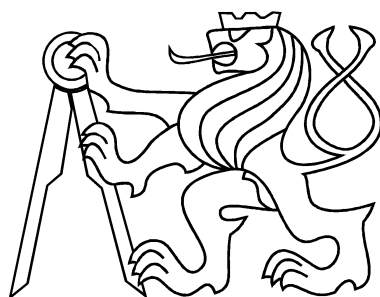


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Optimalizace trajektorie manipulátoru

2018/2019

Patrik Kovář

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kovář** Jméno: **Patrik** Osobní číslo: **465371**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Optimalizace trajektorie manipulátoru

Název bakalářské práce anglicky:

Manipulator trajectory optimization

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s řešením kinematiky a dynamiky prostorových mechanismů.
- 2) Seznamte se s optimalizačními metodami.
- 3) Proveďte návrh trajektorie pohybu manipulátoru.
- 4) Proveďte optimalizaci pohybu konkrétního typu manipulátoru.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Brát V. (1981): Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vázaných mechanických systémů. Praha: Academia.
[2] Horáček T., Šika Z., Valášek M. (2014): Software for global dynamics evaluation of mechanisms. Advances in Engineering Software, Volume 72, June 2014, Pages 155-165. ISSN 0965-9978
[3] Valášek M., Bauma V., Šika Z. (2004): Mechanika B. Vyd. 1. Praha: ČVUT v Praze. 121 s. ISBN 80-01-02919-0

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:


Ing. Jan Zavřel, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **30.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **16.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: _____


Ing. Jan Zavřel, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

6.5.2019

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Patrik Kovář
Název bakalářské práce:	Optimalizace trajektorie manipulátoru
Anglický název:	Manipulator trajectory optimization
Akademický rok:	2018/2019
Studijní obor:	Teoretický základ strojího inženýrství
Ústav, odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor mechaniky a mechatroniky
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Jan Zavřel, Ph.D.
Bibliografické údaje:	65 stran 40 obrázků 12 tabulek
Klíčová slova:	manipulátor, inverzní kinematika, trajektorie, Bézierova křivka, prostorový mechanismus, optimalizace
Key words:	manipulator, inverse kinematics, trajectory, Bézier curve, 3D mechanism, optimization

Abstrakt:

Tato práce se zabývá optimalizací trajektorie robotického manipulátoru. V první části je zaměřena na řešení kinematické a dynamické úlohy prostorových mechanismů. Následně se zabývá genetickými algoritmy a požadavky na kritéria pro optimalizaci trajektorie manipulátoru. Ve druhé části práce je vyřešena kinematická a dynamická úloha sériového manipulátoru se sférickým zápěstím. Dále je navržena trajektorie se spojitostí druhého řádu, která je následně optimalizována dle navržených kritérií.

Abstract:

The work deals with the trajectory optimization of robot manipulator. First part is focused on kinematics and dynamics of 3D mechanisms. Then genetic algorithms and criterions for trajectory optimization are discussed. In the second part there is kinematic and dynamic solution of anthropomorphic robotic arm with a spherical wrist. Then there is second order continuous trajectory designed, which is optimized in accordance with considered criterions.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze podklady uvedené v příloženém seznamu literatury.

V Praze dne _____

podpis

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce Ing. Janu Zavřelovi Ph.D. za odborné vedení, vstřícnost a věcné připomínky při řešení problému. Rovněž chci poděkovat své přítelkyni, rodině a přátelům za podporu.

Obsah

1	Cíle práce	9
2	Motivace	10
3	Teoretický úvod k problematice	11
3.1	Struktura sériových robotických manipulátorů	11
3.2	Bézierova křivka	12
3.2.1	Napojení Bézierových křivek	12
3.2.2	Délka křivky	13
3.3	Kinematická úloha	14
3.3.1	Přímá kinematická úloha	14
3.3.2	Inverzní kinematická úloha	20
3.3.3	Popis geometrie mechanismu	21
3.3.4	Trigonometrický přístup řešení inverzní kinematické úlohy	23
3.3.5	Algebraický přístup řešení inverzní kinematické úlohy	25
3.4	Uložení tuhých těles v prostoru	26
3.5	Inverzní dynamika	27
3.5.1	Matice hmotových charakteristik	27
3.5.2	Zrychlení a úhlová zrychlení středisek hmotnosti	28
3.5.3	Metoda uvolňování a transformace reakcí mezi systémy	28
3.5.4	Řešení inverzní dynamiky	29
3.6	Optimalizace pomocí genetických algoritmů	30
3.6.1	Princip funkce	30
3.6.2	Klady a zápory genetických algoritmů	31
3.7	Formulace optimalizačního kritéria	32
3.7.1	Minimální strojový čas	32
3.7.2	Minimální energetické nároky	32
3.7.3	Hledání vyváženého poměru rychlosti a náročnosti trajektorie	33
4	Aplikace	34
4.1	Popis robota	34
4.2	Kinematika mechanismu	35
4.2.1	Řešení antropomorfního ramene manipulátoru	36
4.2.2	Řešení sférického zápěstí manipulátoru	38
4.2.3	Limitní hodnoty parametrů	39
4.3	Dynamika mechanismu	41
4.3.1	Uvolnění mechanismu	42
4.4	Návrh trajektorie	44
4.5	Optimalizace trajektorie	49
4.5.1	Optimalizace trajektorie dle strojového času	49
4.5.2	Optimalizace trajektorie dle energetických nároků	53
4.5.3	Optimalizace trajektorie při uvažování průniku optimalizačních podmínek	57
4.6	Zhodnocení výsledků	62
5	Závěr	64

Seznam obrázků

1	Příklady struktur manipulátorů	11
2	Schématické znázornění Eulerova zápěstí	11
3	C^2 spojitě napojení Bézierových křivek	13
4	Schématické zobrazení přímé a inverzní kinematické úlohy	14
5	Souřadnicové systémy těles 1 a 2	15
6	Současné pohyby těles	17
7	Schématické zobrazení Cardanových úhlů	19
8	Schématické zobrazení Eulerových úhlů	20
9	Denavit-Hartenbergova úmluva [7]	21
10	K odvození úhlu φ_3 goniometrickým přístupem	23
11	K vazbovým podmínkám volného tělesa v prostoru [10]	26
12	Uvolnění rotační vazby [10]	26
13	Schématické zobrazení transformace reakčních účinků	28
14	Populace, chromozomy a geny	30
15	Křížení: Rodiče A1 a A2, potomci A3 a A4	31
16	Mutace: Před a po mutaci	31
17	Racer 7 - 1,4	34
18	Racer 7 - 1,4 ve schématickém zobrazení	35
19	Výkres manipulátoru Racer 7 - 1,4 [www.comau.com]	39
20	Uvolnění mechanismu	42
21	Trajektorie v pracovním prostoru	44
22	Trajektorie v pracovním prostoru s trajektorií efektoru	45
23	Průběhy souřadnic navrhované trajektorie	46
24	Průběhy kloubových souřadnic a jejich prvních a druhých derivací	47
25	Průběhy hnacích momentů	48
26	t-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru	49
27	Průběhy souřadnic t-optimalizované trajektorie	50
28	Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při t-optimalizované trajektorii	51
29	Průběhy hnacích momentů při t-optimalizované trajektorii	52
30	W-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru	53
31	Průběhy souřadnic W-optimalizované trajektorie	54
32	Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při W-optimalizované trajektorii	55
33	Průběhy hnacích momentů při W-optimalizované trajektorii	56
34	tW-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru	57
35	Paretova množina	58
36	Průběhy souřadnic tW-optimalizované trajektorie	59
37	Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při tW-optimalizované trajektorii	60
38	Průběhy hnacích momentů při tW-optimalizované trajektorii	61
39	Srovnání trajektorií v pracovním prostoru	62
40	Srovnání energetických nároků	63

Seznam tabulek

1	Goniometrická řešení pro dané tvary rovnic [8]	24
2	D-H parametry translační části manipulátoru	35
3	Limitní úhly natočení os	40
4	Rozměry ramen robota	40
5	Hmotnosti členů mechanismu a polohy středisek hmotnosti v lokálních systémech	41
6	Radius vektory vazeb	43
7	Řídicí body řídicích polygonů navrhované trajektorie	46
8	Řídicí body řídicích polygonů t-optimalizované trajektorie	50
9	Řídicí body řídicích polygonů W-optimalizované trajektorie	54
10	Řídicí body řídicích polygonů tW-optimalizované trajektorie	59
11	Srovnání délek trajektorií	62
12	Srovnání energetických náročností trajektorií	63

1 Cíle práce

Cílem práce je seznámit se s řešením kinematické a dynamické úlohy prostorových mechanismů a optimalizačními metodami. V praktické části práce má být zvolen konkrétní manipulátor a navržena trajektorie jeho pohybu. Dle poznatků z teoretické části práce pak má být provedena optimalizace navržené trajektorie pohybu.

- Seznámit se s řešením kinematické a dynamické úlohy prostorových mechanismů.
- Seznámit se s optimalizačními algoritmy.
- Provést návrh trajektorie pohybu manipulátoru.
- Provést optimalizaci pohybu konkrétního typu manipulátoru.

2 Motivace

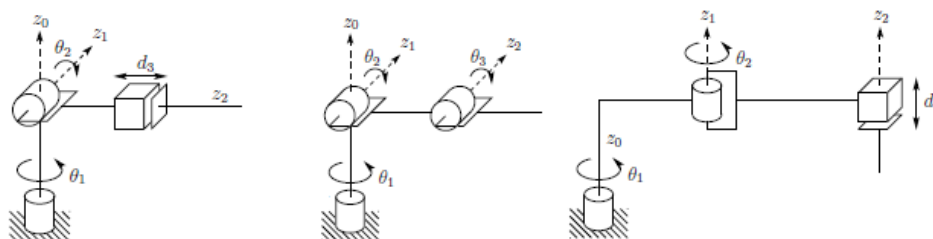
V průmyslovém procesu se čím dál více setkáváme s potřebou automatizace a robotizace. Při těchto aplikacích předpokládáme velkosériovou nebo hromadnou výrobu, která bude v chodu v řádu několika roků a v podstatě nepřetržitá. Při takto dlouhém časovém období se potom promítne každá uspořená sekunda na strojovém cyklu nebo každé procento uspořené energie. Toho se dá dosáhnout analýzou mechanismu a vhodnou optimalizací trajektorie pohybu manipulátoru.

3 Teoretický úvod k problematice

Pro úspěšné řešení úlohy je třeba správně analyzovat mechanismus manipulátoru. Základním kritériem je už samotná realizovatelnost pohybu. První z nutných podmínek jsou limitní úhly natočení v pohonech, tzn. aby se uvažovaná trajektorie nacházela v pracovním prostoru robotu. Druhou podmínkou je pak omezení velikostí krouticích momentů jednotlivých pohonů.

3.1 Struktura sériových robotických manipulátorů

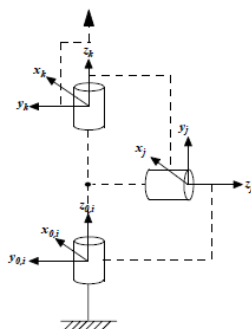
Robotický manipulátor je složen z článků (těles) spojených klouby a dohromady tvoří kinematický řetězec. Klouby jsou většinou rotační nebo posuvné. Rotační kloub jako např. pant umožňuje relativní natočení mezi dvěma články. Posuvný kloub umožňuje relativní lineární pohyb mezi dvěma články [1]. K popisu vzájemných poloh mezi dvěma články se používají kloubové souřadnice ϕ pro rotační klouby nebo d pro klouby posuvné. Příklady některých struktur jsou ukázány na obrázku 1.



Obrázek 1: Příklady struktur manipulátorů

V průmyslové praxi se velmi často využívají manipulátory s tzv. sférickým zápěstím (též Eulerovo zápěstí), které umožňuje libovolné natočení koncového efektoru. To vyplývá ze skutečnosti, že se osy tří po sobě jdoucích kloubů protínají v jednom bodě [1]. Schématické znázornění tohoto uspořádání je vidět na obrázku 2.

Výhodou tohoto uspořádání je, že zjednodušuje kinematickou analýzu mechanismu. Důsledkem je totiž možnost rozdělení úlohy na řešení úlohy polohy části mechanismu a úlohy orientace koncového efektoru [1]. Manipulátor se šesti stupni volnosti tak může být rozdělen na rameno (tři stupně volnosti) a zápěstí (tři stupně volnosti). Opakem tohoto uspořádání je tzv. ofsetové zápěstí.



Obrázek 2: Schématické znázornění Eulerova zápěstí

3.2 Bézierova křivka

Bézierova křivka stupně n je tvořena jedním segmentem, který je určen $n + 1$ řídicími body, které tvoří řídicí polygon. Krajními body řídicího polygonu prochází (interpoluje je), všechny vnitřní body polygonu aproximuje [2].

Nechť jsou dány řídicí body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$. Potom je vektorová rovnice Bézierovy křivky

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i = B_{0,n}(t) \mathbf{V}_0 + B_{1,n}(t) \mathbf{V}_1 + \dots + B_{n,n}(t) \mathbf{V}_n, t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (3.2.1)$$

kde bázové funkce

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, t \in \langle 0; 1 \rangle, i = 0, \dots, n \quad (3.2.2)$$

jsou Bernsteinovy polynomy n -tého stupně [2].

Pro účely bakalářské práce byla zvolena Bézierova křivka 3. stupně (kubika) popsána vektorovou rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= B_{0,3}(t) \mathbf{V}_0 + B_{1,3}(t) \mathbf{V}_1 + B_{2,3}(t) \mathbf{V}_2 + B_{3,3}(t) \mathbf{V}_3 = \\ &= (1-t)^3 \mathbf{V}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{V}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{V}_2 + t^3 \mathbf{V}_3, t \in \langle 0; 1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

3.2.1 Napojení Bézierových křivek

Při reálných aplikacích je většinou potřeba definovat více než dva průchozí body, které je potřeba interpolovat. Z tohoto důvodu bude trajektorie tvořena několika Bézierovými křivkami, které na sebe navazují.

Nechť jsou dány dvě Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(t)$ popsány vektorovými rovnicemi

$$\mathbf{P}(t) = B_{0,3}(t) \mathbf{V}_0 + B_{1,3}(t) \mathbf{V}_1 + B_{2,3}(t) \mathbf{V}_2 + B_{3,3}(t) \mathbf{V}_3, t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{R}(s) = B_{0,3}(s) \mathbf{W}_0 + B_{1,3}(s) \mathbf{W}_1 + B_{2,3}(s) \mathbf{W}_2 + B_{3,3}(s) \mathbf{W}_3, s \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (3.2.5)$$

Při napojování křivek jsou rozlišovány spojitosti nultého řádu C^0 , 1. řádu C^1 a 2. řádu C^2 , přičemž podmínky těchto spojitostí vyplývají z požadavků na rovnosti derivací příslušného řádu v bodě \mathbf{V}_3 a \mathbf{W}_0 . Matematicky lze podmínky formulovat pro

$$C^0 : \mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0) \rightarrow \mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3, \quad (3.2.6)$$

$$C^1 : \mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0) \rightarrow -3\mathbf{W}_0 + 3\mathbf{W}_1 = -3\mathbf{V}_2 + 3\mathbf{V}_3, \quad (3.2.7)$$

kde dosazením za $\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3$ lze podmínku upravit tak, aby byl zřejmý její geometrický význam

$$\mathbf{W}_1 - \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2 \implies \mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 + \mathbf{W}_1), \quad (3.2.8)$$

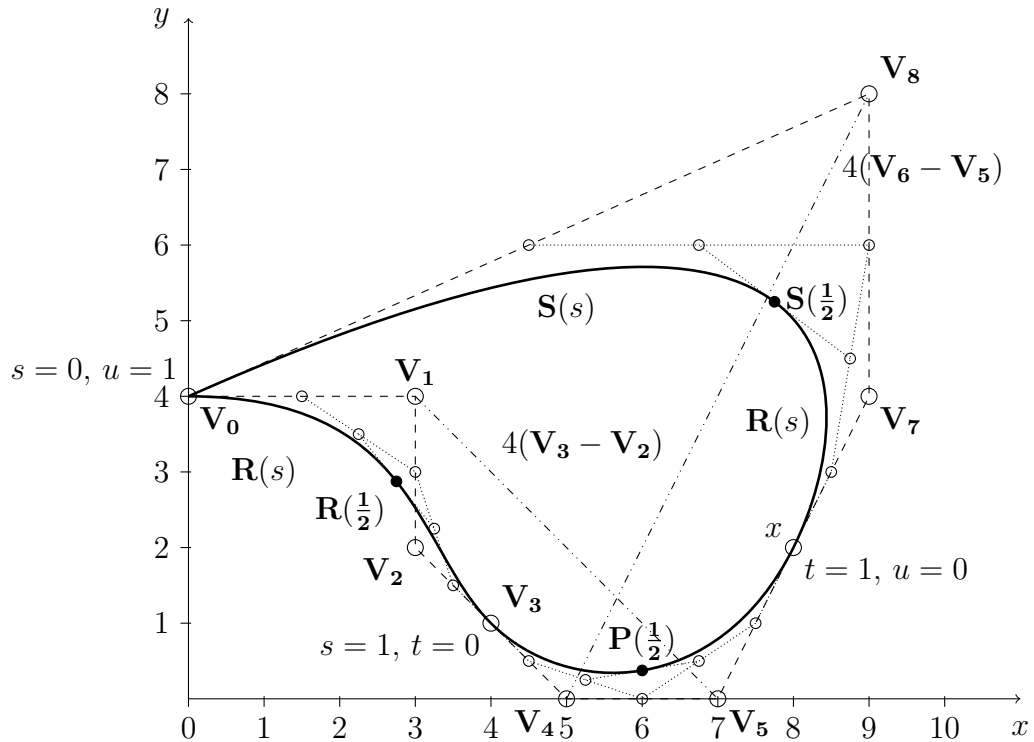
$$C^2 : \mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0) \rightarrow -3\mathbf{W}_0 + 3\mathbf{W}_1 = -3\mathbf{V}_2 + 3\mathbf{V}_3, \quad (3.2.9)$$

kde dosazením za $\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3$ a za $\mathbf{W}_1 = 2\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2$ lze podmínku upravit tak, aby byl zřejmý její geometrický význam

$$\mathbf{W}_2 - \mathbf{V}_1 = 4(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2). \quad (3.2.10)$$

Pro spojitost vyšších řádů platí, že musí být splněny podmínky spojitosti nižších spojitostí (pro C^2 spojitost dvou křivek musí být splněny podmínky C^0 a C^1 spojitostí) [2].

Pro účely trajektorie robotického manipulátoru a požadavku na spojitosti derivací vyšších řádů je žádoucí, aby na sebe jednotlivé křivky navazovaly s C^2 spojitostí. Důsledkem této spojitosti je, že polohou řídicího bodu \mathbf{V}_2 v podstatě získáváme polohu bodu \mathbf{V}_4 a polohou řídicího bodu \mathbf{V}_1 získáváme polohu bodu \mathbf{V}_5 . Pro názornost je tato skutečnost ukázána na obrázku 3.



Obrázek 3: C^2 spojitě napojení Béziových křivek

3.2.2 Délka křivky

Čas vykonání pohybu závisí na délce trajektorie a rychlosti, která je ovšem limitována možnostmi pohonů. Z toho vyplývá, že při optimalizaci trajektorie sehraje svou roli i délka křivky.

Nechť je rovinná křivka vyjádřena parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Jsou-li funkce φ' , ψ' , χ' spojité na intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$, potom délka oblouku křivky l zadané parametrickými rovnicemi mezi body α a β je dána vzorcem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt \quad [3]. \quad (3.2.11)$$

3.3 Kinematická úloha

Cílem kinematického řešení mechanismu nebo soustavy těles je nalezení vztahů popisujících časové závislosti závislých časových souřadnic z daných časových závislostí nezávislých souřadnic při znalosti rozměrů soustavy. Ze vztahů mezi souřadnicemi pak lze odvodit závislosti mezi rychlostmi, zrychleními či vyššími derivacemi polohy [4].

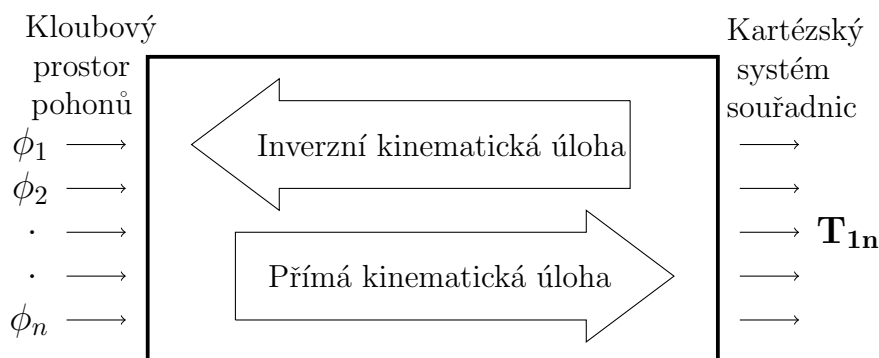
V mechanice jsou rozlišovány dva typy úloh. První spočívá v tom, že jsou známé průběhy pohybů pohonů a vyšetřujeme průběhy pohybu libovolného bodu mechanismu případně reakční účinky ve vazbách a pohonech (pokud by se jednalo o dynamickou úlohu). V tomto případě hovoříme o přímé úloze. Pokud se omezíme na kinematickou přímou úlohu, lze psát

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n). \quad (3.3.1)$$

U inverzní úlohy je naopak předepsaný pohyb nějakého tělesa mechanismu a vyšetřujeme průběhy úhlů natočení nebo posuvů pohonů, případně reakčních účinků ve vazbách a pohonech, abychom dosáhli pohybu po předepsané trajektorii. Pokud se omezíme na kinematickou inverzní úlohu, lze psát

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}^T = f(x, y, z). \quad (3.3.2)$$

Pro názornost je relace mezi souřadnicemi pohonů a kartézskými souřadnicemi schématicky znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 4: Schématické zobrazení přímé a inverzní kinematické úlohy

3.3.1 Přímá kinematická úloha

Kinematické řešení, které poskytuje analytické vyjádření polohových závislostí (výstupní parametr lze získat pouhým dosazením do vztahu) je nazýváno řešením v uzavřeném tvaru. Toto řešení je možné získat pouze pro některé jednodušší mechanismy. Obecně to bohužel možné není. Častým znakem tohoto řešení je větší variabilita možných postupů a nutnost takové řešení skutečně hledat, protože přímočará algoritimizace zde obvykle neexistuje [4].

U složitějších mechanismů se uplatňuje numerické iterační řešení. Při tomto postupu řešení se hodnoty závislých souřadnic hledají pro dané hodnoty nezávislých souřadnic na základě iteračního procesu vycházejícího z hodnot závislých souřadnic zjištěných pro předchozí polohu [4].

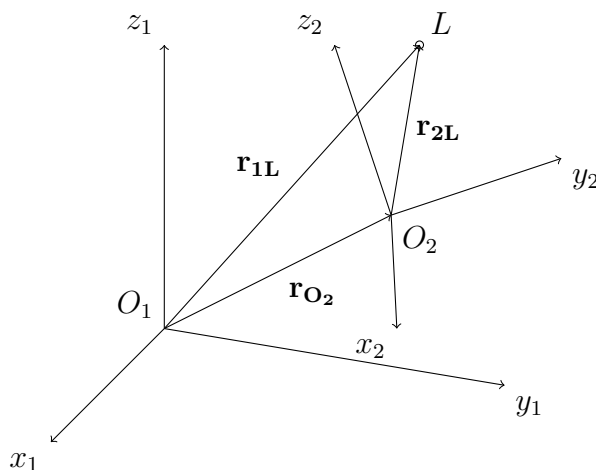
Pro řešení úlohy kinematiky se používají tři metody řešení [4].

- Trigonometrická metoda
- Vektorová metoda
- Maticová metoda

Maticová metoda

Základem pro vypracování metod kinematické analýzy i syntézy vázaných mechanických systémů, a z části i jejich dynamické analýzy, je kinematika prostorového pohybu bodu a tělesa v maticové formulaci. Předností tohoto vyjádření je zachycení geometrické, rychlostní či jiné veličiny tělesa jediným symbolem [5].

V prostoru tělesa označeného 1 je zvolen souřadnicový systém $\mathbf{F}_1 = \{\mathbf{O}_1 - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1\}$ a v prostoru tělesa označeného 2 systém $\mathbf{F}_2 = \{\mathbf{O}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2\}$. Nechť jsou oba systémy pravotočivé. Pro další popis jsou tyto systémy zobrazeny na obrázku 5.



Obrázek 5: Souřadnicové systémy těles 1 a 2

Pro přepočítání mezi absolutními a relativními souřadnicemi x_{2L} , y_{2L} , z_{2L} bodu L pak platí maticová transformační rovnice

$$\begin{bmatrix} x_{1L} \\ y_{1L} \\ z_{1L} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & x_{12} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & y_{12} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2L} \\ y_{2L} \\ z_{2L} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Vztah 3.3.3 lze zapsat pomocí rozdělených matic jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1L} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12} & \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2L} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

kde se matice \mathbf{S}_{12} nazývá matice směrových kosínů.

Následně lze vztah 3.3.4 přepsat do symbolické maticové rovnice

$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{r}_{2L}. \quad (3.3.5)$$

Průvodič bodu L pak lze s využitím matice směrových kosínů \mathbf{S}_{12} přepsat do tvaru

$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{r}_{1O2} + \mathbf{S}_{12} \mathbf{r}_{2L}, \quad (3.3.6)$$

kde \mathbf{r}_{1O2} popisuje unášivý pohyb a \mathbf{S}_{12} popisuje relativní sférický pohyb.

Derivací vztahu 3.3.5 lze odvodit maticové závislosti pro rychlosti

$$\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{T}}_{1L} \mathbf{r}_{2L} + \mathbf{T}_{1L} \dot{\mathbf{r}}_{2L}. \quad (3.3.7)$$

Polohový vektor \mathbf{r}_{2L} se většinou volí konstantní a jeho derivace je tudíž nulová. Vztah 3.3.7 se pak zjednoduší na tvar

$$\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{T}}_{1L} \mathbf{r}_{2L}. \quad (3.3.8)$$

Rozšířená rychlost obecného bodu L tělesa označeného 2 je pak dána rovnicí

$$\mathbf{v}_{1L} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{V}_{12} \mathbf{r}_{2L}, \quad (3.3.9)$$

kde matice rychlosti dle [5] je

$$\mathbf{V}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{12} & \mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{r}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{\Omega}_{12} = \mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{S}}_{12}. \quad (3.3.10)$$

Rozepsáním lze získat rovnici ve tvaru

$$\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{r}}_{1L} = \mathbf{v}_{1O2} + \mathbf{S}_{12} \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{r}_{2L}, \quad (3.3.11)$$

kde \mathbf{v}_{1L} je rychlost obecného bodu L ,

\mathbf{v}_{1O2} je rychlost počátku systému 2.

Opětovnou derivací vztahu lze odvodit maticové závislosti pro rychlosti

$$\mathbf{a}_{1L} = \ddot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{r}_{2L} = (\dot{\mathbf{T}}_{1L} \mathbf{V}_{12} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{V}}_{12}) \mathbf{r}_{2L}, \quad (3.3.12)$$

kde se $\dot{\mathbf{V}}_{12} = \mathbf{A}_{12}$ nazývá matice zrychlení a dle [5] má tvar

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{12} & \mathbf{S}_{12}^T \ddot{\mathbf{a}}_{12} - \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{v}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.13)$$

Rozepsáním lze získat rovnici ve tvaru

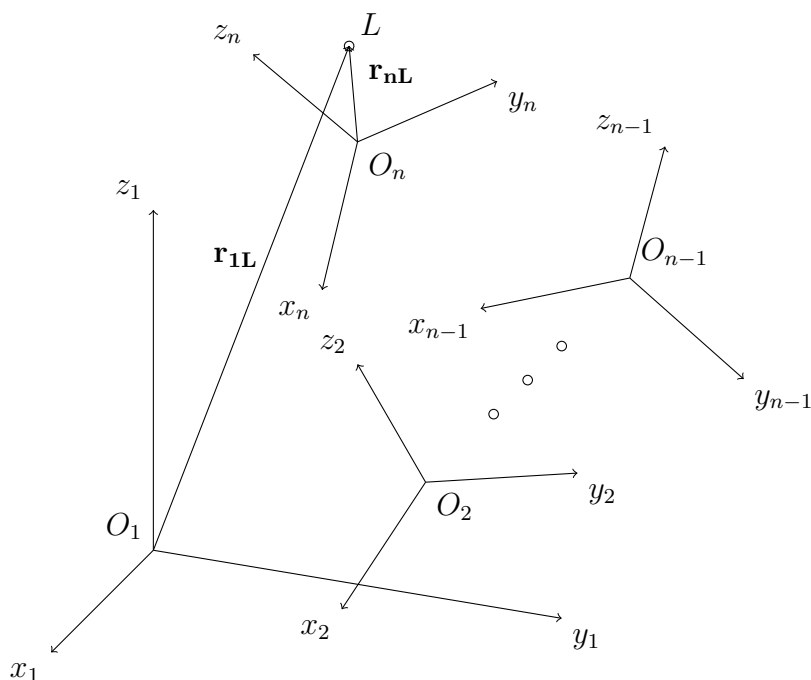
$$\mathbf{a}_{1L} = \ddot{\mathbf{r}}_{1L} = \mathbf{a}_{1O2} + \mathbf{S}_{12} \boldsymbol{\Omega}_{12}^2 \mathbf{r}_{2L} + \mathbf{S}_{12} \boldsymbol{\alpha}_{12} \mathbf{r}_{2L}, \quad (3.3.14)$$

kde \mathbf{a}_{1L} je zrychlení obecného bodu L ,

\mathbf{a}_{1O2} je zrychlení počátku systému 2.

Současné pohyby

Vzhledem k systému 1 se pohybuje systém 2, vůči němu systém 3 atd. až vůči systému $n - 1$ systém n . Pohyb systému n vůči systému 1 je tedy složen z řady současných pohybů dle schématu na obrázku 6 [5].



Obrázek 6: Současné pohyby těles

Pohyb obecného bodu L je při jednotlivých pohybech popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1L} &= \mathbf{T}_{12} \mathbf{r}_{2L} \\ \mathbf{r}_{2L} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{r}_{3L} \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_{n-1,L} &= \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{r}_{nL}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Postupným vyloučením průvodičů \mathbf{r}_{2L} až $\mathbf{r}_{n-1,L}$ lze získat vztah

$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{r}_{nL}, \quad (3.3.16)$$

který vyjadřuje pohyb bodu L tělesa n .

$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{1n} \mathbf{r}_{nL}. \quad (3.3.17)$$

Maticová metoda využívá pro přepočítání souřadnic mezi jednotlivými souřadnicovými systémy transformační matice $\mathbf{T}_{n,n+1}$, které se pomocí teorie současných pohybů dají vyjádřit jako součin šesti základních matic pro pohyby v prostoru.

$$\mathbf{T}_{n,n+1} = \mathbf{T}_x(x) \mathbf{T}_y(y) \mathbf{T}_z(z) \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z), \quad (3.3.18)$$

kde jednotlivé matice základních pohybů mají tvar

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{T}_x(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_y(y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_z(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned} \right\} \text{Transformační matice pro translace} \quad (3.3.19)$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \right\} \text{Transformační matice pro rotace} \quad (3.3.20)$$

Derivací vztahu 3.3.16 lze opět získat vztah pro popis rychlosti bodu L tělesa n ve tvaru

$$\mathbf{v}_{1L} = (\mathbf{T}_{12}\mathbf{V}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1,n} + \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{V}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1,n} + \dots + \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1,n}\mathbf{V}_{n-1,n})\mathbf{r}_{nL}. \quad (3.3.21)$$

A následnou derivací 3.3.21 vztah pro popis zrychlení bodu L (pro dva současné pohyby)

$$\mathbf{a}_{1L} = (\mathbf{T}_{12}(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2)\mathbf{T}_{23} + 2\mathbf{T}_{12}\mathbf{V}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{V}_{23} + \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}(\mathbf{A}_{23} + \mathbf{V}_{23}^2))\mathbf{r}_{3L}, \quad (3.3.22)$$

Pro pohyb ve směru obecné souřadnice \mathbf{s} lze vyjádřit matici rychlosti \mathbf{V} a matici zrychlení \mathbf{A} jako

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{s}}, \quad (3.3.23)$$

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{D}_s \ddot{\mathbf{s}}, \quad (3.3.24)$$

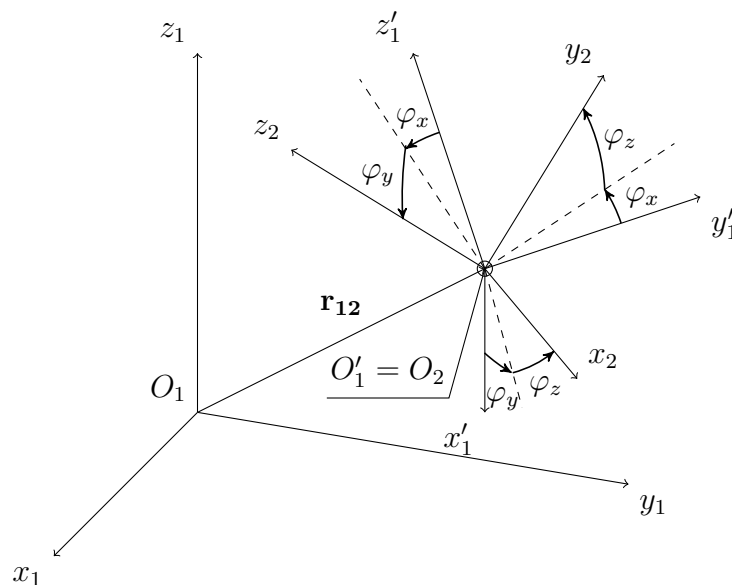
kde matice \mathbf{D} pro translace ve směru a rotace okolo os x , y , z mají tvar

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3.25)$$

$$\mathbf{D}_{\varphi_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{\varphi_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{\varphi_z} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.26)$$

Popis sférického pohybu

Na obrázku 7 jsou dva souřadnicové systémy reprezentující tělesa vázaná sférickou vazbou, která má tři stupně volnosti. Jejich vzájemná poloha je popsána Cardanovými úhly φ_x , φ_y a φ_z .



Obrázek 7: Schématické zobrazení Cardanových úhlů

Nechť systém 2 původně splýval se systémem 1 a do své obecné polohy se dostal:

- Přemístěním do polohy popsané vektorem \mathbf{r}_{12}
- Pootočením okolo osy \mathbf{x}'_1 o úhel φ_x
- Pootočením okolo osy \mathbf{y}'_1 o úhel φ_y
- Pootočením okolo osy \mathbf{z}'_1 o úhel φ_z ,

což lze s využitím transformačních matic vyjádřit jako

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{\mathbf{r}_{12}}(r_{12}) \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z), \quad (3.3.27)$$

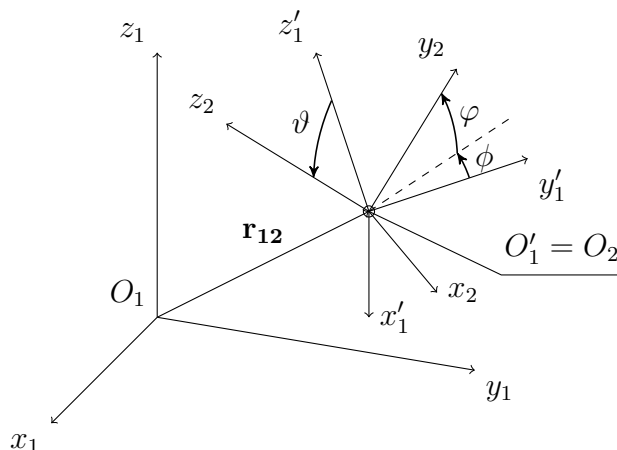
což po roznásobení lze psát jako

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12} & \mathbf{r}_{2L} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi_y c\varphi_z & -c\varphi_y s\varphi_z & s\varphi_y & x_{12} \\ c\varphi_x s\varphi_z + s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z & c\varphi_x c\varphi_z - s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z & -s\varphi_x c\varphi_y & y_{12} \\ s\varphi_y s\varphi_z - c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z & s\varphi_x c\varphi_z + c\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z & c\varphi_x c\varphi_y & z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3.28)$$

kde $c = \cos(\varphi)$ a $s = \sin(\varphi)$.

Řešením soustavy goniometrických rovnic, která vznikne vyjmutím části matice odpovídající matici směrových kosínů \mathbf{S}_{12} , lze získat úhly, které popisují polohu bodu v souřadnicovém systému 1, tzv. Cardanovy úhly.

Na obrázku 8 jsou obdobným způsobem naznačeny dva souřadnicové systémy reprezentující tělesa vázaná sférickou vazbou, jejich vzájemná poloha je nyní popsána Eulerovými úhly ψ , ϑ a φ .



Obrázek 8: Schématické zobrazení Eulerových úhlů

Transformace lze analogicky popsat maticí \mathbf{T}_{12} a hledání Eulerových úhlů probíhá stejným způsobem s tím rozdílem, že matice směrových kosínů má tvar

$$\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{\varphi_z}(\psi) \mathbf{S}_{\varphi_y}(\vartheta) \mathbf{S}_{\varphi_z}(\varphi) = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\vartheta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\vartheta c\varphi & s\psi s\vartheta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\vartheta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\vartheta c\varphi & -c\psi s\vartheta \\ s\vartheta s\varphi & s\vartheta c\varphi & c\vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.3.29)$$

3.3.2 Inverzní kinematická úloha

Problémy spojené s řešením inverzní kinematiky průmyslových manipulátorů pramení z jejich geometrického uspořádání, ze kterého vyplývají nelineární rovnice. Tyto rovnice nemají jednoznačné řešení a matematické řešení nemusí vždy odpovídat fyzikální podstatě problému.

Jsou rozlišovány dva typy řešení inverzní kinematické úlohy:

- Analytické řešení (řešení v uzavřené formě)
- Numerické řešení

Při numerických řešeních jsou všechny proměnné získávány pomocí iteračních metod. V tomto případě se může vyskytnout několik problémů:

- Nesprávné určení počátečních podmínek.
- Nemusí být zaručena konvergence ke správnému řešení.
- Nepokrývá nejednoznačnosti řešení.
- Řešení nemusí existovat, pokud je Jacobiho matice singulární nebo může být nepřepřesné, pokud je matice tzv. špatně podmíněná.

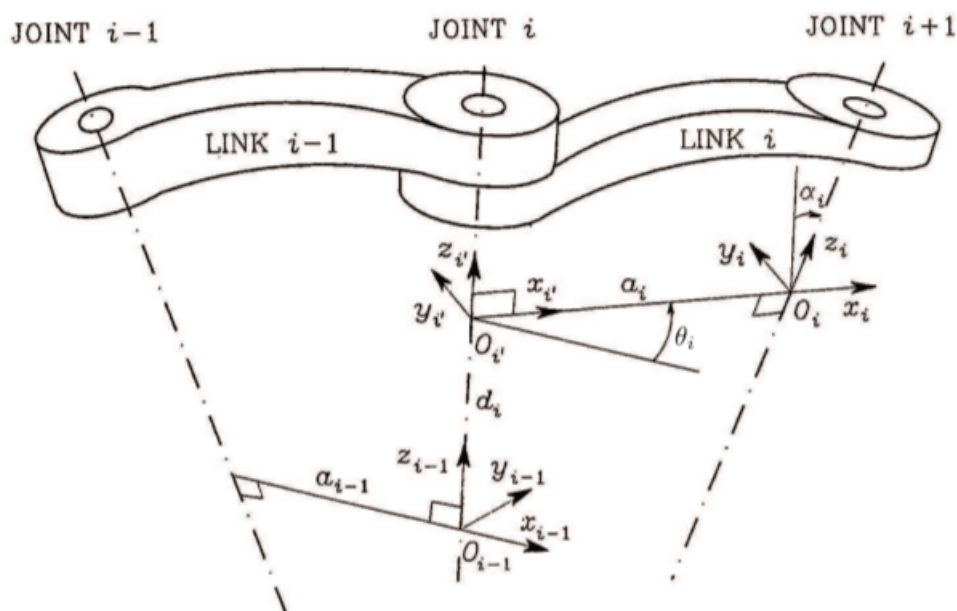
V této práci je řešení problematiky inverzní kinematiky robotického manipulátoru cíleno na řešení v uzavřené formě, které poskytuje jednoduché vztahy pro řešení úlohy.

3.3.3 Popis geometrie mechanismu

Pro geometrický popis uspořádání ramen a kloubů manipulátoru je zavedeno mnoho metod, které se pokouší jednoduše a systematicky definovat souřadnicové systémy, které definují jednotlivé členy mechanismu a jejich vzájemnou polohovou transformaci. Polohová transformace dvou po sobě jdoucích souřadnicových systémů závisí na daných geometrických parametrech, které jsou konstantní (tvar ramen, kloubů a jejich vzájemné uspořádání) a kloubových souřadnicích q , které definují aktuální polohu manipulátoru. Mezi nejznámější úmluvy patří Khalil-Kleinfingerova a Denavit-Hartenbergova [6].

Denavit-Hartenbergova úmluva

Nechť jsou dvě ramena manipulátoru $Link_{i-1}$ a $Link_i$ spojena kloubem $Joint_i$ s jedním stupněm volnosti, viz obrázek 9.



Obrázek 9: Denavit-Hartenbergova úmluva [7]

Souřadnicový systém \mathbf{F}_i lze za předpokladu znalosti \mathbf{F}_{i-1} dle D-H úmluvy definovat následovně:

- Osa \mathbf{z}_i je rovnoběžná s osou rotace, resp. translace kloubu $Joint_{i+1}$ a osa \mathbf{z}_i' je rovnoběžná s osou rotace, resp. translace kloubu $Joint_i$.
- Počátek \mathbf{O}_i souřadnicového systému \mathbf{F}_i je v průsečíku osy \mathbf{z}_i a normály os \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i . Počátek \mathbf{O}_i' souřadnicového systému \mathbf{F}_i' je v průsečíku osy \mathbf{z}_i a téže normály.
- Osy \mathbf{x}_i a \mathbf{z}_i' jsou rovnoběžné s normálou ve směru od kloubu $Joint_i$ do kloubu $Joint_{i+1}$.
- Osy \mathbf{y}_i a \mathbf{y}_i' jsou zvoleny tak, aby výsledné souřadnicové systémy byly pravotočivé [6].

Umístění souřadnicového systému není pomocí D-H úmluvy jednoznačně definováno v následujících případech

- Pro systém $\mathbf{F}_0 = \{\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0\}$ je jednoznačně určena pouze osa \mathbf{z}_0 (podle osy rotace či translace prvního kloubu manipulátoru). Osu \mathbf{x}_0 a počátek \mathbf{O}_0 lze zvolit libovolně. Osa \mathbf{y}_0 je pak zvolena tak, aby výsledný systém byl pravotočivý.
- Pro systém $\mathbf{F}_n = \{\mathbf{O}_n - \mathbf{x}_n\mathbf{y}_n\mathbf{z}_n\}$, kde n je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa \mathbf{z}_n , protože následující kloub už neexistuje. Osa \mathbf{x}_n však musí zůstat kolmá k ose \mathbf{z}_{n-1} .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) rovnoběžné, jejich normála není jednoznačně určena (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) protínají (normála je nulové délky), osa \mathbf{x}_i bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i). Její kladný směr může být zvolen libovolně [6].

Vzájemná poloha souřadnicových systémů \mathbf{F}_{i-1} a \mathbf{F}_i může být nyní popsána pomocí čtyř D-H parametrů:

- a_i ... vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_i a \mathbf{O}'_i
- d_i ... vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_{i-1} a \mathbf{O}'_i
- α_i ... úhel mezi osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i daný pootočením systému \mathbf{F}'_i podél osy \mathbf{x}'_i .
- Θ_i ... úhel mezi osami \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i daný pootočením systému \mathbf{F}_{i-1} podél osy \mathbf{z}_{i-1} [6].

Pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

- Pro **rotační kloub (R)** je proměnná definující pohyb kloubu Θ_i a proměnné a_i , α_i a d_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene
- Pro **posuvný kloub (P)** je proměnná definující pohyb kloubu d_i a proměnné a_i , α_i a Θ_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene

Matice popisující transformaci mezi jednotlivými souřadnicovými systémy pak lze určit následujícím postupem.

- Volba systému \mathbf{F}_{i-1}
- Posun tohoto systému podél osy \mathbf{z}_{i-1} o vzdálenost d_i a pootočení okolo osy \mathbf{z}_{i-1} o úhel Θ_i , což vyjadřuje transformaci do systému \mathbf{F}'_i .

$$\mathbf{T}_{i-1,i} = \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(d_i)\mathbf{T}_{\varphi_{\mathbf{z}}}(\Theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Theta_i & -s\Theta_i & 0 & 0 \\ s\Theta_i & c\Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\Theta_i & -s\Theta_i & 0 & 0 \\ s\Theta_i & c\Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.30)$$

- Posun systému \mathbf{F}'_i podél osy \mathbf{x}'_i o vzdálenost a_i a pootočení okolo osy \mathbf{x}'_i o úhel α_i , což vyjadřuje transformaci do systému \mathbf{F}_i .

$$\mathbf{T}_{i,i'} = \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(a_i)\mathbf{T}_{\varphi_{\mathbf{x}}}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.31)$$

- Výsledná transformační matice ze systému \mathbf{F}_{i-1} do \mathbf{F}_i je pak dána:

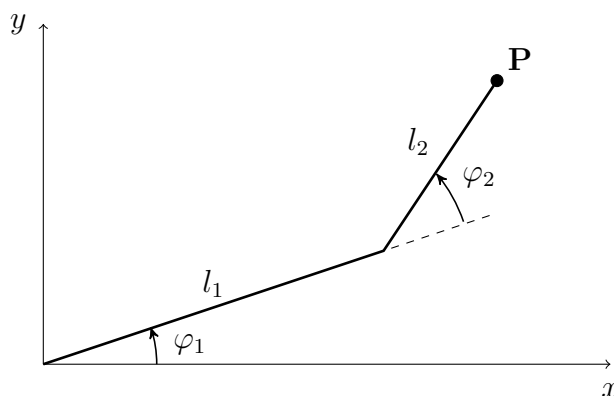
$$\mathbf{T}_{i-1,i'} = \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(d_i)\mathbf{T}_{\varphi_{\mathbf{z}}}(\Theta_i)\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(a_i)\mathbf{T}_{\varphi_{\mathbf{x}}}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} c\Theta_i & -s\Theta_i c\alpha_i & s\Theta_i s\alpha_i & a_i c\Theta_i \\ s\Theta_i & c\Theta_i c\alpha_i & -c\Theta_i s\alpha_i & a_i s\Theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.32)$$

3.3.4 Trigonometrický přístup řešení inverzní kinematické úlohy

Geometrický přístup spočívá v rozložení prostorové geometrie robotu do několika rovinných úloh. Pomocí goniometrického přístupu, aplikovaným na rovinný manipulátor se dvěma stupni volnosti, který je schématicky znázorněn na obrázku 10, bude ukázána platnost některých vztahů z tabulky 1, které jsou potom užity pro řešení inverzní kinematiky v prostoru.

Rovinný manipulátor

Úhly φ_1 a φ_2 se dají vypočítat na základě znalosti délky ramen mechanismu a polohy koncového efektoru \mathbf{P} popsaného souřadnicemi P_x a P_y



Obrázek 10: K odvození úhlu φ_3 goniometrickým přístupem

Polohu bodu $\mathbf{P} = [P_x; P_y]$ lze vyjádřit jako

$$P_x = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (3.3.33)$$

$$P_y = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (3.3.34)$$

Sečtením kvadrátů rovnic 3.3.33 a 3.3.34 získáváme

$$P_x^2 + P_y^2 = (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2))^2 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2))^2, \quad (3.3.35)$$

což lze roznásobením přepsat do tvaru

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2(c^2\varphi_1 + s^2\varphi_1) + l_2^2(c^2(\varphi_1 + \varphi_2) + s^2(\varphi_1 + \varphi_2)) + 2l_1l_2(c\varphi_1c(\varphi_1 + \varphi_2) + s\varphi_1s(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Důsledkem platnosti vztahů

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (3.3.36)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (3.3.37)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1, \quad (3.3.38)$$

lze řešení zjednodušit

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_1^2 + 2l_1l_2(c\varphi_1(c\varphi_1c\varphi_2 - s\varphi_1s\varphi_2) + s\varphi_1(s\varphi_1c\varphi_2 + c\varphi_1s\varphi_2))$$

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2(c^2\varphi_1c\varphi_2 - c\varphi_1s\varphi_1s\varphi_2 + s^2\varphi_1c\varphi_2 + c\varphi_1s\varphi_1s\varphi_2)$$

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2(c\varphi_2(c^2\varphi_1 + s^2\varphi_1))$$

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c\varphi_2,$$

z čehož vyplývá

$$\cos\varphi_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (3.3.39)$$

Platností vztahu 3.3.38 lze vyjádřit $\sin\varphi_2$ jako

$$\sin\varphi_2 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2}. \quad (3.3.40)$$

Dvě výsledná řešení úhlu φ_2 pak lze napsat jako

$$\varphi_2 = \text{Atan2}\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2}, \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right), \quad (3.3.41)$$

což je v souladu se vztahem 4 z tabulky 1.

V inverzní kinematice se uplatňují goniometrická řešení, která jsou platná pro dané tvary rovnic dle tabulky 1.

Tabulka 1: Goniometrická řešení pro dané tvary rovnic [8]

#	Rovnice	Řešení
1	$a \sin\varphi + b \cos\varphi = c$	$\varphi = \text{Atan2}(a, b) \mp \text{Atan2}(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$
2	$a \sin\varphi + b \cos\varphi = 0$	$\varphi = \text{Atan2}(-b, a) \wedge \varphi = \text{Atan2}(b, -a)$
3	$\cos\varphi = a \wedge \sin\varphi = b$	$\varphi = \text{Atan2}(b, a)$
4	$\cos\varphi = a$	$\varphi = \text{Atan2}(\mp\sqrt{1 - a^2}, a)$
5	$\sin\varphi = b$	$\varphi = \text{Atan2}(a, \mp\sqrt{1 - a^2})$

3.3.5 Algebraický přístup řešení inverzní kinematické úlohy

U manipulátorů, které se sestávají z více ramen zasahujícími do třech rozměrů, je řešení jejich geometrie problematické. Důsledkem toho se pro odvozování inverzní kinematické úlohy využívá algebraický přístup, který vychází ze znalosti maticové metody.

Pro šestiosý manipulátor je pozice a orientace koncového efektoru popsána maticí

$$\mathbf{T}_{\text{Počátek, Efektor}} = \mathbf{T}_{17} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & P_x \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & P_y \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3.42)$$

kde prvky s_{ij} reprezentují natočení a prvky P_x , P_y a P_z představují polohový vektor.

Pro analytické vyjádření kloubových souřadnic manipulátoru se vychází z rovnosti známé transformace (z rovnice 3.3.42) a součinu transformačních matic, kterými lze popsat mechanismus.

$$\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6), \quad (3.3.43)$$

kde q_i jsou kloubové proměnné, které jsou hledány jako funkce prvků matice $\mathbf{T}_{\text{Počátek, Efektor}}$. První proměnná q_1 se dá získat z následující rovnice:

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6), \quad (3.3.44)$$

kde součin $\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{12}(q_1) = \mathbf{E}$, což je jednotková matice. Vztah 3.3.43 se tím zjednoduší na tvar

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6). \quad (3.3.45)$$

Pro nalezení dalších proměnných q_i se postupuje obdobně.

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6) \quad (3.3.46)$$

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6) \quad (3.3.47)$$

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6) \quad (3.3.48)$$

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{67}(q_6) \quad (3.3.49)$$

Řešení existuje ve tvaru dvanácti nelineárních rovnic. Jediná neznámá pro levou stranu rovnice 3.3.45 je q_1 . Dvanáct nelineárních prvků pravé strany rovnice je buď rovno nule, nebo jsou to konstanty, případně jsou vyjádřeny jako funkce q_2 až q_6 . V případě, že porovnáme prvky levé strany, které jsou funkcí q_1 , a prvky pravé strany, pak nalezneme kloubovou proměnnou q_1 jako funkci s_{11} , s_{12} , ..., s_{33} , P_x , P_y , P_z a fixních parametrů ramene. Jakmile se získá q_1 , ostatní kloubové proměnné mohou být nalezeny stejným způsobem. Není nezbytné, aby první rovnice vrátila q_1 , druhá q_2 apod. Při hledání řešení inverzní kinematické úlohy mohou být vyřešeny rovnice (3.3.45 - 3.3.49) v libovolném pořadí [9].

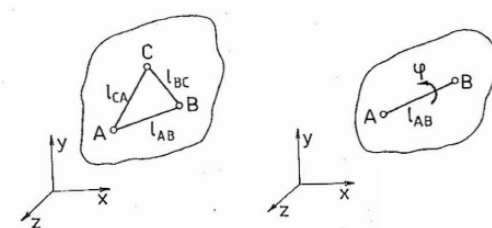
3.4 Uložení tuhých těles v prostoru

V reálných případech nemusí být možné zjednodušit problém na rovinnou úlohu. V takovém případě se postup řešení nijak nemění, ale je třeba respektovat větší pestrost vazeb (tzv. kinematických dvojic) a při početním řešení větší počet rovnic [10].

Pokud máme volné těleso v prostoru, lze zvolit tři nekolineární body A, B, C . Tyto tři body definují rovinu a její poloha pak určuje polohu tělesa. Každý z uvedených bodů je popsán třemi souřadnicemi, což je celkem 9 parametrů. Ne všechny jsou ale nezávislé. Protože uvažujeme tuhé těleso, musí být vzdálenost bodů neměnná, tj.

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \textit{konstanta} \quad [10]. \quad (3.4.1)$$

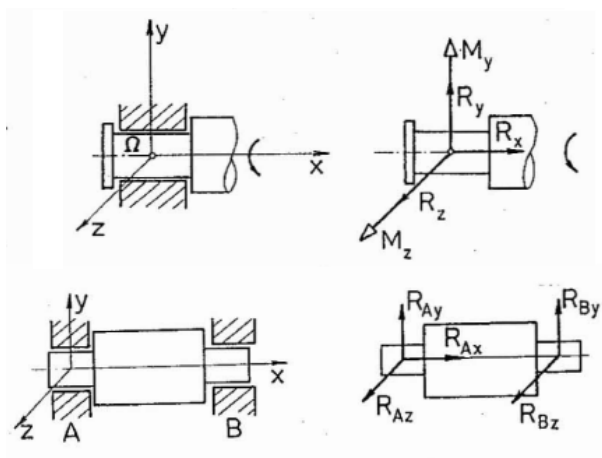
Tuto vazbovou podmínku lze analogicky sestavit i pro l_{AC} a l_{BC} (obrázek 11). Celkem tedy existují tři vazbové rovnice, kterým musí souřadnice bodů vyhovovat. Polohu volného tělesa v prostoru tedy popisuje $9 - 3 = 6$ nezávislých souřadnic. Těleso má tím pádem šest stupňů volnosti [10].



Obrázek 11: K vazbovým podmínkám volného tělesa v prostoru [10]

Uvolnění rotační vazby

Rotační vazba je nižší kinematická vazba (sousední tělesa se dotýkají v ploše), která zamezuje pěti dílčím pohybům (posuv ve směru os x, y, z , rotace okolo os y, z) [10]. Dva způsoby uvolnění vazby jsou ukázány na obrázku 12.



Obrázek 12: Uvolnění rotační vazby [10]

3.5 Inverzní dymanika

V úvodu bylo řečeno, že jednou z podmínek pro realizovatelnost pohybu jsou limitní velikosti krouticích momentů v jednotlivých pohonech. Nástroj, kterým lze získat velikosti reakčních účinků a točivých momentů v pohonech, je inverzní dynamická úloha. Metodou uvolňování lze sestavit Newton - Eulerovy rovnice, které mechanismus popisují a obecně mají tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{Q}_j, \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{I}_s \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j^Q [4]. \quad (3.5.2)$$

Výhodou inverzní dynamické úlohy je skutečnost, že průběhy rychlostí a úhlových zrychlení středisek hmotností jednotlivých členů mechanismu známe z kapitoly 3.3.5 nebo 3.3.4. Výpočet reakcí je tedy problematikou řešení soustavy lineárních rovnic.

3.5.1 Matice hmotových charakteristik

Matice \mathbf{M} se nazývá matice hmotnosti a má tvar

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Matice \mathbf{I}_s je matice setrvačnosti. Její složky lze vyjádřit pomocí radius vektoru $\mathbf{r}_{1n} = [x_n \ y_n \ z_n]^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_s &= - \int_{(m)} r^2 dm = - \int_{(m)} \begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix}^2 dm = \\ &= - \int_{(m)} \begin{bmatrix} y_2^2 + z_2^2 & -x_2 y_2 & -x_2 z_2 \\ -y_2 x_2 & z_2^2 + x_2^2 & -y_2 z_2 \\ -z_2 x_2 & -z_2 y_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{bmatrix}^2 dm = \\ &= \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

kde se prvky na hlavní diagonále I nazývají momenty setrvačnosti k osám a prvky D mimo hlavní diagonálu deviačními momenty [4].

Tyto charakteristiky jsou ovšem vztažené k lokálnímu souřadnicovému systému. Dle potřeby je možné tyto charakteristiky přepočítat do jiného systému souřadnic. Tento přepočet vychází z rovnosti kinetické energie bez ohledu na souřadnicový systém, ve kterém je vyjádřena. Výsledný vztah se dá zapsat jako

$$\mathbf{I}_{s_i} = \mathbf{S}_{ij} \mathbf{I}_j \mathbf{S}_{ij}^T [4]. \quad (3.5.5)$$

3.5.2 Zrychlení a úhlová zrychlení středisek hmotnosti

Postupem, který byl odvozen v části 3.3.5, získáváme úhly natočení v jednotlivých lokálních souřadnicových systémech, tzv. relativní úhly. Pro aplikaci Newton - Eulerových rovnic je třeba nalézt zrychlení $\ddot{\mathbf{s}}$ a úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ a úhlová zrychlení $\boldsymbol{\alpha}$ středisek hmotností členů mechanismu v inerciální vztažné soustavě.

Zrychlení středisek hmotnosti

Jako vztažný souřadnicový systém pro rovnice popisující translační pohyb je vhodné zvolit globální systém. K získání zrychlení $\ddot{\mathbf{s}}$ v tomto systému je možné využít maticové metody a přímé kinematické úlohy, která je popsána v kapitole 3.3.1.

Úhlová zrychlení středisek hmotnosti

Bylo ukázáno, že přepočítání matice setrvačnosti \mathbf{I}_s do globálního systému je možné, pokud je třeba. Z důvodu snížení výpočetní náročnosti jsou rovnice popisující rotační pohyb vztaženy k lokálním systémům jednotlivých členů. Přepočítání tedy není potřebné.

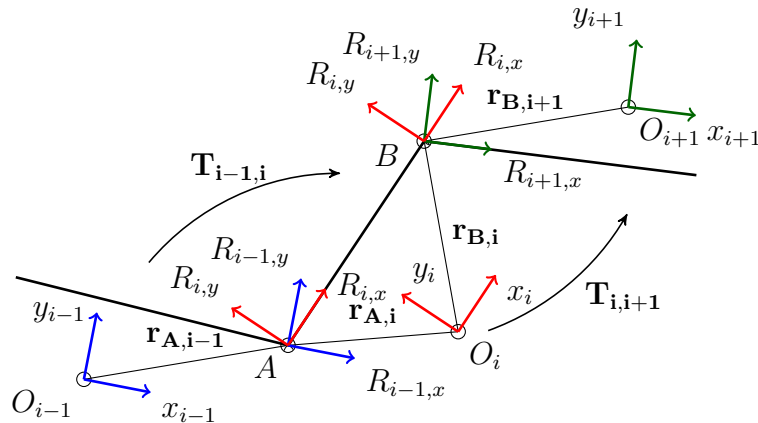
Souřadnice φ_x , φ_y a φ_z jsou právě Cardanovy úhly. Jejich derivací lze získat relativní úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ a úhlová zrychlení $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \quad (3.5.6)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} \quad (3.5.7)$$

3.5.3 Metoda uvolňování a transformace reakcí mezi systémy

Uvolnění rotační vazby bylo popsáno v kapitole 3.4. Pro výpočet reakčních účinků (a momentů na pohonech) je nezbytné provést uvolnění vazeb v inerciální vztažné soustavě. Z důvodu systematickosti lze uvolnění otevřených kinematických řetězců provést tak, že reakční účinky respektují orientaci lokálního souřadnicového systému tělesa mechanismu. Pro sestavení pohybových rovnic členu mechanismu je tedy třeba reakční účinky vazby promítnout do tohoto systému. Pro názornost je tento krok schématicky zobrazen na obrázku 13.



Obrázek 13: Schématické zobrazení transformace reakčních účinků

Pro silové rovnice v systému i pak platí

$$\sum_{k=1}^n {}^i\mathbf{F}_k = {}^i\mathbf{R}_k + \underbrace{\mathbf{S}_{i,i+1} \cdot {}^{i+1}\mathbf{R}_{k,i+1}}_{{}^i\mathbf{R}_k}, \quad (3.5.8)$$

kde

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{kx} \\ \mathbf{R}_{ky} \\ \mathbf{R}_{kz} \end{bmatrix}. \quad (3.5.9)$$

A pro momentové rovnice

$$\sum_{k=1}^n {}^i\mathbf{M}_k = {}^i\mathbf{M}_k + \mathbf{r}_{i+1} \times \underbrace{(\mathbf{S}_{i,i+1} \cdot {}^{i+1}\mathbf{R}_k)}_{{}^i\mathbf{M}_k}, \quad (3.5.10)$$

kde

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{kx} \\ \mathbf{M}_{ky} \\ \mathbf{M}_{kz} \end{bmatrix}. \quad (3.5.11)$$

Vektor vnějších sil \mathbf{Q}

Vektor \mathbf{Q} je vektor vnějších silových účinků. Zahrnuje tedy tíhy od jednotlivých členů mechanismu a vnější silové účinky.

$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n]^T \quad (3.5.12)$$

3.5.4 Řešení inverzní dynamiky

Stanovením výše zmíněných proměnných v rovnicích 3.5.8, 3.5.10 a 3.5.12 se řešení inverzní dynamiky zredukuje na problém řešení soustavy lineárních rovnic.

Pokud proměnné na pravých stranách rovnic 3.5.1 a 3.5.2 označíme jako \mathbf{A} , lze soustavu zapsat jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{Q}, \quad (3.5.13)$$

kde vektor \mathbf{R} představuje vektor neznámých reakcí.

3.6 Optimalizace pomocí genetických algoritmů

Optimalizační algoritmy se používají k nalezení vhodného (optimálního) řešení problému zejména v případech, kdy není znám matematický popis řešení problému. Tyto metody jsou založeny na různých způsobech prohledávání prostoru řešení. Je tedy zřejmé, že rychlost nalezení výsledku závisí na vhodném vymezení prostoru, kde se hledané řešení nachází.

V principu nejjednodušší jsou algoritmy založené na „hrubé síle“. Takové algoritmy vygenerují všechna možná řešení a vyberou z nich takové, které nejlépe odpovídá zadanému kritériu. Tyto algoritmy vždy najdou optimální globální řešení, ale kvůli dramaticky narůstající složitosti jsou použitelné pouze pro malé počty proměnných.

Genetické algoritmy

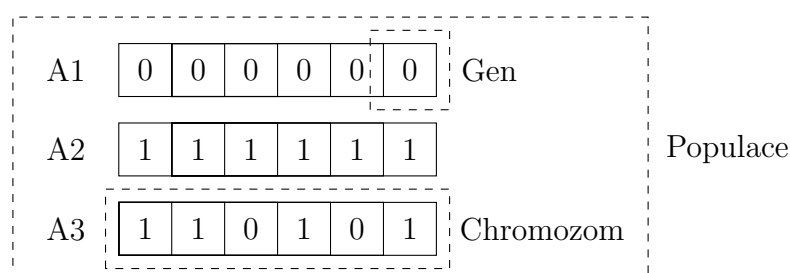
Genetické algoritmy využívají tzv. heuristiku, což je postup rozhodující o směru a velikosti dalšího kroku algoritmu na základě informací získaných v předchozích krocích. První jej popsal John Holland ve článku „Adaptation in Natural and Artificial Systems“ (Michigan Press, 1975). Tyto metody jsou inspirovány přirozenými procesy v přírodě, jak je popsal Charles Darwin v jeho teorii o vývoji druhů, a simulují boj jednotlivých organismů (jedinců) o přežití [11].

3.6.1 Princip funkce

Každý jedinec je kandidátem řešení dané úlohy a jeho kvalita je kvantitativně vyjádřena tzv. ohodnocovací funkcí (fitness funkce). Úkolem genetického algoritmu je „vyšlechtit“ takového jedince (řešení), pro kterého bude tato ohodnocovací funkce vycházet nejlépe.

Inicializace

Proces začíná stanovením počáteční populace, která je složena z jedinců. Každý jedinec reprezentuje řešení problému. Jedinci jsou charakterizováni parametry, které se nazývají geny. Geny jsou svázány do řetězců, které se označují jako chromozomy [12]. Tyto základní pojmy jsou pro přehlednost znázorněny na obrázku 14.



Obrázek 14: Populace, chromozomy a geny

Fitness funkce

Fitness funkce stanoví vhodnost daných jedinců (schopnost jedince soupeřit s ostatními jedinci). Dle této vhodnosti jsou pak vybráni jedinci pro následnou reprodukci, tím jejich geny (parametry řešení), které se zdají vhodné, pokračují do další generace [12].

3.7 Formulace optimalizačního kritéria

Při robotických aplikacích je třeba dbát na dvě věci, těmi jsou strojový čas a energetické nároky. Úspory na energiích, byť minimální, jsou důležité, protože aplikace, které vyžadují nahrazení člověka robotem, jsou zpravidla velkosériové (dlouhé časové období).

3.7.1 Minimální strojový čas

U aplikací, kde by byl jediným kritériem strojový čas bez ohledu na energetické nároky vystupuje jako jediná proměnná délka trajektorie.

Při uvažování trajektorie v podobě více segmentů Bézierovy křivky navazujících na sebe s C^2 spojitostí jsou optimalizačními parametry souřadnice bodů $\mathbf{V}_1 = [V_{1x}, V_{1y}, V_{1z}]$ a $\mathbf{V}_2 = [V_{2x}, V_{2y}, V_{2z}]$. Ostatní souřadnice řídicích bodů řídicích polygonů křivky jsou pak odvozeny ze souřadnic těchto bodů.

Optimalizační kritérium lze formulovat jako

$$krit = \min \left(\sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_i(t))^2 + (\phi'_i(t))^2 + (\chi'_i(t))^2} dt \right), \quad (3.7.1)$$

kde n je počet segmentů křivky a integrál vyjadřuje délku segmentu (viz kapitola 3.2).

3.7.2 Minimální energetické nároky

V další části budeme uvažovat aplikaci, např. obrábění odlitků, kde je obráběcí čas dlouhý v porovnání s pohybem robota. V takovém případě by bylo vhodné zvolit takovou trajektorii, která bude nejméně energeticky náročná.

Pro krouticí moment elektromotoru platí

$$M = \frac{P_m}{\omega}, \quad (3.7.2)$$

kde n jsou otáčky elektromotoru a P_m je příkon elektromotoru definován jako

$$P_m = UI. \quad (3.7.3)$$

Ze vztahů vyplývá 3.7.2 a 3.7.3, že existuje relace mezi proudem I , napětím U a krouticím momentem M . Pro zjednodušení bude minimalizace energetických nároků omezena na minimalizaci součinu krouticích momentů na pohonech a úhlové rychlosti.

Hnací momenty v pohonech mohou být jak kladné, tak záporné, proto je kritérium cíleno na minimum absolutních hodnot součinů okamžitých momentů a úhlových rychlostí.

$$krit = \min \left(\sum_{i=1}^n \int_0^t |M_i \omega_i| dt \right), \quad (3.7.4)$$

kde n je počet stupňů volnosti (počet pohonů).

Vyhodnocení výsledků při kritériu minimálních energetických nároků

Z důvodu zjednodušení minimalizace energetických nároků je třeba si uvědomit, že výsledné momenty nejsou jasným ukazatelem úspory. Všechny pohony na průmyslových manipulátorech nemusí být totiž stejné, tím pádem mohou mít rozdílné parametry. Je potřeba jednotlivým hnacím momentům přiřadit váhu dle parametrů elektromotorů.

3.7.3 Hledání vyváženého poměru rychlosti a náročnosti trajektorie

V některých aplikacích se může stát, že trajektorie bude zbytečně rychlá a tím pádem i zbytečně energeticky náročná. V takovém případě by bylo vhodné zvolit trajektorii, která bude „pomalší“, ale je možné uspořit na energii.

V tomto případě je třeba zvolit vhodný poměr úspory strojového času ku energetickým nárokům. Prvním krokem je vyrovnání vah jednotlivých funkcí (délka trajektorie, hnací momenty a úhlové rychlosti). Nejjednodušší metoda je vzájemné vynásobení řádem druhé funkce. Tento krok reprezentují koeficienty r_1 a r_2 .

Pozn.: Pokud jsou funkční hodnoty funkce f řádově desítky a funkční hodnoty funkce g tisíce, přenásobí se funkce f tisícem a funkce g deseti.

V druhém kroku se musí zvolit koeficienty k_1, k_2 , které přisuzují důležitost jednotlivým kritériím. Kritérium pro optimalizaci pak lze formulovat jako

$$krit = \min \left(k_1 r_1 \sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_i(t))^2 + (\phi'_i(t))^2 + (\chi'_i(t))^2} dt + k_2 r_2 \sum_{i=1}^n \int_0^t |M_i \omega_i| dt \right). \quad (3.7.5)$$

Dále je třeba diskutovat ekonomické dopady volby tohoto poměru. Může se totiž stát, že zpomalení strojového času o procenta povede k násobně větší úspoře na energiích. Toto rozhodnutí závisí na charakteru aplikace.

4 Aplikace

V praktické části je zvolen konkrétní robotický manipulátor, pro který bude odvozeno řešení inverzní kinematické i dynamické úlohy. Toto řešení bude následně naprogramováno v prostředí MATLAB. Následně bude proveden návrh trajektorie pomocí C^2 spojitých Bézierových křivek (kap. 3.2). Nakonec bude trajektorie optimalizována pomocí genetického algoritmu (kap. 3.6) dle kritérií popsanych v kapitole 3.7.

4.1 Popis robota

K optimalizaci pohybu konkrétního mechanismu byl vybrán robot Racer 7 - 1,4 od společnosti Comau (obrázek 17). Manipulátor má nosnost 7 kg a v praxi je vhodný pro aplikace jako je měření, svařování, zakládání, balení, leštění.

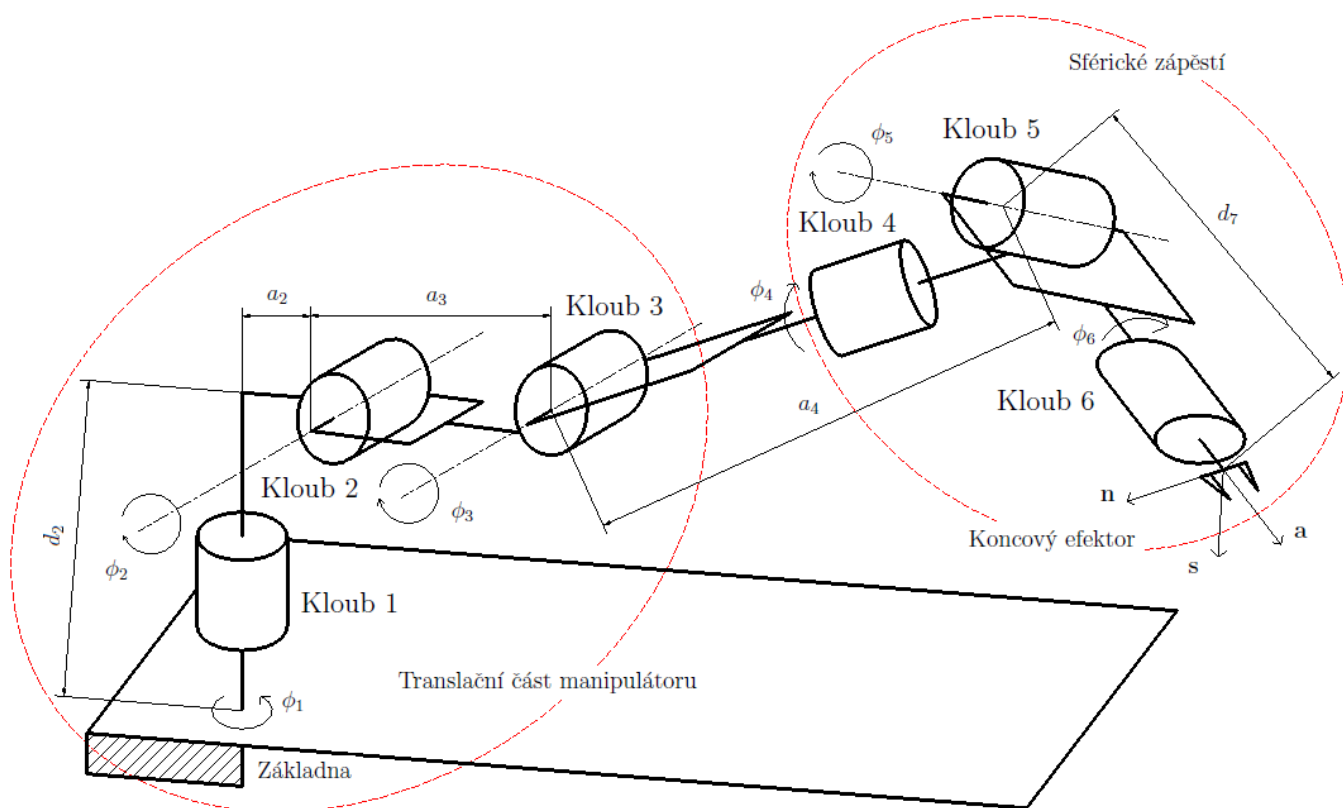


Obrázek 17: Racer 7 - 1,4

Jedná se o antropomorfní robotický manipulátor se sférickým zápěstím a řadí se do skupiny neredundantních manipulátorů (nemá více nezávislých aktivních kloubových souřadnic než je stupňů volnosti) se šesti stupni volnosti (3 posuvné a 3 rotační) koncového efektoru. Manipulátor je tak schopen polohovat svůj koncový efektor do libovolné polohy (pozice a orientace) v prostoru v rámci dosažitelnosti.

4.2 Kinematika mechanismu

Výhodou při řešení kinematiky manipulátoru se sférickým zápěstím je skutečnost, že úloha jde rozdělit do dvou částí. První část řeší polohu zápěstí v kartézském souřadnicovém systému a druhá potom řeší orientaci koncového efektoru. K odvození analytických vztahů pro řešení inverzní kinematiky bylo využito algebraického přístupu popsáno v kapitole 3.3.5.



Obrázek 18: Racer 7 - 1,4 ve schématickém zobrazení

Označení členů mechanismu začíná od pořadového čísla 2, protože číslo 1 je rezervováno pro základní rám. D-H parametry translační části řešeného mechanismu jsou uvedeny v tabulce 2. Vzhledem k tomu, že provedené řešení inverzní kinematické úlohy sférického zápěstí vrací Eulerovy úhly ZYZ, což není v souladu s D-H úmluvou, nejsou tyto parametry v tabulce 2 uvedeny.

Tabulka 2: D-H parametry translační části manipulátoru

Člen	a_i	α_i	d_i	ϕ_i
2	a_2	0	d_2	ϕ_1
3	a_3	$\frac{\pi}{2}$	0	ϕ_2
4	a_4	0	0	ϕ_3

Pro odvození analytického řešení kinematiky mechanismu je připomenuta rovnice 3.3.43 popisující celý mechanismus

$$\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6), \quad (4.2.1)$$

kde q_i jsou kloubové proměnné.

Tyto proměnné jsou hledány jako funkce prvků matice \mathbf{T}_{17} . Vynásobením rovnice inverzí matice $\mathbf{T}_{12}(q_1)$ a platností vztahu $\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{12}(q_1) = \mathbf{E}$ lze rovnici upravit do tvaru

$$\left[\mathbf{T}_{12}(q_1)\right]^{-1}\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3)\mathbf{T}_{45}(q_4)\mathbf{T}_{56}(q_5)\mathbf{T}_{67}(q_6).$$

4.2.1 Řešení antropomorfního ramene manipulátoru

Pro řešení úlohy polohy sférického zápěstí je třeba zavést kompenzaci délky koncového efektoru vzhledem k požadované trajektorii manipulátoru. Z obrázku 18 je vidět, že orientace koncového efektoru je dána

$$\mathbf{S}_{17} = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Poloha sférického zápěstí se potom stanoví jako

$$\mathbf{P}_w = \mathbf{P} - d_7 \mathbf{a}. \quad (4.2.3)$$

Jak bylo řečeno manipulátory se šesti stupni volnosti a Eulerovým zápěstím lze rozdělit na řešení úlohy polohy zápěstí a úlohu orientace koncového efektoru. Pro řešení ramene manipulátoru se tedy stačí omezit na první tři klouby manipulátoru. Rovnice transformace pak má tvar

$$\mathbf{T}_{14} = \mathbf{T}_{12}(q_1)\mathbf{T}_{23}(q_2)\mathbf{T}_{34}(q_3). \quad (4.2.4)$$

Ze znalosti maticové metody, geometrie mechanismu a využitím Denavit-Hartenbergovy úmluvy lze transformaci mezi globálním systémem 1 a souřadnicovým systémem tělesa 2 vyjádřit jako

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_z(d_2)\mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_1)\mathbf{T}_x(a_2). \quad (4.2.5)$$

Transformace mezi následujícími lokálními systémy jsou definovány následně:

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{\varphi_x}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_2)\mathbf{T}_x(a_3), \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_3)\mathbf{T}_x(a_4). \quad (4.2.7)$$

Dosazením příslušných transformačních matic do rovnice 4.2.4 získáváme

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & P_x \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & P_y \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_1 & -s\phi_1 & 0 & a_2c\phi_1 \\ s\phi_1 & c\phi_1 & 0 & a_2s\phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_2 & -s\phi_2 & 0 & a_3c\phi_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\phi_2 & c\phi_2 & 0 & a_3s\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_3 & -s\phi_3 & 0 & a_4c\phi_3 \\ s\phi_3 & c\phi_3 & 0 & a_4s\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c\phi_1 & s\phi_1 & 0 & -a_2 \\ -s\phi_1 & c\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & P_x \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & P_y \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\phi_2 & -s\phi_2 & 0 & a_3c\phi_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\phi_2 & c\phi_2 & 0 & a_3s\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_3 & -s\phi_3 & 0 & a_4c\phi_3 \\ s\phi_3 & c\phi_3 & 0 & a_4s\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_yc\phi_1 - P_xc\phi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_z - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_3c\phi_2 + a_4c(\phi_2 + \phi_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_3s\phi_2 + a_4s(\phi_2 + \phi_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.8}
\end{aligned}$$

Úhel natočení ϕ_1

Porovnáním prvků matic (2,4) z obou stran rovnice 4.2.8 lze stanovit nezávislou kloubovou souřadnici ϕ_1 jako

$$\phi_1 = \text{Atan2}(P_y, P_x) \quad \text{nebo} \quad \phi_1 = \text{Atan2}(-P_y, -P_x). \tag{4.2.9}$$

Úhel natočení ϕ_3

Pokud se sečtou kvadráty prvků (1,4) a (3,4) rovnice 4.2.8, lze odvodit vztah pro výpočet kloubové souřadnice ϕ_3 .

$$(P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2)^2 + (P_z - d_2)^2 = (a_3c\phi_2 + a_4c(\phi_2 + \phi_3))^2 + (a_3s\phi_2 + a_4s(\phi_2 + \phi_3))^2, \tag{4.2.10}$$

což lze pomocí součtových goniometrických vzorců zjednodušit na tvar

$$\cos \phi_3 = \frac{(P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2)^2 + (P_z - d_2)^2 - a_3^2 - a_4^2}{2a_3a_4}. \tag{4.2.11}$$

Ve vztahu 4.2.11 je vidět analogie se vztahem 4 z tabulky 1. Úhel natočení ϕ_3 lze dle tabulky 1 vypočítat jako

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \text{Atan2} \left(\frac{(P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2)^2 + (P_z - d_2)^2 - a_3^2 - a_4^2}{2a_3a_4}, \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{1 - \left(\frac{(P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2)^2 + (P_z - d_2)^2 - a_3^2 - a_4^2}{2a_3a_4} \right)^2} \right) \tag{4.2.12}
\end{aligned}$$

Úhel natočení ϕ_2

Úhel natočení ϕ_2 je možné odvodit z porovnání prvků (1,4) rovnice 4.2.4.

$$P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2 = a_3c\phi_2 + a_4c(\phi_2 + \phi_3), \tag{4.2.13}$$

což lze upravit do tvaru

$$(a_3 + a_4 \cos \phi_3) \cos(\phi_2) - a_4 \sin \phi_3 \sin \phi_2 = P_xc\phi_1 + P_ys\phi_1 - a_2, \tag{4.2.14}$$

kde je vidět analogie se vztahem 1 z tabulky 1. S odkazem na řešení z tabulky 1 lze řešení v uzavřené formě pro úhel ϕ_2 určit jako

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \text{Atan2}(-a_4 \sin, (a_3 + a_4 \cos \phi_3)) \\ & \mp \text{Atan2}\left(\sqrt{(-a_4 \sin)^2 + (a_3 + a_4 \cos \phi_3)^2 - (P_x c \phi_1 + P_y s \phi_1 - a_2)^2}, P_x c \phi_1 + P_y s \phi_1 - a_2\right). \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

4.2.2 Řešení sférického zápěstí manipulátoru

Rovnice popisující mechanismus (3.3.43) lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{T}_{17} = \mathbf{T}_{14} \mathbf{T}_{47}, \quad (4.2.16)$$

kde transformační matice $\mathbf{T}_{14}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ může být vypočítána přímou kinematickou úlohou. Úloha orientace koncového efektoru je pak otázkou řešení rovnice

$$\mathbf{S}_{47}(\phi_4, \phi_5, \phi_6) = \mathbf{S}_{14}^T \mathbf{S}_{17}. \quad (4.2.17)$$

Analogickým vyjádřením transformací mezi systémy 4 až 7 jako

$$\mathbf{T}_{45} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_4), \quad (4.2.18)$$

$$\mathbf{T}_{56} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_5), \quad (4.2.19)$$

$$\mathbf{T}_{67} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\phi_6) \mathbf{T}_z(d_7) \quad (4.2.20)$$

a dosazením matic směrových kosínů do rovnice 4.2.17 lze získat matici směrových kosínů \mathbf{S}_{47} .

$$\mathbf{S}_{47} = \begin{bmatrix} c\phi_4 c\phi_6 s\phi_5 - s\phi_4 s\phi_6 & -c\phi_6 s\phi_4 - c\phi_4 c\phi_5 s\phi_6 & c\phi_4 s\phi_5 \\ c\phi_4 s\phi_6 + c\phi_6 c\phi_5 s\phi_4 & c\phi_4 c\phi_6 - c\phi_5 s\phi_4 s\phi_6 & s\phi_4 s\phi_5 \\ c\phi_5 s\phi_6 - c\phi_6 s\phi_5 & c\phi_6 s\phi_5 + s\phi_6 s\phi_5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{14}^T \mathbf{S}_{17}. \quad (4.2.21)$$

Řešením této soustavy nelineárních rovnic lze určit úhly ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6 . Tyto úhly jsou relativní Eulerovy úhly ZYZ vzhledem k systému 4 a lze je vypočítat jako

$$\phi_4 = \text{Atan2}(s_{23}, s_{13}), \quad (4.2.22)$$

$$\phi_5 = \text{Atan2}\left(\sqrt{s_{13}^2 + s_{23}^2}, s_{33}\right), \quad (4.2.23)$$

$$\phi_6 = \text{Atan2}(s_{32}, -s_{31}) \quad (4.2.24)$$

pro $\phi_5 \in \langle 0; \pi \rangle$, a

$$\phi_4 = \text{Atan2}(-s_{23}, -s_{13}), \quad (4.2.25)$$

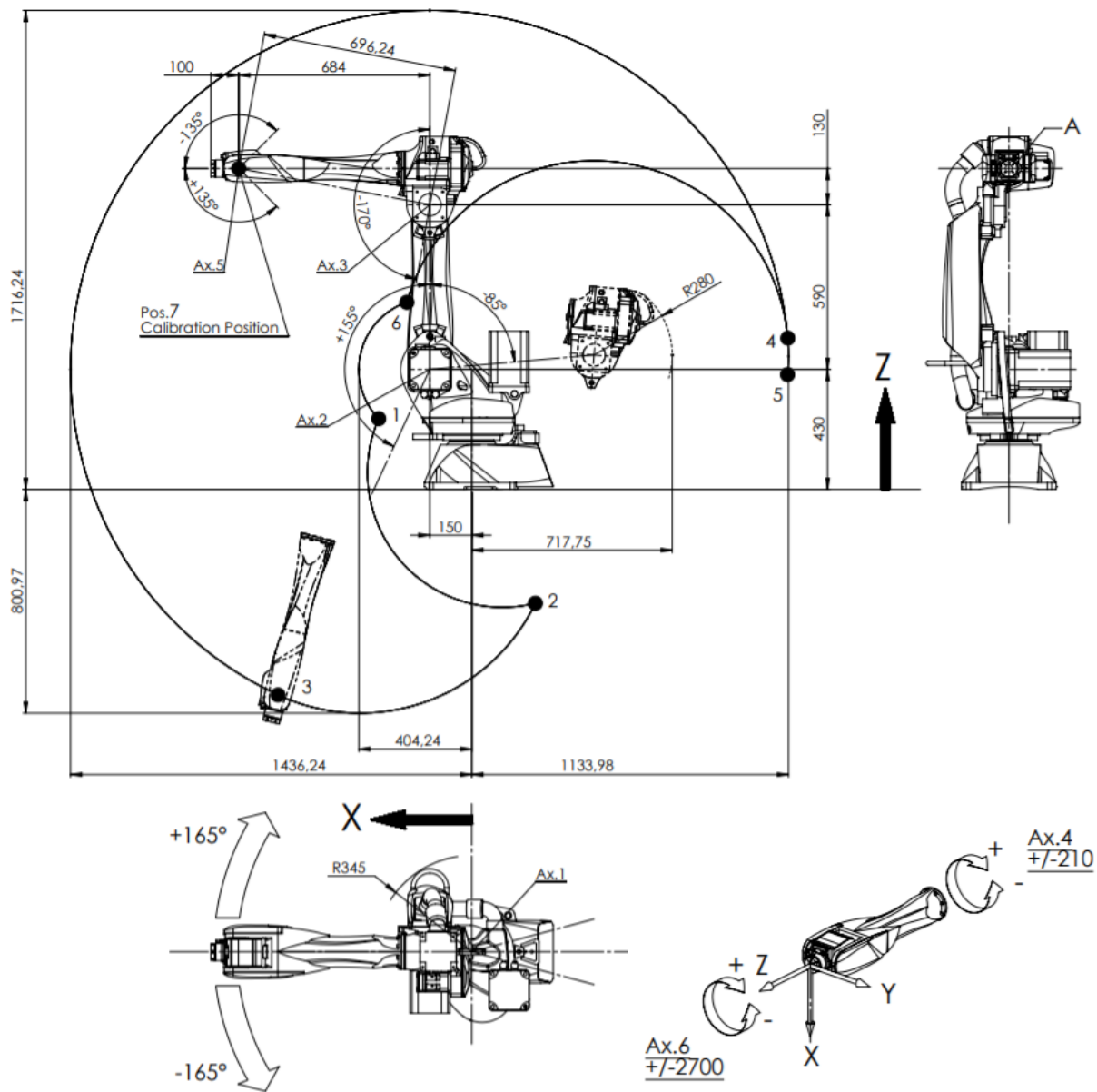
$$\phi_5 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{s_{13}^2 + s_{23}^2}, s_{33}\right), \quad (4.2.26)$$

$$\phi_6 = \text{Atan2}(-s_{32}, s_{31}) \quad (4.2.27)$$

pro $\phi_5 \in \langle -\pi; 0 \rangle$.

4.2.3 Limitní hodnoty parametrů

Na obrázku 19 jsou zobrazeny geometrické rozměry ramen, kloubů a jejich vzájemné uspořádání. Rovněž je zde vidět, jak vypadají kinematické dvojice a jaké jsou jejich možnosti.



Tipo - Type		Codice - Code		Titolo	Racer 7-1.4
Materiale - Material					
Superficiale - Surface		Termico - Heat		CR82225005	
Trattamento - Treatment					
No. _____	Kg. 190	HRC -	HB _____		
Modello - Model	Peso - Weight	Durezza - Hardness		N° Disegno - Drawing No.	

Obrázek 19: Výkres manipulátoru Racer 7 - 1,4 [www.comau.com]

Pro přehlednost jsou limitní úhly natočení jednotlivých os manipulátoru zaneseny v tabulce 3.

Tabulka 3: Limitní úhly natočení os

Osa	Dolní mez úhlu natočení	Horní mez úhlu natočení
1	-165°	+165°
2	-85°	+155°
3	-170°	0°
4	-210°	+210°
5	-135°	+135°
6	-2700°	+2700°

Geometrické rozměry jednotlivých ramen jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4: Rozměry ramen robota

Označení ramene i	x_i [mm]	y_i [mm]	z_i [mm]
1	150	-	430
2	0	-	590
3	684	-	130
4	100	-	-

4.3 Dynamika mechanismu

Při robotických aplikacích může být navrhovaná trajektorie, krom limitů robotu a překážek v pracovním prostoru, v podstatě libovolná. Totéž nelze říct o orientaci koncového efektoru, jehož správná činnost může být podmíněna konkrétním natočením. Ze vztahu 4.2.3 a předepsané orientace efektoru potom vyplývá jediná možná trajektorie pro zápěstí. Vzhledem k této skutečnosti, bude dynamická úloha provedena pouze pro první tři členy mechanismu, které stanovují polohu zápěstí.

Řešení dynamiky manipulátoru je provedeno pomocí metody uvolňování a Newton - Eulerových rovnic popsanych v kapitole 3.5.

Hmotnostně setrvačné charakteristiky

Pro zjednodušení je uvažována průměrná hustota jako homogenní hustota pro všechny členy mechanismu.

$$\rho = \frac{m}{V} [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}], \quad (4.3.1)$$

kde $m = 190,56 \text{ kg}$ je hmotnost robotu uvedená na, výkrese na obrázku 19.

$V = 0,0256 \text{ m}^3$ je objem robotu odečtený z CAD dat poskytovaných výrobcem.

$$\rho = \frac{190,56}{0,0256} = 7421.88 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Hmotnosti jednotlivých členů mechanismu jsou uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 5: Hmotnosti členů mechanismu a polohy středisek hmotnosti v lokálních systémech

Člen	\mathbf{x}_i [mm]	\mathbf{y}_i [mm]	\mathbf{z}_i [mm]	\mathbf{m}_i [kg]
2	16,49	57,34	-79,79	102,31
3	268,93	0,42	-43,61	24,95
4	183,57	-104,36	97,28	54,71

Pomocí programu Inventor 2017 byly odečteny polohy jednotlivých středisek hmotnosti členů mechanismu z CAD dat, které poskytuje výrobce.

Matice setrvačnosti jsou potom vypočítány dle vztahu 3.5.4. Výpočet je proveden na základě údajů z tabulky 5. Vypočítané hodnoty momentů setrvačnosti a deviačních momentů $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ jsou potom:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0,99 & -0,09 & 0,16 \\ -0,09 & 0,68 & 0,49 \\ 0,16 & 0,49 & 0,36 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0,05 & -0,01 & 0,29 \\ -0,01 & 1,85 & 0,01 \\ 0,29 & 0,01 & 1,81 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1,11 & 1,05 & -0,98 \\ 1,05 & 2,36 & 0,56 \\ -0,98 & 0,56 & 2,44 \end{bmatrix}. \quad (4.3.2)$$

$$\sum \mathbf{F}_4 = -\mathbf{S}_{14} \begin{bmatrix} {}^4R_{Dx} \\ {}^4R_{Dy} \\ {}^4R_{Dz} \end{bmatrix} - \mathbf{S}_{14} \begin{bmatrix} {}^4R_{Ex} \\ {}^4R_{Ey} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.7)$$

$$\sum \mathbf{M}_4 = -{}^4\mathbf{r}_D \times \begin{bmatrix} {}^4R_{Dx} \\ {}^4R_{Dy} \\ {}^4R_{Dz} \end{bmatrix} - {}^4\mathbf{r}_E \times \begin{bmatrix} {}^4R_{Ex} \\ {}^4R_{Ey} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^4M_{EH3} \end{bmatrix}. \quad (4.3.8)$$

Části pravých stran Newton-Eulerových rovnic, které popisují vnější silové účinky, byly stanoveny jako

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{Q}_2 &= -\mathbf{S}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2g \end{bmatrix}, \quad \sum \mathbf{Q}_3 = -\mathbf{S}_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3g \end{bmatrix}, \quad \sum \mathbf{Q}_4 = -\mathbf{S}_{14} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_4g \end{bmatrix} - \mathbf{S}_{14}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{bmatrix}, \\ \sum \mathbf{M}_2^Q &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sum \mathbf{M}_3^Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sum \mathbf{M}_4^Q = -{}^4\mathbf{r}_{EF} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

kde člen G_z vyjadřuje tíhu koncového efektoru. Vzhledem k maximální nosnosti manipulátoru byla zvolena hmotnost koncového efektoru 7 kg. Tíhová síla efektoru je pak vypočítána jako

$$G_z = mg = 7 \cdot 9,81 = 68,67 \text{ N}. \quad (4.3.10)$$

V rovnicích 4.3.3 až 4.3.9 vystupují kromě neznámých reakčních účinků i tíhy jednotlivých členů mechanismu. V momentových rovnicích navíc figurují ramena sil, což jsou radius vektory vedoucí z daného střediska hmotnosti k vazbám. Tyto vektory byly odměřeny pomocí programu Inventor 2017 jako vektory v lokálních souřadnicových systémech a jejich velikosti jsou uvedeny v tabulce 6.

Tabulka 6: Radius vektory vazeb

Označení vektoru	x_i [mm]	y_i [mm]	z_i [mm]
${}^2\mathbf{r}_A$	-150	0	-253.4
${}^2\mathbf{r}_B$	0	0	0
${}^2\mathbf{r}_C$	0	-110	0
${}^3\mathbf{r}_B$	0	0	0
${}^3\mathbf{r}_C$	0	0	-110
${}^3\mathbf{r}_D$	590	0	-110
${}^3\mathbf{r}_E$	590	0	0
${}^4\mathbf{r}_D$	0	0	-110
${}^4\mathbf{r}_E$	0	0	0
${}^4\mathbf{r}_{EF}$	130	-684	0

4.4 Návrh trajektorie

Pro optimalizační úlohu je uvažován pracovní prostor, ve kterém se nachází dvě překážky. První překážka, kterou lze popsat okrajovými podmínkami

$$x > 900 \text{ pro } y > 0, \quad (4.4.1)$$

$$y > 900 - x \text{ pro } 800 < x < 900 \quad \wedge \quad y > -100 \text{ pro } x > 900 \quad (4.4.2)$$

může reprezentovat např. stěnu CNC stroje. Druhá překážka, kterou lze obdobně popsat okrajovými podmínkami

$$400 < x < 600, \quad (4.4.3)$$

$$-200 < y < 600, \quad (4.4.4)$$

$$0 < z < 550, \quad (4.4.5)$$

reprezentuje např. produkt či jiné zařízení v pracovišti.

Jsou stanoveny čtyři průjezdní body \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 a \mathbf{B}_4 . Tyto body mohou reálně představovat např. místa pro bodové svary nebo měření výrobku.

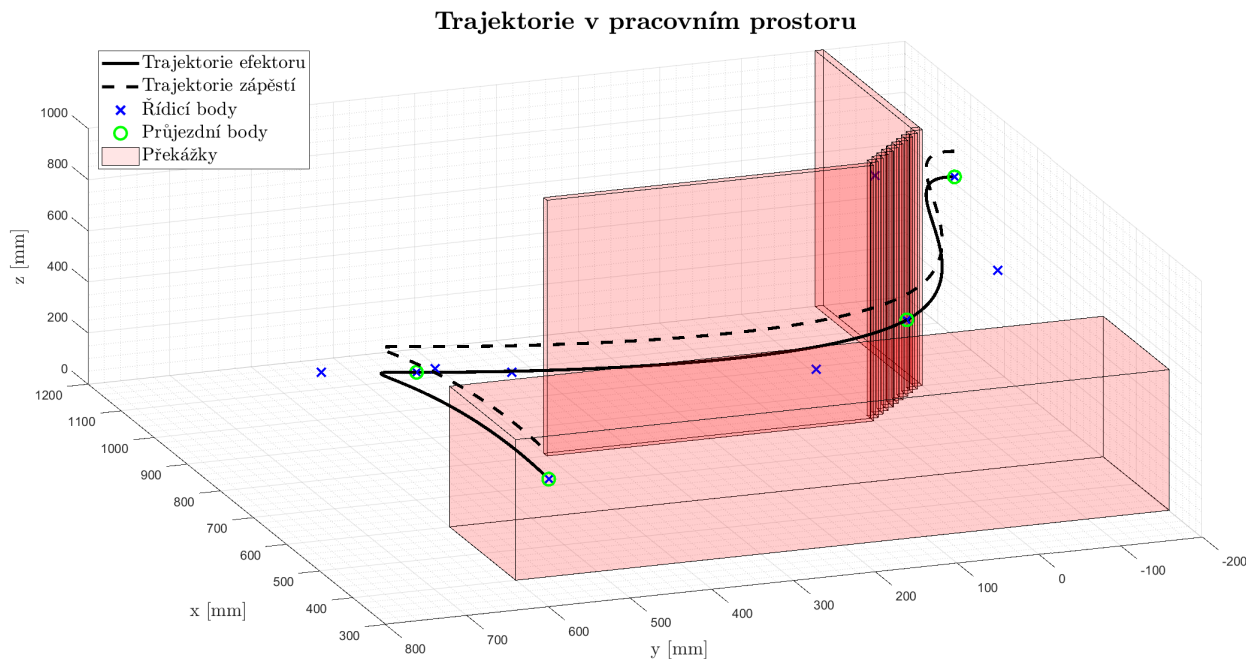
$$\mathbf{B}_1 = [1050, -200, 625]$$

$$\mathbf{B}_2 = [700, 0, 500]$$

$$\mathbf{B}_3 = [700, 600, 500]$$

$$\mathbf{B}_4 = [300, 600, 500]$$

Na obrázku 21 je zobrazen pracovní prostor s překážkami, průjezdní body a navrhovaná trajektorie, která se skládá ze tří segmentů Beziérových křivek.



Obrázek 21: Trajektorie v pracovním prostoru

Orientace koncového efektoru

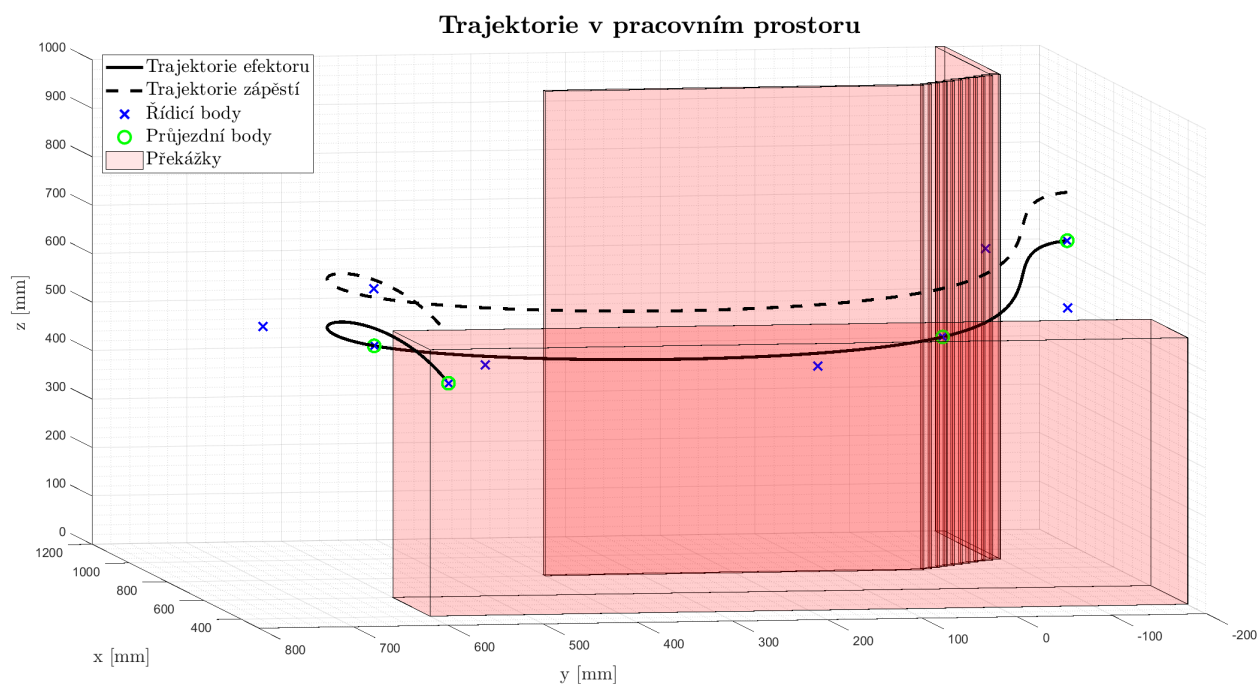
Pro tuto aplikaci byla zvolena orientace koncového efektoru jako konstantní ve směru svisle dolů. Pomocí Eulerových úhlu lze předepsaná poloha vyjádřit jako

$$\mathbf{S}_{17} = \mathbf{S}_z(0)\mathbf{S}_y(\pi)\mathbf{S}_z(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

Pro výpočet trajektorie sférického zápěstí je využito vztahu 4.2.3

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{P} - d_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Na obrázku 22 je znázorněna trajektorie koncového efektoru a trajektorie zápěstí.



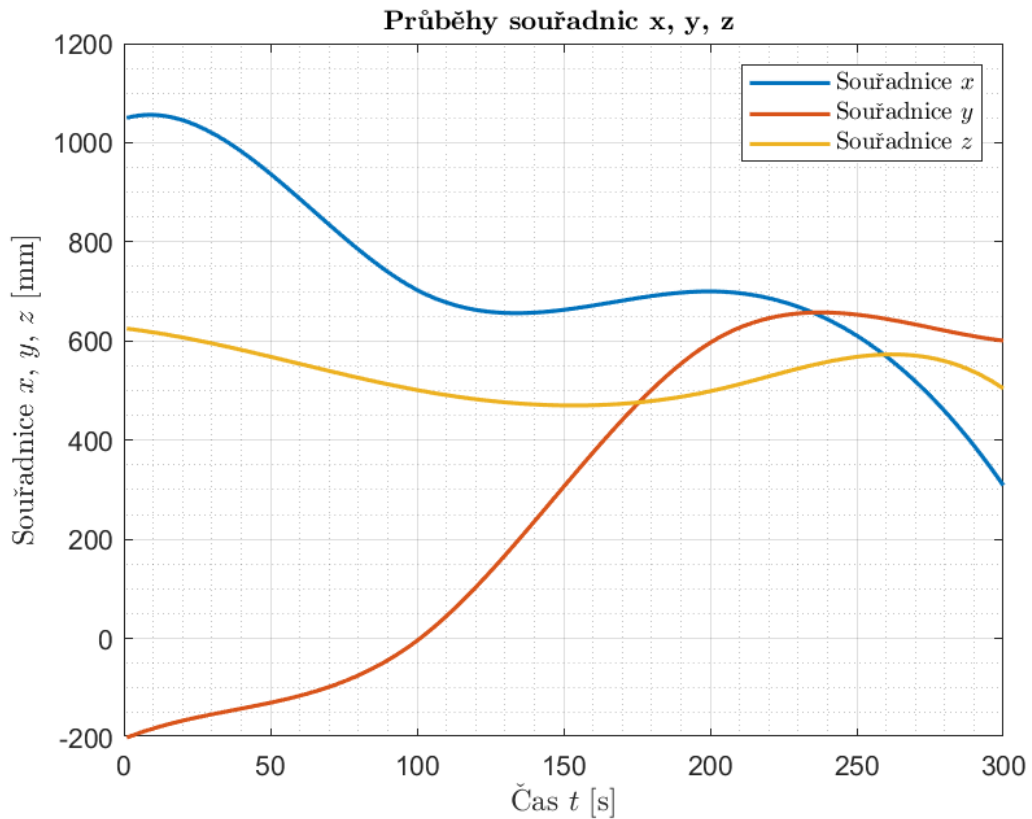
Obrázek 22: Trajektorie v pracovním prostoru s trajektorií efektoru

Vzhledem k překážkám v pracovním prostoru a předepsané orientaci efektoru je zřejmé, že pokud trajektorie zápěstí vyhovuje okrajovým podmínkám, pak jim vyhovuje i trajektorie koncového efektoru, jejíž řídicí body řídicích polygonů jsou uvedeny v tabulce 7.

Tabulka 7: Řídicí body řídicích polygonů navrhované trajektorie

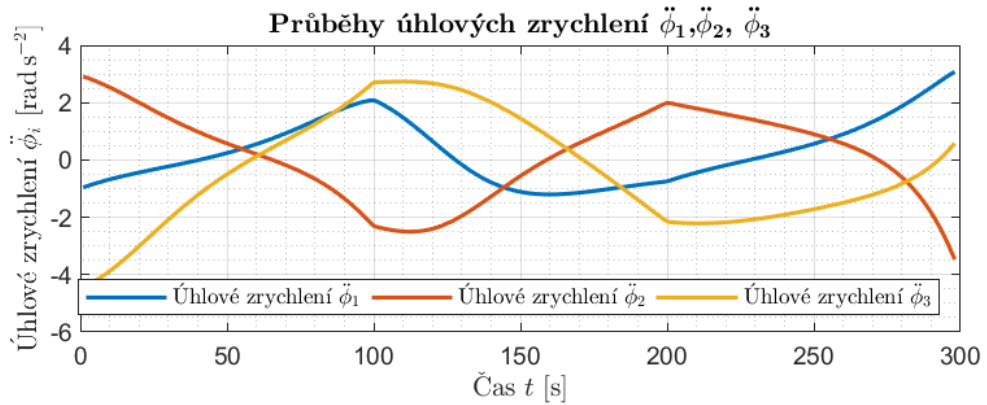
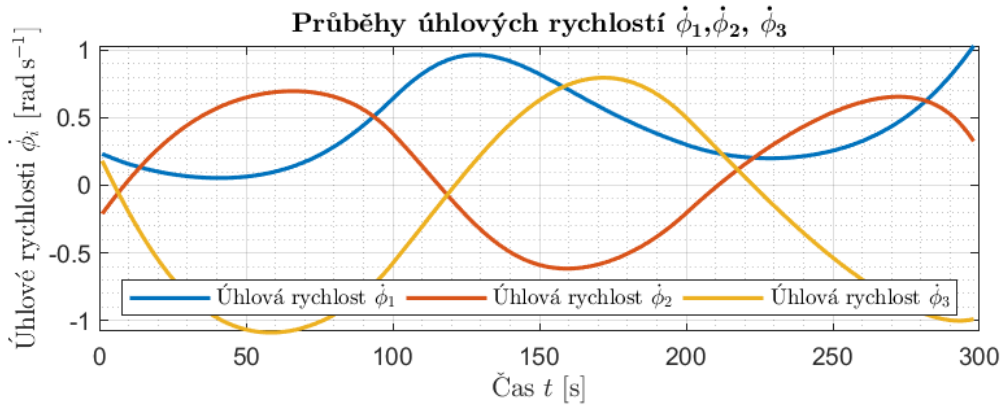
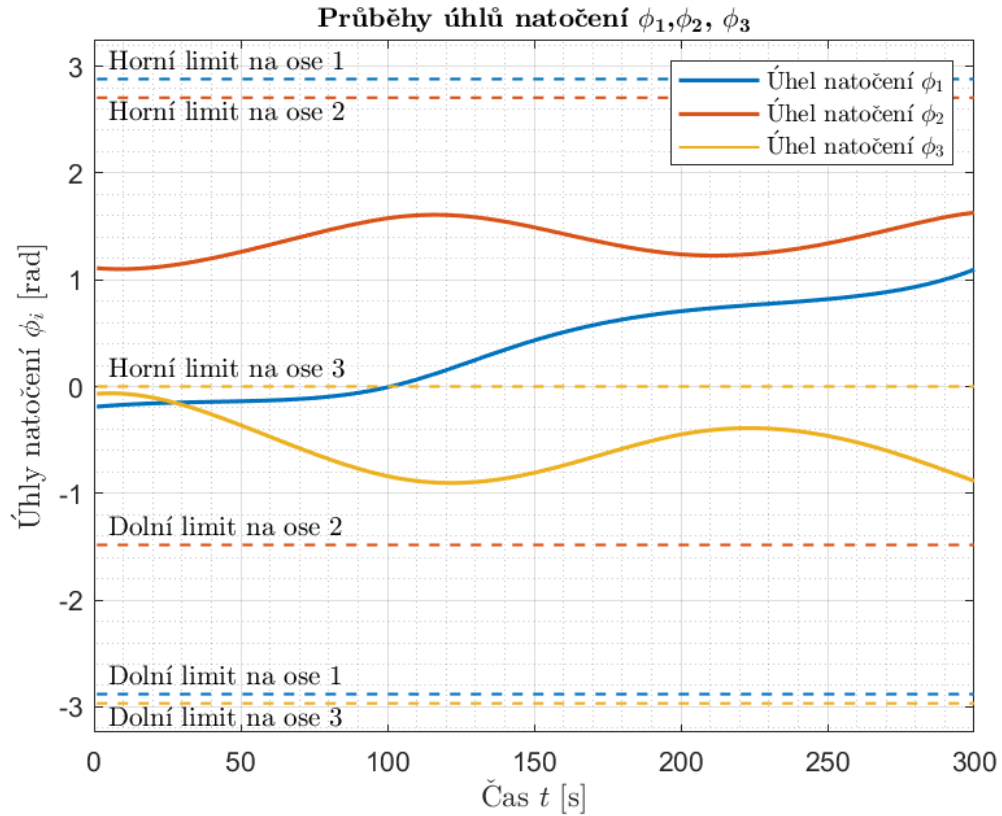
Segment křivky	1	2	3
1. řídicí bod	$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{B}_1$ $\mathbf{P}_{11} = [1050, -200, 625]$	$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{12} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{13} = [700, 600, 500]$
2. řídicí bod	$\mathbf{P}_{21} = [1103, -124, 600]$	$\mathbf{P}_{22} = [600, 152, 464]$	$\mathbf{P}_{23} = [697, 718, 544]$
3. řídicí bod	$\mathbf{P}_{31} = [800, -152, 536]$	$\mathbf{P}_{32} = [703, 482, 456]$	$\mathbf{P}_{33} = [588, 622, 640]$
4. řídicí bod	$\mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{41} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{42} = [700, 600, 500]$	$\mathbf{P}_{43} = \mathbf{B}_4$ $\mathbf{P}_{43} = [300, 600, 500]$

Na obrázku 23 jsou vyneseny průběhy souřadnic trajektorie v kartézském systému x , y a z .



Obrázek 23: Průběhy souřadnic navrhované trajektorie

O realizovatelnosti pohybu vypovídá graf na obrázku 24, kde jsou vyneseny průběhy úhlu natočení ϕ_1 , ϕ_2 a ϕ_3 a jejich limitní hodnoty dané specifikacemi robotu a úhlové rychlosti a zrychlení v pohonech.



Obrázek 24: Průběhy kloubových souřadnic a jejich prvních a druhých derivací

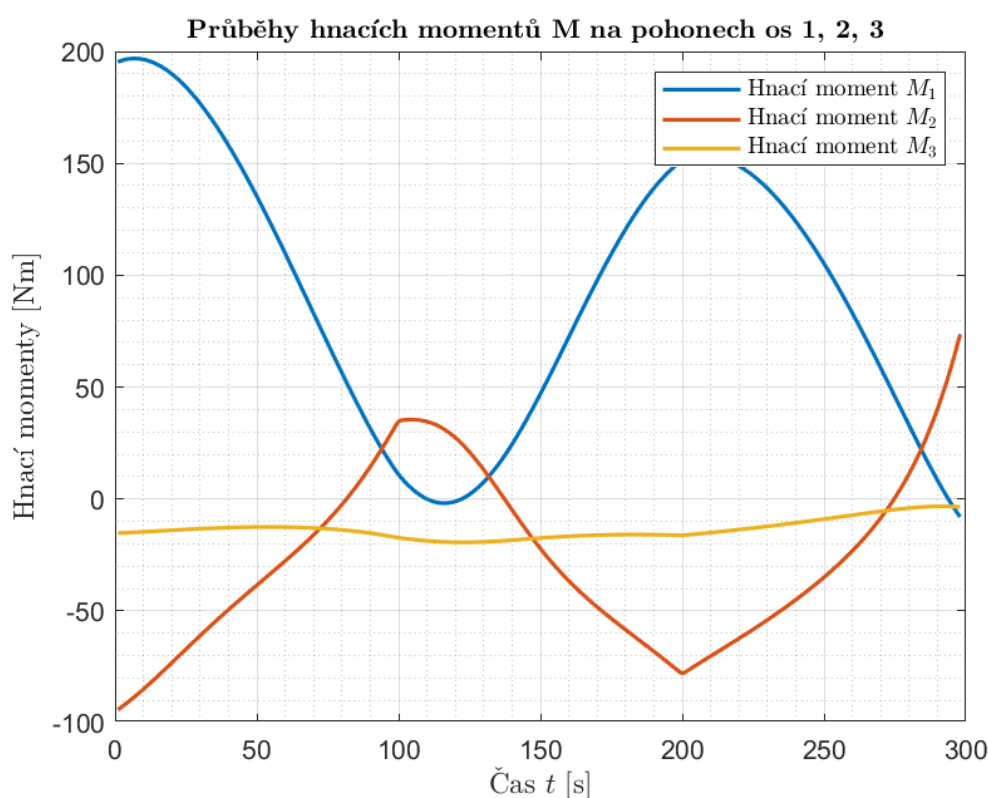
Dosažením derivací vektorové rovnice Bézierovy kubiky (3.2.3) do vztahu pro výpočet délky křivky (3.2.11) dostává rovnice pro délku křivky podobu

$$l_{celk} = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \sqrt{\left((-3t^2 + 6t - 3)\mathbf{P}_{1i} + (9t^2 - 12t + 3)\mathbf{P}_{2i} + (-9t^2 + 6t)\mathbf{P}_{3i} + 3t^2\mathbf{P}_{4i} \right)^2} dt. \quad (4.4.8)$$

Výpočet je realizován pomocí numerické derivace obdelníkovou metodou. Celková délka křivky pro tuto navrhovanou trajektorii vychází

$$l_{celk} = 3054,6 \text{ mm}. \quad (4.4.9)$$

Na obrázku 25 jsou vyobrazeny průběhy hnacích momentů M_1 , M_2 a M_3 .



Obrázek 25: Průběhy hnacích momentů

Pro kvantifikaci spotřebované energie byl, důsledkem zjednodušení popsanych v kap. 3.7, zvolen součet součinů obsahů ploch pod jednotlivými momentovými křivkami a křivkami příslušných úhlových rychlostí

$$W = \sum_{i=1}^3 \int_0^t |M_i \omega_i| dt. \quad (4.4.10)$$

Moment síly může nabývat jak kladné, tak záporné hodnoty na rozdíl od kvadrátů derivací v rovnici 4.4.8. V numerické integraci je proto uvažována absolutní hodnota momentů.

Energetické nároky pro realizaci pohybu po této navrhované trajektorii je

$$W = 139,15 \text{ Nm}.$$

4.5 Optimalizace trajektorie

V následující části bude trajektorie, uvažovaná v kap. 4.4, optimalizována dle kritérií, která byla obecně popsána v kapitole 3.7.

Úloha optimalizace se zredukovala na problém hledání šesti neznámých parametrů - souřadnic řídicích bodů \mathbf{P}_{21} a \mathbf{P}_{31} v kartézském souřadnicovém systému (kap. 3.7). Genetický algoritmus hledá vhodná řešení s ohledem na okrajové podmínky, popsané v kap. 4.4, a kritérií, která jsou formulována dle hledaného řešení.

4.5.1 Optimalizace trajektorie dle strojového času

Minimalizace strojového času je v tomto případě řešena jako hledání minima délky trajektorie. Optimalizační kritérium je formulováno jako

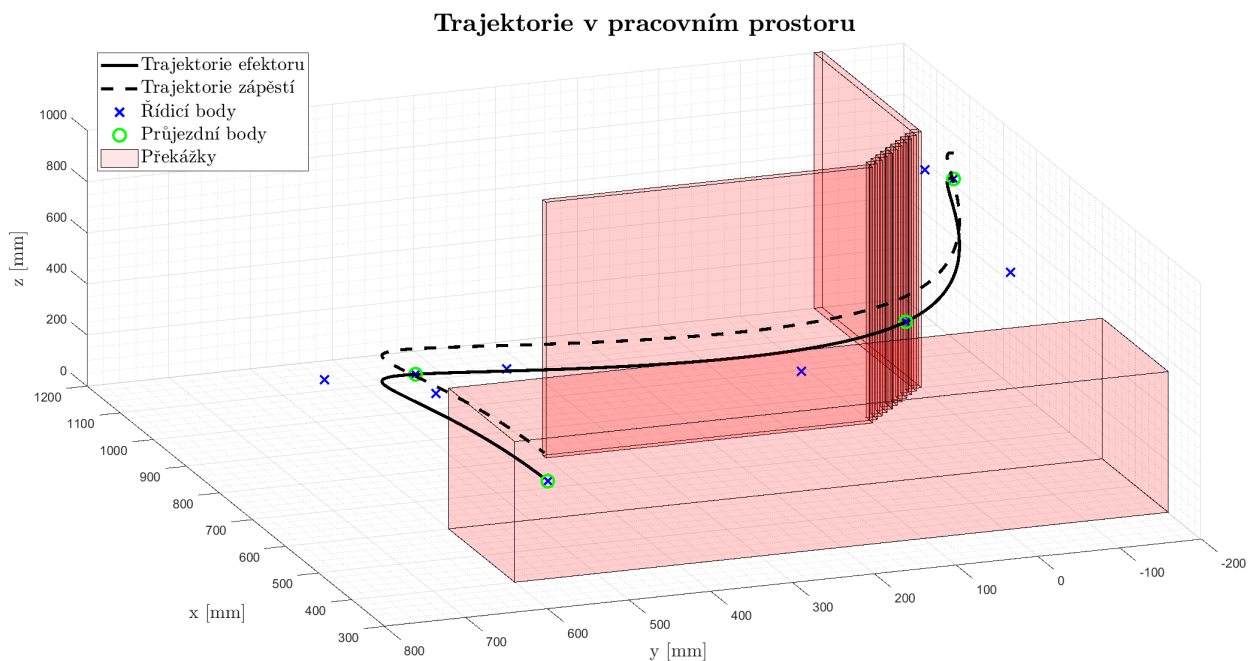
$$krit = \min \left(\sum_{i=1}^3 \int_0^{t_i} \sqrt{\left((-3t^2 + 6t - 3)\mathbf{P}_{1i} + (9t^2 - 12t + 3)\mathbf{P}_{2i} + (-9t^2 + 6t)\mathbf{P}_{3i} + 3t^2\mathbf{P}_{4i} \right)^2} dt \right). \quad (4.5.1)$$

Polohy řídicích bodů prvního řídicího polygonu, které byly nalezeny jako nejvhodnější řešení pro dané optimalizační kritérium jsou

$$\mathbf{P}_{21} = [1090, -181, 625],$$

$$\mathbf{P}_{31} = [800, -168, 532].$$

Na obrázku 26 je zobrazena trajektorie optimalovaná podle kriteria ze vztahu 4.5.1. Řídicí body řídicích polygonů jsou zaneseny do tabulky 8.

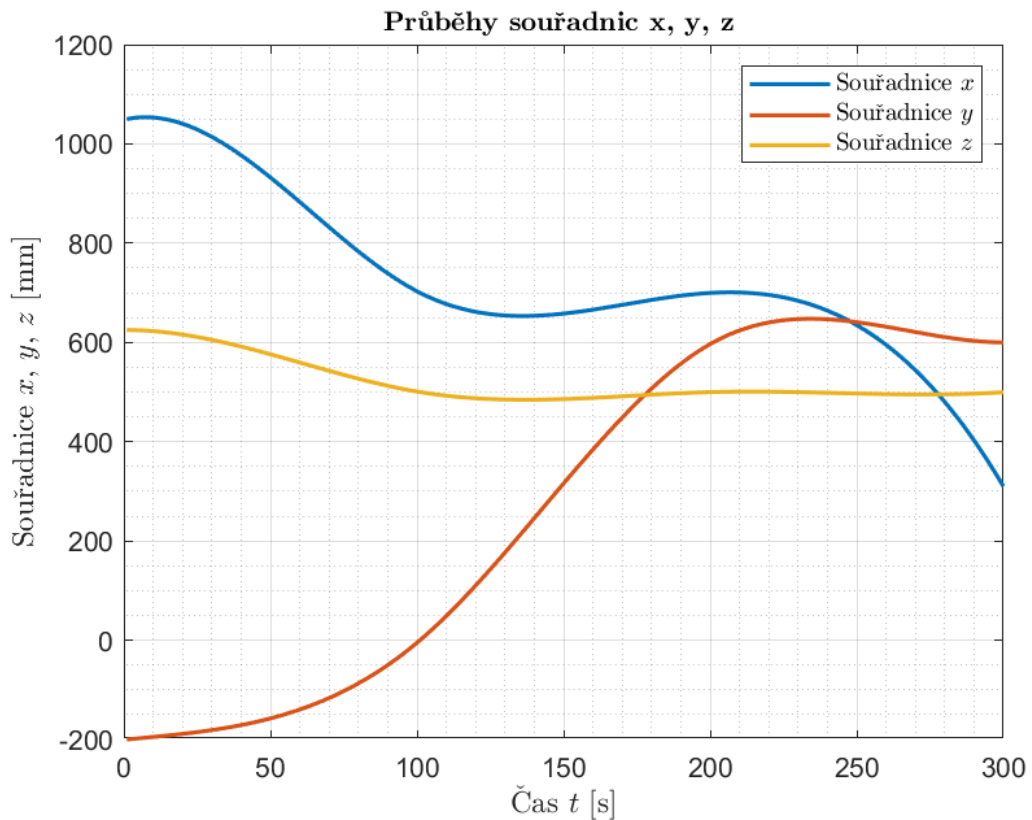


Obrázek 26: t-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru

Tabulka 8: Řídicí body řídicích polygonů t-optimalizované trajektorie

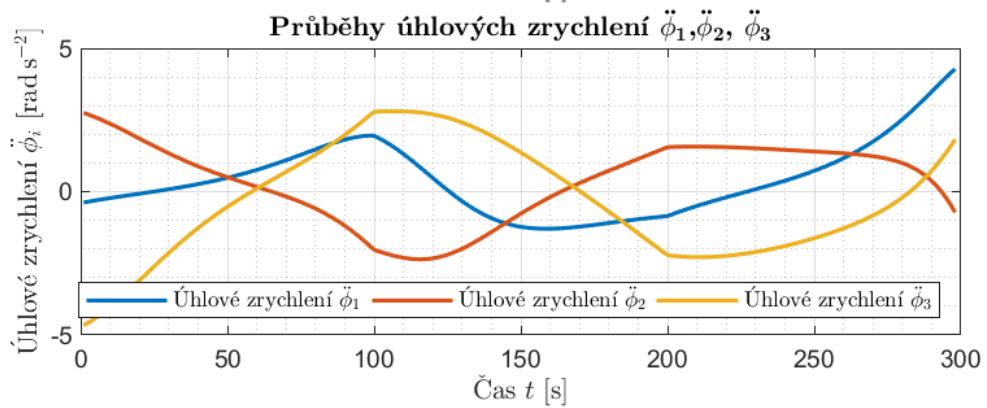
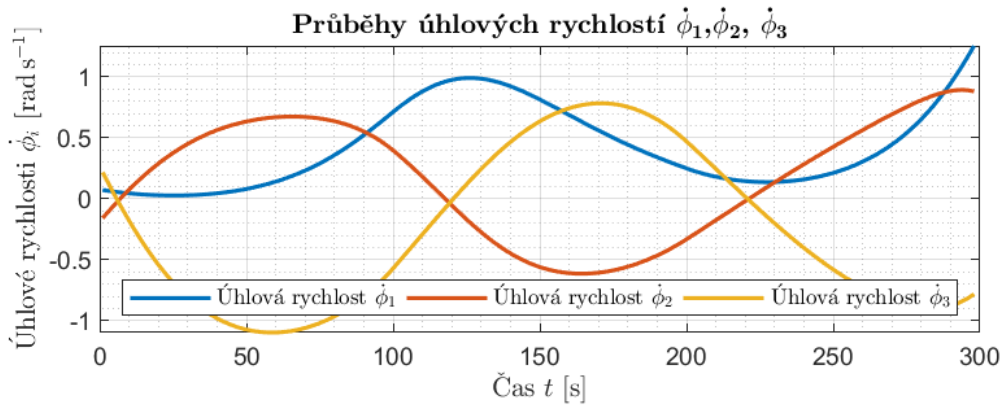
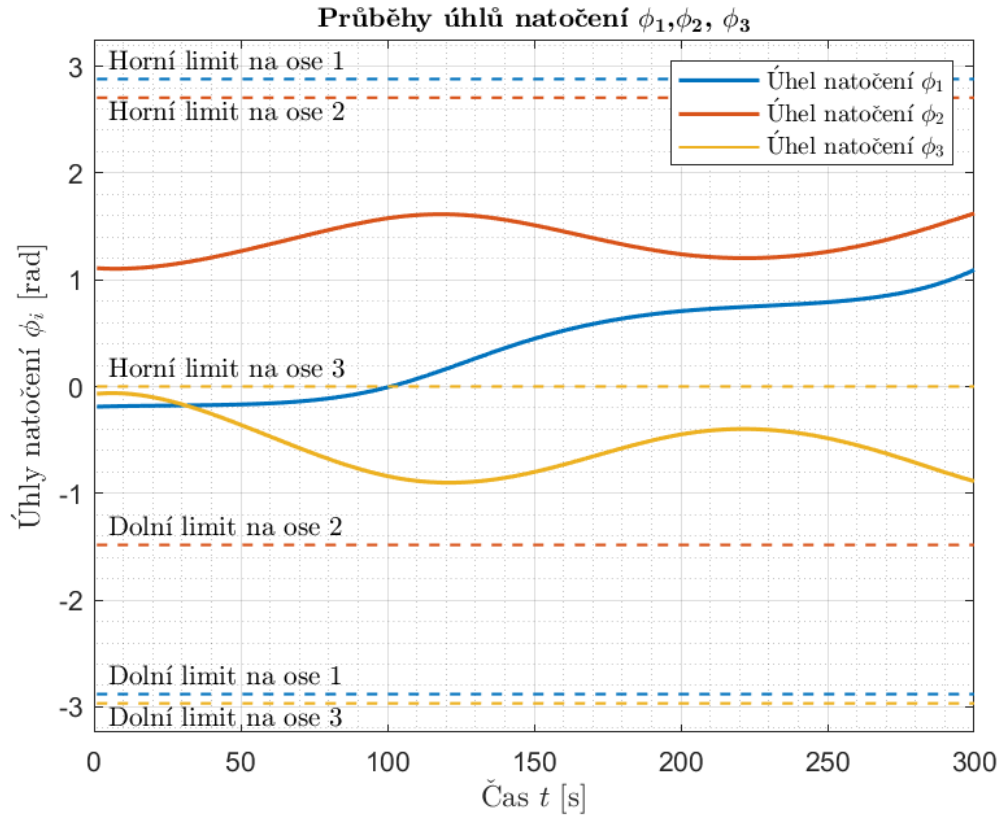
Segment křivky	1	2	3
1. řídicí bod	$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{B}_1$ $\mathbf{P}_{11} = [1050, -200, 625]$	$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{12} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{13} = [700, 600, 500]$
2. řídicí bod	$\mathbf{P}_{21} = [1090, -181, 625]$	$\mathbf{P}_{22} = [600, 168, 468]$	$\mathbf{P}_{23} = [710, 708, 505]$
3. řídicí bod	$\mathbf{P}_{31} = [800, -168, 532]$	$\mathbf{P}_{32} = [690, 492, 495]$	$\mathbf{P}_{33} = [640, 599, 487]$
4. řídicí bod	$\mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{41} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{42} = [700, 600, 500]$	$\mathbf{P}_{43} = \mathbf{B}_4$ $\mathbf{P}_{43} = [300, 600, 500]$

Na obrázku 27 jsou vyneseny průběhy souřadnic trajektorie v kartézském systému x , y a z .



Obrázek 27: Průběhy souřadnic t-optimalizované trajektorie

O realizovatelnosti pohybu vypovídá graf na obrázku 28, kde jsou vyneseny průběhy úhlu natočení ϕ_1 , ϕ_2 a ϕ_3 a jejich limitní hodnoty dané specifikacemi robotu a úhlové rychlosti a zrychlení v pohonech.

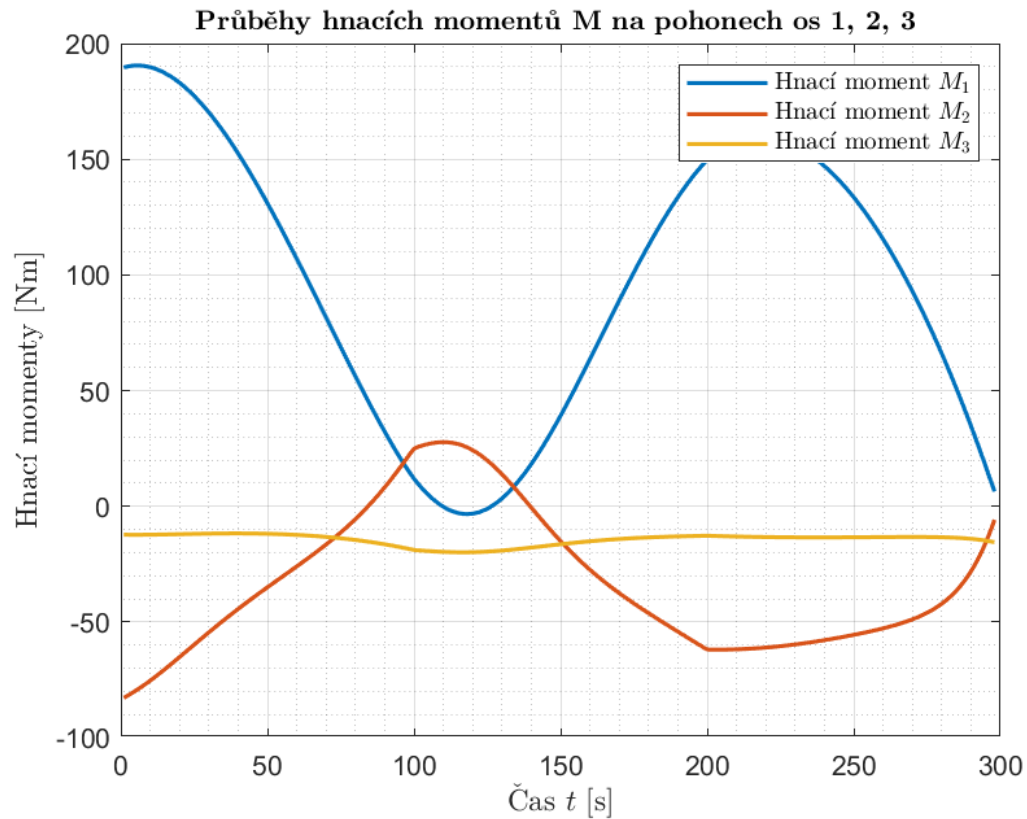


Obrázek 28: Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při t-optimalizované trajektorii

Délka křivky pro trajektorii optimalizovanou dle kritéria (vztah 4.5.1) vychází

$$l_{t-opt} = 2988,9 \text{ mm.} \quad (4.5.2)$$

Na obrázku 29 jsou vyobrazeny průběhy hnacích momentů M_1 , M_2 a M_3 .



Obrázek 29: Průběhy hnacích momentů při t-optimalizované trajektorii

Spotřebovaná energie při realizaci tohoto pohybu je dle 4.4.10

$$W_{t-opt} = 140,06 \text{ Nm.} \quad (4.5.3)$$

4.5.2 Optimalizace trajektorie dle energetických nároků

Minimalizace energetických nároků je v tomto případě řešena jako hledání minima sumace součinů obsahů ploch pod jednotlivými momentovými křivkami a křivkami příslušných úhlových rychlostí. Optimalizační kritérium je formulováno jako

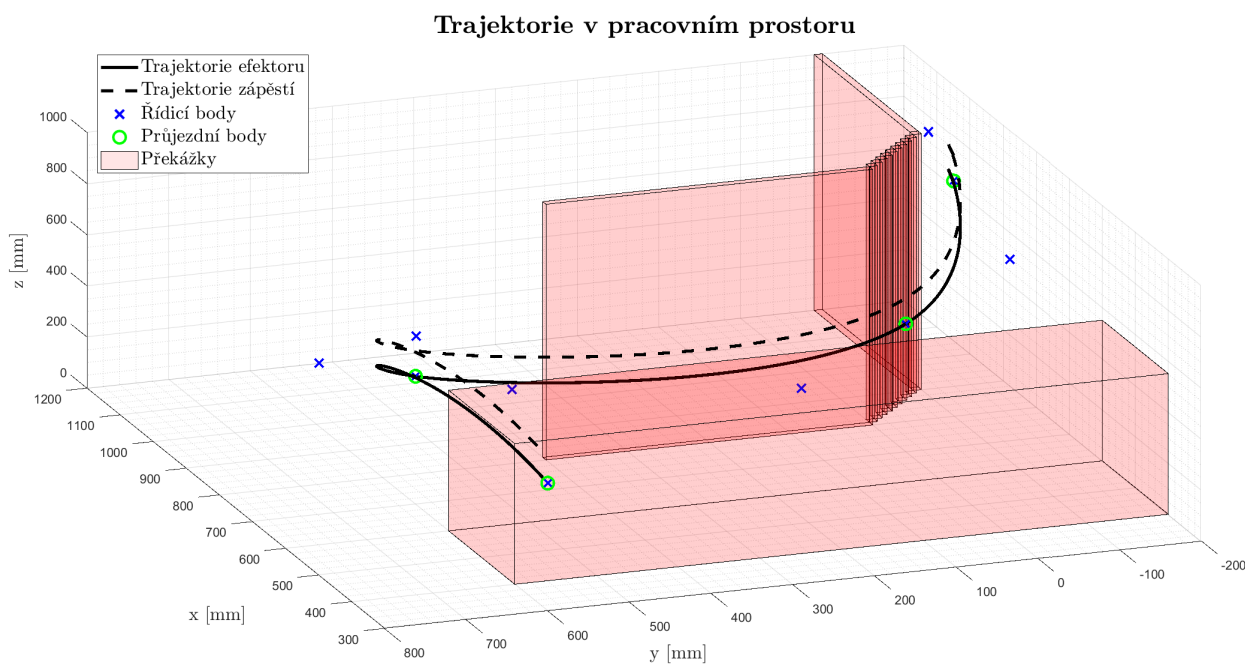
$$k_{rit} = \min \left(\sum_{i=1}^3 \int_0^t |M_i \omega_i| dt \right). \quad (4.5.4)$$

Polohy řídicích bodů prvního řídicího polygonu, které byly nalezeny jako nejvhodnější řešení pro dané optimalizační kritérium jsou

$$\mathbf{P}_{21} = [1075, -179, 800],$$

$$\mathbf{P}_{31} = [800, -168, 590].$$

Na obrázku 30 je zobrazena trajektorie optimalovaná podle kriteria ze vztahu 4.5.4. Řídicí body řídicích polygonů jsou zaneseny do tabulky 9.

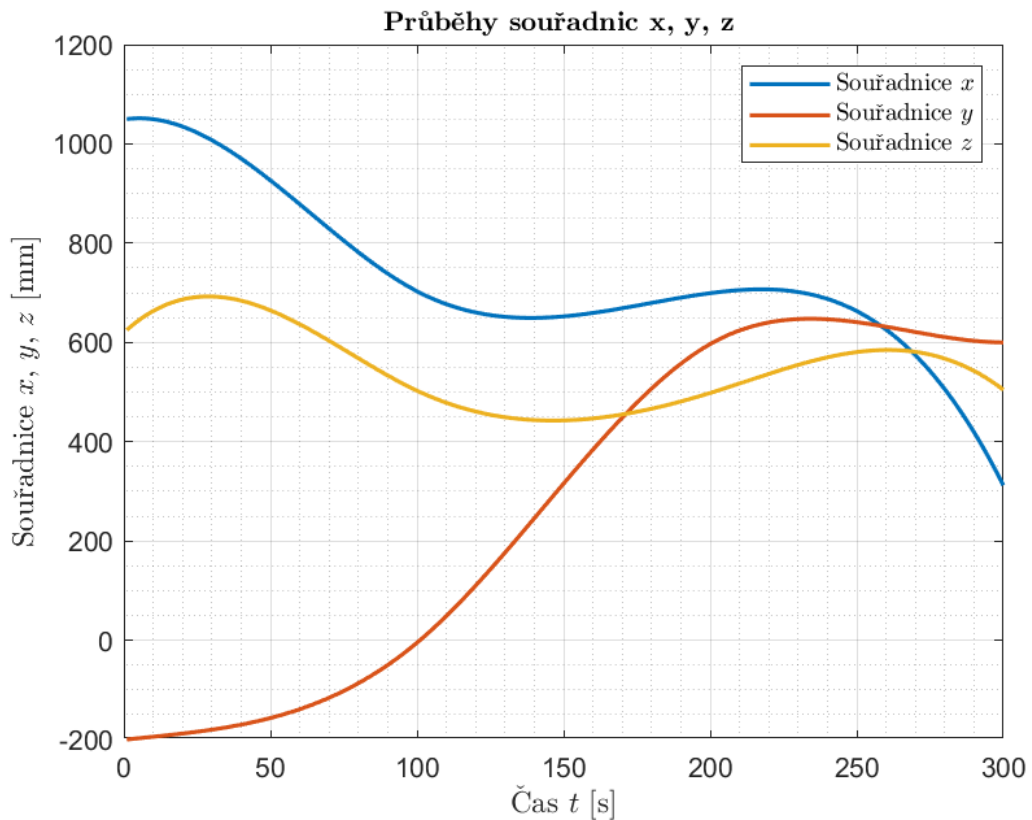


Obrázek 30: W-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru

Tabulka 9: Řídicí body řídicích polygonů W-optimalizované trajektorie

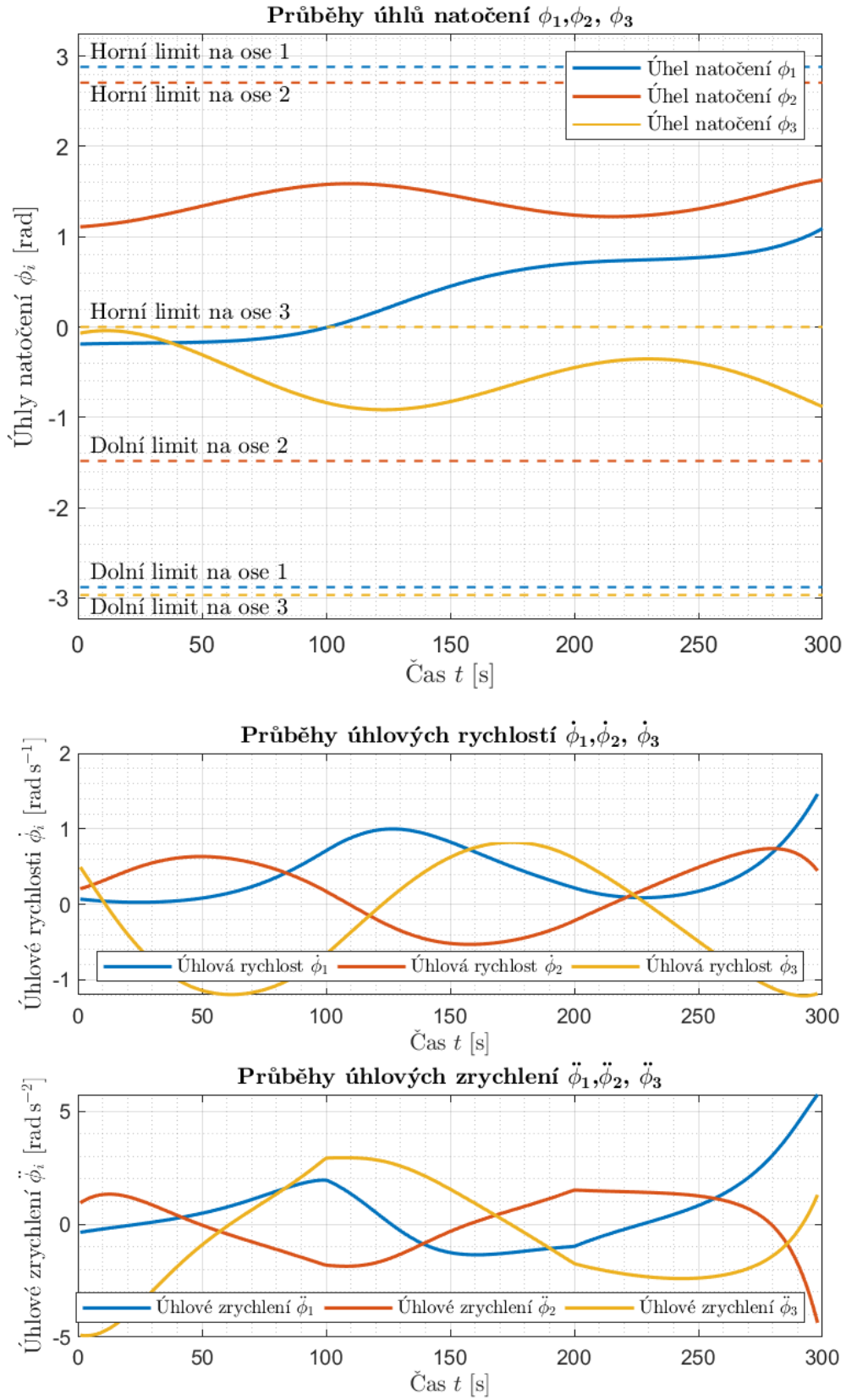
Segment křivky	1	2	3
1. řídicí bod	$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{B}_1$ $\mathbf{P}_{11} = [1050, -200, 625]$	$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{12} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{13} = [700, 600, 500]$
2. řídicí bod	$\mathbf{P}_{21} = [1075, -179, 800]$	$\mathbf{P}_{22} = [600, 168, 410]$	$\mathbf{P}_{23} = [725, 708, 561]$
3. řídicí bod	$\mathbf{P}_{31} = [800, -168, 590]$	$\mathbf{P}_{32} = [675, 492, 439]$	$\mathbf{P}_{33} = [701, 599, 655]$
4. řídicí bod	$\mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{41} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{42} = [700, 600, 500]$	$\mathbf{P}_{43} = \mathbf{B}_4$ $\mathbf{P}_{43} = [300, 600, 500]$

Na obrázku 31 jsou vyneseny průběhy souřadnic trajektorie v kartézském systému x , y a z .



Obrázek 31: Průběhy souřadnic W-optimalizované trajektorie

O realizovatelnosti pohybu vypovídá graf na obrázku 32, kde jsou vyneseny průběhy úhlu natočení ϕ_1 , ϕ_2 a ϕ_3 a jejich limitní hodnoty dané specifikacemi robotu a úhlové rychlosti a zrychlení v pohonech.

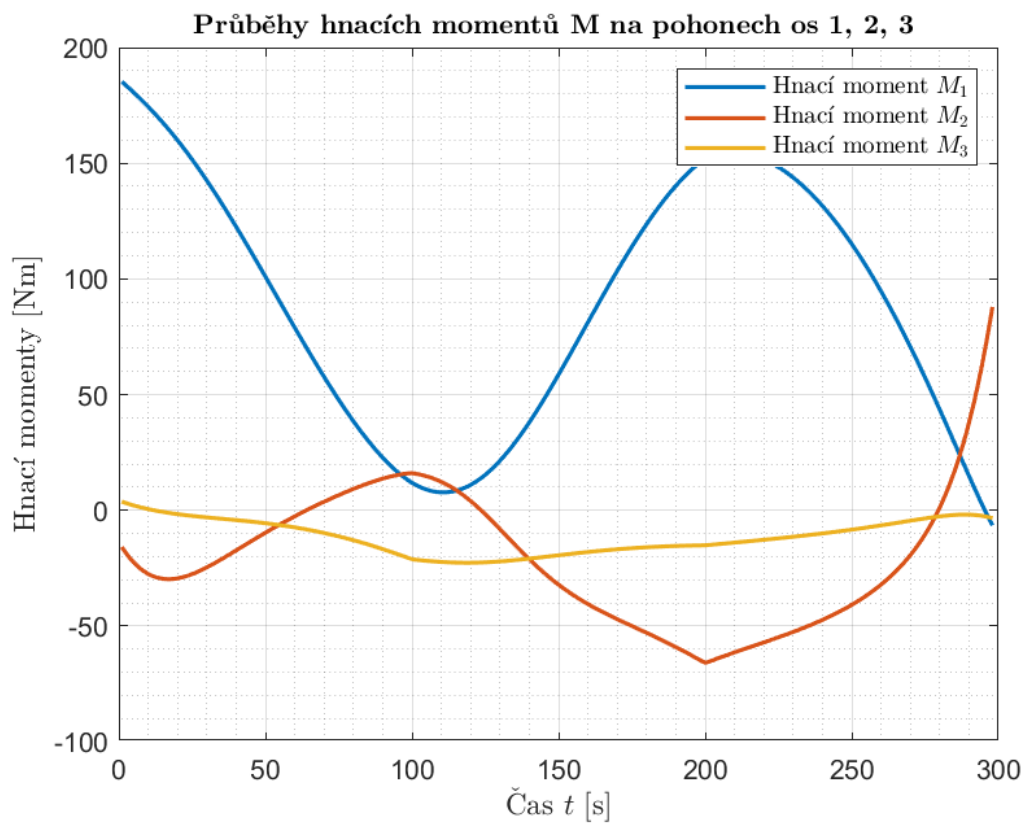


Obrázek 32: Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při W-optimalizované trajektorii

Délka křivky pro trajektorii optimalizovanou dle kritéria (vztah 4.4.8) vychází

$$l_{W-opt} = 3302,4 \text{ mm.} \quad (4.5.5)$$

Na obrázku 33 jsou vyobrazeny průběhy hnacích momentů M_1 , M_2 a M_3 .



Obrázek 33: Průběhy hnacích momentů při W-optimalizované trajektorii

Spotřebovaná energie při realizaci tohoto pohybu je dle 4.4.10

$$W_{W-opt} = 119,23 \text{ Nm.} \quad (4.5.6)$$

4.5.3 Optimalizace trajektorie při uvažování průniku optimalizačních podmínek

Pro hledání optimální trajektorie s přihlédnutím k oběma předchozím kritériím je navrženo kritérium

$$krit = \min(k_1 r_1 l_{celk} + k_2 r_2 W), \quad (4.5.7)$$

kde l_{celk} je délka křivky popsaná rovnicí 4.4.8,

W je kritérium popsané rovnicí 4.4.10.

Z výsledků z předešlých kapitol je vidět, že poměr mezi výslednou kvantifikací momentů a délkou trajektorie je šest až sedm. Pro optimalizaci byly uvažovány koeficienty pro srovnání vah kritérií

$$r_1 = 1, \quad (4.5.8)$$

$$r_2 = 23. \quad (4.5.9)$$

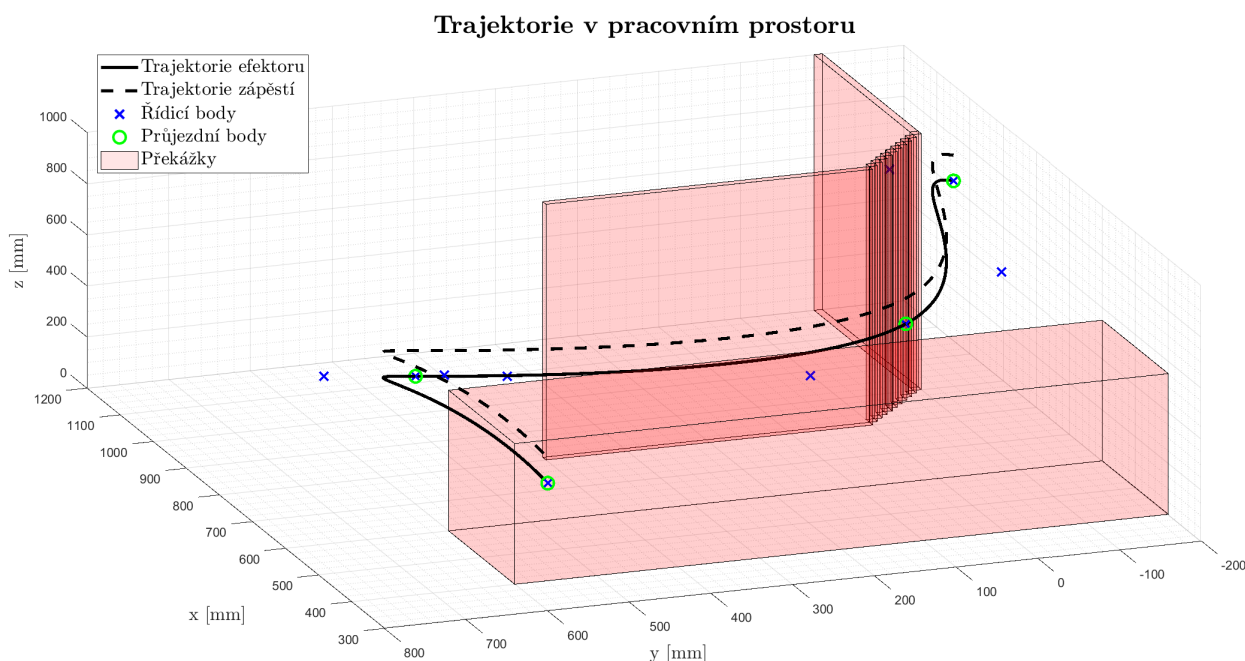
Koeficienty k_1 a k_2 , které přiřazují důležitost preferovanému parametru, který má být optimalizován, byly stanoveny

$$k_1 = 1, \quad (4.5.10)$$

$$k_2 = 1, 2. \quad (4.5.11)$$

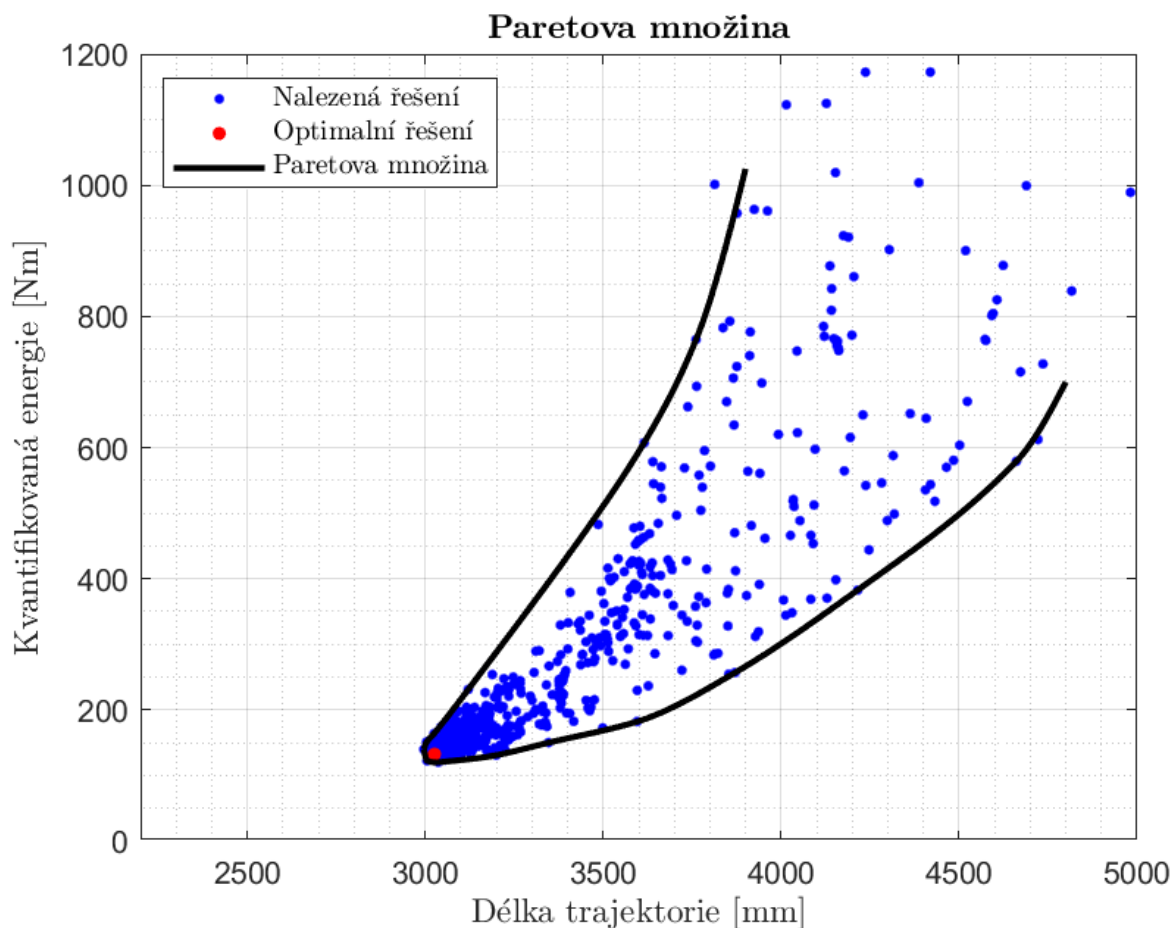
Preferovaným kritériem je tedy úspora energie.

Na obrázku 34 je zobrazena trajektorie optimalizovaná podle kriteria ze vztahu 4.5.7.



Obrázek 34: tW-optimalizovaná trajektorie v pracovním prostoru

Na rozdíl od předešlých kritérií optimalizace, která byla závislá pouze na jedné funkci, je nyní kritérium závislé na dvou funkcích. V těchto případech je získáno široké spektrum řešení. Obálkou těchto řešení je tzv. Paretova množina, která vyjadřuje jistý rovnovážný stav. Pokud by bylo potřeba posílit důležitost jednoho z kritérií, bude to na úkor druhého. Graficky je tato množina řešení zpracována na obrázku 35.



Obrázek 35: Paretova množina

Z grafu Paretovy množiny je zřejmé, že nalezené řešení je skutečně optimum pro zvolené kritérium. Existují sice nalezená řešení, která jsou rychlejší, ale jsou i energeticky náročnější.

Polohy řídicích bodů prvního řídicího polygonu, které byly nalezeny jako nejvhodnější řešení pro dané optimalizační kritérium jsou

$$\mathbf{P}_{21} = [1096, -140, 643]$$

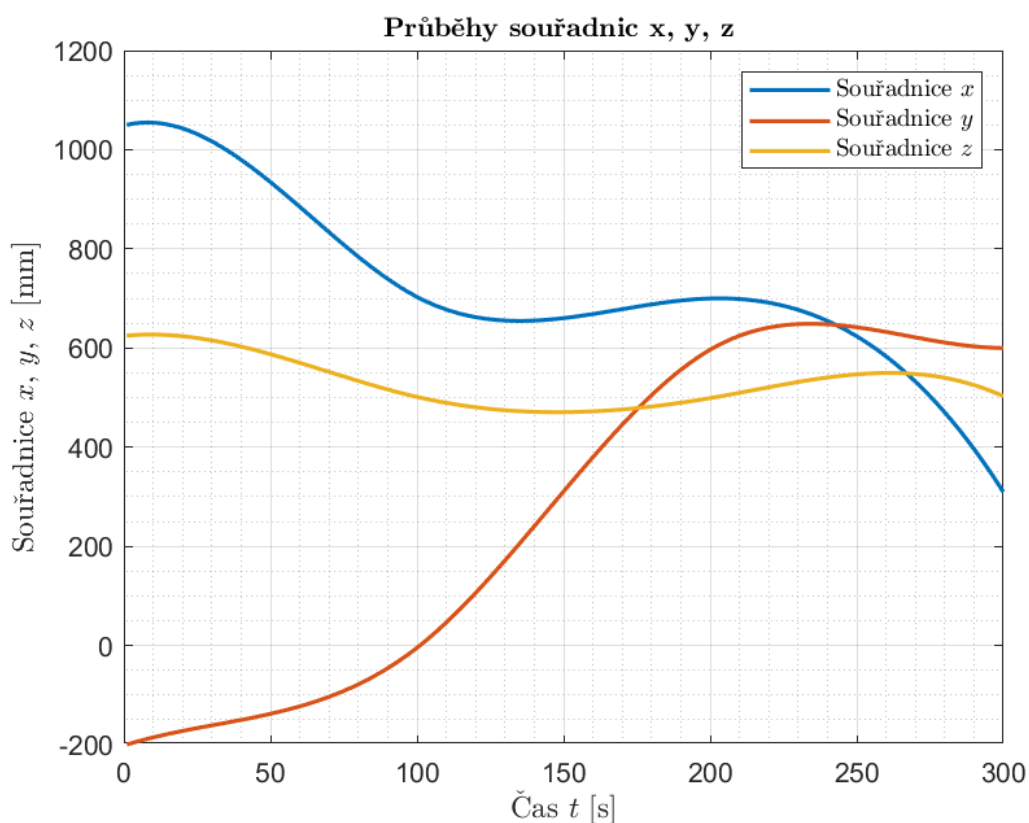
$$\mathbf{P}_{31} = [800, -157, 544]$$

Řídicí body řídicích polygonů trajektorie jsou zaneseny do tabulky 10.

Tabulka 10: Řídicí body řídicích polygonů tW-optimalizované trajektorie

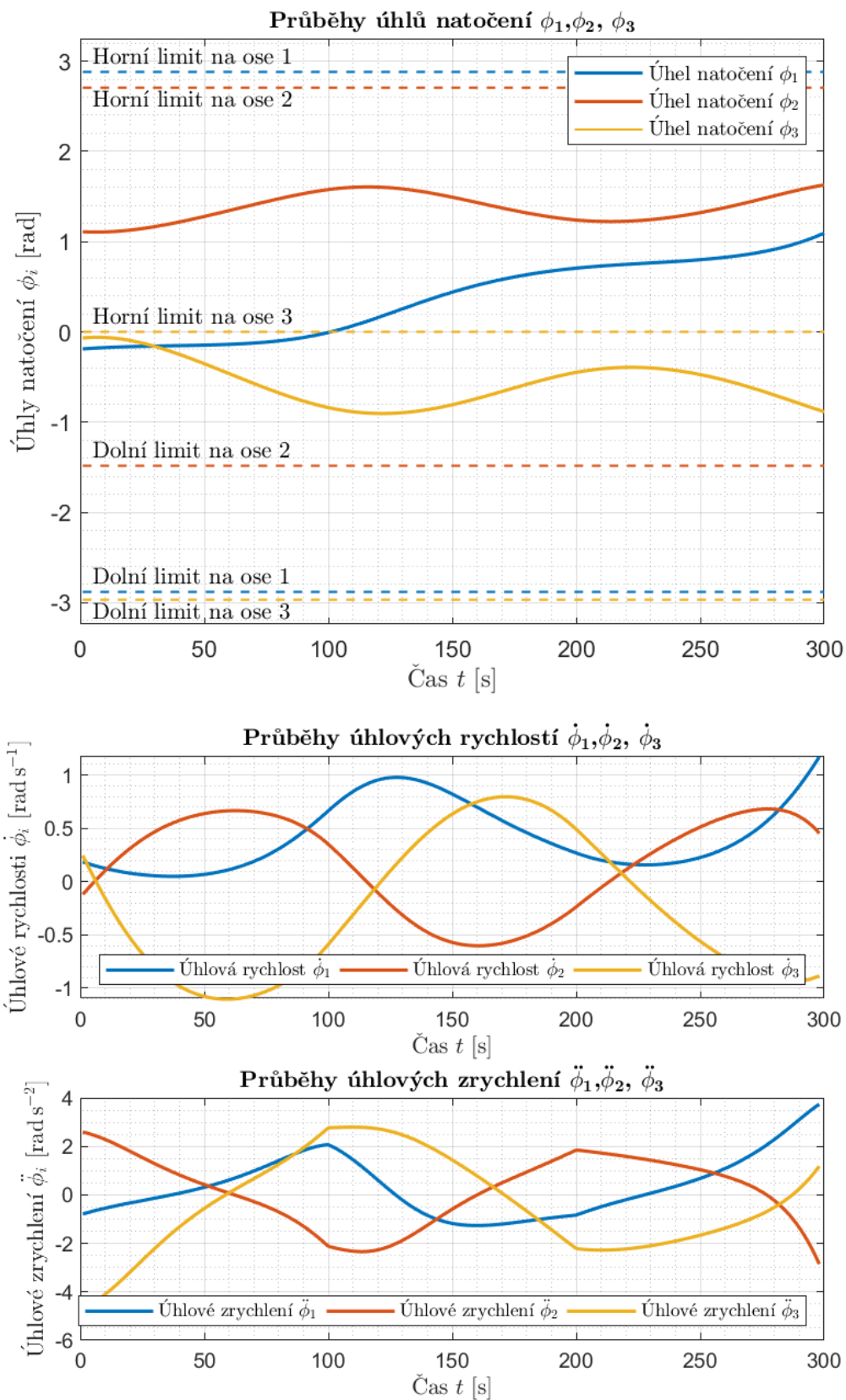
Segment křivky	1	2	3
1. řídicí bod	$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{B}_1$ $\mathbf{P}_{11} = [1050, -200, 625]$	$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{12} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{13} = [700, 600, 500]$
2. řídicí bod	$\mathbf{P}_{21} = [1096, -140, 643]$	$\mathbf{P}_{22} = [600, 157, 456]$	$\mathbf{P}_{23} = [704, 710, 534]$
3. řídicí bod	$\mathbf{P}_{31} = [800, -157, 544]$	$\mathbf{P}_{32} = [696, 490, 466]$	$\mathbf{P}_{33} = [616, 599, 592]$
4. řídicí bod	$\mathbf{P}_{41} = \mathbf{B}_2$ $\mathbf{P}_{41} = [700, 0, 500]$	$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{B}_3$ $\mathbf{P}_{42} = [700, 600, 500]$	$\mathbf{P}_{43} = \mathbf{B}_4$ $\mathbf{P}_{43} = [300, 600, 500]$

Na obrázku 36 jsou vyneseny průběhy souřadnic trajektorie v kartézském systému x , y a z .



Obrázek 36: Průběhy souřadnic tW-optimalizované trajektorie

O realizovatelnosti pohybu vypovídá graf na obrázku 37, kde jsou vyneseny průběhy úhlu natočení φ_1 , φ_2 a φ_3 a jejich limitní hodnoty dané specifikacemi robotu a úhlové rychlosti a zrychlení v pohonech.

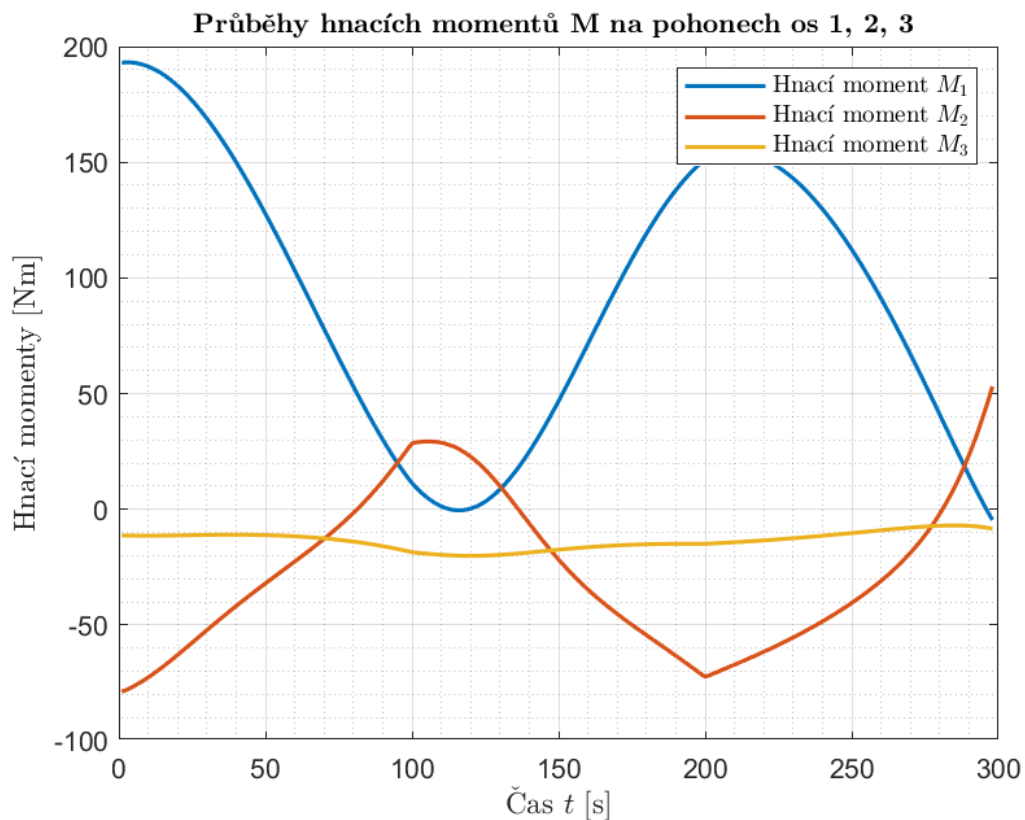


Obrázek 37: Průběhy kloubových souřadnic a jejich derivací při tW-optimalizované trajektorii

Délka křivky pro trajektorii optimalizovanou dle kritéria (rovnice 4.5.7) vychází

$$l_{tW-opt} = 3025,7 \text{ mm.} \quad (4.5.12)$$

Na obrázku 38 jsou vyobrazeny průběhy hnacích momentů M_1 , M_2 a M_3 .



Obrázek 38: Průběhy hnacích momentů při tW-optimalizované trajektorii

Spotřebovaná energie při realizaci tohoto pohybu je dle 4.4.10

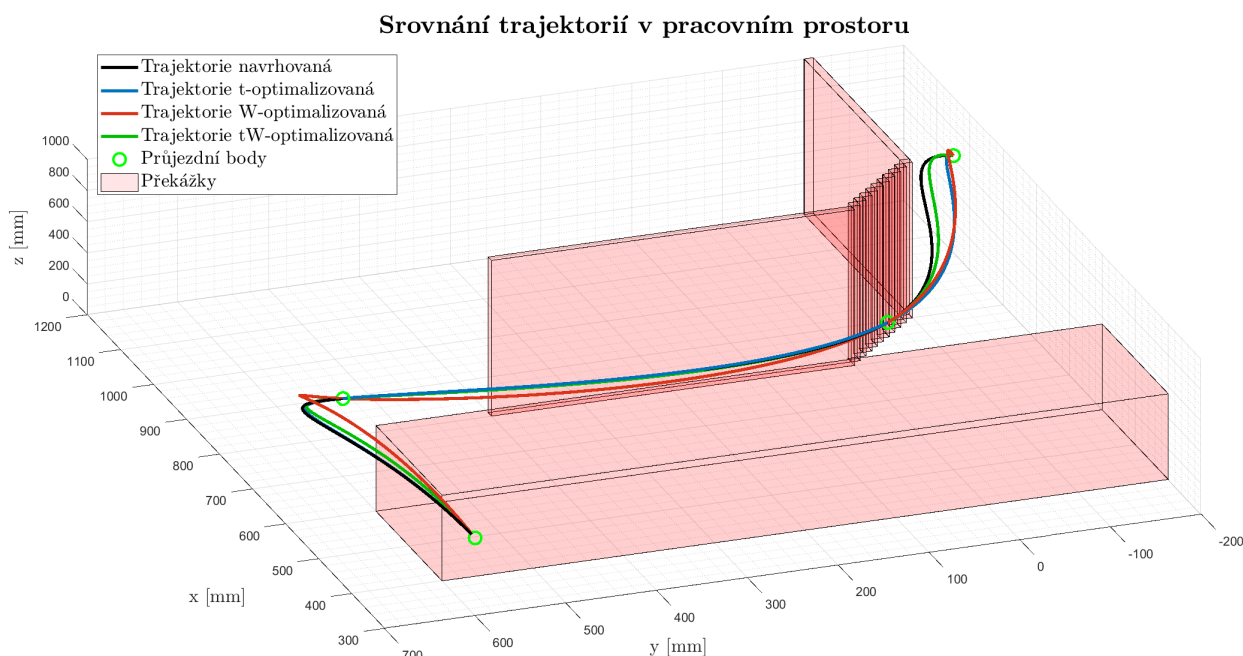
$$W_{tW-opt} = 132,51 \text{ Nm.} \quad (4.5.13)$$

4.6 Zhodnocení výsledků

Z důvodu úspory místa při prezentaci výsledků optimalizace jsou trajektorie nalezené v předchozích kapitolách přejmenovány.

Trajektorie optimalizovaná dle strojového času	=	t-optimalizovaná trajektorie
Trajektorie optimalizovaná dle energetických nároků	=	W-optimalizovaná trajektorie
Trajektorie optimalizovaná při uvažování optimálního poměru	=	tW-optimalizovaná trajektorie

Na obrázku 39 jsou, pro porovnání, vykresleny všechny křivky v pracovním prostoru robotu.



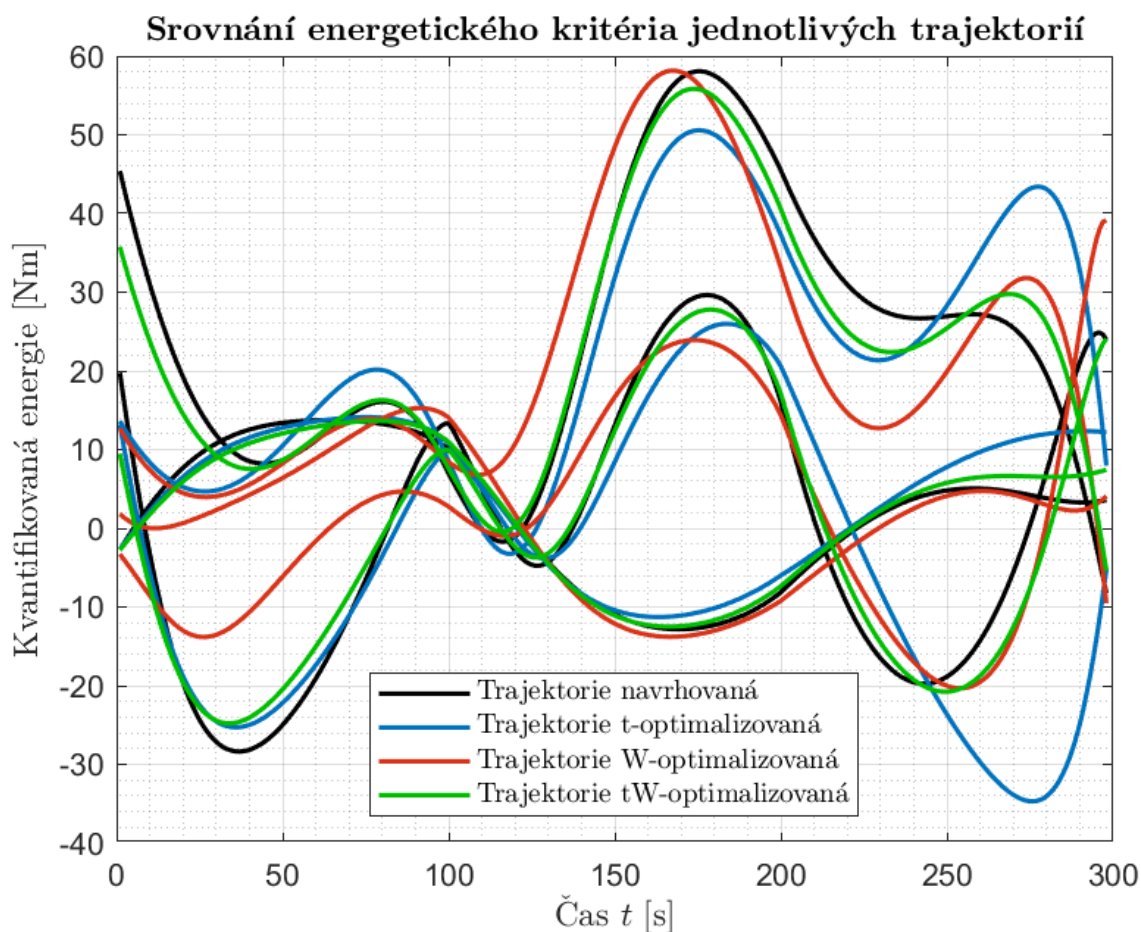
Obrázek 39: Srovnání trajektorií v pracovním prostoru

V tabulce 11 jsou pro srovnání zaneseny délky trajektorií a procentuálně vyjádřeno, zda a o kolik jsou dané trajektorie kratší či delší.

Tabulka 11: Srovnání délek trajektorií

Trajektorie	Navrhovaná	t-optimalizovaná	W-optimalizovaná	tW-optimalizovaná
Délka [mm]	3054,8	2988,9	3302,4	3025,7
Vyjádření %	0 %	-2,16 %	+8,11 %	-0,95 %

Na obrázku 40 jsou vidět průběhy kvantifikovaných energetických nároků při vykonávání předepsaného pohybu. Na první pohled je vidět rozdíl mezi obsahy ploch pod momentovými křivkami, zejména pak u W-optimalizované trajektorie.



Obrázek 40: Srovnání energetických nároků

V tabulce 12 jsou uvedeny hodnoty kvantifikovaných energetických nároků dle kap. 3.7. Opět je zde uvedeno i procentuelní vyjádření vhodnosti křivky z daného optimalizačního hlediska.

Tabulka 12: Srovnání energetických náročností trajektorií

Trajektorie	Navrhovaná	t-optimalizovaná	W-optimalizovaná	tW-optimalizovaná
Kritérium [Nm]	139,15	140,06	119,23	132,51
Vyjádření %	0 %	+0,66 %	-14,32 %	-4,77 %

Z uvedených údajů lze konstatovat, že úloha optimalizace trajektorie robotického manipulátoru byla splněna a výsledky jsou v souladu s očekáváním.

5 Závěr

V první části práce byly prostudovány možnosti navrhování trajektorií s ohledem na požadované vlastnosti křivky, jako je například spojitost. Byla popsána problematika řešení kinematické a dynamické úlohy a byly ukázány základní metody a postupy jak takové úlohy řešit. V rámci řešení prostorových mechanismů byla popsána Denavit-Hartenbergerova úmluva, která se používá pro systematický popis mechanismů. Dále jsou uvedeny principy fungování genetických optimalizačních algoritmů a ukázány jejich výhody a nevýhody v porovnání s jinými druhy algoritmů. V závěru první části byly formulovány požadavky na optimalizační kritéria.

Druhá část této práce se zabývá řešením konkrétního typu manipulátoru. Byl zvolen robot Racer 7 - 1,4 od společnosti Comau. Jedná se o šestiosý robotický manipulátor, který se skládá z antropomorfního ramene a sférického zápěstí. Bylo provedeno řešení kinematiky všech šesti os mechanismu. Z důvodu zjednodušení popsaného v kapitole 4.4 se řešení dynamické úlohy zredukovalo pouze na řešení prvních tří os (tzn. bez sférického zápěstí). Byla navržena trajektorie s respektem ke zvoleným překážkám v pracovním prostoru stroje. Následně byla provedena optimalizace trajektorie kritérií navržených v kapitole 3.7.

Zhodnocení výsledků práce je provedeno v kapitole 4.6. Výsledky odpovídají očekávání a podařilo se uspořit strojový čas na pracovní cyklus i energii, která by byla pro realizaci pohybu potřeba.

V mé původní vizi bylo navíc provedení experimentu na reálném robotu, který byl zvolen pro analýzu. Bohužel, z důvodu vytíženosti stroje a personálu nebylo možné toto měření uskutečnit.

Směr, kterým by se tato práce mohla ubírat dále je určitě provedení tohoto experimentu a srovnání s výpočty, zakomponování dynamiky sférického zápěstí, aplikace diferenciální kinematiky pro mechanismus nebo aplikace tohoto optimalizačního postupu na reálné robotické aplikaci.

Reference

- [1] SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. Robot Dynamics and Control. 2004.
- [2] LINKEOVÁ, Ivana. Základy počítačového modelování křivek a ploch. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04011-9.
- [3] SCHLESINGEROVÁ, Eva. Web k tématu Integrální počet [online]. Brno, 2009 [cit. 2019-05-19]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/thcal/>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Roman Plch.
- [4] VALÁŠEK, Michael, ŠIKA Zbyněk a BAUMA Václav. Mechanika B. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02919-0.
- [5] BRÁT, Vladimír. Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vazaných mechanických systémů. Praha: Academia, 1981.
- [6] ŠVEJDA, Martin.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni [online]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [7] SCIAVICCO, Lorenzo, SICILIANO, Bruno. Modeling and control of robot manipulators. The Mc Graw-Hill Companies, Inc., 1996. ISBN 0-07-057217-8.
- [8] KUCUK, Serdar, BINGUL, Zafer. Robot Kinematics: Forward and Inverse Kinematics. CUBERO, Sam, ed. Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control [online]. Pro Literatur Verlag, Germany / ARS, Austria, 2006, 2006-12-01 [cit. 2019-05-19]. DOI: 10.5772/5015. ISBN 3-86611-285-8. Dostupné z: http://www.intechopen.com/books/industrial_robotics_theory_modelling_and_control/robot_kinematics_forward_and_inverse_kinematics
- [9] KUCUK, Serdar, BINGUL, Zafer. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, 2004. ICM '04 [online]. IEEE, 2004, s. 274-279 [cit. 2019-05-19]. DOI: 10.1109/ICMECH.2004.1364451. ISBN 0-7803-8599-3. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1364451/>
- [10] VALÁŠEK, Michael, STEJSKAL, Vladimír a BŘEZINA, Jiří. Mechanika A. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 9788001028902.
- [11] HORDĚJČUK, Vojtěch. Genetický algoritmus [online]. Dostupné z: <http://voho.eu/wiki/geneticky-algoritmus/>
- [12] MALLAWAARACHCHI, Vijini. Introduction to Genetic Algorithms - Including Example Code, Australian National University Canberra [online]. Dostupné z: <https://towardsdatascience.com/introduction-to-genetic-algorithms-including-example-code-e396e98d8bf3>
- [13] LUNER, Petr. Jemný úvod do genetických algoritmů, UK v Praze [online]. Dostupné z: <https://cgg.mff.cuni.cz/pepca/prg022/luner.html>