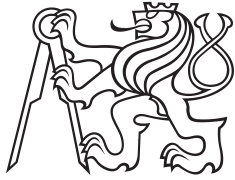


Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F2

Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Řešení soustavy mnoha těles s poddajnými členy

Pavel Mačák

Vedoucí: Prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola

Obor: bez oboru

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Červen 2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mačák** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **465509**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Řešení soustavy mnoha těles s poddajnými členy

Název bakalářské práce anglicky:

Solution of many bodies with flexible members

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s metodami sestavování pohybových rovnic pro soustavu mnoha těles
- 2) Navrhněte postup výpočtu pro řešení soustavy mnoha poddajných těles pomocí metody RFE
- 3) Navrhněte postup výpočtu pro řešení soustavy mnoha poddajných těles, kdy deformace těles budou vyjádřeny pomocí lineární kombinace bázových funkcí
- 4) Kriticky zhodnoťte jednotlivé metody
- 5) Na základě sestaveného SW kódu proveďte dynamickou analýzu rovinného čtyř-kolbového mechanismu

Seznam doporučené literatury:

V. Stejskal and M. Valášek. Kinematics and dynamics of machinery. Marcel Dekker, inc., 1996. ISBN:0-8247-9731-0.
R. Brepta, L. Pust, and F. Turek. Mechanické kmitání. Sobotáles, 1994. ISBN:80-901684-8-5.
K.-J. Bathe. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc., 1982. ISBN:0-13-317305-4.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

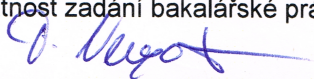
prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola, odbor mechaniky a mechatroniky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: **29.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **16.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

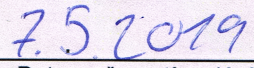

prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola
podpis vedoucí(ho) práce



prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.


7.5.2019
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce prof. Dr. Ing. Tomáši Vampolovi za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Zároveň děkuji své rodině a přátelům za jejich podporu při studiu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze, 6. června 2019

Abstrakt

Práce je zaměřena na sestavování pohybových rovnic pro rovinné systémy s poddajnými tělesy. Uvedeny jsou dvě metody řešení, které jsou následně aplikovány na rovinný mechanismus s uzavřenou kinematickou smyčkou.

Klíčová slova: Mechanika, Dynamika, RFE, MBS, Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, Baumgartova stabilizace, poddajná tělesa

Vedoucí: Prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola
Oddělení mechaniky a mechatroniky
Technická 4,
Praha 6

Abstract

This thesis focuses on solution of multiple body systems consisting of flexible bodies. Presented are two methods of solution and both of them are then put to use on a 2D mechanism with closed kinematic loop.

Keywords: Mechanics, Dynamics, RFE, MBS, Lagrange equations of mixed type, Baumgarte stabilization, deformable bodies

Title translation: Solution of many bodies with flexible members

Obsah

1 Úvod 1

Část I Teoretická část

2 Dynamická analýza soustavy těles 4

2.1 Úvod..... 4

2.2 Lagrangeovy rovnice II. druhu ... 4

2.3 Lagrangeovy rovnice smíšeného typu 6

2.4 Numerické řešení LRST 7

2.4.1 Baumgartova stabilizace 8

3 Metody zahrnutí poddajnosti těles 9

3.1 Metoda poddajných tělísek, RFE metoda 9

3.1.1 Metoda RFE 9

3.1.2 Formulace kinetické energie . 11

3.1.3 Tvorba rovnic dle LRST 12

3.1.4 Matice soustavy 13

3.1.5 Vektor pravé strany - deformační síly 14

3.1.6 Vliv sil tíže..... 16

3.1.7 Rovnice vazeb 17

3.1.8 Výsledná soustav rovnic 17

3.2 Metoda tvarových funkcí, MBS flex 18

3.2.1 Metoda MBS flex 18

3.2.2 Deformační model..... 19

3.2.3 Polohový vektor deformovaného tělesa 20

3.2.4 Rychlost deformovaného tělesa 20

3.2.5 Kinetická energie zdeformovaného tělesa..... 21

3.2.6 Matice M 22

3.2.7 Zobecněné síly deformace ... 23

3.2.8 Zobecněné vnější síly 24

3.2.9 Kinematické vazby 25

3.2.10 Pohybové rovnice MBS flexible 27

3.3 Hodnocení metod 28

Část II	
Praktická aplikace	
4 Dynamická analýza rovinného čtyř-klobového mechanismu	32
4.1 Úvod.....	32
4.2 Definice parametrů rovinného čtyř-klobového mechanismu	33
5 Výstupy výpočtu	34
5.1 Soustava tuhých těles	34
5.1.1 Trajektorie bodu L	34
5.1.2 Rádus vektor bodu L	35
5.1.3 Mechanická energie.....	37
5.1.4 Kontrola vazeb	37
5.1.5 Reakce ve vazbách	38
5.2 Aplikace metody RFE.....	39
5.2.1 Trajektorie bodu L	39
5.2.2 Rádus vektor bodu L	40
5.2.3 Mechanická energie.....	42
5.2.4 Kontrola vazeb	42
5.2.5 Reakce ve vazbách	43
5.3 Aplikace metody MBS flex.....	44
5.3.1 Trajektorie bodu L	44
5.3.2 Rádus vektor bodu L	45
5.3.3 Mechanická energie.....	47
5.3.4 Kontrola vazeb	47
5.4 Srovnání a shrnutí výsledků....	49
5.4.1 Průběh rychlostí a zrychlení bodu L	49
5.4.2 Odchylka polohy bodu L....	49
6 Závěr	51
Přílohy	
A Seznam použitých symbolů a zkratk	55
B Rejstřík	58
C Literatura	59

Obrázky

3.1 Tuhé tělísko a poddajný element	10	5.8 Průběh polohy bodu L v GSS, RFE	41
3.2 Schéma popisu polohy dvou tělísek	10	5.9 Průběh rychlostí a zrychlení, RFE	41
3.3 Silové účinky působící na tělísko	11	5.10 Průběh mechanické energie, RFE	42
3.4 Schéma dvou tělísek	18	5.11 Míra nesplnění vazby, RFE	43
3.5 Rozložení sil tíže	25	5.12 Velikost reakcí ve vazbách, RFE	44
4.1 Schéma čtyř-kloubového mechanismu	32	5.13 Trajektorie bodu L, MBS	45
4.2 Průběh úhlové rychlosti ω_2	33	5.14 Průběh polohy bodu L v GSS, MBS	46
5.1 Trajektorie bodu L, LRST	35	5.15 Průběh rychlostí a zrychlení, MBS	46
5.2 Průběh polohy bodu L v GSS, LRST	36	5.16 Průběh mechanické energie, MBS	47
5.3 Průběh rychlostí a zrychlení, LRST	36	5.17 Míra nesplnění vazby, MBS	48
5.4 Průběh mechanické energie, LRST	37	5.18 Průběh rychlostí a zrychlení bodu L, souhrn	49
5.5 Míra nesplnění vazby, LRST	38	5.19 Rozdíl velikostí polohového vektoru bodu L	50
5.6 Velikost reakcí ve vazbách, LRST	39		
5.7 Trajektorie bodu L, RFE	40		

Tabulky

4.1 Parametry čtyř-kolubového mechanismu	33
---	----



Kapitola 1

Úvod

V dnešní době narůstají nároky na mechanické systémy z hlediska rychlosti pohybu, hmotnosti jednotlivých členů i přesnosti dosahované trajektorie. Pro splnění těchto požadavků lze např. využít odlehčených kompozitních konstrukcí. Zde začíná hrát velkou roli poddajnost celé soustavy, tedy deformace jednotlivých členů. Je tedy nutné odvodit vhodný tvar pohybových rovnic, které poddajnost zahrnují.

Cílem této práce je navrhnout postup pro sestavení pohybových rovnic soustavy mnoha těles s poddajnými členy v rovině. Práce nejprve seznamuje s metodami sestavování pohybových rovnic pro soustavy mnoha tuhých těles a následně řeší výpočet vzniklé soustavy rovnic. První navrhovaná metoda sestavování pohybových rovnic pro soustavy mnoha těles s poddajnými členy spočívá v přímé fyzikální diskretizaci a je označována jako metoda RFE. Jiný přístup pak používá druhá metoda, kde jsou deformace soustavy dány lineární kombinací tvarových funkcí popisujících deformaci těles, tzv. metoda MBS. Obě metody budou v práci odvozeny pro aplikaci na dvourozměrný problém a následně kriticky zhodnoceny a porovnány.

V praktické části je na základě sestaveného softwarového kódu analyzován rovinný čtyř-klobový mechanismus. Porovnány jsou výsledky pro soustavu tuhých těles s výstupy metod uvažujících poddajnost jednotlivých členů mechanismu.

Část I

Teoretická část

Kapitola 2

Dynamická analýza soustavy těles

2.1 Úvod

Následující kapitola seznamuje s metodami sestavování pohybových rovnic pro soustav těles. Je naznačeno odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu a jejich rozšíření na Lagrangeových rovnic smíšeného typu. Uvedena je i metoda řešení vzniklé soustavy algebraicko-diferenciálních rovnic a numerická stabilizace tohoto řešení.

2.2 Lagrangeovy rovnice II. druhu

O Lagrangeových rovnicích druhého druhu (dále jen LR II) pojednává [12].

Pro hmotný bod platí

$$m_i \cdot a_i = F_i. \quad (2.1)$$

Lze tedy vyvodit následující

$$\begin{aligned} m_i \cdot a_i \cdot \delta r_i &= F_i \cdot \delta r_i \\ r_i &= r_i(q_j) \\ \delta r_i &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \delta t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde r je počet nezávislých souřadnic. Pro variaci δ platí $t \rightarrow 0$, a tedy pro soustavu hmotných bodů lze psát

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \cdot \ddot{r}_i \cdot \sum_{j=1}^r \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) &= \sum_{i=1}^N \left(F_i \cdot \sum_{j=1}^r \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

O nezávislých souřadnicích q_j lze udělat libovolný předpoklad, např., že jsou nenulové a můžeme nimi rovnici vydělit. Dostáváme tak r rovnic, kde r je při použití nezávislých souřadnic právě rovno počtu stupňů volnosti soustavy n° .

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n^\circ, \quad (2.4)$$

kde výraz v sumě napravo je zobecněná síla Q_j a tedy

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n^\circ. \quad (2.5)$$

Pro rychlost hmotného bodu popsaného polohovým vektorem $r_i = r_i(q_j(t))$ tedy plyne

$$\dot{r}_i = \sum_j^{n^\circ} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Můžeme provést následující operaci

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right),$$

odkud vyplývá, že

$$\ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \quad (2.7)$$

dále platí

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial^2 \dot{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \dot{r}_i}{\partial q_j \partial t} \\ \implies \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

a po dosazení rovnic 2.8 a 2.9 do rovnice 2.7 dostáváme

$$\ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{r}_i \left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.10)$$

Po sloučení s rovnicí 2.5 je výsledkem

$$\sum_i^N \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \right] = Q_j \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n^\circ. \quad (2.12)$$

Vztah 2.12 definuje Lagrangeovy rovnice II. druhu.

2.3 Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

Aplikace LR II je pro systémy s mnoha tělesy obtížná, neboť se musí kinetická energie všech členů soustavy převést na funkci jediné nezávislé souřadnice. LR II lze rozšířit na Lagrangeovy rovnice smíšeného typu (dále LRST), které tento krok nahrazují vazbovými rovnicemi. Dále je nastíněno odvození LRST, jak uvádí [9].

Mějme soustavu hmotných bodů o n stupních volnosti. Konfiguraci této soustavy popíšeme pomocí i fyzikálních souřadnic

$$s_j, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad i \geq n^\circ, \quad (2.13)$$

jejichž počet může být vyšší než počet stupňů volnosti soustavy. Fyzikální souřadnice nejsou obecně nezávislé, ale jsou svázány použitím holonomních rheonomních vazebních rovnic

$$f_k(a_j, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r = i - n^\circ. \quad (2.14)$$

Z i zvolených fyzikálních souřadnic je pouze n° nezávislých. Pro sestavení pohybových rovnic soustavy je stejně jako v případě LR II potřeba vyjádřit kinetickou energii $E_k = E_k(s_j, \dot{s}_j, t)$. Lagrangeovy rovnice smíšeného typu pro holonomní vazby jsou vyjádřeny následovně

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}; \quad j = 1, 2, \dots, i. \quad (2.15)$$

Soustava rovnic popsaná pomocí vztahů 2.15 a 2.14 obsahuje dohromady $i + r$ neznámých, i neznámých funkcí $s_j(t)$ a r Lagrangeových multiplikátorů $\lambda_k(t)$,

které zastupují reakční síly ve vazbách. Rozepsáním rovnic 2.15 dostáváme

$$\sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{s}_a \partial \dot{s}_j} \ddot{s}_a + \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 E_k}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 E_k}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}. \quad (2.16)$$

Rovnice vazeb 2.14 nahradíme jejich druhou časovou derivací, takže

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = \sum_{a=1}^i \frac{\partial f_k}{\partial \dot{s}_a} \ddot{s}_a + \sum_{j=1}^i \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{s}_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a \dot{s}_j + 2 \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial \dot{s}_a} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.17)$$

Systém takto upravených rovnic je nyní přímo závislý na \dot{s}_j a λ_k . Lze použít následující maticový zápis [9]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_j \\ -\lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

kde $\dot{\mathbf{s}}_j = [\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_i]$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$, \mathbf{M} je čtvercová regulární symetrická (i, i) matice, $\mathbf{0}$ je nulová (r, r) matice, \mathbf{p}_1 je i -rozměrný vektor a \mathbf{p}_2 je r -rozměrný vektor. Poté platí následující

$$\begin{aligned} (\mathbf{M})_{ij} &= \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{s}_i \partial \dot{s}_j}, & (\Phi_s) &= \frac{\partial f_i}{\partial s_j}, \\ (\mathbf{p}_1)_j &= \frac{\partial E_k}{\partial s_j} - \frac{\partial^2 E_k}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 E_k}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} + Q_j, \\ (\mathbf{p}_2)_k &= - \sum_{j=1}^i \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_a} \dot{s}_j \dot{s}_a - 2 \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_a} \dot{s}_a - \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4 Numerické řešení LRST

Jak je uvedeno v [9], lze k numerickému řešení výsledné soustavy pohybových rovnic 2.18 přistoupit následujícími způsoby

- použití stabilizační metody,
- přeformulováním rovnic 2.14 a 2.16,
- exaktním řešením rovnic 2.14 a 2.16 jako rovnic diferenciálně-algebraických

Pro potřeby této bakalářské práce je pro jednoduchost aplikace zvolena Baumgartova stabilizační metoda [6].

■ 2.4.1 Baumgartova stabilizace

Pro vyřešení diferenciálně-algebraické soustavy rovnic dle Baumgarta, je tato soustava převedena na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (dále ODR) a původní podmínka z 2.17 $\dot{f} \stackrel{!}{=} 0$ je nahrazena analyticky ekvivalentní rovnicí [9]

$$\ddot{f} + 2\alpha\dot{f} + \beta^2 f \stackrel{!}{=} 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.20)$$

Pokud se na novou podmínku budeme dívat jako na problém stability systému, jak uváděno v [7], tak hledané kořeny charakteristické rovnice musí padnout nalevo od imaginární osy, jinak řečeno, mít zápornou reálnou složku. Kupříkladu pro $\alpha = \beta = 1$ dostáváme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (2.21)$$

a řešení vyplyne po algebraických úpravách z tvaru $(\lambda + 1) = 0$ jako kořeny sdružené $\lambda_{1,2} = -1$ a dle očekávání záporné. Pro případ vícero vazbových podmínek lze rovnic přepsat do vektorového tvaru [9]

$$\ddot{\mathbf{f}} + 2\alpha\dot{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

a po dosazení vztahů $\Phi_s = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}$, $\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}\dot{\mathbf{s}}$ a $\ddot{\mathbf{f}} = \Phi_s\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}}$ můžeme psát rovnici

$$\Phi_s\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}} + 2\alpha\Phi_s\dot{\mathbf{s}} + \beta^2\mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Výsledný tvar LRST je formálně stejný jako 2.18, tedy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}_j \\ -\lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix},$$

pouze se změnou významu vektoru \mathbf{p}_2 [6, 9]

$$\mathbf{p}_2 = -\dot{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}} - 2\alpha\Phi_s\dot{\mathbf{s}} - \beta^2\mathbf{f}. \quad (2.24)$$

Před zahájením integračního procesu je potřeba stanovit počáteční podmínky soustavy, kde lze zvolit pouze omezený počet počátečních podmínek, jednu polohu a jednu rychlost za každý stupeň volnosti soustavy, a dopočítání zbytku potřebných lze považovat za přímou kinematickou úlohu, která je však potřeba vyřešit pouze jedenkrát, před začátkem integrace. LRST tvoří systém diferenciálních rovnic a je tedy vhodné jej z hlediska numerického řešení převést nejdříve na soustavu ODR prvního řádu zavedením následující substituce $y_1 = s$, $y_2 = \dot{y}_1 = \dot{s}$, $\dot{y}_2 = \ddot{s}_2$ Výslednou soustavu lze psát pomocí vztahu 2.25 [9]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \mathbf{0} & \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Kapitola 3

Metody zahrnutí poddajnosti těles

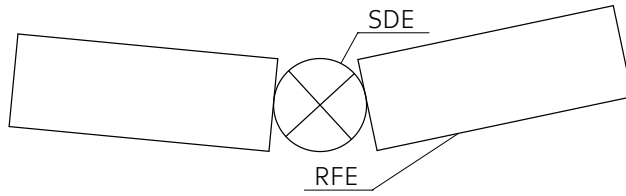
V následující kapitole jsou odvozeny dvě schémata řešení dynamických úloh s poddajnými tělesy. Metody jsou v práci označovány jako metoda RFE a metoda MBS flexible.

3.1 Metoda poddajných tělísek, RFE metoda

Metoda spočívá v diskretizaci soustavou tuhých těles propojených pružně tlumícím elementem - přímá fyzikální diskretizace. Soustava je následně popsána fyzikálními souřadnicemi, což vede na řešení soustavy LRST. Tuhé tělíška jsou dále označovány jako **RFE**, z angličtiny rigid finite element - tuhé konečné tělíško, a poddajné elementy **SDE**, z angličtiny spring-dampning element - pružně tlumící element. Metoda RFE je odvozena dle [11, 1]

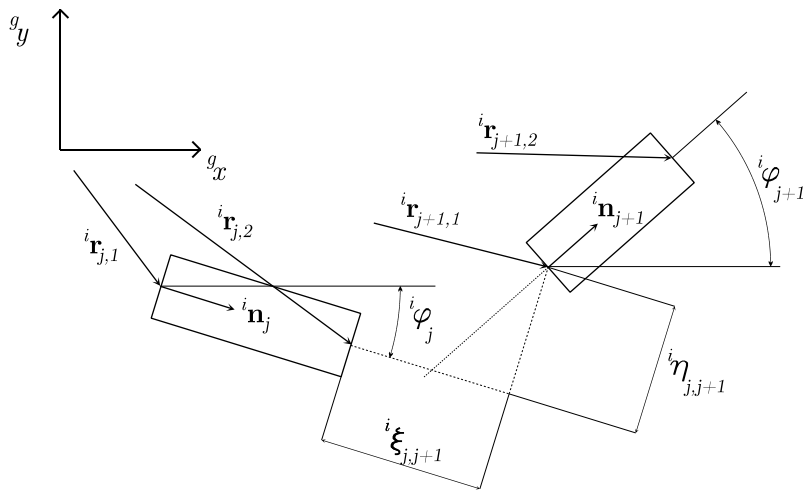
3.1.1 Metoda RFE

K popisu soustavy jsou použity přirozené souřadnice. Představu spojení tělísek poskytuje obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Tuhé tělísko a poddajný element

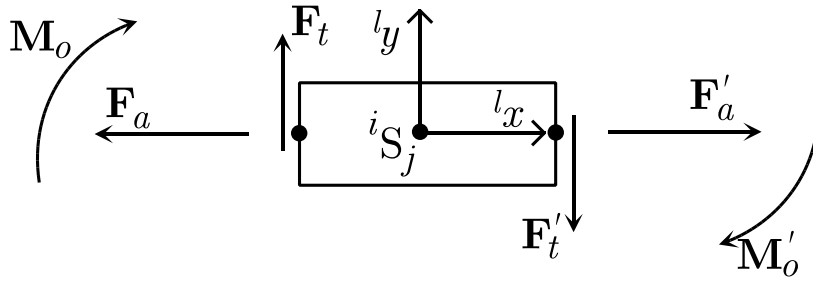
Pro popis polohy každého z tělísek jsou použity dva polohové vektory ${}^i\mathbf{r}_{j,2}$, kde i je těleso, j je číslo tělíska v rámci tělesa a 2 nebo 1 je definiční bod tělíska - jeho konec nebo začátek. Na obrázku 3.2 jsou zakótovány a naznačeny dále používané veličiny.



Obrázek 3.2: Schéma popisu polohy dvou tělísek

g_x, g_y	... osy globálního souřadného systému
${}^i\mathbf{r}_{j,1}, {}^i\mathbf{r}_{j,2}$... polohové vektory počátku a konce tělíska j na tělese i
${}^i\mathbf{n}_j$... směrový vektor tělíska j
${}^i\varphi_j$... úhel směrového vektoru ${}^i\mathbf{n}_j$ od globální osy g_x
${}^i\xi_{j,j+1}$... deformace poddajného elementu mezi tělísky j a $j+1$ měřené ve směru vektoru ${}^i\mathbf{n}_j$
${}^i\eta_{j,j+1}$... deformace poddajného elementu mezi tělísky j a $j+1$ měřené kolmo na směr vektoru ${}^i\mathbf{n}_j$
${}^i\mathbf{r}_{j+1,1}, {}^i\mathbf{r}_{j+1,2}$... polohové vektory tělíska $j+1$ na tělese i
${}^i\mathbf{n}_{j+1}$... směrový vektor tělíska $j+1$
${}^i\varphi_{j+1}$... úhel směrového vektoru ${}^i\mathbf{n}_{j+1}$

Na obrázku 3.3 jsou vyobrazeny silové účinky působící na jedno tělísko.



Obrázek 3.3: Silové účinky působící na tělísko

- l_x, l_y ... osy lokálního souřadného systému
- ${}^i S_j$... těžiště tělíska j na tělese i
- ${}^i l_j$... délka tělíska j na tělese i
- $\mathbf{F}_a, \mathbf{F}'_a$... tahová/tlaková síla působící na tělísko j
- $\mathbf{F}_t, \mathbf{F}'_t$... smyková síla působící na tělísko j
- $\mathbf{M}_o, \mathbf{M}'_o$... ohybový moment působící na tělísko j

3.1.2 Formulace kinetické energie

Kinetická energie j -tého tělíska na i -tém tělese je vyjádřena pomocí Königovy věty ve tvaru [9]

$${}^i E_{k_j} = \frac{1}{2} \left({}^i m_j \cdot {}^i v_{S_j}^2 + {}^i I_{S_j} \cdot {}^i \dot{\varphi}_j^2 \right). \quad (3.1)$$

Pro popis polohy jednotlivých tělísek jsou použity přirozené souřadnice (viz. obrázek 3.2) a polohový vektor ${}^i \mathbf{r}_{S_j}$ příslušný těžišti ${}^i S_j$ lze psát ve tvaru

$${}^i \mathbf{r}_{S_j} = \frac{1}{2} \left({}^i \mathbf{r}_{j,1} + {}^i \mathbf{r}_{j,2} \right). \quad (3.2)$$

Vztah pro kvadrát rychlosti těžiště je dán derivací a následným umocněním vektorové rovnice 3.2

$${}^i v_{S_j}^2 = \frac{1}{4} \left({}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1} + {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} + 2 {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} \right). \quad (3.3)$$

Obecně lze pro průmět délky tuhého tělíska do jednotlivých os psát, že

$$\begin{aligned} {}^i l_j \cdot \cos({}^i \varphi_j) &= {}^i x_{j,2} - {}^i x_{j,1} \\ {}^i l_j \cdot \sin({}^i \varphi_j) &= {}^i y_{j,2} - {}^i y_{j,1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

a po derivaci $\frac{d}{dt}$ dostat rovnice

$$\begin{aligned} -{}^i l_j \cdot \sin({}^i \varphi_j) \cdot {}^i \dot{\varphi}_j &= {}^i \dot{x}_{j,2} - {}^i \dot{x}_{j,1} \\ {}^i l_j \cdot \cos({}^i \varphi_j) \cdot {}^i \dot{\varphi}_j &= {}^i \dot{y}_{j,2} - {}^i \dot{y}_{j,1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Umocněním obou rovnic, jejich sečtením a vydělením obou stran délkou tělíška ${}^i l_j$, vznikne vztah pro kvadrát úhlové rychlosti ve tvaru

$${}^i \dot{\varphi}_j^2 = \frac{1}{{}^i l_j^2} \left(({}^i \dot{x}_{j,2} - {}^i \dot{x}_{j,1})^2 + ({}^i \dot{y}_{j,2} - {}^i \dot{y}_{j,1})^2 \right), \quad (3.6)$$

které lze přepsat do vektorového tvaru

$${}^i \dot{\varphi}_j^2 = \frac{1}{{}^i l_j^2} \left({}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1} + {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} - 2 {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} \right). \quad (3.7)$$

Výsledná kinetická energie celého tělesa i je dána součtem dílčích kinetických energií jednotlivých tělísek, takže

$$\begin{aligned} {}^i E_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{{}^i m_j}{4} \left({}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1} + {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} + 2 {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{{}^i I_{Sj}}{{}^i l_j^2} \left({}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1} + {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} - 2 {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,1}^T {}^i \dot{\mathbf{r}}_{j,2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1.3 Tvorba rovnic dle LRST

Pro dynamické řešení soustavy RFE a SDE jsou využity LRST z kapitoly 2.3 v následujícím tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{r}_j} = \mathbf{Q}_n + \sum_{k=1}^P \lambda_R \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}_j}; \quad n = 1, 2, \dots, s, \quad (3.9)$$

kde s je počet rádius vektorů použitých k popisu soustavy.

3.1.4 Matice soustavy

Aplikací rovnice 3.9 na j -té tělísko na i -tém tělese, popsaném pomocí vektorů ${}^i\mathbf{r}_{j,1}$ a ${}^i\mathbf{r}_{j,2}$ vyplývají vztahy

$$\frac{\partial E_k}{\partial {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{{}^i m_j}{4} (2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1} + 2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2}) + \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2} (2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1} - 2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2}) \right] \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{{}^i m_j}{4} (2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2} + 2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1}) + \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2} (2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2} - 2 \cdot {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1}) \right] \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial {}^i\mathbf{r}_{j,2}} = \frac{\partial E_k}{\partial {}^i\mathbf{r}_{j,1}} = 0.$$

Jak vyplývá z rovnice 3.8, kinetická energie nezávisí na polohovém vektoru, ale pouze na jeho derivaci (rychlosti bodu). Časovou derivací vztahů 3.10 a 3.11 vznikne

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,1}} \right) = \frac{{}^i m_j}{4} ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,1} + {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,2}) + \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2} ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,1} - {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,2}), \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial {}^i\dot{\mathbf{r}}_{j,2}} \right) = \frac{{}^i m_j}{4} ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,2} + {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,1}) + \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2} ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,2} - {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{j,1}). \quad (3.13)$$

Tvar matice ${}^i\mathbf{M}_j$ příslušné tělísku j na tělese i plynoucí z 3.12 a 3.13, lze zjednodušit na

$${}^i\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

kde

$$a = \frac{{}^i m_j}{4} + \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2},$$

$$b = \frac{{}^i m_j}{4} - \frac{{}^i I_{Sj}}{i l_j^2}.$$

Výsledná matice \mathbf{M} celé soustavy je pak diagonálně bloková

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [{}^i\mathbf{M}_j] & & & & \\ & [{}^i\mathbf{M}_{j+1}] & & & \\ & & [{}^{i+1}\mathbf{M}_j] & & \\ & & & [{}^{i+1}\mathbf{M}_{j+1}] & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Soustavu LRST pro RFE metodu lze tak namísto rovnice 3.9 zapsat maticově

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \lambda \cdot \Phi_{(r)}^T. \quad (3.16)$$

3.1.5 Vektor pravé strany - deformační síly

Část vektoru zobecněných sil \mathbf{Q} pravé strany rovnice 3.16, lze nahradit záporně vzatou parciální derivací potenciální energie, elastickou deformací poddajného elementu. Odpor poddajného elementu vůči elastické deformaci je reprezentován kompozitní pružinou s podélnou, příčnou a torzní tuhostí. Potenciální energii kompozitní pružiny mezi tělísky j a $j + 1$ na tělese i lze vyjádřit vztahem

$${}^i E_{p,j,j+1} = \frac{1}{2} {}^i k_{j,j+1} \cdot {}^i \xi_{j,j+1}^2 + \frac{1}{2} {}^i \bar{k}_{j,j+1} \cdot {}^i \eta_{j,j+1}^2 + \frac{1}{2} {}^i \hat{k}_{j,j+1} \cdot {}^i \varphi_{j,j+1}^2, \quad (3.17)$$

kde význam kvadrátů deformací je patrný z obrázku 3.2, k , \bar{k} a \hat{k} jsou podélná, příčná a torzní tuhost poddajného elementu.

Tuhostní parametry poddajného elementu lze na základě rovnic lineární pružnosti vyjádřit takto [4]

$$k = \frac{EA}{\Delta L}, \quad (3.18)$$

$$\bar{k} = \frac{GA}{\Delta L}, \quad (3.19)$$

$$\hat{k} = \frac{EJ_z}{\Delta L}. \quad (3.20)$$

- E ... modul pružnosti v tahu
- G ... modul pružnosti ve smyku
- A ... plocha průřezu
- J_z ... moment setrvačnosti k ose ohybu, v případě 2D, k ose z
- ΔL ... vztažná délka elementu, odpovídající délce ${}^i l_j$

Dále je potřeba vyjádřit jednotkový směrový vektor ${}^i \mathbf{n}_j$ a na něj kolmý vektor ${}^i \hat{\mathbf{n}}_j$

$${}^i \mathbf{n}_j = \frac{{}^i \mathbf{r}_{j,2} - {}^i \mathbf{r}_{j,1}}{{}^i l_j}, \quad (3.21)$$

$${}^i \mathbf{n}_{j+1} = \frac{{}^i \mathbf{r}_{j+1,2} - {}^i \mathbf{r}_{j+1,1}}{{}^i l_j}. \quad (3.22)$$

Pro případ 2D platí transformační vztah pro kolmý vektor

$${}^i\hat{\mathbf{n}}_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^i\mathbf{n}_j. \quad (3.23)$$

Jednotlivé deformace lze pak vyjádřit následovně

$${}^i\xi_{j,j+1} = ({}^i\mathbf{r}_{j+1,1} - {}^i\mathbf{r}_{j,2})^T \cdot {}^i\mathbf{n}_j, \quad (3.24)$$

$${}^i\eta_{j,j+1} = ({}^i\mathbf{r}_{j+1,1} - {}^i\mathbf{r}_{j,2})^T \cdot {}^i\hat{\mathbf{n}}_j. \quad (3.25)$$

Úhel natočení sousedních tělísek lze vyjádřit ze vztahu pro skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi_{ab}$ jako

$${}^i\varphi_{j,j+1} = \arccos \left(\frac{{}^i\mathbf{n}_j \cdot {}^i\mathbf{n}_{j+1}}{|{}^i\mathbf{n}_j| \cdot |{}^i\mathbf{n}_{j+1}|} \right). \quad (3.26)$$

Rozepsáním rovnice 3.17 pomocí odvozených vztahů 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 a 3.26 vyplývá

$$\begin{aligned} {}^iE_{p_{j,j+1}} &= \frac{1}{2} {}^i k_{j,j+1} \cdot \left[\frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} (x_{j+1,1} - x_{j,2}) + \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_j} (y_{j+1,1} - y_{j,2}) \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2} {}^i \bar{k}_{j,j+1} \cdot \left[\frac{y_{j,1} - y_{j,2}}{i l_j} (x_{j+1,1} - x_{j,2}) + \frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} (y_{j+1,1} - y_{j,2}) \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2} {}^i \hat{k}_{j,j+1} \cdot \left[\arccos \left(\frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} \frac{x_{j+1,2} - x_{j+1,1}}{i l_{j+1}} + \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_{j+1}} \frac{y_{j+1,2} - y_{j+1,1}}{i l_{j+1}} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ve vektoru zobecněných sil se dále uplatňují parciální derivace dle $x_{j,1}$, $x_{j,2}$, $x_{j+1,1}$, $x_{j+1,2}$, $y_{j,1}$, $y_{j,2}$, $y_{j+1,1}$ a $y_{j+1,2}$. V derivacích jsou pro zjednodušení použity substituční vztahy

$$dk = {}^i k_{j,j+1} \cdot \left[\frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} (x_{j+1,1} - x_{j,2}) + \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_j} (y_{j+1,1} - y_{j,2}) \right] \quad (3.28)$$

$$\overline{dk} = {}^i \bar{k}_{j,j+1} \cdot \left[\frac{y_{j,1} - y_{j,2}}{i l_j} (x_{j+1,1} - x_{j,2}) + \frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} (y_{j+1,1} - y_{j,2}) \right] \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{dk} &= {}^i \hat{k}_{j,j+1} \cdot \left[\arccos \left(\frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} \frac{x_{j+1,2} - x_{j+1,1}}{i l_{j+1}} + \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_{j+1}} \frac{y_{j+1,2} - y_{j+1,1}}{i l_{j+1}} \right) \right] \\ &\cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} \frac{x_{j+1,2} - x_{j+1,1}}{i l_{j+1}} + \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_{j+1}} \frac{y_{j+1,2} - y_{j+1,1}}{i l_{j+1}} \right)^2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pro jednotlivé parciální derivace lze psát

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial x_{j,1}} = dk \cdot \frac{x_{j,2} - x_{j+1,1}}{i l_j} + \overline{dk} \cdot \frac{y_{j,2} - y_{j+1,1}}{i l_j} + \hat{dk} \cdot \frac{x_{j+1,1} - x_{j+1,2}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial y_{j,1}} = dk \cdot \frac{y_{j,2} - y_{j+1,1}}{i l_j} + \overline{dk} \cdot \frac{x_{j+1,1} - x_{j,2}}{i l_j} + \hat{dk} \cdot \frac{y_{j+1,1} - y_{j+1,2}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial x_{j,2}} &= dk \cdot \left(\frac{x_{j+1,1} - x_{j,2}}{i l_j} + \frac{x_{j,1} - x_{j,2}}{i l_j} \right) + \overline{dk} \cdot \left(\frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_j} + \frac{y_{j+1,1} - y_{j,2}}{i l_j} \right) \\ &+ \hat{dk} \cdot \left(\frac{x_{j+1,2} - x_{j+1,1}}{i l_j \cdot i l_{j+1}} \right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial y_{j,2}} &= dk \cdot \left(\frac{y_{j+1,1} - y_{j,2}}{i l_j} + \frac{y_{j,1} - y_{j,2}}{i l_j} \right) + \overline{dk} \cdot \left(\frac{x_{j,2} - x_{j+1,1}}{i l_j} + \frac{x_{j,1} - x_{j,2}}{i l_j} \right) \\ &+ \hat{dk} \cdot \left(\frac{y_{j+1,2} - y_{j+1,1}}{i l_j \cdot i l_{j+1}} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial x_{j+1,1}} = dk \cdot \frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} + \overline{dk} \cdot \frac{y_{j,1} - y_{j,2}}{i l_j} + \hat{dk} \cdot \frac{x_{j,1} - x_{j,2}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial y_{j+1,1}} = dk \cdot \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_j} + \overline{dk} \cdot \frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j} + \hat{dk} \cdot \frac{y_{j,1} - y_{j,2}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial x_{j+1,2}} = 0 + 0 + \hat{dk} \cdot \frac{x_{j,2} - x_{j,1}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^i E_{p_{j,j+1}}}{\partial y_{j+1,2}} = 0 + 0 + \hat{dk} \cdot \frac{y_{j,2} - y_{j,1}}{i l_j \cdot i l_{j+1}}. \quad (3.38)$$

3.1.6 Vliv sil tíže

Vliv tíhových sil je zahrnut pomocí principu virtuálních prací (dále jen PVP) [2, 9].

$${}^i \mathbf{Q}_{x_{j,1}} \cdot \delta^i x_{j,1} + {}^i \mathbf{Q}_{y_{j,1}} \cdot \delta^i y_{j,1} + {}^i \mathbf{Q}_{x_{j,2}} \cdot \delta^i x_{j,2} + {}^i \mathbf{Q}_{y_{j,2}} \cdot \delta^i y_{j,2} = - {}^i m_j \cdot \mathbf{g} \cdot \delta^i y_{s_1}, \quad (3.39)$$

kde ${}^i y_{s_1} = \frac{1}{2}({}^i y_{j,1} + {}^i y_{j,2})$ a výsledný vektor tíhového zatížení tělíska j je tedy

$${}^i \mathbf{Q}_j = \left[0; -\frac{1}{2} {}^i m_j \cdot \mathbf{g}; 0; -\frac{1}{2} {}^i m_j \cdot \mathbf{g} \right]^T. \quad (3.40)$$

3.1.7 Rovnice vazeb

Vazebné rovnice jsou formulovány ve smyslu LRST, daném předpisem 2.14. Následují příklady některých běžných vazeb.

Rotační vazba tělesa 2 k počátku globálního souřadného systému (dále jen GSS)

$$\begin{aligned} f_1 : {}^2x_{1,1} &= 0, \\ f_2 : {}^2y_{1,1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Rotační vazba tělesa 2 s tělesem 3

$$\begin{aligned} f_3 : {}^2x_{n,2} - {}^3x_{1,1} &= 0, \\ f_4 : {}^2y_{n,2} - {}^3y_{1,1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Navíc je třeba přidat podmínku tuhosti pro každý RFE, kterou lze formulovat ve tvaru

$$f_5 : ({}^i x_{j,2} - {}^i x_{j,1})^2 + ({}^i y_{j,2} - {}^i y_{j,1})^2 - {}^i l_j^2 = 0. \quad (3.43)$$

Vazeb ve smyslu 3.43 je potřeba sestavit pro každé těleso právě ${}^i n_j$, kde ${}^i n_j$ značí celkový počet tuhých tělísek na tělese i .

3.1.8 Výsledná soustav rovnic

Výsledná soustava rovnic je složena z diferenciálně algebraických rovnic, ta je následně převedena na soustavu ODR s použitím Baumgartovy stabilizace, jak naznačeno v kapitole 2.4.1.

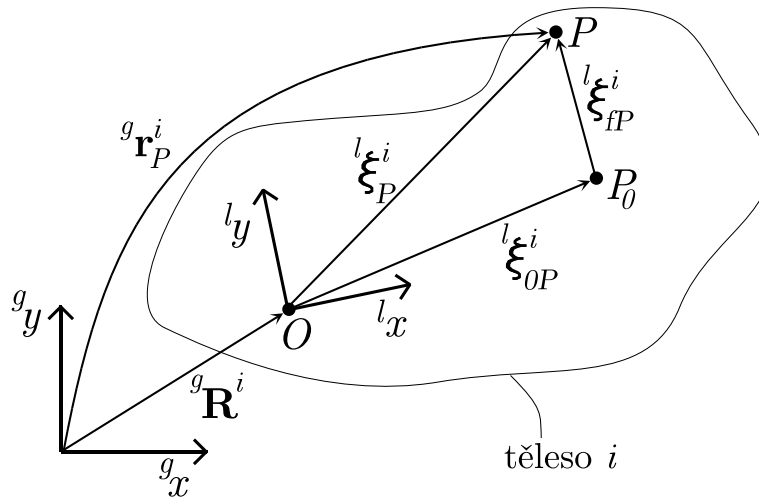
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{(\mathbf{r})}^T \\ \Phi_{(\mathbf{r})} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ -\lambda_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ -\dot{\Phi}_{(\mathbf{r})} \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{2}\alpha \Phi_{(\mathbf{r})} \mathbf{r} - \beta^2 \mathbf{f} \end{bmatrix},$$

kde vektor \mathbf{p}_1 se skládá z příspěvků potenciální energie deformovaných pružných elementů, sil tíže a dalších silových účinků, přepočítaných dle PVP.

3.2 Metoda tvarových funkcí, MBS flex

Metoda Multi-body system flexible (dále jen MBS flex) využívá jiného deformačního modelu než metoda RFE. Deformace polohového vektoru bodu je obecně závislá na poloze v rámci tělesa i na čase. Deformační model vychází z předpokladu, že lze deformaci rádius vektoru popsat jako součin dvou oddělených funkcí, kde jedna je závislá pouze na poloze a druhá pouze na čase. Popis metody je proveden pro 2D na základě [9, 10, 8], pokud není uvedeno jinak.

3.2.1 Metoda MBS flex



Obrázek 3.4: Schéma dvou tělísek

- g_x, g_y ... osy GSS
- l_x, l_y ... osy LSS
- $g_{\mathbf{r}}^i$... rádius vektor počátku lokálního souřadného systému tělesa i v globálních souřadnicích
- $l_{\xi_{0P}}^i$... poloha nezdeformovaného bodu P tělesa i
- $l_{\xi_{fP}}^i$... deformace polohy bodu P
- $l_{\xi_P}^i$... poloha bodu P po deformaci
- $g_{\mathbf{r}}^i$... poloha libovolného bodu P vyjádřena v GSS

3.2.2 Deformační model

Deformace rádius vektoru bodu P je vyjádřena jako součin tvarové funkce tělesa a modálních, poddajných souřadnic

$${}^l\xi_{fP} = A(x, y) \cdot \mathbf{q}_f(t). \quad (3.44)$$

kde $A(x, y)$ je matice tvarových funkcí, matice tělesa a $q_f(t)$ jsou modální, poddajné souřadnice. Souřadnice q_f nemají žádný přímý fyzikální význam, ale dají se chápat jako koeficienty, které říkají jak moc je daná tvarová funkce (sloupec matice A) v dané chvíli zastoupena. Jedná se tedy o problém, kdy je známa báze řešení - matice A , a neznámé jsou koeficienty lineární kombinace. Rovnice 3.44, rozepsaná do vektorového složkového zápisu pro jeden bod na tělese vypadá následovně

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} f_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_n \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

přičemž n je počet funkcí použitých k popisu deformace.

Tvarové funkce

Vyjádření tvarových funkcí tělesa nemusí být vždy jednoduché. Závisí jak na typu tělesa, tak na jeho vazbách či uložení. Protože se v praktické části této bakalářské práce využívá výhradně těles typu nosník na dvou kloubových podpěrách, tvarové funkce dostávají jednodušší, analyticky vyjádřitelnou podobu. Vlnovými rovnicemi těles se podrobněji zabývá [3].

Dále odvozené vztahy platí pro štíhlý nosník, jehož ohyb probíhá v jedné ze dvou na sebe kolmých hlavních os setrvačnosti. Dále je nutná platnost malých deformací, plochá ohybová křivka (kvůli zjednodušení Bernoulliho rovnice obecné křivky [4]) a posuv elementů ve směru jiném než je směr průhybu se zanedbává. Řešení problému kmitů takto definovaného nosníku lze pak vyjádřit pomocí Rayleighových funkcí [3]. Při aplikaci okrajové podmínky typu kloub na obou koncích nosníku, lze n -tý tvar kmitu vyjádřit jako

$$w_{0n}(x) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.46)$$

Matici tvarových funkcí $A(x)$ lze pro nosník oboustranně prostě podepřený vyjádřit jako

$$A^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi(i-1)}{n_i-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{2\pi(i-1)}{n_i-1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{n_t \pi(i-1)}{n_i-1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi(n_i-2)}{n_i-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{2\pi(n_i-2)}{n_i-1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{n_t \pi(n_i-2)}{n_i-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

kde n_i je celkový počet diskretních bodů rovnoměrně rozložených na tělese a n_t je počet uvažovaných tvarů kmitu, což odpovídá n funkcím použitých k popisu deformace v rovnici 3.45.

3.2.3 Polohový vektor deformovaného tělesa

Poloha libovolného bodu na zdeformovaném tělese i je dána vztahem

$${}^l \xi_P^i = {}^l \xi_{0P}^i + {}^l \xi_{fP}^i = {}^l \xi_{0P}^i + A^i \cdot \mathbf{q}_f^i(t). \quad (3.48)$$

Převedením do GSS pomocí transformační matice $S^i(\varphi^i)$ a přičtením rádius vektoru počátku LSS vyjádřeném v GSS vznikne vztah

$${}^g \mathbf{r}_p^i = {}^g \mathbf{R}^i + S^i \left({}^l \xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i(t) \right). \quad (3.49)$$

Pro popis polohy jakéhokoliv bodu na tělese i jsou použity souřadnice \mathbf{q} , skládající se z polohy počátku LSS tělesa (2 polohy a 1 natočení pro 2D kartézský souřadnicový systém) a n deformačních souřadnic \mathbf{q}_f .

3.2.4 Rychlost deformovaného tělesa

Rychlost tělesa vyplývá z časové derivace rovnice 3.49

$$\frac{d}{dt} ({}^g \mathbf{r}_p^i) = \frac{d}{dt} ({}^g \mathbf{R}^i + S^i \cdot {}^l \xi_P^i) = \frac{d}{dt} ({}^g \mathbf{R}^i + S^i ({}^l \xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i(t))), \quad (3.50)$$

kde však S^i i ${}^l \xi_P^i$ jsou funkcí času a jde tedy o derivaci součinu, tudíž

$$\frac{d}{dt} (S^i) {}^l \xi_P^i = S^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot {}^l \xi_P^i \cdot \dot{\varphi}^i = B^i \cdot \dot{\varphi}^i, \quad (3.51)$$

kde $\hat{\mathbf{E}}_2$ je tzv. antisymetrický operátor, pro který platí, že

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{S}^i = \mathbf{S}^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2,$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Rychlost bodu tak lze psát jako

$${}^g \dot{\mathbf{r}}_p^i = {}^g \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{B}^i \cdot \dot{\varphi}^i + \mathbf{S}^i \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i = \begin{bmatrix} E^2 & \mathbf{B}^i & \mathbf{S}^i \mathbf{A}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^g \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\varphi}^i \\ \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

tedy

$${}^g \dot{\mathbf{r}}_p^i = \mathbf{L}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i. \quad (3.55)$$

3.2.5 Kinetická energie zdeformovaného tělesa

Pro aplikaci LRST je zcela zásadní znalost kinetické energie soustavy. Pro metodu MBS se vychází z vektorového tvaru pro E_k . Kinetická energie tělesa je definována jako

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int ({}^g \dot{\mathbf{r}}_p^i)^T ({}^g \dot{\mathbf{r}}_p^i) \cdot \rho \cdot dV^i \\ &= \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} {}^g \dot{\mathbf{R}}^{iT} & \dot{\varphi}^i & \dot{\mathbf{q}}_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^2 \\ (\mathbf{S}^i \hat{\mathbf{E}}_2 {}^l \xi_P^i)^T \\ (\mathbf{S}^i \mathbf{A}^i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^2 & \mathbf{S}^i \hat{\mathbf{E}}_2 {}^l \xi_P^i & \mathbf{S}^i \mathbf{A}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^g \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\varphi}^i \\ \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot dV^i \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} \cdot \mathbf{M}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i. \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.2.6 Matice M

Z rovnice 3.56 vyplývá vztah pro matici $\mathbf{M}^i(\mathbf{q})$. Při uvažování jednorozměrného tělesa stálého průřezu (např. již zmíněný štíhlý nosník), lze dojít k následujícímu zjednodušení

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^i(\mathbf{q}) &= \rho \cdot A_{pl} \begin{bmatrix} E^2 \int_0^L dx & S^i \hat{\mathbf{E}}_2 \int_0^L (\xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i) \cdot dx & S^i \int_0^L A^i \cdot dx \\ \text{symetr} & \int_0^L \xi_P^T \cdot \xi_P \cdot dx & \int_0^L \xi_P^T \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^T \cdot A^i \cdot dx \\ & & \int_0^L A^{iT} \cdot A^i \cdot dx \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{R\varphi} & m_{Rf} \\ \vdots & m_{\varphi\varphi} & m_{\varphi f} \\ \dots & \dots & m_{ff} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Hledání primitivních funkcí v jednotlivých integrálech vyjadřujících jednotlivé členy matice M se ukazuje jako komplikované a obecně analyticky nevyjádřitelné. Integrace je tedy provedena numerickou obdélníkovou metodou, tedy nahrazením integrálu sumou přes známé diskrétní body, kde jsou hodnoty funkcí vyjádřitelné. Zároveň se pro jednoduchost předpokládá rovnoměrné rozložení bodů po délce L^i . Diskrétní bod je reprezentován indexem j a jejich celkové množství je n_j .

Pro zjednodušení je ve vztazích zavedena substituce

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{L^i}{n_j - 1} \\ \xi_{0j} &= \begin{bmatrix} \frac{j-1}{n_j-1} L^i \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jednotlivé členy matice lze pak psát následovně

$$m_{RR} = E^2 \int_0^L dx = E^2 \cdot L, \quad (3.58)$$

$$m_{R\varphi} = S^i \hat{\mathbf{E}}_2 \int_0^L (\xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i) \cdot dx \approx S^i \hat{\mathbf{E}}_2 \left(\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{n_j} A_j^i \mathbf{q}_{fj}^i \right), \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} m_{\varphi\varphi} &= \int_0^L (\xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i)^T (\xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i) \cdot dx \approx \frac{L^3}{3} + \sum_{j=1}^{n_j} \xi_{0j}^T \cdot A_j^i \mathbf{q}_{fj}^i \cdot \Delta x + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_j} \mathbf{q}_{fj}^{iT} A_j^{iT} \cdot \xi_{0j} \cdot \Delta x + \sum_{j=1}^{n_j} \mathbf{q}_{fj}^{iT} A_j^{iT} \cdot A_j^i \mathbf{q}_{fj}^i \cdot \Delta x, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$m_{Rf} = S^i \int_0^L A^i \cdot dx \approx S^i \sum_{j=1}^{n_j} A_j^i \cdot \Delta x, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} m_{\varphi f} &= \int_0^L (\xi_{0P}^i + A^i \mathbf{q}_f^i)^T \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^T \cdot A^i \cdot dx \approx \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_j} \xi_{0j}^T \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^T \cdot A_j^i \cdot \Delta x + \sum_{j=1}^{n_j} \mathbf{q}_{fj}^{iT} A_j^{iT} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^T \cdot A_j^i \cdot \Delta x, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$m_{ff} = \int_0^L A^{iT} \cdot A^i \cdot dx \approx \sum_{j=1}^{n_j} A_j^{iT} \cdot A_j^i \cdot \Delta x, \quad (3.63)$$

kde matice A_j^i rozměru $(2 \times 2n_t)$ a vektor \mathbf{q}_{fj}^i rozměru $(2n_t \times 1)$ jsou odpovídající vždy danému bodu a jsou tedy pouze částí úplné matice/vektoru.

3.2.7 Zobecněné síly deformace

Deformační funkce je třeba svázat se silami od elastické deformace, pomocí variace vyjádření deformační energie. Pokud je uvažován pouze ohyb, lze vyjádřit deformační energii následujícím postupem.

Sloučením vztahů 3.44 a 3.46 lze psát

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n \cdot x}{L}\right) \cdot q_n(t). \quad (3.64)$$

Použitím základních vztahů Pružnosti a pevnosti, jak uvádí například [4], lze použít Bernoulliova diferenciální rovnici průhybové čáry pro rovinný ohyb jako

$$y''(x) = -\frac{M_o}{EJ} \quad (3.65)$$

a vztah pro ohybové napětí

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}. \quad (3.66)$$

Spojením vztahů 3.64 a 3.66 je získáno

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{\sigma_o \cdot W_o}{EJ_o} = \frac{E \varepsilon_x \cdot J_o}{EJ_o \cdot \eta} \implies \varepsilon_x = -\eta \cdot y'', \\ \varepsilon_x &= -\eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dle matematické teorie pružnosti [5] lze psát

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV, \quad (3.68)$$

odkud pak po dosazení vztahu 3.67, Hookeova zákona [4] $\sigma = \varepsilon \cdot E$ a při uvažování prutu konstantního průřezu vyplývá

$$\frac{1}{2} \int \left(\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right)^T \cdot E \left(\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) A_{pl} \cdot dx = A_{pl} \cdot \eta^2 \cdot E \cdot \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx, \quad (3.69)$$

kde $A_{pl} \cdot \eta^2 = 2 \cdot J_o$ a při zahrnutí vztahu 3.64 vzniká vztah pro deformační energii

$$U = EJ_o \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} \right) dx. \quad (3.70)$$

Pro konečný počet tvarů kmitu lze y_n vyjádřit pomocí vztahu 3.44 a pro diskrétní body psát

$$U = \mathbf{q}_f^{iT} \cdot EJ \cdot \sum_{j=1}^{n_j} \left[A_j^{i''T} \cdot A_j^{i''} \right] \cdot \mathbf{q}_f^i. \quad (3.71)$$

Vztah $EJ_o \cdot \sum_{j=1}^{n_j} \left[A_j^{i''T} \cdot A_j^{i''} \right]$ se označí jako matice K_{ff}^i a celá rovnice se variuje, takže,

$$\delta U = \delta \mathbf{q}_f^{iT} \cdot K_{ff}^i \cdot \mathbf{q}_f^i \quad (3.72)$$

Formálně pak lze psát formuli pro zobecněnou sílu od deformace jako

$$Q_k^i = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ff}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i \\ \varphi^i \\ \mathbf{q}_f^i \end{bmatrix} = \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{q}^i. \quad (3.73)$$

3.2.8 Zobecněné vnější síly

Práci vnějších sil Q^i působících na těleso i na souřadnici q^i lze vyjádřit po variaci jako

$$\delta W^i = Q_e^{iT} \cdot \delta \mathbf{q}^i. \quad (3.74)$$

Při rozepsání jednotlivých složek pak

$$\delta W^i = \begin{bmatrix} Q_R^{iT} & Q_\varphi^{iT} & Q_f^{iT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \varphi^i \\ \delta \mathbf{q}_f^i \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Pro působení posuvné síly ${}^g F_i$ na těleso i v bodě P popsaném polohovým vektorem ${}^g r_P^i$ lze tak psát

$$\delta W^i = {}^g F_i \cdot \delta {}^g r_P^i, \quad (3.76)$$

kde variaci rádius vektoru lze popsat podobným vztahem jako 3.54 či 3.55, pouze se časová derivace nahradí symbolem variace δ , takže pro variaci mechanické práce vyplývá

$$\delta W^i = {}^g F_i \cdot \begin{bmatrix} E^2 & B^i & S^i A^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \varphi^i \\ \delta \mathbf{q}_f^i \end{bmatrix} = \mathbf{L}^i \cdot \delta \mathbf{q}^i. \quad (3.77)$$

Složkově lze tak rozepsat vektor zobecněné síly následovně

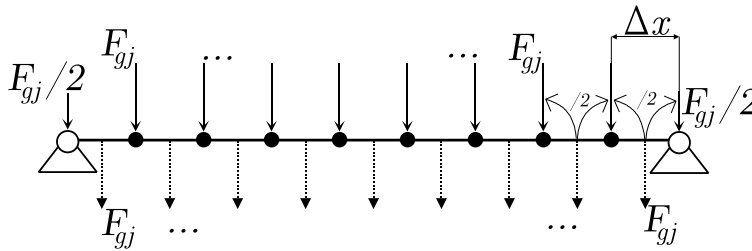
$$Q_R^{iT} = {}^g F_i, \quad (3.78)$$

$$Q_\varphi^{iT} = {}^g F_i \cdot B^i, \quad (3.79)$$

$$Q_f^{iT} = {}^g F_i \cdot S^i A^i. \quad (3.80)$$

■ Vliv sil tíže

Jak patrně z obrázku 3.5, síly tíže působí ve středu elementu (v jeho těžišti), tudíž mimo diskretizované body tělesa. Tuto sílu lze rozdělit na dva sousední body. Tím pádem jsou všechny body zatíženy tíhou celého jednoho elementu, kromě bodů krajních, které nesou pouze polovinu tíhy jednoho elementu.



Obrázek 3.5: Rozložení sil tíže

Tíhu jednoho elementu lze snadno vyjádřit vztahem

$$F_{gj} = \Delta x \cdot A_{pl} \cdot \rho g. \quad (3.81)$$

■ 3.2.9 Kinematické vazby

Stejně jako u metody RFE budou vazbové rovnice formulovány ve smyslu LRST, tedy předpisem 2.14.

■ Rotační vazba

Rotační vazbu lze formulovat jako polohový vektor mezi dvěma body na dvou tělesech i a j , který má v případě ideální vazby nulové obě složky, takže

$$f_{rot} : {}^g r^{ij} = {}^g \mathbf{R}^i + \mathbf{S}^i \cdot {}^l \xi_P^i - {}^g \mathbf{R}^j - \mathbf{S}^j \cdot {}^l \xi_P^j = \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

Pro virtuální změnu musí platit

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \stackrel{!}{=} 0 \implies \Phi \cdot \delta q \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.83)$$

takže

$$\mathbf{L}^i \cdot \delta \mathbf{q}^i - \mathbf{L}^j \cdot \delta \mathbf{q}^j = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

a po maticovém přepisu do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}^i & -\mathbf{L}^j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^i \\ \delta \mathbf{q}^j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

vyplyne Jakobián pro rotační vazbu dvou těles ve tvaru

$$\Phi_{rot}^{ij} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{L}^i & -\mathbf{L}^j \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Pro aplikaci Baumgartovy stabilizace je třeba ještě odvodit časovou derivaci Jakobiánu, respektive matici $\dot{\mathbf{L}}^i$, neboť $\dot{\Phi}_{rot}^{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{L}}^i & -\dot{\mathbf{L}}^j \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}^i) = \begin{bmatrix} 0; & \mathbf{S}^i \cdot \dot{\varphi}^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot ({}^l \xi_P^i + \mathbf{A}^i \mathbf{q}_f^i) + \mathbf{S}^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot (\mathbf{A}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i); & \mathbf{S}^i \cdot \dot{\varphi}^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot \mathbf{A}^i \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

■ Rotační vazba k rámu

Obecně nemusí být těleso vazbeno k rámu v počátku globálního systému, ale v obecném bodě daném dvojicí souřadnic x_0 a y_0 . Vazbová rovnice pro rotační vazbu k rámu má tvar

$$f_{ram} : {}^g \mathbf{R}^i + \mathbf{S}^i \cdot {}^l \xi_P^i - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.88)$$

Jakobián takové vazby je pak pouze jedna matice $\mathbf{L}^i = \Phi_{ram}^i$.

3.2.10 Pohybové rovnice MBS flexible

Pro jedno těleso platí LRST ve tvaru podobném jako 3.9

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{Q}^i + \Phi^{iT} \lambda, \quad (3.89)$$

kde kinetická energie je vyjádřena vztahem 3.56, kde matice tělesa \mathbf{M}^i je obecně funkcí času i souřadnic, ale již ne derivací souřadnic. Pro jednotlivé členy LRST tak lze psát

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i) = \mathbf{M}^i \cdot \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{M}}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i, \quad (3.90)$$

$$\left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} \cdot \mathbf{M}^i \cdot \dot{\mathbf{q}}^i \right) \right]^T = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^{iT} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}^i}{\partial \mathbf{q}^i} \cdot \dot{\mathbf{q}}^i \right)^T. \quad (3.91)$$

Po převedení členů neobsahujících druhou derivaci souřadnice na pravou stranu rovnice, vznikne vektor označovaný \mathbf{Q}_v^i , který reprezentuje přídatné silové účinky, např. Coriolisovy síly.

Pro i -té těleso tak vyplývá rovnice ve tvaru

$$\mathbf{M}^i \cdot \ddot{\mathbf{q}}^i - \Phi^{iT} \lambda = \mathbf{Q}_v^i + \mathbf{Q}_e^i - \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{q}^i \quad (3.92)$$

a po připojení vazbových rovnic $\mathbf{F}(q, t)$ s použitím Baumgartovy stabilizace (rovnice 2.24) lze zapsat algebraicko-diferenciální soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^i & \Phi^{iT} \\ \Phi^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^i \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v^i + \mathbf{Q}_e^i - \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{q}^i \\ -\dot{\Phi} \dot{\mathbf{q}} - 2\alpha \Phi \mathbf{q} - \beta^2 \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

Soustavu algebraicko-diferenciálních rovnic lze převést na soustavu ODR způsobem uváděným v části 2.4.1.

3.3 Hodnocení metod

Deformační model metody poddajných tělísek je snadno představitelný, jelikož jde o přímou fyzikální diskretizaci, avšak úskalí v porovnání s metodou MBS lze nalézt hned několik. Z odvození v sekci 3.1 je patrné, že vzniklá soustava rovnic velice rychle nabývá na velikosti, která samozřejmě závisí jak na celkovém počtu těles, tak na počtu diskretních tělísek. Každé tělísko v soustavě je popsáno čtyřmi přirozenými souřadnicemi a po převedení soustavy celkový počet proměnných popisujících polohu a rychlost tělísek je $2 \cdot 4 \cdot n_{i_{celk}}$. K tomu navíc připadá na každé tělísko podmínka tuhosti, tedy celkem $n_{i_{celk}}$ Lagrangeových multiplikátorů. S tak velkým množstvím proměnných narůstá výpočetní čas, je obtížnější definice počátečních podmínek i interpretace výsledků. Výpočetní čas také rapidně narůstá, pokud tělesa v soustavě mají vysoké tuhostí parametry, tedy průřezových charakteristik a materiálových vlastností. Numericky se totiž soustava dostává blízko singulárním bodům a numerické iterace tak probíhají s minimálním časovým krokem kvůli udržení dostatečné přesnosti. Zároveň se v některých případech může jako problematická ukázat absence úhlu natočení tělíska jako proměnného parametru. Nejen, že se musí numericky ošetřit definiční obor funkce arccos objevující se v rovnici 3.26, ale i jinak prostá kinematická podmínka konstantních otáček naráží na numerickou nespojitost a je třeba enormně zvyšovat Baumgartovy stabilizační koeficienty α a β , za účelem vyhlazení průběhu požadované úhlové rychlosti. Použití metody RFE se tak zdá být vhodné pro tělesa, u kterých lze dopředu očekávat znatelné deformace. Z hlediska náročnosti i času je tedy výhodné kombinovat poddajné tělesa s tělesy tuhými, na které lze snáze aplikovat kinematické podmínky.

Metoda označovaná v této práci jako MBS flex může být oproti metodě RFE zpočátku složitější na pochopení. Při aplikaci na dlouhé štíhlé nosníky, lze zjednodušeně uvažovat pouze ohybové deformace jako v kapitole 3.2. Přesnost výpočtu však mnohem více závisí na počtu použitých vlastních tvarů kmitu. Na základě vztahu 3.64 lze celý deformační model připodobnit součtu Fourierovy řady, který sice vyjadřuje přesné řešení, ale v reálném výpočtu je potřeba dojít k celočíselné mezi, která ve výsledku určuje přesnost lineární kombinace. Zvyšování počtu uvažovaných tvarových funkcí s přesností roste i čas, ale zároveň počet zahrnutých tvarů musí být nejméně o dva menší než je počet diskretních bodů na tělese. Pokud by byl menší, docházelo by k singularitě matice soustavy a nebylo by tedy možné dojít k numerickému řešení. Přesnost dále může ovlivňovat fakt, že integrály vystupující v matici \mathbf{M} jsou pouze přibližně nahrazeny numerickou integrací obdélníkovou metodou. Zvýšení počtu počítaných bodů na tělese zjemní dělení intervalu délky tělesa a výsledek numerické integrace bude o to přesnější. Odvození jednotlivých vyžadují více kroků, které jsou často komplexnější než u metody poddajných tělísek např. matice K_{ff} ve srovnání s potenciální energií pružiny. Oproti

metodě RFE obsahuje výsledná soustava méně proměnných a je tak snadnější na interpretaci i definici počátečních podmínek, kdy stačí definovat pouze polohu a rychlost počátku tělesa a při předpokladu nezdeformované soustavy na začátku děje lze modální poddajné souřadnice i jejich derivace vzít jako nulové.

Část II

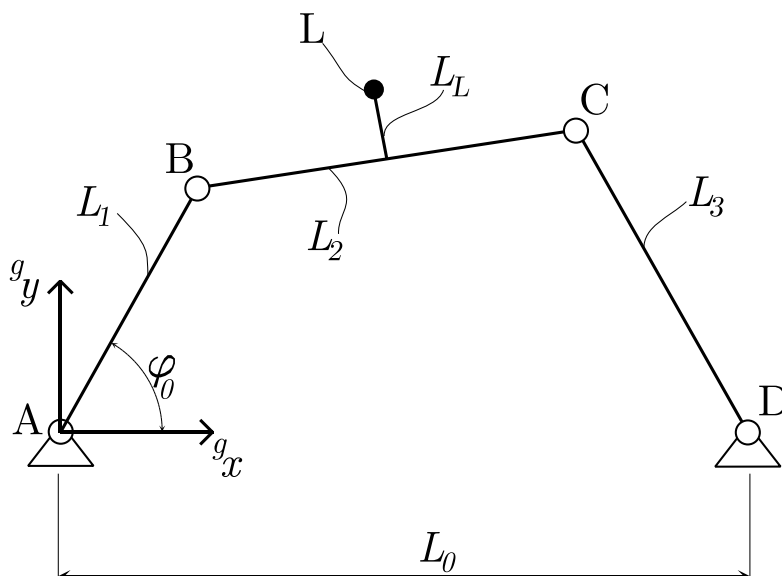
Praktická aplikace

Kapitola 4

Dynamická analýza rovinného čtyř-klobového mechanismu

4.1 Úvod

V této části je analyzován zadaný čtyř-klobový mechanismus, jehož schéma je na obrázku 4.1



Obrázek 4.1: Schéma čtyř-klobového mechanismu

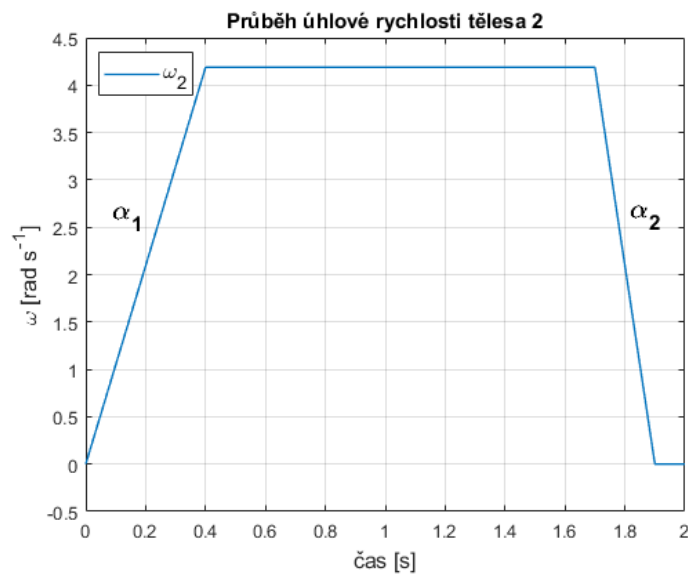
4.2 Definice parametrů rovinného čtyř-klobového mechanismu

Na základě obrázku 4.1 jsou tabulkou 4.1 určeny geometrické parametry čtyř-klobového mechanismu.

Parametr		Hodnota
L_0	=	2,5 m
L_2	=	1,2 m
L_3	=	1,8 m
L_4	=	2 m
L_L	=	0,5 m
φ_0	=	60°

Tabulka 4.1: Parametry čtyř-klobového mechanismu

Dále je určen průběh úhlové rychlosti tělesa 2, viz obrázek 4.2. Z klidového stavu je těleso urychlováno zrychlením α_1 na $40 \text{ ot/min} \doteq 4,19 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, kde setrvává, a následně je zastaveno zrychlením α_2 .



Obrázek 4.2: Průběh úhlové rychlosti ω_2

Tělesa čtyř-klobového mechanismu jsou uvažována jako kruhové tyče příslušných délek o průřezu 10 mm , vyrobené z oceli s modulem pružnosti $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ a modulem pružnosti ve smyku $G = 0,81 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Hustota oceli $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a gravitační konstanta $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Kapitola 5

Výstupy výpočtu

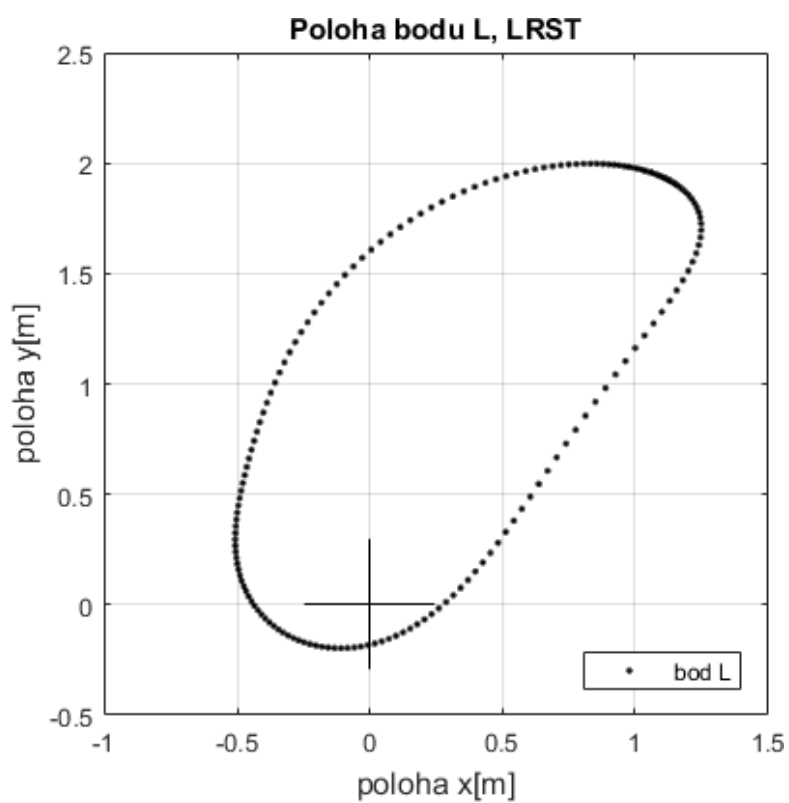
Výstupem každého výpočtu bude poloha, rychlost a zrychlení bodu L (viz obr.4.1), míra splnění předepsaných vazeb a průběh mechanické energie v soustavě. Pro soustavu tuhých těles a metodu RFE jsou navíc na základě Lagrangeových multiplikátorů vykresleny průběhy reakcí v jednotlivých rotačních vazbách.

5.1 Soustava tuhých těles

Pro výpočet soustavy s tuhými tělesy bylo využito LRST. Výstupy jsou následující.

5.1.1 Trajektorie bodu L

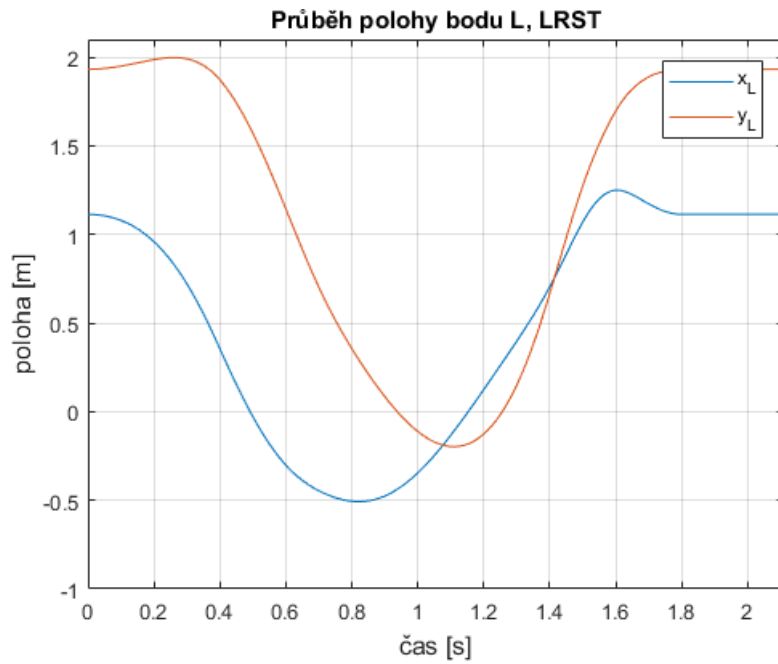
Na obrázku 5.1 je vyznačena trajektorie opsaná bodem L.



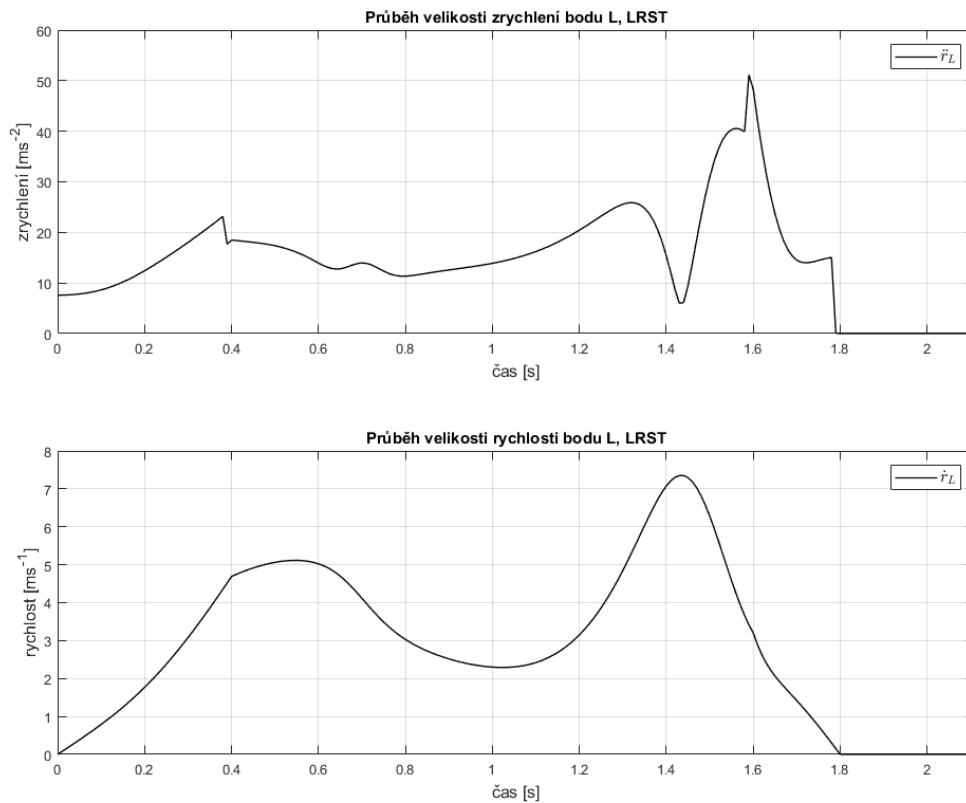
Obrázek 5.1: Trajektorie bodu L, LRST

■ 5.1.2 Rádus vektor bodu L

Časový průběh polohových souřadnic x_L, y_L definující polohový vektor r_L je na obrázku 5.2, průběh velikosti vektoru rychlosti \dot{r}_L a velikosti vektoru zrychlení \ddot{r}_L je vykreslen na obrázku 5.3 .



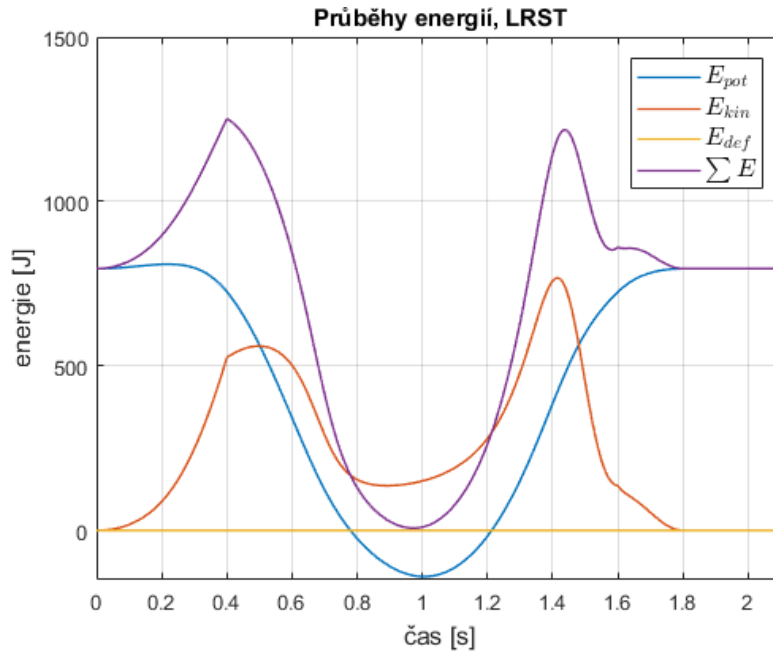
Obrázek 5.2: Průběh polohy bodu L v GSS, LRST



Obrázek 5.3: Průběh rychlostí a zrychlení, LRST

5.1.3 Mechanická energie

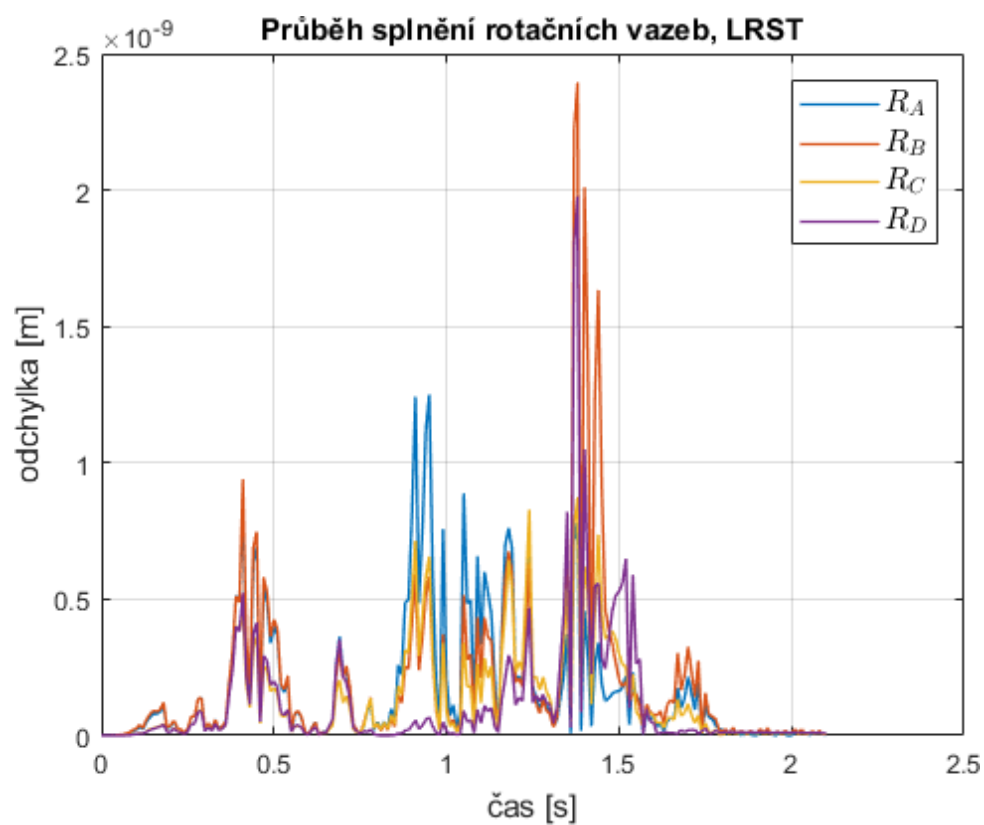
Mechanická energie v soustavě se dělí na kinetickou složku E_{kin} , potenciální složku tíhy E_{pot} , deformační energii uloženou v elasticky zdeformovaném tělese E_{def} a energii dodanou ve formě mechanické práce od hnacího momentu na tělese 2. Průběh těchto energií je na obrázku 5.4. Průběh $\sum E$ je součet kinetické, potenciální a deformační složky.



Obrázek 5.4: Průběh mechanické energie, LRST

5.1.4 Kontrola vazeb

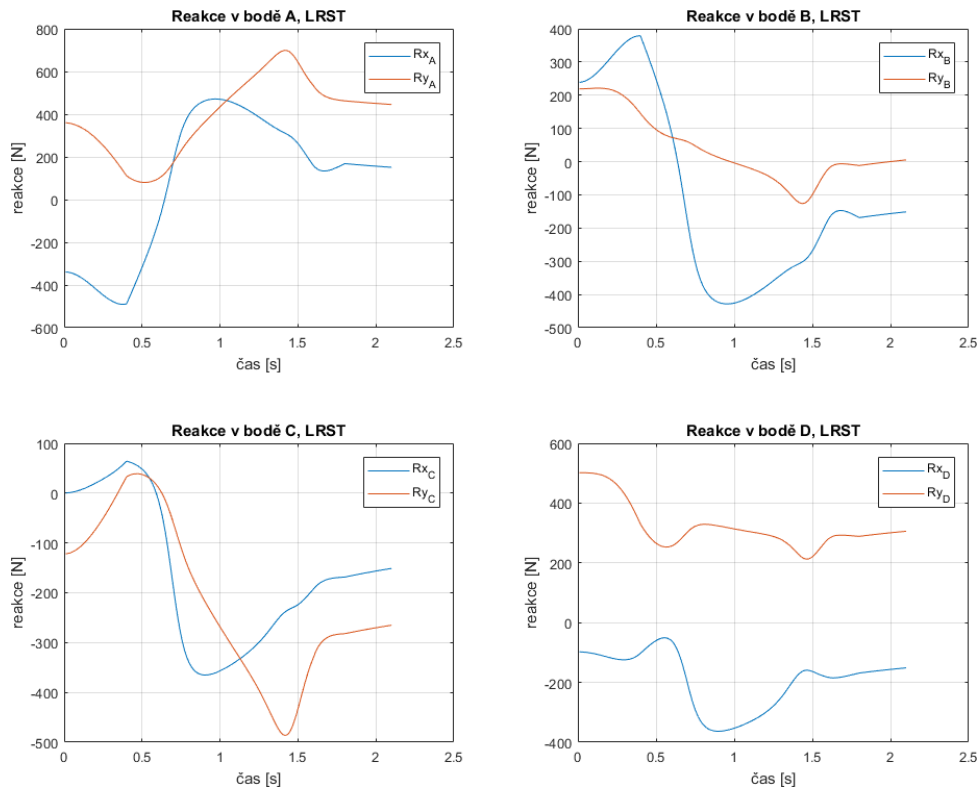
Vazbové rovnice stabilizované Baumgartovou stabilizační metodou je potřeba kontrolovat a obrázek 5.5 v tomto případě ukazuje vzdálenost rotačně svázaných bodů v místech A, B, C a D.



Obrázek 5.5: Míra nesplnění vazby, LRST

5.1.5 Reakce ve vazbách

Průběh velikosti reakčních účinků rotačních vazeb v bodech A až D je uveden na obrázku 5.6.



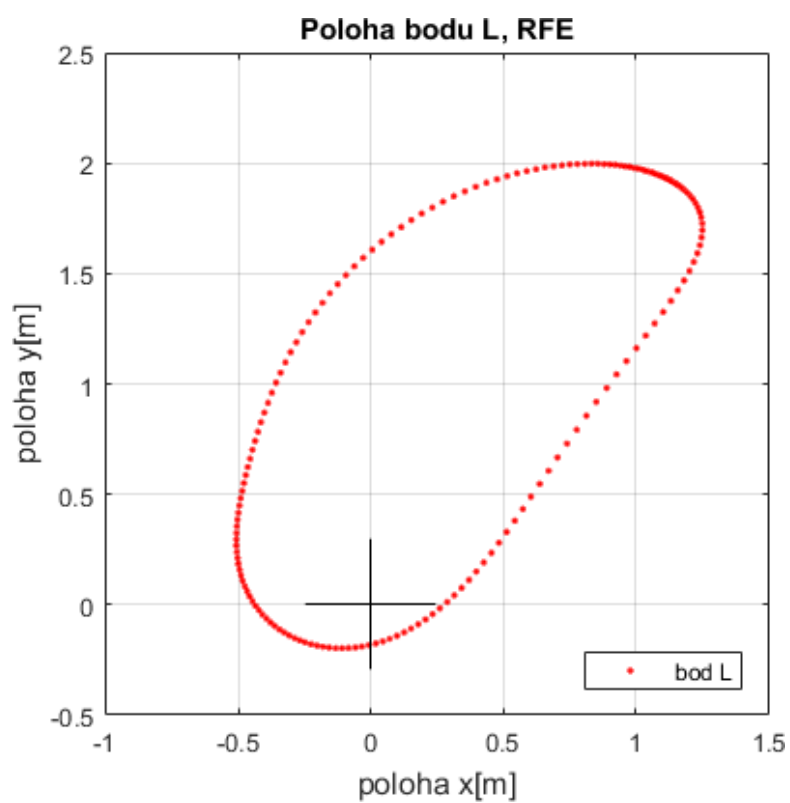
Obrázek 5.6: Velikost reakcí ve vazbách, LRST

5.2 Aplikace metody RFE

Pro analyzovaný čtyř-kloubový definovaný v kapitole 4 byl sestaven softwarový kód pro sestavení a výpočet pohybových rovnic. Při výpočtu metodou RFE bylo těleso 2 považováno za absolutně tuhé a počet diskrétních tuhých tělísek na obou zbývajících tělesech byl $n_i = 6$.

5.2.1 Trajektorie bodu L

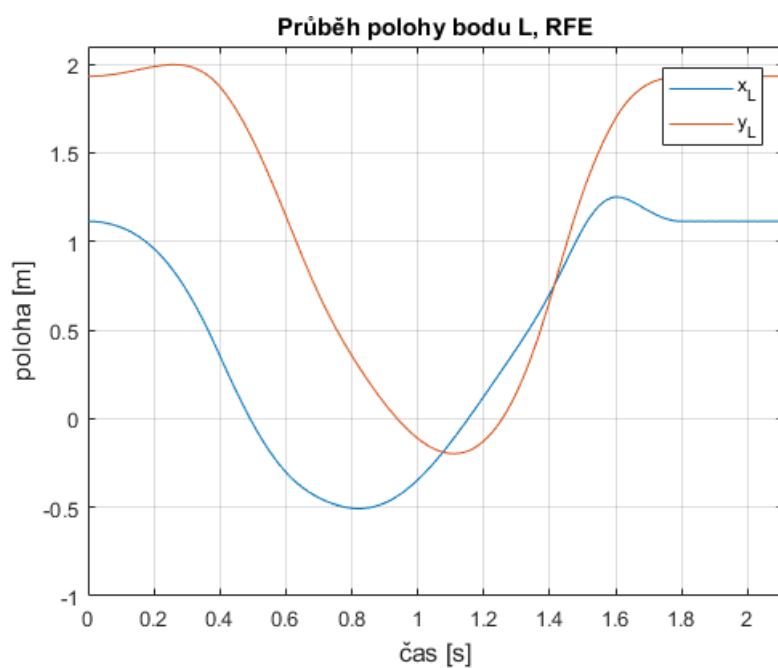
Na obrázku 5.7 je vyznačena trajektorie opsaná bodem L.



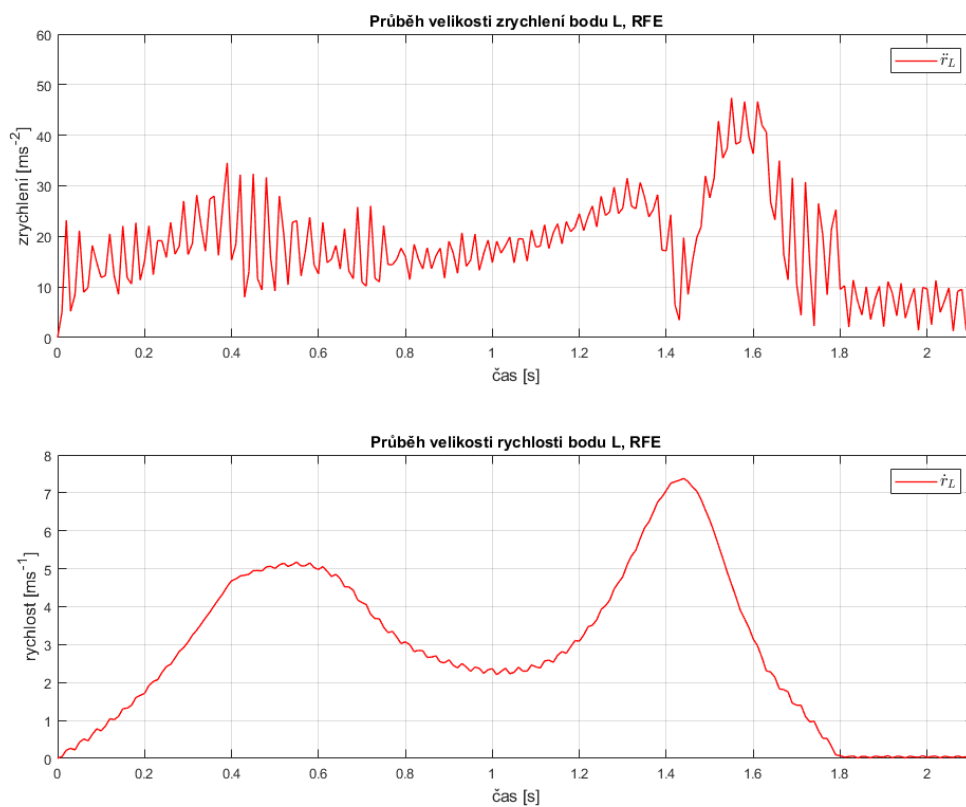
Obrázek 5.7: Trajektorie bodu L, RFE

■ 5.2.2 Rádus vektor bodu L

Časový průběh polohových souřadnic x_L, y_L definující polohový vektor r_L je na obrázku 5.8, průběh velikosti vektoru rychlosti \dot{r}_L a velikosti vektoru zrychlení \ddot{r}_L je vykreslen na obrázku 5.9 .



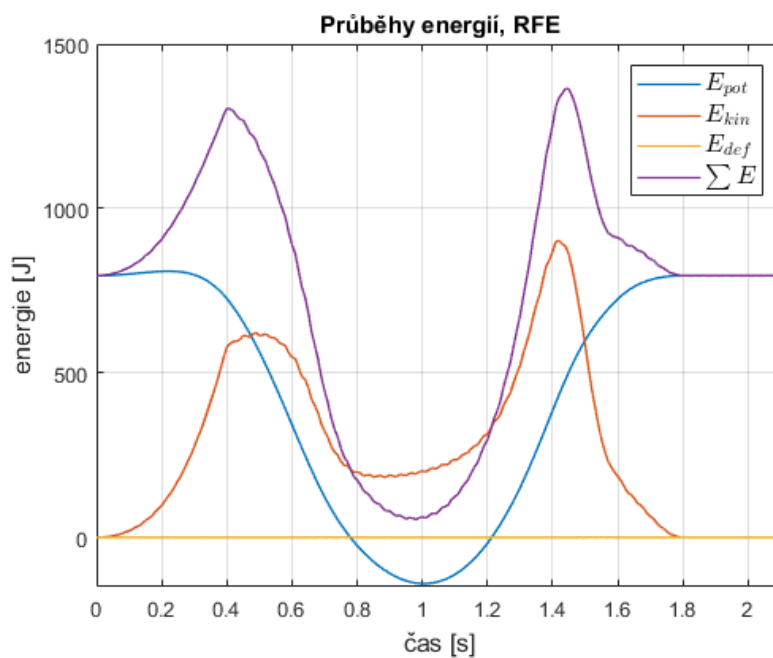
Obrázek 5.8: Průběh polohy bodu L v GSS, RFE



Obrázek 5.9: Průběh rychlostí a zrychlení, RFE

5.2.3 Mechanická energie

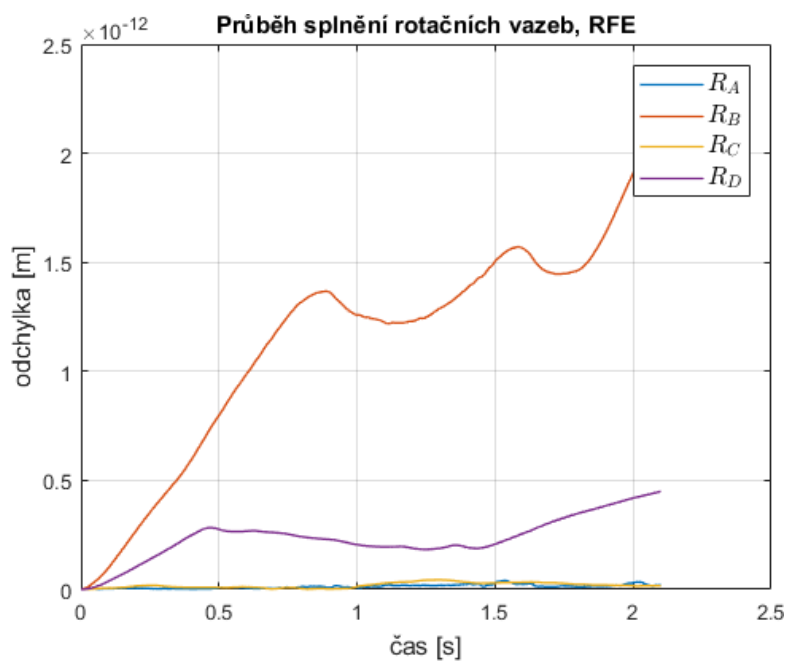
Mechanická energie v soustavě se dělí na kinetickou složku E_{kin} , potenciální složku tíhy E_{pot} , deformační energii uloženou v elasticky zdeformovaném tělese E_{def} a energii dodanou ve formě mechanické práce od hnacího momentu na tělese 2. Průběh těchto energií je na obrázku 5.10. Průběh $\sum E$ je součet kinetické, potenciální a deformační složky.



Obrázek 5.10: Průběh mechanické energie, RFE

5.2.4 Kontrola vazeb

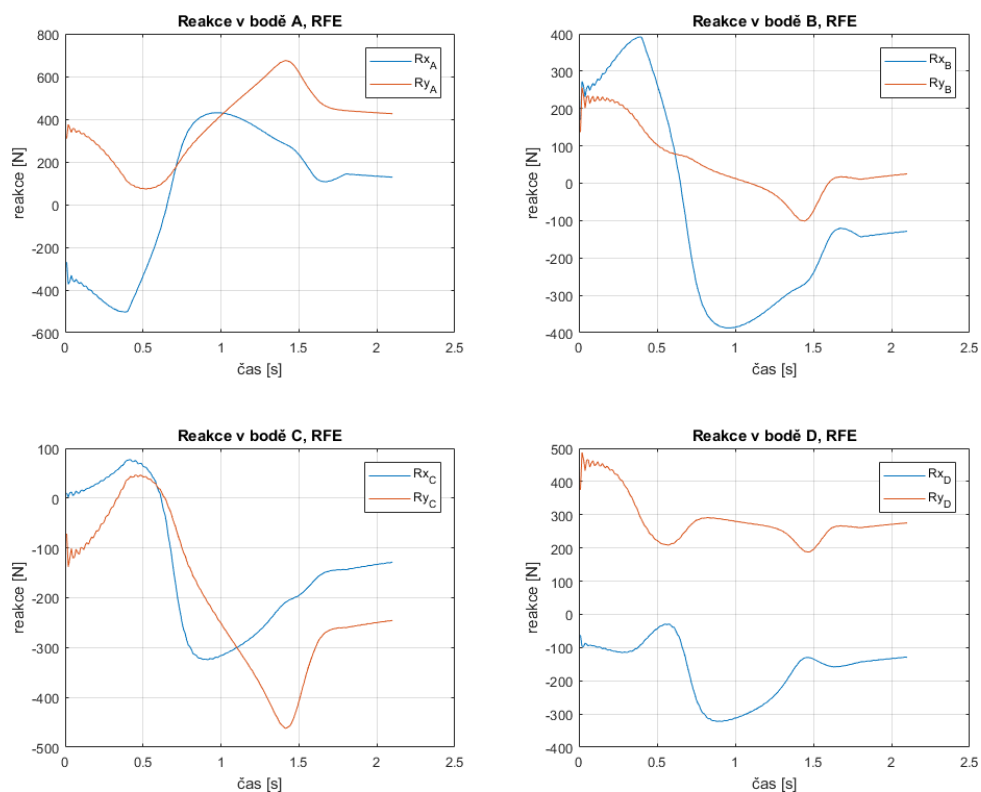
Vazbové rovnice stabilizované Baumgartovou stabilizační metodou je potřeba kontrolovat a obrázek 5.11 v tomto případě ukazuje vzdálenost rotačně svázaných bodů v místech A, B, C a D.



Obrázek 5.11: Míra nesplnění vazby, RFE

5.2.5 Reakce ve vazbách

Průběh velikosti reakčních účinků rotačních vazeb v bodech A až D je uveden na obrázku 5.12.



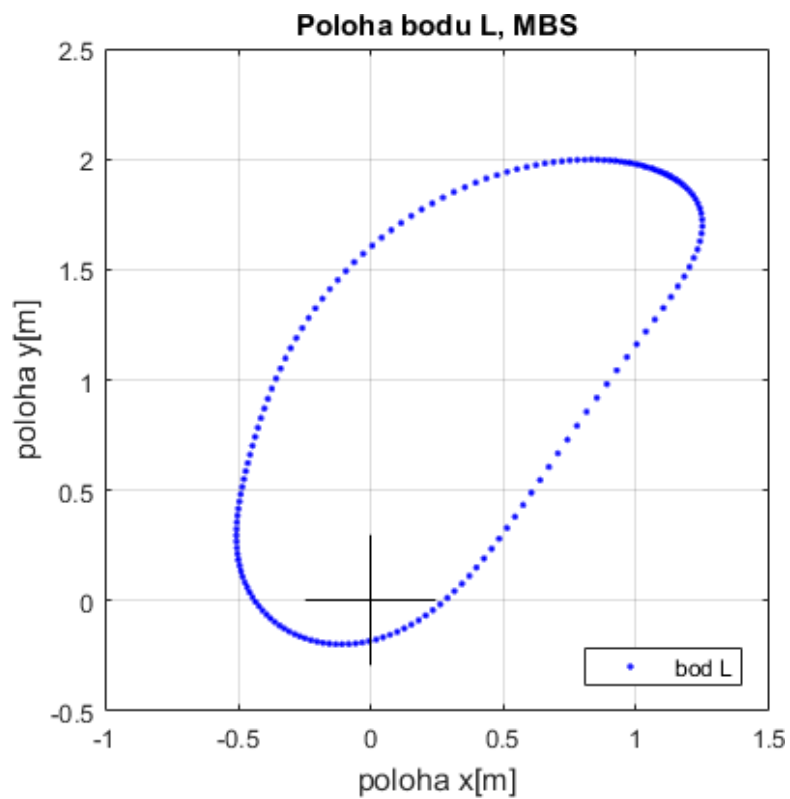
Obrázek 5.12: Velikost reakcí ve vazbách, RFE

5.3 Aplikace metody MBS flex

Pro analyzovaný čtyř-kloubový definovaný v kapitole 4 byl sestaven softwarový kód pro sestavení a výpočet pohybových rovnic. Při výpočtu bylo těleso 2 považováno za absolutně tuhé, počet uvažovaných vlastních tvarů kmitu $n_t = 9$ a počet diskretních bodů na obou poddajných tělesech $n_i = 11$.

5.3.1 Trajektorie bodu L

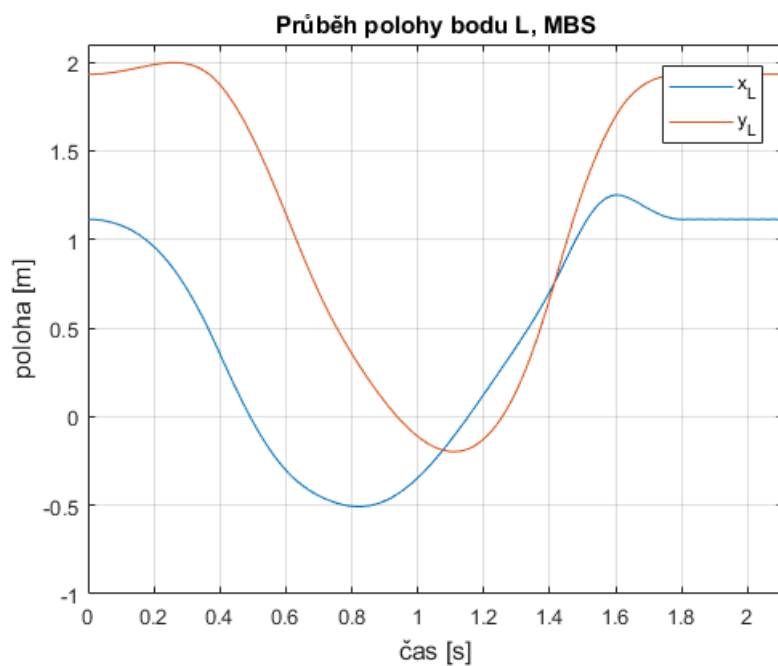
Na obrázku 5.13 je vyznačena trajektorie opsaná bodem L.



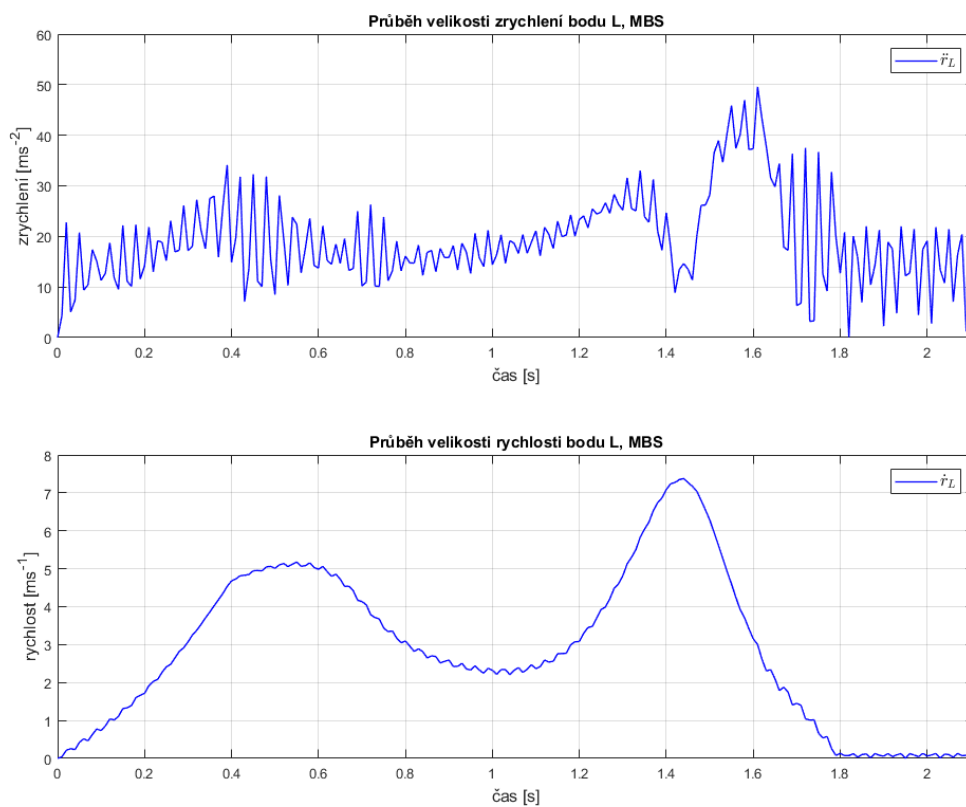
Obrázek 5.13: Trajektorie bodu L, MBS

■ 5.3.2 Rádus vektor bodu L

Časový průběh polohových souřadnic x_L, y_L definující polohový vektor r_L je na obrázku 5.14, průběh velikosti vektoru rychlosti \dot{r}_L a velikosti vektoru zrychlení \ddot{r}_L je vykreslen na obrázku 5.15 .



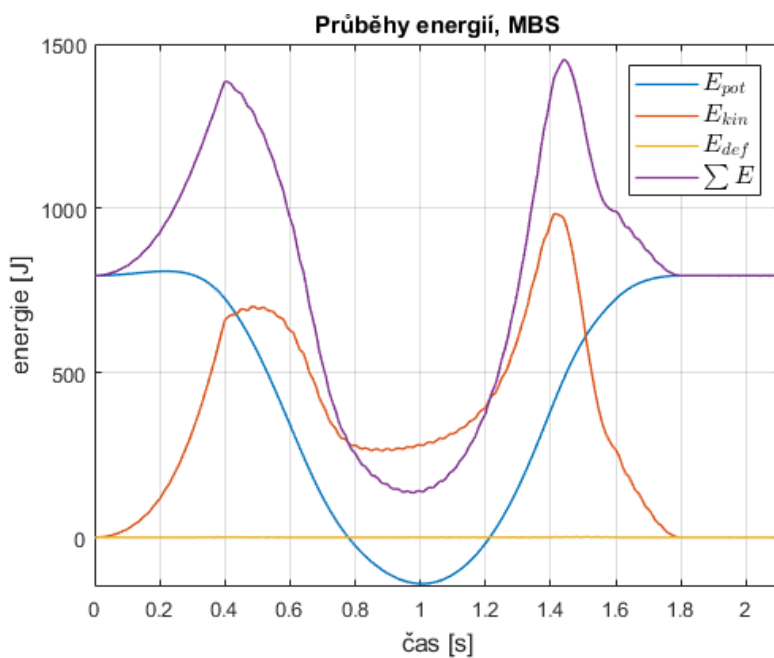
Obrázek 5.14: Průběh polohy bodu L v GSS, MBS



Obrázek 5.15: Průběh rychlostí a zrychlení, MBS

5.3.3 Mechanická energie

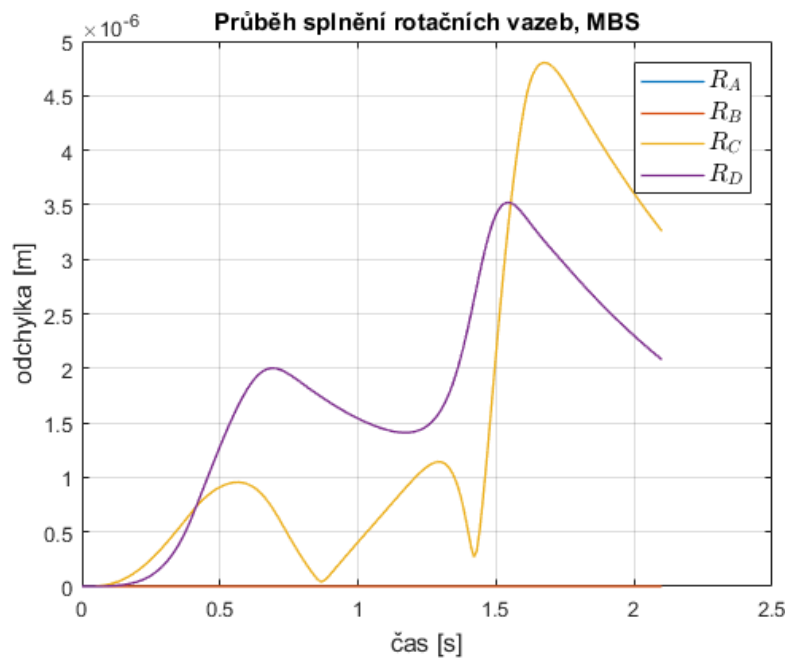
Mechanická energie v soustavě se dělí na kinetickou složku E_{kin} , potenciální složku tíhy E_{pot} , deformační energii uloženou v elasticky zdeformovaném tělese E_{def} a energii dodanou ve formě mechanické práce od hnacího momentu na tělese 2. Průběh těchto energií je na obrázku 5.16. Průběh $\sum E$ je součet kinetické, potenciální a deformační složky.



Obrázek 5.16: Průběh mechanické energie, MBS

5.3.4 Kontrola vazeb

Vazbové rovnice stabilizované Baumgartovou stabilizační metodou je potřeba kontrolovat a obrázek 5.17 v tomto případě ukazuje vzdálenost rotačně svázaných bodů v místech A, B, C a D.



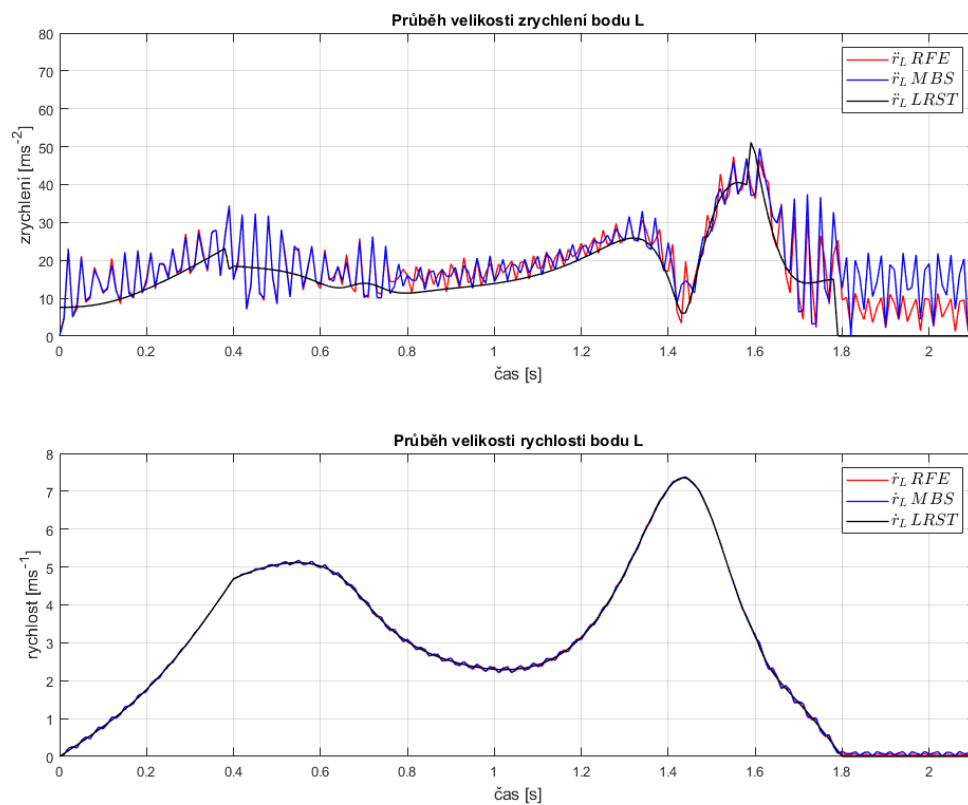
Obrázek 5.17: Míra nesplnění vazby, MBS

5.4 Srovnání a shrnutí výsledků

V této části jsou srovnány výsledky vypočtené pro soustavy s poddajnými tělesy (viz 5.3) se soustavou s tuhými tělesy (viz 5.1).

5.4.1 Průběh rychlostí a zrychlení bodu L

Na obrázku 5.18 jsou zaznačeny rychlosti a zrychlení bodu L ve všech třech výpočetních konfiguracích.

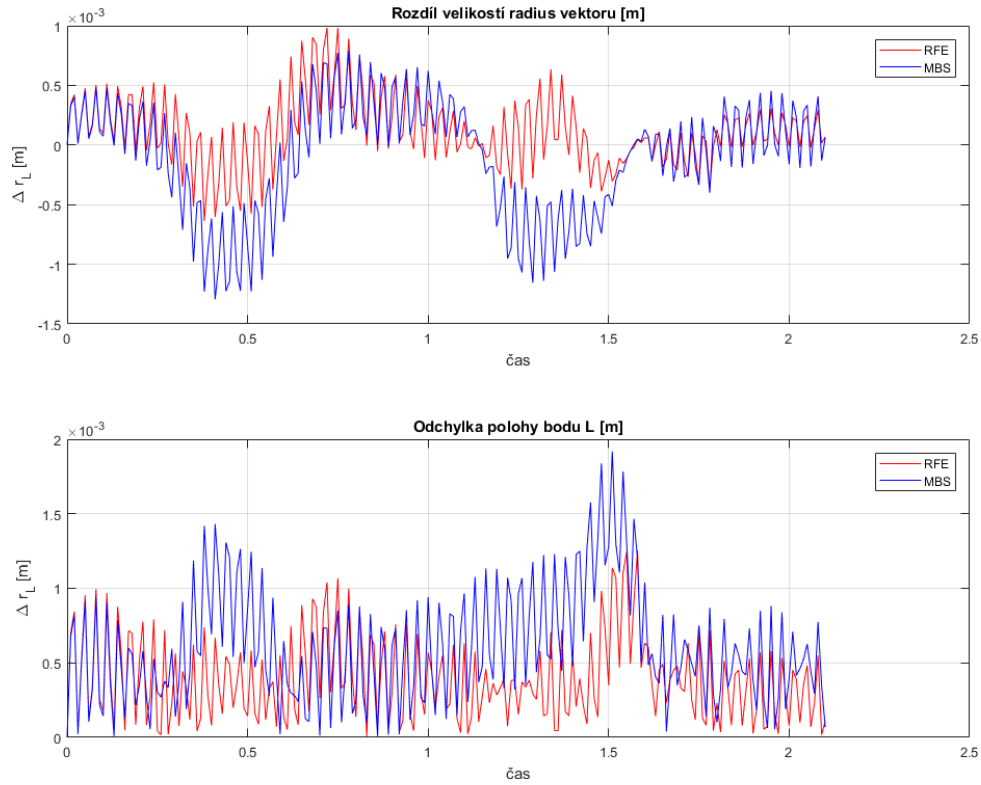


Obrázek 5.18: Průběh rychlostí a zrychlení bodu L, souhrn

5.4.2 Odchylna polohy bodu L

Na obrázku 5.19 je zakreslen průběh rozdílů velikostí polohových vektorů mezi soustavou tuhých těles a oběma metodami výpočtu soustavy pod-

dajných těles. Vrchní graf obrázku je získán vztahem $\sqrt{x_{LRST}^2 + y_{LRST}^2} - \sqrt{x_{poddajne}^2 + y_{poddajne}^2}$ a spodní graf vztahem $\sqrt{(x_{LRST} - x_{poddajne})^2 + (y_{LRST} - y_{poddajne})^2}$.



Obrázek 5.19: Rozdíl velikostí polohového vektoru bodu L

Kapitola 6

Závěr

V práci je naznačeno odvození pohybových Lagrangeových pohybových rovnic smíšeného typu a pro výpočet výsledné soustavy algebraicko-diferenciálních rovnic je navržen stabilizační postup numerické integrace pomocí Baumgartovy stabilizace. Způsob aplikace metody RFE na rovinné dynamické úlohy je navržen v sekci 3.1. Využití metody uvažující deformace těles jako lineární kombinaci jejich tvarových funkcí je pro rovinný problém podrobně rozebráno v sekci 3.2 a v práci je metoda označována zkratkou MBS. Podrobné hodnocení práce s oběma metodami je na konci první teoretické části v sekci 3.3.

Poslední cíl této práce, aplikace odvozených metod na čtyř-kloubový mechanismus, byl proveden pomocí výpočetního softwaru Matlab a výsledky obou metod jsou v kapitole 5 porovnány s výsledky Lagrangeových rovnic smíšeného typu pro soustavu tuhých těles.

Shodu obou metod v aplikaci na čtyř-kloubový rovinný mechanismus nejlépe ukazuje 5.19. Dle očekávání se obě metody velmi dobře shodují a nejvýraznější rozdíl nastává okolo první sekundy. Je to tím, že se mechanismus dostane do polohy, kdy poháněné těleso 2 je rovnoběžné s tělesem 3, které je v daný moment zatěžováno především axiální silou. Deformaci v axiálním směru však nebyla při odvozování deformačního modelu metody MBS uvažována a výsledky obou metod se tak v této chvíli rozcházejí.

Interpretace Lagrangeových multiplikátorů reprezentujících reakce v rotačních vazbách je pro soustavu tuhých těles v kapitole 5.1.5 a metodu RFE kapitole 5.2.5. Dalším odvozením lze interpretovat i multiplikátory u metody

MBS nebo získat průběh hnacího momentu pro žádaný průběh otáček na obrázku 4.2.

Práce aplikuje odvozené metody na rovinnou úlohu, ale rozebírané metody lze využít i pro prostorovou aplikaci, kam by práce šla dále rozšířit. Vylepšit lze i jednotlivé deformační modely, v případě RFE metody lze zavést do deformace poddajných elementů i tlumící složku vycházející například z Kevin Vaughova reologického modelu chování materiálu. Do deformačního modelu metody MBS by pak dále šlo zahrnout i v aplikaci zanedbávané deformace podélné a tečné, případně zmiňované tlumení.



Přílohy

Příloha A

Seznam použitých symbolů a zkratek

$A(x, y)$	matice tvarových funkcí
a_i	zrychlení bodu i
A	plocha průřezu
A_{pl}	plocha průřezu
B^i	matice daná jako $S^i \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot {}^l \xi_P^i$
$\hat{\mathbf{E}}_2$	antisymetrický operátor
${}^i \eta_{j,j+1}$	deformace poddajného elementu mezi tělísky j a $j + 1$ měřené kolmo na směr vektoru ${}^i \mathbf{n}_j$
E_k	kinetická energie soustavy
E	modul pružnosti v tahu
Φ_s	Jakobián soustavy
\mathbf{F}_a	tahová/tlaková síla
\mathbf{F}_t	smyková síla
${}^i \varphi_{j+1}$	úhel směrového vektoru ${}^i \mathbf{n}_{j+1}$
${}^i \varphi_j$	úhel směrového vektoru ${}^i \mathbf{n}_j$
F_i	síla působící na bod i
f_k	rovnice vazby

g	gravitační konstanta, 9,81 [$m \cdot s^{-1}$]
G	modul pružnosti ve smyku
GSS	G lobální souřadný systém
J_z	moment setrvačnosti k ose z
λ_k	Lagrangeův multiplikátor
L^i	matice daná předpisem $[E^2 \quad B^i \quad S^i A^i]$
${}^i l_j$	délka tělíska j na tělese i
LRII.	Lagrangeovy rovnice druhého druhu
LRST	Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
LSS	L okální souřadný systém
\mathbf{M}	matice soustavy \mathbf{M}
\mathbf{M}_o	ohybový moment
m_i	hmotnost bodu i
MBS flex	M ulti- b ody systmes f lexible
${}^i \mathbf{n}_{j+1}$	směrový vektor tělíska $j + 1$
${}^i \mathbf{n}_j$	směrový vektor tělíska j
n°	počet stupňů volnosti soustavy
ODR	obyčejná diferenciální rovnice
PVP	princip virtuálních prací
Q	zobecněná síla
q_j	nezávislá souřadnice j
${}^i \mathbf{r}_{j+1,1}, {}^i \mathbf{r}_{j+1,2}$	polohové vektory tělíska $j + 1$ na tělese i
${}^i \mathbf{r}_{j,1}, {}^i \mathbf{r}_{j,2}$	polohové vektory počátku a konce tělíska j na tělese i
r_i	polohový vektor bodu i
RFE	tuhé tělísko (R igid F inite E lement)
σ_o	ohybové napětí
ε	poměrné prodloužení
${}^i S_j$	těžiště tělíska j na tělese i

$s_{a,j}$	fyzikální souřadnice a, j
S^i	rotační transformační matice z GSS do LSS tělesa i
SDE	poddajný element (S pring- d ampning element)
t	čas
W	mechanická práce
${}^i\xi_{j,j+1}$	deformace poddajného elementu mezi tělísky j a $j + 1$ měřené ve směru vektoru ${}^i\mathbf{n}_j$
${}^g x, {}^g y$	osy globálního souřadného systému
${}^l x, {}^l y$	osy lokálního souřadného systému



Příloha B

Rejstřík

B

Baumgartova stabilizace, 9

Bernoulliova diferenciální rovnice
průhybové čáry, 25

L

Lagrangeovy rovnice

2. druhu, 5

smíšeného typu, 7–9, 11, 14

M

Metoda

MBS flex, 20

poddajných tělísek, RFE, 11

P

Princip virtuálních prací, 18

T

Tvarové funkce, 21



Příloha C

Literatura

- [1] I. Adamiec-Wójcik, L. Drag, and S. Wojciech. Research paper: A new approach to the rigid finite element method in modeling spatial slender systems. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2017.
- [2] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1982. ISBN:0-13-317305-4.
- [3] R. Brepta, L. Půst, and F. Turek. *Mechanické kmitání*. Sobotáles, 1994. ISBN:80-901684-8-5.
- [4] J. Řezníček. Pružnost a pevnost I, podklady pro přednášky. nevyplněná verze dostupná z http://pruznost.unas.cz/PP_I_17_18.pdf, dne 28.04.2019.
- [5] J. Řezníček. Pružnost a pevnost II, podklady pro přednášky. nevyplněná verze dostupná z http://pruznost.unas.cz/PP_II_18_19.pdf, dne 28.04.2019.
- [6] M. Hajžman and P. Polachr. Application of stabilization techniques in the dynamic analysis of multibody systems. Technical report, Section of Materials and Mechanical Engineering Research, ŠKODA VÝZKUM s.r.o., 2007. dostupné z https://www.kme.zcu.cz/acm/old_acm/full_papers/acm_vol1no2_p057.pdf, dne 14.04.2019.
- [7] M. Hofreiter. *Základy automatického řízení*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2012. ISBN:978-80-01-05007-1.
- [8] A. A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems, MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES*, page 157–184. Cambridge University Press, 4th edition, 2013. ISBN:9781107337213.

- [9] V. Stejskal and M. Valášek. *Kinematics and dynamics of machinery*. Marcel Dekker, inc., 1996. ISBN:0-8247-9731-0.
- [10] T. Vampola. Dynamické řešení poddajných těles - MBS metoda. poskytnuté poznámky.
- [11] T. Vampola. Dynamické řešení poddajných těles - RFE metoda. poskytnuté poznámky.
- [12] T. Vampola. Mechanika III, České vysoké učení technické, 2018. přednášky.