matematické algoritmy a výpočetní techniky doplněné o statistické metody.

Význam logistiky neustále narůstá v důsledku změn ve způsobu organizace výroby. Výroba komponentů, ze kterých se skládá jeden výrobek, dávno překračuje nejen areál výrobního závodu, ale často i státu. Producent finálního výrobku se specializuje pouze na úzký sortiment dílů a zbytek nakupuje v duchu strategie make or buy, jak uvádí Kavan (2006, s. 95). Tento trend je způsoben rostoucí technickou složitostí dnešních výrobků, které lze vyrábět často pouze s pomocí sofistikovaného výrobního zařízení mající často dvě vlastnosti vysokou produktivitu, která je na druhé straně vykoupena vysokými pořizovacími náklady. Dalším důvodem pro narůstající význam logistiky je převis nabídky nad poptávkou a informovaný zákazník, jak uvádí Rushton (s. 34 – 35, 2006). A proto k úspěchu dnes firmám nestačí dobře vyrábět, ale také umět prodávat a zajistit distribuční procesy k dokonalé spokojenosti zákazníka, ať už se jedná o koncového uživatele a nebo jiný podnik. Dnešní doba klade velký důraz na včasnou přepravu, zákazníci požadují dodávku objednaného produktu v co nejkratším čase. Stejně tak průmyslová výroba dneška vyznačující se vysokým stupněm kooperačních vazeb si vyžaduje dodávky např. komponentů ve správný čas, na správné místo v požadovaném množství, což je označováno jako strategie just in time (JIT), jak uvádí Jurová (2013, s. 210) a Kavan (2006, s. 108).

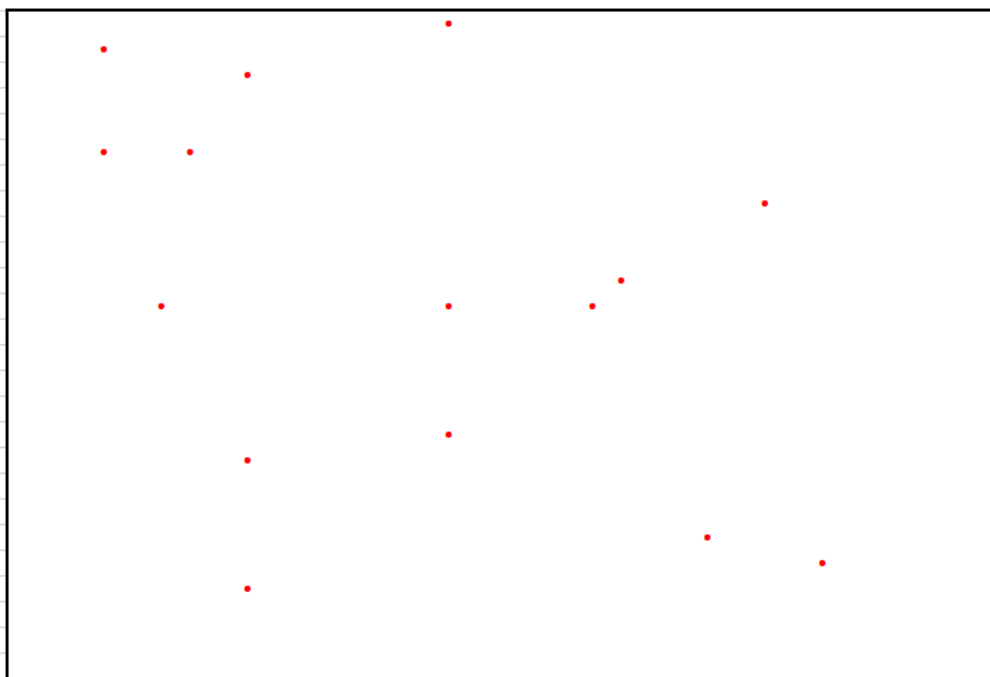
Dynamickému rozvoji odvětví logistiky nahrává rovněž raketový rozvoj informačních a telekomunikačních technologií, stejně tak jako rozvoj přepravní a manipulační techniky. Ať už se jedná o čtečky čárových kódů zprostředkovávajících tok informací a jejich integrace se systémy např. pro řízení a evidenci zásob. V oblasti manipulační techniky, kde je čím dál tím vyšší stupeň automatizace a digitalizace, je jednou z posledních novinek např. vychystávací vozík společnosti Jungheinrich jezdící sám za operátorem. Zařízení funguje pomocí navádění na ovladač, který nosí operátor v kapse, jak uvádí časopis Logistika (03/2018, s. 48). Jiným technickým monumentem je např. španělská automobilka společnosti Seat, kde se o manipulaci s díly stará 125 automatizovaných přepravních vozidel. Ty díky čárovým kódům na jednotlivých dílech přesně vědí kam daný díl či rozpracovaný výrobek převést. Kolizím mezi vozidly zamezují laserová čidla umožňující „vidění“ 360° okolo sebe. Tito roboti přepraví denně 23 800 ks dílů a za rok ujedou dohromady vzdálenost 436 000 km tj. větší vzdálenost, než ze Země na Měsíc. Tento způsob přepravy zkrátí dobu výroby až o 25 % jak uvádí časopis Logistika (01-02/2018, s. 35).

O logistice a jejím významu, oblastech, specifikách, používaných metodách, přístupech i proměnách v čase by bylo možné napsat mnohé. Tuto podkapitolu zakončím výstižným citátem Dr. Zdeňka Pelce – generálního ředitele GZ Digital Media, a. s., držitele ocenění Manažer roku 2000 v ČR: „*Logistika je někdy složitější, než samotná výroba.*“

3.2 ÚVOD DO PROBLEMATIKY MATEMATICKÝCH MODELŮ

V podnikové praxi je třeba často řešit problém jak naplánovat nejkratší trasu, pokud je naším úkolem vyjet z výchozího bodu navštívit množinu definovaných bodů, přičemž každý je třeba navštívit právě jednou a vrátit se zpět do výchozího bodu (eventuálně může jít o jiný typ optimalizace, kdy např. vstupem nejsou vzájemné vzdálenosti mezi body, nýbrž dojezdové časy mezi body a nehledáme nejkratší, ale nejrychlejší trasu). Pro označení tohoto matematického - kombinatorického problému se vžil termín úloha obchodního cestujícího. Cook (2012, s. 35 – 36) uvádí, že vznik i akcent na nalezení efektivního řešení tohoto problému byl motivován reálnou potřebou obchodníků cestujících ve Spojených státech amerických od města k městu a nabízejících své zboží, odtud dostala úloha svůj název (v americkém originálu traveling salesman problém nebo-li TSP).

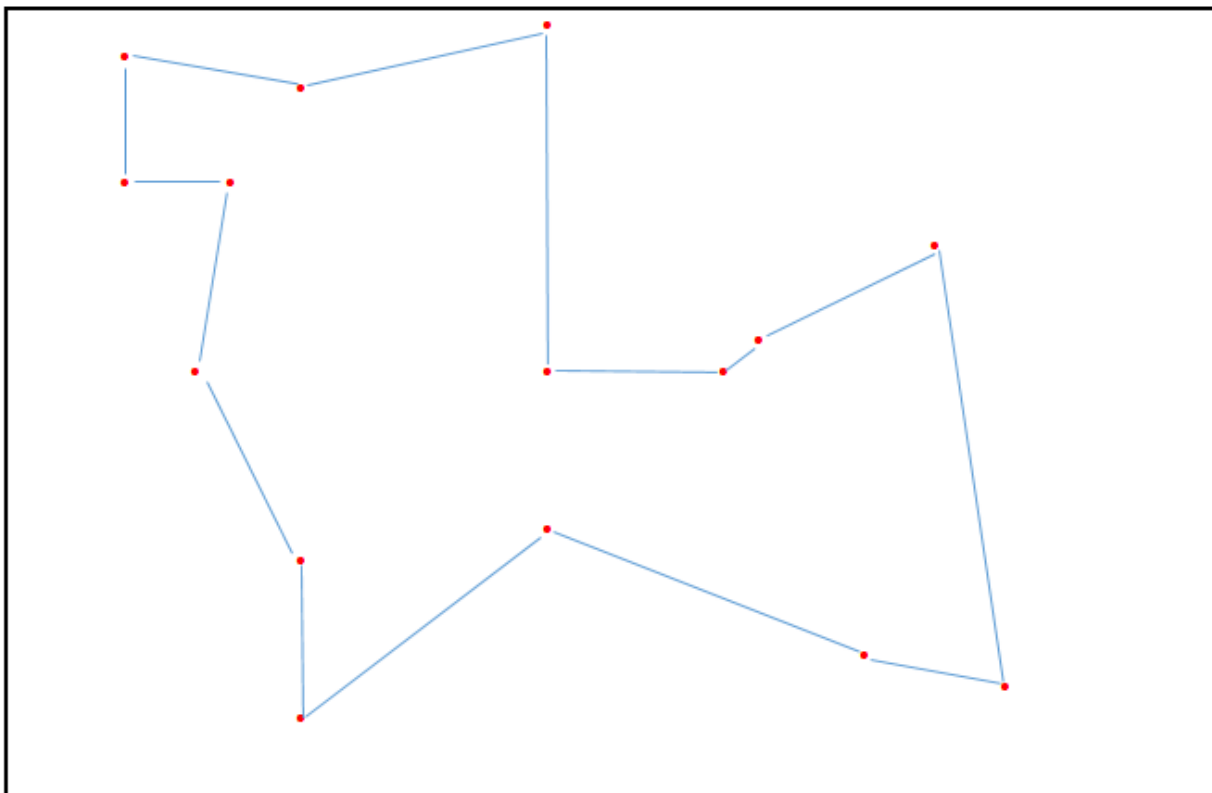
Obrázek 1: Příklad patnácti bodů jako zadání úlohy obchodního cestujícího



Zdroj: vlastní

Body na obrázku 1 mohou představovat např. množinu měst, která je třeba navštívit, kde z jednoho města obchodní cestující vyrazí a také se do něho vrátí. Otázkou je jaké stanovit pořadí měst v plánu trasy tak, aby trasa byla nejkratší. Ukázkou výsledku tohoto zadání ilustruje obrázek 2.

Obrázek 2: Příklad nejkratší trasy mezi patnácti body



Zdroj: vlastní

Ačkoliv se jedná o velice jednoduše zadaný úkol (najít nejkratší spojnicí množiny bodů tak, aby obchodní cestující navštívil každý bod právě jednou a vrátil se zpět do bodu, ze kterého vyjel), jeho řešení je dodnes limitováno počtem zadaných bodů, jak uvádí Jablonský (2007, s. 22 – 23). Jak uvádí Tesařík (2013, s. 8) roku 1900 se v Paříži konal II. mezinárodní matematický kongres a mimo jiných na něm vystoupil německý profesor z göttingenské univerzity David Gilbert s příspěvkem týkajícím se 23 vybraných důležitých matematických problémů, jejichž řešení nebylo známo. O sto let později r. 2000 bylo na univerzitě College de France v Paříži konstatováno, že z původních dvaceti tří problémů byla většina z nich vyřešena nebo vyvrácena, ale 7 problémů stále čeká na řešení. Dále bylo prohlášeno, že kdo některý z těchto sedmi problémů vyřeší obdrží odměnu milion dolarů. Prostředky na odměny poskytne Clayův matematický ústav univerzity Cambridge v USA. Mecenášem a zakladatelem tohoto ústavu zaměřeného na propagaci a rozvoj matematického výzkumu je

majitel investičních fondů Landon Clay, jak uvádí <<<https://www.claymath.org/millennium-problems>>>, [cit. 6. 6. 2017]. Zajímavostí je, že jeden z těchto sedmi problémů byl v nedávné době prohlášen za vyřešený. Jednalo se o dokázání Poincareho domněnky v oblasti topologie (obor geometrie zabývající se vlastnostmi povrchů a obecných útvarů). Jak uvádí Crilly (2010, s. 94-95) a <<<https://www.sciencemag.cz/perelman-ma-50-let-genius-ktery-vyresil-poincareho-domnenku/>>>, [cit. 1. 4. 2017], přesvědčivý důkaz podal r. 2002 Grigorij Perelman ze Steklovova matematického institutu v Petrohradě. Trvalo několik let, než byl tento důkaz prohlášen světovou matematickou komunitou za nezvratný. Po té byl vydán souhlas s vyplacením odměny milion dolarů, ovšem geniální matematik peníze odmítl s tím, že je nepotřebuje.

Nejdůležitější informací je fakt, že úloha obchodního cestujícího je stále jedním ze šesti nevyřešených matematických problémů považovaných za problémy tisíciletí. Jak by mělo vypadat řešení tohoto problému? Jak uvádí <<<https://www.businessinsider.com/p-vs-np-millennium-prize-problems-2014-9>>>, [cit. 1. 4. 2017], hledá se „dobrý“ algoritmus, který dokáže určit za všech okolností nejkratší cestu pro sebe vyšší počet bodů. Jaký je rozdíl mezi „špatným“ a „dobrým“ algoritmem? Určujícím kritériem je spotřeba času v závislosti na počtu míst, pro která bude trasa hledána. Přitom se časová spotřeba uvažuje přímo úměrná počtu kroků, kterými algoritmus dojde k optimálnímu řešení tj. nejkratší trase, jak uvádí Applegate (2007, s. 49 - 50). U „dobrého“ algoritmu je počet kroků, resp. časová spotřeba (T) závislá na počtu míst (n) vyjádřena lineární nebo mocninou funkcí. Potom hovoříme o polynomiálním čase a polynomiálních algoritmech jako dobrých viz vzorec 1 a 2.

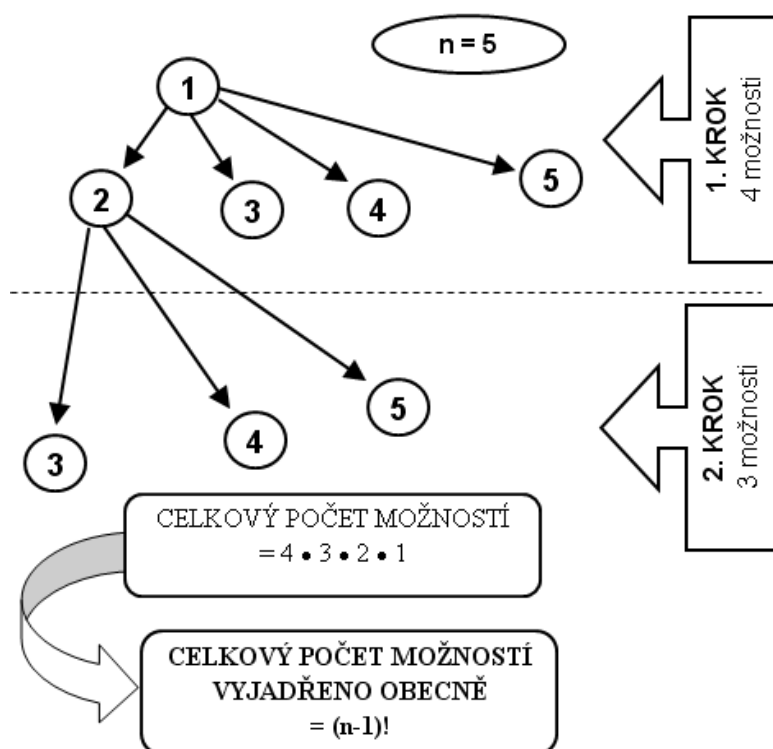
$$T = n^k; kde k \in N; \tag{1}$$

$$T = a \cdot n^{k_1} + b \cdot n^{k_2} + c \cdot n^{k_3} \dots \tag{2}$$

$kde k_1, k_2, k_3 \dots \in N$

Příkladem „špatného“ algoritmu je např. řešení spočívající ve vyzkoušení všech kombinací (resp. v tomto případě permutací) a výběru té nejlepší tj. té dávající nejkratší trasu, tento přístup se označuje termínem enumerativní metoda, jak uvádí Zelinka (2009, s. 38). Pokud má cestující navštívit 5 míst a stojí v místě číslo 1 má při volbě prvního kroku na výběr z devíti možností. Vybere si např. místo číslo 2, v dalším kroku se výběr o jedno místo sníží o místo, které v předchozím kroku vybral a to se stále opakuje, jak uvádí Kožíšek (2008, s. 206). Příklad situace ilustruje obrázek 3.

Obrázek 3: Celkový počet možností (permutací)



Zdroj: Kožíšek (2008, s. 206) - vlastní zpracování

Pokud se bude řešení hledat pomocí prozkoumání všech kombinací, ze kterých se vybere ta nejlepší, časová spotřeba bude faktoriálně růst v závislosti na počtu míst, jak popisuje vzorec 3. V této části se snažím popsat hlavní podstatu problému, v dalších částech blíže rozvedu další modifikace úlohy, na tomto místě pouze předesílám, že vzorec 3 může existovat ještě v jiných modifikacích, ale klíčová podstata tj. funkce rostoucí faktoriálně zůstává zachována.

$$T = (n-1)! \quad (3)$$

Podobně „špatným“ algoritmem je pokud dojde ke změně z mocninné resp. polynomiální závislosti na exponenciální závislost, kterou znázorňuje vzorec 4.

$$T = k^n ; \text{kde } k \in N \quad (4)$$

Rozdíl mezi „dobrým“ (polynomiálním) a „špatným“ (jiným než polynomiálním) algoritmem je dobře patrný z hodnot v tabulce 1, kde je hodnota koeficientu $k = 3$. Na její hodnotě nezáleží nejde o výsledek jde o rychlost růstu. Tempo růstu implikuje časovou náročnost takového rozsahu, že pro jisté vysoké hodnoty počtů míst n se problém stává neřešitelným.

Tab. 1: Příklady časové náročnosti podle funkční závislosti algoritmů na počtu míst (n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T = n^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000
$T = 3^n$	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049
$T = (n-1)!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880

Zdroj: Cook (2012, s. 21) - vlastní zpracování

Výše uvedený problém tisíciletí spočívá v nalezení „dokonalého“ algoritmu tj. algoritmu, kde počet kroků roste v závislosti na počtu bodů maximálně polynomiální funkcí. Jak uvádí Crilly (2010, s. 187) a Zelinka (2009, s. 143) takový algoritmus by spadl do třídy matematiky označované jako P (polynomiální) zatímco úloha obchodního cestujícího spadá do třídy NP (nedeterministicky polynomiální) a velkou otázkou je zda jsou tyto třídy totožné či nikoliv. Zmiňovaná odměna milion amerických dolarů se vztahuje i na případ předložení důkazu, že tyto třídy nejsou totožné tj., že dokonalý algoritmus neexistuje. S touto myšlenkou přišel jako první v roce 1956 Merrill Flood, jak uvádí Cook (2012, s. 20). Ovšem dodnes pro ni nebyl předložen adekvátní matematický důkaz.

I když problém nebyl v plné šíři dodnes vyřešen, byly formulovány některé zákonitosti. Např. Merrill Flood v roce 1956 dokázal, že optimální trasa nesmí sama sebe křížit, jak uvádí Fletcher (1968, s. 74). Nebo zákonitost, že pokud bychom našli řešení některého NP problému v polynomiálním čase (např. problém obchodního cestujícího), znamenalo by to, že jde vyřešit v polynomiálním čase každý NP problém a platilo by $NP = P$, jak uvádí Zelinka (2009 s. 144).

Applegate (2007) uvádí, že v roce 1993 se podařilo vyřešit problém obchodního cestujícího o rozsahu 4461 míst.

3.2.1 MODIFIKACE PROBLÉMU

Problém obchodního cestujícího existuje v celé řadě různých modifikací. Když si představíme např. deset bodů reprezentujících centrální sklad a devět míst, na která je třeba doručit zásilku a vrátit se zpět do centrálního skladu zadání tohoto problému může mít podobu matice vzájemných vzdáleností C s nulami na diagonále viz vztah 5.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots & c_{1\ n-1} & c_{1\ n} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2\ n-1} & c_{2\ n} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & \dots & c_{3\ n-1} & c_{3\ n} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & \dots & \dots & c_{4\ n} \\ \dots & \dots & \dots & c_{ij} & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & \dots & c_{m\ n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

kde $i = 1, 2 \dots n, j = 1, 2 \dots m, i \neq j$.

Kde vzdálenost mezi body jedna a dva reprezentuje buňka c_{12} zatímco vzdálenost z bodu dva do bodu jedna reprezentuje buňka c_{21} . Z toho plyne, že tato matice může být symetrická v případě, že vzdálenost z libovolného bodu i do bodu j je stejná jako vzdálenost z bodu j do bodu i , u uvedeného příkladu by se délka c_{12} rovnala délce c_{21} . A pokud tyto rovnosti neplatí matice je asymetrická. V praxi se lze setkat s oběma typy úloh, asymetrické matice vzájemných vzdáleností jsou důsledkem jednosměrných cest, objížděk, omezení v silničním provozu apod.

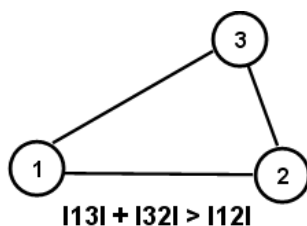
Symetrie matice vzájemných vzdáleností má další podstatné dopady. Jestliže je matice vzájemných vzdáleností asymetrická platí bezesbýtku výše uvedený obrázek 3 a vztah 3, týkající se počtu všech možností (permutací) jak trasu sestavit. V případě symetrické matice je tento vztah mírně modifikován jak to ukazuje vztah 6.

$$T = f(k) = \frac{(n-1)!}{2} \quad (6)$$

Kde čas T je lineární funkcí f počtu kroků algoritmu k , tj. prohledání všech možností, kterých je faktoriál z čísla o jednu nižší než je počet zadaných míst (resp. bodů) n , ovšem u symetrické matice vzájemných vzdáleností ještě vydělený dvěma. Jedná se o důsledek situace, že nejkratší trasa může mít vždy dvě možnosti a sice trasa samotná a tatáž trasa (totéž pořadí bodů), ale projatá v opačném směru, tím se i počet možností, jak prozkoumat všechny trasy redukuje na poloviční počet, jak uvádí Fiala (2010, s. 55).

Kromě toho, že se vzdálenosti mezi body mohou lišit podle směru jízdy, úloha má v některých aspektech jiné vlastnosti, jestliže pro body neplatí trojúhelníková nerovnost. Termín trojúhelníková nerovnost vysvětluje obr. 4.

Obrázek 4: Trojúhelníková nerovnost



Zdroj: vlastní

Obrázek 4 ukazuje tři body v rovině, tvořící trojúhelník, kde jistě platí, že součet dvou stran je větší než třetí strana v tomto trojúhelníku jinými slovy jak uvádí Zelinka (2009, s. 505) jedná se o euklidovské vzdálenosti. Ne vždy musí mít zadání úlohy podobu konkrétních bodů zakreslených v rovině. Při více abstraktním pohledu na situaci jde vlastně o množinu uzlů (představujících body resp. města) propojených množinou hran (představujících cesty) každá hrana je ohodnocena, kde hodnota hrany zpravidla znamená délku cesty (přičemž se v systému značení rozlišuje, zda hrana vede např. z uzlu 1 do uzlu 2 a nebo v opačném směru). Úloha poté řeší návštěvu všech bodů, každého právě jednou, návrat do výchozího bodu při minimalizaci součtu hodnot hran, po kterých se obchodní cestující pohybuje. Ovšem hodnoty hran nemusí symbolizovat pouze délky cest. Mohou znamenat časy přejezdů po jednotlivých hranách, výši spotřeby pohonných hmot při přejezdu mezi příslušnými uzly apod., obdržené výsledky jsou poté nejrychlejší trasa, nejúspornější trasa apod.

Navíc s úlohou obchodního cestujícího se lze setkat v celé řadě jiných oblastí než je pouze logistika a plánování trasy (úloha obchodního cestujícího se vyskytuje i v rozličných oblastech, kde bychom ji nečekali – toto téma podrobněji rozvedu později). Uvažujme např. situaci, kdy výrobní zařízení vyrábí několik druhů výrobků a otázkou je jak naplánovat pořadí výroby těchto výrobků (sekvenci) na tomto zařízení. Výrobky, které je třeba vyrobit reprezentují uzly a hrany představují časy potřebné k přenastavení zařízení na jiný druh výrobku. Hledá se takové pořadí v plánu výroby, aby byl naplněn zadaný výrobní program a součet všech neproduktivních časů na přenastavení zařízení byl minimální. Eventuálně může být dán požadavek, aby se zařízení nastavilo do původní pozice, v jaké bylo na začátku potom máme zcela analogickou situaci s úlohou obchodního cestujícího. Pokud tento požadavek chybí, dostáváme problém podobný, ale jednodušší, jak uvádí Zelinka (2009, s. 505) jedná se o problém hledání hamiltonovské cesty, pro který byl objeven polynomiální algoritmus. Hamiltonovská cesta je tedy situace, kdy okruh není uzavřen, zatímco řešení úlohy obchodního cestujícího představuje hledání nejkratšího okruhu též nazývaného hamiltonský okruh podle irského matematika W. R. Hamiltona, který se podobným problémem zabýval již v 19. století a rovněž se zasloužil o popularizaci tohoto problému, jak uvádí Fábry (2010, s. 56 - 57).

Tak či onak zadáním úlohy je vždy matice C uvedena ve vztahu 5. Podle toho jaký je kontext úlohy je dán význam hodnot v této matici (vzdálenosti, dojezdové časy, časy nastavení zařízení atd.) Podle toho o jaké hodnoty se jedná mohou být dány některé vlastnosti

této matice C (symetrická, asymetrická, body lze zakreslit do roviny, protože existuje trojúhelníková nerovnost atd.). Vlastnosti této matice mají některé zajímavé implikace. V další části práce pokud nebude uvedeno, jinak mám na mysli vždy problém bodů v rovině, kde platí trojúhelníková nerovnost a vzdálenost z bodu i do bodu j je stejná jako v opačném směru.

Cook (2012, s. 82) uvádí, že pokud je matice C vstupních hodnot symetrická a pro hodnoty platí trojúhelníková nerovnost potom i ta nejhorší možné řešení (optimální pořadí bodů) nalezené pomocí metody „nejbližšího souseda“ bude maximálně k -krát delší než řešení optimální (zpravidla nejkratší trasa), kde hodnota k závisí na počtu bodů n a je dána vztahem 7.

$$k = 1 + \frac{1}{2} \log_2 n \quad ; \quad k \text{ del } \log_2 n = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \quad (7)$$

Metoda „nejbližšího souseda“ patří k nejjednodušším způsobům, jak řešit problém obchodního cestujícího. Jak název napovídá, z výchozího bodu se jede do bodu, který je nejbližší, po navštívení tohoto bodu se opět jede do nejbližšího (dosud nenavštíveného bodu) takto se postupuje tak dlouho, až jsou body navštíveny všechny. Tato metoda zpravidla optimální řešení nenalezne, protože pracuje s výhledem jediného tahu dopředu – propojením nejkratších cest se zpravidla nedocílí minimálního součtu, obzvlášť když při konstrukci trasy musí být počítáno s návratem do výchozího bodu.

Jiné modifikace úlohy obchodního cestujícího vznikají specifikací problému o další omezující podmínky. Mezi nejtypičtější případy patří situace, kdy jsou zadána časová okna, ve kterých se musí obchodní cestující do daných bodů dostavit, jak uvádí Fiala (2010, s. 62). Čili při plánování pořadí navštěvovaných bodů je třeba dbát na fakt, že např. bod 7 může být navštíven pouze v době 6 až 14 hod., což implikuje např. to, že tento bod bude upřednostněn, aby byla tato podmínka splněna a poté bude eventuálně nutné vrátit se do dalších bodů a opět respektovat jejich časová okna. Vzniklá trasa bude pravděpodobně delší za cenu dodržení těchto omezujících podmínek. Jak uvádí <<<http://www.flinders.edu.au>>>, [cit. 9. 5. 2017] jinou častou omezující podmínkou je omezená kapacita přepravního prostředku. Uvažujme situaci, kdy při plánování trasy např. pro 20 míst, je třeba navíc počítat s problémem, že náklad pro těchto 20 míst se nevejde do přepravního prostředku. Poté se celý problém modifikuje na více okruhový problém, kde se rovněž plánují trasy, ale navíc je třeba rozhodnout, které body budou tvořit jakou trasu s tím, že požadujeme, aby součet vzniklých tras byl minimální co do délky resp. doby. Tento problém je možné řešit například maďarskou metodou, jak uvádí Gros (2003, s. 113) Dala by se vyjmenovat celá řada dalších modifikací

tohoto problému např. požadavek, aby při plánování pořadí v návštěvě bodů byly dříve navštíveny ty body, na kterých proběhne větší vykládka. Smysl tohoto uvažování spočívá v tom, že zbývající body budou navštěvovány s nižší zátěží přepravního prostředku opět i za cenu toho, že tato trasa bude delší, (problém lze zadat tak, že půjde o minimalizaci nikoliv km, ale tunokilometrů).

3.3 SOUČASNÉ MOŽNOSTI ŘEŠENÍ PROBLÉMU

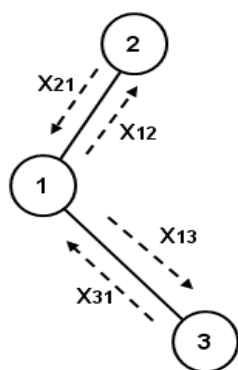
3.3.1 EXAKTNÍ METODY

Výše popisují, že pro problém obchodního cestujícího neexistuje zatím algoritmus, který je matematiky definován jako „dobrý“ v této podkapitole se snažím vysvětlit jaké existují možnosti pro řešení tohoto problému, resp. některých jeho modifikovaných podob. Nejjednodušší způsob jak tento problém vyřešit je vyzkoušet všechny možnosti a vybrat tu nejvhodnější trasu (uvažujme nejkratší vzdálenost). Pokud se jedná o symetrickou matici vzájemných vzdáleností budou tyto trasy vždy dvě - jelikož druhá trasa je tou první, ale v opačném směru. Problematičnost tohoto řešení spočívá v tom, že množství (permutací) je i při nízkém počtu míst obrovský a velmi prudce – faktoriálně roste, viz výše uvedený vztah 6, pokud do něho dosadíme pro problém s deseti body, obdržíme 181 440 množství a při problému s patnácti body dokonce už 43 589 145 600 jak naplánovat trasu, ze kterých je třeba vybrat tu nejkratší.

O vysoké jednoduchosti, ale také značných slabínách metody nejbližšího souseda spočívající v návštěvě jednotlivých bodů tím způsobem, aby cestující navštívil vždy nejbližší bod už bylo hovořeno v úvodní kapitole. Jaký matematický aparát by bylo možné na tento problém nasadit popisuje následující oddíl.

V průběhu let byl vymyšlen matematický model schopný řešit tento problém na bázi speciální modifikace lineárního programování. Jde o hledání extrému v tomto případě minima funkce představující délku výsledné trasy. Při existenci řady omezujících podmínek, které musí být dodrženy, např. to, že každé místo musí být navštíveno právě jednou, výsledná trasa musí tvořit souvislý okruh atd. Tyto omezující podmínky mají podobu nerovnic a rovnic.

Obrázek 5: Systém neznámých v matematickém modelu



Zdroj: Wagner (1969, s. 453) – vlastní zpracování

Jak popisuje obr. 5 východiskem je opět teorie grafů, kde každá hrana (cesta mezi jednotlivými body, resp. městy) představuje proměnnou x_{ij} , která může nabývat pouze hodnot 0 a 1, kde hodnota 0 signalizuje, že po této hraně (cestě) optimální (nejkratší trasa) nevede a hodnota 1 signalizuje, že po této hraně (cestě) optimální (nejkratší trasa) vede. Pokud např. optimální trasa vede z bodu 1 do bodu 2, znamená to, že hodnota proměnné x_{12} nabyde hodnoty 1. Uvádím vztahy pro tento matematický model podle Jablonského (2007, s. 23 – 24) a Wagnera (1969, s. 455 – 456) a pro lepší názornost budu alespoň stručně demonstrovat dosazení do těchto vztahů pro případ s deseti body.

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} = \min. \quad (8)$$

$$F = c_{12} \cdot x_{12} + c_{13} \cdot x_{13} + \dots + c_{110} \cdot x_{110} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{23} \cdot x_{23} + \dots \quad (9)$$

$$\dots + c_{109} \cdot x_{109} = \min. \quad (9)$$

Vztahy 8 a 9 popisují účelovou funkci vyjadřující délku výsledné trasy. Pokud hodnota proměnné nabývá hodnoty 1 příslušná hodnota této hrany se přičte, v opačném případě se délka hrany násobí nulou, proto vznikne součet délek pouze těch cest tvořících trasu. Kde hodnoty hran resp. délky cest mezi jednotlivými body jsou členy c_{12} až c_{109} z matice vzájemných vzdáleností C.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{1_{10}} = 1 \quad (11)$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{2_{10}} = 1$$

.....

$$x_{10_1} + x_{10_2} + x_{10_3} + x_{10_4} + x_{10_5} + x_{10_6} + x_{10_7} + x_{10_8} + x_{10_9} = 1$$

Vztah 10 vyjadřuje podmínku říkající, že cestující smí z každého uzlu právě jednou vyjet, vztah 11 demonstruje dosazení (pro situaci s deseti body).

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} + x_{10_1} = 1 \quad (13)$$

.....

$$x_{1_10} + x_{2_10} + x_{3_10} + x_{4_10} + x_{5_10} + x_{6_10} + x_{7_10} + x_{8_10} + x_{9_10} = 1$$

Vztah 12 vyjadřuje podmínku říkající, že cestující smí do každého bodu právě jednou přijet, vztah 13 demonstruje dosazení.

$$\begin{aligned} \delta_i - \delta_j + n \cdot x_{ij} &\leq n - 1, \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (14)$$

Platnost vztahu 14 zabezpečuje, že trasa bude jedním souvislým okruhem, kde n je počet míst. Pro zabezpečení této podmínky se zavádí, ještě další pomocné proměnné δ_i a δ_j resp. pro zjednodušení způsob zapisování u_i a u_j viz vztah 15 popisující vlastní dosazení. Tyto pomocné proměnné jsou celočíselné.

$$u_2 - u_3 + 10 \cdot x_{23} \leq 9 \quad (15)$$

$$u_3 - u_2 + 10 \cdot x_{32} \leq 9$$

.....

$$u_9 - u_{10} + 10 \cdot x_{9_10} \leq 9$$

$$\begin{aligned} &i \neq j \\ \text{kde: } &x_{ij} \in \{0; 1\} \\ &\delta_i \text{ a } \delta_j \in \text{ celá čísla} \end{aligned} \quad (16)$$

Při použití tohoto matematického zápisu vzniká netriviální problém a to hledat hodnoty proměnných tak, aby účelová funkce vyjadřující délku výsledné trasy byla minimální (hledá se extrém této funkce F) a přitom musí být dodrženy veškeré další podmínky ze vztahů 8 až 16. Celý matematický zápis situace obsahuje pro situaci s deseti body 92 rovnic a nerovnic, ve kterých vystupuje 99 převážně bivalentních (hodnota 0 nebo 1) neznámých.

Nejdostupnější SW schopný řešit tento problém je dokonce i MS Excel, u kterého je možné přidání nástroje „řešitel“ (a to i bez instalačního CD.), jak uvádí Kožíšek (2014, s. 98 - 99) a Plevný (2005, s. 86 – 87). Tento nástroj dokáže nalézt právě vázané extrémy hledané

v problému lineárního programování včetně řady jeho modifikací jako je nelineární, celočíselné i právě bivalentní lineární programování. Hledání hodnot proměnných sloužících k nalezení řešení úlohy obchodního cestujícího pro 10 bodů popisuje obrázek 6.

Obrázek 6: Úloha obchodního cestujícího – matematický model řešený v MS Excelu

**a) NÁSTROJE
b) ŘEŠITEL**

BUŇKA OBSAHUJÍCÍ ÚČELOVOU FUNKCI (OBECNÁ DÉLKA TRASY)

TRASA O MINIMÁLNÍ VZDÁLENOSTI

HODNOTY PROMĚNNÝCH 0 NEBO 1

PODMÍNKY ZABEZPEČUJÍ NÁVŠTĚVU MÍSTA PŘÁVĚ JEDNOU

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

PODMÍNKA ZABEZPEČUJÍCÍ, ŽE TRASA BUDE SOUVISLÝM OKRUHEM

$$\delta_i - \delta_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Zdroj: vlastní zpracování ze zdroje: Jablonský (2007, s. 113-114)

Nástroj „řešitel“ v programu MS Excel dokáže řešit tyto problémy s maximálním počtem 200 proměnných jak uvádí Jablonský (2007, s. 109), z toho plyne (dá se určit), že v programu

MS Excel lze tímto způsobem vyřešit maximálně problém o velikosti 14 bodů (to se týká i novějších verzí MS Excel). Problém o velikosti 14 bodů potřebuje k řešení model obsahující 184 omezujících podmínek, ve kterých je počet proměnných včetně těch pomocných celkem 195.

Obrázek 7: Ukázka výsledkové zprávy z nástroje „řešitel“

Nastavovaná buňka (Min)

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
\$H\$55	Účelová funkce (dráha) X 1-5	0	210

Měněné buňky

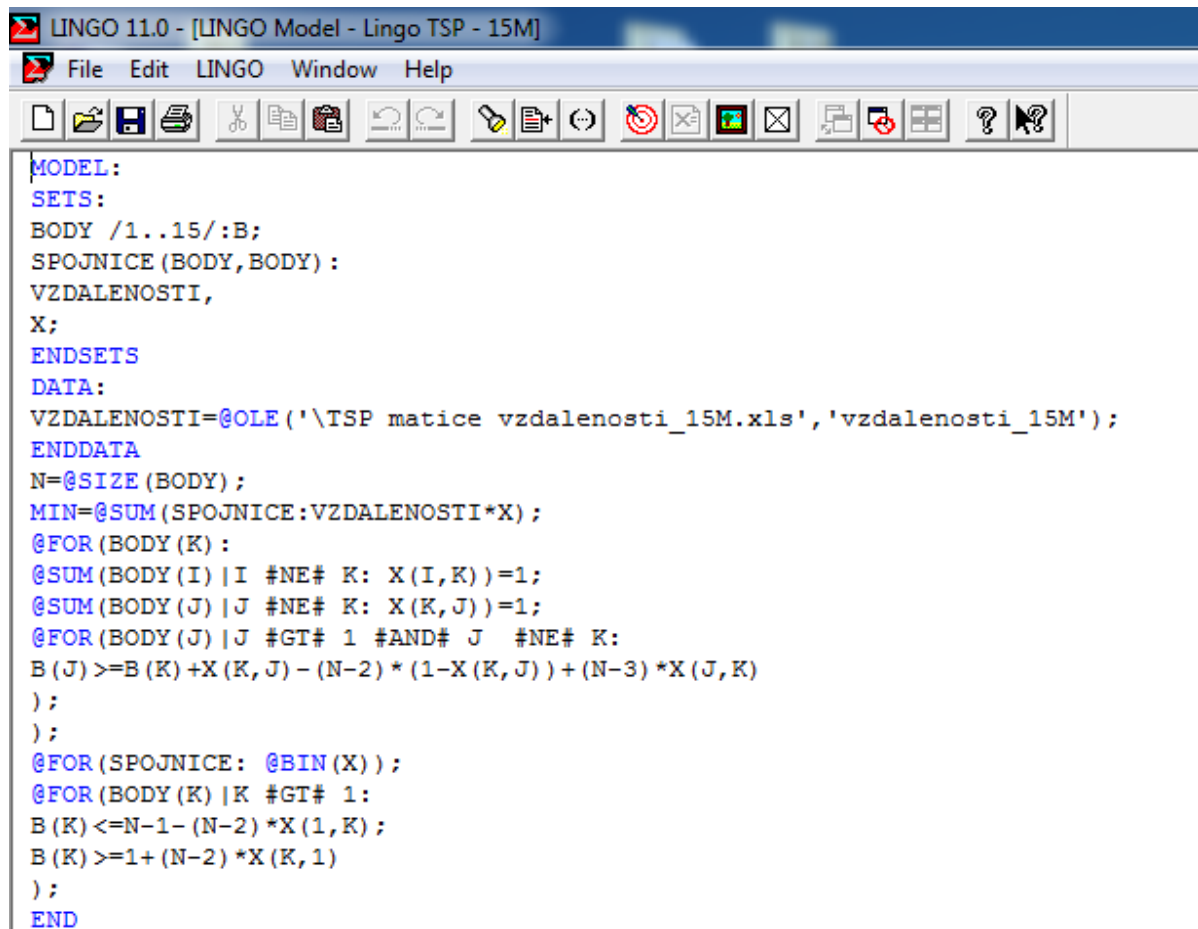
Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
\$E\$59	Výsledek X 1-2	0	1
\$F\$59	Výsledek X 1-3	0	0
\$G\$59	Výsledek X 1-4	0	0
\$H\$59	Výsledek X 1-5	0	0
\$I\$59	Výsledek X 1-6	0	0
\$J\$59	Výsledek X 1-7	0	0
\$K\$59	Výsledek X 1-8	0	0
\$L\$59	Výsledek X 1-9	0	0
\$M\$59	Výsledek X 1-10	0	0
\$N\$59	Výsledek X 2-1	0	0
\$O\$59	Výsledek X 2-3	0	0
\$P\$59	Výsledek X 2-4	0	1
\$Q\$59	Výsledek X 2-5	0	0

Zdroj: vlastní

V buňkách představujících hodnoty proměnných i ve výsledkové zprávě jsou výsledkem kombinace hodnot 0 a 1.

Pro řešení tohoto typu problému s větším rozsahem (více bodů) je možné nalézt hodnoty proměnných pomocí specializovaných optimalizačních programů jako je např. program LINDO (*Linear INteractive and Discrete Optimizer*), který dokáže řešit problém hledání vázaného extrému čítající desítky tisíc proměnných a omezujících podmínek, jak uvádí Kořenář (2003, s. 181). Velmi podobný program se nazývá LINGO, který používám ve své práci. Ukázku práce s programem LINGO a jeho použití při řešení problému obchodního cestujícího ilustruje obr. 8.

Obrázek 8: Ukázka (pro 15 bodů) naprogramování problému v prostředí SW LINGO



```
MODEL:
SETS:
BODY /1..15/:B;
SPOJNICE (BODY,BODY) :
VZDALENOSTI,
X;
ENDSETS
DATA:
VZDALENOSTI=@OLE('\TSP matice vzdalenosti_15M.xls','vzdalenosti_15M');
ENDDATA
N=@SIZE (BODY) ;
MIN=@SUM (SPOJNICE:VZDALENOSTI*X) ;
@FOR (BODY (K) :
@SUM (BODY (I) | I #NE# K: X (I, K) )=1;
@SUM (BODY (J) | J #NE# K: X (K, J) )=1;
@FOR (BODY (J) | J #GT# 1 #AND# J #NE# K:
B (J) >=B (K) +X (K, J) - (N-2) * (1-X (K, J) ) + (N-3) *X (J, K)
);
);
@FOR (SPOJNICE: @BIN (X) );
@FOR (BODY (K) |K #GT# 1:
B (K) <=N-1- (N-2) *X (1, K) ;
B (K) >=1+ (N-2) *X (K, 1)
);
END
```

Zdroj: vlastní zpracování

Bylo by možné uvést celou řadu dalších metod a přístupů jako je např. metoda větví a mezí, jak uvádí Kožíšek (2014, s. 2003) či Wagner (1969, s. 471) nebo metoda výhodnostních čísel, jak uvádí Kučera (2009, s. 20) či Vogelovu aproximační metodu jak uvádí Plevný (2005, s. 140).

Poznámka: Pořadí bodů tvořících optimální trasu neovlivní používané jednotky, viz příloha číslo 1, proto v celé práci jednotky neuvádím.

3.3.2 HEURISTICKÉ METODY

Absenci opravdu efektivního algoritmu supluje vysoký výkon výpočetní techniky, která dokáže nalézt hodnoty proměnných čili řešení problému. Ovšem prudce rostoucí složitost a výpočetní náročnost problému v závislosti na růstu rozsahu úlohy (počtu míst) vedla ke vzniku metod, které dávají sice méně přesné výsledky, ale jejich dosažení je jednodušší. Obecně problémy, kde je obtížné nebo nemožné nalézt řešení exaktním způsobem lze řešit

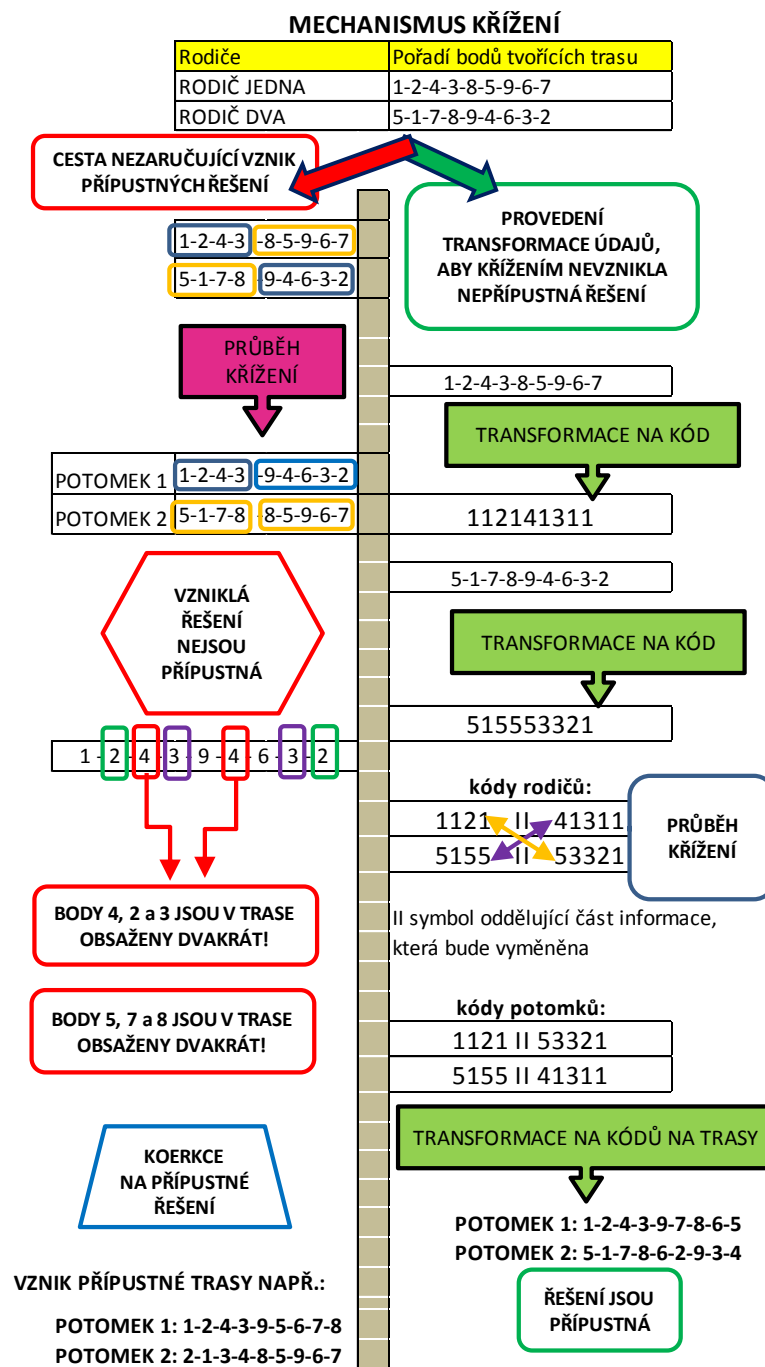
způsobem heuristickým. Jak uvádí zdroj: <<https://www.researchgate.net/publication/228573156_An_introduction_to_heuristic_algorithms>> [cit. 3. 4. 2018] a Voženílek (2011, s. 92 – 93) tento termín představuje hledání řešení na bázi náhodných pokusů, kde opět výpočetní technika dokáže vygenerovat velmi rychle velké počty náhodně získaných řešení. S rostoucím počtem těchto řešení se zvyšuje pravděpodobnost nalezení optimálního řešení a nebo alespoň takového řešení, které se od optimálního řešení neliší příliš. Tento postup se provádí v optimalizaci všeho druhu, u hledání vázaných extrémů i u nelineárních soustav rovnic s vysokými počty neznámých, jak uvádí Zelinka (2009, s. 36). V úloze obchodního cestujícího se jedná o náhodné generování přípustných tras tj. tras splňujících všechny podmínky a snahou je nalézt tímto způsobem tu trasu, která je nejkratší eventuálně nějaké podobné pořadí míst, čímž dostaneme trasu, která je jen nepatrně delší než nejkratší existující trasa. V praxi často dostačuje nalezení vhodné trasy i když se nejedná o to úplně nejlepší pořadí míst, ale na druhou stranu je toto suboptimální řešení nalezeno jednodušším a rychlejším způsobem, jak uvádí <<<https://web.tuke.sk/fei-cit/butka/hop/htsp.pdf>>> [cit. 3. 4. 2018] a Reinelt (1994, s.176).

Specifickou heuristickou skupinou metod jsou genetické algoritmy. Řešíme problém jak nalézt optimální řešení, aniž bychom museli projít množinu všech řešení a optimální řešení z této množiny vybrat. Genetické algoritmy se inspiřují přírodou, konkrétně evolučním výběrem, lepších jedinců, ze kterých se šlechtí noví a lepší jedinci jak uvádí Scholz (2016, s. 69). V tomto případě jsou jedinci přípustná řešení a jejich kvalita, na základě které jsou posuzovány a vybírány, je hodnota účelové funkce. Řízenou selekcí se tedy vybírají lepší řešení, ze kterých se šlechtí nová a ještě lepší řešení, čímž dochází buď přímo k nalezení toho nejlepšího existujícího řešení – optima (nejkratší trasy) nebo k výraznému přiblížení se nejlepšímu řešení – suboptima (trasa je dostatečně krátká i když ještě zbývá prostor pro zkrácení, ten je však už nepatrný). Existuje celá řada technik genetických algoritmů a jejich modifikací pro řešení nejen pro okružní dopravní problém, ale jejich uplatnění je široké v nejrůznějších optimalizačních problémech. Genetické algoritmy používají pro vytváření nových řešení dva hlavní nástroje, kterými je křížení a mutace. Průběh křížení popisuje obrázek 9. Podstatou křížení je spojení dvou kombinací jak vést trasu a tím vznikne nová kombinace (nová trasa), ovšem zde vzniká problém, jelikož nově vzniklá kombinace často nepředstavuje trasu. Řešení tohoto problému je dvojitý, buď nově vzniklou nepřípustnou kombinaci korigovat na přípustnou, nebo před průběhem křížení upravit trasu na kód, který

bude během křížení imunní vůči vzniku nepovolených cest. Systémy tvorby těchto kódů jsou rozmanité jeden z nich je postaven na tomto principu, jak uvádí Michalewicz (1996, s. 212):

- Příklad trasy: 1 – 2 – 4 – 3 – 8 – 5 – 9 – 6 – 7
- Počet bodů tvořících trasu je 9, což generuje množinu $P = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
- První bod trasy je bod 1, tato hodnota uvádí pořadí v množině P čímž je dán prvek množiny odpovídající prvnímu kroku vytvářeného kódu.

Obrázek 9: Popis mechanismu křížení v genetických algoritmech

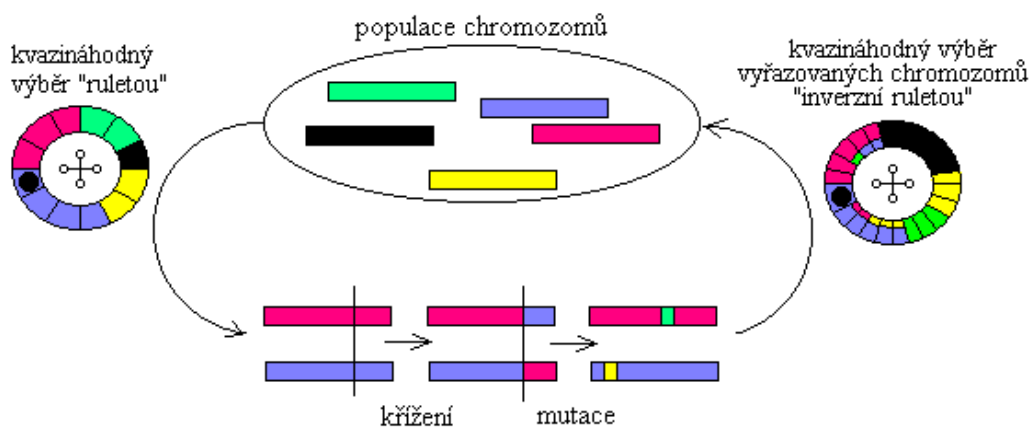


Zdroj: vlastní zpracování podle Michalewicz (1996, s. 214 – 215)

- d) První prvek kódu je poté 1 a prvek 1 je z množiny P vyloučen (vznikne změněná množina P)
- e) Postup se opakuje pro druhý bod trasy tj. 2, který je v nové množině P opět na prvním místě, a proto je druhý prvek kódu také 1. A z množiny P je hodnota 2 vyloučena.
- f) Třetí bod trasy je 4, číslo 4 leží v takto upravené množině P na místě 2, čili třetí prvek kódu bude dva (na prvním místě leží číslo 3 a čísla 1 a 2 byla v předchozích krocích z množiny vyloučena).
- g) Získali jsme začátek kódu v podobě 1,1,2 a výše popsany postup se opakuje do té doby, kdy je celá trasa zapsána pomocí kódu.

Obecnou problematikou všech heuristických algoritmů je uvíznutí v lokálním extrému a nenalezení globálního extrému. Genetické algoritmy používají silnou zbraň jak tento problém řešit a inspirací byla opět příroda, přesněji řečeno genetika. Jedná se o nástroj mutace. Mutace je náhodně provedenou změnou v kombinaci bodů představující vzniklou trasu a během vytváření nových tras k němu dochází velice zřídka. Mutace je obranou proti degeneraci, která algoritmu pomůže posunout se směrem k lepším řešením, jak uvádí Hynek (2008, s. 23 – 24).

Obrázek 10: Princip genetických algoritmů



Zdroj: << http://www.kiv.zcu.cz/studies/predmety/uir/gen_alg2/E_alg.htm >> [cit. 10.5.2017]

Případů, kdy si lidé s nějakým problémem nevědí rady a účinným východiskem se stane hledání inspirace v přírodě bychom našli celou řadu v rozličných oblastech lidské činnosti. Vedle genetických algoritmů se na problém obchodního cestujícího i podobné optimalizační problémy dají použít jiná řešení inspirovaná přírodou jako např. mravenčí algoritmy či rojová

inteligence, které jsou inspirovány chováním mravenců a jejich způsobem vyhledávání nejkratších cest jak uvádí Voženílek (2011, s. 44 – 46) zdroj: <<<http://www.aco-metaheuristic.org/RealAnts.html>>> [cit. 3. 4. 2018].

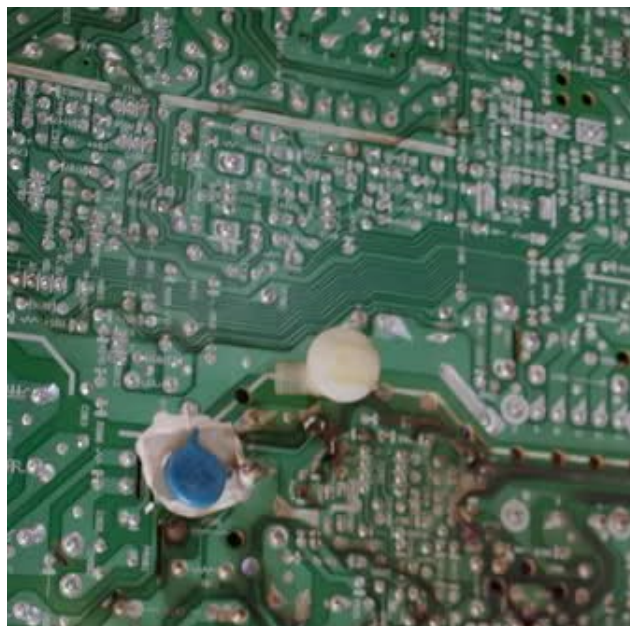
3.4 VÝZNAM NALEZENÍ EFEKTIVNÍHO ŘEŠENÍ

V této podkapitole se pokusím vysvětlit, v čem spočívá důležitost a co vše by přineslo nalezení dobrého algoritmu, který by úlohu obchodního cestujícího řešil efektivněji potažmo bychom dostali odpověď na otázku v problému NP versus P. Z logiky věci veškerá zdokonalení v algoritmech nalézají implementaci při plánování logistických tras všeho druhu včetně vnitropodnikové logistiky, kde se často řeší problém jak naplánovat trasu pro manipulační prostředky vyjíždějící ze skladu dílů a zásobujících jednotlivá pracoviště, přičemž je plánován návrat do výchozího skladu, kde dochází k opětovnému naplnění manipulačního prostředku.

Jak už jsem výše zmínil v souvislosti s nesymetrickou maticí a neplatností trojúhelníkové nerovnosti u vzájemných vzdáleností další oblastí, kde se s tímto problémem lze setkat je hledání optimálního pořadí zakázek tak, aby součet všech neproduktivních časů potřebných na nastavení zařízení mezi zakázkami byl minimální.

Jinou oblastí, kde se lze setkat s problémem obchodního cestujícího je plánování co nejúspěšnější trasy při pohybu vrtacího nástroje, místa zde reprezentují definované otvory, které je třeba do desky vyvrtat a navrátit se s vrtacím nástrojem do výchozí polohy. Čím vyšší počet otvorů tím větší prostor pro hledání optimálních tras trajektorie nástroje, zde je typickou situací výroba tištěných spojů. Ukázka tištěného spoje se nachází na obrázku 11. Na desku je třeba vyvrtat relativně vysoký počet otvorů, které dále slouží pro elektronické součástky. S tištěnými spoji se lze setkat např. v mnoha elektrospotřebičích.

Obrázek 11: Ukázka desky a tištěných spojů



Zdroj: << <https://cz.depositphotos.com/8150184/stock-photo-board.html>.>> [10.5.2017]

Na tomto místě by bylo možné uvádět další a další oblasti, kde se zmiňovaný problém nachází a které by jistě uvítaly efektivnější způsob jeho řešení. Ať se jedná o natáčení dalekohledu a hledání optimálního pořadí při pozorování hvězd v astronomii, třídění dat v kybernetice, sekvence v řazení chromozomů v genetice atd. Problém má velké využití a reálnou potřebu nejen v konkrétní lidské činnosti, technice a hledání efektivních řešení, ale má velký přesah do abstraktní matematiky, teorie kódování i filozofie. Není divu, že na vyřešení tohoto problému pracuje řada vědeckých kapacit po celém světě už desítky let, jak uvádí Applegate (2007, s. 17 - 19).

Ovšem Cook (2012, s. 23) poukazuje na obavy některých vědců, kteří vidí ve vyřešení tohoto problému velká rizika pro naši civilizaci, jak ji známe. Jejich obavy pramení zejména z nebezpečí v oblasti prudkého rozmachu výpočetní techniky a robotiky. Noví roboti by byli natolik výkonní a inteligentní, že by znamenali vážnou hrozbu pro lidi. Je otázkou zda by se tento tragický scénář naplnil, ale je pravdou, že na principu $NP \neq P$ je založen způsob tvorby kódů a hesel (neznámé heslo nelze najít jiným způsobem, než vyzkoušením veškerých možných kombinací). A to by mohlo za určitých okolností znamenat vážný problém, jak uvádí <<<https://businessworld.cz/cio-bw-special/trable-obchodniho-cestujiciho-8954>>> [cit. 5. 4. 2018]. Na druhé straně tato změněná situace by nejspíš vedla k hledání lepšího způsobu tvorby kódů i hesel a pozitiva by převážila nad negativy, jak uvádí Zelinka (2003, s. 133).

4 GLOBÁLNÍ CÍL A HYPOTÉZY DISERTAČNÍ PRÁCE

Ve své disertační práci si kladu za cíl přispět k rozšíření palety způsobů, algoritmů a postupů řešících matematický problém označovaný jako problém obchodního cestujícího na heuristické bázi a dále přinést řešení některých otázek, které s tímto problémem souvisí. Problém obchodního cestujícího je dnes předmětem intenzivního zkoumání po celém světě. Mou ambicí je nalézt nové úhly pohledu na řešení tohoto problému a objevit souvislosti a zákonitosti, které by přispěly k formulaci nových způsobů řešení tohoto problému právě na půdě heuristických algoritmů.

Praktické využití těchto algoritmů nachází uplatnění v plánování a optimalizaci logistických tras neboť problém obchodního cestujícího je problémem kombinatorické povahy řešící v jakém pořadí navštívit množinu definovaných bodů a vrátit se do výchozího bodu tak, aby vzniklá trasa byla co nejkratší. Stejný nebo velice podobný problém řeší každá přepravní společnost.

Tato disertační práce si neklade za cíl sestavit navigační software pro jednu konkrétní přepravní společnost nebo vyřešit logistický problém v jednom konkrétním podniku. Svou disertační práci jsem koncipoval tak, aby řešila problém na obecné úrovni a z jejích výsledků mohl mít profit jakýkoliv podnik.

GLOBÁLNÍ CÍL:

Rozšíření oblasti matematických modelů sloužící pro účely logistiky o nové metody.

DÍLČÍ CÍLE:

Vytvoření a vyzkoušení vlastní heuristické metody schopné nalézt trasu minimální délky při dodržení všech omezujících podmínek.

U vytvořené heuristické metody zjistit její oblasti fungování (limity), kvantifikovat její parametry a statisticky je otestovat.

Doplnění problému o hledání optimální polohy výchozího bodu.

Vytvoření modelu jako rozhodovacího nástroje při optimalizaci v podmínkách omezených zdrojů.

Vytvoření metody pro odhad délky optimální trasy.

HLAVNÍ VÝZKUMNÉ OTÁZKY:

Existuje souvislost mezi rozdělením čestností hodnot vzájemných vzdáleností definovaných bodů a vzdálenostmi bodů tvořících optimální trasu.

Vyhledávací heuristický algoritmus pracuje s určitým počtem kroků, jestliže počet kroků bude náhodnou veličinou, otázkou je jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka této náhodné veličiny a v případě, že bude nalezeno pouze přibližné řešení otázkou je jak velká je odchylka tohoto řešení od optimálního řešení.

Existuje signifikantní rozdíl ve fungování heuristického algoritmu pro zadání se symetrickou a s asymetrickou maticí vzájemných vzdáleností?

Jak postupovat v optimalizačním procesu při omezených zdrojích?

Je možné odhadnout délku optimální trasy nepřímou metodou – bez výpočtu optimální trasy?

HYPOTÉZY DISERTAČNÍ PRÁCE:

1. Hypotéza

V symetrické matici vzájemných vzdáleností mezi definovanými body existuje kritická hodnota, kterou vzdálenosti ležící na nejkratší trase nepřekročí.

2. Hypotéza

Jestliže počet kroků algoritmu v mé heuristické metodě a stejně tak velikost odchylky mezi nalezeným řešením a řešením nejlepším možným je náhodnou veličinou, tato náhodná veličina se řídí Gauss-Laplaceovým (normálním) rozdělením pravděpodobnosti.

3. Hypotéza

Jestliže je zaručena platnost hypotézy 2 na přijatelné hladině významnosti středního hodnota není vyšší než 7 a velikost odchylky se pohybuje v intervalu 2 až 7 % pro symetrický problém s platností trojúhelníkové nerovnosti o rozsahu 15 bodů (43 589 145 600 permutací jak nalézt řešení).

5 VLASTNÍ DOSAŽENÉ VÝSLEDKY

5.1 MAPOVÁNÍ MOŽNOSTÍ PRO ROZŠÍŘENÍ VĚDECKÉHO POZNÁNÍ

V této etapě disertační práce se pokusím nastínit oblasti, ve kterých spatřuji potenciál pro svůj vědecký přínos. Problémem obchodního cestujícího se zabývalo mnoho vědeckých kapacit po celém světě již bez mála sto let, přesto si dovoluji tvrdit, že existují stále oblasti tohoto problému, o kterých se dá originálně psát a které jsou hodny dalšího bádání. Podle mého názoru je to dáno právě komplexností, zajímavostí i interdisciplinárním přesahem tohoto problému.

V mnoha publikacích týkajících se operačního výzkumu se píše o možnosti řešení tohoto problému pomocí transformace na matematický model, který je následně exaktně vyřešen a v této souvislosti je jako nástroj pro řešení takového matematického modelu uveden program MS Excel. Tento postup popisují např. Kožíšek (2014, s. 208), Fiala (2010, s. 55), Jablonský (2007, s. 23 - 24) nebo Voženílek (2011, s. 112 – 113). Jedná se o postup, který během vysvětlování problematiky výše uvádím na obrázku 6. Po tomto řešení obdržíme výsledek v matematické podobě a právě zde se mi podařilo alespoň částečně se vymezit vůči všem uvedeným klasikům. A to tak, že jsem k tomuto řešení přidal další krok a to několik algoritmů, které v prostředí MS Excel dokáží automaticky přetransformovat matematický výsledek v podobě hodnot nula, jedna do uživatelsky komfortnější podoby, která vizualizuje, kudy trasa povede, toto téma rozvádím v podkapitole 5.2.

V podkapitole 5.3 popisuji vlastní heuristickou metodu založenou na selekci nepravděpodobných řešení. Tato metoda je postavena na některých empiricky zjištěných zákonitostech týkajících se rozdělení četností hodnot v matici C vzájemných vzdáleností. Originalita této metody spočívá v tom, že dokáže řešit problém obchodního cestujícího až do rozsahu o patnácti bodů pouze v prostředí MS Excel, kde už je exaktní řešení pomocí matematického modelu nepoužitelné z důvodu nedostatečné kapacity nástroje *řešitel*. Počet kombinací (permutací) možných tras, ze kterých je třeba vybrat tu optimální je přes 43,5 miliardy. Samozřejmě, že pro řešení tohoto problému v rozsahu patnáct bodů máme k dispozici SW, ale originalitu svého přístupu spatřuji v tom, že dokáže tyto drahé programy nahradit běžně dostupným programem MS Excelem.

Předmětem kapitoly 6 představuji nové rozšíření Weber-Steinerova rozmisťovacího problému a jeho vazbu na problém obchodního cestujícího.

Kapitola 7 pojednává o optimalizaci tras při omezenosti zdrojů. Kde je východiskem hledání optimálního stavu na pozadí hledání vázaného extrému a v této souvislosti představují vlastní alternativní způsob řešení problému. Můj přístup spočívá v analytickém odvození nových vzorců pro případ, kdy se jedná pouze o dvě neznámé. V takovém případě se lze vyhnout pracným výpočtům pomocí Lagrangeovi funkce a determinantu Hessovi matice.

V dalších kapitolách se věnuji otázkám souvisejících s řešením úlohy obchodního cestujícího. V kapitole 8 uvádím své metody sloužící k odhadu délky optimální trasy. O tomto typu výpočtů se v literatuře téměř nepíše a přitom např. u heuristických přístupů je nanejvýš žádoucí znalost velikosti minima resp. jeho odhad, aby bylo možné identifikovat, jak velkou vykazuje aktuální řešení odchylku a v případě, že je odchylka přijatelná lze heuristické vyhledávání přerušit a nalezené řešení použít. Opět se jedná o vysoce původní přístupy a vzorce, které se nenachází v literatuře.

Kapitola 9 popisuje některé sice možná originální přístupy jak problém obchodního cestujícího uchopit a hledat řešení zcela nekonvenčními způsoby ovšem slouží pouze jako náměty pro další vědeckou práci, protože tyto myšlenky se mi nepodařilo uvést do životaschopné podoby. Přesto jsem si dovolil zformulovat a uvést ve své práci i tyto přístupy, protože jsou založeny na nalezení některých dalších hlubších souvislostí a zákonitostí a to, že se tyto zákonitosti nepodařilo nalézt mě, ještě neznamena jejich neexistenci. Možná se je podaří nalézt někomu jinému.

5.2 ALGORITMY TRANSFORMUJÍCÍ MATEMATICKÉ VÝSLEDKY

Řešení běžně uváděné v literatuře (viz podkapitola 5.1 Kožíšek (2014, s. 208), Fiala (2010, s. 55), Jablonský (2007, s. 23 - 24) a další) spočívá v transformaci problému na matematický model (viz vztahy 8 až 16) používající jako vstup matici vzájemných vzdáleností a jako výstup sekvenci hodnot nula a jedna. Což je pro uživatele poněkud nekomfortní. Proto se zde nabízí možnost doplnit tento matematický model dalšími algoritmy, postupy a modely v prostředí MS Excel, které dokáží transformovat matematické výsledky na výpis pořadí jednotlivých míst nebo trasu dokonce vizualizovat tak, aby byl výsledek pro každého jasný, srozumitelný a čitelný.

Obrázek 12: Výstup z matematického modelu (část celkového pohledu)

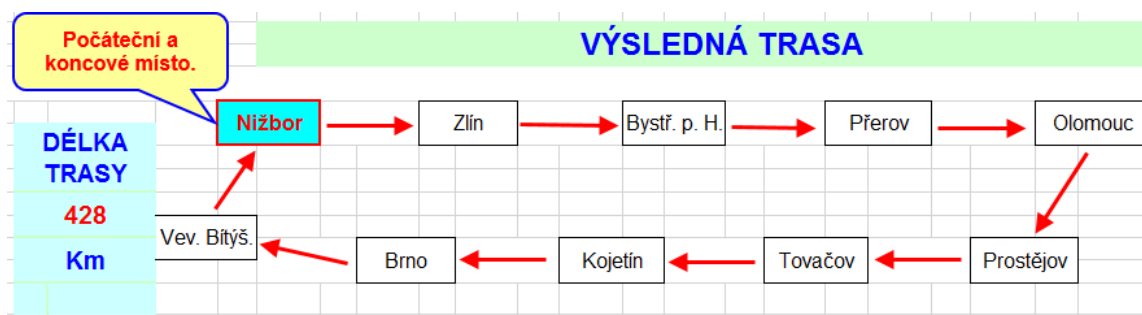
X 1-2	X 1-3	X 1-4	X 1-5	X 1-6	X 1-7	X 1-8	X 1-9	X 1-10	X 2-1	X 2-3	X 2-4	X 2-5	X 2-6	X 2-7
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1									1					

Zdroj: vlastní – ukázka z modelu E1

Hodnota proměnné 1 znamená, že po cestě, kterou představuje tato proměnná, optimální trasa vede a naopak hodnota 0 znamená, že po této cestě optimální trasa nevede. Obr. 12 ukazuje výsledek výpočtu v zeleném řádku, kde je vidět, že optimální trasa vede z bodu 2 do bodu 1 a pokračuje z bodu 1 do bodu 3 atd. Řádkový zápis proměnných (zmiňovaný zelený řádek), pro které hledám hodnoty, odpovídá normovanému zápisu, do kterého je třeba problém zapsat, aby s ním nástroj řešitel (nástroj programu Excel nacházející se v záložce data) uměl pracovat. Součástí tohoto zápisu je matice koeficientů, kde jednotlivé řádky vstupují do skalárních součinů vektoru neznámých s vektory koeficientů v jednotlivých řádcích tyto skalární součiny představují nejsnazší způsob výpočtu levých stran omezujících podmínek matematického modelu atd.

Pomocí funkcí programu MS Excel je možné tyto hodnoty 0 a 1 transformovat do uživatelsky komfortnější podoby jak ukazuje obrázek 13.

Obrázek 13: Výstup z algoritmu



Zdroj: vlastní – ukázka z modelu E1

Stejně tak je velice původní můj způsob zpracování vstupů do modelu, který umí pracovat se zmiňovanou maticí C vstupních vzdáleností. Pro uživatele je opět mnohem příjemnější pracovat s konkrétními body, kde se vzájemné vzdálenosti automaticky spočítají.

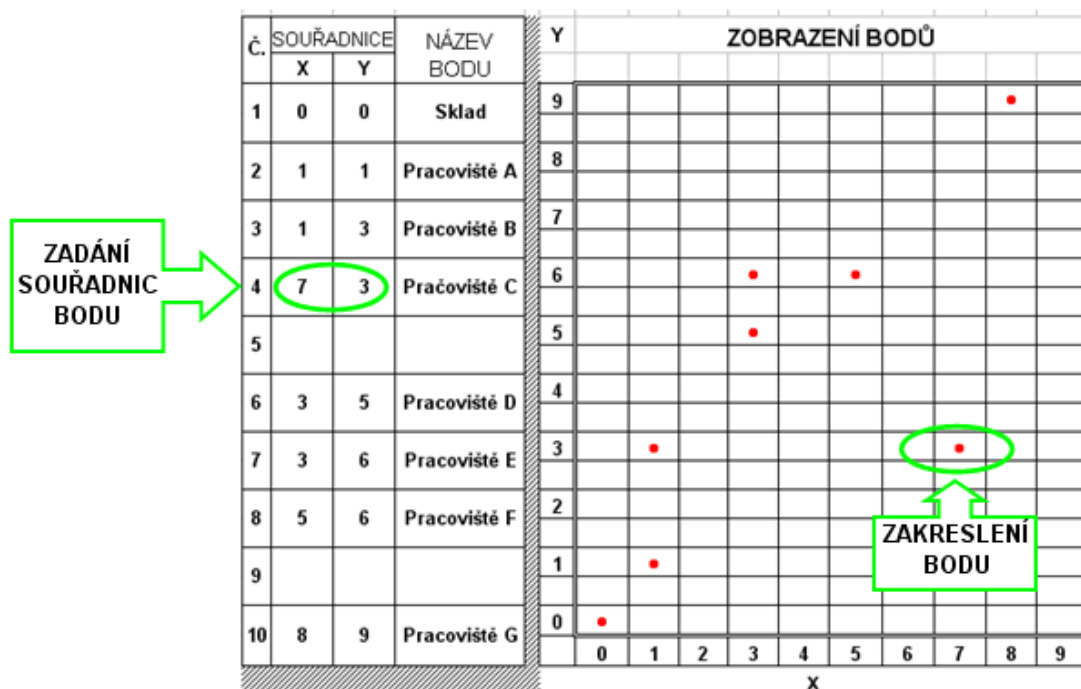
Ve svém modelu E4 je možné nastavit si zda zadat body do políček vepsáním hodnoty 1 (obr. 14) a nebo napsat souřadnice bodů (obr. 15).

Obrázek 14: Ukázka algoritmů – definováním bodů v prostoru



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2013-b (ukázka z modelu E4)

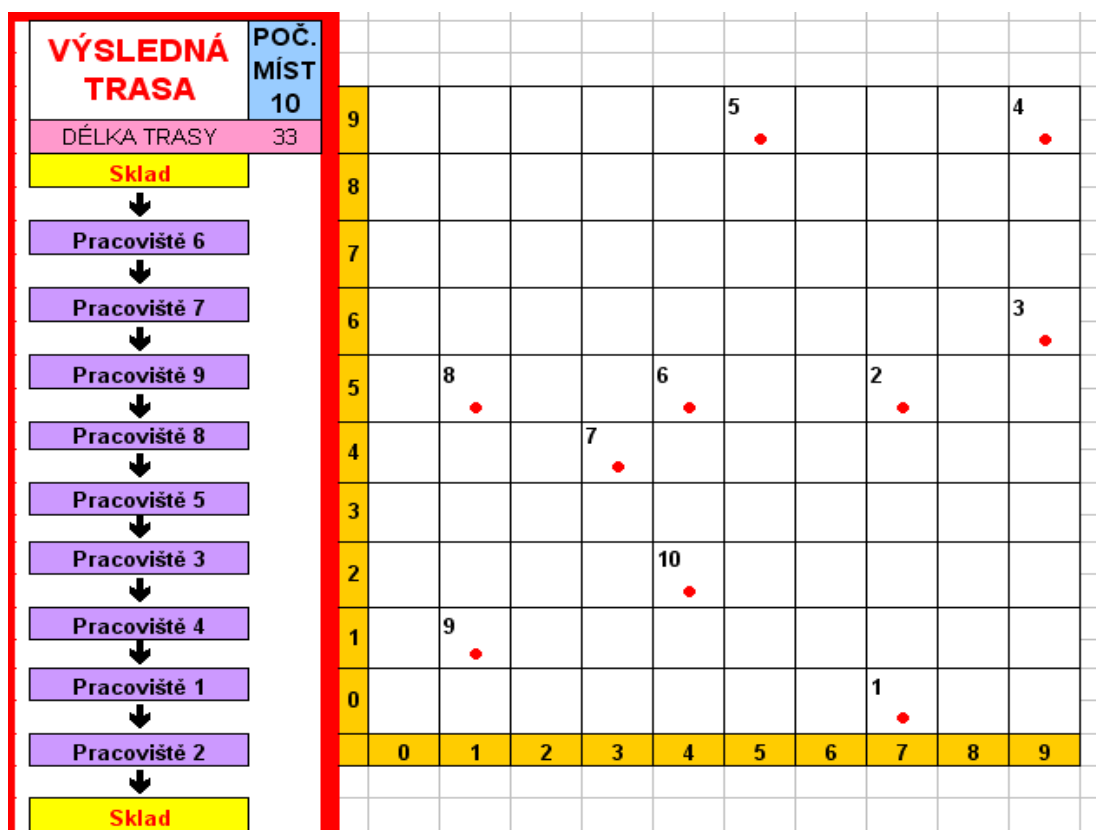
Obrázek 15: Ukázka algoritmů – definováním bodů souřadnicemi



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2013-d (ukázka z modelu E4)

Obrázek 15 popisuje jak se v modelu definuje množina bodů, pro které bude hledána optimální trasa. Obrázek 16 ilustruje podobu výstupů z modelu. Ukázka je z prostředí vnitropodnikové logistiky a hledání trasy spojující různá pracoviště. Vlevo je vidět automatický výpis pořadí pracovišť a vpravo jsou body zakresleny a optimální pořadí je zobrazeno čísly.

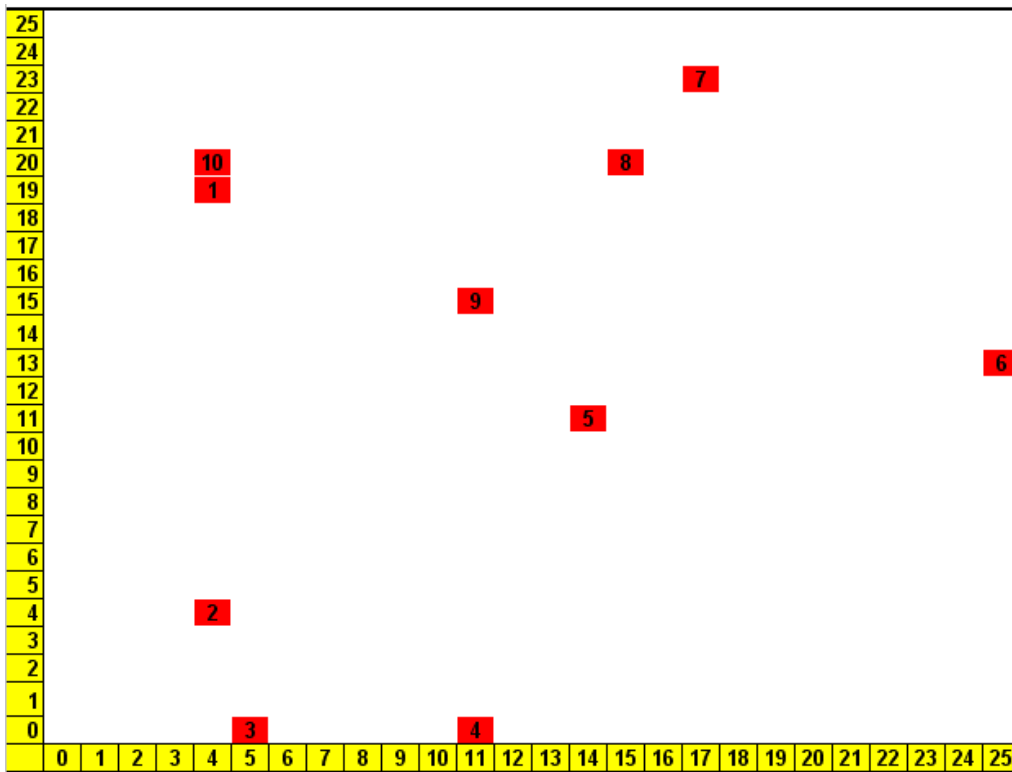
Obrázek 16: Výstup z modelu zobrazující optimální pořadí bodů



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2013-b (ukázka z modelu E4)

Obrázek 17 ilustruje výstup z vylepšeného modelu, ve kterém je možno zadat body do čtvercového prostoru 25 x 25 jednotek, zadané body se automaticky zakreslí jako červená políčka a výpočtem získané výsledky se automaticky přetransformují do čísel uvádějící optimální pořadí bodů tak, aby vzniklá trasa byla nejkratší.

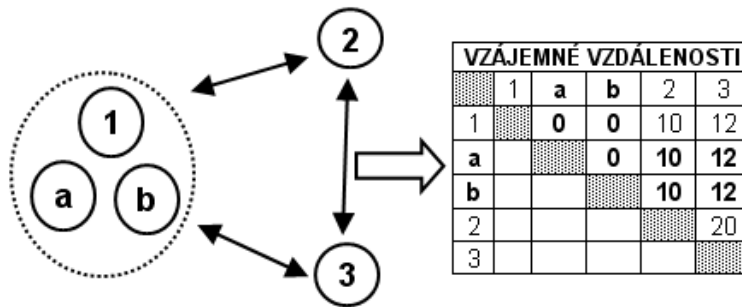
Obrázek 17: Výstup z modelu - výsledná trasa



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2014-b (ukázka z modelu TSP)

Vedle algoritmů zjednodušujícími práci se vstupy a výstupy, jejich automatickou transformací z podoby matematických výsledků do vizualizovaných obrazů obsahují modely další algoritmy zabezpečující dynamizaci problému pro obecný počet bodů definovaný horní hranicí. Zatímco známé matematické modely pracují se staticky daným počtem bodů např. $n = 10$. Pro praktické využití je třeba, aby model uměl řešit problémy také pro situace, kdy zadaných bodů bude např. 9, 8 apod. Obr. 18 popisuje myšlenkový princip jedné z možností jak tohoto cíle dosáhnout. Jádrem modelu jsou výpočty nastavené např. na 10 bodů, pokud dojde k reálnému zadání pouze osmi bodů dva chybějící body se automaticky nastaví jako body fiktivní. Tyto body se chovají tak, že leží v bodě 1. To znamená, že jejich vzdálenost od ostatních bodů je rovna vzdálenosti bodu 1 od těchto bodů a jejich vzdálenost od bodu 1 bude nulová, jak je popsáno v Košťálek 2013-d. Fiktivní body jsou označeny písmenky a, b, c atd. Po provedení výpočtu jsou při interpretaci výsledků fiktivní body vynechány a vznikne optimální trasa jen pro skutečně zadané body.

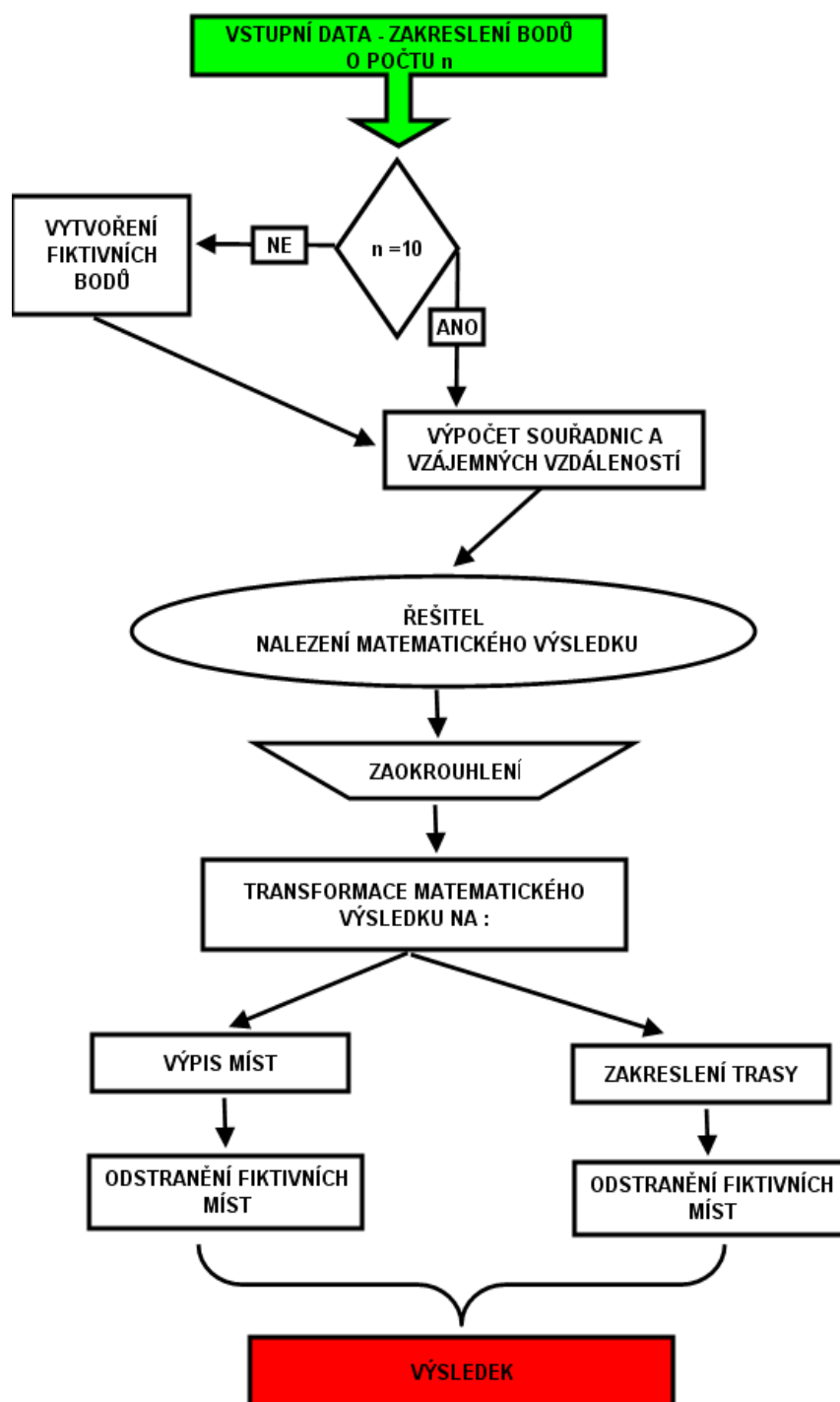
Obrázek 18: Princip fiktivních bodů



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2013-d

Celý postup je pro lepší názornost popsán schématicky na obr. 19, kde operace zaokrouhlení je provedena z toho důvodu, že výstupem z binárního lineárního programování je např. hodnota 1,4E-10 představuje hodnotu nula, ale ve skutečnosti jde o malé kladné číslo a důsledkem by bylo selhávání algoritmů používající logickou funkci „když hodnota rovná se nula potom ...“.

Obrázek 19: Postup fungování algoritmu vyrovnávajícího počet bodů



Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2013-e

Využití tohoto principu budu demonstrovat na zmiňovaném problému hledání optimálního pořadí zakázek při plánování výroby, jak uvádím v Košťálek (2014-c). Vstupní data pro sestavení optimální sekvence zakázek jsou časy pro nastavení výrobního zařízení mezi jednotlivými zakázkami. Vzájemné časy tvoří matici časů velikosti [10 x 10], což

odpovídá deseti zakázkám. Počet zakázek lze měnit v intervalu 1 až 10, model je zobecněn tak, aby byl počet zakázek měnitelný. Informace o tom, se kterou zakázkou má model pracovat se zadává napsáním názvu zakázky (vymazání názvu indikuje, že s ní model nemá pracovat). Tato modifikace usnadní praktické nasazení modelu v praxi, protože činí model flexibilnější a uživatelsky sympatický.

Obrázek 20: Zadání vstupních hodnot

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Zakázka A			Zakázka C		Zakázka T		Zakázka X	Zakázka Y	Zakázka Z
1 Zakázka A		54	31	96	10	165	51	77	121	83
2	50		85	112	63	123	96	130	77	62
3	28	85		81	21	186	38	47	142	104
4 Zakázka C	90	110	80		86	160	118	84	130	101
5	10	66	25	90		170	46	67	126	88
6 Zakázka T	177	120	190	162	172		216	228	47	85
7	51	90	30	121	52	200		59	171	133
8 Zakázka X	90	130	47	70	60	333	63		183	144
9 Zakázka Y	121	80	140	120	119	50	170	183		41
10 Zakázka Z	75	55	104	111	79	92	130	130	41	

Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2014-c (model optimalizace sekvence zakázek)

Aby byl model schopen plnit tuto funkci zobecněných optimalizačních výpočtů je třeba zajistit výběr zadaných vstupních hodnot podle aktuálního zadání (vycházejícího např. z plánu výroby pro danou směnu apod.). Tento proces se děje prostřednictvím kombinace různých funkcí programu Excel, jak popisují následující obrázky 21 a 22.

Obrázek 21: Posun hodnot – odstranění řádků

The screenshot shows the Excel formula bar for cell G23 containing the formula `=SVYHLEDAT(F23:F32;F8:P17;G6+1;0)`. A vertical arrow labeled 'POSUN' points to the formula. Below the screenshot is a grid with columns labeled Č. and NÁZVY, and rows 1-10. Red vertical lines are drawn between columns 3-4, 4-5, 7-8, and 8-9, indicating row shifts. A green dashed line is at row 7, and a green arrow points to row 8.

Č.	NÁZVY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	A	0	c12			c13	c14			c15	c16
2	B	c21	0			c23	c24			c25	c26
3	C	c31	c32			0	c34			c35	c36
4	D	c41	c42			c43	0			c45	c46
5	E	c51	c52			c53	c54			0	c56
6	F	c61	c62			c63	c64			c65	0
7											
8		0	0			0	0			0	0
9											
10											

Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2014-c (model optimalizace sekvence zakázek)

Obrázek 22: Transformovaná matice hodnot

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Zakázka A	Zakázka C	Zakázka T	Zakázka X	Zakázka Y	Zakázka Z				
1	Zakázka A	0	96	165	77	121	83	0	0	0	0
2	Zakázka C	90	0	160	84	130	101	0	0	0	0
3	Zakázka T	177	162	0	228	47	85	0	0	0	0
4	Zakázka X	90	70	333	0	183	144	0	0	0	0
5	Zakázka Y	121	120	50	183	0	41	0	0	0	0
6	Zakázka Z	75	111	92	130	41	0	0	0	0	0
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2014-c (model optimalizace sekvence zakázek)

Na konci tohoto procesu třídění a vyhledávání dat je matice vstupních hodnot, se kterou bude pracovat výpočtová část modelu. Ta je rovněž nastavena na obecný počet zakázek (bodů) maximálně rovný deseti. Optimální sekvence (pořadí) jednotlivých zakázek z hlediska minimalizace celkové délky přípravných časů je následně řešena stejným principem jako optimální trasa procházející množinou bodů. Nalezené řešení má podobu jedniček a nul. V této etapě model nuly a jedničky opět za použití kombinace logických a vyhledávacích funkcí přetransformuje na výpis zakázek, které jsou přehledně vypsány ve vypočítaném pořadí do tabulky, která se sama vygeneruje pro příslušný počet zakázek, se kterým se pracuje viz obr. 23.

Obrázek 23: Výstup z modelu pro optimální sekvenci zakázek

POŘADÍ ZAKÁZEK:

- 1 Zakázka A
- 2 Zakázka X
- 3 Zakázka C
- 4 Zakázka T
- 5 Zakázka Y
- 6 Zakázka Z
- 7 Zakázka A

SOUČET VÝROBNÍCH ČASŮ:

405 min.

Sekvence je plánována pro 6 zakázek.

Zdroj: vlastní - publikováno Košťálek 2014-c (model optimalizace sekvence zakázek)

V příručkách pro práci s programem MS Excelu je popsána řada nejrůznějších algoritmů jako např. algoritmus sloužící k určení data Velikonoc při zadání letopočtu, jak uvádí Schels (2007, s. 283). Mnou popsané algoritmy by mohly tento seznam rozšířit o dosud nepublikované postupy a možnosti. Všechny modely, které se mi během doktorského studia podařilo sestavit přikládám na CD obsahující elektronickou podobu mé disertační práce. Z naprogramovaných buněk je princip fungování algoritmů dobře patrný. Vysvětlení jejich

fungování včetně všech mezikroků a mezi výpočtů v papírové podobě formátu A4 je komplikované a čtenáři by nedávalo dobrý smysl. Každý ze zmiňovaných modelů, jehož ukázky popisují obrázkovou formou výše v textu, obsahuje plochy buněk s rozsahem stovek řádků a desítek sloupců. Nemyslím, že je nutné a účelné tyto procesy dopodrobna popisovat, věřím, že smysl a hlavní funkce i principy jsou zřejmé.

5.2.1 VYUŽITÍ PRINCIPŮ V JINÝCH OBLASTECH

Některé algoritmy lze použít i pro zcela jiné účely než, pro které byly původně vymyšleny. Příkladem je výše popisovaná dynamizace modelu tak, aby jeho výpočetní část zůstala nastavená na n bodů a pokud dojde k zadání počtu bodů nižšího než je n . Je třeba některé řádky vynechat „přeskočit“. Algoritmus umějící tuto funkci se dobře hodí jako obecný nástroj pro nejrůznější případy třídění dat všeho druhu, např. vynechání záporných hodnot či hodnot kupříkladu menších než 5 apod. Pro jeho použitelnost při celé řadě dalších problémů se na tomto místě pokusím vysvětlit, jakým způsobem filtrovací algoritmus funguje viz obr. 24. Ve sloupečku D jsou data a z nějakého důvodu chci vybrat a seřadit za sebou jen hodnoty větší než např. 5. Výsledek tohoto požadavku je ve sloupečku E . Cesta vede přes pomocné hodnoty ve sloupečku C , které vznikly tak, že při nedodržení podmínky, aby byla hodnota vyšší než 5, převezme se předchozí číslo a v opačném případě je předchozí číslo navýšeno o 1, kde počátkem takto vzniklé posloupnosti je nula v buňce $C2$. Jelikož hodnota na vstupu je -5, tedy menší než 5 ve sloupci C vznikla (v řádce 3) nula. Následující hodnotou na vstupu je 2 čili opět hodnota nižší než 5, proto se ve sloupci C (v řádce 4) objeví opět nula. A jak je patrné pro hodnoty na vstupu tedy ve sloupečku D vyšší než 5 se začnou pomocné hodnoty ve sloupci C o jedna zvyšovat. Nyní potřebuji ze sloupečku D vyselektovat přesně ty hodnoty, které mají ve sloupečku C pomocnou hodnotu 1, 2, 3 ... a zapsat je za sebe, tyto hodnoty mám k dispozici ve sloupečku B a požadavek splním vyhledávací funkcí jak je patrné z obrázku. Vyhledávací funkci je ovšem nutné zkombinovat s podmínkou, že vyhledávané hodnoty ze sloupečku B musí být nižší, než je poslední člen pomocné posloupnosti ve sloupečku C .

Obrázek 24: Princip fungování algoritmu

		C		D	E	F	G
1	č.	Pomoc. hodnoty	VSTUPNÍ	VÝSTUP			
2		0	DATA	HODNOTY > 5			
3	1	0	-5,00	100			
4	2	0	2,00	6,5			
5	3	1	100,00	7			
6	4	2	6,50				
7	5	2	1,00				
8	6	2	3,00				
9	7	3	7,00				
10	8	4	7,00				
11		4					

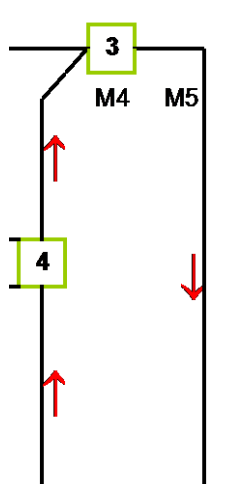
Formula v E3: `=KDYŽ(B3<ŠC$11;SVYHLEDAT(B3;ŠC$3:ŠD$10;2;0);"")`

Zdroj: vlastní

Ukázku fungování tohoto algoritmu popisuje obrázek 24, ze kterého je zřejmý i výsledek v podobě vyhledaných a po sobě (bez mezer v prázdných řádcích) seřazených hodnot. Jde o ukázku postupu původně vymyšleného pro vynechávání a postupné řazení souřadnic zadaných bodů v situaci, kdy byl výpočet nastaven např. na 10 bodů a bylo třeba zobecnit model na jakýkoliv jiný nižší nebo rovný počet bodů.

Na některých výše uvedených zobrazení z prostředí MS Excel symbolizují zadané body červené puntíky. Této vizuální pomůcky je docíleno pomocí vložení textové funkce „ZNAK“, která změni číslo v určitý symbol. Pro zobrazení puntíku funguje číslo 149. Využití plného potenciálu tohoto nástroje popisuje obrázek 25.

Obrázek 25: Vykreslení trasy



Zdroj: vlastní – ukázka z výstupu modelu pro vnitropodnikovou logistiku

Totíž pokud se formát příslušných buněk nastaví na typ písma „Symbol“ a do funkce „ZNAK“ dosadíme hodnotu 173 obdržíme v buňce šipku směřující nahoru, pro hodnotu 175 bude šipka směřovat dolů, pro hodnotu 172 vede šipka směrem doleva a při hodnotě 174 směřuje šipka vpravo. Na základě výsledků proměnných v podobě nul a jedniček je možné tyto hodnoty pomocí logických a dalších funkcí transformovat na zmiňované hodnoty 172 až 175 což by argumenty funkce zakreslující směr pohybu po optimální trase.

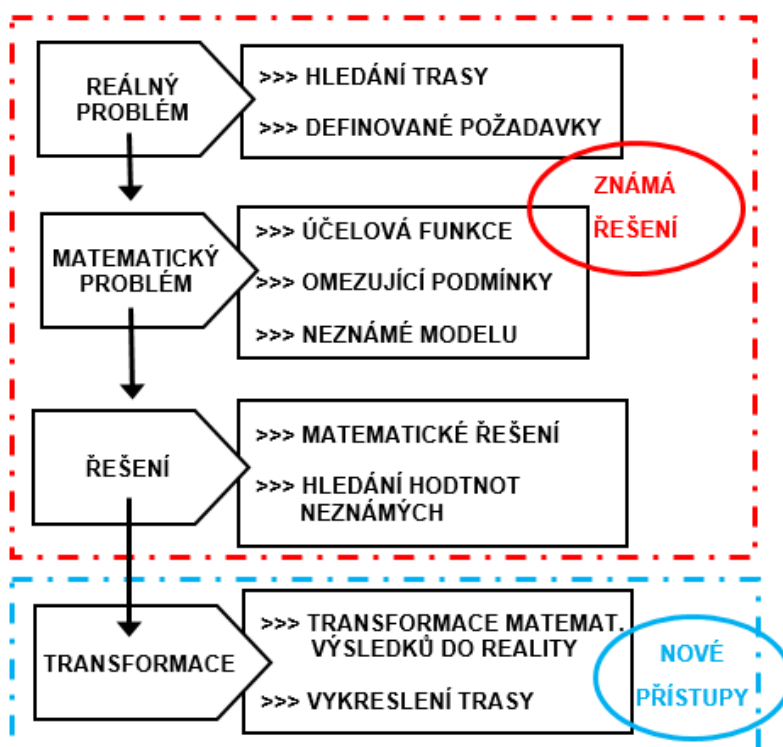
5.2.2 SHRNUÍ PODSTATNÝCH ZÁVĚRŮ PODKAPITOLY 5.2

Tato podkapitola popisuje jak vhodnou syntézou některých elementárních funkcí v běžně dostupném prostředí programu MS Excel docílit transformace matematických výsledků do vizuální a uživatelsky komfortní podoby. Tyto postupy a algoritmy se nenachází v žádných příručkách pro program MS Excel jako je např. Schels (2008), Young (2003) nebo Conrad (2004) ani v knihách obsahující vzorce a postupy vedoucí k těmto výsledkům. Lze tak konstatovat, že se jedná o malý kousek originálních postupů, který by mohl doplnit stávající vzorce a výpočty o post výpočetní fázi. Což by částečně suplovalo profesionálnější a dražší SW. Programem MS Excel je vybavena většina počítačů na světě a počet lidí z celého světa disponující vlastním počítačem je relativně vysoký a raketově roste, jak uvádí teoretik internetu Chatfield (2013, s. 23) v roce 2002 bylo na světě v provozu přes půl miliardy počítačů, v roce 2008 už to byla celá miliarda. V ČR vlastnilo počítač v roce 2016 podle Českého statistického úřadu 76 % domácností, jak uvádí:

<<https://www.czso.cz/documents/10180/46014808/061004-17_S.pdf/b9a0a83e-7a6f-4613-b1df-33fe8b5d1a8e?version=1.1>> [cit. 1.8.2018]. Což implikuje vysoké počty potenciálních uživatelů zformulovaných myšlenek a postupů.

Motivací při hledání a zdokonalování nástrojů hledajících optimální řešení nebo alespoň hledajících lepší řešení než je stávající řešení je příklad z historie rovněž z oblasti logistiky: Jak uvádí Fletcher (1968, s. 37) panu H. G. Berrisfordovi se podařilo v oblasti distribuce různých druhů uhlí mezi plynárnami v Británii nalézt řešení představující úsporu nákladů ve výši 1,75 %, což ovšem v obrovském objemu přepravních nákladů činilo zajímavou částku. Jednalo se o problém jak distribuovat 100 různých druhů uhlí mezi 30 plynáren, kde existovala řada omezujících podmínek a požadavků jednotlivých plynáren na množství a kvalitu uhlí.

Obrázek 26: Schematizace vymezení mého přínosu v oblasti



Zdroj: vlastní

Pro další kapitoly mé práce je podstatné, že se podařilo vytvořit řadu modelů sloužících jako jakási pomyslná laboratoř sloužící k výpočtům, analýzám výsledků, komparaci výsledků, empirické pozorování dat a jejich změn za účelem hledání nových souvislostí a zákonitostí.

5.3 PŘEDSTAVENÍ SVÉ VLASTNÍ HEURISTICKÉ METODY

5.3.1 ÚVODNÍ SLOVO K VLASTNÍ HEURISTICKÉ METODĚ

Exaktní hledání optimálního řešení je poměrně obtížným problémem, ať už zvolíme jakýkoliv způsob (binární lineární programování, programy LINGO, LINDO apod.). Důvodem je výše zmiňovaný vysoký počet binárních proměnných i omezujících podmínek mající vazbu na funkci, u které je hledán vázaný extrém (minimum). Vzniká situace, kdy se hledají jiné alternativy řešení problému. Tou může být heuristická metoda, tj. přístup založený na ustoupení z přesnosti řešení za cenu rychlejšího nalezení řešení, kde hledání obsahuje částečně složku náhodného vyhledávání z přípustných řešení, jak uvádí Töpfer (2010, s. 126).

Můj přínos v této oblasti spočívá v nalezení souvislostí mezi hodnotami z matice C vzájemných vzdáleností mezi jednotlivými body a maticí V tj. maticí výsledků resp. délkami jednotlivých cest tvořících optimální trasu. Pokud budu uvažovat problém pro množinu

reálných bodů matice C vzájemných vzdáleností, vzniká pomocí pomocného výpočtu ze zadaných souřadnic těchto bodů v matici B . Matematický výsledek problému obchodního cestujícího lze interpretovat také v maticové podobě, jak ukazuje obrázek 27.

Obrázek 27: Matice výsledků V

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0		0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0		0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0		0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0		0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0		0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0		0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1		0	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0		0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	

Zdroj: vlastní

Necht' máme symetrickou matici C vzájemných vzdáleností mezi deseti body, pro kterou platí trojúhelníková nerovnost. Po nalezení optimální trasy exaktním výpočtem dostaneme matici výsledků V viz obrázek 27. Matice výsledků V říká, že optimální (nejkratší) trasa vede z bodu 1 do bodu 2, z bodu 2 do bodu 9, z bodu 9 do bodu 5 atd., což signalizují hodnoty 1, které jsou navíc pro lepší názornost podbarveny zeleně. Pokud tuto matici V porovnáme se zmiňovanou maticí vzájemných vzdáleností C , na které červeně označím vzdálenosti tvořící optimální trasu dostávám matici zobrazenou na obrázku 28. (Jak je patrné délka nejkratší trasy je součet červeně označených hodnot.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		9,43	15,30	10,44	14,76	9,22	4,12	5,00	13,00	8,06
2	9,43		20,61	19,70	13,00	18,60	11,40	14,21	7,07	17,09
3	15,3	20,61		17,69	12,80	13,45	11,18	12,53	18,03	17,80
4	10,44	19,70	17,69		23,35	4,24	11,05	7,07	23,20	2,83
5	14,76	13,00	12,81	23,35		20,03	12,37	16,28	7,00	21,84
6	9,22	18,60	13,45	4,24	20,03		8,25	4,47	20,88	5,10
7	4,12	11,40	11,18	11,05	12,37	8,25		4,00	12,65	9,49
8	5,00	14,21	12,53	7,07	16,28	4,47	4,00		16,49	5,83
9	13,00	7,07	18,03	23,20	7,00	20,88	12,65	16,49		21,02
10	8,06	17,09	17,80	2,83	21,84	5,10	9,49	5,83	21,02	

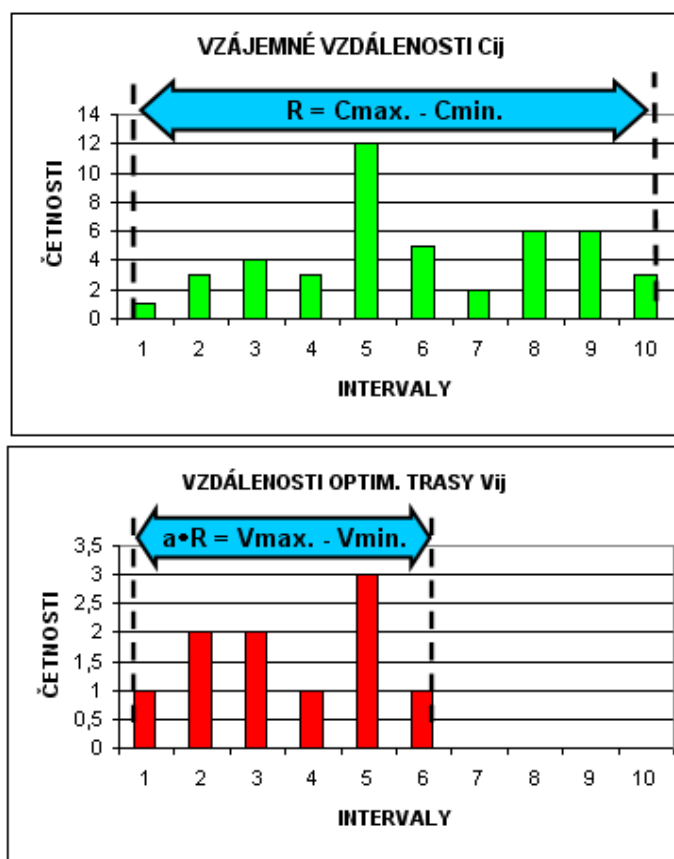
Délka trasy: 70,79

Obrázek 28: Matice vzdáleností C s vyznačením optimální trasy

Zdroj: vlastní

U matice vzájemných vzdáleností C jsem provedl základní statistickou analýzu dat. Určil jsem největší a nejmenší hodnotu (c_{\max} a c_{\min}), jejich rozdíl představuje variační rozpětí R . To jsem rozdělil na 10 intervalů, což je počet, se kterým se dobře pracuje a z hlediska použití pro další účely se osvědčil. Existují určitá doporučení např., že vhodný počet intervalů je odmocninou z počtu prvků, jak uvádí např. Kožíšek (2002, s. 10) čemuž 10 intervalů přibližně odpovídá. Intervaly jsou stejně široké jejich šířky h jsou podílem variačního rozpětí R a jejich počtu $s = 10$. Čili všechny vzájemné vzdálenosti mezi jednotlivými body jsou nějakým způsobem rozloženy do těchto deseti intervalů, kde rozložení četností v jednotlivých intervalech v tuto chvíli není podstatné. Podstatná je otázka v jakých intervalech leží červeně označené hodnoty (z obrázku 28) to jsou ty tvořící optimální (nejkratší) trasu. Odpověď zní, že hodnoty leží pouze v prvních šesti intervalech. Situace je graficky interpretována obrázkem 29.

Obrázek 29: Rozložení četností vzdáleností mezi body



Poznámka:

Jelikož je matice C symetrická, pracoval jsem z polovičními hodnotami vypočtených četností.

Zdroj: vlastní

Tento jev byl potvrzen řadou experimentů (výpočty optimálních řešení u náhodně zvolených bodů), kde se mi potvrdilo, že vzdálenosti tvořící nejkratší trasu vždy leží

v prvních pěti až sedmi intervalech, nejobvyklejší situace je v šesti intervalech, jak je popsáno v Košťálek (2015-b). Potom lze tvrdit, že s vysokou mírou pravděpodobnosti lze rozhodnout o tom, které cesty patří a které nepatří do optimální trasy. Pokud zvolím jako kritérium tohoto dělení obvyklou horní hranice šestého intervalu, situaci lze vyjádřit vztahem 17, který lze zobecnit na libovolnou horní hranici intervalu jak uvádí vztah 18.

$$C_{\min} + 0,6 \cdot R = \textit{Kritická mez} \quad (17)$$

$$C_{\min} + a \cdot R = \textit{Kritická mez} \quad (18)$$

Pro parametr „a“ vyjadřující kolik intervalů (potažmo hodnot z matice C bude označeno jako méně pravděpodobné pro optimální řešení) **jsem zavedl termín operátor selekce**, uvedeno v Košťálek (2015-b).

5.3.2 VYUŽITÍ POZNATKU O OPERÁTORU SELEKCE

Poznání těchto souvislostí a zákonitostí umožňujících určit kritickou mez se ukázalo jako mocný nástroj usměrňující vyhledávání náhodných přípustných řešení blokováním méně pravděpodobných cest, což zvýhodňuje perspektivní cesty. Důsledkem je několikanásobné zrychlení vyhledávání optimálního řešení oproti situaci, kdy by bylo zapotřebí prohledávat všechny cesty (pracovat s celou maticí C). Jestliže budou zcela náhodně vybírána přípustná řešení okružního dopravního problému, nalezení nejkratší trasy se zdaří až po mnoha a mnoha pokusech. Což se dá jednoduše kvantifikovat. Celkový počet možností je dán vztahem 19 a vychází z počtů kombinací v jednotlivých krocích, který se snižuje na polovinu, neboť jak bylo řečeno matice vzdáleností je symetrická, což implikuje, že každá úloha má dvě řešení lišící se ve směru průjezdu stejnou trasou (dvě řešení postihuje jedna kombinace).

$$k = \frac{1}{2}(n-1)! \quad (19)$$

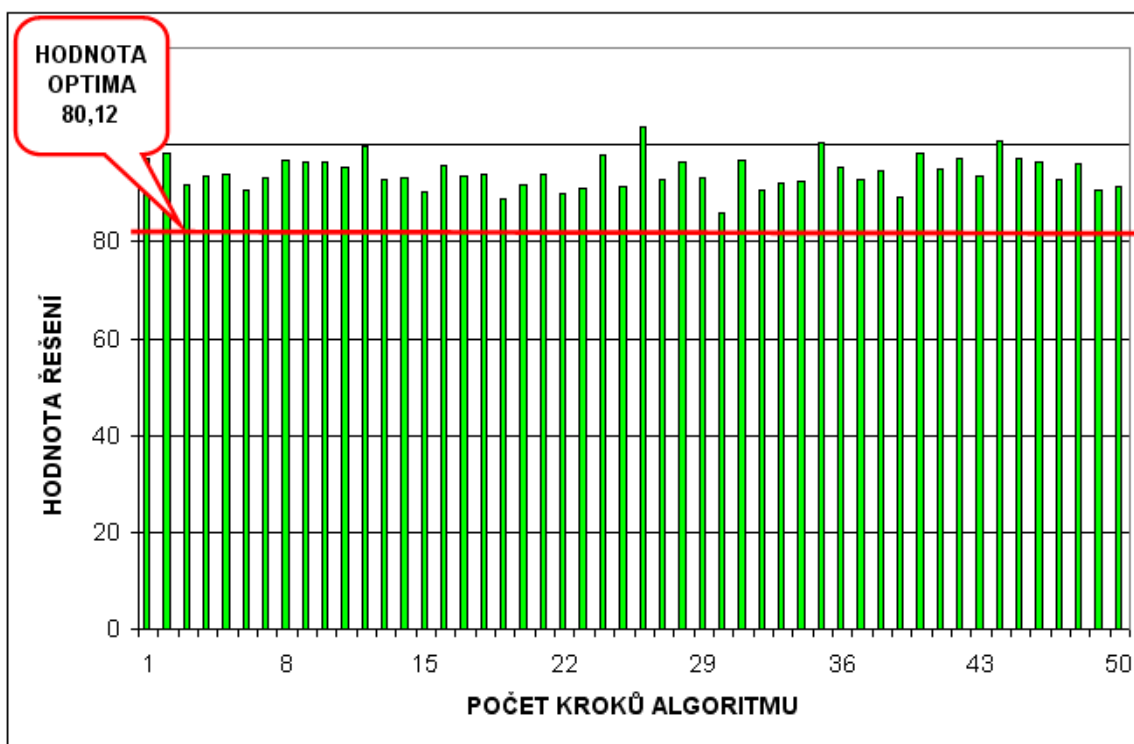
kde k je počet kombinací; n je počet míst.

Potom počet kombinací pro problém o velikosti deseti míst činí 181 440. Takže pravděpodobnost nalezení optimálního řešení v prvním kroku je 1 : 181 440 a obecně ji lze vyjádřit v závislosti na počtu kroků vztahem 20.

$$P(k) = \frac{k}{181\,440} \quad (20)$$

Tuto pravděpodobnost lze zvýšit, paralelním vyhledáváním. V mém případě se v každém kroku nalezne 500 přípustných řešení a z nich se vybere to nejlepší, tj. to s nejkratší trasou. Tím se pravděpodobnost nalezení optimálního řešení v prvním kroku zvýší na $P(500) = 0,00276$, což je stále slabý nástroj pro praktické nasazení. Termínem krok algoritmu bude v mé práci označován přepočítání listu v souboru MS Excel, který se spustí zmáčknutím tlačítka F9, což spotřebuje zhruba jednu sekundu času. Přepočítání listu vygeneruje nová náhodná čísla potažmo nové vyhledání řešení.

Graf 1: Hodnoty při hledání optima



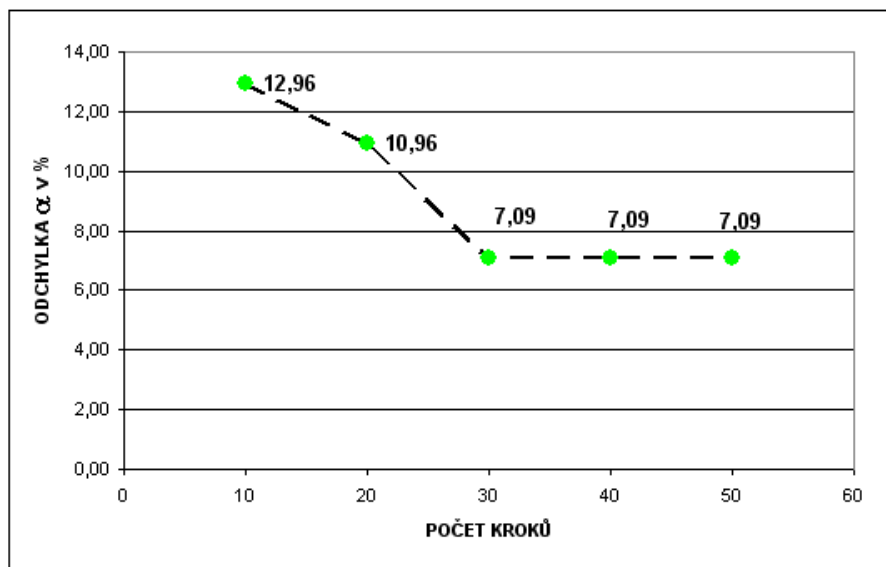
Zdroj: vlastní

Po padesáti krocích, (kde každý krok znamená 500 řešení), ze kterých se vybere to nejlepší řešení, činí i nejlepší dosažené řešení odchylku $\delta = 7,09\%$ od optimálního řešení viz graf 1. Graf 1 obsahuje 50 hodnot představujících délky nalezených tras, kde je dobře patrná vysoká odchylka od délky optimální trasy, která je vyznačena červeně. Optimální řešení (nejkratší možnou délku trasy) jsem pro toto rozložení bodů spočítal exaktně s pomocí výše uvedených modelů.

Jiný způsob interpretace hodnot z tohoto pokusu nabízí graf 2, kde je vždy po deseti krocích vybráno nejlepší nalezené řešení, to bylo porovnáno s nejlepším existujícím řešením a vypočítána odchylka v procentech. Je vidět jak s rostoucím počtem kroků narůstá kvalita

nalezeného řešení, ovšem po zhruba třiceti krocích už nedochází k nalezení lepších řešení. Tudíž tento způsob náhodného hledání nepřináší uspokojivou výši odchylky a i počet kroků je relativně vysoký, což není žádoucí.

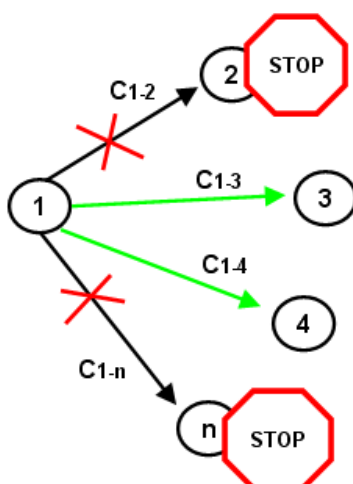
Graf 2: Odchylka od hledané optimální trasy



Zdroj: vlastní

Nabízí se samozřejmě otázka zvyšovat počty paralelních řešení, ovšem tento kvantitativní přístup bude zvyšovat pravděpodobnost potažmo počet kroků pouze lineárně. Efektivnější je kvalitativní změna vyhledávače, která přinese skokové snížení počtu kroků a tu představovala právě implementace poznatku o vyšší míře pravděpodobnosti těch cest, které tvoří optimální trasu. Princip je poté jednoduchý, z matice hodnot C je vypočteno variační rozpětí R , které lze redukovat prostřednictvím zmiňovaného operátoru selekce „ a “. Pokud se tento nastaví např. na hodnotu $a = 0,6$ je horní hranice šestého intervalu kritickou mezí a náhodný výběr přestává být zcela náhodným, protože cesty delší než kritická mez mají nižší pravděpodobnost, že budou zvoleny do optimální trasy (viz obrázek 30), vše v rámci přípustných řešení – výsledek musí tvořit trasu, což je zajištěno sérií podmínkových funkcí. Tyto principy lze využít v jakémkoliv prostředí, pro jednoduchost byl zvolen uživatelsky komfortní a přehledný MS Excel, který není primárně určen ke složitým simulacím a optimalizačním propočtům, což má právě podtrhnout kvality vyvinutého principu řešení.

Obrázek 30: Selektce málo pravděpodobných cest



Zdroj: vlastní

5.3.3 APLIKACE OPERÁTORU SELEKCE V HEURISTICKÉ METODĚ

Na základě výše popsaných poznatků jsem sestavil model s označením E6. Jedná se o model řešící na heuristické bázi problém o velikosti deseti míst. Protože se ukázala dobrá funkčnost modelu resp. metody, provedl jsem následně pokusy zkoumající limity této metody, tedy jak velký problém obchodního cestujícího lze tímto postupem ještě řešit s potřebnou spolehlivostí a dospěl jsem k patnácti bodům, které dokáže řešit model E7. O těchto pokusech a jejich výsledcích bude dále ještě důkladně pohovořeno. V této podkapitole se soustředím na popis fungování modelu potažmo své heuristické metody.

Model E6 je schopen tvořit potenciální optimální (nejkratší) trasy s použitím těch cest resp. vzdáleností mezi jednotlivými body, které jsou nižší než je kritická vzdálenost. Ale přitom je zároveň zajištěna podmínka, že takto sestavované řešení bude vždy přípustným řešením tj. trasa bude procházet všemi body a její konec bude ve výchozím bodu. Hlavní myšlenky a principy fungování modelu E6 ilustruje obrázek 31.

Obrázek 31: Fungování klíčových prvků modelu E6

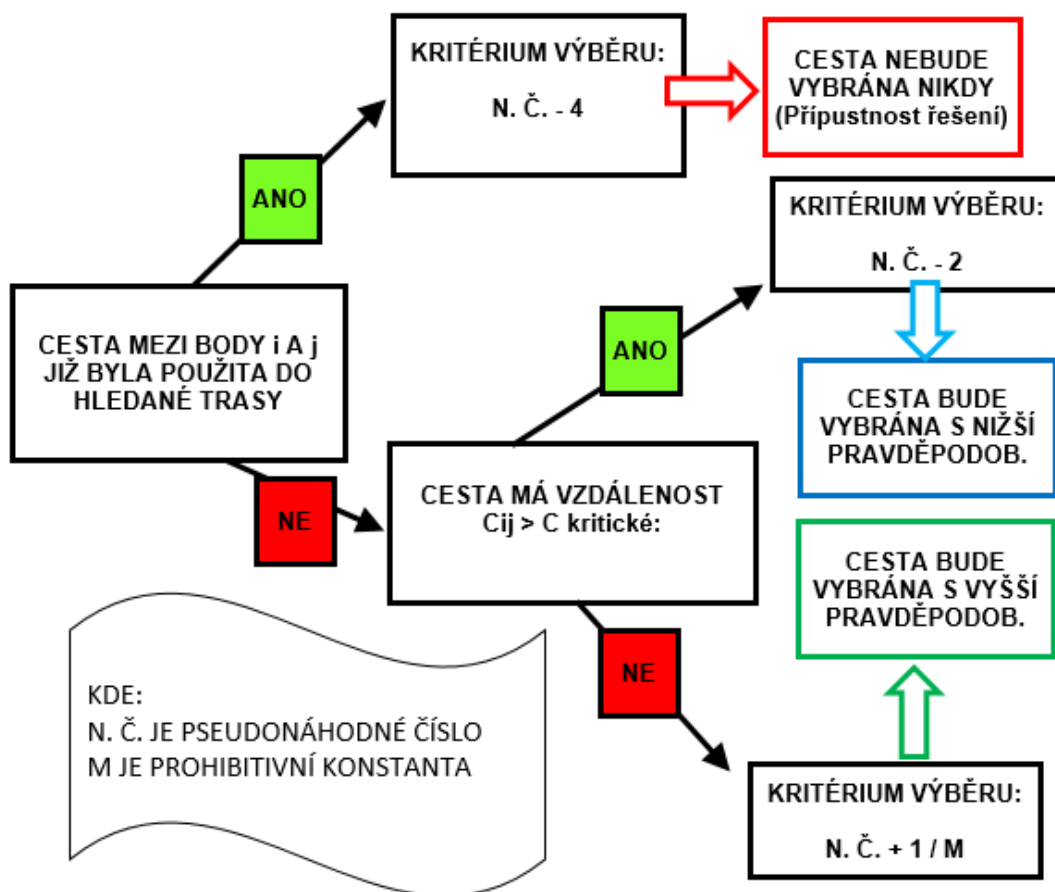
The image displays two screenshots of Microsoft Excel. The top screenshot shows the formula bar with the formula: $=\text{KDYŽ}(\text{H23}=0; -4 + \text{NÁHČÍSLO}(); \text{KDYŽ}(\text{K23} > \$\text{B}\$18; -2 + \text{NÁHČÍSLO}(); \$\text{I}\$7 + \text{NÁHČÍSLO}())$. Below it is a table with columns: N. Č., MAX, místo, sloup, C, N. Č., MAX. A path of cells is highlighted with red circles and arrows, starting at cell 1, moving to 8, and then to 10. A text box below the table says "NALEZENÉ ŘEŠENÍ: 1 - 8 - 10 ATD.". The bottom screenshot shows the formula bar with the formula: $=\text{KDYŽ}(\text{M31}=1; \text{ZNAK}(170); '')$ and a corresponding cell in the table.

Zdroj: vlastní – ukázka z modelu E 6

Nyní se pokusím obrázek 31 okomentovat. Z bodu 1 je další směřování určeno náhodně a to pomocí funkce generující pseudonáhodné číslo z intervalu $\langle 0;1 \rangle$ (dále jen náhodné číslo či zkratka N. Č.). Následující body 2 až 10 jsou vypsány do sloupečku a náhodné číslo před každým bodem provede výběr, vybráno je takové řešení, u kterého padne náhodné číslo nejvyšší, jak je uvedeno Košťálek (2015-b). Tento princip je doplněn systémem dvojí regulace: jestliže totiž cesta znamená nepřipustné řešení, náhodné číslo je poníženo o hodnotu 4, jestliže délka cesty leží za kritickou mezí, je náhodné číslo poníženo o hodnotu 2, jestliže cesta představuje přípustné řešení a její délka leží pod kritickou mezí, potom se jedná pouze o náhodné číslo. Je zřejmé, že v „souboji nejvyšších hodnot“ má největší šanci náhodné číslo, které není poníženo. Např. náhodné číslo snížené o hodnotu 2 má šanci pouze v „souboji“

s jinými náhodnými čísly sníženými o hodnotu 2 (situace, kdy zvolená kombinace prvních bodů „vyčerpala“ cesty s nižší než kritickou délkou), je logické, že čísla snížená o hodnotu 4 v tomto „souboji“ uspět nemohou a tím je zabezpečeno, že výsledkem bude vždy přípustné řešení. Tento princip se opakuje v deseti fázích za sebou určujících trasu mezi deseti body, kde výsledný bod se již v následujících krocích vyskytnout nesmí, což je zajištěno zmiňovaným snížením hodnoty náhodného čísla o hodnotu 4. Takových řešení je pod sebou 500 a výsledkem je dosahování optimálního řešení již v průměru po 4 krocích a maximálně po sedmi krocích, jak je uvedeno v Košťálek (2018-a). Model E7 je postaven na stejném principu, pouze je dimenzován na problém o rozsahu patnácti bodů, proto je výběr maximální hodnoty prováděn z 15-ti hodnot a fází je také 15. Vyšší počet bodů u modelu 15 je vykoupěn vyšším průměrným počtem kroků tohoto algoritmu, který činí 7. Správná identifikace nepravděpodobných průběhů optimálního řešení totiž snižuje počet možností, ze kterých se bude vybírat faktoriálně - viz princip vztahu 19.

Obrázek 32: Schematizace vyhledávacích algoritmů modelu M6 a M7 (princip heuristické metody)



Zdroj: vlastní

Obrázek 32 doplňuje princip fungování popsaný na obrázku 31. Výsledkem jsou pomocné hodnoty, ze kterých je vybíráno maximum, posun do dalšího bodu nastává v tom řádku, kde je maximum, tento řádek je vybrán částečně náhodně, neboť klíč k jeho nalezení obsahuje pseudonáhodné číslo, ale částečně cíleně neboť když od náhodného čísla v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ bude odečtena hodnota snižuje se možnost, aby zde vzniklo maximum.

U bodů, které už v předchozích krocích navštíveny byly se přes sérii logických funkcí vygeneruje odečtení hodnoty 4, tím je zajištěno, že tato cesta nebude vstupovat do výsledné trasy.

U cesty, která by byla delší než kritická hodnota c_{krit} se odečte hodnota 2 tato hodnota nemůže nabývat maxima „v souboji“ s hodnotami, od kterých se nic neodečte, ale výslednou trasu tvořit může. Je zde totiž pamatováno na situaci, kdy algoritmus vygeneruje pořadí např. jedenácti bodů, ovšem je třeba doplňovat zbytek trasy pro zbývající čtyři body, ovšem pro tyto body už jsou vyčerpány všechny přípustné hodnoty z matice C menší než c_{krit} . Kdyby toto opatření chybělo algoritmus by v řadě případů nebyl schopen určit žádné řešení. Jinými slovy hodnota náhodného čísla mínus 2 může „soupeřit“ s jinou hodnotou pseudonáhodného čísla, od kterého je odečtena rovněž hodnota 2. Vždy tak dojde k nalezení řešení, publikováno v Košťálek (2018-a).

U cesty, která by byla naopak kratší než kritická hodnota c_{krit} se neodečte nic a tudíž pomocnou hodnotu tvoří náhodné číslo, protože se však jedná o náhodné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ mohlo by dojít k situaci, že pomocná hodnota bude nulová. Tato hodnota by v algoritmu mohla způsobit potíže, proto jsem zabezpečil, aby taková situace nenastala. Provedl jsem to tím způsobem, že u cest kratších než kritická hodnota je pomocnou hodnotou náhodné číslo navýšené o velmi malou téměř nulovou hodnotu. Takový způsob se v matematických modelech často používá, v některých situacích se pracuje s velmi vysokou hodnotou (jak uvádím v článku Košťálek 2013-c), která se nazývá prohibivní konstantou M (jak uvádí Jablonský (2007. s. 101)), zde potřebuji na opak co nejnižší nenulovou hodnotu, proto jsem ji definoval jako převrácenou hodnotu M .

Na obrázcích 31 a 32, je ilustrován jeden výpočet, ale modely E6 a E7 jich obsahují 500 pod sebou, čili v jednom kroku je vybráno 500 řešení, 500 různě kvalitních tras a z těch je vybrána ta nejkratší. Tím vzniká solidní šance na nalezení nejlepší možné trasy a nebo se jí alespoň velice přiblížit. Navíc celý výpočet vyhledávání řešení lze jednoduše opakovat vygenerováním nových pseudonáhodných čísel, což se v prostředí MS Excel provede stiskem tlačítka F9.

Z empirických pozorování je prokazatelné, že porovnáme-li exaktně (ne heuristicky vyhledané) vypočítané nejlepší řešení s maticí vzájemných vzdáleností C . Neplatí, že optimální trasu tvoří pouze nejkratší vzdálenosti. Kratší vzdálenosti mají pouze vyšší četnost obsažení v optimální trase a tím vyšší pravděpodobnost.

5.3.3.1 URČOVÁNÍ VELIKOSTI OPERÁTORU SELEKCE

Jak bylo řečeno stanovení kritické meze, která redukuje variační rozpětí hodnot délek cest z matice C (vzájemných vzdáleností) závisí na hodnotě operátoru selekce „ a “. Jestliže $a = 0,5$ a jedná se o případ, kdy jsou četnosti délek cest tvořících výslednou trasu opravdu jen v prvních pěti intervalech, nalezneme řešení velice rychle, Košťálek (2015-b). Je-li ovšem rozdělení četností těchto cest do šesti intervalů, řešení nenalezneme. Proto je jistější nastavit tento operátor na hodnotu 0,6 představující záběr šesti intervalů, kde je počet kroků přibližně stejný a je větší jistota, že se o optimální řešení nepřipravíme. Samozřejmě existují málo frekventované případy, kdy se optimální trasa skládá z relativně dlouhé cesty, která leží v intervalu 7 nebo 8. Problém je ovšem v tom, že při nastavení operátoru selekce na vyšší hodnoty se začíná prudce zvyšovat počet možností kudy výslednou trasu vést a tudíž je k nalezení optimálního řešení zapotřebí víc kroků. Provedl jsem 20 testů na modelu pro $n = 10$ bodů, kde nové body byly získány vždy náhodně. Výsledky jsou shrnuty do tab. 2 a grafu 4.

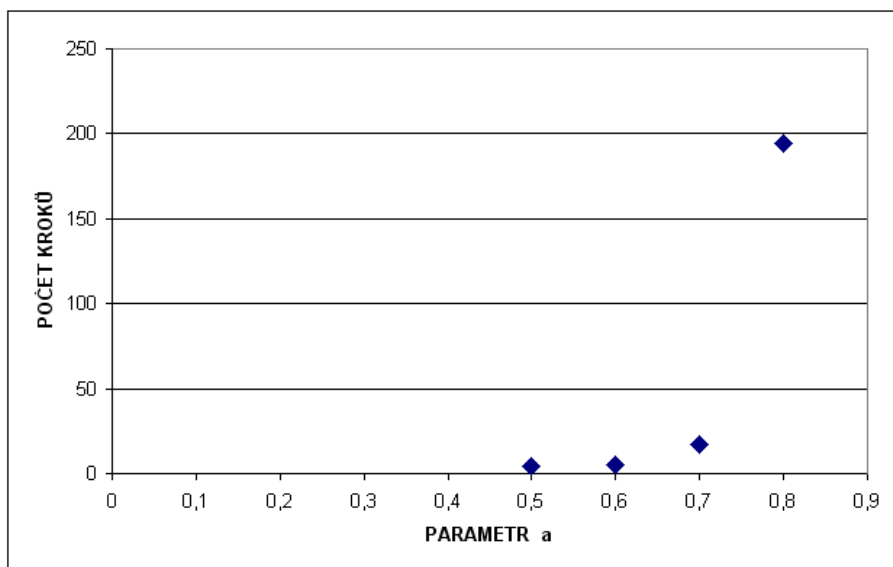
Tabulka 2: Vliv hodnoty operátoru selekce na počtu kroků algoritmu, při $n = 10$

OPERÁTOR SELEKCE – a	0,5	0,6	0,7	0,8
POČET KROKŮ - k	4	5	17	194

Poznámka: Jedná se o průměrné hodnoty z dvaceti testů.

Zdroj: vlastní

Graf 4: Vliv operátoru selekce na počet kroků algoritmu, při $n = 10$



Poznámka: Jedná se o průměrné hodnoty z dvaceti testů

Zdroj: vlastní

Pokud se operátor selekce rovná přímo jedné, situace se vrátí do polohy před regulací ve vyhledávání pomocí selekce, jak je patrné z grafu 4 hodnoty $a = 0,8$ a $0,9$ už se jí velice blíží. Pokusy ukázaly, že nejvýhodnější hodnotou operátoru selekce je $a = 0,6$, jak je popsáno v Košťálek (2015-c). Jestliže toto nastavení znemožňuje nalezení optimální trasy, jejíž cesta leží ve vyšším intervalu než 6, dostaneme suboptimální řešení, není tím nejlepším, ale jeho odchylka δ je přibližně 5 %. Lze konstatovat, že při hodnocení dvou kritérií, počet kroků a odchylka od maximálního možného řešení, je hodnota $a = 0,6$ velice vhodná a popisovaný model funguje úspěšně.

Závěrem této podkapitoly je třeba učinit důležitou poznámku: Uvedl jsem, že model E7 umí vyřešit problém o velikosti $n = 15$ míst, což ovšem neznamená, že počet míst musí být nutně přesně 15. Korektnější vyjádření by znělo, že model umí vyřešit problém pro jakýkoliv počet bodů nižší nebo rovný patnácti. Pokud by například vyvstal požadavek na vyřešení problému čítající pouze 12 bodů. V matici souřadnic B , která je dimenzována na 15 řádků by bylo vyplněno souřadnicemi jen 12 řádků, pokud by zbývající tři řádky nezůstaly vyplněné model v prostředí MS Excel by je považoval za nulové hodnoty a pracoval by s jedním bodem navíc o souřadnicích $[0;0]$, jak popisují v Košťálek (2013-f). Snadným východiskem je zadat na všechna místa chybějících bodů souřadnice kteréhokoliv bodu, který už byl zadán – stejný bod bude nyní v matici souřadnic B figurovat v tomto případě čtyřikrát. Důsledkem bude, že

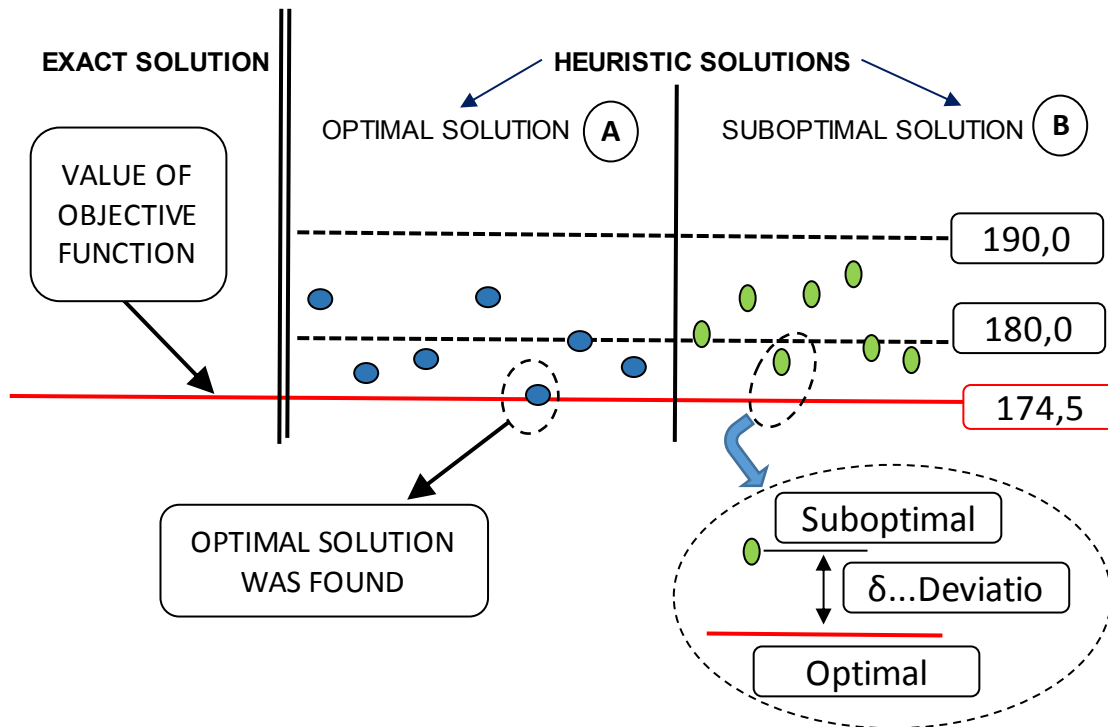
vzájemné vzdálenosti mezi těmito body v matici C budou nulové, proto nedojde k ovlivnění hodnoty účelové funkce – délky výsledné trasy, ve výsledné trase budou tyto tři fiktivní body sice figurovat, ale protože jsou fiktivní lze je ignorovat (na pořadí bodů tvořících optimální trasu nemají žádný vliv), jak je popsáno v Košťálek (2015-c).

5.3.4 OVĚŘENÍ FUNKČNOSTI HEURISTICKÉ METODY

Abych mohl vědecky prokázat přednosti svého modelu potažmo své metody, provedl jsem několik testů. Řeším problém s patnácti místy. Algoritmus (model E7) provede sedm kroků (výběrů), což zabere zhruba 7 vteřin času. Obdržím sedm řešení. Dovoluji si vyslovit hypotézu, že nejlepší ze sedmi řešení je zároveň řešení optimální. Optimální řešení vzniklo vyřešením matematického bivalentního modelu v software *LINGO* a s ním porovnávám heuristický model. Počet kroků algoritmu (modelu) vedoucí k nalezení optimálního rozdělení budu považovat za náhodnou veličinu. Testovat budu hypotézu, že střední hodnota této náhodné veličiny (počtu kroků vedoucích k nalezení optima) je vyšší než sedm.

Potom jsou, ale i situace, kdy model optimální řešení nenajde, ale jeho řešení je optimálnímu řešení blízké (odchylka je velmi malá). Obě situace ilustruje obrázek 33. Potom zjišťuji, jak moc se sub optimální řešení liší od optimálního řešení.

Obrázek 33: Odchylka sub optimálního řešení od optimálního řešení



Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2018-a)

Aby mohl být proveden klasický statistický test střední hodnoty je třeba ověřit předpoklad, že počty kroků algoritmu (viz tabulka 3) podléhají normálnímu rozdělení. Pro lepší srozumitelnost se nebudu odklánět od tématu a kompletní pomocné výpočty ověřující tuto skutečnost uvádím v další podkapitole. V tuto chvíli budu normální rozdělení hodnot pouze předpokládat. Uvažuji nulovou hypotézu H_0 : říkající, že střední hodnota počtu kroků algoritmu převyšší sedm kroků, tuto hypotézu statistický test buď zamítne nebo nezamítne.

$$H_0: \mu \geq \mu_0 = 7; H_1: \mu \leq \mu_0 = 7; \text{ pro } \alpha = 5 \% \quad (21)$$

Tabulka 3: Počet kroků algoritmu

Pokus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Poč. kroků algoritmu	3	6	9	7	5	5	8	3	4	6	9	5	5	7

Zdroj: vlastní

Testovací kritérium (zdroj: Hindls, 2007, s. 138-139):

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{5,85 - 7}{1,956} \cdot \sqrt{14} = -2,19 \quad (22)$$

Kritická hodnota:

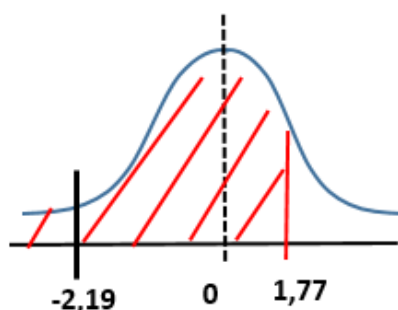
$$t_{1-\alpha}[n-1] = t_{0,95}[14-1] = 1,77 \quad (23)$$

Kde $t_{0,95}$ je kritická hodnota pro 95% pravděpodobnost studentova rozdělení (též označovaného jako T-rozdělení).

Výsledek testu:

Pokud hodnota testovacího kritéria leží v kritické oblasti (v tomto případě je nižší než kritická hodnota) hypotéza H_0 bude zamítnuta. Na obrázku 34 je kritická oblast zamítající nulovou hypotézu vyznačena vyšrafováním.

Obrázek 34: Grafické znázornění zamítnutí hypotézi H_0



Zdroj: vlastní

Hypotéza H_0 říkájící, že střední hodnota počtu kroků algoritmu bude vyšší než 7, byla zamítnuta na hladině významnosti $\alpha = 5 \%$, jak je uvedeno v Košťálek (2018-a).

Důležitý závěr je ten, že k nalezení optimálního řešení většinou postačuje pouze 7 kroků. Jak bylo zmíněno, v některých případech 7 kroků k nalezení optimálního řešení nestačí, ale nejlepší řešení, které se podaří nalézt se od optimálního řešení příliš neodchyluje a právě tuto odchylku se pokusím kvantifikovat. K výpočtu použiji intervalový odhad střední hodnoty. Tento výpočet lze opět nasadit pouze tam, kde se hodnoty řídí normálním rozdělením. Tento předpoklad jsem ověřil v podkapitole 5.3.4.1 pomocí Kolmogoromova-Smirnovova testu (na hladině významnosti $\alpha = 5 \%$ a $\alpha = 10 \%$) a oba testy potvrdili normální rozdělení hodnot.

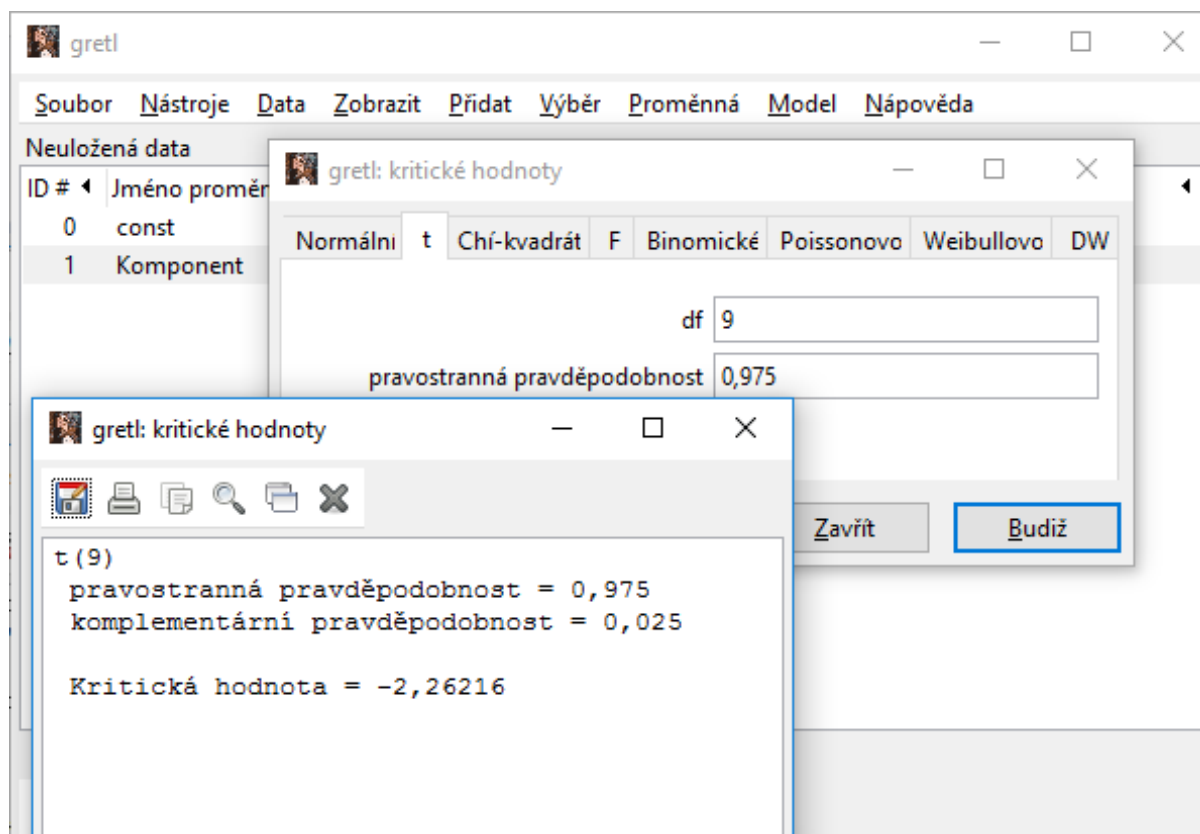
$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}[n-1] \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \delta < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}[n-1] \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (24)$$

$$\text{Kde } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (25)$$

a jedná se o výběrovou směrodatnou odchylku. (Zdroj: Hindls, 2007, s. 123-124).

Do vztahu 24 dosadím konkrétní hodnoty z tab. 4, při obvyklé hladině významnosti $\alpha = 5\%$, která poslouží k výpočtu hodnoty T-rozdělení (Studentova rozdělení) viz obr. 35 a obdržím vztahy 26 a 27.

Obrázek 35: Výpočet kvantilu T-rozdělení pomocí SW Gretl



Zdroj: vlastní

Tabulka 4: Odchyly suboptimálních a optimálních řešení

Pokus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odchylka δ [%]	1,5	4,0	5,1	8,7	6,8	7,1	5,4	3,3	2,5	4,9

Zdroj: vlastní

$$P(4,93 - 2,26 \cdot \frac{2,21}{\sqrt{10}} < \delta < 4,93 + 2,26 \cdot \frac{2,21}{\sqrt{10}}) = 0,95 \quad (26)$$

$$P(3,35 < \delta < 6,51) = 0,95 \quad (27)$$

Intervalový odhad střední hodnoty říká, že pokud dochází k odchylce od optimálního řešení, tato odchylka se pohybuje v intervalu 3,35 % až 6,51 % a to s pravděpodobností 95 %, jak je uvedeno v Košťálek (2018-a).

5.3.4.1 OVĚŘENÍ PODMÍNKY NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ U STATISTICKÝCH TESTŮ

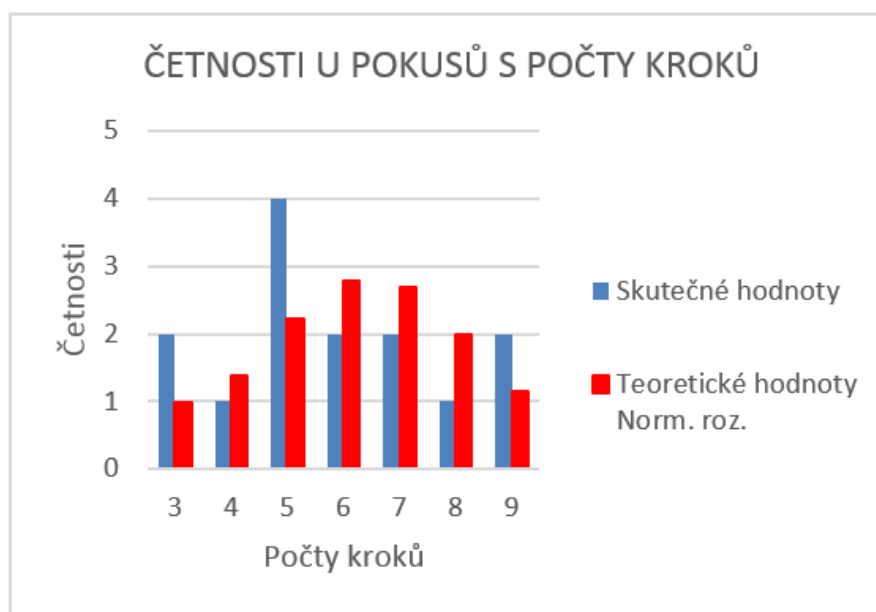
V podkapitole 5.3.4. pracuji s předpokladem, že počet kroků k , které musí algoritmus učinit, aby našel optimální řešení je náhodnou veličinou řídící se normálním rozdělením pravděpodobnosti (resp. Gauss–Laplaceovým rozdělením, jak uvádí Holický (2015, s. 57)). A tentýž předpoklad jsem vyslovil pro odchylky δ sub-optimálních řešení od optimálních řešeních. Pokud by tento intuitivní předpoklad neplatil nebylo by možné použít výše uvedené metody a proto je třeba provést pomocné výpočty potvrzující zmíněný předpoklad. Použiji dvě obvykle používané metody: χ^2 test (chí-kvadrát test), též označován jako test dobré shody a Kolmogorovův-Smirnovův (dále K-S) test. V obou testech použiji obvyklou hodnotu hladiny významnosti $\alpha = 5 \%$ jak uvádí např. Kožíšek (2002-b, s. 156) nebo Hindls (2007, s. 121).

Tabulka 4: Počty kroků algoritmu a jejich četnosti

Počet kroků k	3	4	5	6	7	8	9
Četnosti n_i	2	1	4	2	2	1	2

Zdroj: vlastní – uspořádané hodnoty z tab. 3

Graf 5: Počty kroků algoritmu a ověření předpokladu normálního rozdělení



Zdroj: vlastní

a) χ^2 test – pro počty kroků

Vztah 28 uvádí výpočet testovacího kritéria,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i} \quad (28)$$

kde:

n_i znamená skutečnou četnost

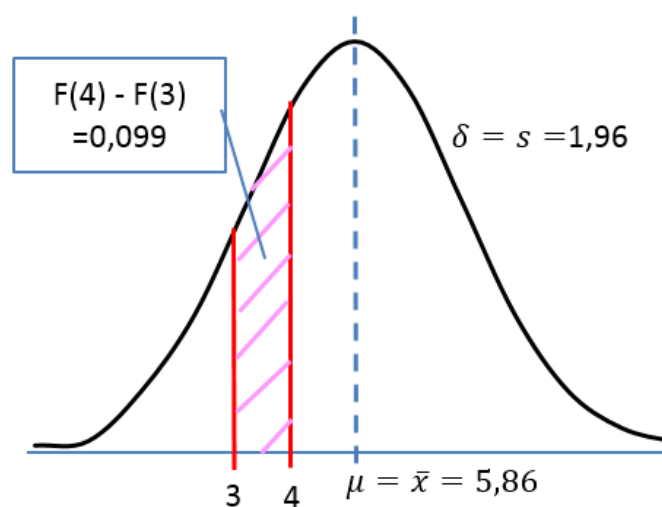
$n \cdot \pi_i$ znamená teoretickou četnost, přičemž musí platit podmínka $n \cdot \pi_i \geq 5$, jak uvádí Kožíšek (2002-a, s. 176).

Vztah 29 uvádí výpočet kritické hodnoty,

$$\chi_{1-\alpha}^2 [s-k-1] \quad (29)$$

kde výraz v hranaté závorce označuje počet stupňů volnosti pro χ^2 rozdělení pravděpodobnosti, s je počet redukováných tříd hodnot, k je počet odhadovaných parametrů. Pracuji se zmíněným normálním rozdělením pravděpodobnosti, které má dva parametry μ , σ , proto $k = 2$ viz obrázek 36. Střední hodnota normálního rozdělení μ byla odhadnuta jako vážený aritmetický průměr a směrodatná odchylka normálního rozdělení byla odhadnuta pomocí vážené výběrové směrodatné odchylky z hodnot v tabulce 4.

Obrázek 36: Princip odhadu parametrů normálního rozdělení



Zdroj: vlastní

Teoretická pravděpodobnost, že počet kroků je 4 činí 0,099 (9,9%) tato hodnota odpovídá hodnotě π_i ze vztahu 28. Jestliže je hodnot celkem 14 snadno lze dopočítat teoretickou četnost jako 9,9 % ze 14, což je 1,39 a tato hodnota odpovídá výrazu $n \cdot \pi_i$ ze vztahu 28. Tímto způsobem se dopočítají teoretické hodnoty dané normálním rozdělením a ty budu pomocí χ^2 testu a K-S testu konfrontovat se skutečnými hodnotami z tabulky 4. Pokud jde o hodnotu pravděpodobnosti 0,099 z obrázku 36, jedná se o plochu pod křivkou, kterou lze obecně určit integrálem, ale zde je problém, že ne každý integrál lze vypočítat. A funkce popisující křivku Gauss-Laplaceova normálního rozdělení je právě tímto případem, jak uvádí Holický (2015, s. 57). Proto jsem k výpočtu těchto pomocných hodnot použil statistickou funkci NORM.DIST v programu MS Excel jak uvádí obrázek 37.

Obrázek 37: Způsob určení pravděpodobností normálního rozdělení

G	H	I	J
k	ni	π_i	$\pi_i \cdot n$
3	2	0,0706	0,989
4	1	0,0991	1,388
5	4	0,1594	2,232
6	2	0,1985	2,78
7	2	0,1914	2,68
8	1	0,1429	2
9	2	0,0826	1,156
Σ	14	0,9446	13,22

Argumenty funkce

NORM.DIST

X: G26 = 3

Střed_hodn: \$N\$25 = 5,857142857

Sm_odch: \$N\$26 = 1,955550006

Kumulativní: 1 = PRAVDA

Vrátí hodnotu normálního rozdělení pro zadanou střední hodnotu a směrodatnou odchylku. X je hodnota, pro kterou chcete zjistit rozdělení.

Výsledek = 0,0991

Nápověda k této funkci

OK

Zdroj: vlastní

(Jinou možností je transformace normálního rozdělení na normované normální rozdělení, kde mají parametry hodnoty $\mu = 0$ a $\sigma = 1$ a pro toto rozdělení jsou k dispozici numerické hodnoty ve statistických tabulkách.)

Hodnoty $n \cdot \pi_i$ na obrázku 36 (sloupeček J) musí být vyšší než 5, aby byla tato podmínka splněna je třeba provést redukci počtu tříd, jinými slovy některé intervaly se sloučí a četnosti sečtou tak, aby tato podmínka platila viz tabulka 5.

Tabulka 5: Redukce počtu tříd

k	n _i		π _i •n		π _i •n > 5
3	2	} 9,0	0,989	} 7,3884	
4	1		1,388		
5	4		2,232		
6	2		2,78		
7	2	} 5,0	2,68	} 5,8362	
8	1		2		
9	2		1,156		

Zdroj: vlastní

Nyní mohu hodnoty z tabulky 5 dosadit do vztahu 28, čímž obdržím vztah 30.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i} = \frac{(9 - 7,3884)^2}{7,3884} + \frac{(5 - 5,8362)^2}{5,8362} = 0,4713 \quad (30)$$

Ze vztahu 30 jsem vypočítal hodnotu testovacího kritéria χ^2 testu. Nyní dosadím do vztahu 29 a obdržím vztah 31 udávající horní kvantil kritické hodnoty χ^2 rozdělení.

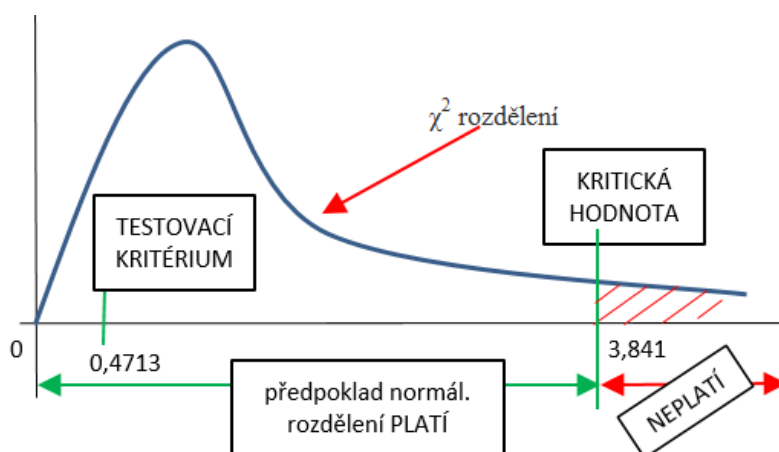
$$\chi_{1-\alpha}^2_{[s-k-1]} = \chi_{0,95}^2_{[2-2-1]} \approx \chi_{0,95}^2_{[1]} = 3,841 \quad (31)$$

Zde vzniká problém, jelikož počet redukovaných tříd dat označených s se snížil pouze na 2 (viz tabulka 5), potom by hodnota v hranatých závorkách představující počet stupňů volnosti byla teoreticky -1. Tato hodnota stejně jako hodnota nula není definována. Proto použiji hodnotu +1. Poté jsem našel v tabulkách (Kožíšek (2002-b, s. 43)) hodnotu 3,841 říkající, že χ^2 rozdělení má 95 % svých hodnot koncentrováno pod křivkou ohraničenou mezi 3,841.

Závěr je, že hodnota testovacího kritéria 0,4713 < 3,841, proto se mi podařilo na hladině významnosti $\alpha = 5$ % dokázat, že počty kroků, (které můj algoritmus při nalezení optimálního řešení vykoná), mají normální rozdělení. Tento test je poznamenán zmiňovanou úpravou počtů stupňů volnosti, ale jelikož rozdíl mezi hodnotou testovacího kritéria a kritickou hodnotou je velmi markantní je zde silný argument proč se domnívat, že tomu tak skutečně je. Nicméně dále provedu ještě jiný způsob testování pomocí Kolmogorovova-Smirnovova (K-S) testu, který je koncipován na zcela jiných principech

(porovnává totiž rozdíly distribučních funkcí základního a výběrového rozdělení), neobsahuje podmínku, že teoretická četnost musí být vyšší než 5 a proto zde podobný problém nenastane. Navíc výsledky K-S testu mají větší vypovídající hodnotu (sílu) než χ^2 test, jak popisuje Kubanová (2004, s. 86). I když se na tento typ zadání problému χ^2 test příliš nehodí úmyslně

Obrázek 38: Výsledek testu



Zdroj: vlastní

jsem ho použil z toho důvodu, abych ukázal jeho slabiny jako argument pro využití K-S testu.

Nyní ještě zbývá otestovat, zda se normálním rozdělením řídí také hodnoty odchylek přibližného a optimálního řešení. Jelikož mám k dispozici pouze deset pokusů (viz tabulka 4), zcela jistě se budou opakovat limity χ^2 testu, který zde selhává, jako tomu bylo v případě testování hodnot počtu kroků. Proto pro tyto hodnoty raději použiji zmíněný K-S test, jehož velkou předností je schopnost fungování i v těchto situacích, kdy je počet dat relativně malý.

b) Kolmogorovův-Smirnovův (K-S) test pro počty kroků

Testovací kritérium se zde vypočte podle vztahu 32, jak uvádí Kožíšek (2002-a, s. 186).

$$D(n) = \frac{1}{n} \max |N_i - \hat{N}_i| \quad (32)$$

Kde:

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j ; \quad \hat{N}_i = \sum_{j=1}^i \hat{n}_j ; \quad n \text{ je počet hodnot}$$

Pro počet kroků potom pomocí vztahu 32 vypočítám hodnotu testovacího kritéria $D(14) = 0,171$ (použil jsem pomocné hodnoty z výpočtů ve výše uvedeném χ^2 testu). Tuto hodnotu porovnám s kritickou hodnotou, která je dána obecným zápisem daným vztahem 33.

$$D_{1-\alpha}(n) = D_{1-0,05}(14) = D_{0,95}(14) = 0,34890 \quad (33)$$

Test je prováděn na hladině významnosti $\alpha = 5 \%$, kritická hodnota závisí na tomto parametru a počtu hodnot jak popisuje vztah 33. Samotnou hodnotu jsem našel v tabulkách Bolšev (1983, s. 347). Jelikož je hodnota testovacího kritéria mimo kritickou oblast, $0,171 < 0,34890$ test ukazuje, že empirické hodnoty – počty kroků algoritmu se řídí normálním rozdělením.

Na tomto místě provedu ještě jednu úvahu a tou je „zpřísnění“ testu tím, že parametr α představující hladinu významnosti zvýším na 10% (viz vztah 34).

$$D_{1-\alpha}(n) = D_{1-0,1}(14) = D_{0,9}(14) = 0,31417 \quad (34)$$

Opět jsem pro parametry 10% a 14 odečetl tabulkovou hodnotu, Bolšev (1983, s. 347). I v tomto případě je hodnota testovacího kritéria ($0,171$) znatelně nižší než kritická hodnota ($0,31417$). Čili K-S test potvrzuje signifikantní shodu empirických hodnot s teoretickými hodnotami normálního rozdělení.

c) Kolmogorovův-Smirnovův (K-S) test pro hodnoty odchylek

Nyní otestuji shodu hodnot odchylek s normálním rozdělením, (jedná se o odchylky v délkách tras vypočítaných exaktně a heuristickou metodou, hodnoty jsou v procentech). Hodnoty odchylek uvedené v tabulce 4 jsem zpracoval v tabulce 6, kde jsou doplněny další pomocné výpočty potřebné pro K-S test. Výstupní hodnota z tabulky 6 je označena tučně – jedná se o maximum z absolutních hodnot rozdílů kumulovaných četností skutečných a teoretických (resp. vypočítaných pro normální rozdělení). Tyto výpočty odpovídají výše uvedenému vztahu 32, žlutá hodnota (maximální rozdíl) je následně podělena počtem hodnot, v tomto případě $n = 10$.

Tabulka 6: Hodnoty odchylek v intervalovém rozdělení a pomocnými výpočty

X_d	X_h	n_i	$F(2) - F(1)$	Teoretická četnost	N_i	N_i teoretická.	$N_i - N_i$ teoret.
1	2,5	2	0,0995	0,995	2	0,995	1,004
2,5	4	2	0,2035	2,035	4	3,031	0,969
4	5,5	3	0,2662	2,662	7	5,693	1,306
5,5	7	1	0,2226	2,226	8	7,920	0,080
7	8,5	1	0,1190	1,190	9	9,110	-0,110
8,5	9	1	0,0197	0,197	10	9,307	0,693

Zdroj: vlastní

Potom hodnota testovacího kritéria bude: $D(10) = 0,1306$ a kritické hodnoty opět odečtu z tabulek, kde uvádí Bolšev (1983, s. 347), pro hladiny významnosti: $\alpha = 5 \%$ kritickou hodnotu $D_{0,95}(10) = 0,40925$ a pro $\alpha = 10 \%$ kritickou hodnotu $D_{0,9}(10) = 0,36866$. V obou případech je hodnota testovacího kritéria hluboko pod kritickou mezí, takže lze s vysokou mírou spolehlivosti tvrdit, že také pro hodnoty odchylek platí normální rozdělení.

Hlavním závěrem této podkapitoly je fakt, že se mi podařilo signifikantně prokázat částečně pomocí χ^2 testu, ale především pomocí Kolmogorova-Smirnovova testu (na hladinách významnosti $\alpha = 5 \%$ a dokonce i $\alpha = 10 \%$), že empirická data získaná z mých pokusů se řídí normálním rozdělením. Jedná se o počet kroků k algoritmu z mé heuristické metody a o odchylku δ mezi délkou nejkratší trasy získanou exaktním výpočtem a heuristickým vyhledáváním. Potvrzení tohoto předpokladu znamená, že použité metody v podkapitole 5.3.4 pro testování hypotéz týkajících se maximálního počtu kroků a intervalový odhad, ve kterém se odchylka pohybuje, byly správné. Pokud by se u hodnot normální rozdělení nepotvrdilo musel bych použít pro maximální počet kroků např. neparametrický Wilcoxonův test a pro rozmezí odchylky konfidenční interval spolehlivosti pro medián, jak uvádí Kožíšek (2002-b, s. 116).

5.3.5 MNOU POPSANÉ ZÁKONITOSTI, KORELACE A FUNKCE

V předchozí části své práce se mi podařilo na základě empirického pozorování identifikovat určité zákonitosti, které jsem použil k řešení úlohy obchodního cestujícího. Některé parametry se mi podařilo pomocí statistických testů s dostatečně vysokou mírou spolehlivosti kvantifikovat. Na tomto místě své práce se zabývám pozorováním, analýzou a zobecněním některých vztahů mezi určitými veličinami, jejichž chování je podstatné pro tvorbu heuristických modelů a algoritmů i proto, že rozšiřuje lidské poznání o nové souvislosti, další úhly pohledu na problém a identifikaci statistického pozadí celého problému.

Předmětem mého zájmu bude hledání následujících závislostí:

$$\blacktriangle k = f(n)$$

Jak závisí počet kroků algoritmu na počtu míst, pro které je problém řešen?

$$\blacktriangle \delta = f(n)$$

Jak závisí velikost odchylky mezi optimem trasy získaným exaktně a optimem získaným heuristickou metodou?

$$\blacktriangle k = f(a)$$

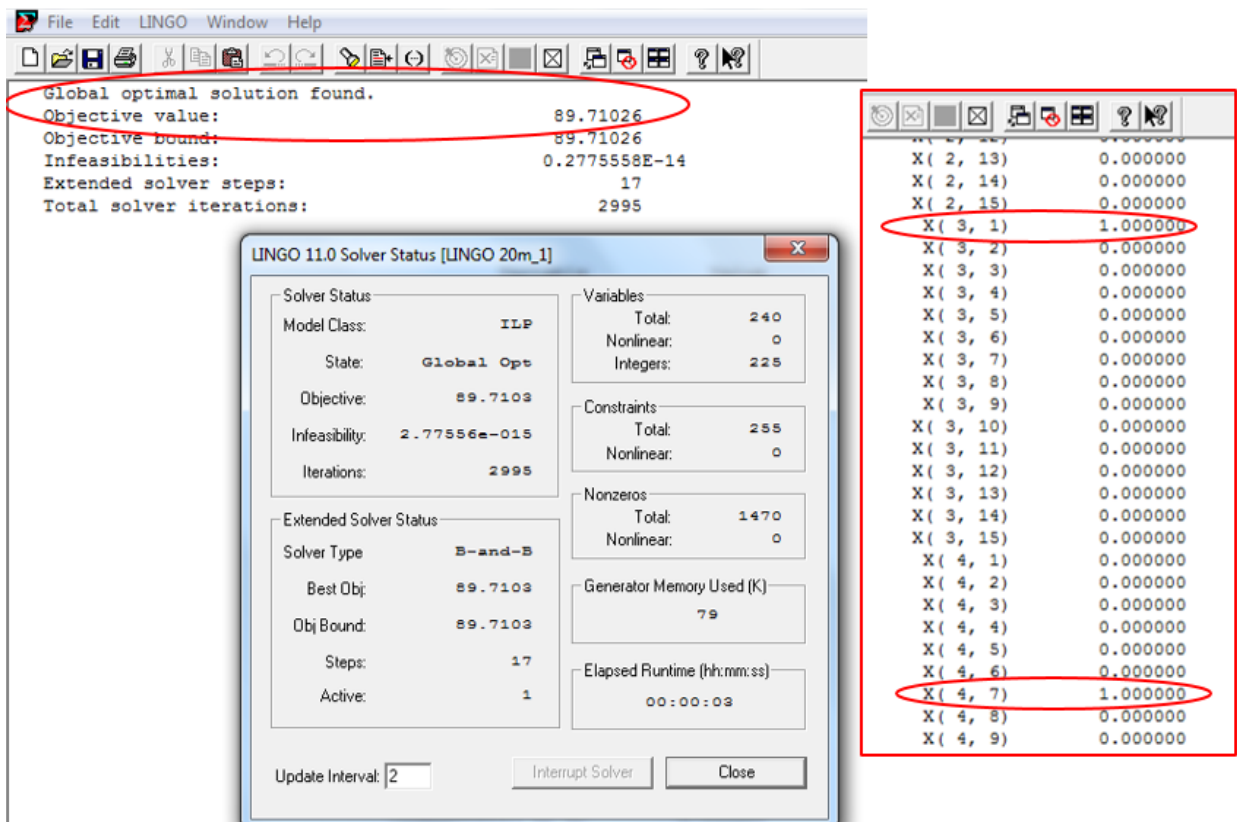
Jak závisí počet kroků algoritmu na nastaveném operátoru selekce používaném v heuristických modelech E6 a E7

$$\blacktriangle a = f(\alpha_3, \alpha_4)$$

Určení vhodné velikosti operátoru selekce na základě koeficientů asymetrie (α_3) a špičatosti (α_4) v rozdělení četností hodnot (vzájemných vzdáleností mezi body) z matice C .

V případě experimentu hledajícího odpověď na otázku jakým způsobem se zvyšuje počet kroků algoritmu i odchylka mezi opravdu nejlepším řešením a nejlepším řešením získaným tímto algoritmem v závislosti na počtu míst n . Jsem postupoval tak, že jsem zmiňovaný model E7 rozšířil z 15-ti až na 20 bodů. Následně jsem pomocí náhodných čísel získal souřadnice náhodných bodů. Pro tyto náhodné body jsem provedl výpočet optimální trasy vyřešením matematického modelu pomocí programu *LINGO* viz obrázek 39. Tím jsem získal hodnotu nejkratší možné trasy splňující podmínky úlohy obchodního cestujícího. Stejnou úlohu jsem se následně pokoušel řešit pomocí svého modelu (algoritmu – heuristické metody), jehož princip a fungování byl předmětem předchozích podkapitol. Získané výsledky jsem porovnával s akcentem na sledování zmíněného počtu kroků a vzniklých odchylek.

Obrázek 39: Ukázka exaktního výpočtu v systému LINGO



Zdroj: vlastní

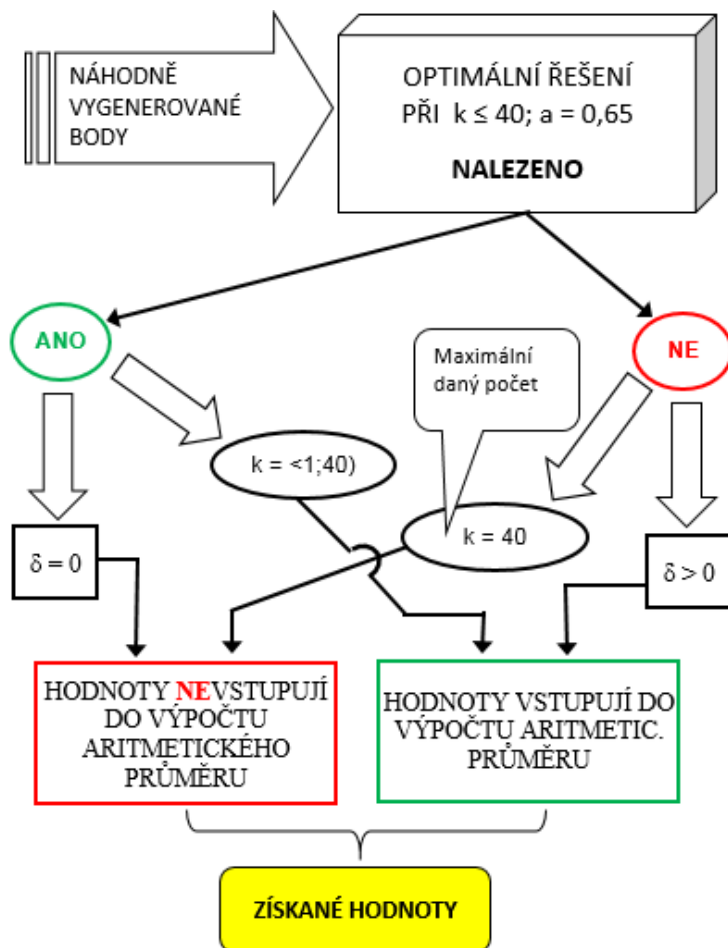
Obrázek 39 popisuje ukázkou práce s optimalizačním programem *LINGO*, kde je uveden příklad problému, ve kterém vyšla délka optimální trasy 89,71 délkových jednotek a tato trasa vede z bodu 1 do bodu 3, z bodu 4 do bodu 7 atd.

Experiment jsem prováděl při hodnotě operátoru transformace $a = 0,65$, což je výhodný kompromis mezi počtem kroků algoritmu a minimalizace rizika odstranění těch řešení, které by mohli vést k optimální hodnotě. Výsledkem mohli být dva stavy. Algoritmus najde přímo optimální řešení potom nemá smysl hovořit o odchylce (δ), neboť její hodnota je nula. Druhým stavem je nenalezení optimálního řešení při mezním počtu kroků, který jsem stanovil jako

$k = 40$ a potom má smysl počítat odchylku mezi sub optimálním a optimálním řešením. Bohužel tyto dva stavy se kombinují jak ukazují tabulky 7 a 8. Jestliže počítám počty kroků algoritmu např. pro $n = 20$ míst, dostávám situaci, kde pro některé pokusy bylo optimální řešení nalezeno, ale pro většinu ne. Potom mě zajímá velikost odchylky, která je ovšem v jednom případě nulová. Protože potřebuji výsledky pokusu nějakým způsobem sumarizovat, spočítal jsem průměrný počet kroků (k s pruhem) a průměrnou odchylku (δ s pruhem). Přitom

pokud algoritmus optimum nenašel nemá smysl počítat v aritmetickém průměru s hodnotou 40 a naopak pokud algoritmus optimum našel nemá smysl počítat v aritmetickém průměru s hodnotou odchylky nula. Vycházím z toho, že např. odchylka o hodnotě 9,3 % v prvním řádku tabulky 7 mohla vzniknout např. už po 10-ti krocích a proto by hodnota 40 nebyla přesná (protože by byla vysoká), také může nastat situace, že optimum bude nalezeno, ale až po např. 80-ti krocích potom by rovněž hodnota 40 nebyla přesná (protože by byla nízká) viz obrázek 40. Ovšem z logiky fungování celého algoritmu potažmo z podstaty principu mého modelu E7 dochází k jevu, kdy si heuristická metoda přístup k optimálnímu řešení sama uzavře prostřednictvím operátoru selekce, z čehož plyne, že zvyšování počtu kroků nepřinese efekt. Na celý experiment lze nazírat také tím způsobem, že jde o otestování maximálních možností pro fungování modelu E7 a stanovení limitů heuristické metody viz zjištěné údaje.

Obrázek 40: Schematizace výpočtu pomocných hodnot



Zdroj: vlastní

Tímto způsobem jsem získal hodnoty uvedené v tabulkách 7, 8 a 9.

Tabulka 7: Hodnoty získané experimentem pro n větší než 15, při $a = 0,65$

n	k	\bar{k}	Nalezení minima	δ [%]	$\bar{\delta}$ [%]
20	40	ned.	NE	9,3	11,3
20	40		NE	11,8	
20	32		ANO	0,0	
20	40		NE	10,1	
20	40		NE	14,0	
18	35	ned.	ANO	0,0	8,2
18	40		NE	12,1	
18	27		ANO	0,0	
18	40		NE	2,9	
18	40		NE	9,6	
16	10	11,33	ANO	0,0	5,45
16	40		NE	6,1	
16	9		ANO	0,0	
16	15		ANO	0,0	
16	40		NE	4,8	

Zdroj: vlastní

Pro rozsah 20 a 18 míst nebylo možné stanovit aritmetický průměr z počtu kroků algoritmu, protože u většiny z pěti pokusů byl dosažen limitní počet kroků ($k = 40$) bez nalezení optimálního řešení. Červeně označená hodnota v případě $n = 16$ signalizuje, že do aritmetického průměru nebyly započítány hodnoty 40 a 40, u kterých nebylo nalezeno optimální řešení (minimum funkce - trasy).

Tabulka 8: Hodnoty získané experimentem pro n 10 až 15, při $a = 0,65$

n	k	\bar{k}	Nalezení minima	δ [%]	$\bar{\delta}$ [%]
14	9	7,25	ANO	0,0	4,9
14	40		NE	4,9	
14	4		ANO	0,0	
14	6		ANO	0,0	
14	10		ANO	0,0	
12	6	5,4	ANO	0,0	0
12	8		ANO	0,0	
12	3		ANO	0,0	
12	4		ANO	0,0	
12	6		ANO	0,0	
10	4	4,2	ANO	0,0	0
10	5		ANO	0,0	
10	4		ANO	0,0	
10	3		ANO	0,0	
10	5		ANO	0,0	

Zdroj: vlastní

Jak je patrné pro rozsah problému menší než $n = 12$ je optimální řešení nalezeno ve všech případech.

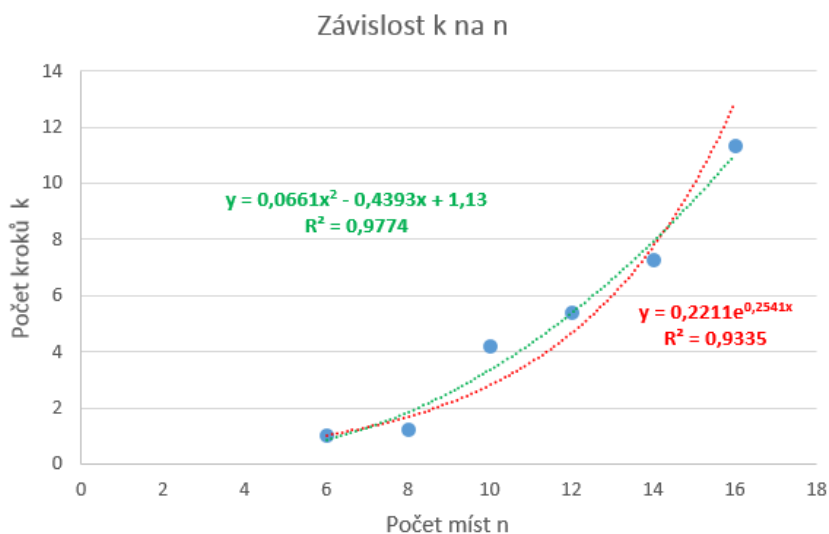
Tabulka 9: Hodnoty získané experimentem pro $n < 10$, při $a = 0,65$

n	k	\bar{k}	Nalezení minima	δ [%]	$\bar{\delta}$ [%]
8	1	1,2	ANO	0,0	0
8	1		ANO	0,0	
8	2		ANO	0,0	
8	1		ANO	0,0	
8	1		ANO	0,0	
6	1	1	ANO	0,0	0
6	1		ANO	0,0	
6	1		ANO	0,0	
6	1		ANO	0,0	
6	1		ANO	0,0	

Zdroj: vlastní

I přes jistou míru zmíněných rušivých vlivů, kdy např. není možné získat vždy přesné hodnoty včetně problému s relativně nízkým počtem hodnot daným velkou pracností každého pokusu (generování náhodných bodů, výpočet v programu *LINGO*, výpočet v modelu E7, komparace získaných výsledků) se mi podařilo nasbírat data popisující chování heuristické metody i algoritmu fungujícím v modelu E7. I přes zmíněné nepřesnosti jsou hlavní rysy dobře patrné. Získané hodnoty jsou interpretovány také graficky viz grafy 6 a 7. Kde jsem použil nástroj pro vložení vyrovnávacích křivek k nalezení modelu popisující dané závislosti schopného interpolace trendu na další hodnoty.

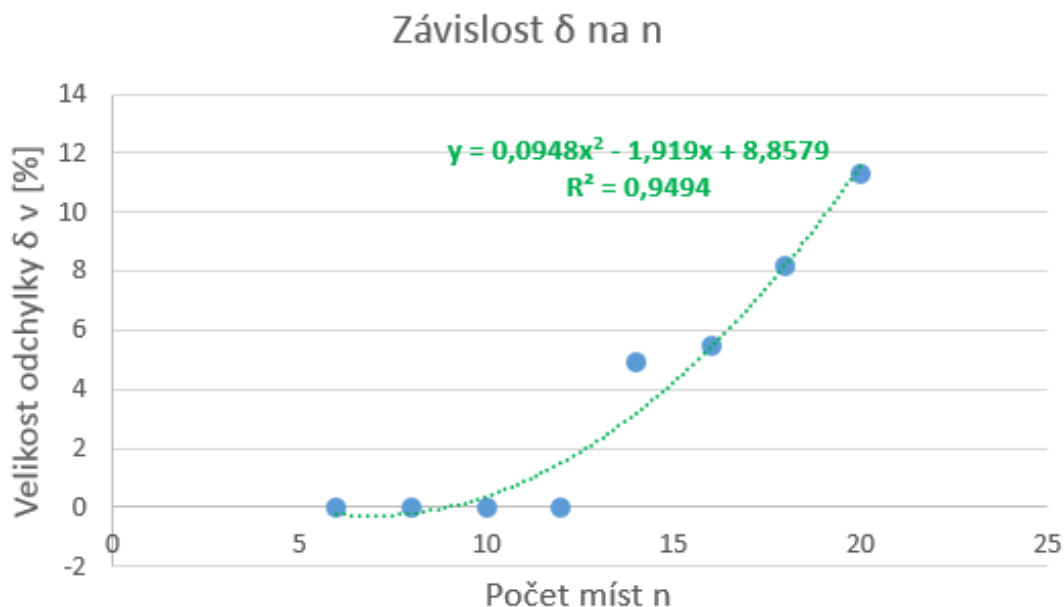
Graf 6: Závislost počtu kroků na počtu míst



Zdroj: vlastní

Jak je patrné zelená křivka používá vyrovnání pomocí paraboly a červená pomocí exponenciální křivky. V obou případech vyšli hodnoty R^2 velice blízké hodnotě 1, což indikuje vysokou přesnost obou vyrovnání hodnot.

Graf 7: Závislost velikosti odchylky na počtu míst



Zdroj: vlastní

(Odmocnina z této hodnoty se nazývá korelační index $I_{yx} \in <0;1>$, kterým se porovnává přesnost u vyrovnání pomocí nelineárních křivek). Hodnota 1 znamená absolutní přesnost, kde data tvoří funkční závislost, nižší hodnoty představují korelační závislost, kde čím lépe data (modrými body) křivka koreluje tím větší blízkost hodnotě 1.

Modely popisující hledané závislosti uvádí vztahy 35 až 37, při hodnotě $a = 0,65$.

$$k = 0,0661n^2 - 0,4393n + 1,13, \text{ kde } I_{yx} = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,9774} = 0,9886 \quad (35)$$

nebo

$$k = 0,2211 \cdot e^{0,2541 \cdot n}, \text{ kde } I_{yx} = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,9335} = 0,9662 \quad (36)$$

a pro

$$\delta = 0,0948n^2 - 1,919n + 8,8579, \text{ kde } I_{yx} = \sqrt{R^2} = 0,9744 \quad (37)$$

Na základě těchto výsledků lze například stanovit, že pokud by měl model řešit problém o rozsahu 20 bodů algoritmus by provedl 127 kroků (při uvažování exponenciálního růstu) a pokud by se nejkratší trasu nepodařilo nalézt odchylka by činila přibližně 20 %.

Pokud jde o problematiku generování náhodných bodů pro ověření funkčnosti svých modelů, metod a pro své pokusy, zabývá se jí Příloha 2 mé disertační práce. První část této druhé přílohy popisuje fungování modelů, ve kterých figuruje náhodné generování bodů. Druhá část se zabývá přímo způsobem generování náhodných bodů a zejména testováním toho zda body vznikají opravdu náhodně. Zde jsem použil modifikaci podmínky, kterou uvádí Virus (2010, s. 59) vztahu 38, ovšem implementovanou do situace hledání náhodných bodů.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N_\gamma(X^{(n)})}{n} \right) = V(I_\gamma) = \gamma \quad (38)$$

Kde:

n je počet členů výběru,

I_γ je libovolná měřitelná podmnožina intervalu, ve kterém se náhodná čísla vyskytují

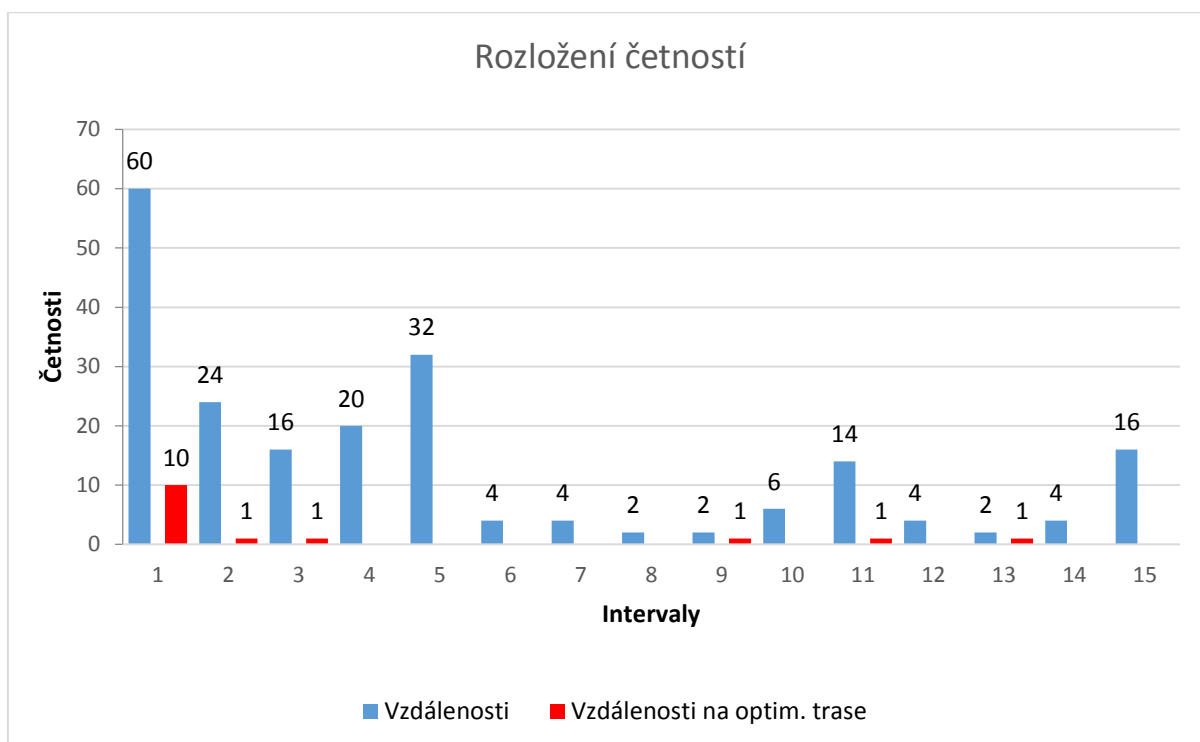
a γ je podílem zmíněné podmnožiny a zmíněného intervalu.

Závěrem lze konstatovat, že model E7 potažmo celá má heuristická metoda dobře funguje pouze v problémech o rozsahu do 15-ti bodů a to co do přijatelného počtu kroků algoritmu potažmo potřebného času výpočtu tak do velikosti případné odchylky od optimálního řešení.

Dalším dílčím cílem vytyčeným v úvodu této podkapitoly bylo hledání závislosti mezi počtem kroků algoritmu a velikostí operátoru selekce ($k = f(a)$). O této problematice se již zmiňuji v podkapitole 5.3.3.1 a v zásadě lze konstatovat, že existují dvě krajní strategie zvolit operátor selekce nízký např. $a = 0,4$ a získat optimální řešení s nízkým počtem kroků s rizikem, že se o optimální řešení připravím, neboť v sobě může obsahovat cesty ležící na hodnotách

$a = 0,6$ apod. Nebo naopak strategie sázející více na jistotu volbou operátoru selekce např. $a = 0,8$, kde je riziko zamítnutí cest potenciálně tvořících optimální trasu zcela minimální, což je ovšem vykoupeno nízkou selekcí projevující se ve vysokém počtu kroků nutných pro nalezení tohoto optimálního řešení. A vhodným kompromisem uvádějícím do rovnováhy oba tyto protichůdné požadavky je hodnota přibližně $a = 0,6$. Pro lepší názornost celého problému uvádím ještě graf 8.

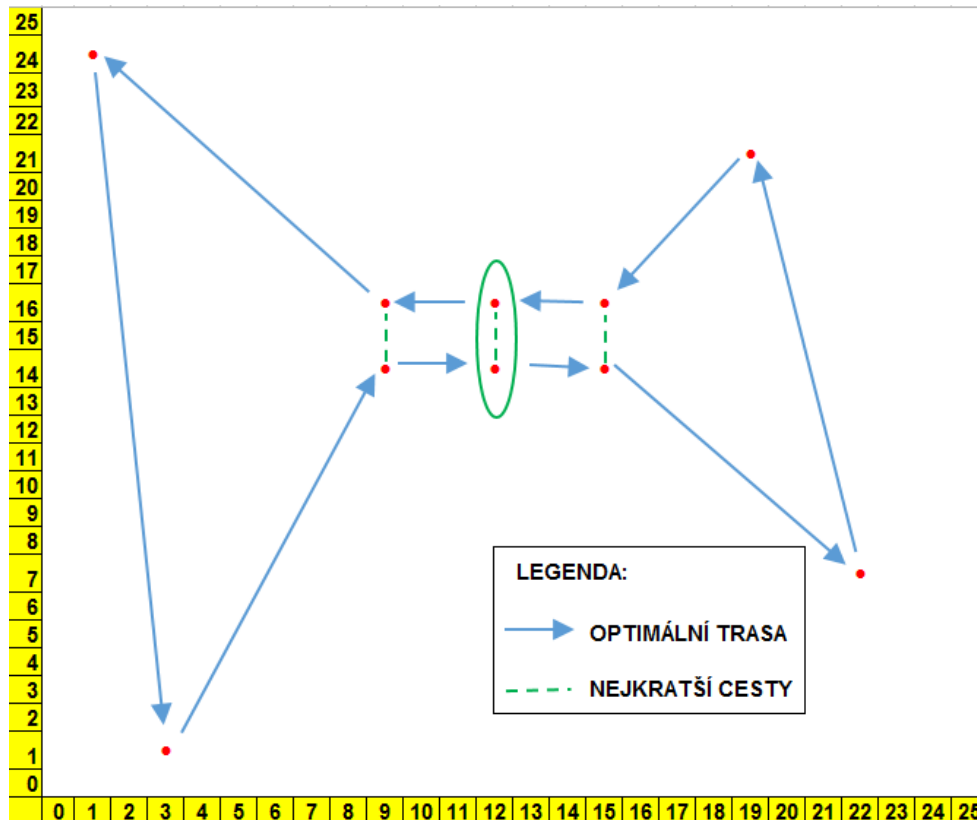
Graf 8: Příklad zastoupení cest tvořících optimální trasu v rozdělení četností c_{ij}



Zdroj: vlastní

V grafu 8 jsou modře vyznačeny četnosti všech hodnot vzájemných vzdáleností a červeně jsou označeny počty cest v jednotlivých intervalech tvořících výslednou optimální trasu. Jedná se o problém s 15-ti body, tudíž je celková četnost $N = 210$ hodnot (nepočítám 15 nul umístěných na diagonále). Po výpočtu provedeném ve zmiňovaném programu LINGO jsem vypočítal optimální (nejkratší) trasu a zjistil, ze kterých cest – vzdáleností se tato trasa skládá. Potom jsem určil, ve kterých intervalech tyto hodnoty leží (těchto hodnot je 15). V prvním intervalu leží hned 10 vzdáleností – cest potřebných k sestavení optimální trasy. A z hlediska hledání řešení mou představenou heuristickou metodou se jeví jako problematický fakt, že optimální trasu tvoří relativně dlouhé vzdálenosti ležící jedna v 11. a jedna dokonce až ve 13. intervalu. Je to vlastně zároveň ukáзка situace, kdy algoritmus většinou není schopen přesně optimální řešení nalézt, jelikož aby algoritmus vybíral z hodnot ležících v jedenáctém intervalu bylo by nutné operátor transformace nastavit na hodnotu $a = 0,74$ a v případě třináctého intervalu dokonce na $a = 0,87$.

Obrázek 41: Příklad nejkratších cest nevstupujících do nejkratší trasy



Zdroj: vlastní

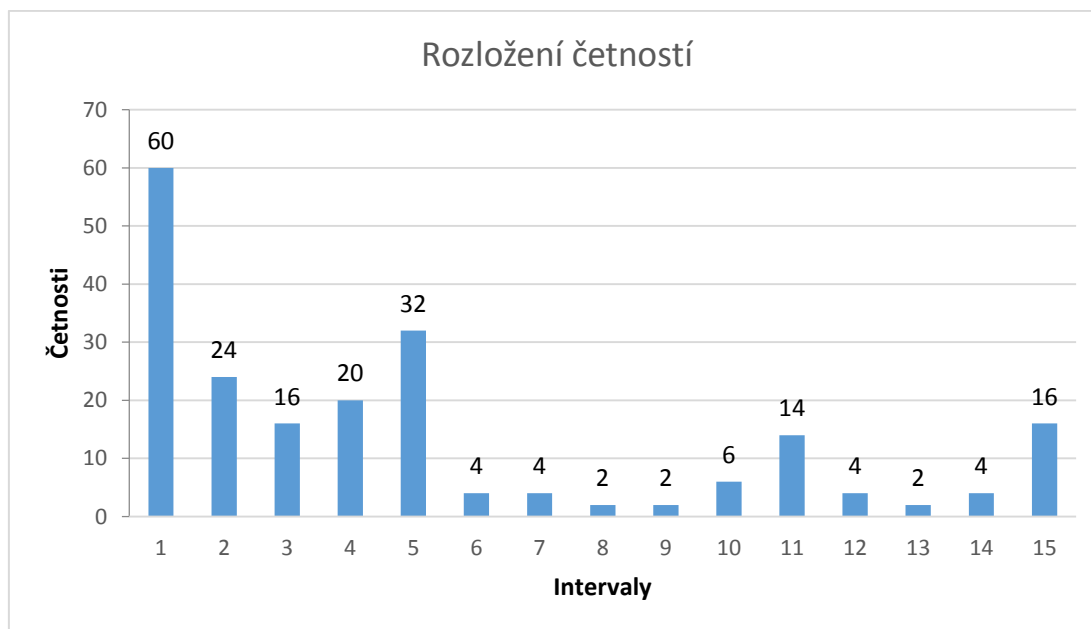
Netriviálnost celého problému dále dokresluje obrázek 41, kde je ilustrována situace, kde nejkratší vzdálenosti (vyznačené zeleně), které by se zdály nejperspektivnějšími kandidáty na zastoupení v optimální trase nakonec v optimální trase vůbec nefigurují. To je důvod proč při řešení úlohy obchodního cestujícího příliš efektivně nefunguje Hladový algoritmus, jak popisuje Cook (2012, s. 84), hladový algoritmus nalezne v nejhorším případě trasu, která je q -krát delší než nejlepší existující trasa, kde hodnotu výrazu q pro počet bodů n udává vztah 39.

$$q = 0,5 + 0,5 \log n \quad (39)$$

Nyní se dostávám k otázce zda není možné nějakým způsobem dopředu identifikovat vhodnou hodnotu operátoru selekce, ještě před samotným heuristickým hledáním, na základě vstupních údajů tj. definované množiny bodů (jejich souřadnic v matici B) potažmo jejich vzájemných vzdáleností (v matici C). Empirickým pozorováním a četnými pokusy jsem tuto závislost našel v koeficientech asymetrie α_3 a špičatosti α_4 rozdělení četností právě u hodnot v matici C . A tím se dostávám k hledání závislosti $a = f(\alpha_3, \alpha_4)$.

Nechť mám symetrickou matici C vzájemných vzdáleností 15-ti reálných bodů. Tyto hodnoty upravím na tříděný statistický soubor o patnácti intervalech stejné šířky h a vypočtu četnosti n_i pro intervaly $i = \langle 1;15 \rangle$ viz graf 9.

Graf 9: Rozložení četností v intervalech



Zdroj: vlastní

V tomto případě, je dobře patrné, že rozdělení četností není rovnoměrné, ani symetrické, neboť většina hodnot je koncentrována v prvních intervalech, potom hovoříme o levostranně asymetrickém rozdělení. To zda je rozdělení symetrické či asymetrické levostranně nebo pravostranně je možné kvantifikovat právě koeficientem asymetrie α_3 viz vztah 40.

$$\alpha_3 = \frac{m_{3,x}}{s_x^3} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}}{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}} \right)^3} \quad (40)$$

Pokud je rozdělení levostranně asymetrické vyjde tato hodnota kladná, pokud je rozdělení pravostranně asymetrické vyjde hodnota záporná, speciálním případem je, nulová hodnota, kterou obdržíme pro symetrická rozdělení.

Dále lze také kvantifikovat koeficient špičatosti α_4 viz vztah 41.

$$\alpha_4 = \frac{m_{4,x}}{S_x^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}}{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}} \right)^4} \quad (41)$$

Tento koeficient porovná špičatost (maximum hodnot četností) s normálním rozdělením. Pokud je špičatost ve srovnání s tímto (etalonovým) rozdělením nižší, vyjde hodnota $\alpha_4 < 3$ a naopak. Speciálním případem je situace, kdy $\alpha_4 = 3$ potom je špičatost rozdělení shodná s normálním rozdělením, jak uvádí Kožíšek (2002, s. 31). V některých publikacích, jako např. Holický (2015, s. 33) je vzorec 39 modifikován tím způsobem, že se od zlomku odečte hodnota 3, aby neutrální stav rovnosti s normálním rozdělením odpovídal hodnotě nula, nižší špičatost záporné hodnotě koeficientu a vyšší špičatost kladné hodnotě koeficientu. Jedná se pouze o otázku konvence, já budu uvažovat podobu výpočtu danou vztahem 41.

Než přistoupím k samotné závislosti $a = f(\alpha_3, \alpha_4)$, považuji za důležité upozornit, že rozdělení četností potažmo typy těchto rozdělení jsou naprosto libovolné a nevzniká zde prostor pro stanovení nějakého pravidla, jak bude takové rozdělení vypadat (např., že se bude řídit normálním nebo exponenciálním rozdělením apod.). Příklady rozmanitých typů rozdělení četností hodnot vzájemných vzdáleností pro různé pozice bodů ukazuje příloha 3 mé disertační práce.

Poznatky, ke kterým jsem dospěl ohledně koeficientů špičatosti a asymetrie u hodnot vzájemných vzdáleností mezi body, shrnuje tabulka 10, publikováno v Košťálek (2015-c).

Tabulka 10: Závislost operátoru selekce na koeficientu asymetrie

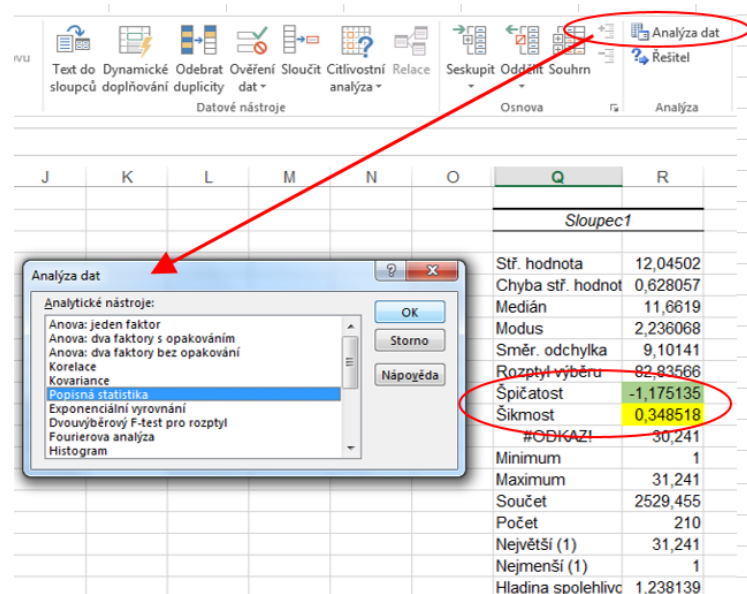
TYP ASYMETRIE	α_3	a
Levostranná	0,5 a větší	0,35 až 0,43
Přibližně symetrická	-0,5 až + 0,5	0,44 až 0,57
Pravostranná	-0,5 a menší	0,58 až 0,69

Zdroj: vlastní

Provedl jsem 20 pokusů s náhodně vygenerovanými 15-ti body. U těchto bodů jsem provedl intervalové rozdělení hodnot vzájemných vzdáleností a výpočet zmiňovaných koeficientů α_3 a α_4 . Pomocí programu *LINGO* jsem pro každý případ 15-ti náhodných bodů vypočítal optimální trasu. Vzdálenosti tvořící optimální trasu jsem porovnal s maticí všech vzdáleností mezi 15-ti body, zejména mě zajímalo v jakých intervalech se tyto vzdálenosti budou nacházet. Během pokusu mě zajímalo, jaký může být nejnižší možný operátor selekce tak, aby nedošlo k vyloučení cesty ležící na optimální trase, resp. aby se jednalo maximálně o jednu hodnotu (při tomto nastavení by algoritmus našel sub optimální řešení). Jak je z tabulky 10 patrné pro levostranně asymetrické hodnoty je možné operátor selekce významně snížit, což u pravostranně asymetrických hodnot možné není. Pokud jde o koeficient špičatosti α_4 nepodařilo se mi pro něj stanovit nějaký vliv na hodnotu operátoru selekce. Jeho hodnota byla v 18-ti případech z 20-ti nižší než 3 čili pod hodnotou normálního rozdělení.

Závěrem lze konstatovat, že algoritmus potažmo model E7 používá pro nastavení způsobu heuristického vyhledávání se nastaví hodnota parametru a pomocný výpočet koeficientu asymetrie (který lze samozřejmě v jakémkoliv programu (včetně Excelu) zautomatizovat, viz obrázek 42) může být pomocným vodítkem k lepšímu nastavení hodnoty tohoto parametru a tím přispět k vyšší efektivitě hledání optimálního, resp. suboptimálního řešení.

Obrázek 42: Výstup z nástroje Analýza dat v MS Excel



Zdroj: vlastní

Poznámka: Koeficient asymetrie je zde označen termínem „Šikmost“

5.3.6 APLIKACE NA ASYMETRICKÉ MATICE C_A

Všechny výše popisované experimenty, testování heuristické metody, hledání souvislostí apod. byly spojeny s Eukleidovskou metrikou a symetrickými maticemi vzájemných vzdáleností mezi reálnými body, pro které platila trojúhelníková nerovnost. Předmětem této podkapitoly bude srovnání fungování heuristické metody při vstupu symetrické matice C a asymetrické matice C_A .

Statisticky otestuji, zda existuje signifikantní rozdíl mezi fungováním algoritmu, pokud je vstupní hodnotou symetrická matice C , a nebo asymetrická matice C_A . Předmětem mého testování byl počet kroků algoritmu vedoucí k nalezení optimálního řešení a velikost odchylky od optimálního řešení při dosažení sub optimálního řešení. Test jsem koncipoval tak, že jsem náhodně vygeneroval souřadnice 15-ti bodů, ze kterých se automaticky vypočítaly vzájemné vzdálenosti – hodnoty v matici C . Z té jsem vytvořil asymetrickou matici C_A tím způsobem, že jsem hodnoty nad diagonálou „vynásobil“ podle vztahu 42.

$$c_{ji} = c_{ij} \cdot (1 + N. \check{c}. (0; 1)) \quad (42)$$

Kde $N. \check{c}. (0; 1)$ je pseudonáhodné číslo z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$.

Hodnoty c_{ji} pod diagonálou byly vytvořeny tak, že nabývají náhodných hodnot v rozmezí c_{ij} až dvojnásobek c_{ij} . Zjištěné hodnoty obsahují tabulky 11 a 12.

Tabulka 11: Počty kroků algoritmu pro vstupy z C a C_A

Pokus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_1 pro C	5	5	10	7	8	7	6	8	5	6
k_2 pro C_A	7	6	9	11	8	6	8	10	6	5

Zdroj: vlastní

Tabulka 12: Velikosti odchylek od optimálního řešení pro vstupy z C a C_A

Pokus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ_1 [%] pro C	2,2	1,2	2,5	0,6	2,3	5,5	1,2	2,8	1,7	3,1
δ_2 [%] pro C_A	8,4	0,5	1,1	5,4	6,3	6,5	9,2	1,5	5,4	6,7

Zdroj: vlastní

Hodnoty spojené se symetrickou maticí C mají index 1 (1. výběr) a hodnoty asymetrické matice C_A mají index 2 (2. výběr). Jedná se o dvou výběrové testování rovnosti středních hodnot pro malé výběry, protože pokusů je méně než 30. Opět je třeba dodržet několik

podmínek. První podmínkou je, aby hodnoty měly normální rozdělení to jsem otestoval pomocí Kolmogorova-Smirnovova testu, kde tento test při hodnotě hladiny významnosti $\alpha = 5\%$ vyšel. Tyto pomocné výpočty zde nebudu uvádět – jedná se o tentýž princip výpočtu, který jsem popsal v podkapitole 5.3.4.1 své disertační práce.

Nyní mohu na počet kroků algoritmu i na velikosti odchylek nazírat jako na náhodné veličiny s normálním rozdělením o parametrech μ a σ . Kde μ představuje střední hodnotu rozdělení pravděpodobnosti a odhadnu ho pomocí aritmetického průměru z hodnot v tabulkách 11 a 12. A σ představuje směrodatnou odchylku v rozdělení pravděpodobnosti a odhadnu ji pomocí výběrové směrodatné odchylky (s) opět výpočtem z hodnot v tabulkách 11 a 12.

Pomocné hodnoty pro další výpočty:

Počet kroků algoritmu:

$\mu_1 =$ aritmet. průměr z $k_1 = 6,7$ (vstupem je symetrická matice **C**)

$\mu_2 =$ aritmet. průměr z $k_2 = 7,6$ (vstupem je asymetrická matice **C_A**)

$\sigma_1 = s_1 = 1,64$ (vstupem je symetrická matice **C**)

$\sigma_2 = s_2 = 1,96$ (vstupem je asymetrická matice **C_A**)

$n_1 = n_2 = 10$ je velikost výběrů

Velikosti odchylek:

$\mu_1 =$ aritmetický průměr z $\delta_1 = 2,31$ (vstupem je symetrická matice **C**)

$\mu_2 =$ aritmetický průměr z $\delta_2 = 5,10$ (vstupem je asymetrická matice **C_A**)

$\sigma_1 = s_1 = 1,37$ (vstupem je symetrická matice **C**)

$\sigma_2 = s_2 = 3,05$ (vstupem je asymetrická matice **C_A**)

$n_1 = n_2 = 10$ je velikost výběrů

Druhou podmínkou je rovnost rozptylů obou výběrů. Provedu tedy pomocný výpočet v podobě testování hypotéz:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$

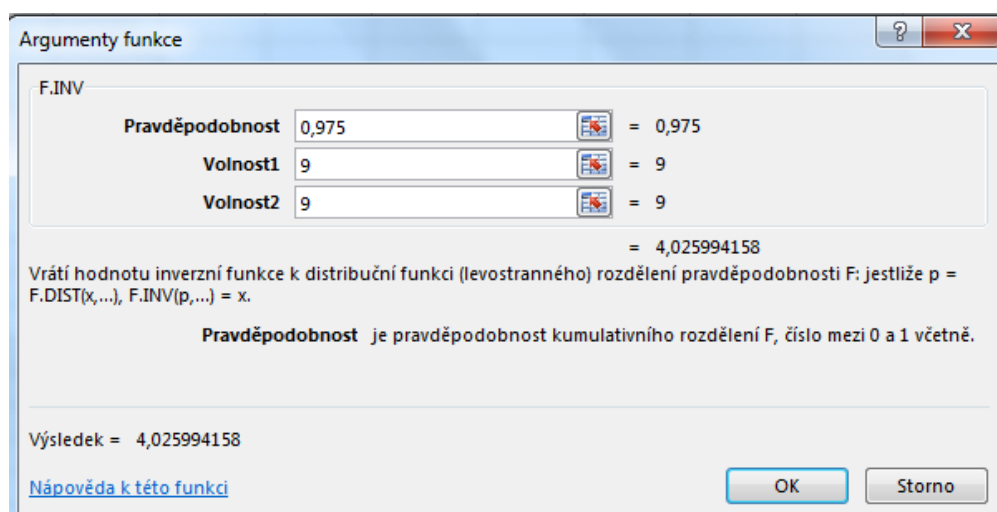
$$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Což se provádí vypočtením testovacího kritéria, které je porovnáno s kritickou hodnotou. Pro určení kritické hodnoty budu opět uvažovat obvyklou hodnotu hladiny významnosti $\alpha = 5\%$. Potom je kritická hodnota dána vztahem 43,

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}[f_1; f_2] = F_{0,975}[9; 9] = 4,026 \quad (43)$$

kde f_1 a f_2 jsou stupně volnosti F rozdělení pravděpodobnosti (typ rozdělení je dán typem testované hypotézy, pro test dvou rozptylů se používá vždy F rozdělení), stupně volnosti se v tomto případě určí jako velikosti výběrů snížené o jedna. Jak uvádí např. Kožíšek (2002, s. 114) nebo Hindls (2007, s. 149).

Obrázek 42: Určení kritické hodnoty F rozdělení (statistická funkce F.INV)



Zdroj: vlastní

Kritickou hodnotu F rozdělení jsem určil pomocí funkce F.INV v programu Excel, viz obr. 42 (jinou alternativou by byly statistické tabulky).

Testovací kritérium určím pomocí vztahu 44.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (44)$$

Hodnota testovacího kritéria pro počet kroků:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1,96^2}{1,64^2} = 1,427 \quad (45)$$

Hodnota testovacího kritéria pro velikost odchylek:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3,05^2}{1,37^2} = 4,026 \quad (46)$$

Poznámka:

Do vztahu 44 jsem dosadil takovým způsobem, abych dělil větší hodnotu menší – označení 1 a 2 je pouze věcí dohody. Možné jsou i jiné postupy, všechny vedou ke stejnému výsledku.

Hodnoty, které jsem vypočítal ze vztahů 45 a 46 porovnám s hodnotou, kterou jsem vypočítal ze vztahu 43.

$$(1,427 < 4,025 \text{ platí} \quad \text{a} \quad 4,026 < 4,025 \text{ neplatí})$$

Potom na hladině významnosti $\alpha = 5 \%$ nezamítám hypotézu o rovnosti rozptylů u počtů kroků algoritmu a zamítám hypotézu o rovnosti rozptylů u hodnot odchylek.

Výsledek tohoto pomocného výpočtu (testu) mi dává informaci o tom jaký vztah použít pro hlavní výpočet. Jedná se totiž o statistické otestování rovnosti středních hodnot dvou výběrů, kde jsou ovšem výběry malé, což je můj případ ($n_1 < 30$ i $n_2 < 30$), potom se výpočty liší podle toho, zda se rozptyly shodují či nikoliv.

Nyní jsem schopen statisticky otestovat shodu středních hodnot u počtu kroků, testovací kritérium udává vztah 47, jeho výpočet vztah 48 a obecný vztah pro definování kritické hodnoty vztah 49, kde opět uvažuji parametr statistického testu $\alpha = 5 \%$:

Formulace statistických hypotéz:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}} \quad (47)$$

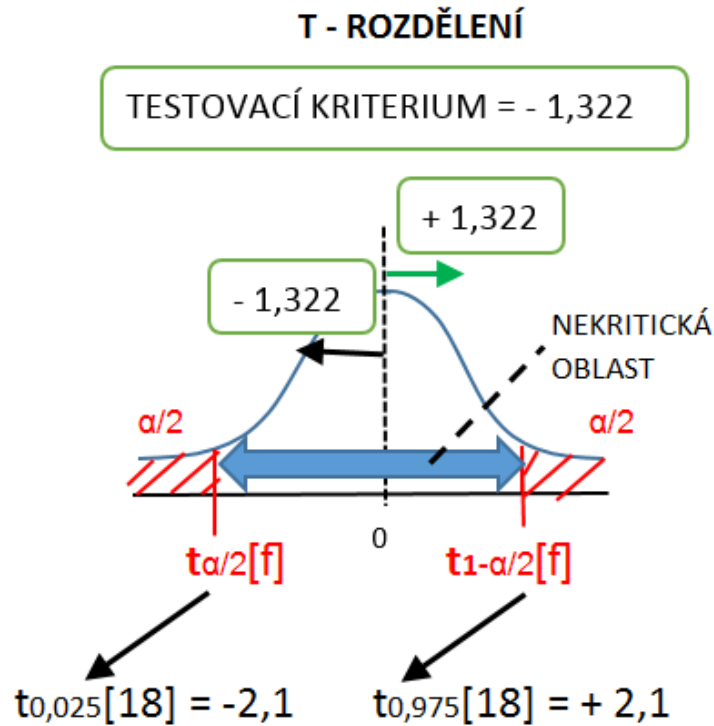
$$T = \frac{6,7 - 7,6}{\sqrt{\frac{(10-1) \cdot 2,68 + (10-1) \cdot 1,96}{10+10-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}} = -1,322 \quad (48)$$

Protože hodnota vyšla záporná, nebudu testovací kritérium porovnávat s horní kritickou hodnotou, ale s dolní viz vztah 49. Jedná se o T rozdělení (neboli-studentovo rozdělení) a hodnotu jsem zjistil pomocí statistické funkce v MS Excelu „T.INV“.

$$t_{\frac{\alpha}{2}}[n_1 + n_2 - 2] = t_{\frac{0,05}{2}}[10 + 10 - 2] = t_{0,025}[18] = -2,100 \quad (49)$$

Testovací kritérium neleží v kritické oblasti, což pro lepší názornost vysvětlují obrázkem 43.

Obrázek 43: Kritická oblast a poloha testovacího kritéria



Zdroj: vlastní

Poznámka:

Zelená šipka naznačuje alternativní způsob řešení – porovnání kladné hodnoty testovacího kritéria s horní kritickou mezí, neboť T-rozdělení je symetrické ve statistických tabulkách se objevuje zpravidla pouze horní mez.

Hypotézu říkající, že střední hodnoty počtu kroků algoritmu se neliší v případě, že je vstupem symetrická matice C a asymetrická matice C_A nezamítám na standardní hladině významnosti $\alpha = 5 \%$. Čili zde není rozdíl, mezi situací se symetrickou a nesymetrickou maticí.

Nyní provedu stejný princip statistického testu pro velikosti odchylek. Ovšem použiji jiné vztahy, protože zde nebyla prokázána shoda rozptylů.

Formulace statistických hypotéz, při $\alpha = 5 \%$:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Testovací kritérium a jeho výpočet udává vztah 50, definování kritické hodnoty vztah 51, kde je třeba relativně složitě dospět k počtu stupňů volnosti pomocí vztahu 52 a 53.

Testovací kritérium:

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{2,31 - 5,10}{\sqrt{\frac{1,87}{10} + \frac{9,33}{10}}} = -0,264 \quad (50)$$

Kritická hodnota (T-rozdělení):

$$t_{\frac{\alpha}{2}}[f] = t_{\frac{0,05}{2}}[f] = t_{0,025}[13] = -2,16 \quad (51)$$

Odkud pomocí funkce T.INV v programu MS Excel naleznou hodnotu:

kde počet stupňů volnosti:

$$f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_1+1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_2+1}} - 2 \quad (52)$$

kam jsem dosadil:

$$f = \frac{\left(\frac{1,87}{10} + \frac{9,33}{10}\right)^2}{\left(\frac{1,87}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10+1} + \left(\frac{9,33}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10+1}} - 2 = 13,23 \cong 13 \quad (53)$$

Jelikož $-0,264 < -2,16$ (princip je stejný jako v případě vysvětleném na obrázku 43) leží testovací kritérium v oblasti zamítnutí (červeně vyšrafovaná). Proto **na hladině významnosti $\alpha = 5\%$ zamítám hypotézu o rovnosti odchylek od optimálního řešení, čili zde vzniká rozdíl mezi situacemi, kdy je matice vzájemných vzdáleností symetrická a kdy je asymetrická. Z logiky věci a na základě zjištěných hodnot z experimentu (viz tabulka 12) je zřejmé, že asymetrie v matici hodnot implikuje větší odchylky od optimálních řešení.**

5.3.7 CELKOVÉ ZHODNOCENÍ HEURISTICKÉ METODY

Na základě empirických pozorování jsem stanovil hypotézu říkající, že mezi vzájemnými vzdálenostmi mezi body (v matici C) existuje kritická vzdálenost, kterou vzdálenosti cest ležících na optimální trase nepřekročí. Existence kritické vzdálenosti tak představuje kritérium výběru v heuristickém algoritmu, který přiřazuje cestám s délkou větší než kritickou nižší pravděpodobnost výskytu v optimálním řešení. Tím dojde předem k selekci neperspektivních řešení, což se projeví docílením rychlejšího nalezení optimálního řešení, kde rychlost uvažujeme úměrnou počtu kroků algoritmu. Tento element skutečně funguje a významným způsobem urychluje průběh nalezení optimální trasy. Funkčnost této heuristické metody se mi podařilo prokázat četnými pokusy.

Tuto metodu jsem aplikoval do vytvoření dvou modelů. Model E6 řeší problém obchodního cestujícího v rozsahu deseti bodů s průměrným počtem čtyř kroků z čehož plyne doba práce algoritmu čtyři sekundy a na stejném principu pracuje model E7, který je rozšířen na problém o velikosti patnáct bodů, průměrný počet kroků algoritmu zde činí sedm, což implikuje dobu sedm sekund. Důležitou poznámkou je fakt, že algoritmus pracuje s vyšší rychlostí než exaktní výpočet provedený pomocí nástroje *řešitel* počítající řešení pomocí binárního lineárního programování, navíc tento nástroj by problém tohoto rozsahu již nedokázal vyřešit, protože rozsah problému by překročil kapacitu 200 proměnných. Pokud se nalezené řešení odchyluje od optimálního řešení, výše odchylky se pohybuje v intervalu 3,35 až 6,51 %.

Modely E6 a E7 pracují s parametrem, který se nazývá operátor selekce a jeho velikost je možné zvolit. V tomto směru může být pro vhodnou volbu operátoru selekce určitým vodítkem výpočet koeficientu asymetrie z hodnot matice vzájemných vzdáleností, kde správné nastavení tohoto parametru zefektivní heuristické vyhledávání. Heuristická metoda potažmo uvedené modely fungují i v situaci, kdy matice vzájemných vzdáleností není symetrickou. Zde statistický test střední hodnoty neprokázal signifikantní rozdíl u počtu kroků, které musí algoritmus vykonat, zatím co u velikosti odchylky nalezeného řešení od nejlepšího existujícího řešení v případech, kdy algoritmus není schopen nalézt optimum, znamená asymetrická matice signifikantní zvýšení (průměrná odchylka = 5,1 %).

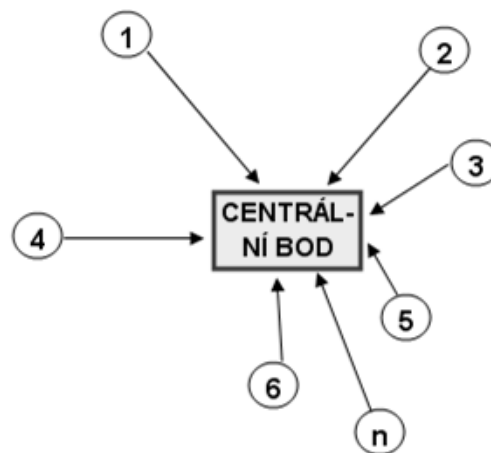
Hladina významnosti pro zmíněné výpočty byla uvažována obvyklých 5 %, jak uvádí (Hindls, 2007, s. 138). Veškeré testy se provádějí na bodech, jejichž souřadnice byly stanoveny jako náhodná čísla. Problém s patnácti body je prakticky neřešitelný na intuitivní bázi (Košťálek, 2014-d).

6. SOUVISEJÍCÍ PROBLÉMY A NÁVRHY ŘEŠENÍ

Pro úspěšnou aplikaci výše popsaných metod v praxi je třeba zabývat se dalšími otázkami, které se přímo netýkají problému obchodního cestujícího. V problému obchodního cestujícího řešíme optimalizaci trasy pro množinu bodů, kde typické nasazení v praxi je výjezd přepravního prostředku z výchozího bodu, kterým je z logiky věci pravděpodobně sklad. Může se jednat o sklad dílů, které jsou po optimální trase rozváženy na jednotlivá pracoviště v případě vnitropodnikové logistiky. Stejně tak dobře se může jednat o sklad, ze kterého je rozvážena libovolná komodita na jednotlivé pobočky, podniky, dílčí sklady, pro konkrétní zákazníky apod. v případě externí logistiky. Tento výchozí bod - zmiňovaný sklad je často v interakci s jinými body. Vzniká zde otázka kam tento sklad umístit.

Nyní se nebudu zabývat problémem optimální trasy mezi všemi body navzájem, ale pouze optimální polohou centrálního bodu, který je v interakci s množinou jiných bodů. Příkladem této situace je centrální sklad zásobující jednotlivé pobočky, kde poloha poboček je definována a dále je známý předpokládaný objem přepravy mezi každou pobočkou a centrálním skladem. Jiné příklady této situaci mohou být: např.: umístění centrálního skladu mezi mezisklady nebo dodatečné umístění dalšího stroje do již pracujícího rozmístění strojů, umístění obilného sila tak, aby celkové přepravní náklady byly minimální, umístění hasičské stanice tak, aby její akční rádius pokrýval požadovanou oblast atd. Aikens (1985) prezentuje devět základních modelů lokalizace, které se týkaly umístění, lokalizace a problémů s touto oblastí spojených. Všechny zmíněné situace lze popsat následujícím obrázkem 44.

Obrázek 44: Podstata problému umístění



Zdroj: vlastní

Centrální bod, např. zmiňovaný sklad, je třeba umístit tak, aby celkové náklady na přepravu komponentů z jednotlivých bodů – např. meziskladů byly minimální. Problém komplikuje reálná skutečnost, že každý mezisklad, kterých je 1 až n dodává jiný objem komponentů. Matematické vyjádření přepravních nákladů popisuje vztah 54.

$$F = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot z_i = \min . \quad (54)$$

kde:

Q_i je objem přepravy z bodu i do centrálního bodu,

z_i je vzdálenost mezi bodem i a centrálním bodem viz vztah 55,

(1, ..., i, ..., n) je počet bodů.

$$z_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (55)$$

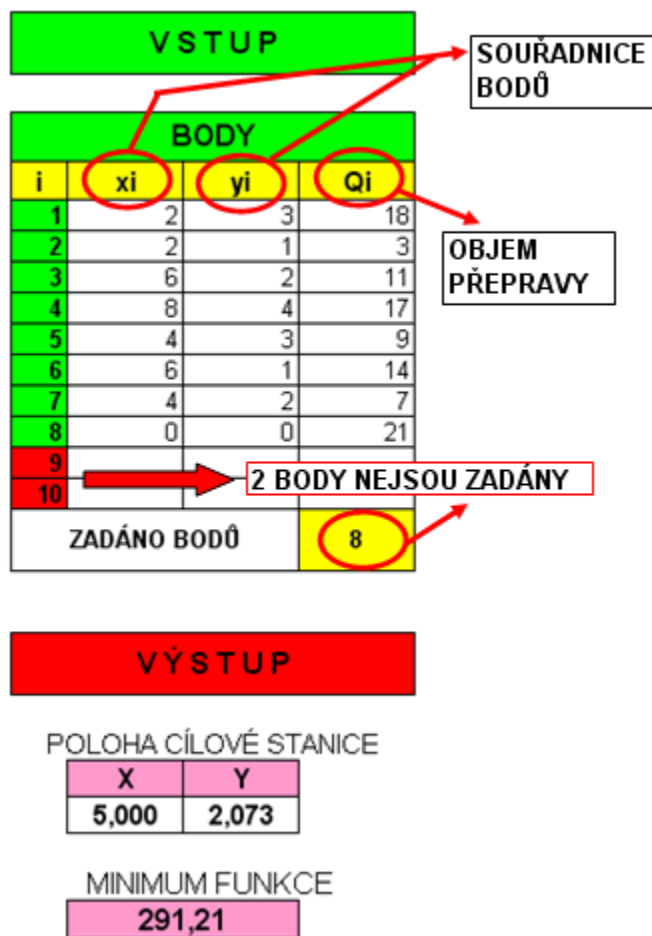
x a y jsou hledané souřadnice centrálního bodu.

Popsaný problém je označován termínem Steinerův–Weberův problém (jak uvádí Rollo (1973, s. 31) nebo Barahona (1998)). Tento problém se mi podařilo dále rozšířit o další omezující podmínky v podobě definování míst, kde centrální bod ležet nemůže z důvodů např. terénních překážek, soukromých pozemků, zastavěných ploch apod., v tom spatřuji důležitý přínos. Řešení celého problému jsem zautomatizoval v prostředí MS Excelu, pomocí nástroje *řešitel* a lineárního programování s omezujícími podmínkami nikoliv typu „ \geq “, „ \leq “, „ $=$ “, ale s podmínkami „IF, THEN“ (když hodnota proměnné nabývá určité hodnoty, implikuje to hodnotu, které může nabývat jiná proměnná).

6.1 ROZŠÍŘENÍ STEINEROVA-WEBROVA PROBLÉMU

Model je sestaven pro 10 bodů, mezi které se vkládá centrální bod. Počet bodů nemusí být rigidně 10, ale lze zadat jejich počet libovolně. A samotná hranice 10 bodů není konečná, jde spíše o to využít a vyzkoušet matematický model a jeho fungování. Použité principy lze použít a celý model je možné kvantitativně rozšířit. Totéž platí pro možnost zadat 10 zakázaných oblastí, kde centrální bod ležet nesmí. Vstupy a výstupy z modelu jsou ukázány na obrázku 45.

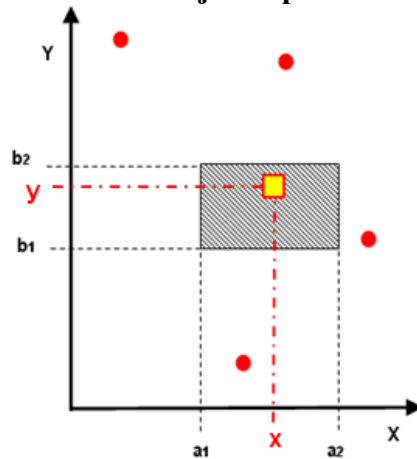
Obrázek 45: Vstupy a výstupy modelu



Zdroj: vlastní

Na obrázku 45 je vidět zadání osmi bodů (2 body zadány nejsou). Za všechny nezadané body si model pomocí logických funkcí automaticky dosadí souřadnice prvního bodu a za objem přepravy Q_i v tomto případě model automaticky vygeneruje nulové hodnoty, čímž není ovlivněna hodnota účelové funkce, jak je patrné ze vztahu 54. Zajímavějším problémem, přinášejícím modelu zmíněnou originalitu, je modifikace o velice naléhavou potřebu další podmínky pro souřadnice centrálního bodu, který nemůže být situován zcela libovolně.

Obrázek 46: Schematizace omezujících podmínek kladených na řešení



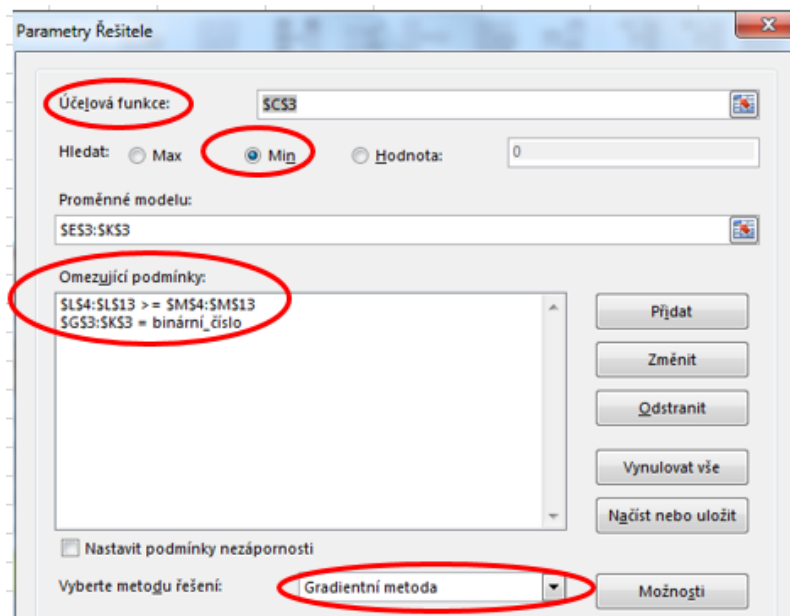
Zdroj: vlastní

Na obrázku 46 představuje vyšrafovaná oblast místo, kde např. sklad postavit nelze, neboť se v oblasti nachází kupříkladu domy, lesy, řeka apod. Centrální sklad je označen čtverečkem a mezisklady, které budou s centrálním skladem v interakci, jsou reprezentovány kolečky. Kardinální otázkou je, jak řešit takto modifikovaný problém.

$$[x, y] \notin (a_1; a_2) \times (b_1; b_2) \quad (56)$$

Je zapotřebí přetřansformovat vztah 56 na omezující podmínky nelineárního programování, které bude schopen v Excelu nástroj *řešitel* vyřešit.

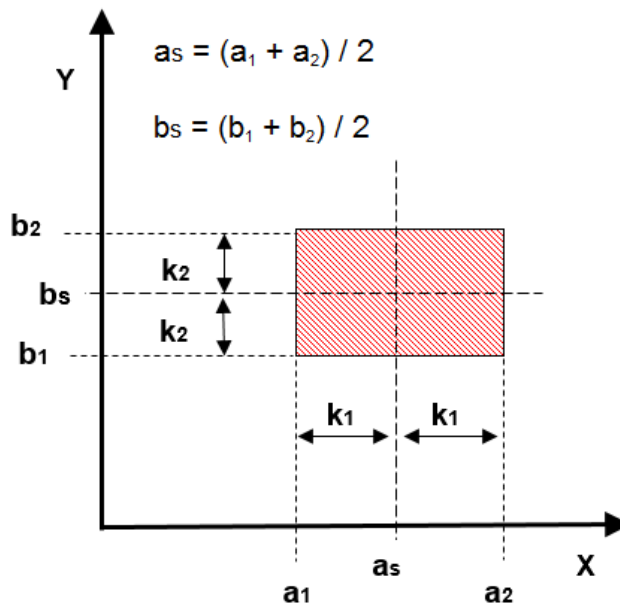
Obrázek 47: Ukázka nastavení nástroje řešitel



Zdroj: vlastní

Nástroj *řešitel* dokáže vyřešit simplexovou metodou problémy lineárního programování a přepnutím na gradientní metodu (viz obrázek 47) dokáže řešit také problémy nelineárního programování, jelikož podmínky vznikající vztahem 55 jsou nelineární.

Obrázek 48: Vymezení oblasti pomocí vzdáleností od středu



Zdroj: vlastní

Kde:

$$k_1 = \frac{a_2 - a_1}{2}, \quad (57)$$

$$k_2 = \frac{b_2 - b_1}{2}. \quad (58)$$

Obrázek 48 se dá číst tím způsobem, že pokud x-ová souřadnice hledaného bodu leží ve vzdálenosti od středu oblasti a_s , která je menší než k_1 , potom vzniká podmínka na y-ovou souřadnici, aby její vzdálenost od středu b_s byla větší než k_2 . (A tím se zajistí, že výsledný bod neleží v zakázané oblasti.) Tuto tezi lze po následných úpravách zapsat formou podmínky lineárního, resp. nelineárního programování, první krok ilustruje vztah 59, publikováno v Košťálek (2014 –a) a Košťálek (2018 – b).

$$IF (X - a_s)^2 \leq k_1^2 \quad THEN \quad (Y - b_s)^2 \geq k_2^2. \quad (59)$$

Druhé mocniny ve vztahu 59 zajišťují, že vzdálenosti od středů budou nabývat nezáporných hodnot. K úpravě vztahu 59 se použije výroková logika viz vztah 60, který uvádí Rektorys (2000).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \quad (60)$$

S použitím vztahu 60 lze vztah 59 přepsat z podmínky „když (IF)“ na podmínku „nebo (OR)“, jak uvádí vztah 61.

$$(X - a_S)^2 > k_1^2 \quad OR \quad (Y - b_S)^2 \geq k_2^2. \quad (61)$$

Vztah 60 se následně upraví na vztahy 62 a 63 jak uvádí Jablonský (2007, s. 102) a tím již vzniknou omezující podmínky, se kterými je Excel schopen pracovat.

$$(X - a_S)^2 \geq k_1^2 - M \cdot t, \quad (62)$$

$$(Y - b_S)^2 \geq k_2^2 - M \cdot (1 - t) \quad (63)$$

kde M je prohibitivní konstanta, t je binární proměnná (může nabývat hodnot pouze 0 či 1)

Oproti vztahu 61 je nerovnost ve vztahu 62 neostrá, aby vznikl matematický zápis, se kterým umí nástroj *řešitel* pracovat, je to ne příliš podstatný detail, jestli v případě, že optimální bod leží v nedovolené zóně, bude ležet zcela mimo a nebo na hranici zóny. V případě potřeby je možné provést ještě další úpravy a i tento detail zohlednit.

M je zvolené relativně vysoké číslo – prohibitivní konstanta (v modelu $M = 1\,000$), jeho úloha a celý princip vztahů 62 a 63 je demonstrován vztahy 64 až 67 v situaci $t = \{0;1\}$

a) Situace $t = 0$

$$(X - a_S)^2 \geq k_1^2 - M \cdot 0, \text{ resp. } (X - a_S)^2 \geq k_1^2. \quad (64)$$

$$(Y - b_S)^2 \geq k_2^2 - M \cdot (1 - 0), \text{ resp. } (Y - b_S)^2 \geq k_2^2 - M. \quad (65)$$

Jelikož M je vysoká hodnota, podmínka ze vztahu 65 bude při $t = 0$ platit vždy (pravá strana bude menší).

b) Situace $t = 1$

$$(X - a_S)^2 \geq k_1^2 - M \cdot 1, \text{ resp.: } (X - a_S)^2 \geq k_1^2 - M \quad (66)$$

Tato podmínka bude při $t = 1$ vždy platná.

$$(Y - b_S)^2 \geq k_2^2 - M \cdot (1 - 1), \text{ resp.: } (Y - b_S)^2 \geq k_2^2 \quad (67)$$

Tímto způsobem je zajištěno, že postačí platnost jedné ze dvou podmínek, což je uzpůsobeno optimalizačnímu propočtu. Hodnoty t zajišťují nejen platnost podmínek, ale také minimum účelové funkce F , publikováno v Košťálek (2014-a), Košťálek (2018-b) a Košťálek (2019 – a).

Popisovaný model využívá těchto matematických modelů, aby umožnil nastavit až deset oddělených oblastí, ve kterých se optimální řešení nesmí nacházet. Samozřejmě nejdůležitější je postup a ten lze v případě potřeby snadno rozšířit na desítky oblastí. Totiž počty proměnných jsou u tohoto problému velmi nízké a to dvě x , y (souřadnice centrálního bodu) plus s každou zakázanou oblast přibývá pouze jedna pomocná proměnná t . Výpočtová složitost spočívá v tom, že proměnných je málo, ale figurují ve velkém množství nelineárních rovnic. Konkrétně počet rovnic je roven počtu bodů, které interagují s centrálním bodem a každá zakázaná oblast vytvoří pouze dvě omezující podmínky ve tvaru nerovnic viz obrázek 49. Jak popisují výše uvedené vztahy, a pro lepší názornost v dalším oddíle uvádím konkrétní dosazení vstupních hodnot do obecných vzorců.

Obrázek 49: Ukázka výpočtu v modelu

VÝSTUP		x	y	t1	t2	t3	t4	t5	PODMÍNKY DANÉ PŘEKÁŽKAM		
F	47249,048	36,373	34,863	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1322,983	0	
1	x								1322,983	0	
2									1322,983	0	
3									1322,983	0	
4									1322,983	0	
5									1322,983	0	
1	y								1215,446	-1000	
2									1215,446	-1000	
3									1215,446	-1000	
4									1215,446	-1000	
5									1215,446	-1000	
		$(x-x_i)^2$	$(y-y_i)^2$	součet	odmoc.	$z_i * Q_i$					
z1		26,3728284	29,86325	695,5261	891,8138	1587,34	39,84143				
z2		16,3728284	-15,1367	268,0695	229,1211	497,1907	22,29777				
z3		-23,6271716	-45,1367	558,2432	2037,326	2595,569	50,94673				

Zdroj: vlastní – ukázka z modelu řešícího problém rozmístění

6.2 PRINCIP VÝPOČTŮ A VYTVOŘENÉHO MODELU

Princip fungování popisovaných vztahů i celého modelu osvětlím na následujícím příkladu, kde konkrétní hodnoty obsahuje tabulka 13 (množina bodů) a tabulka 14 (definování zakázaných oblastí).

Tabulka 13: Souřadnice bodů s objemy přepravy

Vstupy - body			
i	x_i	y_i	Q_i
1	0	0	10
2	0	50	20
3	50	0	10
4	50	50	30
5	10	10	18
6	20	5	9

Zdroj: vlastní – testovací hodnoty

Tabulka 14: Způsob definování zakázaných oblastí

Zakázané oblasti				
Č.	X		y	
	OD	DO	OD	DO
1	10	35	15	40
2				

Zdroj: vlastní – pokusně zvolené hodnoty

Dosažením hodnot z tabulky 13 do vztahů 54 a 55 vznikne vztah 68.

$$\begin{aligned}
 F = & \\
 & 10 \cdot \sqrt{(X - 0)^2 + (Y - 0)^2} + 20 \cdot \sqrt{(X - 0)^2 + (Y - 50)^2} + \\
 & 10 \cdot \sqrt{(X - 50)^2 + (Y - 0)^2} + \dots = \min.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Dosažením hodnot z tabulky 14 do vztahu 66 vznikne vztah 69.

$$\left(X - \frac{10+35}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{35-10}{2} \right)^2 - 1\,000 \cdot t \tag{69}$$

Dosažením hodnot z tabulky 14 do vztahu 67 vznikne vztah 70.

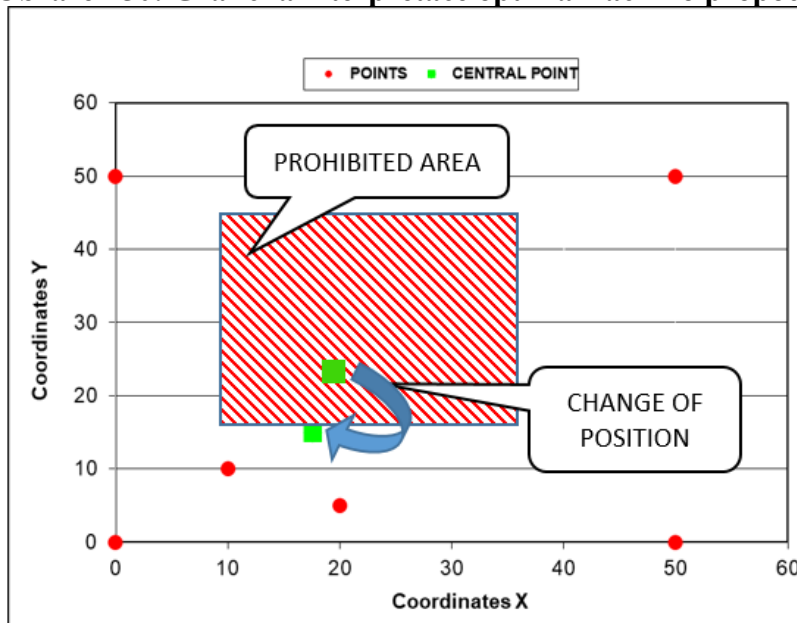
$$\left(Y - \frac{15+40}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{40-15}{2} \right)^2 - 1\,000 \cdot (1 - t) \tag{70}$$

Kde t je pomocná binární proměnná nabývající hodnot (0;1).

Probíhá výpočet, kde hledám hodnoty x, y takové, aby funkce daná vztahem 68 nabývala minima a zároveň byly dodrženy omezující podmínky dané vztahy 69 a 70. Potom má

centrální bod hledané souřadnice $x = 17,6$ a $y = 15,0$. Na výstupu z modelu je tento bod zakreslen zeleně (viz obr. 50), kde jsou červeně vyznačeny ostatní body, mezi které je centrální bod vkládán a zakázaná oblast je znázorněna zeleně. Modrá šipka ukazuje změnu polohy dané omezujícími podmínkami vynucenými existencí zakázané oblasti.

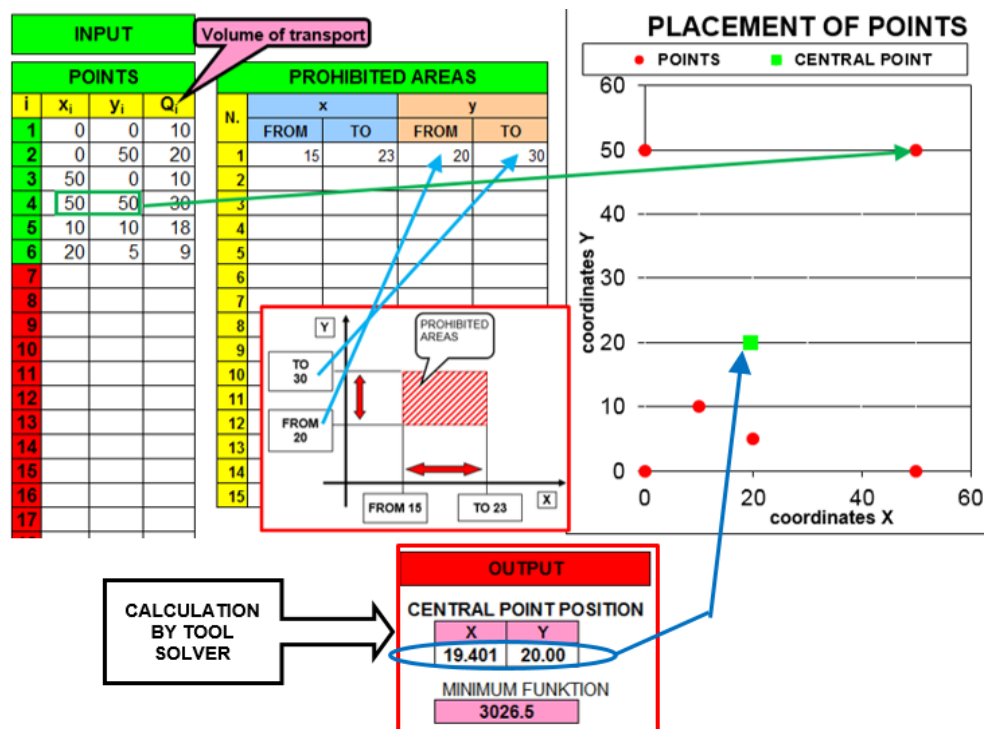
Obrázek 50: Grafická interpretace optimalizačního propočtu



Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2019 – b)

Zakázané oblasti nemusí být nutně jen obdélníkového tvaru, kdyby se výše popsané principy použily nikoliv na kartézské souřadnice, ale na polární souřadnice, bylo by možné vedle obdélníků zadávat oblasti i ve tvaru kružnic a elips.

Obrázek 51: Implementace metody do vytvoření modelu



Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2018 – b) (ukázka z modelu, kde je možné zadat 50 bodů a 50 zakázaných oblastí)

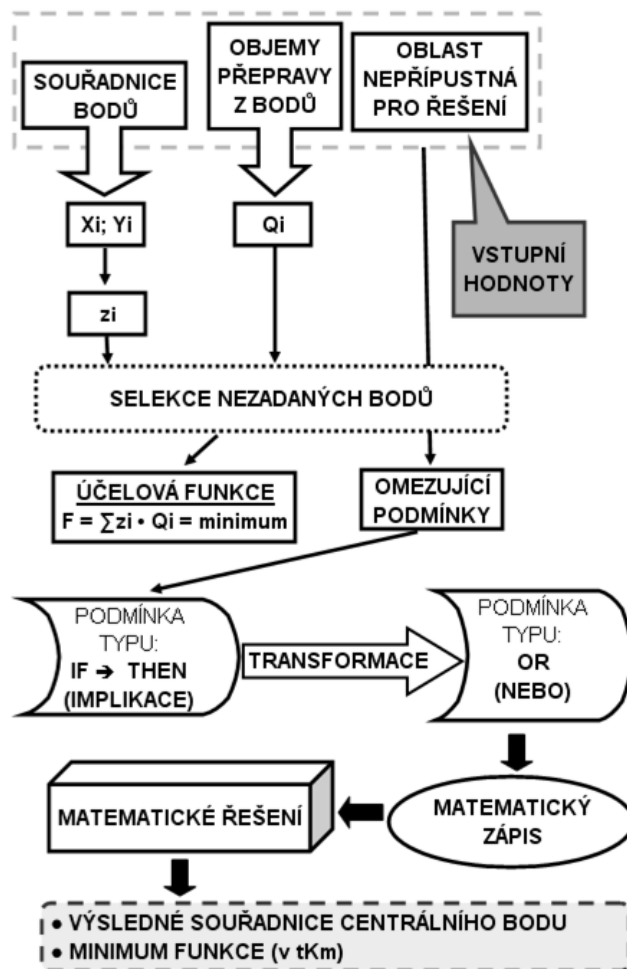
6.3 SHRNU TÍ ŠESTÉ KAPITOLY

Předmětem kapitoly 6 byla odpověď na otázku, jak řešit situace, kde je zapotřebí stanovit polohu centrálního bodu, který bude v interakci s danou množinou bodů. Správná lokalizace: pracoviště s ohledem na rozmístění již stávajících pracovišť, nové pobočky, centrálního skladu mezi pracovišti či mezi mezisklady, suširny ovoce, mlékárny mezi farmy atd. přináší úspory generované správným rozhodnutím. Tento centrální bod bude zpravidla z logiky věci figurovat v úloze obchodního cestujícího, co by výchozí bod, ve kterém trasa začíná a zároveň končí.

Předností představeného modelu jsou minimální nároky na software a hardware (stačí počítač s MS Excelem libovolné verze) i uživatelsky jednoduché provedení (vše je přednastaveno včetně naprogramování podmínek do analytického nástroje *řešitel*). Vytvořením modelu se podařilo rozšířit rozmisťovací optimalizační problém, který je znám o další reálná omezení počítající s tím, že optimální bod v praxi většinou nemůže ležet zcela

libovolně v souřadnicovém systému. Implementace lineárního programování s omezující podmínkou ve tvaru implikace je relativně originální postup.

Obrázek 52: Princip metody



Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2014 – a)

7. OPTIMALIZACE TRAS PŘI OMEZENÝCH ZDROJÍCH

7.1 POPIS PROBLÉMU

V této kapitole se budu zabývat optimalizací logistických tras v kontextu reálného omezení zdrojů. Výše bylo zmíněno, že objektivně existuje nějaká nejkratší trasa mezi reálnými body a existují různé přístupy snažící se tuto trasu nalézt. Tyto způsoby hledání se mohou lišit např. dobou trvání, v praxi může mít situace takovou podobu, že čas který je pro plánování trasy k dispozici je omezen, proto je nutné nalézt některé z postačujících sub optimálních řešení. Dále uvažuji situaci, kdy maticí vstupů C mohou tvořit výše zmiňované vzájemné vzdálenosti a nebo časy dojezdů mezi jednotlivými body. Potom mohu dostat dva odlišné výsledky: optimální trasu z hlediska minimalizace její délky a optimální trasu z hlediska doby jízdy. Pokud budu uvažovat jako východisko kompromis mezi objemy kritérii. Tyto podmínky lze zformulovat pomocí matematického modelu popsaného vztahy 54 a 55.

$$R = l \cdot t = konst. \quad (71)$$

$$T = e \cdot l + f \cdot t \quad (72)$$

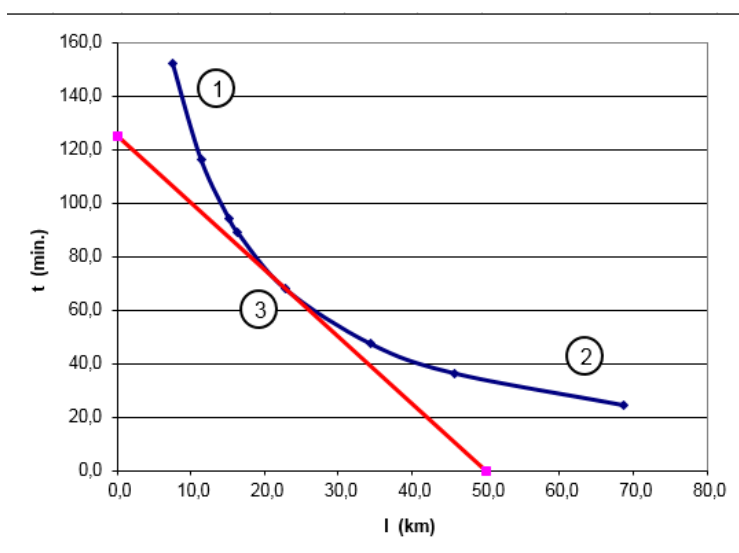
Kde:

- l úspora délky logistické trasy [km],
- t úspora času jízdy po logistické trase [min.],
- T celkový čas, který je k dispozici při plánování tras [min.],
- e čas plánování nutný k úspoře délky trasy o 1 km [min.],
- f čas plánování nutný k úspoře času jízdy o 1 min. [min.],

Čili T je časový rámeček (omezený zdroj), který nelze překročit a při existenci této omezující podmínky hledám takové hodnoty proměnných l a t , aby hodnota výrazu označeného R byla maximální (maximalizaci úspor).

Grafickou interpretací vztahů 71 a 72 je graf 10.

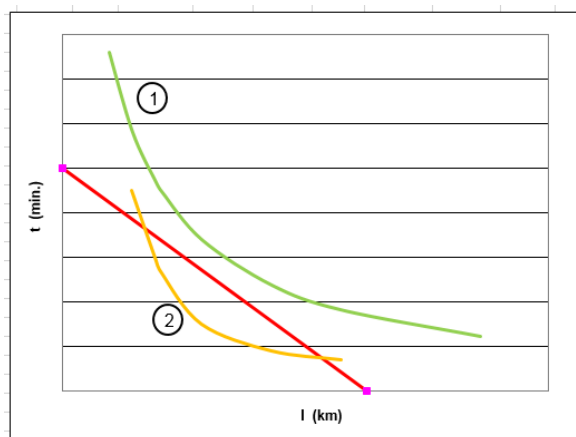
Graf 10: Grafická interpretace matematického modelu



Zdroj: vlastní

V grafu 10 bod 1 symbolizuje extrémní případ, kdy obětujeme relativně vysoký čas na plánování trasy s velkou úsporou času. Bod 2 představuje opačný extrém, kdy je naopak mnoho času věnováno plánování trasy s velkou úsporou délky. Oba tyto stavy jsou si z hlediska veličiny R rovnocenné, neboť R je definované jako součin časové a délkové úspory a tento součin pokládám za konstantu, proto má modrá křivka hyperbolický průběh. Nejdůležitější bod je bod 3, což je bod dotyku této křivky a přímky popisující celkový čas, který je na plánování (výpočty) k dispozici. Jedná se o optimální rovnováhu, protože odečteme-li souřadnice bodu dotyku, dostaneme takové hodnoty veličin l a t , které jsou povoleny časovým rámcem T , a zároveň nabývá funkce R maximální hodnoty. Tyto hodnoty vyhovují červené a zároveň modré křivce, opačnou situaci ukazuje graf 11.

Graf 11: Nežádoucí nerovnovážné stavy



Zdroj: vlastní

Stav jedna představuje situaci, kdy se podařilo naplánovat velmi kvalitní trasy, ale čas potřebný k jejich nalezení se vymyká času, který byl na toto plánování k dispozici.

Naopak stav dva představuje situaci, kdy nebyl využit veškerý čas, který byl k dispozici a byla nalezena řešení méně kvalitní (méně úspor), což se projeví tím, že žlutá křivka je položená níže než zelená.

7.2 ALTERNATIVNÍ ZPŮSOB VÝPOČTU VÁZANÉHO EXTRÉMU

Nyní se pustím do nalezení obecného řešení tohoto problému – nalezení způsobu jak určit hodnoty neznámých l a t , kde ovšem vztah 71 budu uvažovat ve více obecnější podobě, jak uvádí vztah 73.

$$R = a \cdot l \cdot t + b \cdot l + c \cdot t + d = konst. \quad (73)$$

Vztah 73 uvažuje situaci, kdy je třeba nějakým způsobem redefinovat důležitosti v rychlé a krátké trase (jiné rozdělení kritérií).

Literatura uvádí řešení tohoto problému prostřednictvím nalezení stacionárního bodu na Lagrangeově funkci viz vztah 74, kde se u tohoto bodu ověří, zda se jedná o maximum výpočtem determinantu Hessovi matice, který musí být kladný, viz vztah 75, jak uvádí Štecha (2004, s. 147 a 149).

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x) \quad (74)$$

$$\frac{\partial h(x^*)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \nabla h(x^*)^T \quad (75)$$

Mé řešení je odlišné:

Pokud vezmu zadání problému obecně s parametry a , b , c až f a T místo čísel a omezující podmínku danou vztahem 72 upravím na vztah 76, který dosadím do vztahu 73.

$$T = e \cdot l + f \cdot t \rightarrow l = \frac{T-f \cdot t}{e} \quad (76)$$

Tím dostávám vztah 77.

$$R = a \cdot \frac{T-f \cdot t}{e} \cdot t + b \cdot \frac{T-f \cdot t}{e} + c \cdot t + d \quad // -R // \bullet e \quad (77)$$

Ten upravím do tvaru popsaného vztahem 78 a následně vztahu 79.

$$0 = a \cdot T \cdot t - a \cdot f \cdot t^2 + b \cdot T - b \cdot f \cdot t + c \cdot e \cdot t + d \cdot e - R \cdot e \quad (78)$$

$$0 = -a \cdot f \cdot t^2 + t(a \cdot T - b \cdot f + c \cdot e) + b \cdot T + d \cdot e - R \cdot e \quad (79)$$

Vztah 79 je kvadratickou rovnicí s parametrem R a neznámou t (ostatní proměnné vyjadřují číselné hodnoty, ale jedná se o zobecnění problému a jeho analytické vyřešení. Kvadratický člen (A) je zde pro lepší názornost označen červeně, lineární člen (B) zeleně a absolutní člen (C) modře. Takovouto substitucí obdržím vztah 80, jak je uvedeno v Košťálek (2018 – c).

$$0 = A \cdot t^2 + B \cdot t + C \quad (80)$$

Situace popsané v grafech 10 a 11 korespondují s hodnotou parametru R , kde mohou nastat tři možnosti.

- I. Kvadratická rovnice nemá řešení (v oboru reálných čísel). Hodnota R je příliš vysoká a hyperbola neprotne přímkou – viz graf 11, zelená křivka.
- II. Kvadratická rovnice má dvě řešení. Hodnota R je příliš nízká a hyperbola protne přímkou ve dvou bodech – viz graf 11, žlutá křivka.
- III. Kvadratická rovnice má jediné řešení, (resp. jeden dvojnásobný kořen). Hodnota R je hledanou hodnotou a hyperbola s přímkou mají jeden bod dotyku (R nabývá maxima a je splněna omezující podmínka) – viz graf 10.

Pro řešení mého problému, kde je cílem analyticky vyjádřit hodnotu neznámé t , budu vycházet ze situace číslo III., neboť představuje stav, který potřebuji, aby nastal. Tento stav má pro další výpočet velmi důležitou vlastnost a sice hodnota diskriminantu je nulová viz vztah 81

$$Diskr. = B^2 - 4AC = 0 \quad (81)$$

a do tohoto vztahu dosadím příslušné členy ze vztahu 79 (pro lepší názornost ponechám výrazům jejich barevné rozlišení), čímž vznikne vztah 82.

$$Diskr. = (a \cdot T - b \cdot f + c \cdot e)^2 - 4 \cdot (-a \cdot f) \cdot (b \cdot T + d \cdot e - R \cdot e) = 0 \quad (82)$$

Zde by bylo možné odvodit několik zajímavých výrazů, např. bylo by možné stanovit podmínky, při kterých by byl diskriminant záporný, bylo by možné kromě diskriminantu vyjádřit obecně i oba dva kořeny kvadratické rovnice, což jsou vlastně obecné hodnoty svislých souřadnic dvou průsečíků z grafu 11 (eventuálně by bylo možné dopočítat také vodorovné souřadnice dosazením a upravením takto vzniklých výrazů do vztahu 76), samozřejmě myšleno za podmínek, reálných kořenů to znamená z rovnice ve vztahu 82 udělat nerovnici, kde je výraz vlevo ostře větší než nula. Zde by šlo o zobecnění pro jakoukoliv ze tří situací.

Ovšem vyjádření hodnoty t pro případ jednoho bodu dotyku je následný postup mnohem jednodušší, jestliže hodnota diskriminantu je nulová obecný vzorec pro hledání kořenů kvadratické rovnice dostane podobu danou vztahem 83.

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{Diskr.}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{0}}{2A} = \frac{a \cdot T - b \cdot f + c \cdot e}{2 \cdot a \cdot f} \quad (83)$$

Což je hledaný výsledek a když výraz rovný t dosadím za t do vztahu 76 obdržím vyjádření neznámé l viz vztah 84, jak je publikováno v Košťálek (2018 – c).

$$l = \frac{T - f \cdot t}{e} \quad (84)$$

7.3 SROVNÁNÍ ALTERNATIVNÍHO ZPŮSOBU VÝPOČTU S KONVENČNÍM

V předchozím oddíle se mi podařilo vlastním originálním způsobem řešení problému vázaného extrému dospět k obecnému výpočtu jak stanovit hodnoty proměnných l a t tak, aby maximalizovaly funkci R , při omezující podmínce dané množstvím času T , který je k dispozici. Nyní tento výpočet provedu na reálném příkladu možných hodnot a výpočet porovnam s obecně udávanými způsoby řešení.

ZADÁNÍ:

Nechť obecné parametry funkce R nabývají hodnot ze vztahu 85.

$$R = a \cdot l \cdot t + b \cdot l + c \cdot t + d = l \cdot t - l + 2t \Rightarrow a = 1; b = -1; c = 2; d = 0 \quad (85)$$

A omezující podmínka udává časový limit $T = 10$ minut, kde čas potřebný k nalezení řešení zlepšující trasu o 1 km trvá $e = 0,4$ min. a vylepšení zkracující trasu optimalizovanou z hlediska doby jízdy o 1 min. trvá $f = 0,6$ min. Z čehož plyne tvar omezující podmínky popsáný vztahem 86.

$$10 = 0,4l + 0,6t \quad (86)$$

Díky analytickému vyjádření, které se mi podařilo nalézt, mohu postupovat dosazením těchto reálných čísel do vztahů 83 a 84.

ŘEŠENÍ a VÝSLEDEK

$$t = \frac{a \cdot T - b \cdot f + c \cdot e}{2 \cdot a \cdot f} = \frac{1 \cdot 10 - (-1) \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4}{2 \cdot 1 \cdot 0,6} = 9,5 \quad (87)$$

$$l = \frac{T - f \cdot t}{e} = \frac{10 - 0,6 \cdot 9,5}{0,4} = 10,75 \quad (88)$$

Výsledek říká, že v rámci času, který je k dispozici, dojde k maximální hodnotě křivky R . Pokud optimalizace trasy z hlediska času dojezdu provede vylepšení trasy ve smyslu skácení o $t = 9,5$ min. A optimalizace trasy z hlediska délky postoupí do fáze úspory $l = 10,75$ km.

Díky předchozím úpravám jsem dokázal řešení problému převést na jednoduché algebraické výrazy, jejichž výpočty lze velmi snadno automatizovat, což je velký přínos mého postupu.

Jeden ze způsobů, jak tento výpočet plně automatizovat je vytvořit MS Excel vlastní funkci pomocí práce s makry a využití programovacího jazyku VBA (*Visual Basic for Applications*), jak uvádí Laurenčík (2013, s. 21 – 22), což popisují v příloze číslo 5 své disertační práce.

ŘEŠENÍ a VÝSLEDEK pomocí klasických přístupů pro hledání vázaných extrémů

Sestaví se Lagrangeova funkce:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2) = l \cdot t - l + 2t + \lambda(-0,4l - 0,6t + 10) \quad (89)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = t - 1 - 0,4\lambda = 0 \quad (1. \text{ rovnice}) \quad (90)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = l + 2 - 0,6\lambda = 0 \quad (2. \text{ rovnice}) \quad (91)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -0,4l - 0,6t + 10 = 0 \quad (3. \text{ rovnice}) \quad (92)$$

Nyní jde o vyřešení soustavy tří rovnic (vztahy 90, 91 a 92). Neznámé vypočtu např. tím způsobem, že ze 3. rovnice vyjádřím l , z 1. rovnice λ a obojí dosadím do rovnice 2 (viz vztah 93).

$$25 - 1,5t + 2 + 0,6(2,5 - 2,5t) = 0 \quad (93)$$

Odkud vypočítám

$$t = 9,5$$

z čehož je dále možné dopočítat, že

$$l = 10,75 \text{ a } \lambda = -21,25.$$

Odkud je vidět, že řešení se shoduje s mým výpočtem. Aby vše bylo matematicky korektní je třeba ještě ověřit zda se jedná skutečně o maximum, to se provede tak, že vypočítané hodnoty se dosadí do jednotlivých proměnných v Hessově matici, u které se následně posuzuje zda je determinant kladný, jak uvádí Štecha (2004, s. 147 a 149). Tento proces nebudu provádět a pouze ho naznačím vztahem 94.

$$H = \det. \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \text{max.} \quad (94)$$

Je dobře patrné, že mnou popisované řešení je mnohem jednodušší a rychlejší, ovšem jeho limitem je fakt, že funguje pouze u problému čítající pouze dvě neznámé.

Mám tak k dispozici vzorec řešící problém popsany matematickým modelem, sloužícím pro rozvržení časů výpočtů. Ovšem mnou odvozený obecný výsledek problému (vztahy 83 a 84) může být využit i v jiných oblastech (všude, kde je hledán bod dotyku hyperboly a přímky s požadavkem na nalezení maxima). Taková situace nastává např. v mikroekonomických modelech, při optimální kombinaci množství q_1 a q_2 , kde je třeba maximalizovat výši užitku (indiferenční křivku) při omezující podmínce dané množstvím peněz (důchodovou přímkou), jak uvádí Macík (2007, s. 24 – 25).

8. NÁSTROJE K ODHADŮM DÉLKY OPTIMÁLNÍ TRASY

8.1 POPIS A VYUŽITÍ

Pro každou heuristickou metodu platí, že: známe řešení, které je ze všech nejmenší, (bylo nalezeno minimum) předpokládáme, že je optimální, ale definitivní jistotu, že tomu tak doopravdy je nemáme (může jít pouze o lokální minimum nikoliv o globální minimum). Pokud byly určovány odchylky od optimálního řešení, provedl jsem výpočet tím způsobem, že jsem zadání vložil do programu, který našel řešení exaktním propočtem a tím jsem dostal představu zda můj algoritmus dosáhl stejně dobrého řešení resp. o jakou hodnotu se liší. V reálné situaci bychom tedy měli řešení považované za optimální, ovšem neměli bychom jistotu, že je opravdu optimální. Tato skutečnost mě přivedla k myšlence doplnit výše popsané metody a modely o nástroj sloužící k odhadu délky optimální trasy a tím dát odpověď na otázku, zda nalezené řešení už je tím nejlepším možným či nikoliv. Na základě této informace lze rozhodnout, zda je dosažené řešení dostatečné nebo má algoritmus pokračovat v dalším vyhledávání.

Pokud by byla k dispozici spolehlivá nepřímá metoda odhadu délky nejkratší trasy pouze na základě definovaných bodů, bez určení optimální trasy (neznal bych kudy trasa vede, ale dokázal bych odhadnout její délku), potom by v podnikové praxi bylo možné provést takový výpočet odhadu a porovnat ho s délkou trasy, která je aktuálně používána. Nastaly by dvě alternativy: Používaná trasa se příliš neliší od odhadu velikosti nejlepší existující trasy, z čímh by se potvrdilo, že používaná trasa je vyhovující. Druhou alternativou by byla vysoká odchylka odhadu od používaného řešení, což by signalizovalo reálnou potřebu hledání optimální trasy. Vycházím totiž z toho, že výpočet odhadu délky optimální trasy je mnohem výpočetně jednodušší než hledání této trasy, proto by tento výpočet sloužil jako předběžná analýza.

Osobně si myslím, že vůči této oblasti poznání existuje velký dluh. O metodách tohoto typu nebylo napsáno mnoho. Cook (2012, s. 56 – 57) uvádí, že první směr tohoto uvažování zformuloval ve svém článku v r. 1940 zakladatel Indického statistického ústavu Prasanta Chandra Mahalanobis. Ten se zabýval odhady úrody juty tím způsobem, že nechal sbírat náhodně vybrané vzorky úrody. Úloha obchodního cestujícího se v této situaci vyskytla v potřebě plánování nejkratší trasy mezi zadanými místy, kde bylo třeba sebrat vzorky.

Mahalanobis se zabýval otázkou odhadů délek optimálních tras na základě počtu spojovaných bodů n a dospěl k závěru uvedeném ve vztahu 95.

$$F_{min} \approx \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (95)$$

Na tyto myšlenky navázaly další matematici, kteří náhodně umísťovali body do čtverce o straně jedna jednotka, počítaly u nich nejkratší – optimální trasy a zjišťovali odhad délky těchto tras. Eli Marks v r. 1948 dokázal, že délka optimální trasy má nejméně hodnotu danou výrazem 96.

$$F_{dolní\ mez} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (96)$$

M. N. Ghosh v r. 1949 přidal horní mez odhadované optimální trasy danou výrazem 97.

$$F_{horní\ mez} = 1,27 \cdot \sqrt{n} \quad (97)$$

Michalewicz (1996, s. 233) uvádí odhad dolní meze optimální trasy daný výrazem 98.

$$F_{dolní\ mez} = k \cdot \sqrt{n \cdot R} \quad (98)$$

Kde $k = 0,765$ a jde o empirickou konstantu, n je počet bodů, R je plocha čtverce, ze kterého jsou body náhodně vybírány.

Mou ambicí je toto spektrum vzorců rozšířit.

8.2 ŘEŠENÍ POMOCÍ DOLNÍHO KVANTILU ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI

Můj způsob nalezení odhadu velikosti nejkratší trasy spočívá v hypotéze, že délky všech přípustných tras podléhají normálnímu rozdělení. Pokud se tedy hodnoty délek statisticky zpracují jako tříděná data rozdělená do i intervalů o četnostech n_i ; vznikne tím typická zvonovitá křivka (Gauss-Laplaceova) rozdělení, kde extrémně dlouhých („špatných“) tras je poměrně málo, středně dlouhých tras poměrně hodně a krátkých tras („dobrých řešení“) je opět poměrně málo – někde mezi nimi se nachází také řešení optimální.

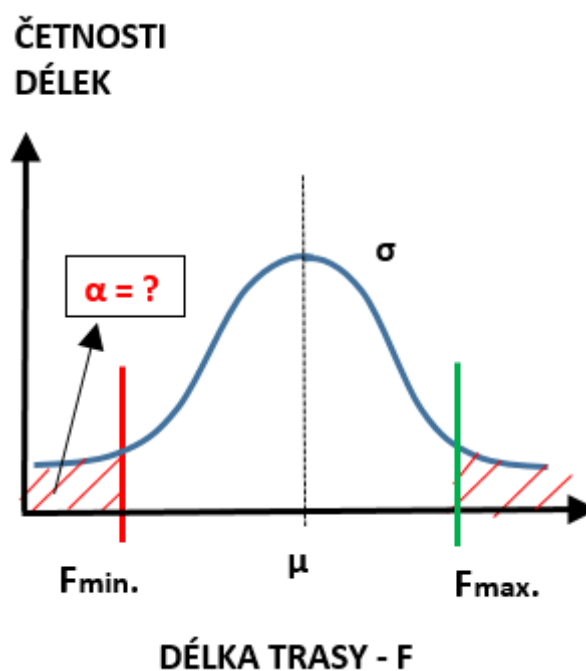
Pokud by tato hypotéza o normálním rozdělení byla platná, dokázal bych odhadnout parametry tohoto rozdělení (střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ).

Odhad bych provedl tím způsobem, že bych vybral náhodný vzorek několika libovolných řešení problému a z něj provedl odhad parametrů.

Po té co bych měl průběh normálního rozdělení pro určitý konkrétní problém (definovaný množinou bodů), přistoupil bych k hlavní části své hypotézy a tou je možnost definovat polohu dolního kvantilu tohoto rozdělení představující předpokládanou délku

optimální trasy. Celý princip popisuje obrázek 53, kde červená čára značí optimální řešení a zelená nejhorší možné řešení, modrá „Gaussova“ křivka je teoretické rozdělení, proto tento interval přesahuje neboť vede teoreticky od minus nekonečna do plus nekonečna. Velkou otázkou, na kterou budu hledat odpověď je zda je možné určit neznámou pravděpodobnost resp. plochu pod křivkou α pro jakoukoliv množinu bodů definující problém obchodního cestujícího. Pro lepší vysvětlení každá množina bodů, u které je řešen problém obchodního cestujícího bude mít svůj průběh modré křivky z obrázku 53 a otázkou je, zda existuje nějaká zákonitost ohledně velikosti α obecně pro jakoukoliv křivku.

Obrázek 53: Rozdělení délek tras – hodnot řešení



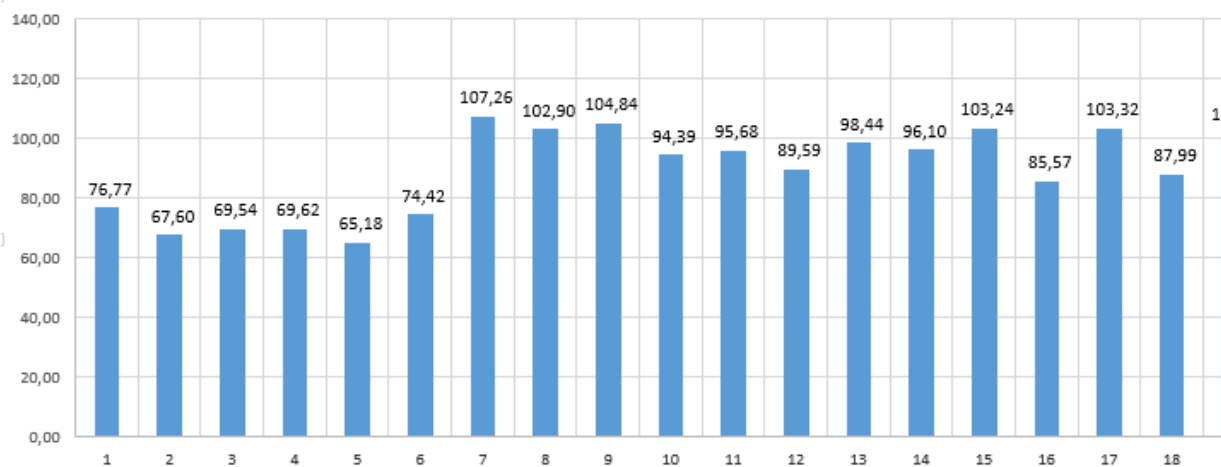
Zdroj: vlastní

8.2.1 OVĚŘENÍ PODMÍNKY NORMALITY DÉLEK TRAS

Pro potřeby statistického testování jsem vytvořil model TSP6, kam lze zadat eventuálně náhodně vygenerovat souřadnice pro 6 bodů. Bodů je pouze 6 z toho důvodu, aby se mi podařilo nastavit výpočty všech existujících kombinací jak trasu vést (těch je $5! = 120$). Optimální trasa je zde potom zjištěna tak, že ze všech kombinací (přesný termín by byl permutací) tras různých délek F je vybrána ta nejnižší (nejkratší trasa – optimální řešení). Část tohoto modelu je ukázána na obrázku 54.

Obrázek 54: Sběr dat hodnot délek F přípustných tras

POKUS		MIN. 65,179															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
KOMBINACE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
	4	4	5	5	5	6	6	3	3	5	5	6	6	3	3	4	4
	5	6	4	6	4	5	5	6	3	6	3	5	4	6	3	6	6
	6	5	6	4	5	4	6	5	6	3	5	3	6	4	6	3	3
	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
DĚLKY	1.	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03	15,03
	2.	10,05	10,05	10,05	10,05	10,05	10,05	26,93	26,93	26,93	26,93	26,93	26,93	21,02	21,02	21,02	21,02
	3.	24,33	24,33	20,03	20,03	21,59	21,59	24,33	24,33	6,40	6,40	3,16	3,16	20,03	20,03	6,40	6,40
	4.	6,40	3,16	6,40	6,08	3,16	6,08	20,03	21,59	20,03	6,08	21,59	6,08	24,33	21,59	24,33	3,16
	5.	6,08	6,08	3,16	3,16	6,40	6,40	6,08	6,08	21,59	21,59	20,03	20,03	3,16	3,16	21,59	21,59
	6.	14,87	8,94	14,87	15,26	8,94	15,26	14,87	8,94	14,87	18,36	8,94	18,36	14,87	15,26	14,87	18,36
	Σ	76,77	67,60	69,54	69,62	65,18	74,42	107,26	102,90	104,84	94,39	95,68	89,59	98,44	96,10	103,24	85,57
VÝSLEDKY					1												



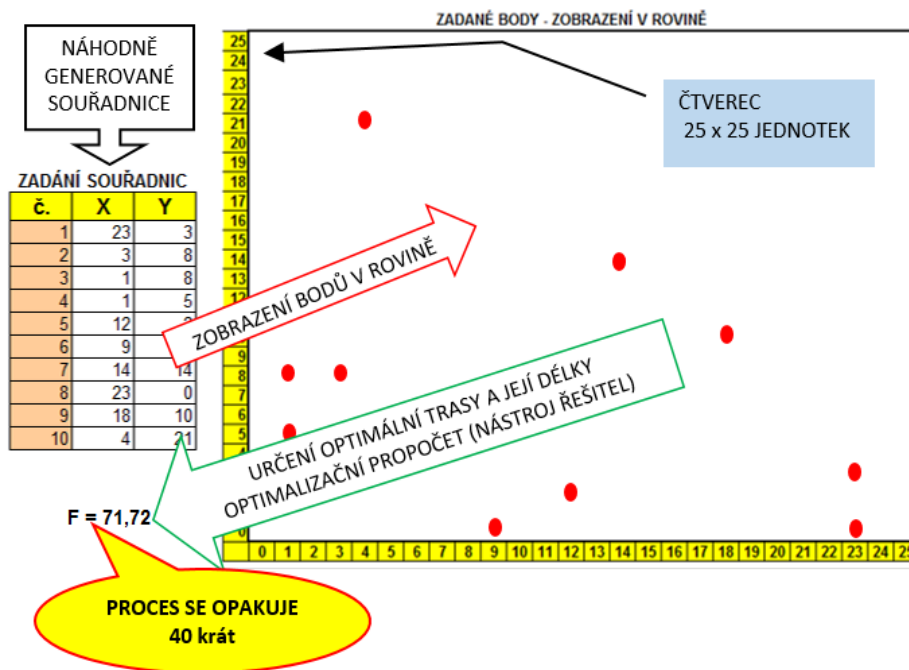
Zdroj: vlastní – ukázka z modelu TSP6

Na obrázku 54 jsou vidět kombinace tras, pod nimi jejich délky, výběr nejkratší (minimum funkce) je označen červenou jedničkou – zde kombinace 5, hodnoty délek tras jsou interpretovány graficky.

Tyto hodnoty jsem otestoval na shodu s normálním rozdělením výše popisovanou metodou Kolmogorova-Smirnova testu. Test na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ potvrdil shodu. Vygeneroval jsem nové body – potažmo nové délky tras a test zopakoval. To jsem provedl desetkrát a test vždy potvrdil shodu s normálním rozdělením. To mě opravňuje domnívat se, že délky tras (hodnoty přípustných řešení) u problému obchodního cestujícího se řídí normálním rozdělením.

Pro zajímavost jsem provedl ještě jeden test zkoumající, zda při 40-ti pokusech s náhodně vygenerovanými deseti body, u kterých jsem spočítal délky optimálních tras, platí také pro tyto hodnoty normální rozdělení, průběh testu ilustruje obrázek 55.

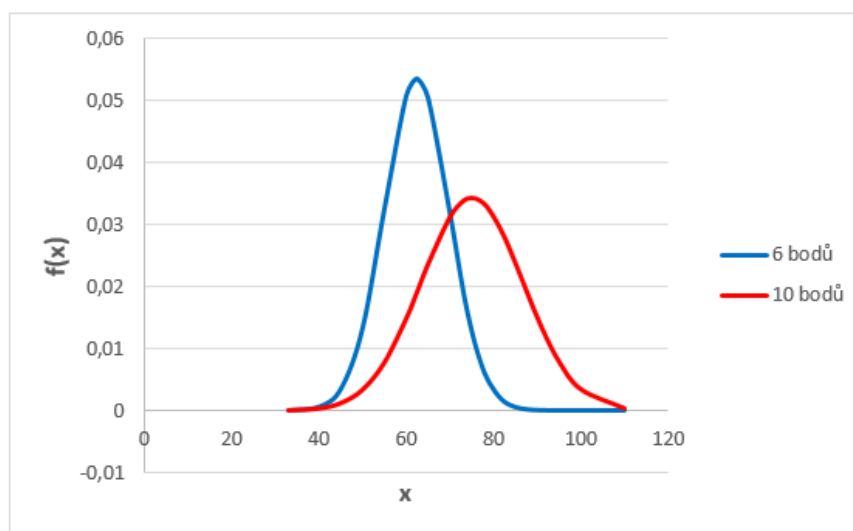
Obrázek 55: Testování optimálních délek tras



Zdroj: vlastní

Podobný pokus jsem učinil také pro 6 bodů (rovněž náhodně generovaných ze čtverce o straně 25 jednotek). Opět jsem obdržel (a testem potvrdil) normální rozdělení ovšem s odlišnými parametry, jak ukazuje graf 12.

Graf 12: Změny parametrů rozdělení N (μ, σ) při změně počtu bodů



Zdroj: vlastní

Tyto zákonitosti jsem publikoval v příspěvku Košťálek (2017).

8.2.2 HLEDÁNÍ ZÁKONITOSTI PRO DOLNÍ KVANTIL ROZDĚLENÍ

Učinil jsem experiment v duchu myšlenky vyjádřené obrázkem 53. Šlo o nalezení hodnoty pravděpodobnosti, kterou v obrázku 53 reprezentuje část plochy pod „Gaussovou“ křivkou, tato část plochy je ohraničena mezi odpovídající hodnotě optimálního řešení (trasy, která je ze všech tou nejkratší). Pokud bych dokázal definovat průběh „Gaussovi“ křivky a znal bych velikost pravděpodobnosti, resp. plochy pod křivkou dokázal bych vypočítat polohu meze ohraničující plochu a tím bych znal velikost nejkratší trasy neboť „Gaussova“ křivka, resp. normální rozdělení popisuje rozložení velikostí tras pro různé kombinace, jak propojit množinu bodů.

V modelu o rozsahu 6 bodů, který vypočítá všechny kombinace tras jsem náhodně vybral 40 těchto tras a na základě jejich délek jsem odhadl parametry normálního rozdělení („Gaussovi“ křivky). Střední hodnotu (μ) jsem odhadl pomocí aritmetického průměru z délek těchto tras a směrodatnou odchylku (σ) pomocí výběrové směrodatné odchylky (s) z těchto délek. K dispozici jsem měl hodnotu nejkratší (optimální) trasy. U takto definovaného normálního rozdělení jsem pomocí statistické funkce NORM.DIST v Excelu spočítal velikost plochy resp. pravděpodobnosti vymezené pod křivkou právě nejkratší délkou trasy. Hodnoty uvádí Tabulka 15.

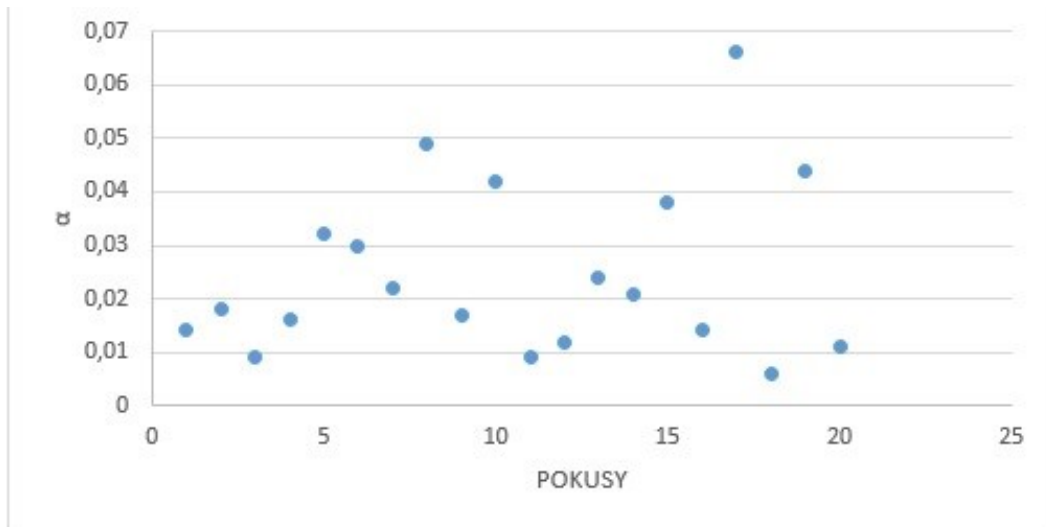
Tabulka 15: Hodnoty pravděpodobnosti vytyčující na normálním rozdělení délky nejkratších tras

0,028	0,06	0,018	0,028
0,036	0,044	0,024	0,132
0,018	0,098	0,048	0,012
0,032	0,034	0,042	0,088
0,064	0,084	0,076	0,022

Zdroj: vlastní

Ovšem univerzální hodnotu pravděpodobnosti α se mi určit nepodařilo. Hodnoty pravděpodobnosti vykazovaly vysoké fluktuace tudíž nebylo možné použít ani intervalového odhadu jejich hodnoty viz graf 13.

Graf 13: Pravděpodobnosti vytyčující hodnoty nejkratších tras



Zdroj: vlastní

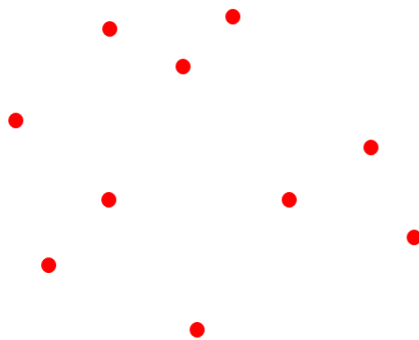
Rovněž se mi nepodařilo objevit žádnou souvislost nebo zákonitost, jak by bylo možné k hledané hodnotě pravděpodobnosti dospět.

Závěr je ten, že odhad délky optimální trasy pomocí dolního kvantilu pravděpodobnosti normálního rozdělení se mi nezdařil a tuto hypotézu se mi nepodařilo dokázat.

8.3 ODHAD DÉLKY POMOCÍ OBVODU KONVEXNÍHO OBALU BODŮ

Myšlenku tohoto způsobu odhadu popisují obrázky 58 a 59 tuto metodu lze použít pouze v případě reálných bodů a eukleidovských vzdáleností mezi nimi. Z toho plyne, že není určená pro asymetrické matice vzájemných vzdáleností a situace, ve kterých neplatí trojúhelníková nerovnost.

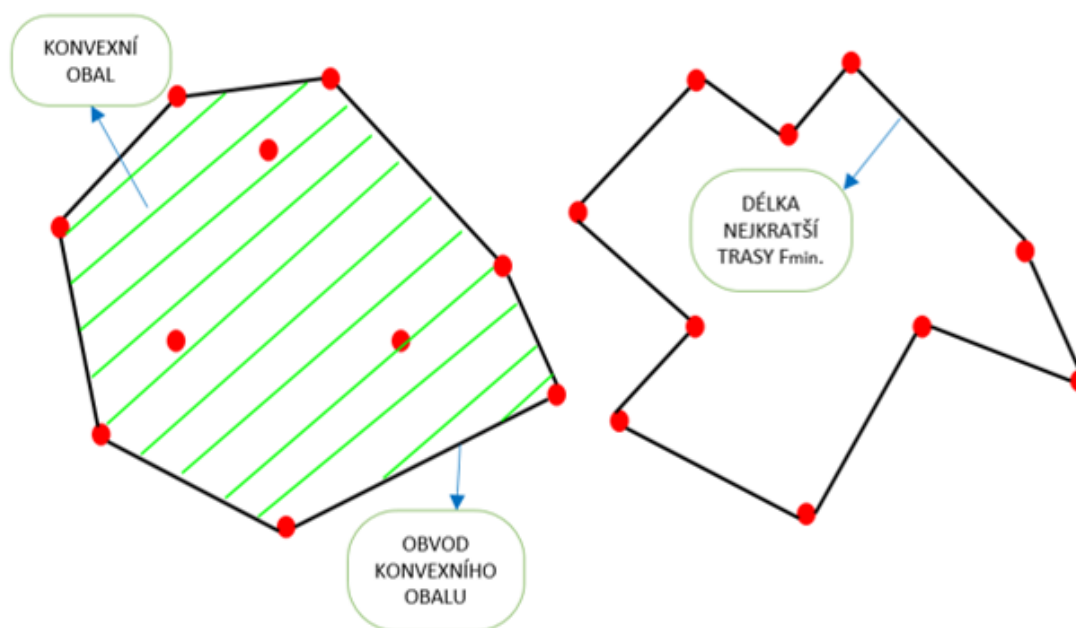
Obrázek 58: Odhadovaná délka nejkratší trasy pro 10 bodů



Zdroj: vlastní

Nechť je dána množina deseti náhodně zvolených bodů viz obrázek 58. Okolo těchto bodů povedu konvexní obrazec – obal, jak ukazuje obrázek 59. Vypočtu obvod tohoto obrazce – obalu (jako součet všech vzájemných vzdáleností mezi body ležícími na obvodu) a následně délku tohoto obvodu porovnám s délkou nejkratší trasy propojující tyto body, jak ukazuje rovněž obrázek 59.

Obrázek 59: Konvexní obal bodů a jeho obvod



Zdroj: vlastní

Zastávám názor, že mezi tímto obvodem a nejkratší trasou existuje nějaká zákonitost, přesněji řečeno, že nejkratší trasu lze odhadnout vynásobením obvodu koeficientem, který označím „w“ a pokusím se nalézt hodnotu tohoto koeficientu, viz vztah 99.

$$w = \frac{F_{MIN}}{\sum^{OBALU} c_{ij}} = \frac{F_{MIN}}{OBVOD\ OBALU} \quad (99)$$

Provedl jsem 20 pokusů, jejichž výsledky uvádí tabulka 16. Souřadnice x a y byly voleny náhodně z intervalu 0 až 25.

Tabulka 16: Pokusy o určení koeficientu w

číslo pokusu	počet b. n	Obvod	$F_{min.}$	w	průměrné w
1	6	57,41	65,18	1,14	1,51
2	6	44,01	46,5705	1,06	
3	6	49,8	78,2857	1,57	
4	6	55,17	99,9654	1,81	
5	6	53,48	95,5537	1,79	
6	6	51,12	56,5705	1,11	
7	6	43,14	76,5479	1,77	
8	6	47,67	58,926	1,24	
9	6	49,16	80,4187	1,64	
10	6	50,06	99,5724	1,99	
11	10	65,49	87,15	1,33	1,68
12	10	73,18	116,601	1,59	
13	10	70,76	121,22	1,71	
14	10	65,12	100,87	1,55	
15	10	81,89	166,828	2,04	
16	10	62,33	63,724	1,02	
17	10	62,71	112,344	1,79	
18	10	69,44	144,46	2,08	
19	10	75,72	130,927	1,73	
20	10	74,92	142,813	1,91	

Zdroj: vlastní

Z tabulky je dobře patrné, že určitá vazba mezi obvodem konvexního obalu a délkou nejkratší trasy skutečně existuje. Pro problém o rozsahu $n = 6$ bodů má koeficient w přibližnou hodnotu 1,5 a pro $n = 10$ bodů 1,7. Dále je vidět, že hodnota poměru mezi obvodem obalu a nejkratší trasou se s rostoucím počtem bodů zvyšuje. Vztah 99 mohou následně modifikovat na vztah 100, což je můj přístup k odhadu nejkratší trasy.

$$F_{min} = w \cdot \text{obvod obalu} \quad (100)$$

kde pro počet bodů do deseti bodů použijí hodnotu $w = 1,5$ a pro počet bodů 10 až 20 použijí hodnotu $w = 1,68$.

Svou metodu popsanou vztahem 100 nyní porovnám s uváděnými metodami, s metodou 1. popsanou vztahem 96 a metodou 2. popsanou vztahem 98. Zde je třeba poznamenat, že vztah 96 je myšlen na čtverec o straně jedné jednotky, já prováděl pokusy opět na náhodně generovaných bodech ve čtverci o straně 26 jednotek, proto jsem získané hodnoty vynásobil číslem 26. Nyní učiním pokus, kde pomocí těchto tří metod provedu odhady délek nejkratších

tras a následně pomocí programu *Lingo* nejkratší trasy exaktně spočítám a určím rozdíly odhadů délek od skutečných délek. Výsledky tohoto pokusu shrnuje tabulka 17.

Tabulka 17: Porovnání metod odhadů délek tras

n	metoda 1. (vztah 96)				metoda 2. (vztah 98)				má metoda (vztah 100)				součet	součet čtverců
<6;10>	19,46	5,13	21,68	7,52	8,82	12,44	13,99	16,89	15,30	9,06	18,63	11,76	160,68	2446,67
(10;20>	22,30	17,48	30,09	17,55	33,82	29,25	14,09	22,84	35,11	23,74	19,19	22,23	287,69	7394,53
součet	141,21				152,14				155,02				448,37	
součet čtverců	2947,83				3433,09				3460,28					9841,20
průměr	17,65				19,02				19,38					

Zdroj: vlastní

Zajímají mě velikosti rozdílů a není podstatné, zda jsou kladné či záporné, proto tabulka 17 obsahuje rozdíly v absolutních hodnotách. Ve srovnání metod je hlavním cílem zjistit, zda je mnou uváděná metoda použitelná a funkční. Její fungování závisí na odhadu koeficientu w , který má ale jinou hodnotu pro různé počty bodů odchylky porovnam pro dva případy odpovídající dvěma řádkům hodnot v Tabulce 17. Půjde o to statisticky otestovat, zda se odchylky hodnot liší pro jednotlivé metody a zároveň pro jednotlivé rozsahy. Kde velikost rozsahu je faktor A a použitá metoda je faktor B . K tomu použiji analýzu rozptylu obsahující pomocné výpočty, viz vztahy 101 až 104 ze zdroje Kubanová (2004, s. 183), mezivýpočty obsahuje tabulka 17.

$$S_y = \sum_{i=1}^I \cdot \sum_{j=1}^J \cdot \sum_{p=1}^P y_{ijp}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^I \cdot \sum_{j=1}^J \cdot \sum_{p=1}^P y_{ijp} \right)^2 = 9841,2 - \frac{1}{24} \cdot 448,37^2 = 1464,71 \quad (101)$$

kde vztah 101 počítá rozptýlení hodnot celého výběru.

$$S_A = \frac{1}{JP} \sum_{i=1}^I (\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P y_{ijp})^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P y_{ijp})^2 = \frac{1}{3 \cdot 4} (160,68^2 + 287,69^2) - \frac{1}{24} \cdot 448,37^2 = 672,15 \quad (102)$$

kde vztah 102 počítá variabilitu (rozptýlení) hodnot mezi řádky.

$$S_B = \frac{1}{IP} \sum_{j=1}^J (\sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P y_{ijp})^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^P y_{ijp})^2 = \frac{1}{2 \cdot 4} (141,21^2 + 152,14^2 + 155,02^2) - \frac{1}{24} \cdot 448,37^2 = 13,27 \quad (103)$$

kde vztah 103 počítá variabilitu (rozptýlení) hodnot mezi sloupci.

$$S_e = S_y - S_A - S_B = 1464,71 - 672,15 - 13,27 = 779,29 \quad (104)$$

kde vztah 104 počítá zbytkovou variabilitu, která není vysvětlena faktory A a B .

Po výpočtu potřebných mezivýpočtů mohou přejít k otestování statistické hypotézy předpokládající rovnost řádkových efektů, viz vztah 105 (faktor A) – vliv počtu míst n .

$$H_0(A) = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (105)$$

Druhá statistická hypotéza je zaměřená na test srovnávající samotné metody, viz vztah 106 (faktor B) - rovnost sloupcových efektů.

$$H_0(B) = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad (106)$$

Testování statistických hypotéz, jak dále uvádí Kubanová (2004, s. 183) je založeno na principu, že pomocné hodnoty ze vztahů 101 až 104 jsou náhodné veličiny řídicí se χ^2 (chí – kvadrát) rozdělením pravděpodobnosti se stupni volnosti: S_y 23 (počet hodnot minus jedna), S_A 1 (počet řádků minus jedna), S_B 2 (počet metod minus 1), S_e 20, kde výpočet hodnoty 20 je dán vztahem 107.

$$n - I - J - 1 = 24 - 2 - 3 - 1 = 20 \quad (107)$$

Tyto počty stupňů volnosti vstupují do výpočtů testovacích kritérií, jak ukazují vztahy 108 a 109.

$$f_A = \frac{\frac{S_A}{I-1}}{\frac{S_e}{n-I-J+1}} = \frac{\frac{672,15}{1}}{\frac{779,29}{20}} = 17,25 \quad (108)$$

Vztah 108 je testovacím kritériem pro rovnost řádkových efektů (faktor A).

$$f_B = \frac{\frac{S_B}{J-1}}{\frac{S_e}{n-I-J+1}} = \frac{\frac{13,27}{2}}{\frac{779,29}{20}} = 0,17 \quad (109)$$

Vztah 109 je testovacím kritériem pro rovnost sloupcových efektů (faktor B).

Hodnoty testovacích kritérií se porovnají s kritickými hodnotami F rozdělení pravděpodobnosti (Fisher-Snedecorovo rozdělení), kde hladinu významnosti volím na obvyklé hodnotě $\alpha = 0,05$. Formální zápisy těchto kritických hodnot uvádí vztahy 110 a 111.

$$F_{1-\alpha}[1; 20] = F_{0,95}[1; 20] = 4,351 \quad (110)$$

$$F_{1-\alpha}[2; 20] = F_{0,95}[2; 20] = 3,493 \quad (111)$$

kde hodnoty jsem určil v programu MS Excel pomocí statistické funkce F.INV.

Jelikož hodnota testovacího kritéria f_A (vztah 108) je vyšší než kritická hodnota (vztah 110) $17,25 > 4,351$. Znamená to, že mezi řádky je statisticky významný rozdíl, hypotézu

$H_0(A)$ zamítám na zmiňované hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Jinými slovy byl prokázán rozdíl v chování metod pro různé počty bodů n .

Zatímco hodnota testovacího kritéria f_B (vztah 109) je nižší než kritická hodnota (vztah 111) $0,17 < 3,493$. Znamená to, že mezi metodami není statisticky významný rozdíl, hypotézu $H_0(B)$ nezamítám na zmiňované hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Lze konstatovat, že nebyl prokázán významný rozdíl mezi jednotlivými metodami.

Z toho plynou dva podstatné závěry mnou navržená metoda postavená na principu odhadu nejkratší trasy mezi body pomocí výpočtu obvodu konvexní obálky bodů, která se vynásobí koeficientem w je na základě uvedeného experimentu stejně účinnou jako metody uváděné v literatuře. Jelikož statistický test vykázal rozdíl v počtech bodů, na kterých byly metody zkoušeny je nutné hodnotu koeficientu w měnit v závislosti na počtu bodů, pro které je velikost trasy odhadována, tj. pro $n = 10$ a nižší $w = 1,51$ a pro počet bodů vyšší než 10 a nižší než 20, $w = 1,68$.

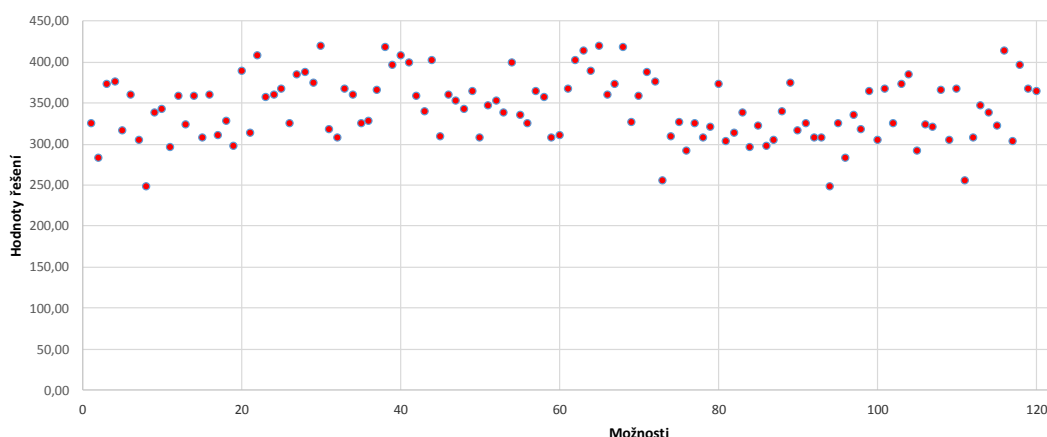
9. PROSTOR PRO DALŠÍ VÝZKUM

Ambicí této kapitoly je nastínit další způsoby a možnosti vědeckého bádání při hledání řešení problému obchodního. Jedná se o myšlenky, které se mi nepodařilo zrealizovat do finální podoby a reálné aplikace. Přesto je zde uvádím jako eventuální možnost pro rozvoj tohoto oboru. Ostatně logistika je velmi komplexním oborem jak popisují v Košťálek (2013–a) a v různých podnicích má různé specifické podoby, což se odráží i v různých specifikách a modifikacích např. problému obchodního cestujícího a tudíž existuje naděje, že někdo třeba v budoucnu použije některou z níže uvedených myšlenek na některou z modifikací problému, která mě není známa a nebo je implementuje na řešení zcela jiného problému.

9.1 ZÁKONITOSTI V POSLOUPNOSTECH SOUŘADNIC A ŘEŠENÍCH

Pokud bude na celý problém nahlíženo tím způsobem, že vstupem je matice souřadnic množiny bodů B , resp. matice vzájemných vzdáleností mezi body C či asymetrická matice jakýchkoliv hodnot C_A představující ohodnocení množiny hran vznikajících na množině bodů (např. časy dojezdů, reálné délky vzdáleností lišící se směrem projetí hrany, spotřeby paliva při dojezdu, ale také časy potřebné k nastavení výrobního zařízení atd.), kde je tato matice obecně nesymetrická. A výstupem je matice výsledků V v podobě hodnot nula jedna odpovídající optimálnímu pořadí (zvoleného optimalizačního kritéria). Potom lze vlastně celý proces hledání řešení definovat tak, že hledám funkci, která mi dokáže přetransformovat vstup na výstup. Pro účely této úvahy pozastavím velikost počtu míst na nějaké hodnotě – pro účely vysvětlení této myšlenky např. $n = 6$ míst. Následně porovnáím obor hodnot na vstupu a na výstupu vidím, že zatímco na vstupu existuje teoreticky nekonečné množství hodnot, pro které může být tento problém řešen, tak na výstupu bude pouze 120 hodnot – výsledků, které mohou být řešením. Těchto 120 možností (pro symetrický problém dokonce jen 60) jsou přípustná řešení problému a z nich je jedno tím nejlepším (např. jedna trasa bude tou nejkratší, jestliže je kritériem optimalizace délka trasy). Kladu si otázku zda není možné nějakým způsobem ze vstupních hodnot identifikovat, které z řešeních bude tím optimálním. Příklad 120-ti možností pro 6 bodů je vidět v Grafu 14, kde každá ze 120-ti možností uspořádání trasy odpovídá určité délce trasy (v obecné rovině hodnotě účelové funkce F). Optimální řešení je to, kde vychází hodnota účelové funkce minimální.

Graf 14: Výčet všech možností ukázaný na problému se šesti místy



Zdroj: vlastní

Kardinální otázka zní, zda by se ve shluku bodů nedal najít nějaký řád, který by mě dovedl k nalezení bodu představující možnost s nejnižší hodnotou. Přes veškerá snažení se mi takovouto zákonitost zatím nepodařilo objevit.

Obrázek 60 popisuje experiment ve, kterém jsem se pokusil očíslovat každou z možností uspořádání souřadnic a následně hledat vztah mezi touto číselnou kombinací a možností dávající optimální řešení.

Obrázek 60: Hledání souvislostí mezi číslem kombinace souřadnic a optimální možností

7496	0	0	0	5	4	4	1	2	C	1	2	3	4	Cesty	1	2	3	4	5	6	Délky	5	5	5,657	5,657	2,2361	2,24	14,9647
	1	0	5	5,657	2,236	1	1	1	1	1	1	4,123	3,1623		4,123	3,606	3,1623	3,61										
	2	5	0	4,123	3,162	2	2	3	3	4	4	3,606	3,6056		3,162	3,162	4,1231	4,12										
	3	5,66	4,12	0	3,606	3	4	2	4	2	3	2,236	5,6569		2,236	5	5,6569	5										
	4	2,24	3,16	3,606	0	4	3	4	2	3	2	Σ	14,96		17,425	15,18	17,42	15,178	15									
7497	0	0	0	5	4	4	1	3	C	1	2	3	4	Cesty	1	2	3	4	5	6	Délky	5	5	5,657	5,657	3,1623	3,16	15,1783
	1	0	5	5,657	3,162	1	1	1	1	1	1	4,123	2,2361		4,123	3,162	2,2361	3,16										
	2	5	0	4,123	2,236	2	2	3	3	4	4	3,162	3,1623		2,236	2,236	4,1231	4,12										
	3	5,66	4,12	0	3,162	3	4	2	4	2	3	3,162	5,6569		3,162	5	5,6569	5										
	4	3,16	2,24	3,162	0	4	3	4	2	3	2	Σ	15,45		16,055	15,18	16,06	15,178	15,4									
7498	0	0	0	5	4	4	1	4	C	1	2	3	4	Cesty	1	2	3	4	5	6	Délky	5	5	5,657	5,657	4,1231	4,12	15,0711
	1	0	5	5,657	4,123	1	1	1	1	1	1	4,123	1,4142		4,123	3	1,4142	3										
	2	5	0	4,123	1,414	2	2	3	3	4	4	3	3		1,414	1,414	4,1231	4,12										
	3	5,66	4,12	0	3	3	4	2	4	2	3	4,123	5,6569		4,123	5	5,6569	5										
	4	4,12	1,41	3	0	4	3	4	2	3	2	Σ	16,25		15,071	15,32	15,07	15,317	16,2									

Zdroj: vlastní – ukázka z pracovního modelu

Jestliže výchozím stavem je hypotetická situace, kde všechny body mají nulové souřadnice a tato kombinace souřadnic dostane označení 1, potom označení 2 bude odpovídat situace, kde všechny body budou mít nulové souřadnice, ale poslední bod bude mít souřadnici $y = 1$ a tímto způsobem se budu posouvat dál do maximální hodnoty 5, po jejím dosažení bude opět na poslední pozici 0, ale předchozí číslo (tj. souřadnice x u posledního bodu se

zvýší z nuly na jedna. Protože souřadnic je vysoké množství omezím obecnou situaci na vzorek hodnot daný velikostí 4 bodů a hodnoty souřadnic čísla: 0, 1, 2, ... 5. Potom jak je z obrázku patrné kombinace souřadnic číslo 7496 odpovídají body se souřadnicemi 1. [0;0], 2. [0;5]; 3. [4;4], 4. [1;2]. Následuje kombinace číslo 7497 představující body se stejnými souřadnicemi lišící se souřadnicemi posledního bodu navýšené o jeden krok to je [1;3] atd. přesně jak popisuje obrázek 56. Z těchto souřadnic se následně vypočítá matice vzájemných vzdáleností C , ze které se odečtou hodnoty všech přípustných řešení (těch je zde pouze 6 – experiment byl pro jednoduchost prováděn na vzorku). Nejlepší řešení se automaticky označí červenou jedničkou. Jelikož první kombinace obsahují body se stejnými tj. nulovými souřadnicemi nemá smysl se počátečními kombinacemi zabývat. To se dá provést dosazením vyššího čísla kombinace, protože posloupnost čísel tvořících číselný kód označující souřadnice není rekurentní. Tj., k získání hodnoty následujícího členu nepotřebuji znát hodnotu předchozího členu. Číselný kód souřadnic se automaticky generuje při zadání čísla souřadnice, což je také způsob jak jsem celý model sestavil. Funkci v prostředí MS Excel generující číselný kód ilustruje Obrázek 61.

Obrázek 61: Funkce generující posloupnost souřadnic

=USEKNOUT((B52480-(C52480*\$C\$4+D52480*\$D\$4+E52480*\$E\$4+F52480*\$F\$4+G52480*\$G\$4+H52480*\$H\$4+I52480*\$I\$4))/1)																													
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD							
4	1	2	C	1	2	3	4				1	2	3	4	5	6			5	5	5,657	5,657	2						

Zdroj: vlastní – ukázka z pracovního modelu

Tímto způsobem jsem získal 22 500 kombinací souřadnic a jim odpovídajících výsledků v podobě červených jedniček. Ve výsledném vývoji červeně označených jedniček jsem se snažil nalézt nějaké pravidlo, což se mi nepodařilo.

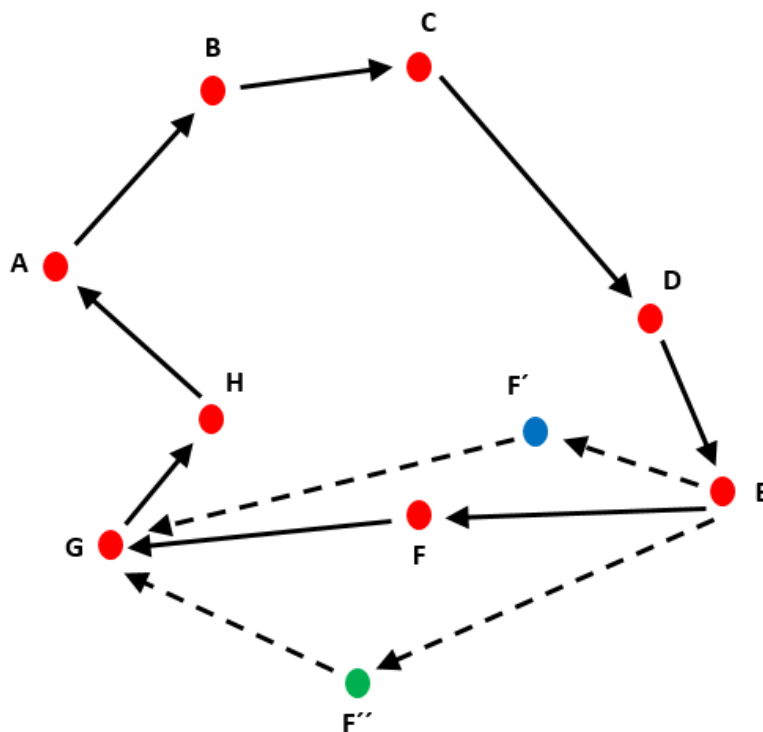
9.2 VYTVÁŘENÍ DATABÁZÍ ŘEŠENÍ

Domnívám se, že jinou alternativou k nalezení optimálního řešení výpočtem je vybudování databáze zadání a výsledků, ve které by bylo možné příslušné řešení nalézt. Nosnou filozofií této metody je má představa, že pokud je vypočítáno optimální řešení pro dané zadání tak tentýž výpočet pro to samé zadání už by nikdy nikdo na světě nemusel počítat znovu. Slabina tohoto přístupu spočívá v tom, že tato databáze by musela obsahovat obrovské množství a teoreticky nekonečné množství dat. K tomuto problému se ještě vrátím – dále v textu popisují možnosti jak tuto slabou stránku eliminovat. A tím docílit stavu, kdy budeme

jako lidstvo schopni stanovit řešení nebo alespoň přibližné řešení pouze vyhledáváním a nikoliv výpočtem. Silnou stránku takového přístupu spatřuji především v tom, že by se jednalo o jakousi pomyslnou informační banku optimálních resp. suboptimálních řešení, které by lidská civilizace byla schopna předat budoucím generacím. Dnes dokážeme nalézt řešení pomocí výpočetní techniky, ale v případě, že v lidských dějinách dojde k nečekané singularitě a tato technika z nějakého důvodu nebude dostupná, mohly by se nám uložené výsledky hodit. Tuto myšlenku je možné generalizovat nejen na matematický problém obchodního cestujícího, ale i na další sofistikované výpočty.

Možnost, jak eliminovat nevýhodu svázanou s obrovským množstvím dat tvořících databázi veškerých řešení problému obchodního cestujícího dejme tomu pro rozsah $n = 15$ míst spatřuji ve vytyčení vhodné podmnožiny těchto zadání a řešení pro určité vhodně zvolené body. Ostatní řešení by bylo možné aproximovat z tohoto vzorku vybraných řešení. Princip této myšlenky ukazuje Obrázek 61, kde je dobře patrné, že pokud vezmu podobné zadání (dílčí změna polohy některých bodů – zde ukázáno na bodu F) dostávám stále stejné pořadí bodů tvořící optimální trasu.

Obrázek 62: Stejně řešení pro změny zadání



Zdroj: vlastní

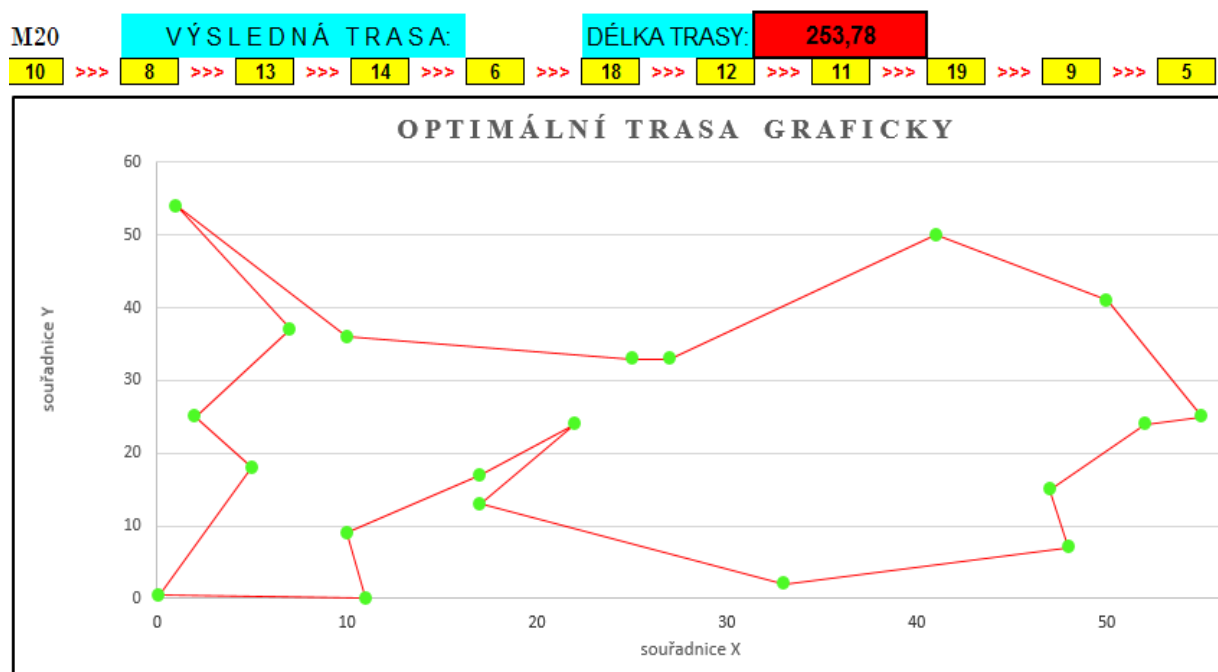
9.3 DALŠÍ ROZŠÍŘENÍ HEURISTICKÉ METODY

V podkapitole 5.3.2 popisují svou vlastní heuristickou metodu schopnou účinně řešit úlohu obchodního o rozsahu patnácti bodů. Princip této metody používá operátor selekce hodnot ze vstupní matice C . Tuto metodu je možné dále zdokonalit tím, že se operátor selekce „ a “ selektující najednou všechny hodnoty v matici C doplní operátorem řádkové selekce „ b “, který bude selektovat hodnoty v jednotlivých řádcích. Dochází tak k masivnější selekci málo perspektivních řešeních a optimální řešení (minimální hodnota) je nalezeno rychleji.

Tento princip jsem implementoval do modelu E7 popisovaném v podkapitole 5.3.3 mé práce a vznikl tak vylepšený model E9. Model E9 dokáže nacházet optimální řešení s nižším počtem kroků, což implikuje jeho větší rychlost. Ale hlavní přínos spatřuji v možnosti jeho dalšího přestavění z patnácti bodů na dvacet, kde vyšší schopnost selekce nepravděpodobných řešení je příslibem schopnosti tohoto modelu poradit si i s takto náročným problémem.

Tato prognóza se skutečně naplnila. Na základě výše uvedených poznatků a zákonitostí byl vytvořen model E10 používající výše popsany operátor řádkové selekce „ b “, heuristické vyhledávání v tomto modelu bylo rozšířeno na 20 bodů. Fungování tohoto modelu jsem ověřil tím způsobem, že jsem vzal 20 náhodně vygenerovaných bodů a v modelu hledal nejkratší trasu heuristicky, nalezené řešení jsem porovnal s řešením, které jsem našel exaktním způsobem tj. zapsáním do matematického modelu a vyřešením v softwaru LINGO. Dosažené výsledky potvrdily funkčnost tohoto přístupu, jak jsem publikoval v Košťálek (2019 – a). Většinou se podařilo nalézt optimální řešení a to během sedmi kroků. Pokud nebylo nalezeno přímo optimální řešení vzniklá odchylka od optimálního řešení se pohybovala okolo dvou procent.

Obrázek 63: Stejné řešení pro změny zadání



Zdroj: vlastní – ukázka výstupu z modelu E10

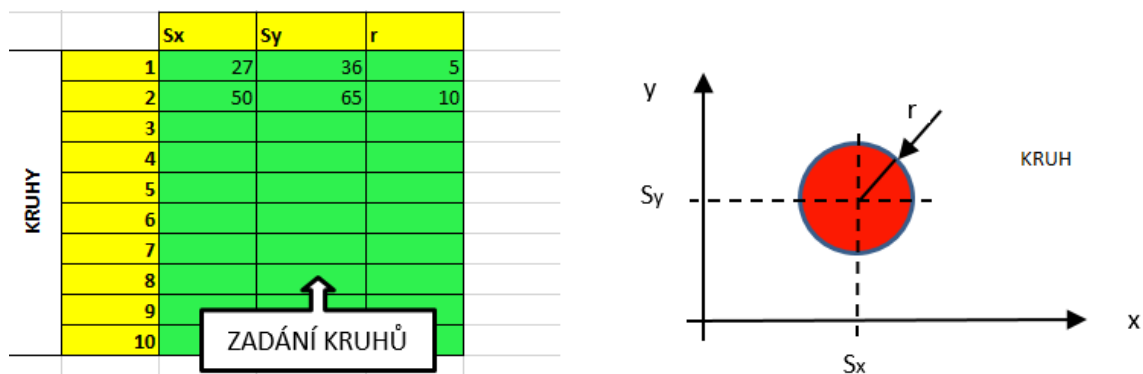
V modelu E10 je navíc vylepšeno technické řešení výstupu, který je transformován přímo do grafického vykreslení nalezené trasy, jak ukazuje obr. 63.

9.4 ROZŠÍŘENÍ ROZMÍSTĚVACÍHO PROBLÉMU

I v šesté kapitole popisovaný rozmíst'ovací problém je možné dále prohloubit a podstatně vylepšit. Šestá kapitola řeší Weber – Steinerův rozmíst'ovací problém doplněný o omezení v podobě zakázaných oblastí, kde centrální bod z nějakého důvodu ležet nesmí. (Hledají se souřadnice centrálního bodu, který je v interakci s množinou definovaných bodů, mezi množinou bodů a centrálním bodem probíhají transporty různých intenzit. Logickým cílem je situovat centrální bod tak, aby celkové přepravní náklady byly minimální.) Zakázané oblasti v šesté kapitole měly tvary pouze jednoduchých obdélníků. Ve snaze více se přiblížit reálné situaci je žádoucí uvažovat další tvary zakázaných oblastí, jako jsou kruhy nebo elipsy a zakomponovat je do matematického modelu popisující situaci, východiskem jsou přitom myšlenkové pochody zformulované v podkapitole 6.1, publikované v Košťálek (2014 – a) a Košťálek (2018 – b).

Do modelu budou kromě obdélníkových oblastí zadané také kruhové oblasti představující např. lesy, rybníky apod., které vytyčující kam centrální bod nesmí být umístěn. Kruhy budou definované pomocí středů a poloměrů jak popisuje obr. 64.

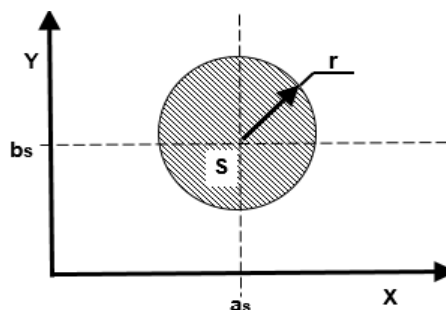
Obrázek 64: Definování zakázané oblasti v modelu



Zdroj: vlastní, ukázka z modelu KY2

Poloměry kruhů a souřadnice středů vstoupí do matematického zápisu omezujících podmínek, které budou při výpočtu uvažovány. V matematickém zápisu je použita symbolika z obr. 65 tj. střed má souřadnice S [a_s;b_s].

Obrázek 65: Zakázaná oblast ve tvaru kruhu



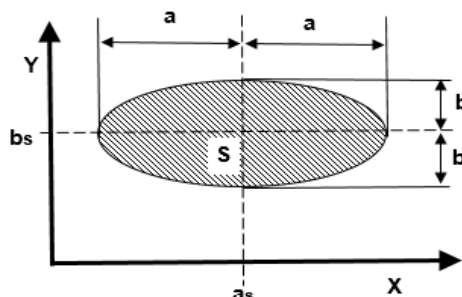
Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2019 – b)

Vychází se ze stejných principů jako tomu bylo v podkapitole 6.1 v případě obdélníků, vztah 112 se liší pouze v tom, že souřadnici Y není možné posunout o konstantu, ale její velikost bude funkcí hodnoty X jak je ze vztahu 112 patrné.

$$IF (X - a_s)^2 \leq r^2 \quad THEN \quad (Y - b_s)^2 \geq r^2 - (X - a_s)^2 \quad (112)$$

Podobně tomu bude v případě elipsy, systém značení ve vzorcích popisuje obr. 66.

Obrázek 66: Zakázaná oblast ve tvaru elipsy



Zdroj: vlastní, převzato z Košťálek (2019 – b)

$$IF (X - a_s)^2 \leq a^2 \quad THEN \quad (Y - b_s)^2 \geq \left[1 - \frac{(X - a_s)^2}{a^2}\right] \cdot b^2 \quad (113)$$

Vztahy 112 a 113 vlastně říkají, že pokud se ve vodorovném směru dostane X-ová souřadnice do oblasti kruhu resp. elipsy plyne z toho, že Y-ová souřadnice musí být buď dostatečně malá, aby centrální bod ležel pod kružnicí nebo dostatečně velká, aby ležel nad kružnicí resp. elipsou. To je zapodmínkováno pomocí vzdálenosti od středu, kde problém vzdáleností zleva a zprava resp. zdola a shora je řešen pomocí umocnění na druhou. Nyní je opět zapotřebí přetransformovat omezující podmínky z tvaru „když – potom“ do takového tvaru, se kterým dokáží pracovat optimalizační softwary hledající hodnoty neznámých X a Y . Zde je postup v principu stejný jako v případě obdélníku.

Transformace omezující podmínky pro kruh:

$$(X - a_s)^2 > r^2 \quad OR \quad (Y - b_s)^2 \geq r^2 - (X - a_s)^2 \quad (114)$$

$$(X - a_s)^2 \geq r^2 - M \cdot t \quad (115)$$

$$(Y - b_s)^2 \geq r^2 - (X - a_s)^2 - M \cdot (1 - t) \quad (116)$$

Transformace omezující podmínky pro elipsu:

$$(X - a_s)^2 > a^2 \quad OR \quad (Y - b_s)^2 \geq \left[1 - \frac{(X - a_s)^2}{a^2}\right] \cdot b^2 \quad (117)$$

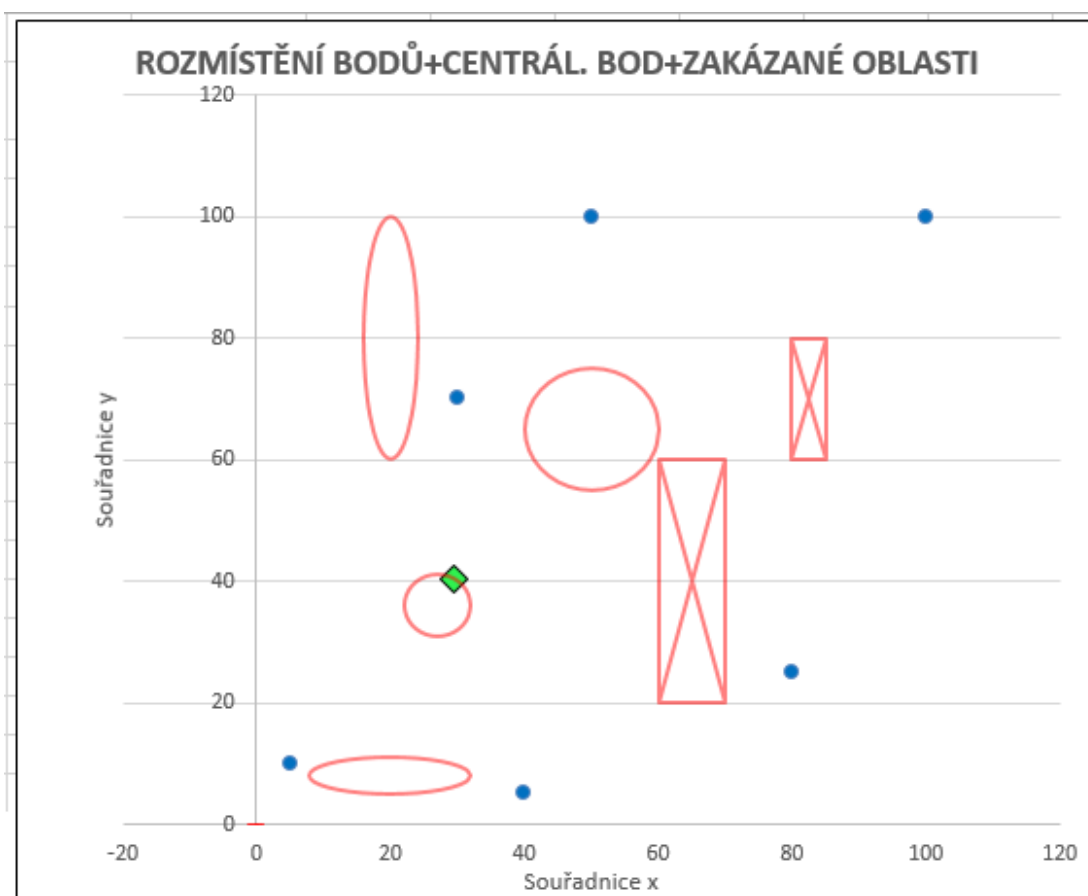
$$(X - a_s)^2 \geq a^2 - M \cdot t \quad (118)$$

$$(Y - b_s)^2 \geq \left[1 - \frac{(X - a_s)^2}{a^2}\right] \cdot b^2 - M \cdot (1 - t) \quad (119)$$

Se zápisem ve tvaru vztahů 115 a 116 pro kruh a 118 a 119 pro elipsu, již umí SW včetně nástroje řešitel v MS Excel pracovat, jak je publikováno v Košťálek (2019 – b). M je vysoké číslo, X a Y jsou hledané souřadnice, t je pomocná proměnná nabývající hodnoty 0 nebo 1, a , b , a_s , b_s , r jsou hodnoty nastavené do modelu, jak znázorňoval obr. 64.

Na tomto principu je postaven výpočet, do kterého lze zadat 10 zakázaných oblastí tvaru obdélníků, 10 ve tvaru kruhů a konečně 10 zakázaných oblastí eliptických tvarů. Jsou tak definovaná místa různých tvarů, ve kterých se centrální bod nacházet nesmí, dále lze zadat až 50 bodů, které budou z centrálního bodu zásobovány, celý výpočet polohy centrálního bodu ležícího mimo zakázané oblasti a zároveň tak, aby součet přepravních nákladů mezi centrálním bodem a definovanými body byl minimální, tento výpočet je zautomatizován v modelu v prostředí MS Excel. Výstupem z modelu je kromě vypočítaných souřadnic centrálního bodu $[X, Y]$ a hodnoty účelové funkce (zpravidla v tunokilometrech) ještě grafická vizualizace celé situace jak jí popisuje obr. 67. Množinu definovaných bodů označují modré tečky. Polohu centrálního bodu znázorňuje zelený čtvereček. Navíc model umí také zakreslovat zakázané oblasti a to červeně.

Obrázek 67: Ukázka výstupu z modelu



Zdroj: vlastní, ukázka z modelu KY2

Centrální bod (zelený čtvereček) ležící na okraji menšího kruhu. Princip grafického zobrazení zakázaných oblastí popisují v příloze číslo 6 této práce.

I když tato podkapitola popsala jak je možné rozmístovací problém popisovaný již v kapitole 6 dále rozšířit o další tvary zakázaných oblastí pomocí některých matematických operací, stále zde zůstává prostor pro další bádání, které na tomto místě už pouze nastíním. V první řadě je možné matematický model doplnit o možnost matematicky definovat další geometrické tvary představující zakázané oblasti např. trojúhelníky. Další oblast pro možné zlepšení spočívá v modifikaci problému v tom směru, že centrálních bodů bude více než jeden. Hlavní problém, který by bylo třeba u tohoto modelu vyřešit je výpočet vzdáleností mezi body a centrálním bodem, který bude bližší reálným vzdálenostem. Jelikož tento popisovaný model pracuje s eukleidovskou metrikou (vzdušnými vzdálenostmi).

10. ZÁVĚR

Předpokládaná oblast užití výsledků mé disertační práce je v přepravě výrobků, zboží a materiálu všeho druhu, kdy je zapotřebí naplánovat trasu s logickým požadavkem na co nejkratší délku, případně na minimalizaci přepravní doby. Může jít o zásobování výrobních provozů či prodejen z centrálního skladu, ale také o zásilkové služby nebo úkol dojet a zkontrolovat určité subjekty v určité množině měst. Zmíněná externí logistika není jediná oblast tentýž problém nastává ve vnitropodnikové logistice, kde je zapotřebí zásobovat jednotlivá pracoviště. To se zpravidla děje pomocí manipulační techniky, kde pomyslným výchozím bodem bývá sklad komponentů, ze kterého je třeba určit vhodnou trasu k jejich distribuci do míst jejich potřeby. S takovým způsobem organizace práce se lze běžně setkat v automobilovém průmyslu, ale i v jiných odvětvích. V reálných logistických případech není nutné disponovat výpočetní technikou speciálním softwarem a programy pro řešení úlohy obchodního cestujícího v rozsahu např. 100 míst. Reálně rozvozové trasy tvoří mnohem nižší počet míst a to i s ohledem na kapacitu přepravního prostředku.

Stejně tak mohou formulované závěry, postupy, výpočty a poznatky eventuálně posloužit jako základ k dalšímu bádání, tvorbě, zdokonalení algoritmů, plánovacích a vyhledávacích aplikací. Další oblast využití popsaných modelů, vytvořených algoritmů a zformulovaných zákonitostí spatřuji v obohacení, rozšíření a vizuálního přiblížení ve výuce zejména předmětů Logistika, Operační výzkum, Rozhodovací analýza apod. i v popularizaci řešených problémů.

Pro potřeby své disertační práce se potřebuji nějakým způsobem odlišit, vyhranit přijít s novým poznatkem, jenž obohatí současné vědění. Většina současných metod pro řešení úlohy obchodního cestujícího vychází z teorie grafů, grafických metod propojujících body v rovině či matematických modelů využívající binární lineární programování. Moje práce nazírá na problém prismatem statistiky, reálná množina bodů ustupuje do ústraně a hlavním předmětem zájmu jsou statistické analýzy matic s hodnotami vzájemných vzdáleností mezi jednotlivými body. Podařilo se mi empirickým pozorováním a experimenty zjistit některé zákonitosti, které se staly základem pro mou vlastní heuristickou metodu.

Tato metoda prošla řadou testů a ty potvrdily její dobrou účinnost na problém obchodního cestujícího o rozsahu patnácti bodů, což z matematického hlediska odpovídá kombinačnímu problému o rozsahu 43 589 145 600 permutací (polovina z faktoriálu z čísla 14) při symetrické modifikaci úlohy a 87 178 291 200 permutací (faktoriál z čísla 14) při asymetrické modifikaci úlohy. Kromě toho se mi podařilo zformulovat určité

předpoklady pro možné budoucí rozšíření a zdokonalení těchto metod, které by měly reálný potenciál řešit tento problém pro větší rozsahy. V podkapitole 9.3 popisují, že tyto úvahy reálně fungují. A podařilo se tak navýšit počet míst, pro které je možné problém obchodního cestujícího řešit až na 20.

Při statistickém testování dosažených výsledků jsem často používal Kolmogorovův-Smirnovův jedno výběrový test, ovšem nevycházel jsem ze statistických knih publikovaných v ČR, ale přímo z ruského originálu, viz Příloha 4, který je mnohem přesnější, než české tabulky kritických hodnot pro situace $n < 40$ prvků, ale zejména je přesnější v situaci, kde $n > 40$ hodnot, protože i zde používá numericky vyjádřené hodnoty Kolmogoromovi funkce na místo přibližných aproximací uváděných v českých publikacích jako např. Kubanová, Kožíšek a další.

Dále jsem se zabýval problematikou spojenou s odhadem délky optimální trasy, aniž bych tuto trasu musel znát. I zde se mi podařilo nalézt metodu fungující podobně přesně jako metody uváděné v literatuře. Je pravdou, že má metoda je výpočetně složitější než jiné uváděné metody, ale byl tak obohacen stav stávajícího poznání.

Ne zřídka se ve vědě objevují případy, kdy poznatky výzkumu určené pro určitou oblast najdou mnohem vyšší uplatnění v oblasti docela jiné. Je možné, že takovým případem bude i kapitola číslo 7. Zde řeším nalezení vázaného extrému, který má analogii v mikroekonomické teorii (možná i v jiných oblastech) v rozhodování uživatele při maximalizaci míry užítku. Na tento problém by bylo možné použít mnou prezentovaný způsob řešení problému, kde se mi podařilo analyticky nalézt obecný vztah pomocí analogie se speciálním případem kvadratické rovnice s parametrem. Obecný vztah je algebraickým výrazem, jehož řešení je mnohem jednodušší než v mikroekonomických teoriích uváděný výpočet pomocí Lagrangeových funkcí a determinantu Hessovi matice.

Některé hypotézy se mi potvrdit nepodařilo, ale to že jsem nenalezl řešení já neznamená, že tímto směrem cesta nevede a tyto závěry jsou určeny pro budoucí bádání a není vyloučeno, že když tyto poznatky uchopí někdo jiný jiným způsobem dosáhne cíle.

Některé pasáže uvádí práce v určitém průřezu, kde je uveden nosný princip a hlavní body postupu, není zcela snadné vysvětlit fungování některých rozsáhlých modelů obsahující řadu pomocných mezi výpočtů stovky i tisíce naprogramovaných buněk v programu MS Excel a formulovat je do papírové podoby formátu A4 (např. model E10 používá přes 120 000 řádků v MS Excelu), tento problém jsem se snažil řešit vložím řady obrázků a vysvětlujících schémat. Mou snahou bylo, aby popisovanou problematiku byl schopen pochopit i čtenář,

který se touto problematikou intenzivně nezabývá. Všechny použité vzorce jsem se snažil maximálně okomentovat a názorně popsat.

Mohu konstatovat, že hlavní cíl disertační práce byl naplněn, neboť se mi podařilo rozšířit současné poznání v oblasti matematických modelů sloužících k optimalizaci logistických tras i oblasti související s tímto problémem o nové metody, heuristické algoritmy, výpočetní vzorce a postupy.

10.1 SPLNĚNÍ CÍLŮ A OVĚŘENÍ HYPOTÉZ

Disertační práce splnila všechny dílčí cíle:

- a) Představil jsem vlastní heuristickou metodu pro řešení problému obchodního cestujícího o rozsahu patnácti bodů. Princip metody její použití ve vytvořeném modelu, způsob fungování, testování a ověřování popisují v podkapitole 5.3. Kapitola 9.3 následně popisuje možnosti dalšího rozšíření a této metody.
- b) Problém jsem doplnil o hledání optimální polohy pro výchozí bod. Kde se jednalo o rozšíření Weber-Steinerova rozmíst'ovacího problému o omezující podmínky vyplývající z praktických požadavků na plochy, do kterých bod nemůže být umístěn. Tato problematika je předmětem kapitoly 6. Další možnosti vylepšení metody a směry dalšího bádání jsou nastíněny v podkapitole 9.4.
- c) Vytvořil jsem model sloužící jako rozhodovací nástroj při optimalizaci v podmínkách omezených zdrojů. Kde jsem představil originální způsob matematického řešení pro hledání vázaného extrému. Toto řešení nemá obecnou platnost jako řešení pomocí Lagrangeových funkcí, nýbrž platí pro specifický případ hledání vázaného extrému, na druhou stranu je mnohem rychlejší, jelikož je výpočetně jednodušší. Tato oblast je popsána v kapitole 7.
- d) V otázce možností odhadu délky optimální trasy jsem v podkapitole 8.3 zformuloval vlastní metodu postavenou na principu vynásobit obvod konvexního obalu bodů vhodným koeficientem. V této podkapitole uvádím také výsledky experimentů s nimiž jsem dospěl k hodnotě takového koeficientu, ovšem jeho hodnotu je nutné měnit podle počtu bodů tvořících trasu. Tato metoda je co do pracnosti obtížnější než metody uváděné v odborné literatuře, ovšem její výsledky jsou srovnatelné s těmito metodami.

Ověření hypotéz:

1. Hypotéza

V symetrické matici vzájemných vzdáleností mezi definovanými body existuje kritická hodnota, kterou vzdálenosti ležící na nejkratší trase nepřekročí.

Ověření této hypotézy a podrobný popis celého problému je předmětem oddílu 5.3 mé disertační práce. Tento původně empiricky zjištěný předpoklad se mi podařilo ověřit sérií testů a jeho fungování se stalo základem pro mou vlastní heuristickou metodu. Metoda těží z této zákonitosti umožňující vyloučení nepravděpodobných řešení, což významně urychluje heuristické hledání optimálního resp. v některých případech sub optimálního řešení. Reálné použití této metody umožňuje její implementace do modelu E6 a E7. Kritickou hodnotu, kterou vzdálenosti ležící na optimální trase nepřekročí jsem definoval jako 70 % z variačního rozpětí, tj. rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou v matici C vzájemných vzdáleností mezi definovanými body, pro které je řešen problém obchodního cestujícího. Metody z tohoto poznatku plynoucí a jejich implementace použita pro výpočty a heuristické hledání trasy s minimální délkou používají nikoliv hranici 70 %, ale parametr, jehož hodnotu lze zvolit a nastavit označovaný jako operátor selekce „a“. Čím je hodnota operátoru selekce „a“ nižší tím větší selekce hodnot (vzájemných vzdáleností) proběhne. Testy prokázaly, že nejvhodnější nastavení v rozmezí $a = 0,5$ až $0,7$. Nižší hodnota (vyšší stupeň selekce) urychlí vyhledávání, avšak zvyšuje riziko uvíznutí v lokálním extrému a nenalezení trasy s minimální délkou (globálního minima). Naopak vyšší hodnota operátoru selekce toto riziko snižuje, ale prodlužuje počet kroků potřebný pro heuristické vyhledávání. Praktické nasazení tohoto poznatku a mé metody, jejímž technickým provedením je model E7 řešící problém obchodního cestujícího o rozsahu patnácti bodů, kde je možné zaujmout např. strategii rychlého vyhledávání nastavením operátoru selekce na hodnotu $0,5$ a případně následně toto vyhledávání zopakovat pro hodnotu $0,6$; $0,65$ či $0,7$.

2. Hypotéza

Jestliže počet kroků algoritmu v mé heuristické metodě a stejně tak velikost odchylky mezi nalezeným řešením a řešením nejlepším možným je náhodnou veličinou, tato náhodná veličina se řídí Gauss-Laplaceovým (normálním) rozdělením pravděpodobnosti.

Normální rozdělení, resp. Gauss-Laplaceovo rozdělení má v oblasti statistiky mimořádně důležité postavení, jelikož parametrické statistické metody fungují pouze při podmínce, že se hodnoty řídí tímto rozdělením. *Hypotézu 2* se mi podařilo potvrdit v podkapitole 5.3.4.1

zejména pomocí použití Kolmogorova-Smirnovova testu a to se spolehlivostí 95 % i 99 %. (Řečeno statistickou terminologií: nedošlo k zamítnutí hypotézy o shodnosti hodnot s normálním rozdělením na hladinách významnosti $\alpha = 0,05$ ani $\alpha = 0,01$. Výpočet pomocí χ^2 testu nefungoval příliš úspěšně, protože se ukázaly jeho slabiny v situaci, kdy je počet hodnot relativně nízký, proto tento výpočet slouží jako zdůvodnění, proč dále ve své práci používám výhradně účinnější metodu Kolmogorova-Smirnovova testu.

3. Hypotéza

Jestliže je zaručena platnost Hypotézy 2 na přijatelné hladině významnosti středního hodnota není vyšší než 7 a velikost odchylky se pohybuje v intervalu 2 až 7 % pro symetrický problém s platností trojúhelníkové nerovnosti o rozsahu 15 bodů (43 589 145 600 permutací, jak nalézt řešení).

Při nastavení operátoru selekce $a = 0,6$, rozsahu problému o patnácti bodech, kde vzdálenosti mezi body nezávisí na směru jízdy (matice vzájemných vzdáleností je symetrická) což odpovídá hledání nejlepšího řešení z 43 589 600 možných permutací vykázal model E7 tyto vlastnosti střední hodnota počtu kroků vyhledávacího algoritmu byla nižší než 7 se spolehlivostí 95 % a pokud vznikla odchylka mezi nalezeným řešením a optimálním řešením tak se s 95% spolehlivostí pohybovala v rozmezí 3,35 až 6,51 %. Tyto hodnoty jsem zjistil pomocí statistických výpočtů. V případě počtu kroků algoritmu se jednalo o testování statistické hypotézy o střední hodnotě a v případě kvantifikace odchylky o intervalový odhad střední hodnoty náhodné veličiny, tyto statistické výpočty jsem uvedl v podkapitole 5.3.4.

Závěrem mohu konstatovat, že v oblasti matematických modelů sloužících k nejrůznějším optimalizacím logistických tras všeho druhu i v problému obchodního cestujícího existuje ještě celá řada neprozkoumaných oblastí.

POUŽITÁ LITERATURA

AIKENS, C.H., Facility location models for distribution planning. *European Journal of Operational Research*, 22(1), 263–279, 1985. ISSN 0377-2217. DOI: 10.1016/0377-2217(85)90246-2.

APPLEGATE, D., L., BIXBY, R. E. *The Traveling Salesman Problem: A Computational*. 1. vyd. Princeton: Princeton series in applied mathematics, 2007. ISBN 978-0-691-12993-8.

BARAHONA, F. JENSEN, D., Plant location with minimum inventory. *Mathematical Programming*, 83(1), 101–111, 1998. ISSN 0025-5610.

БОЛЬШЕВ, Л. Н., СМИРНОВ, Н. В. Таблицы математической статистики. (Tabulky matematické statistiky) 3. vyd. Moskva: Nauka, hlavní redakce matematicko-fyzikální literatury, 1983. KB-21-53-83.

CONRAD, C. *Analýza podnikání s programem Microsoft Excel*. 2. vyd. Praha: Soft Press, 2004. ISBN 80-86497-58-5.

COOK, W., J. *Po stopách obchodního cestujícího. Matematika na hranicích možností*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2012. ISBN 978-80-7363-412-4.

CRILLY, T. *Matematika 50 myšlenek, které musíte znát*. 1. vyd. Praha: Slovart, 2010. ISBN 978-80-7391-409-7.

FÁBRY, J. *Matematické modelování*. 1. vyd. Praha: VŠE, 2010. ISBN 978-80-245-1266-2.

FIALA, P. a kol. *Operační výzkum nové trendy*. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2010. ISBN 978-80-7431-036-2.

FLETCHER, A., CLARKE, G. *Ekonomie a společnost, řízení a matematika*. 1. vyd. Praha: Svoboda, 1968.

GROS, I. *Logistika*. 1. vyd. Praha: VŠCHT, 1996. ISBN 80-7080-262-6.

GROS, I. *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování*. 1. vyd. Praha: Grada, 2003. ISBN 978-80-247-0421-8

HINDLS, R. a kol. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-43-6.

HOLICKÝ, M. *Aplikace teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2015. ISBN 978-80-01-05803-9.

HYNEK, J. *Genetické algoritmy a genetické programování*. 1. vyd. Praha: Grada, 2008. ISBN 978-80-247-2695-3.

CHATFIELD, T. *Digitální svět 50 myšlenek, které musíte znát*. 1. vyd. Slovart s. r. o., 2013. ISBN 978-80-7391-720-3.

JABLONSKÝ, J. *Programy pro matematické modelování*. 1. vyd. Praha: VŠE - Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1178-8.

JUROVÁ, M. a kol. *Výrobní procesy řízené logistikou*. 1. vyd. Brno: BizBooks, 2013. ISBN 978-80-265-0059-9.

JUROVÁ, M. a kol. *Výrobní a logistické procesy v podnikání*. 1. vyd. Praha: Grada, 2016.

KAVAN, M. *Výrobní a provozní management*. 2. vydání. Praha: ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03445-3.

- KOŘENÁŘ, V., LAGOVÁ, M. a kol. Optimalizační metody. 1. vyd. Praha: VŠE, 2003. ISBN 80-245-0609-2.
- KOŽÍŠEK, J., STIEBEROVÁ, B. Statistická a rozhodovací analýza. 2. vyd. Praha: ČVUT, 2014. ISBN 978-80-01-05509-0.
- KOŽÍŠEK, J. Statistická analýza. 4. vyd. Praha: ČVUT, 2002-a. ISBN 80-01-02496-2.
- KOŽÍŠEK, J. Statistické tabulky a jejich použití. 4. vyd. Praha: ČVUT, 2002-b. ISBN 80-01-02593-4.
- KUBANOVÁ, J. Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi. 2. vyd. Bratislava: Statis, 2004. ISBN 80-85659-37-9.
- KUČERA, P. Metodologie řešení okružního dopravního problému. Disertační práce. Praha: ČZU, Provozně ekonomická fakulta, katedra systémového inženýrství, 2009.
- LAURENČÍK, M. Programování v Excelu 2010 a 2013. Záznam, úprava a programování maker. 1. vyd. Praha: Grada, 2003. ISBN 978-80-247-5033-0.
- MACÍK, K. Mikroekonomie. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03806-2.
- MICHALEWICZ, Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. 3. vyd. Berlín: Springer-Verlag, 1996. ISBN 978-3-540-48661-9.
- PLEVNÝ, M., ŽIŽKA, M. Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování. 1. vyd. Plzeň: ZČU, 2005. ISBN 80-7043-435-X.
- PRECLÍK, V. Průmyslová logistika. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03449-6.
- REINELT, G. The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications. 1. vyd. Berlín: Springer, 1994. ISBN 978-3-540-60676-9.
- REKTORYS, K. a spolupracovníci. Přehled užití matematiky I. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 978-80-7196-180-2.
- ROLLO, J. Praktické příklady z operační analýzy. Praha: Redakce ekonomické a polytechnické literatury, 1973. 04-322-73.
- RUSHTON, A., CROUCHER, P. The handbook of logistics and distribution management. 3. vyd. London: Kogan Page, 2006. ISBN 978-0-7494-4669-7.
- SCHELS, I. Excel 2007 vzorce a funkce. 1. vyd. Praha: Grada, 2008. ISBN 978-80-247-2047-6.
- ŠTŮSEK, J. Řízení provozu v logistických řetězcích. 1. vyd. Praha: C. H. Beck, 2007. ISBN 978-80-7179-534-6.
- ŠTECHA, J. Optimální rozvrhování a řízení. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03010-5.
- TÖPFER, P. Algoritmy a programovací techniky. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-350-9.
- TESAŘÍK B. Matematikou k milionům aneb po stopách obchodního cestujícího. Technický týdeník, 2013, roč. 61, č. 19, s. 8. ISSN 004-1064.
- VIRUS, M. Metoda Monte Carlo. 1. vyd. Praha: ČVUT (Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská), 2010. ISBN 978-80-01-04595-4.
- VORLÍČEK, M., ŠPAČKOVÁ, M. Matematická statistika v technice. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1978. 60-978-78.
- VOŽENÍLEK, V., DVORSKÝ, J. eds. Metody umělé inteligence v geoinformatice. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2011. ISBN 978-80-244-2945-8.

WAGNER, H., M. Principles of operations research with applications to managerial decisions. 1. vyd. USA, New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1969. 13-709576.

YOUNG, M., J., HALVORSON, M. Mistrovství v Microsoft Office 2003. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0222-X.

ZELENKA, A., Král, M. Projektování výrobních systémů. Praha: ČVUT, 1995. ISBN 80-01-01302-2.

ZELINKA, I. a kol. Evoluční výpočetní techniky principy a aplikace. 1. vyd. Praha: BEN – technická literatura, 2009. ISBN 978-80-7300-218-3.

ZELINKA, I. Umělá inteligence - hrozba nebo naděje? 1. vyd. Praha: BEN – technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-068-7.

OSTATNÍ ZDROJE

<https://www.claymath.org/millennium-problems> [cit. 6. 6. 2017]

<https://www.sciencemag.cz/perelman-ma-50-let-genius-ktery-vyresil-poincareho-domnenku/> [cit. 1. 4. 2017]

<https://www.businessinsider.com/p-vs-np-millennium-prize-problems-2014-9>, [cit. 1. 4. 2017]

http://www.flinders.edu.au/science_engineering/fms/School-CSEM/csem_image_files/FMSL/HCP%20Project%20Website/Workshop/HTRO_Martin_Savelsbergh.pdf [cit. 9. 5. 2017]

http://www.kiv.zcu.cz/studies/predmety/uir/gen_alg2/E_alg.htm [cit. 10. 5. 2017]

<http://www.aco-metaheuristic.org/RealAnts.html> [cit. 3. 4. 2018]

https://www.researchgate.net/publication/228573156_An_introduction_to_heuristic_algorithms [cit. 3. 4. 2018]

<https://web.tuke.sk/fei-cit/butka/hop/htsp.pdf> [cit. 3. 4. 2018]

<https://businessworld.cz/cio-bw-special/trable-obchodniho-cestujiciho-8954> [cit. 5. 4. 2018]

<https://cz.depositphotos.com/8150184/stock-photo-board.html>. [cit. 10.5.2017]

https://www.czso.cz/documents/10180/46014808/061004-17_S.pdf/b9a0a83e-7a6f-4613b1df-33fe8b5d1a8e?version=1.1 [cit. 1.8.2018]

Časopis Logistika 01-02/2018, roč. XXIV. Praha: Economica. ISSN 1211-0957.

Časopis Logistika 03/2018, roč. XXIII. Praha: Economica. ISSN 1211-0957.

VLASTNÍ PUBLIKACE (CITOVANÉ V PRÁCI)

KOŠŤÁLEK, J. *Solving traveling salesman problem by heuristic algorithms*. In sborník: 18. konference o aplikované matematice (APLIMAT). Slovenská technická univerzita v Bratislavě, FS, ústav matematiky a fyziky, 2019. Bratislava, SR, 5. – 7. 2. 2019, (SCOPUS database), **článek byl přijat k publikování, ale nevyšel v době psaní disertační práce.**

KOŠŤÁLEK, J., KOŤÁTKOVÁ STRÁNSKÁ, P. *Solving a deployment problem with restricted areas*. In sborník: 18. konference o aplikované matematice (APLIMAT). Slovenská technická univerzita v Bratislavě, FS, ústav matematiky a fyziky, 2019. Bratislava, SR, 5. – 7. 2. 2019, (SCOPUS database), **článek byl přijat k publikování, ale nevyšel v době psaní disertační práce.**

KOŠŤÁLEK, J. *Využití heuristických algoritmů v řešení úlohy obchodního cestujícího*. In: Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy – MITAV 2018. Brno, 14. – 15. 6. 2018. Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) a Univerzita obrany v Brně, fakulta vojenských technologií, s. 214 – 303. ISBN 978-80-7582-040-2.

KOŠŤÁLEK, J., KOŤÁTKOVÁ STRÁNSKÁ, P. *Modified Steiner-Weber problém with additional restrictive conditions*. Acta academica karviniensia - recenzovaný vědecký časopis Slezské univerzity v Opavě, Obchodně podnikatelské fakulty v Karvině. Časopis je indexován v databázích ERIH plus, Index Copernicus, Genamics JournalSeek a EBSCO. Časopis je evidován v Seznamu recenzovaných neimpaktovaných periodik vydávaných v České republice, schváleném Radou pro vědu, výzkum a inovace. 2018/III. ISSN 1212-415X (Print). ISSN 2533-7610 (Online).

KOŠŤÁLEK, J. *Vázané extrémy v ekonomice a alternativní způsoby jejich hledání*. In sborník Trendy v podnikání – mezinárodní vědecká konference, ZČU, fakulta ekonomická, 15. – 16. 11. 2018. ISBN 978-80-261-0833-7.

KOŠŤÁLEK, J. *Okružní dopravní problém pohledem statistiky*. In: 8. International masaryk conference for Ph.D. students and young researchers 2017. Hradec Králové, 18.12.2017 - 20.12.2017. Magnanimitas. 2017, s. 315 - 401. ISBN 978-80-87952-22-1. dostupné z: <http://www.masarykovakonference.cz>

SCHOLZ, P., FREIBERG, F., KOŠŤÁLEK, J. *Sequence of production orders optimisation, its benefits and implications* [online]. Grant Journal. 2016, 05(02), s. 66-71. ISSN 1805-0638. Dostupné z: http://www.grantjournal.com/index.php?option=com_content&view=article&id=34&Itemid=31&lang=cs

KOŠŤÁLEK, J., KAVAN, M., VANIŠ, L. *Okružní dopravní problém a možnosti jeho řešení*. In: International Masaryk Conference for Ph.D. Students and Young Researchers 2015. Hradec Králové, 14.12.2015 - 18.12.2015. MAGNANIMITAS. 2015, s. 208-216. ISBN 978-80-87952-12-2. Dostupné z: <http://www.masarykovakonference.cz>

KOŠŤÁLEK, J. *Solution traveling salesman problem using heuristic algorithms*. In: MORAVEC, J., Studentská tvůrčí činnost 2015. 16.04.2015. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. ISBN 978-80-01-05727-8. Dostupné z: <http://stc.fs.cvut.cz/>

KOŠŤÁLEK, J., KAVAN, M. *Problém optimálního umístění a způsoby jeho řešení v podnikové logistice* [online]. In: 7. mezinárodní vědecká konference doktorandů a mladých vědeckých pracovníků. Karviná, 07.11.2014. Opava: Slezská univerzita. 2014, s. 258-265. ISBN 978-80-7248-836-0.

KOŠŤÁLEK, J., KOŽIŠEK, J., STIEBEROVÁ, B. *Aplikace speciálních metaheuristických metod na řešení okružního dopravního problému*. In: 5. mezinárodní Masarykova konference pro doktorandy a mladé vědecké pracovníky. 15.12.2014 - 19.12.2014. Hradec Králové: MAGNANIMITAS. 2014, s. 259-268. ISBN 978-80-87952-07-8.

KAVAN, M., KOŠŤÁLEK, J. *Optimalizace pořadí pro zpracování zakázek ve strojírenské výrobě pomocí metodiky okružního dopravního problému* [online]. In: BERAN, T., FINDOVÁ, Š., a KLIMEŠ, F., eds. 15. mezinárodní konference: Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků. Brno, 30.09.2014. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. 2014, s. 16-25. ISBN 978-80-01-05537-3.

KOŠŤÁLEK, J., REJF, L., a VANÍŠ, L. *Limity lidského myšlení v rozhodovacích procesech spojených s podnikovým řízením* [online]. In: FINDOVÁ, Š., BERAN, T., a KLIMEŠ, F., eds. 15. mezinárodní konference: Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků. Brno, 30.09.2014. Praha: ČVUT v Praze, Fakulta strojní. 2014, s. 26-32. ISBN 978-80-01-05537-3.

KOŠŤÁLEK, J. *Modern trends in logistics*. In: Conference Mekrúr 2013. Bratislava, 05.12.2013 - 06.12.2013. Bratislava: Ekonomická univerzita Bratislava. 2013, s. 193-199. ISBN 978-80-225-3764-3.

KOŠŤÁLEK, J. *Matematické algoritmy jako nástroje efektivního řízení procesů v podnicích*. In: VI. mezinárodní vědecká konference doktorandů a mladých vědeckých pracovníků. Karviná, 08.11.2013. Opava: Slezská univerzita. 2013, s. 174-181. ISBN 978-80-7248-901-5.

KAVAN, M., KOŠŤÁLEK, J. *Economic optimization of the mixing problem*. In: World Academy of Science, engineering and Technology. International Conference on Manufacturing Systems Engineering and Management. Toronto, 20.06.2013 - 21.06.2013. s. 2144-2149. ISSN 2010-376X.

KOŠŤÁLEK, J. *Program pro snadné řešení úlohy obchodního cestujícího s deseti body a jeho využití*. In: Trendy v podnikání. 14.11.2013 - 15.11.2013. Plzeň: ZČU, ISBN 978-80-261-0321-9.

KOŠŤÁLEK, J. *Logistické plánování tras jako intelektualizovaný proces* [online]. In: BERAN, T. a FINDOVÁ, Š., eds. 14. mezinárodní konference Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků. 08.10.2013. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. 2013, s. 45-50. ISBN 978-80-01-05353-9.

DALŠÍ VLASTNÍ PUBLIKACE (NECITOVANÉ V PRÁCI)

KOŠŤÁLKOVÁ STRÁNSKÁ, P., KOŠŤÁLEK, J. *Methods to prevent forgery of accounting data*. In sborník: The 6th International Scientific Conference IFRS: Global Rules and Local Use, October 11–12, 2018, Prague, Anglo-American University, s. 333 – 340. ISBN 978-80-906585-7-8

KOŠŤÁLEK, J., KOŠŤÁLKOVÁ STRÁNSKÁ, P. *Inovace výuky statistiky*. In: Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy – MITAV 2018. Brno, 14. – 15. 6. 2018. Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) a Univerzita obrany v Brně, fakulta vojenských technologií, s. 214 – 303. ISBN 978-80-7582-040-2.

KOŠŤÁLEK, J., KOŠŤÁLKOVÁ STRÁNSKÁ, P. *Verifying the authenticity of the accounting data using the benford's algorithm*. In sborník: 17. konference o aplikované matematice (APLIMAT). Slovenská technická univerzita v Bratislavě, FS, ústav matematiky a fyziky, 2018. Bratislava, SR, 6 – 8. 2. 2018, s. 632 – 637. ISBN 978-80-227-4765-3. (SCOPUS database), dostupné z: <http://www.evln.stuba.sk/APLIMAT2018/proceedings/>

KOŠŤÁLEK, J., KOŠŤÁLKOVÁ STRÁNSKÁ, P. *Model ověřující věrohodnost účetních údajů*. In sborník: 3. Mezinárodní vědecká konference k počtě Albína Bráfa. ČVUT v Praze, MÚVS, 30. 5. 2018. ISBN 978-80-01-06429-0.

ŠULC, K., KOŠŤÁLEK, J. *Optimalizační a reoptimalizační propočty v průmyslové výrobě*. In sborník: 2. Mezinárodní vědecká konference k počtě Albína Bráfa. ČVUT v Praze, MÚVS, 31. 5. 2018. ISBN 978-80-01-06156-5.

KOŠŤÁLEK, J., KOŠŤÁLKOVÁ STRÁNSKÁ, P., MACÁK, T. *Inovace výuky statistiky za pomoci statistických SW MS Excel a Gretl*. In sborník: 2. Mezinárodní vědecká konference k počtě Albína Bráfa. ČVUT v Praze, MÚVS, 31. 5. 2018. ISBN 978-80-01-06156-5.

ORSÁGOVÁ, K., NERADOVÁ, T., MEDKOVÁ, L., KOŠŤÁLEK, J. *Experimentální určení hodnoty pi pomocí statistických metod*. In sborník: 2. Mezinárodní vědecká konference k počtě Albína Bráfa. ČVUT v Praze, MÚVS, 31. 5. 2018. ISBN 978-80-01-06156-5.

KOŠŤÁLEK, J. a KAVAN, M. *Vliv vývoje počítačové techniky na podnikové řízení*. In: CHMELENSKÝ, J., HÁJEK, V., a HAVEL, T., eds.. I. ročník studentské vědecké konference k počtě Albína Bráfa. Masarykův ústav vyšších studií ČVUT v Praze, 18.05.2016. s. 27-34. ISBN 978-80-01-05951-7.

VANIŠ, L. a KOŠŤÁLEK, J. *Změny v podnikovém řízení způsobené rozvojem počítačů* [online]. In: FINDOVÁ, Š., et al., eds. Sborník příspěvků ze 17. mezinárodní konference: INTEGROVANÉ INŽENÝRSTVÍ V ŘÍZENÍ PRŮMYSLVÝCH PODNIKŮ. Brno, 04.10.2016. Praha: ústav řízení a ekonomiky podniku. 2016, s. 81-87. ISSN 2464-4722. ISBN 978-80-01-06010-0.

REJF, L. a KOŠŤÁLEK, J. *Moderní technologie a společnost* [online]. In: SCHOLZ, P., et al., eds. Sborník příspěvků ze 17. mezinárodní konference: Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků. Brno, 04.10.2016. Praha: ústav řízení a ekonomiky podniku. 2016, s. 45-51. ISSN 2464-4722. ISBN 978-80-01-06010-0.

KOŠŤÁLEK, J., KAVAN, M., a REJF, L. *Rozvrhování strojírenské výroby*. In: International Masaryk Conference for Ph.D. Students and Young Researchers. 14.12.2015 - 18.12.2015. Hradec Králové: MAGNANIMITAS. 2015, s. 217-222. ISBN 978-80-87952-12-2. Dostupné z: <http://www.masarykovakonference.cz>

- KAVAN, M. a KOŠTÁLEK, J. *Prvky duálního vzdělávání jako faktor konkurenceschopnosti* [online]. In: ZRALÝ, M., ed. *Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků - Technicko-manažerské vzdělávání - klíčový faktor pro konkurenceschopnost*. Brno, 15.09.2015. Praha: ČVUT v Praze, Fakulta strojní. 2015, s. 22-28. ISSN 2464-4722. ISBN 978-80-01-05802-2. Dostupné z: http://rep.fs.cvut.cz/dokumenty/cvut_fs_urep_sbornik_konference_brno_2015.pdf
- KOŠTÁLEK, J. a FINDOVÁ, Š. *Aplikace mechanismů ověřujících věrohodnost účetních dat*. In: *Mezinárodní Masarykova konference pro doktorandy a mladé vědecké pracovníky 2013*. Hradec Králové, Magnanimitas, 09.12.2013 - 13.12.2013. s. 1050-1059. ISBN 978-80-87952-00-9.
- FINDOVÁ, Š. a KOŠTÁLEK, J. *Elimination of Production Losses*. In: *Conference Mekrúr*. Bratislava, 05.12.2013 - 06.12.2013. Ekonomická univerzita Bratislava. 2013, s. 81-87. ISBN 978-80-225-3764-3.
- KOŠTÁLEK, J. *Ekonomická optimalizace směšovacího problému*. In: *Sborník příspěvků V. Mezinárodní vědecká konference doktorandů a mladých vědeckých pracovníků*. Karviná, 09.11.2012. Opava: Slezská univerzita. 2012, s. 803-812. ISBN 978-80-7248-800-1.
- KOŠTÁLEK, J. *Modely pro řízení zásob*. In: *Trendy a inovativní přístupy v podnikových procesech*. Košice, 10.12.2012 - 11.12.2012. TU Košice, FS. 2012, s. 47-55. ISBN 978-80-553-1126-5.
- KOŠTÁLEK, J. a FINDOVÁ, Š. *Role provozního a finančního účetnictví jako nástroj kvantitativního řízení procesu* [online]. In: *Trendy v podnikání*. ZČU Plzeň, 14.11.2013 - 15.11.2013. ISBN 978-80-261-0321-9.
- FINDOVÁ, Š., KOŠTÁLEK, J., a BERAN, T. *Integrace provozního řízení a finančního účetnictví podniku* [online]. In: Beran, T. a Findová, Š., eds. *14. mezinárodní konference Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků*. 08.10.2013. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. 2013, s. 51-58. ISBN 978-80-01-05353-9.
- KOŠTÁLEK, J. *Optimization of logistic routes using mathematical models*. In: *Konference STČ 29.03.2013*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. ISBN 978-80-01-04796-5.
- KOŠTÁLEK, J. *Aplikace matematického modelování v plánování logistických tras*. In: Zralý, M., ed. *Integrované inženýrství v řízení průmyslových podniků*. Brno, 11.09.2012. Praha: ČVUT v Praze, Fakulta strojní. 2012, s. 49-56. ISBN 978-80-01-05105-4.
- KOŠTÁLEK, J. *Optimalizace tras ve vnitropodnikové logistice pomocí matematických modelů*. In: *4. mezinárodní Masarykova konference pro doktorandy a mladé vědecké pracovníky*. MAGNANIMITAS. Hradec Králové, 10.12.2012 - 14.12.2012., s. 2157-2165. ISBN 978-80-905243-3-0.

$$\lambda \bullet B = \lambda \bullet C \quad (1.2)$$

$$\lambda \bullet \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} \\ b_{2x} & b_{2y} \\ \dots & \dots \\ b_{10_x} & b_{10_y} \end{bmatrix} = \lambda \bullet \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & & c_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ c_{n1} & c_{n2} & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Protože např.:

$$\sqrt{(b_{1x} - b_{2x})^2 + (b_{1y} - b_{2y})^2} = c_{12} \quad (1.4)$$

A po vynásobení souřadnic vznikne vztah 1.5, který lze upravit na 1.6:

$$\sqrt{(\lambda \bullet b_{1x} - \lambda \bullet b_{2x})^2 + (\lambda \bullet b_{1y} - \lambda \bullet b_{2y})^2} = \sqrt{(\lambda \bullet (b_{1x} - b_{2x}))^2 + (\lambda \bullet (b_{1y} - b_{2y}))^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \bullet (b_{1x} - b_{2x})^2 + \lambda^2 \bullet (b_{1y} - b_{2y})^2} = \sqrt{\lambda^2} \bullet \sqrt{(b_{1x} - b_{2x})^2 + (b_{1y} - b_{2y})^2} = \quad (1.5)$$

$$= \lambda \bullet \sqrt{(b_{1x} - b_{2x})^2 + (b_{1y} - b_{2y})^2} \quad (1.6)$$

což se podle vztahu 1.4 rovná $\lambda \bullet c_{12}$

Nová matice vzdáleností C_2 i souřadnic B_2 je na obr. 12, jde o situaci, kdy $\lambda = 2$.

Obrázek 1.2: Ukázka z modelu – zdvojnásobení vzdáleností

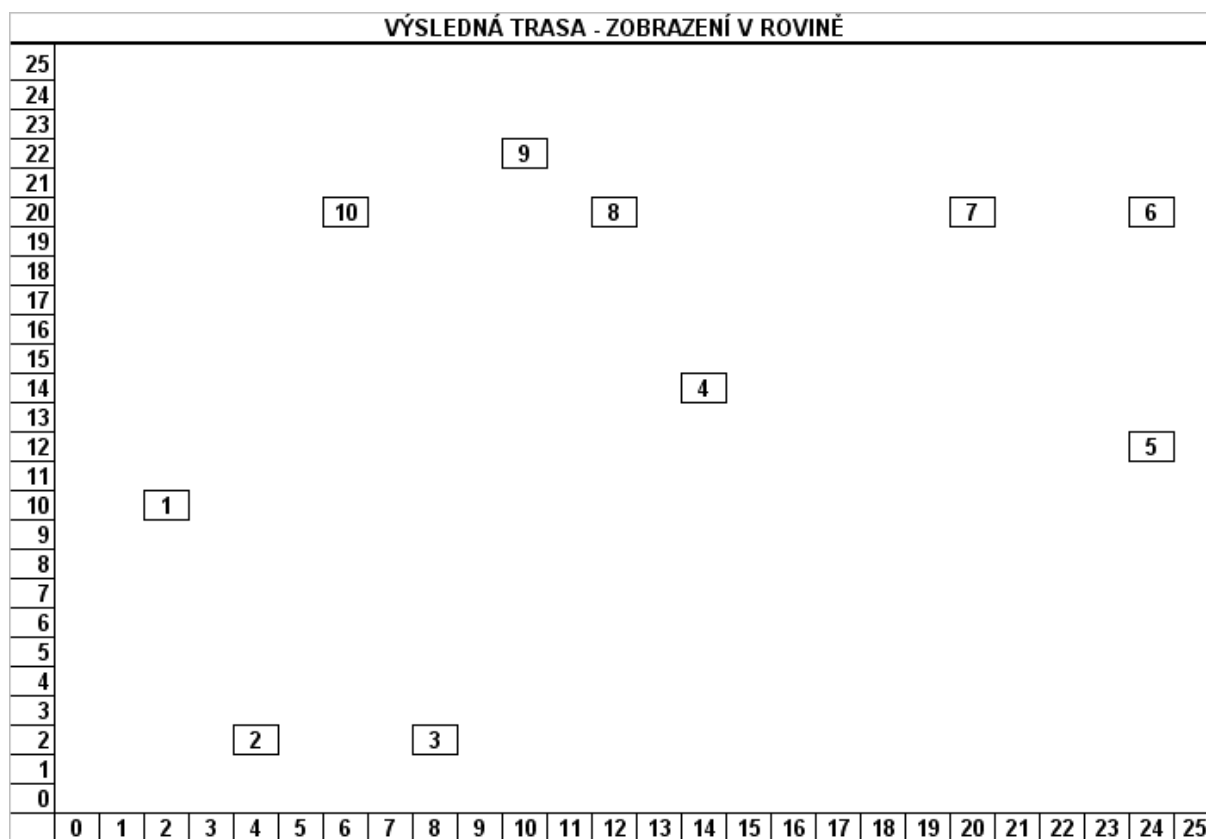
ZADÁNÍ SOUŘADNIC			
č.	X	Y	
1	24	12	
2	6	20	
3	10	22	
4	14	14	
5	24	20	
6	2	10	
7	8	2	
8	12	20	
9	4	2	
10	20	20	

MATICE VZDÁLENOSTÍ - C										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	19,69772	17,20465	10,19804	8	22,09072	18,86796	14,42221	22,36068	8,944272
2	19,69772	0	4,472136	10	18	10,77033	18,11077	6	18,11077	14
3	17,20465	4,472136	0	8,944272	14,14214	14,42221	20,09975	2,828427	20,88061	10,19804
4	10,19804	10	8,944272	0	11,6619	12,64911	13,41641	6,324555	15,6205	8,485281
5	8	18	14,14214	11,6619	0	24,16609	24,08319	12	26,90725	4
6	22,09072	10,77033	14,42221	12,64911	24,16609	0	10	14,14214	8,246211	20,59126
7	18,86796	18,11077	20,09975	13,41641	24,08319	10	0	18,43909	4	21,63331
8	14,42221	6	2,828427	6,324555	12	14,14214	18,43909	0	19,69772	8
9	22,36068	18,11077	20,88061	15,6205	26,90725	8,246211	4	19,69772	0	24,08319
10	8,944272	14	10,19804	8,485281	4	20,59126	21,63331	8	24,08319	0

Zdroj: vlastní

A pro tyto nové vstupní hodnoty spočítám nové výsledky:

Obr. 1.3: Ukázka z modelu – Stejná optimální trasa a její vynásobená délka



Zdroj: vlastní

$$F_2 = 73,932 = 2 \cdot 36,966$$

Popis experimentálního modelu

Za účelem ověřování hypotéz a provádění experimentů jsem sestavil několik modelů, které zmiňuji ve své práci. Jejich aplikace při ověřování hypotéz bude předmětem následující přílohy. Zmíněný model pracuje v prostředí MS Excel, jeho vstupem jsou souřadnice pro 10 bodů (pokročilejší modely používají stejné postupy, ale pro 15 bodů) a výstupem je zakreslení optimální trasy a výpočet její délky. Model pracuje s kartézským souřadnicovým systémem (0 až 25) x (0 až 25) jednotek a s 10-ti body. Což pro potvrzení či vyvrácení hypotézy nebo vize dostačuje.

Vstupní souřadnice se zadají do matice B z ní se automaticky dopočtou vzájemné vzdálenosti všech bodů a vznikne matice C . Matice C je klasickým vstupem pro matematický model schopný řešit tento problém, který je v mém modelu přednastaven. Nalezení řešení v podobě hodnot neznámých nula nebo jedna se provádí pomocí nástroje *řešitel* v MS Excelu, který dokáže řešit binární lineární programování pro 10 bodů (což představuje 99 neznámých) a tím jeho možnosti dostačují.

Obrázek 2.1: Ukázka modelu – zadání vstupních hodnot

ZADÁNÍ SOUŘADNIC			
č.	X	Y	
1	7	17	
2	7	23	
3	14	6	
4	19	9	
5	3	10	
6	10	16	
7	11	17	
8	9	21	
9	17	3	
10	22	23	

MATICE VZDÁLENOSTÍ - C										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	13,038	14,422	8,06226	3,1623	4	4,4721	17,205	16,155
2	6	0	18,385	18,439	13,6015	7,6158	7,2111	2,8284	22,361	15
3	13,04	18,385	0	5,831	11,7047	10,77	11,402	15,811	4,2426	18,788
4	14,42	18,439	5,831	0	16,0312	11,402	11,314	15,62	6,3246	14,318
5	8,062	13,601	11,705	16,031	0	9,2195	10,63	12,53	15,652	23,022
6	3,162	7,6158	10,77	11,402	9,21954	0	1,4142	5,099	14,765	13,892
7	4	7,2111	11,402	11,314	10,6301	1,4142	0	4,4721	15,232	12,53
8	4,472	2,8284	15,811	15,62	12,53	5,099	4,4721	0	19,698	13,153
9	17,2	22,361	4,2426	6,3246	15,6525	14,765	15,232	19,698	0	20,616
10	16,16	15	18,788	14,318	23,0217	13,892	12,53	13,153	20,616	0

Zdroj: vlastní

Pro přehlednost se body jejichž souřadnice byly zadány do matice B zakreslí viz obr. 2.2.

Způsob generování náhodných souřadnic

Pro potřeby ověřování hypotéz je třeba provádět testy na zcela náhodných množinách bodů, pro které se budou určovat trasy, aby byly získané výsledky objektivní je třeba zajistit naprosto náhodné rozmístění bodů ve zmíněném čtverci 26 x 26 jednotek. Základními požadavky je chaotičnost a nepředvídatelnost, jak popisuje Virus (2010, s. 58). Tento požadavek jsem vyřešil pomocí funkce schopné vytvářet náhodná čísla v intervalu $<0;1$) na libovolný počet desetinných míst. Touto funkcí je MS Excel vybaven (nachází se v matematických funkcích pod názvem „NÁHČÍSLO“). Hodnota získaná touto funkcí je vynásobena počtem souřadnic, které potřebuji náhodně vygenerovat tj. krát 26 a následně je nastaveno zaokrouhlení výsledku na celé číslo dolů. Takto jsem získal generátor naprosto náhodných hodnot v intervalu 0 až 25 a tyto hodnoty představují souřadnice na ose X, souřadnice na ose Y jsou získávány stejným způsobem.

Takto vzniklý generátor souřadnic je třeba vyzkoušet. Vyzkoušel jsem ho pomocí dvou testů:

1.) Četností vygenerovaných číslic s požadavkem na rovnoměrnost;

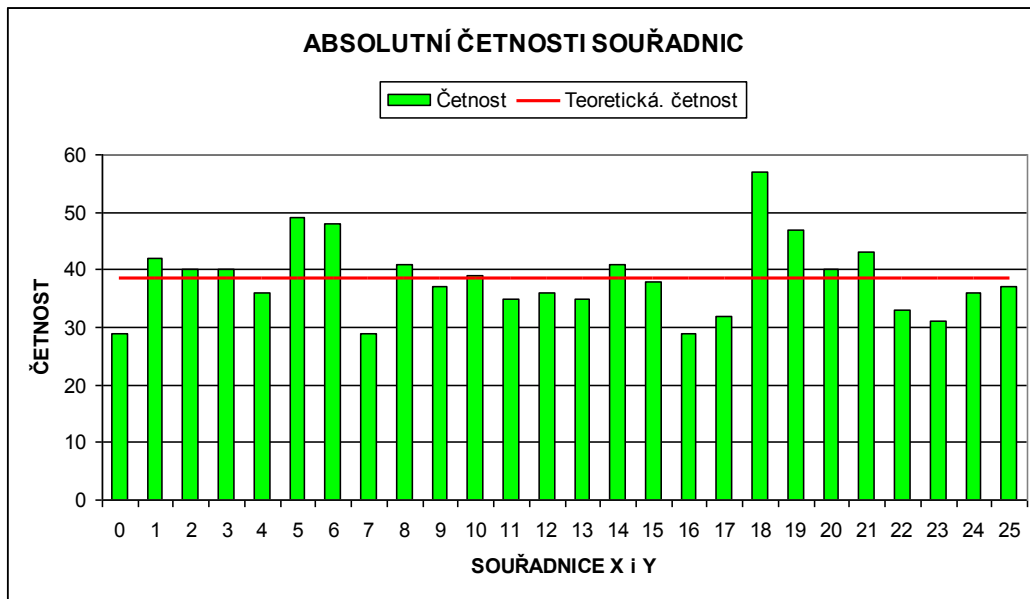
2. Porovnáním četností výskytu vzniklých bodů ve dvou vytyčených obrazcích o stejných plochách.

První test vlastně zkoumá, jestli jsou náhodná čísla vybírána rovnoměrně. Tj. zda v náhodně vygenerovaných souřadnicích je obsažen stejný počet nul, jedniček, dvojek atd. Stejný princip, který byl použit pro výběr deseti souřadnic tj. 10 x-ových hodnot a 10 y-nových byl nastaven pro 500 x-ových hodnot a 500 y-nových hodnot a z těchto celkem tisícovky hodnot byla spočítána četnost jednotlivých číslic (pomocí statistické funkce „ČETNOSTI“). Grafickou interpretaci výsledků tohoto testu ukazuje graf 2.1. Teoreticky by se četnost měla pohybovat okolo hodnoty 38,5, protože hodnot je 1 000 (500 souřadnic X a 500 souřadnic Y) a pravděpodobnost výskytu každé z nich činí

$$1/26 (38,5 = 1000 \cdot 1/26).$$

Tato hodnota je v grafu 2.1 označena podélnou čarou. Model vyšel z tohoto testu úspěšně, neboť četnosti skutečně oscilují okolo této hranice a jsou téměř vyrovnané. Přesnost by se zvyšovala s rostoucím množstvím testovaných čísel 1000 je ze statistického hlediska malý vzorek.

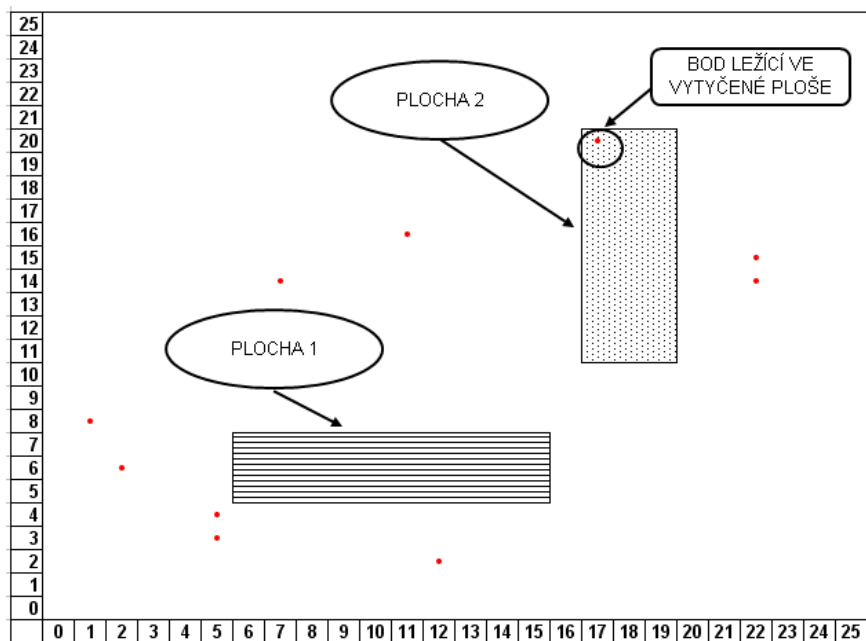
Graf 2.1: Test vyrovnanosti četností náhodně generovaných souřadnic



Zdroj: vlastní

Druhý test pracuje se zakreslenými body v prostoru, jejichž souřadnice jsou náhodné. Jde vlastně o problém kombinace dvou náhodných veličin – souřadnice X a souřadnice Y . Pokud má model fungovat správně musí být výskyt bodů v ploše rovnoměrný. Test spočíval ve vytyčení dvou obdélníkových ploch, každé 3×10 jednotek. Obdélníky jsou umístěny libovolně do prostoru náhodného výskytu bodů viz obr. 2.4. Desetkrát po sobě byly generovány náhodné body a bylo pozorováno kolikrát dopadnou do jednoho z obdélníků. Jelikož mají obdélníky stejnou plochu měly by po deseti pokusech zachytit přibližně stejný počet bodů.

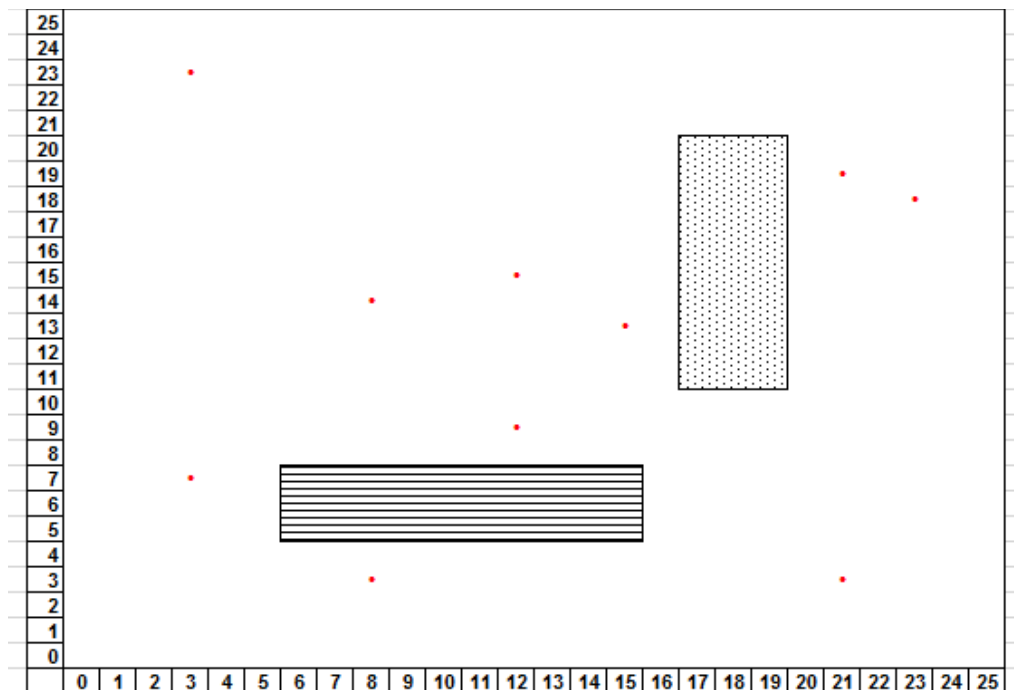
Obrázek 2.4: Princip testu vyrovnanosti bodů v soustavě souřadnic – pokus 1



Zdroj: vlastní

Situaci ilustruje obr. 2.4, kde z náhodně vytvořených bodů se jeden nachází v ploše obdélníku 1 a v ploše obdélníku 2 žádný.

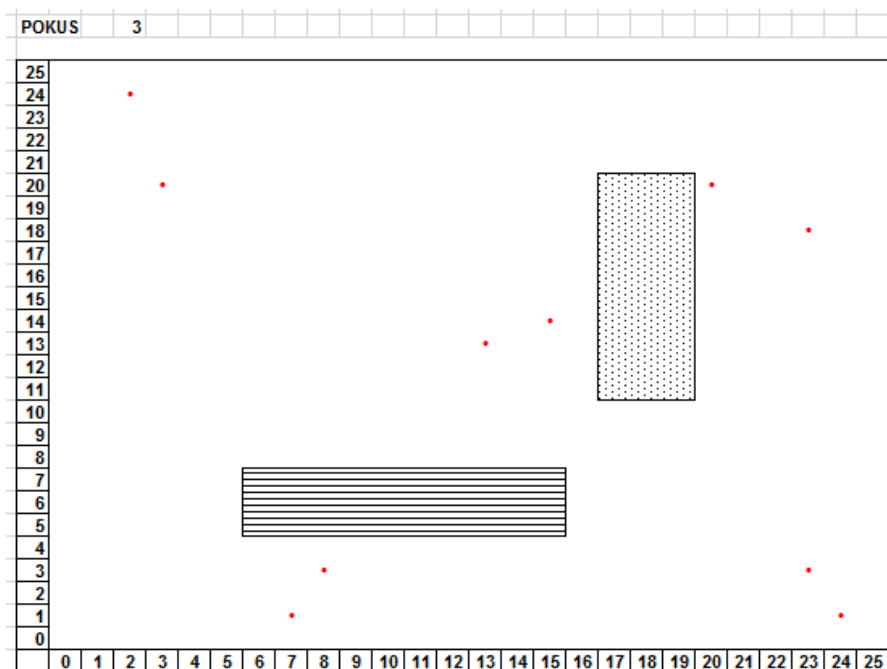
Obrázek 2.5: Princip testu vyrovnanosti bodů v soustavě souřadnic – pokus 2



Zdroj: vlastní

Obrázek 2.5 ukazuje druhý z deseti pokusů, kde z deseti náhodně vygenerovaných bodů žádný nepadl do vyznačených obdélníků. Obdobně skončil třetí pokus z deseti, viz obr. 2.6.

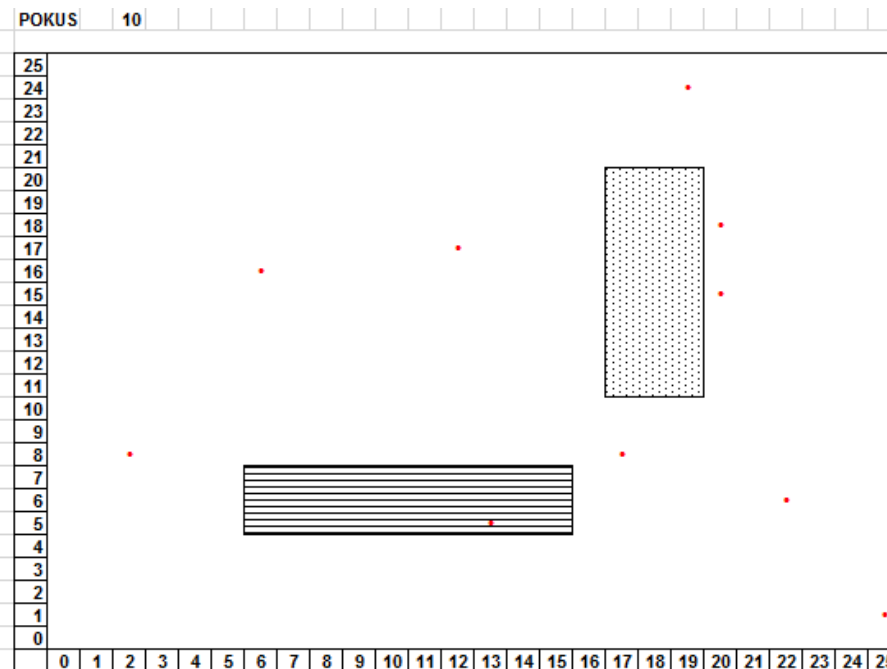
Obrázek 2.6: Princip testu vyrovnanosti bodů v soustavě souřadnic – pokus 3



Zdroj: vlastní

Nepovažuji za nezbytné uvádět všech deset pokusů, proto přeskočím na ukázkou posledního pokusu na obr. 2.7.

Obrázek 2.7: Princip testu vyrovnanosti bodů v soustavě souřadnic – pokus 10



Zdroj: vlastní

Výsledky četností během pokusů 1 až 10 jsou zaznamenány v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1: Výsledky četností během testu

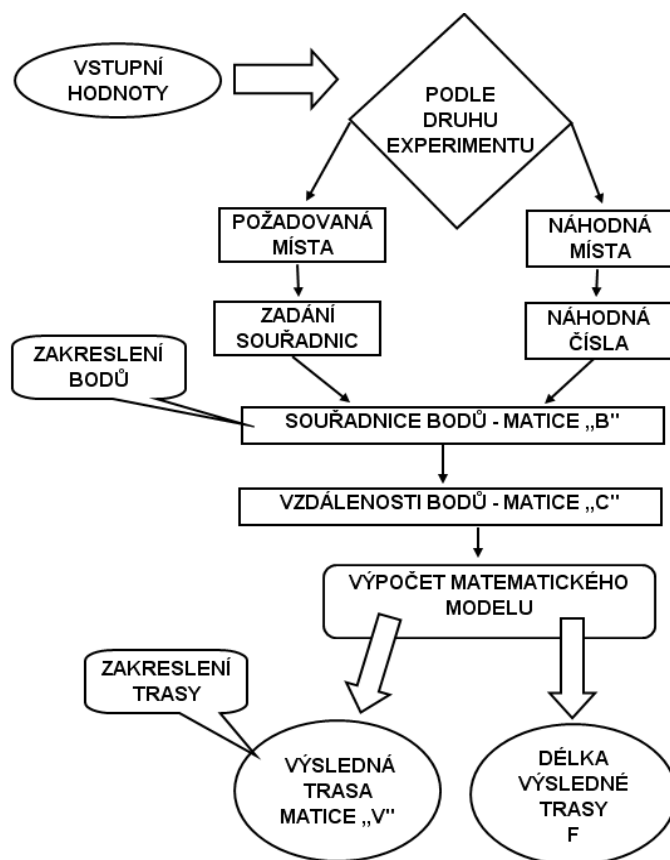
Č.	ČETNOST 1	ČETNOST 2
1	0	1
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	1
6	1	1
7	0	0
8	1	0
9	2	2
10	1	0
Σ	5	5

Zdroj: vlastní

Po deseti pokusech se v ploše obdélníku 1 objevilo celkem 5 bodů a v ploše obdélníku 2 také 5 bodů. **Takže test potvrdil funkčnost tohoto modelu.**

Na tomto principu jsem sestavil několik modelů, které byly nezbytné pro ověřování experimenty, pozorování, simulace, výpočty apod. Princip popisuje schéma na obrázku 2.8.

Obrázek 2.8: Popis fungování modelu určeného pro simulace (náhodně generované body)



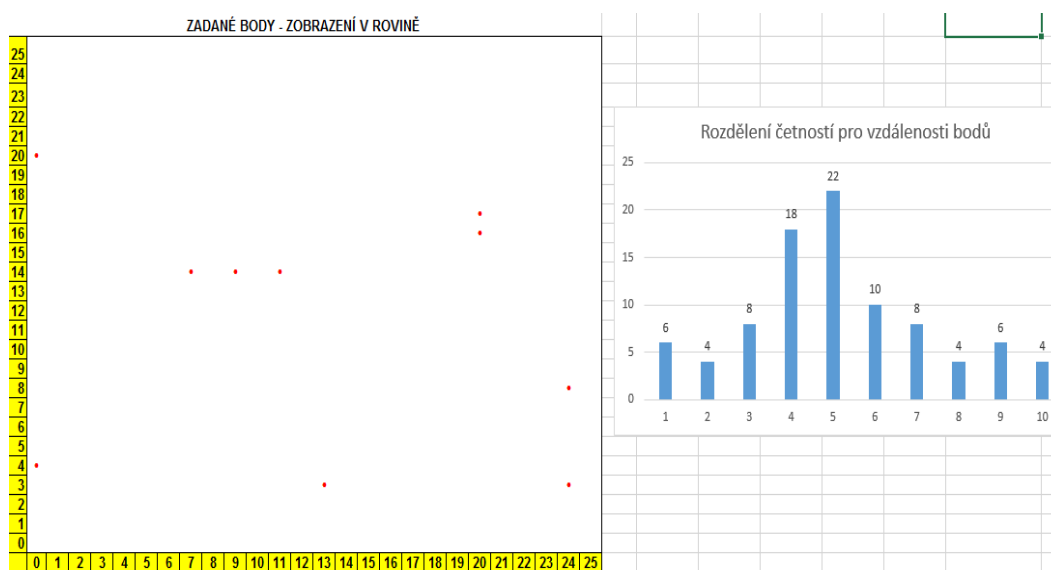
Zdroj: vlastní

Příklady rozdělení četností hodnot c_{ij} pro různé pozice bodů **PŘÍLOHA 3**

Rozdělení četností hodnot vzájemných vzdáleností pro různé pozice bodů ilustrují následující příklady. Jedná se o situace s deseti body z toho důvodu, že jde o ukázkou z modelu TSP M10 zakreslující body v prostoru a ten jsem sestavil pro 10 bodů.

Příklad rozmístění bodů mající rozdělení četností hodnot vzájemných vzdáleností c_{ij} **symetrické – normální**.

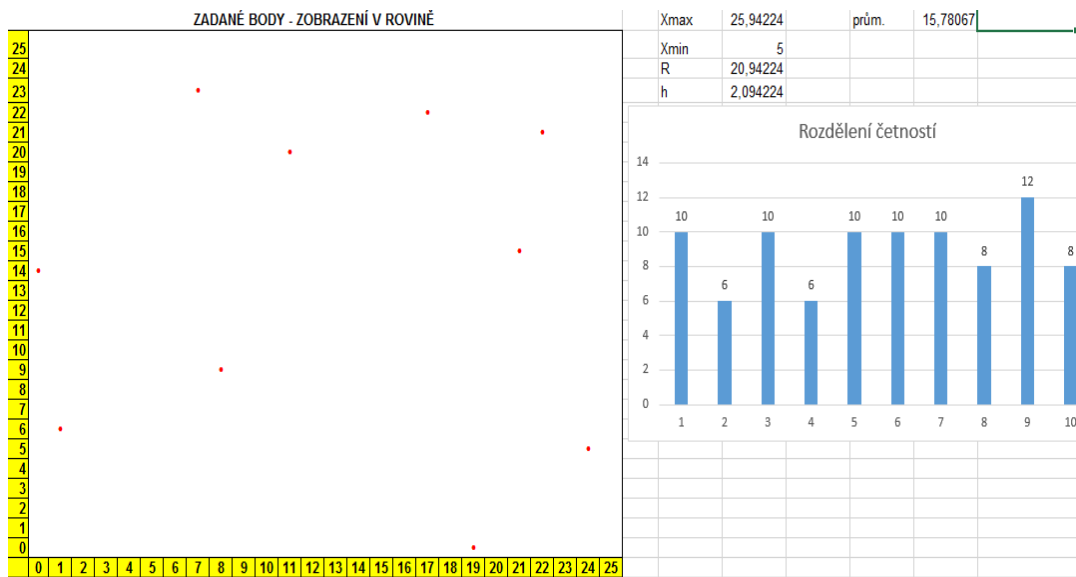
Obrázek 3.1: Body se symetrickým rozdělení četností hodnot c_{ij}



Zdroj: vlastní – ukázkou z modelu TSP M10

Příklad rozmístění bodů mající rozdělení četností hodnot vzájemných vzdáleností c_{ij} **rovnoměrné**.

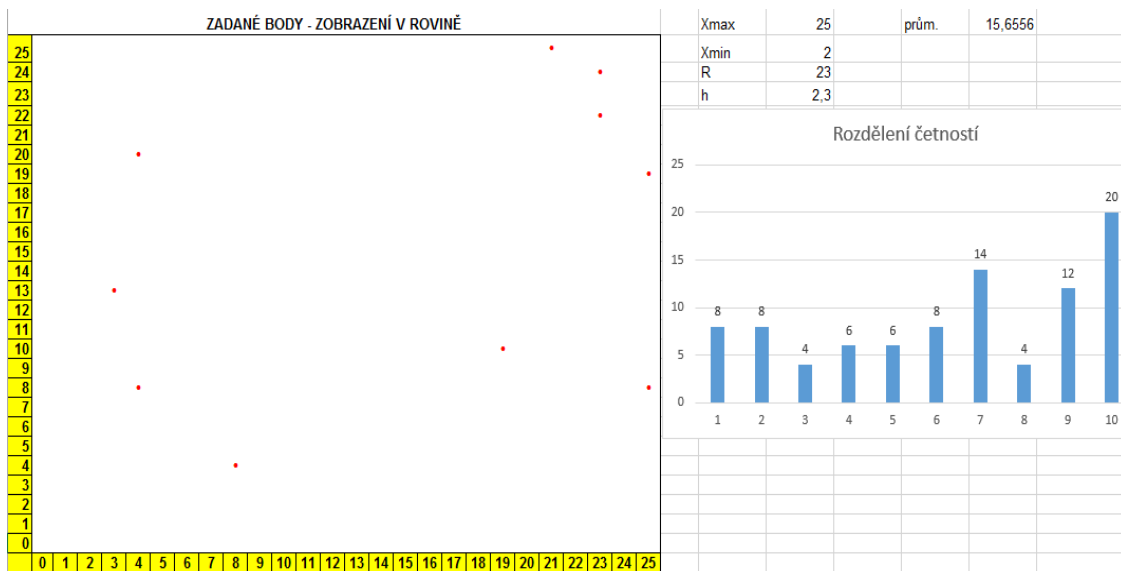
Obrázek 3.2: Body s rovnoměrným rozdělením četností hodnot c_{ij}



Zdroj: vlastní – ukázka z modelu TSP M10

Příklad rozmístění bodů mající rozdělení četností hodnot vzájemných vzdáleností c_{ij} pravostranně asymetrické.

Obrázek 3.3: Body s pravostranně asymetrickým rozdělení četností hodnot c_{ij}



Zdroj: vlastní – ukázka z modelu TSP M10

Obrázek 4.1: Hodnoty Kolmogorovi funkce

Таблица 6.2. Критические значения для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического (критерий Колмогорова)

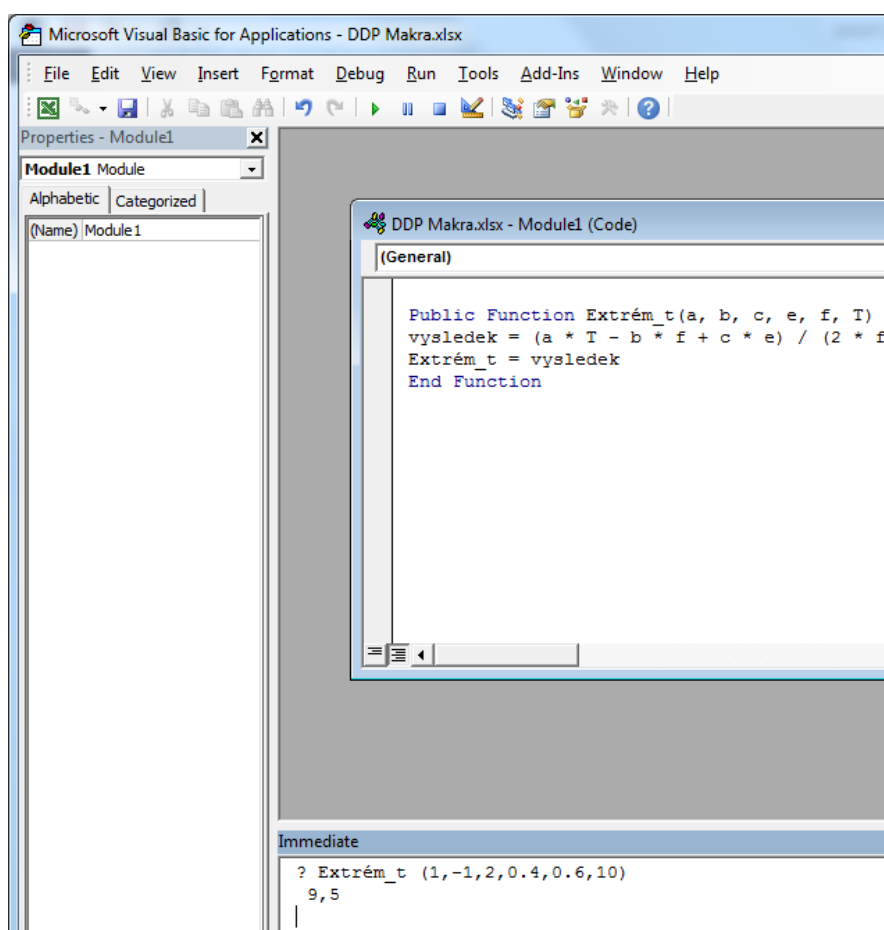
n	Q					n	Q				
	20%	10%	5%	2%	1%		20%	10%	5%	2%	1%
1	0,90000	0,95000	0,97500	0,99000	0,99500	51	0,14697	0,16796	0,18659	0,20864	0,22386
2	68377	77639	84189	90000	92929	52	14558	16637	18482	20667	22174
3	56481	63604	70760	78456	82900	53	14423	16483	18311	20475	21968
4	49265	56522	62394	68887	73424	54	14292	16332	18144	20289	21768
5	44698	50945	56328	62718	66853	55	14164	16186	17981	20107	21574
6	0,41037	0,46799	0,51926	0,57741	0,61661	56	0,14040	0,16044	0,17823	0,19930	0,21384
7	38148	43607	48342	53844	57581	57	13919	15906	17669	19758	21199
8	35831	40962	45427	50654	54179	58	13801	15771	17519	19590	21019
9	33910	38746	43001	47960	51332	59	13686	15639	17373	19427	20844
10	32260	36866	40925	45662	48893	60	13573	15511	17231	19267	20673
11	0,30829	0,35242	0,39122	0,43670	0,46770	61	0,13464	0,15385	0,17091	0,19112	0,20506
12	29577	33815	37543	41918	44905	62	13357	15263	16956	18960	20343
13	28470	32549	36143	40362	43247	63	13253	15144	16823	18812	20184
14	27481	31417	34890	38970	41762	64	13151	15027	16693	18667	20029
15	26588	30397	33760	37713	40420	65	13052	14913	16567	18525	19877
16	0,25778	0,29472	0,32733	0,36571	0,39201	66	0,12954	0,14802	0,16443	0,18387	0,19729
17	25039	28627	31796	35528	38086	67	12859	14693	16322	18252	19584
18	24360	27851	30936	34569	37062	68	12766	14587	16204	18119	19442
19	23735	27136	30143	33685	36117	69	12675	14483	16088	17990	19303
20	23156	26473	29408	32866	35241	70	12586	14381	15975	17863	19167
21	0,22617	0,25858	0,28724	0,32104	0,34427	71	0,12499	0,14281	0,15864	0,17739	0,19034
22	22115	25283	28087	31394	33666	72	12413	14183	15755	17618	18903
23	21645	24746	27490	30728	32954	73	12329	14087	15649	17498	18776
24	21205	24242	26931	30104	32286	74	12247	13993	15544	17382	18650
25	20790	23768	26404	29516	31657	75	12167	13901	15442	17268	18528
26	0,20399	0,23320	0,25907	0,28962	0,31064	76	0,12088	0,13811	0,15342	0,17155	0,18408
27	20030	22898	25438	28438	30502	77	12011	13723	15244	17045	18290
28	19680	22497	24993	27942	29971	78	11935	13636	15147	16938	18174
29	19348	22117	24571	27471	29466	79	11860	13551	15052	16832	18060
30	19032	21756	24170	27023	28987	80	11787	13467	14960	16728	17949
31	0,18732	0,21412	0,23788	0,26596	0,28530	81	0,11716	0,13385	0,14868	0,16626	0,17840
32	18445	21085	23424	26189	28094	82	11645	13305	14779	16526	17732
33	18171	20771	23076	25801	27677	83	11576	13226	14691	16428	17627
34	17909	20472	22743	25429	27279	84	11508	13148	14605	16331	17523
35	17659	20185	22425	25073	26897	85	11442	13072	14520	16236	17421
36	0,17418	0,19910	0,22119	0,24732	0,26532	86	0,11376	0,12997	0,14437	0,16143	0,17321
37	17188	19646	21826	24404	26180	87	11311	12923	14355	16051	17223
38	16966	19392	21544	24089	25843	88	11248	12850	14274	15961	17126
39	16753	19148	21273	23786	25518	89	11186	12779	14195	15873	17031
40	16547	18913	21012	23494	25205	90	11125	12709	14117	15786	16938
41	0,16349	0,18687	0,20760	0,23213	0,24904	91	0,11064	0,12640	0,14040	0,15700	0,16846
42	16158	18468	20517	22941	24613	92	11005	12572	13965	15616	16755
43	15974	18257	20283	22679	24332	93	10947	12506	13891	15533	16666
44	15796	18053	20056	22426	24060	94	10889	12440	13818	15451	16579
45	15623	17856	19837	22181	23798	95	10833	12375	13746	15371	16493
46	0,15457	0,17665	0,19625	0,21944	0,23544	96	0,10777	0,12312	0,13675	0,15291	0,16408
47	15295	17481	19420	21715	23298	97	10722	12249	13606	15214	16324
48	15139	17302	19221	21493	23059	98	10668	12187	13537	15137	16242
49	14987	17128	19028	21277	22828	99	10615	12126	13469	15061	16161
50	14840	16959	18841	21068	22604	100	10563	12067	13403	14987	16081

Zdroj: Bolšev (1983, s. 409)

Pro některé pomocné výpočty, které se v mé práci opakovaly (např. pomocné výpočty související se statistickými testy) jsem si vytvořil vlastní funkce v programovacím jazyku Visual Basic for Applications (VBA). Tento jazyk je možné získat doinstalováním nástroje „vývojář“ v programu MS Excel.

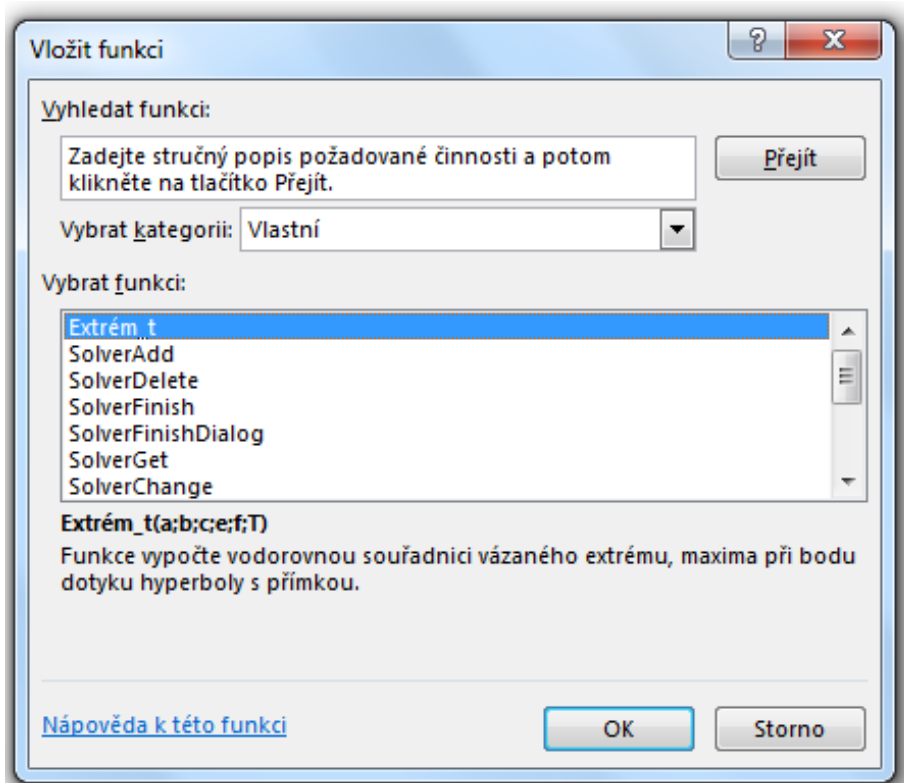
Ve své disertační práci jsem v kapitole 7 dospěl k analytickou cestou k odvození obecného vztahu sloužícího k nalezení polohy a hodnoty maxima u speciálního případu hledání vázaného extrému. V této příloze popíši jak jsem získaným výsledkem vytvořil vlastní funkci a zařadil ji mezi klasické funkce programu MS Excel, čímž jsem docílil plné automatizace tohoto výpočtu a to právě programováním v jazyku VBA.

Obrázek 5.1: Naprogramování funkce v jazyce VBA



Zdroj: vlastní

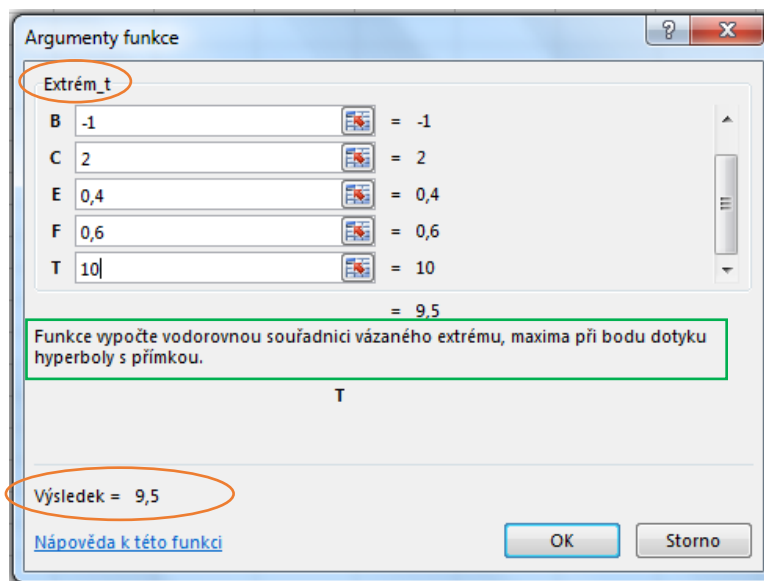
Obrázek 5.2: Ukázka vlastní vytvořené funkce nazvané Extrém t



Zdroj: vlastní

Funkce má vlastní název i popis, inspirací mi byla kniha Ing. Laurenčíka (2013, s. 21 – 22).

Obrázek 5.3: Ukázka práce s funkcí



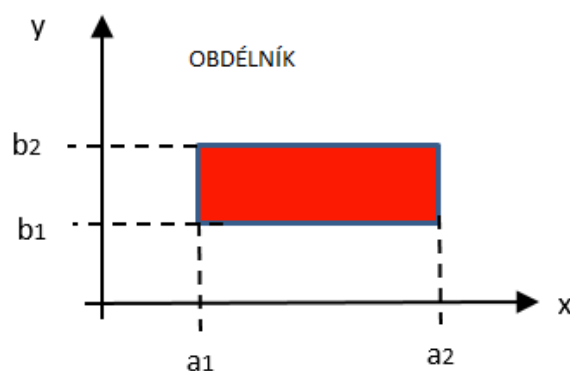
Zdroj: vlastní

Výsledek získaný touto funkcí pro hodnotu t je totožný s výsledkem vypočítaným v podkapitole 7.3, kde $t = 9,5$ minuty.

Vykreslení zakázaných oblastí v modelu KY2 je provedeno na bázi vloženého grafu, ve kterém je automaticky nastaveno vykreslení spojnic bodů, kde značka bodů není vykreslována jen (spojnice bodů).

V případě **obdélníků** jsou jako body, mezi kterými se vykreslují spojnice nastaveny souřadnice vrcholů, obecné značení souřadnic vrcholů $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ atd. znázorňuje obr. 6.1.

Obr. 6.1: Obecné označení souřadnic vrcholů obdélníku



Zdroj: Vlastní

Při zadání zakázané oblasti do modelu se automaticky vypíše souřadnice vrcholů systémem uvedeným v tab. 6.1.

Tab. 6.1: Kombinace bodů pro zakreslení obdélníku

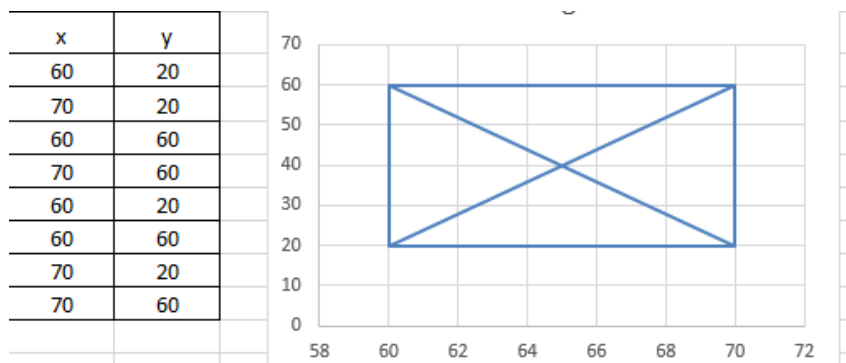
	x	y
1	a1	b1
2	a2	b1
3	a1	b2
4	a2	b2
5	a1	b1
6	a1	b2
7	a2	b1
8	a2	b2

Zdroj: Vlastní

Dvojic souřadnic je nutné zadat skutečně 8, jinak by nedošlo k vykreslení celého obdélníka (zadávají se body definující spojnicí ve vodorovném směru a body definující spojnicí ve

svislém směru). Zakreslení obdélníku do souřadnicového systému při vložení reálných hodnot ilustruje obr. 6.2.

Obr. 6.2: Ukázka zakreslení obdélníku



Zdroj: Vlastní

Výše uvedený princip je použit také na kružnice (vymezující kruhové plochy) a elipsy s tím rozdílem, že zde nejsou zadány body představující vrcholy, ale z parametrů (středů, poloměrů u kružnic a poloos u elips) jsou spočítané souřadnice bodů tvořících obvodu kružnic a elips. K těmto výpočtům jsou použity vztahy vyjadřující x-ové a y-ové souřadnice parametricky pomocí polárních souřadnic viz vztahy 6.1 až 6.4.

kružnice:

$$x = a_s + r \cdot \cos(\varphi) \quad (6.1)$$

$$y = b_s + r \cdot \sin(\varphi) \quad (6.2)$$

elipsy:

$$x = a_s + a \cdot \cos(\varphi) \quad (6.3)$$

$$y = b_s + b \cdot \sin(\varphi) \quad (6.4)$$

Kde $\varphi \in \langle 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ \dots 340^\circ, 360^\circ \rangle$

Tab. 6.2 obsahuje hodnoty vypočítané pomocí výše uvedených vzorců.

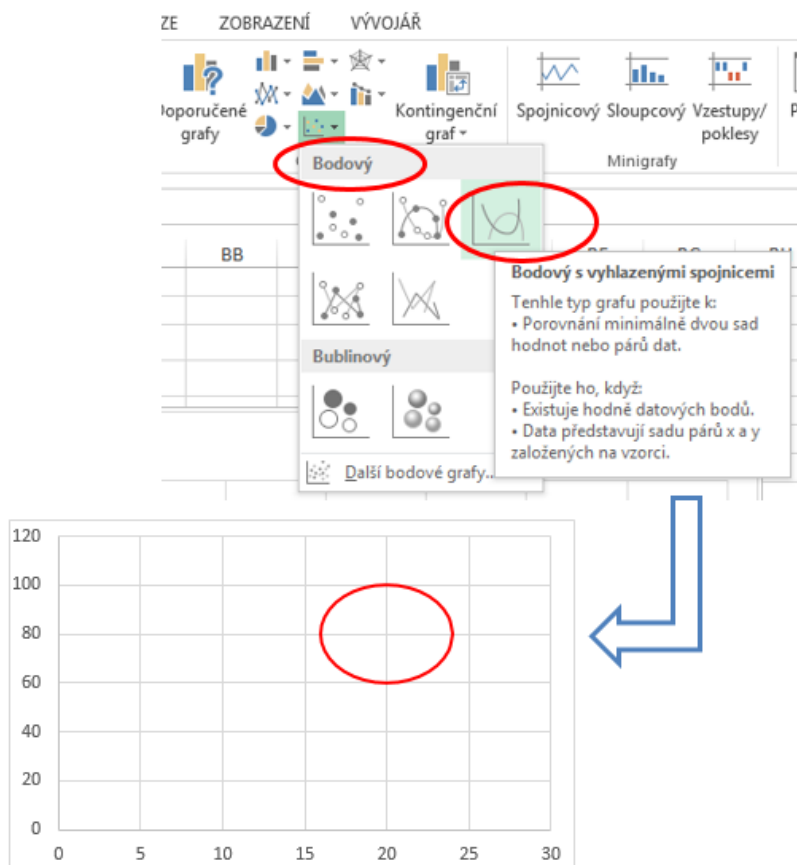
Tab. 6.2: Parametrické vyjádření souřadnic bodů

POMOCNÉ VÝPOČTY - VYKRESLOVÁNÍ V GRAFECH					POMOCNÉ VÝPOČTY - VYKRESLOVÁNÍ V GRAFECH					
KRUŽNICE					ELIPSA					
číslo	x	y	φ (°)	Rad		x	y	φ (°)	Rad	
1	32	36	0	0		1	24	80	0	0
1	31,69846	37,7101	20	0,349066		1	23,75877	86,8404	20	0,349066
1	30,83022	39,21394	40	0,698132		1	23,06418	92,85575	40	0,698132
1	29,5	40,33013	60	1,047198		1	22	97,32051	60	1,047198
1	27,86824	40,92404	80	1,396263		1	20,69459	99,69616	80	1,396263
1	26,13176	40,92404	100	1,745329		1	19,30541	99,69616	100	1,745329
1	24,5	40,33013	120	2,094395		1	18	97,32051	120	2,094395
1	23,16978	39,21394	140	2,443461		1	16,93582	92,85575	140	2,443461
1	22,30154	37,7101	160	2,792527		1	16,24123	86,8404	160	2,792527
1	22	36	180	3,141593		1	16	80	180	3,141593
1	22,30154	34,2899	200	3,490659		1	16,24123	73,1596	200	3,490659
1	23,16978	32,78606	220	3,839724		1	16,93582	67,14425	220	3,839724
1	24,5	31,66987	240	4,18879		1	18	62,67949	240	4,18879
1	26,13176	31,07596	260	4,537856		1	19,30541	60,30384	260	4,537856
1	27,86824	31,07596	280	4,886922		1	20,69459	60,30384	280	4,886922
1	29,5	31,66987	300	5,235988		1	22	62,67949	300	5,235988
1	30,83022	32,78606	320	5,585054		1	23,06418	67,14425	320	5,585054
1	31,69846	34,2899	340	5,934119		1	23,75877	73,1596	340	5,934119
1	32	36	360	6,283185		1	24	80	360	6,283185

Zdroj: Vlastní

Parametr úhel φ je pro každou kružnici a elipsu automaticky nastaven od 0° do 360° , po dvaceti stupních. Tím vznikne pro každou kružnici a elipsu množina 19-ti bodů s vypočítanými souřadnicemi x a y. V grafu je automaticky nastaveno propojit tyto body bodovým typem grafu spojujícím body červenou křivkou bez vykreslení značky pro body a tak se docílí souvislých kružnic a elips vymezuujících obvod zakázaných ploch jak je patrné z obr. 6.3.

Obr. 6.3: Princip vykreslení kruhových a eliptických oblastí



Zdroj: Vlastní