ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav výrobních strojů a zařízení

VLOŽENÉ PŘEVODY V POHONECH NC STROJŮ A ROBOTŮ

doc. Ing. Pavel Souček, DrSc.

rok vydání 2019

Úvodní slovo autora

Předložený text volně navazuje na autorovu monografii „Servomechanismy ve výrobních strojích“ (Vydavatelství ČVUT 2004, ISBN 80-01-02902-6), která se zabývá především polohovou regulací pohonů při dráhovém řízení NC obráběcích strojů a robotů, ale úloha vložených převodů je v ní probírána jen okrajově.

Zde jsou předchozí poznatky rozšířeny a doplněny u dvou hlavních představitelů – kuličkových šroubů a planetových převodovek. Nejedná se ale o standardní pevnostní a životnostní výpočty, které jsou obvyklým předmětem výuky strojního inženýrství a pro které existují i podrobné firemní návody:

- u kuličkových šroubů je věnována pozornost všem druhům deformací, odhadu třecího momentu a optimalizaci stoupání pro maximální zrychlení pohybové osy NC stroje. Podané výpočetní postupy nemusí vždy vést ke shodě s experimenty (zvláště u pasivních odporů), měly by ale pomoci alespoň ke kvalitativnímu posouzení vlivu provozních podmínek. Katalogové údaje firem o stykové tuhosti bývají často neúplné a chybějí i podklady pro její výpočet podle normy DIN-ISO 3408-4. Teorie silnostěnných nádob je uvedena v Dodatku A9 kvůli vysvětlení vztahu pro radiální deformace matice ve zmíněné normě, ale hlavní význam teorie je v jiných oblastech strojírenství;
- u planetových převodovek je věnována pozornost jen několika málo uspořádáním, typickým pro výrobní stroje a roboty, i když samotný planetový princip poskytuje v jiných oborech konstruktérovi široké pole možností. Je naznačen odhad účinnosti (sice opět s nejistým odhadem ztrát u základního převodu) kvůli rozptýlení obav např. ze samosvornosti. V závěru uvedené aplikace planetových převodovek v cyklistice sice nekorespondují s názvem a posláním této publikace, měly by ale čtenáře upozornit na historickou zkušenost (potvrzenou i z oboru valivých ložisek), že vývoj jízdního kola byl a stále je významným katalyzátorem technického pokroku. Naznačená statistická metoda výpočtu tuhosti převodovek s mnoha spoluzabírajícími zuby je v běžné praxi asi těžko použitelná, ale dává dobrý názor na podobný vliv předpětí jako u kuličkových matic, kde se kromě Hertzovy teorie rovněž nabízí statistický přístup.

Uvedené výpočetní postupy mohou posloužit k doplnění a rozšíření znalostí studentům oboru výrobních strojů a robotů, ale i konstruktérům a výpočtářům širší technické veřejnosti například k rychlému informativnímu odhadu stykové tuhosti kuličkového šroubu, nebo ke kontrole vhodnosti převodového poměru.

Tato publikace nebyla oponována a neprošla žádnou jazykovou ani jinou korekturou. Autor přejímá úplnou zodpovědnost za její eventuální nedostatky a přivítá jakoukoliv připomínku nebo námět ke kritické diskusi.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivatives 4.0 International License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/ or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

A. Pohony s kuličkovými šrouby 1

A0. Volba elektromotoru („salám - špekáček“?) 1
Vliv krouticího momentu 2
Vliv otáček 3
Uspořádání katalogů a výběr motoru podle zadání stroje 3

A1. Ochranný efekt vložených převodů 4

A2. Optimalizace jednoduchého převodu 5
Zjednodušený postup 5
Zpřesněný postup 6

A3. Tahové a krutové deformace pohybových šroubů 7
Sčítání poddajností 8
Maximální složená poddajnost v tahu a krutu 9
Porovnání tahových a krutových deformací 10

A4. Optimalizace převodu s pohybovým šroubem 11
4.1 Nejjednodušší postup optimalizace 12
4.2 Zpřesněný postup 12
4.3 Výsledné zpřesnění 13
Referenční šroub 13
Varianta A (rotující šroub je uložen axiálně jednostranně) 13
Varianta B (rotující šroub je uložen axiálně oboustranně) 14

A5. Stykové deformace kuličkových šroubů, axiálních a kosoúhlých kuličkových ložisek 17
5.1 Použití Hertzovy teorie 19
Úprava Hertzova vztahu pro kuličková ložiska 19
5.2 Axiální kuličková ložiska 20
5.3 Kuličková ložiska s kosoúhlým stykem 21
5.4 Kuličkové šrouby 21
Shrnutí 22
5.4.1 Styková tuhost jedné nepředepnuté matice 23
5.4.2 Styková tuhost dvou předepnutých matic 23
Srovnání s výpočtem podle normy DIN ISO 3408-4 26
5.4.3 Vliv radiální deformace šroubu a tělesa matice 26

A6. Pasivní odpory ložisek a kuličkových šroubů 28
6.1 Třecí moment podle výrobců ložisek 28
6.2 Třecí moment podle teorie valivého tření 28
6.2.1 Jedna nepředepnutá matice 29
Převod z rotace na posuv 29
Převod z posuvu na rotaci 30
6.2.2 Dvě předepnuté matice, převod z rotace na posuv 30

A7. Kuličkové šrouby – shrnutí 34
Závěrečná upozornění 34
Příklady výpočtů 35

A8. Planetové šrouby 38
A9. Dodatek 39
Válcová silnostěnná nádoba 39
Příklady 41
Literatura 43

B. Pohony s pastorkem – hřebenem a planetovou převodovkou 44

B1. Proč planetové převody? 44
Historie 44
Některé katalogové údaje 45

B2. Kinematika a účinnost planetových převodovek 46
2.1 Odhad ztrát základního (vnitřního) převodu 46
2.2 Willisova metoda výpočtu převodu – základní vztahy 46
2.3 Převodovka 2K-U, jeden stupeň, tok výkonu $(1 - U)^3$ 47
Energetická bilance 48
Poměrný potenciální výkon 49
2.4 Účinnost dvoustupňového planetového převodu 2K-U 50
2.5 Typ 2K-U, tok výkonu $(U-1)^3$ 51
2.6 Převodovka 1K-U, tok výkonu $(U-3)^1$ 52
2.7 Typ 1K-U, tok výkonu $(3-U)^1$ 55
2.8 Vyvedení momentu z převodovek typu 1K-U (člen W) 56
2.9 Harmonické („vlnové“) převodovky 59
2.10 Speciální vícestupňové převodovky 60

B3. Příklady uplatnění planetových převodovek 62
Rychloběžná osa C s prstencovým motorem 62
Třírychlostní pohon vřetena soustruhu 63
Jízdní kolo 64
Třístupňová planetová převodovka 2K-U (Fichtel & Sachs) 64
Čtrnáctistupňová (!!) převodovka fy. Rohloff 65
Větrné elektrárny (dvakrát 2K-U dorychla) 67

B4. Statistická metoda pro výpočet tuhosti planetových převodovek 68
4.1 Odvození základních vztahů....68
4.2 Lineární model jednoho zubu 69
4.3 Statistický model více zubů 70
4.4 Nezatížený převod – jedna strana zubů 72
4.5 Zatížený převod – jedna strana zubů 72
4.6 Zatížený převod – obě strany zubů 73
4.7 Statická deformační charakteristika 75
4.8 Měření deformační charakteristiky 76
Hystereze a účinnost zatěžovacího cyklu 77

B5. Kinematická přesnost převodů 79
5.1 Nezatížený převod 79
5.2 Zatížený převod 80
5.3 Měření kinematické přesnosti 80

B6. Měření na jiných typech převodů 81
Posuvová osa s ozubeným řemenem a kuličkovým šroubem 82
Deformační charakteristika ozubeného řemenu 83

Literatura 83

B7. Dodatek – měrové jednotky v pohonech 84

A. Pohony s kuličkovými šrouby

***Úvodní poznámky**: 1) Pokud zvlášť neupozorníme na změnu, důsledně budou používány základní měrové jednotky* $[m, kg, s, rad]$. *Stoupání závitu má tedy fyzikální rozměr* $[m/rad]$ *a použitý symbol je* h. *V dalším textu se někde vyskytne i označení* s *pro stoupání na otáčku, takže platí*

$$h[m/rad] = \frac{s[mm/ot]}{2000\pi} \qquad (1)$$

***2)** Převod (převodový poměr) je definován jako poměr rychlosti hnacího členu k rychlosti členu hnaného. Není důležitý typ mechanizmu a rychlosti mohou být translační i úhlové. U šroubu, použitého obvyklým způsobem (pro transformaci z rotace na posuv), má tedy stoupání význam reciproké hodnoty převodu.*

V technické praxi nastává zřídkakdy situace, že samotný elektromotor je schopen splnit silové požadavky poháněného mechanizmu. Přizpůsobení jeho možností ke kinematickým i silovým požadavkům stroje je potom nutno řešit vložením vhodného převodu, čímž vzniká tzv. **nepřímý pohon**. Velikost rotačního elektromotoru je dána momentem, nikoliv výkonem; ten je součinem momentu a úhlové rychlosti, která velikost motoru významně neovlivňuje. **Proto je téměř vždy výhodná kombinace malého nízkomomentového a rychloběžného motoru s převodem dopomala.** Vznikají tak postorově úsporné kompaktní pomaloběžné pohonové jednotky s velkými krouticími momenty. Zvláště u robotů je oblíbená kombinace rychloběžný elektromotor – planetová převodovka, která svými zástavbovými rozměry umožňuje úspornou instalaci např. v otočné ose kloubového robota.

Na druhé straně vložené převody zanášejí do pohonu své výrobní nepřesnosti, vůle, pružné deformace, pasivní odpory atd., které mohou negativně ovlivnit kvalitu regulace rychlosti i polohy u přesných strojů.

V následujícím textu zmíníme vybrané typy vložených převodů, používané v pohonech posuvů a vřeten NC obráběcích strojů a u průmyslových robotů. Jsou to především:

- **převod s ozubeným řemenem (méně často s ozubenými koly)**
- **valivé šrouby, hlavně kuličkové**
- **planetové převodovky a jim příbuzné převodovky harmonické**.

Okrajově bude zmíněn i **převod s ozubeným pastorkem a hřebenem**.

Nebudeme se věnovat pevnostním a životnostním výpočtům (které čtenář nalezne v učebnicích a příručkách z částí strojů nebo v návodech a katalozích výrobců), ale zaměříme se na ty vlastnosti převodů, které ovlivňují kvalitu regulace rychlosti a polohy vysoce dynamických pohybových os NC strojů a robotů s regulačními elektromotory. Jde především o jejich tuhost, přesnost a optimální využití dynamických možností motoru (hlavně dosažení maximálního zrychlení, které umožní zkrácení rozběhových a doběhových časů).

Dvě hlavní úlohy vložených převodů jsou:
- přizpůsobení kinematických a silových parametrů hnacího motoru k požadavkům poháněné strojní skupiny;
- ochrana regulace motoru před působením vnějších (řezných) sil.

A0. Volba elektromotoru („salám - špekáček“?)

Nejčastěji se používají **synchronní elektromotory s permanentními magnety v rotoru**. Jejich velikost je dána především objemem elektromagneticky aktivních částí (vinutí, magnetů, železa) a motory jsou řazeny v katalozích výrobců podle krouticího momentu, nikoliv výkonu nebo rychlosti. Ta ovlivňuje rozměry motoru jen nepřímo, např. přes vliv odstředivých sil na montáž magnetů nebo riziko překročení kritických otáček rotoru. Velkou předností těchto motorů je, že **jejich dosažitelný krouticí moment zůstává prakticky**

neměnný nebo jen málo klesá s rostoucími otáčkami a neexistuje komutační omezení jako u stejnosměrných motorů s kartáči a komutátorem, nebo nebezpečí ztráty kroku jako u motorů krokových. Při převodu z rotace na posuv je výrazným zpomalujícím členem pohybový šroub, u případu rotace – rotace je to planetová převodovka.

Při výběru motoru je nutná základní orientace v katalozích výrobců, kteří nabízejí rozsáhlý sortiment velikostí, momentů i otáček. Některé základní souvislosti při srovnávání motorů různých tvarů a velikostí vysvětlíme zjednodušeně na příkladu cívky, otáčející se v magnetickém poli permanentních magnetů.

Vliv krouticího momentu

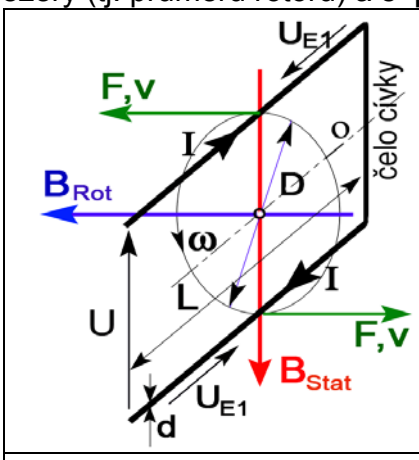
V **obr.0** působí pole permanentních magnetů statoru s indukcí B_{Stat} na vodič délky L při proudu I silou $F = B_{Stat} L I = B_{Stat} L \sigma_{Cu} S$ (průřez vodiče je $S = \pi d^2/4$, proudová hustota mědi σ_{Cu}). Směr síly je dán pravidlem levé ruky (siločáry permanentních magnetů směřují do dlaně, prsty ukazují směr proudu, palec směr síly). Krouticí moment, vyvozený jedním vodičem, je $FD/2$. Ze dvou vodičů vznikne otočná cívka (závit), jejíž krouticí moment k ose o je

$$M_{K1} = FD = B_{Stat} LDI$$

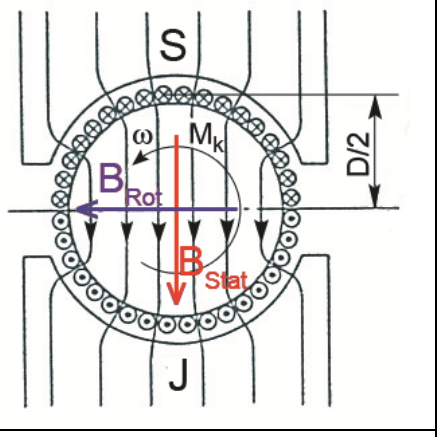
Po kruhovém obvodu vzduchové mezery mezi statorem a rotorem v **obr.00** se vejde přibližně $N = \pi D/d$ vodičů (d...průměr vodiče), tedy $N/2$ závitů. Celkový krouticí moment všech vodičů při jejich jedné vrstvě a při plném využití obvodu (nejen vodiči, ale i permanentními magnety) je

$$M_K = M_{K1} N/2 = \frac{\pi B_{Stat} L D^2 I}{2d}$$

Krouticí moment motoru tedy roste přibližně s **druhou** mocninou průměru D aktivní vzduchové mezery (tj. průměru rotoru) a s **první** mocninou její délky L.



Obr.0 *Indukované napětí a síla na vodič v magnetickém poli*



Obr.00 *Princip činnosti motoru s permanentními magnety*

Rotor motoru lze přibližně považovat za homogenní válec s délkou L, průměrem D a průměrnou hustotou ρ (zhruba stejnou jako hustota železa). Jeho hmotový moment setrvačnosti roste se **čtvrtou** mocninou průměru D a opět s **první** mocninou délky L:

$$J_M = \rho L \pi D^4/32$$

Pro úhlové zrychlení rotoru můžeme tedy psát

$$M_K \propto LD^2, \quad J_M \propto LD^4$$

$$\alpha_M = M_K/J_M \propto 1/D^2 \qquad \text{(nezávisí na } L \text{ !!)}.$$

Zvýšení momentu můžeme dosáhnout zvětšením délky rotoru nebo zvětšením jeho průměru. Zrychlení rotoru se s rostoucí délkou nemění, ale klesá s **druhou** mocninou průměru. Např.

zdvojnásobení momentu dosáhneme zdvojnásobením délky nebo zvětšením průměru $\sqrt{2}$-krát. V prvním případě úhlové zrychlení zůstalo, ve druhém případě kleslo dvakrát.

***Poznámka**: Při zvětšování průměru vzduchové mezery D jsme zachovávali průměr vodičů d a rostl jejich počet. Výchozí předpoklad úvahy ale můžeme změnit:*
- zachováme počet vodičů a zvětšíme jejich průměr úměrně ke zvětšení průměru rotoru. Při n-násobném zvětšení bude $D_k = nD,\ d_k = nd$, průřez vodiče S a tím i proud se při stejném napájecím napětí a dovolené proudové hustotě σ_{Cu} zvětší n^2-krát, takže bude platit

$$M_{Kn} = \frac{\pi B_{Stat} L n^2 D^2 n^2 I}{2nd} = n^3 M_K\,,\quad J_{Mn} = \rho L \pi n^4 D^4 / 32 = n^4 J_M$$

*Dosažitelné zrychlení rotoru tentokrát kleslo s **první** mocninou průměru:*

$$\alpha_{Mn} = M_{Kn} / J_{Mn} = n^3 M_K / n^4 J_M = \alpha_M / n$$

Zvětšením délky se zrychlení stejně jako v předchozím případě nezměnilo.

I když obě předchozí úvahy nerespektují plně konstrukční zásady uspořádání vinutí, napovídají nám obecný závěr, že **z hlediska maximálního úhlového zrychlení samotného motoru α_M je lépe zvyšovat krouticí moment zvětšováním délky než průměru a je výhodný dlouhý štíhlý tvar rotoru ("salám").**

Výše uvedené přibližné úvahy se dají použít jak na motory s rotujícím vinutím (kartáčové, tzv. DC motory), tak na motory bezkartáčové s rotujícími magnety a vinutím ve statoru.

Vliv otáček

Při nadměrném zvětšování délky rotoru narazíme na konstrukční problémy (např. zástavbový prostor, průhyb a kritické otáčky rotoru atd). Další zvýšení momentu je tedy nutno řešit zvětšením průměru D, čímž ale vyniknou další nepříznivé jevy, hlavně odstředivé síly (ať již na rotující magnety nebo na rotující vinutí) a nárůst indukovaného napětí:
- do jednoho vodiče závitu v **obr.0** se indukuje napětí $U_{E1} = B_{Stat} L \mathrm{v}$, které působí **proti** napájecímu napětí zdroje U. Při obvodové rychlosti $\mathrm{v} = \omega D/2$ se do obou vodičů indukuje napětí $U_E = 2U_{E1} = B_{Stat} L D \omega$ (čelo závitu se na tvorbě indukovaného napětí nepodílí !!!) a proud při odporu R bude $I = \frac{U - U_E}{R}$. Závit může být urychlen jen na rychlost, kdy se napětí U a U_E vyrovnají a proud (tedy i moment) zaniknou resp. klesnou na minimální hodnotu, nutnou k překonání pasivních odporů. Rychloběžné motory s větším průměrem proto potřebují zdroje s vyšším napájecím napětím.

Uspořádání katalogů a výběr motoru podle zadání stroje

Zmíněné souvislosti a omezení mají za důsledek, že celá typová řada motorů je výrobcem v katalogu zpravidla rozdělena do několika podskupin, z nichž v každé platí určité maximální otáčky a moment je v ní odstupňován pouze délkou aktivního elektromagnetického obvodu, nikoliv průměrem. Teprve po vyčerpání možností prodlužování se přechází na větší průměr. Zvýšením indukovaných napětí a odstředivých sil je ale vynuceno snížení otáček. Typické členění na podskupiny je např. $n_{\max} = 6000\,ot/\mathrm{min}$ pro malé, 3000 pro střední a 1200 pro velké motory. Často se sousední podskupiny překrývají, tj. pro jeden krouticí moment lze najít jak dlouhý štíhlý, tak kratší a „tlustší“ motor.

Dvěma hlavními parametry při hledání vhodného motoru jsou maximální rychlost a síla (moment), kterou musí poháněná konstrukční skupina stroje vyvinout (např. rychlost a moment na hřídeli 2 v **obr.1a**). Snažíme se o kombinaci rychloběžný motor – převod dopomala. Při prvním pokusu o výběr motoru je vhodné volit co nejmenší motor, tedy předpokládat maximální otáčky, které se v katalogu vyskytují (úplně vlevo v **obr.000**).

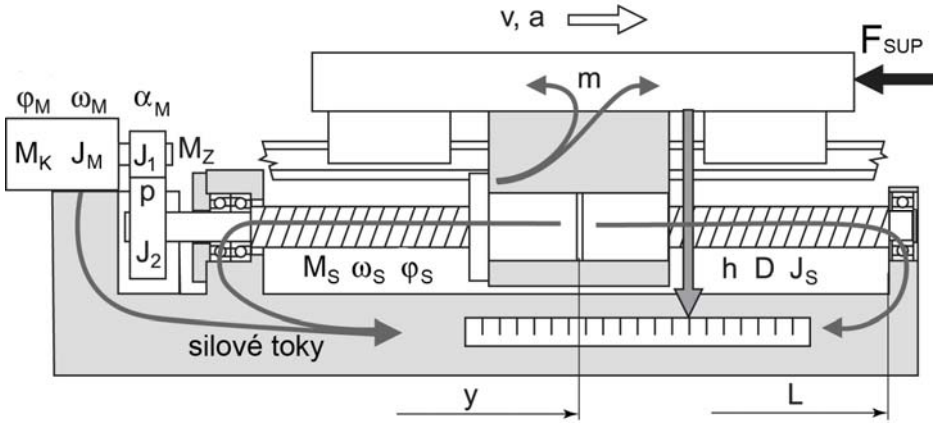
Obr.000 *Typické řazení motorů v katalogu*

Jim přiřadíme s určitou rezervou (např. 20%) maximální požadovanou rychlost stroje ω_2. Tím je stanoven potřebný převodový poměr $p = \omega_1/\omega_2$, který následně podrobíme kontrole z relace momentů, tj. $M_K = M_2/p$. Pokud v příslušné podskupině nelze najít motor s požadovaným momentem M_K, je nutno postup opakovat volbou motoru z podskupiny následující.

A1. Ochranný efekt vložených převodů

Tento efekt vysvětlíme na typickém uspořádání posuvové osy NC stroje s rotujícím pohybovým šroubem a vloženým převodem podle **obr.1**; platí ale u všech uspořádání, kde vložený převod slouží k úpravě rychlosti rotace šroubu (mohou být použita nejen ozubená kola, ale i ozubený řemen nebo planetová převodovka). Zatím neuvažujeme vůle, pružné deformace a pasivní odpory.

Šroubu předřazený převod je $p = \omega_M/\omega_S$ (je to ideální tzv. kinematický převod, pevně daný počty zubů, nikoliv okamžitý převod, ovlivněný např. výrobními nepřesnostmi).



Obr.1 *Pohon posuvu NC stroje s vloženým převodem a rotujícím šroubem*

Při rovnoměrném pohybu je síla F_{SUP} na suportu v rovnováze s momentem M_S na šroubu, tedy momentem $M_Z = M_S/p$ na hřídeli motoru. Pro posuv suportu platí

$$y = \varphi_S \cdot h = \frac{\varphi_M}{p} \cdot h = \frac{\varphi_M}{q} \tag{2}$$

kde q je celkový převod mezi motorem a suportem:

$$q = \frac{p}{h} = \frac{\omega_M}{\mathrm{v}} = \frac{\varphi_M}{y} \quad [rad/m] \tag{3}$$

Z rovnosti prací na suportu a na šroubu při jeho natočení o jeden radián platí $M_S \cdot 1rad = F_{SUP} \cdot h$, takže motor musí vyvinou moment

$$M_K = M_Z = M_S/p = F_{SUP} \cdot h/p = F_{SUP}/q \tag{4}$$

I když předpokládáme všechny mechanické části dokonale tuhé, samotná regulace motoru vždy vykazuje vlivem použitého regulačního algoritmu poddajnost, kterou lze vyjádřit poměrem (vyjádřeno pomocí Laplaceovy transformace)

$$c_M(s) = \Delta\varphi_M(s)/\Delta M_Z(s) \tag{5}$$

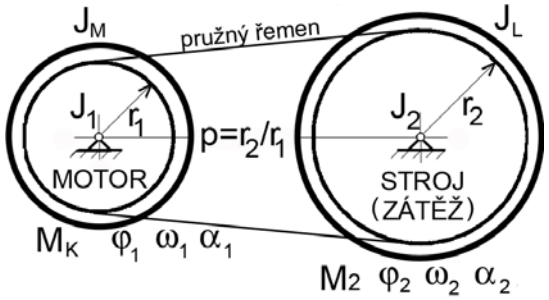
Natočení $\Delta\varphi_M$ odpovídá posuvu suportu $\Delta y = \Delta\varphi_M / q$, takže poddajnost regulace redukovaná na suport je

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta F_{SUP}(s)} = \frac{\Delta\varphi_M(s)}{q^2 \Delta M_Z(s)} = \frac{poddajnost \quad regulace\ motoru}{q^2} \tag{6}$$

Téměř vždy je $q >> 1$, neboť již jen samotný šroub představuje výrazný převod dopomala. Např. pro $p = 1$ (místo vloženého převodu by byla pouze spojka) a šroub 32*mm/ot* ($h = 0{,}032/2\pi$) je $q = 196$, $q^2 = 38600$!!! Je tedy vidět, že regulací způsobená poddajnost motoru se na suportu projeví q^2- krát méně, nebo řečeno obráceně, **pohon s rotačním motorem a vloženými převody dopomala je z regulačního hlediska dobře chráněn proti zpětnému působení vnějších sil na suportu**. U strojů s přímými pohony (ať již lineárními elektromotory nebo rotačními tzv. torque-motory) tento **"nárazníkový efekt"** převodů odpadá, zpětné silové působení technologického procesu na motor je bezprostřední a musí být eliminováno velmi rychlou a kvalitní regulací. Tuto úvahu je možno zobecnit na všechny typy vložených převodů „dopomala“.

A2. Optimalizace jednoduchého převodu

Převod s ozubeným řemenem $p_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$ je na **obr.1a** označen stručně symbolem p. Účelem optimalizace je dosažení maximálního zrychlení α_2 na setrvačné zátěži J_L při daném krouticím momentu motoru. Vnější zatěžující moment M_2 a pružné deformace řemenu neuvažujeme. Postup platí jak pro ozubený řemen (úhlové rychlosti mají stejný smysl), tak pro ozubená kola (opačný smysl).



Obr.1a *Převod s ozubeným řemenem*

Redukovaný moment setrvačnosti na hřídel motoru je

$$J_{C1} = J_M + J_1 + \frac{J_2 + J_L}{p^2} \tag{7}$$

Úhlové zrychlení na motoru je $\alpha_1 = M_K / J_{C1}$

a úhlové zrychlení zátěže

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{p} = \frac{M_K p}{(J_M + J_1)p^2 + J_2 + J_L} \tag{8}$$

Z podmínky nulové derivace $\partial\alpha_2/\partial p = 0$ vyjde optimální převod p_{OPT}, při kterém je zrychlení na zátěži maximální.

Zjednodušený postup

Jsou zanedbány hmotnosti ozubených kol resp. řemenic vůči motoru a zátěži, tj. $J_1 = J_2 = 0$ (např. odlehčené duralové řemenice), takže

$$\alpha_2 = \frac{M_K p}{J_M p^2 + J_L} \tag{8a}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial p} = M_K \frac{-J_M p^2 + J_L}{\left(J_M p^2 + J_L\right)^2}$$

Optimální převod vyjde z podmínky nulového čitatele, tj.

$$p_{OPT} = \pm\sqrt{J_L / J_M} \qquad (9)$$

Znaménko minus platí pro opačný smysl rotace, tedy pro převod s ozubenými koly.
Kinetické energie motoru a zátěže jsou při optimálním převodu shodné:

$$E_{Kin,L} = \frac{1}{2} J_L \omega_2^2 = E_{Kin,M} = \frac{1}{2} J_M \omega_1^2$$

Maximální dosažitelné zrychlení na zátěži je

$$\alpha_{2MAX} = \frac{M_K}{2\sqrt{J_M J_L}}$$

***Poznámky*: 1) Správná** *interpretace vzorce (9):*
- jestliže je $J_L = J_M$ *, potom optimální převod je* $p = 1$.
Falešná *interpretace: pro předem požadovaný přímý náhon (převod* $p = 1$*) je doporučená hodnota setrvačné zátěže* $J_L = J_M$ *. To ale není pravda, neboť ve skutečnosti při předepsané hodnotě* $p = 1$ *je dosaženo maximálního zrychlení při* $J_L = 0$ *!!!*
2) *Téměř vždy je* $J_L > J_M$ *, takže* $|p_{OPT}| > 1$ *(převod od motoru dopomala).*

Zpřesněný postup

Při návrhu celého převodu se řídíme mj. požadavkem minimálních zástavbových rozměrů.
Návrh kola motoru 1: modul a šířka ozubení jsou navrhovány z pevnostních hledisek, tedy podle krouticího momentu motoru. Následné kontroly ozubení vycházejí z jeho otáček. Průměr (tedy i počet zubů kola 1) se vždy snažíme zachovat minimální s respektováním průměru hřídele motoru a rozpěrné upínací kleštiny. Lze tedy říci, že **moment setrvačnosti** J_1 **je určen motorem bez ohledu na volbu kinematického převodu**.
Pro další postup je tedy $J_1 = konst$ a s velikostí převodu se mění jen průměr kola 2 (šířka obou kol b je stejná!!). Velikost momentu setrvačnosti J_2 závisí na způsobu odlehčení náboje. Dvě mezní možnosti podle jeho tvaru jsou:

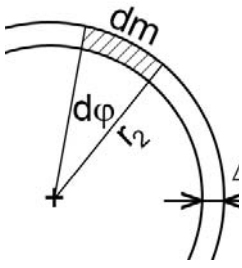
a) Kolo 2 má tvar plného válce, moment setrvačnosti roste se **čtvrtou** mocninou poloměru:

$$J_1 = \frac{\rho_1 \pi\, r_1^4 b}{2}$$

$$J_2 = \frac{\rho_2 \pi\, r_2^4 b}{2} = \frac{\rho_2 \pi\, r_1^4 p^4 b}{2} = \gamma\, J_1 p^4$$

kde $\gamma = \rho_2 / \rho_1$ .....poměr hustot materiálů obou kol. U ozubených kol je $\gamma = 1$, u ozubených řemenů bývá často řemenice na motoru ocelová a druhá duralová, tj. $\gamma \approx 0{,}4$.

b) Kolo 2 je idealizováno do tvaru tenkého věnce s poloměrem r_2 a tloušťkou stěny Δ, která umožňuje výrobu ozubení. Moment setrvačnosti roste se **třetí** mocninou poloměru:



$$J_2 = \int_0^{2\pi} r_2^2 dm = \int_0^{2\pi} \rho_2 b r_2^3 \Delta d\varphi = 2\pi \rho_2 b r_2^3 \Delta$$

$$J_2 = \gamma\, J_1 p^3$$

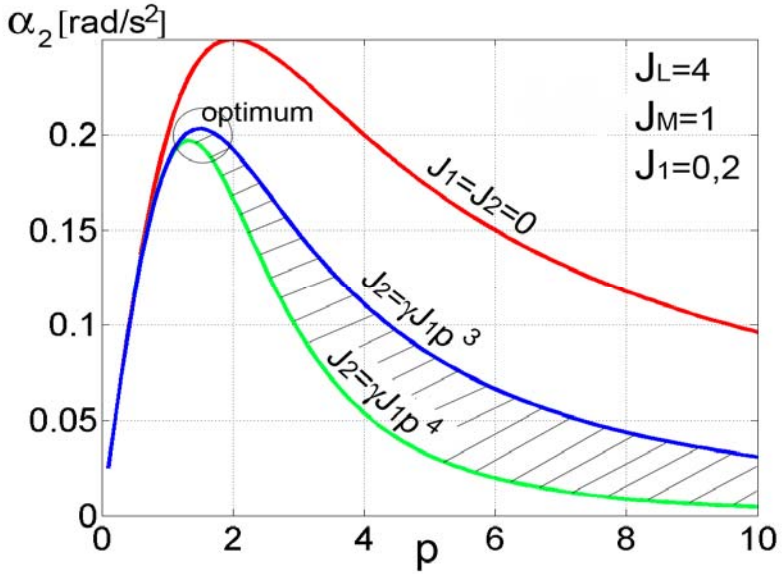
Pro reálný tvar odlehčeného kola 2 bude tedy exponent někde mezi hodnotami 3 a 4:

$$J_2 = \gamma\, J_1 p^n,\ n = 3 \div 4 \qquad (10)$$

Dosazením do (8) vychází zrychlení zátěže

$$\alpha_2(p)=\frac{M_K\,p}{J_M\,p^2+J_1\left(p^2+\gamma\ p^n\right)+J_L} \tag{11}$$

Hledání maxima funkce $\alpha_2(p)$ pomocí derivace vede na nepřehledné vztahy a snazší je přímé vykreslení grafů. Na **obr.1b** je srovnání pro všechny uvedené postupy při $M_K=1$ a $\gamma=1$.



Obr.1b *Dosažitelné zrychlení zátěže při různých postupech optimalizace*

Nejjednodušší postup dává hodnotu $p_{OPT}=2$. Relevantní oblast pro zpřesněný postup a exponent $3\div4$ je vyšrafována a dává menší hodnoty optimálního převodu i dosažitelného zrychlení.

A3. Tahové a krutové deformace pohybových šroubů

Podstatnou nevýhodou vložených převodů jsou jejich pružné deformace, vůle a další výrobní nepřesnosti, pasivní odpory a s nimi spojený ohřev a dilatace, nerovnoměrný chod a různé jiné parazitní vlivy, které rozhodujícím způsobem omezují kvalitu regulace motorů i celkové vlastnosti strojů. Dále poukážeme na hlavní a nejčastější nectnost u přesných pohybových systémů v obráběcích strojích, což je **poddajnost pohybových šroubů.**

Zajímají nás především **osové deformace** šroubů, tedy tahové (tlakové) a po redukci přes stoupání závitu i deformace krutové. Jejich ohybovému namáhání se věnovat nebudeme, neboť tam platí rutinní postupy pro návrh hřídelů. Nebudou uvedeny ani výpočty vzpěrné pevnosti, únosnosti a životnosti, kde odkazujeme na katalogy výrobců a příslušné normy. U tahových a krutových deformací stačí šroub uvažovat jako hladkou tyč s délkou L a s tzv. **efektivním průměrem** D, rovným střednímu průměru jeho závitu. V případě **kuličkového šroubu** (viz např. **obr.10a, 11b** i další) je efektivní průměr přibližně

$$D\approx d_{šr}=d_S-d_0\cos\alpha$$

kde $d_S=2r_S$ je průměr oběžné dráhy středů kuliček (tzv. **jmenovitý průměr**), α je úhel mezi stykovou normálou a kolmicí na osu rotace a d_0 průměr kuliček, které se dotýkají šroubu na průměru $d_{šr}$. **Výrobci značí kuličkové šrouby podle jmenovitého průměru d_S !!** Budeme uvažovat pouze délkové a krutové deformace šroubu a **zanedbáme délkové deformace tělesa matice**.

Materiálové konstanty pro chrom-molybden-manganové ložiskové oceli jsou:

- Poissonovo číslo $\mu = 0{,}3$
- modul pružnosti v tahu-tlaku $E = 2{,}1 \cdot 10^{11} \left[N/m^2\right]$
- modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 0{,}81 \cdot 10^{11} \left[N/m^2\right]$.

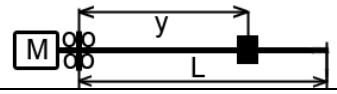
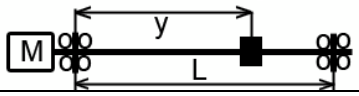
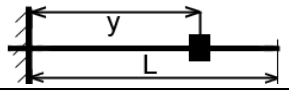
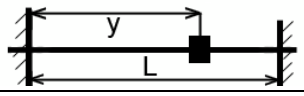
Pro tahovou (tlakovou) poddajnost hladké tyče s průměrem D a aktivní délkou y platí Hookeův zákon $\sigma = \varepsilon E$, kde $\sigma = \frac{F}{\pi D^2/4}$, $\varepsilon = \frac{\Delta y}{y}$, takže poddajnost je

$$c_T = \frac{\Delta y}{F} = \frac{4y}{\pi E D^2} \tag{12}$$

Nakroucení aktivní délky y počítáme ze vztahu $\Delta\varphi_S = \frac{32 y M_S}{\pi G D^4}$. Po přepočtu na axiální posuv vychází $\Delta\varphi_S = \frac{\Delta y}{h} = \frac{32 F h y}{\pi G D^4}$. Redukovaná krutová poddajnost je

$$c_K = \frac{\Delta y}{F} = \frac{32 h^2 y}{\pi G D^4} \tag{13}$$

U šroubů s velkým stoupáním tedy může krutová poddajnost hrát nepříjemně výraznou roli, neboť roste s jeho druhou mocninou. Na **obr.2** jsou uvedeny základní vztahy pro tahovou a krutovou poddajnost u různých konstrukčních variant axiálního uložení. Při oboustranném axiálním uložení nebo vetknutí se jedná o paralelní uspořádání pružin, takže je nutno sčítat tuhosti (převrácené hodnoty poddajností) dvou tyčí s aktivními délkami y a $L - y$.

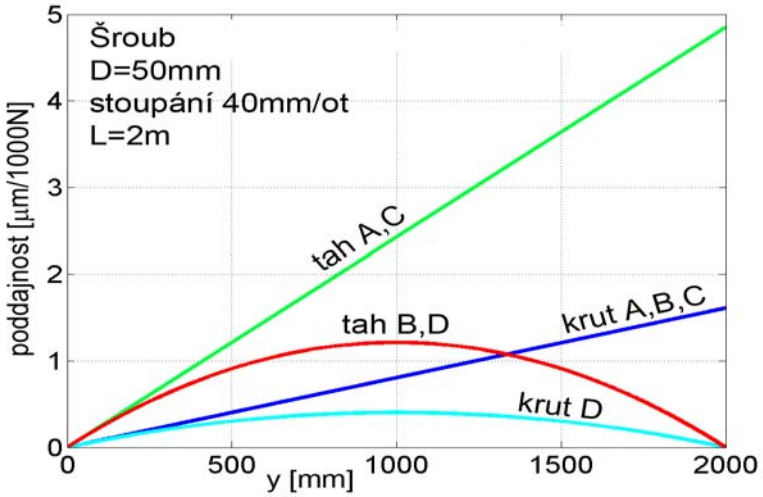
Uložení šroubu		*Tah - tlak*	*Reduk. krut*
A *Jednostr.ax.ulož. rotující šroub*		$c_{T1} = \frac{4y}{\pi E D^2}$	$c_{K1} = \frac{32 h^2 y}{\pi G D^4}$
B *Oboustr.ax.ulož. rotující šroub*		$c_{T2} = \frac{4\left(Ly - y^2\right)}{\pi E D^2 L}$	$c_{K1} = \frac{32 h^2 y}{\pi G D^4}$
C *Jednostr.vetk.šroub rotující matice*		$c_{T1} = \frac{4y}{\pi E D^2}$	$c_{K1} = \frac{32 h^2 y}{\pi G D^4}$
D *Oboustr.vetk.šroub rotující matice*		$c_{T2} = \frac{4\left(Ly - y^2\right)}{\pi E D^2 L}$	$c_{K2} = \frac{32 h^2 \left(Ly - y^2\right)}{\pi G D^4 L}$

Obr.2 A,B,C,D *Konstrukční varianty uložení pohybového šroubu a jejich osové poddajnosti*

Změna poddajnosti se zdvihem y způsobuje kmitočtové přelaďování posuvové osy. Na **obr.3** jsou vidět průběhy pro šroub $D = 50mm$, stoupání $40mm/ot$ (tj. $h = 40/2000\pi$) a délku $L = 2m$. Z hlediska tuhosti se jednoznačně nejlépe jeví varianta **D** (stojící oboustranně vetknutý šroub, rotující matice), kde je mj. i nejvyšší vzpěrná tuhost a odpadá riziko ohybového kmitání při překročení kritických otáček, neboť šroub se netočí.

Sčítání poddajností

Celková poddajnost šroubu je dána součtem složek závislých na zdvihu (poddajnost v tahu, redukovaném krutu) a složek na zdvihu nezávislých (styková poddajnost mezi maticí a šroubem, poddajnost ložisek axiálního uložení atd.), které zahrneme do tzv. konstantní složky. O výpočtu stykových deformací kuličkového šroubu s maticí a axiálních ložisek bude pojednáno zvlášť.



Obr.3 *Závislosti tahové a redukované krutové poddajnosti na zdvihu*

Maximální složená poddajnost v tahu a krutu

V každém ze všech čtyř řádků na **obr.2** je nutno sečíst složku tahovou i krutovou a najít místo, kde je součet nejvyšší. Toto místo označíme $y_{c\max}$ a příslušnou poddajnost $c_{\max}$. Ta by neměla přesáhnout určitou mez (označme ji c_0), která je pro danou aplikaci ještě únosná. Z podmínky

$$c_{\max} = c_0 \tag{13a}$$

je možno stanovit relaci mezi průměrem šroubu D a jeho stoupáním h jako funkci $D = fce(h)$ nebo v inverzním tvaru $h = fce(D)$. Při jejím dodržení je získána záruka, že v kterémkoliv místě zdvihu y nebude překročena hodnota c_0.

Poznámka*: Z tabulky na* ***obr.2*** *je zřejmé, že rovnice (13a) může být až šestého stupně pro průměr* D*, ale stupeň lze naštěstí snížit. Postup pro varianty* ***A,B*** *bude ukázán později.*

Varianty A,C: Maximální složená poddajnost je zřejmě na konci zdvihu při $y_{c\max A,C} = L$.

$$c_{\max A,C} = \frac{4L}{\pi E D^2} + \frac{32h^2 L}{\pi G D^4} = 4L\frac{GD^2 + 8Eh^2}{\pi E G D^4} \tag{14}$$

Varianta D: Složená poddajnost je $c_D = 4\left(Ly - y^2\right)\dfrac{GD^2 + 8Eh^2}{\pi E G D^4 L}$

a z podmínky $\dfrac{\partial c_D}{\partial y} = 0$ zjistíme, že maximum nastává v polovině zdvihu při $y_{c\max D} = L/2$.

Maximální složená poddajnost je oproti (14) čtyřikrát menší:

$$c_{\max D} = L\frac{GD^2 + 8Eh^2}{\pi E G D^4} \tag{15}$$

Varianta B: Složená poddajnost je $c_B = \dfrac{4y(L-y)}{\pi E D^2 L} + \dfrac{32h^2 y}{\pi G D^4}$ (16)

a její maximum nastává v obecném místě y, které zjistíme z podmínky $\dfrac{\partial c_B}{\partial y} = 0$.

Po provedení derivace vychází $\dfrac{4L - 8y_{\max B}}{\pi E D^2 L} + \dfrac{32h^2}{\pi G D^4} = 0$

takže místo největší poddajnosti leží poněkud za polovinou zdvihu:

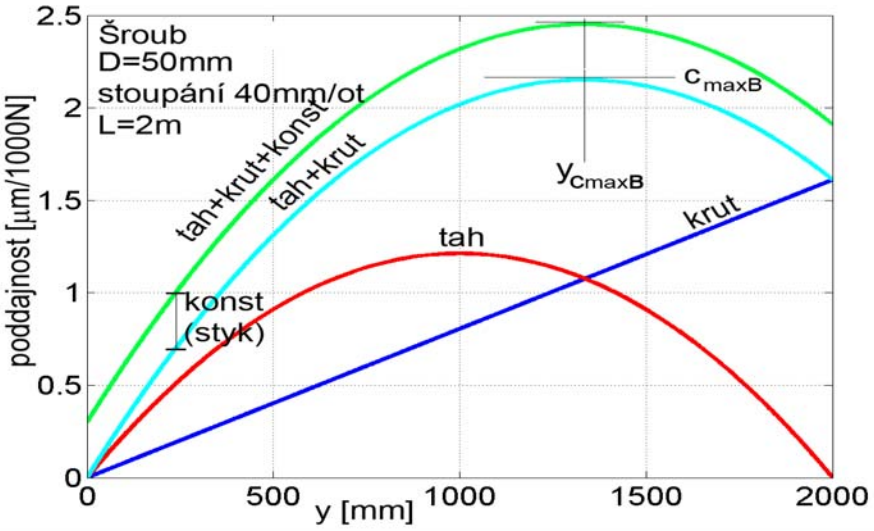
$$y_{c\max B} = \frac{L}{2} + \frac{4ELh^2}{GD^2} \tag{17}$$

Sčítání poddajností pro případ **B** je znázorněno na **obr.4** (rotující oboustranně axiálně uložený šroub $L = 2m$, $D = 50mm$, stoupání $40\,mm/ot$). Velikost konstantní složky není kreslena v měřítku!! Maximální složená poddajnost vyjde po dosazení (17) do (16):

$$c_{\max B} = \frac{4\left(\frac{L}{2}+\frac{4ELh^2}{GD^2}\right)\left(\frac{L}{2}-\frac{4ELh^2}{GD^2}\right)}{\pi E D^2 L} + \frac{32h^2\left(\frac{L}{2}+\frac{4ELh^2}{GD^2}\right)}{\pi G D^4}$$

a po delších úpravách vychází

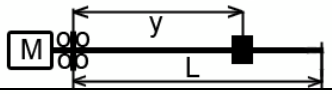
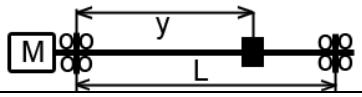
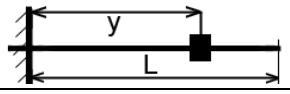
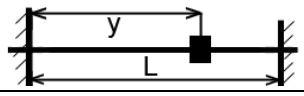
$$c_{\max B} = L\frac{\left(GD^2+8Eh^2\right)^2}{\pi E G^2 D^6} \qquad (18)$$



Obr.4 *Složená poddajnost, varianta* ***B*** *(styková poddajnost není kreslena v měřítku)*

Poznámka: *Při velkém stoupání a malém průměru šroubu může být podíl krutu tak výrazný, že vyjde* $y_{c\max B} > L$ *a maximum poddajnosti se ocitne mimo zdvih* L *. Tento případ ale obvykle nenastává.*

Všechny předchozí výsledky jsou shrnuty v tabulce na **obr.4a**.

Uložení šroubu		*Maximální složená osová poddajnost*	*Místo max. složené osové poddajnosti*
A *Jednostr.ax.ulož. rotující šroub*		$c_{T1}+c_{K1} = 4L\frac{GD^2+8Eh^2}{\pi E G D^4}$	L
B *Oboustr.ax.ulož. rotující šroub*		$c_{T2}+c_{K1} = L\frac{\left(GD^2+8Eh^2\right)^2}{\pi E G^2 D^6}$	$\frac{L}{2}+\frac{4ELh^2}{GD^2}$
C *Jednostr.vetk.šroub rotující matice*		$c_{T1}+c_{K1} = 4L\frac{GD^2+8Eh^2}{\pi E G D^4}$	L
D *Oboustr.vetk.šroub rotující matice*		$c_{T2}+c_{K2} = L\frac{GD^2+8Eh^2}{\pi E G D^4}$	$L/2$

Obr.4a *Maximum složené osové poddajnosti a její místo*

Porovnání tahových a krutových deformací

Krutové deformace se po přepočtu přes stoupání většinou projevují v axiálním směru méně než tahové, tj. poměr $\frac{c_{K1}}{c_{T1}} = \frac{c_{K2}}{c_{T2}}$ bývá menší než jedna. Například pro extrémní tzv.

čtvercové kuličkové šrouby, které mají stoupání na otáčku stejné jako jmenovitý průměr (tj. $2\pi h = d_S$, úhel stoupání závitu $\beta = arctg(2\pi h/\pi d_S) = arctg(1/\pi) \approx 17{,}7^o$, viz **obr.17,17a**) platí

$$\frac{c_{K1}}{c_{T1}} = \frac{c_{K2}}{c_{T2}} = \frac{8E}{G}\left(\frac{h}{D}\right)^2 = \frac{8E}{G}\left(\frac{h}{d_S - d_0\cos\alpha}\right)^2 \approx \frac{8E}{G}\left(\frac{h}{d_S}\right)^2 = \frac{8E}{G}\left(\frac{h}{2\pi h}\right)^2 = \frac{2E}{\pi^2 G} = 0{,}52$$

takže vliv krutu vůči tahu na osový posuv je u nich asi poloviční. Pokud by měl mít krut stejný vliv jako tah (při způsobech uložení **A,C,D**), muselo by platit $h/D = \sqrt{G/8E}$ a např. šroub $D = 50mm$ by musel mít stoupání $70mm/ot$.

A4. Optimalizace převodu s pohybovým šroubem

(hledání maximálního zrychlení suportu při daném momentu motoru)

Upozornění: *1) V úvahách o optimalizaci na maximální zrychlení nebudeme zprvu uvažovat pružné deformace. Zanedbáme i pasivní odpory, takže uvedené optimalizační postupy lze použít pro* ***šrouby kuličkové*** *nebo* ***hydrostatické****. Při výpočtech momentu setrvačnosti uvažujeme u obou typů šroubů* ***efektivní průměr*** *(střední průměr závitu)* D*. V katalozích výrobců jsou ale kuličkové šrouby označovány podle* ***jmenovitého průměru*** d_S*, po kterém obíhají středy kuliček. Např. u fy. KSK Kuřim nalezneme pod označením* $K50\times40$ *šroub se jmenovitým průměrem* $d_S = 50mm$ *a stoupáním na otáčku* $40mm$*. Průměr kuliček se u něj uvádí* $d_0 = 7{,}144mm$*, úhel stykové normály* $\alpha = 45^0$*, takže podle* ***obr.10a*** *je efektivní průměr* $D \approx d_{šr} = d_S - d_0\cos\alpha = 45mm$*.*

2) *Nadále dodržíme označení veličin podle* ***obr.1****, ale bude uvažován chod naprázdno (*$F_{SUP} = 0$*), neboť požadavek maximálního zrychlení je u NC strojů aktuální hlavně při zkracování vedlejších časů, tj. při chodu naprázdno (rychloposuvu).*

Při volbě mezi koncepcí "rotující matice" a "rotující šroub" je nutno předem porovnat momenty setrvačnosti šroubu a matice včetně rotujících částí ložisek. U strojů s dlouhými zdvihy narůstá moment setrvačnosti šroubu, takže koncepce s rotující maticí může být z hlediska setrvačných hmot výhodnější. V **obr.1** platí pro zrychlení motoru vztah $\alpha_M = M_K/J_{MRED}$, kde redukovaný moment setrvačnosti všech pohyblivých hmot na hřídel motoru je

$$J_{MRED} = J_M + J_1 + \frac{J_S + J_2 + mh^2}{p^2} \tag{19}$$

Zrychlení na suportu při nulové vnější síle ($F_{SUP} = 0$) je

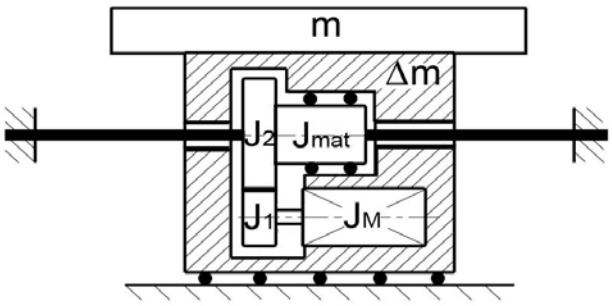
$$a = \alpha_M \cdot \frac{h}{p} = \frac{M_K}{J_{MRED}} \cdot \frac{h}{p} = \frac{M_K\, ph}{(J_M + J_1)p^2 + J_S + J_2 + mh^2} \tag{20}$$

Poznámka: *V případě koncepce s rotující maticí a vezoucím se motorem podle* ***obr.4b*** *dojde ve vztazích (19) a (20) k těmto dvěma změnám:*

- na místo J_S ..... J_{mat} *a na místo* m ..... $m + \Delta m$*, kde* Δm *je předpokládaný přírůstek hmotnosti suportu, zahrnující hmotnost motoru, obou kol (řemenic) a souvisejících konstrukčních skupin. Obě varianty budou dynamicky rovnocenné v případě, že*

$$J_S = J_{mat} + \Delta m h^2$$

Může ovšem nastat případ, že $J_S < J_{mat}$ *a varianta s rotujícím šroubem je jednoznačně výhodnější. Další možné varianty (např. šroub vetknutý neotočně v suportu a vezoucí se s ním, matice otočně uložená v rámu stroje), ponecháme čtenáři na rozmyšlení.*



Obr.4b *Posuvová osa se stojícím šroubem a rotující maticí*

4.1 Nejjednodušší postup optimalizace

Pokud v (20) předpokládáme neměnné hmotové veličiny J_M, J_1, J_2, J_S, m, je při daném momentu motoru M_K zrychlení suportu funkcí pouze dvou proměnných p, h. Lze ukázat (viz **lit.[3]**), že křivá plocha, znázorňující funkci $a(p,h)$, má tvar stoupajícího hřbetu nemajícího extrém a zrychlení stále roste s rostoucím stoupáním i převodem dopomala. To znamená, že při dané rychlosti motoru i suportu se rotace šroubu zpomaluje a rychlost suportu „doháníme“ zvýšeným stoupáním. I když tento postup směřuje do absurdní kombinace *„nekonečně velký převod dopomala a nekonečně velké stoupání“*, dává tušit, že **šroub jakožto pasivní setrvačník je pro požadovanou vysokou dynamiku posuvové osy škůdcem** a měl by se točit co nejpomaleji, aby jeho kinetická energie byla co nejmenší. Tuto úvahu ale dále zpřesníme, neboť se změnou převodu se mění průměr kola 2 a stoupání ovlivňuje redukovanou torzní poddajnost šroubu.

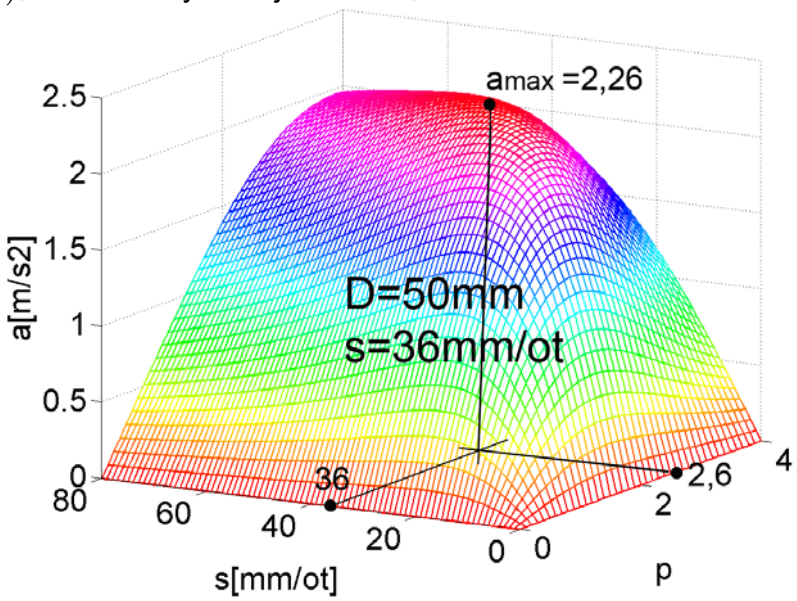
4.2 Zpřesněný postup

(setrvačný moment kola 2 roste s převodem, průměr šroubu se nemění)

Stejně jako v **kap.A2** platí pro moment setrvačnosti kola 2 vztah (10), takže v (20) bude konstantní pouze J_M, J_1, J_S, m a zrychlení je opět funkcí dvou proměnných:

$$a(p,h) = \frac{M_K\, ph}{(J_M + J_1)p^2 + J_S + \gamma\ J_1 p^{3\div 4} + mh^2} \tag{21}$$

Maximum zrychlení již existuje a jeho hledání je nejsnazší graficky vykreslením příslušné křivé plochy $a(p,h)$, která má výraznější extrém, viz **obr.5** a **obr.9** vlevo.



Obr.5 *Zrychlení suportu jako funkce stoupání a převodu. Parametry posuvové osy:*
$M_K = 10Nm$, $J_M = 0{,}0018 kgm^2$, $J_1 = 0{,}00022 kgm^2$, $\gamma = 1$,
$m = 1000kg$, *šroub* $D = 50mm$, $L = 2m$, $J_S = 0{,}0048 kgm^2$, *varianty uložení* ***A,B***

Ukazuje se, že zpřesněný postup většinou opět vede na **velké stoupání šroubu a převod dopomala**. Podle tabulky na **obr.2** ale se stoupáním roste torzní poddajnost redukovaná do směru osy šroubu (dokonce s jeho druhou mocninou!!), takže optimalizací z hlediska dosažitelného zrychlení jsou degradovány modální vlastnosti posuvové osy. **Nežádoucí nárůst celkové osové poddajnosti šroubu je nutno kompenzovat zvětšením jeho průměru** – viz další text.

4.3 Výsledné zpřesnění

Setrvačný moment kola 2 poroste jako dříve s převodem, ale průměr šroubu se bude zvětšovat spolu se stoupáním tak, aby zůstala zachována složená poddajnost v tahu a krutu. Z rovnice (13a) určíme závislost průměru a stoupání (tedy funkci $D(h)$, splňující podmínku zachování celkové poddajnosti c_0) dosazením (14), (15) nebo (18). Pokud se ji podaří vyřešit, moment setrvačnosti šroubu bude rovněž funkcí stoupání podle vztahu

$$J_S(h)=\frac{\rho_{Fe}\pi L}{32}[D(h)]^4 \tag{22}$$

a zrychlení suportu zůstane nadále funkcí dvou proměnných (délka šroubu L je konstantou, neboť je dána předepsaným zdvihem stroje):

$$a(p,h)=\frac{M_K\,ph}{(J_M+J_1)p^2+\frac{\rho_{Fe}\pi L}{32}[D(h)]^4+\gamma\;J_1p^{3\div4}+mh^2} \tag{23}$$

Opět bude možno vykreslit křivou plochu podobně jako v **obr.5** a hledat její maximum. Funkce $D(h)$ může mít různý tvar podle způsobu uložení šroubu z **obr.2A,B,C,D** a podle toho, jak stanovíme omezující podmínku pro výslednou „nepřekročitelnou“ poddajnost c_0 v (13a). Pokud není určeno jinak, logicky se nabízí postup s tzv. **referenčním šroubem**.

Referenční šroub

Jako etalon poddajnosti zvolíme fiktivní tzv. "referenční" šroub s nulovým stoupáním, takže jeho krutová deformace se neprojeví na zdvihu suportu (redukovaná krutová poddajnost je nulová). Je to hladká válcová tyč o délce L, jejíž průměr D_0 bude pro navrhovanou posuvovou osu stanoven z obvyklých pevnostních a dalších podmínek při návrhu šroubu (pevnost v tahu, vzpěru, omezení kritickými otáčkami atd). Při návrhu stoupání skutečného šroubu (u kterého přistoupí i redukovaná deformace v krutu) zvětšíme průměr D_0 na hodnotu $D>D_0$ tak, aby součet tahové a redukované krutové poddajnosti zůstal stejný jako u šroubu referenčního. Postup bude demonstrován na nejčastějších variantách **A,B**, tj. na rotujícím šroubu s jedno- a oboustranným axiálním uložením.

Varianta A (rotující šroub je uložen axiálně jednostranně)

Maximum složené poddajnosti je dáno vztahem (14). Poddajnost referenčního šroubu má jen tahovou složku $c_0=c_{refA}=\frac{4L}{\pi ED_0^2}$ a nemá-li být překročena i u šroubu skutečného, musí platit

$$c_{\max A,C}=c_{refA} \qquad \text{a po dosazení z } \textbf{obr.4a} \qquad 4L\frac{GD^2+8Eh^2}{\pi EGD^4}=\frac{4L}{\pi ED_0^2}$$

Postupnými úpravami dostáváme $$\frac{GD^2+8Eh^2}{GD^4}=\frac{1}{D_0^2}$$

Vyjde bikvadratická rovnice pro hledaný průměr D ve tvaru

$$GD^4-GD_0^2D^2-8ED_0^2h^2=0$$

Substituce $D^2=x$ vede na rovnici kvadratickou

$$x^2-D_0^2x-8ED_0^2h^2/G=0$$

jejíž kořeny jsou $$x_{1,2}=\frac{D_0^2\pm\sqrt{D_0^4+32ED_0^2h^2/G}}{2}$$

Význam má ale jen kladný kořen, takže po další úpravě a zpětným dosazením $D=\sqrt{x}$ vychází průměr šroubu jakožto funkce jeho stoupání se zárukou, že v celém rozsahu zdvihu nebude překročena poddajnost $c_0=c_{refA}$:

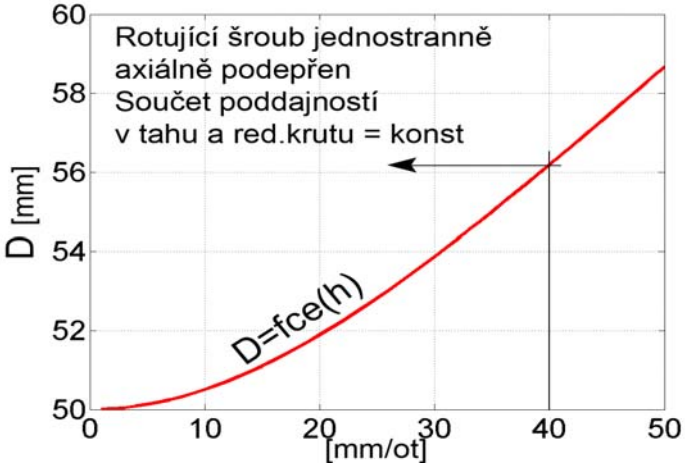
$$D(h)=\sqrt{\frac{D_0^2+D_0\sqrt{D_0^2+32h^2E/G}}{2}} \qquad (24)$$

***Poznámka**: Zpětnou kontrolu výpočtu můžeme provést dosazením $h=0$ do (24):*

$$D=\sqrt{\frac{D_0^2+D_0\sqrt{D_0^2}}{2}} \quad \textit{a po úpravě} \quad 2D^2=D_0^2+D_0\sqrt{D_0^2}=2D_0^2$$

a nutně vychází průměr referenčního šroubu $D=D_0$. Délka šroubu L se vykrátila a nehraje roli!!

Průběh funkce $D(h)$ pro referenční šroub $D_0=50mm$ je na **obr.6**.



Obr.6** Závislost průměru šroubu na stoupání při zachování složené tahové a krutové poddajnosti, referenční šroub $D_0=50mm$, varianta **A

Při malém stoupání (např. 10mm/ot) je podíl krutové deformace zanedbatelný a k její kompenzaci by stačilo zvýšit průměr z $50mm$ na $50{,}5mm$. Při stoupání $40mm/ot$ by bylo třeba přejít již na průměr $D=56mm$. Tím ale stoupne moment setrvačnosti šroubu J_S v poměru $(D/D_0)^4$, tj. asi 1,6-krát, což znamená, že dosažitelné zrychlení a_{max} se zmenší.
Po dosazení $D(h)$ do vztahu (23) pro zrychlení je možno opět vykreslit křivou plochu $a(p,h)$, která je tvarově podobná ploše z **obr.5**. Její vrchol však bude ležet níže - viz **obr.9** uprostřed.

Varianta B (rotující šroub je uložen axiálně oboustranně)

Jako etalon poddajnosti (referenční šroub) zvolíme opět tyč délky L s průměrem D_0, tentokrát ale oboustranně axiálně podepřenou, takže její největší tahová poddajnost nastává při $y=L/2$ a příslušné referenční maximum je $c_0=c_{refB}=\dfrac{L}{\pi E D_0^2}$.

***Poznámka**: Je nutno zdůraznit, že touto volbou jsme oproti variantě **A** snížili horní hranici poddajnosti čtyřikrát, takže výsledky obou variant nebudou srovnatelné.*

Maximum poddajnosti skutečného šroubu je dáno vztahem (18), takže řešíme rovnici

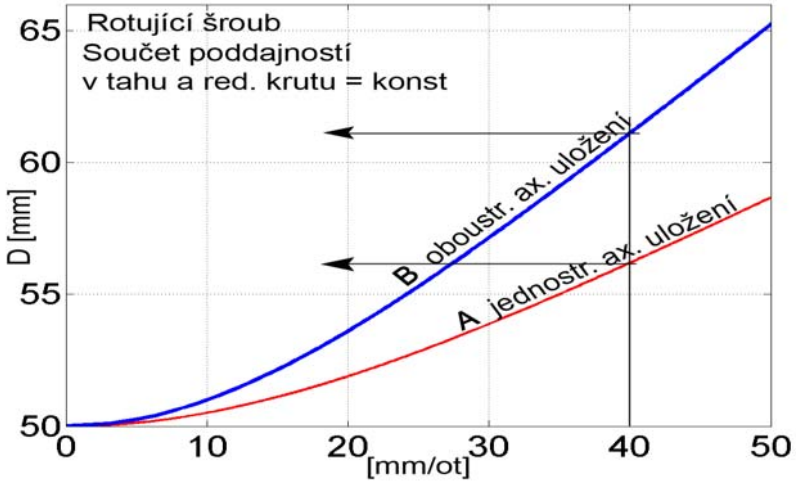
$$c_{\max B}=c_{refB}$$

$$\frac{L\left(GD^2+8Eh^2\right)^2}{\pi E G^2 D^6}=\frac{L}{\pi E D_0^2} \qquad \text{a po zjednodušení} \qquad GD^2+8Eh^2=\frac{GD^3}{D_0}$$

Na rozdíl od varianty **A** jsme dospěli k rovnici, která je vzhledem k hledanému průměru D třetího stupně, tedy obtížněji řešitelná. Schůdnější cestou je výpočet stoupání jakožto funkce průměru, tj. inverzní funkce $h(D)$:

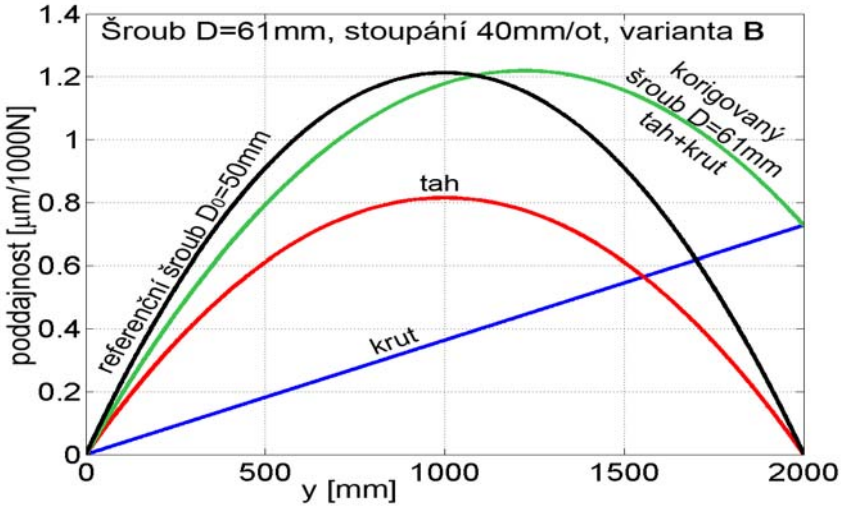
$$h(D) = D\sqrt{\frac{G}{8E}\left(\frac{D}{D_0} - 1\right)} \tag{25}$$

Délka L podobně jako u varianty **A** nehraje roli!! Kontrolu správnosti výpočtu provedeme dosazením $h = 0$ do (25) a nutně vyjde $D = D_0$. Na **obr.7** je modře zobrazen průběh funkce $D(h)$ a pro srovnání je červeně zakreslena i varianta **A** z **obr.6**.



Obr.7 *Závislost průměru šroubu na stoupání při zachování složené tahové a krutové poddajnosti, referenční šroub* $D_0 = 50mm$ *(u varianty* ***B*** *je horní hranice poddajnosti snížena čtyřikrát oproti* ***A****)*

Např. pro stoupání $40 mm/ot$ by tentokrát bylo nutno zvýšit průměr na $D = 61mm$ a moment setrvačnosti šroubu by vzrostl asi 2,2-krát. Je nutno ale mít stále na paměti, že jsme oproti variantě **A** čtyřikrát snížili horní hranici maximální poddajnosti!! Průběhy poddajností referenčního i skutečného (korigovaného) šroubu jsou na **obr.8**.

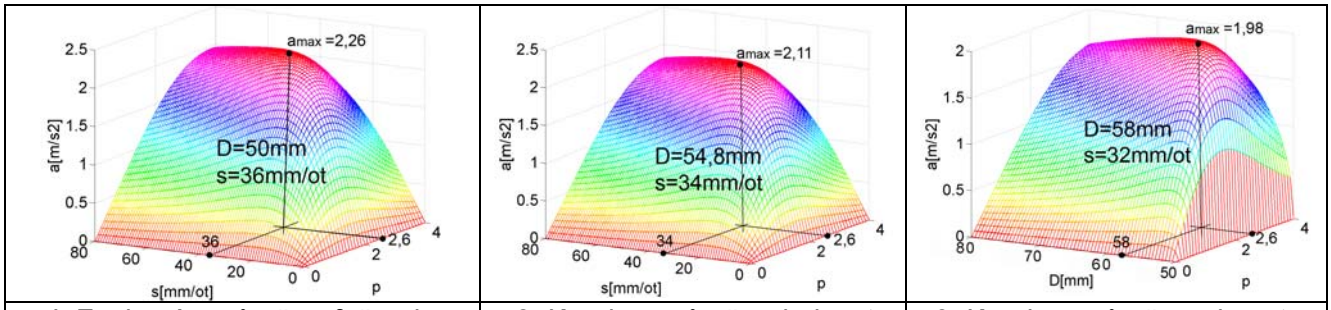


Obr.8 *Korekce na složenou tahovou a krutovou poddajnost, varianta* ***B****,*
šroub $D = 61mm$*, stoupání* $40\,mm/ot$*, referenční šroub* $D_0 = 50mm$

Zrychlení suportu je možno exaktně vyjádřit po dosazení (25) do (23) jakožto funkci dvou proměnných, tentokrát ale $a(p,D)$ a opět je možné zobrazení křivou plochou:

$$a(p,D) = \frac{M_K\, pD\sqrt{\frac{G}{8E}\left(\frac{D}{D_0} - 1\right)}}{\left(J_M + J_1\right)p^2 + \frac{\rho_{Fe}\pi L}{32}D^4 + \gamma\, J_1 p^{3\div 4} + m\frac{GD^2}{8E}\left(\frac{D}{D_0} - 1\right)} \tag{26}$$

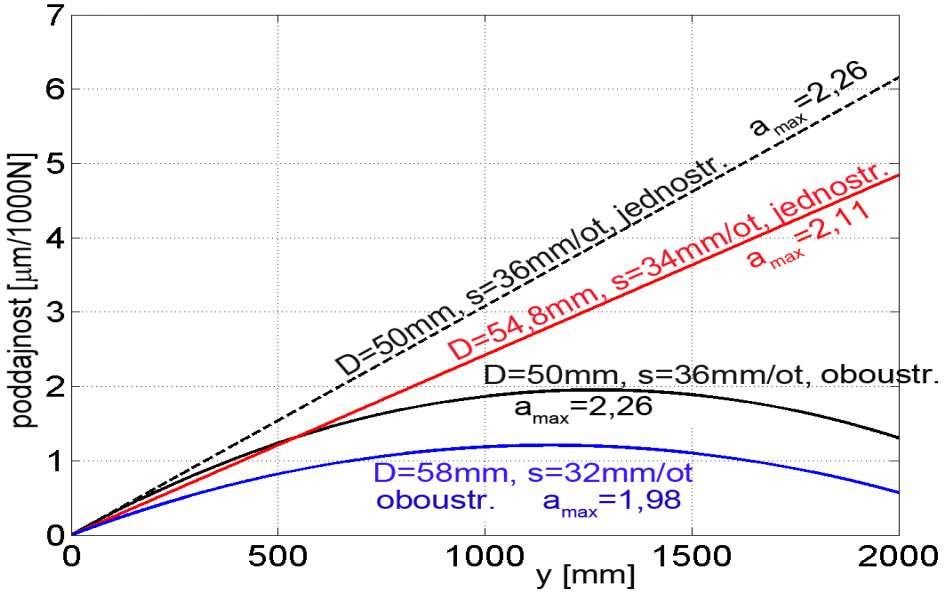
Na **obr.9** jsou shrnuty výpočty zrychlení posuvové osy se šroubem $L = 2m$ a hmotností suportu $m = 1000kg$.



1. *Zachován průměr ref. šroubu* *varianta* ***A****:* $c_{\max} = 6{,}16\,\mu m/1000N$ *varianta* ***B****:* $c_{\max} = 1{,}95\,\mu m/1000N$	***2.*** *Korekce průměru, jednostr. ax. uložení (varianta* ***A****)* $c_{\max} = 4{,}84\,\mu m/1000N$	***3.*** *Korekce průměru, oboustr. ax. uložení (varianta* ***B****)* $c_{\max} = 1{,}21\,\mu m/1000N$

Obr.9 *Dosažitelné zrychlení při různých způsobech optimalizace: motor* $M_K = 10Nm$, $J_M = 0{,}0018kgm^2$, $J_1 = 0{,}00022kgm^2$, $\gamma = 1$, $m = 1000kg$, *referenční šroub* $D_0 = 50mm$, $L = 2m$

Vlevo je případ z **obr.5**, kdy je zachován průměr referenčního šroubu $D = D_0 = 50mm$, platí vztah (21) a v něm $J_S = \frac{\rho_{Fe}\pi L}{32} D_0^4$. Průběh zrychlení je stejný bez ohledu na způsob axiálního uložení, ale u varianty **B** dochází k trojnásobnému poklesu maxima poddajnosti. Varianta s korekcí průměru podle (23) a (24) pro jednostranné uložení je na **obr.9** uprostřed, pro oboustranné uložení podle (25) a (26) je na obrázku vpravo. Všude je vyznačeno maximum zrychlení a jemu příslušný optimální vložený převod i stoupání. Ve všech třech případech vychází stejný optimální převod $p_{opt} = 2{,}6$, což je pouze náhodná shoda okolností. Na **obr.10** je vidět, jak se u uvedených optimalizovaných variant mění poddajnost se zdvihem.



Obr.10 *Průběhy poddajnosti při různých způsobech optimalizace, šroub* $L = 2m$

Procentuální změna zrychlení není u různých způsobů optimalizace podstatná (pokles z 2,26 na $1{,}98\,m/s^2$, tedy okolo 10%), ale rozdíly v poddajnostech jsou markantní jak v případě jedno- tak i oboustranného uložení.

Závěrečné poznámky: ***1)*** *Vložené mechanické převody sice zachycují zpětné působení vnějších sil a rázů na motor, na druhé straně svojí mechanickou poddajností a kinematickými chybami degradují*

vlastnosti jeho regulace. Zanášejí do soustavy další nežádoucí setrvačné hmoty, které snižují dynamiku. Zvláště rotující šroub je velkým setrvačníkem a zásobníkem kinetické energie. Přitom obecně platí, že pro dobrou dynamiku systému by měla být jeho celková kinetická energie co nejmenší. Při optimalizacích jsme se přesvědčili, že je výhodná koncepce s vloženým převodem směrem od motoru dopomala $(p>1)$ *a šroubem s velkým stoupáním. Při dané posuvové rychlosti vyjde úhlová rychlost šroubu a tím i jeho kinetická energie menší.*

2) *Výsledky optimalizací na dosažitelné zrychlení vedou většinou na hodnoty průměrů a stoupání šroubů, které nemusí být dostupné v katalozích výrobců. Dávají nám alespoň kvalitativní názor na vliv různých parametrů posuvové osy. Např. v* ***obr.9*** *vpravo je optimum* $D=58mm$ *a potažmo podle (25) stoupání* $s=2000\pi h=32\,mm/ot$ *. V katalogu KSK Kuřim najdeme nejbližší vhodný šroub* $K63\times32$ *s průměrem kuliček* $d_0=7{,}938mm$*, jehož efektivní průměr je*

$$D\approx d_{šr}=63-7{,}938\cos 45^0=57{,}4mm$$

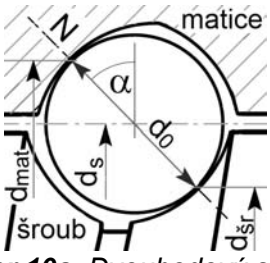
3) *Výše popsaný způsob optimalizace z hlediska zrychlení byl doplněn hlediskem osové poddajnosti šroubu, složené zatím jen z poddajnosti tahové a krutové. Šroub byl uvažován jako hladká válcová tyč, jejíž nakroucení bylo přepočteno přes stoupání závitu na osový posuv. Dále zmíníme deformace, které vznikají ve stykových plochách šroubu a matice. Nejčastěji jsou síly v závitech přenášeny vloženými odvalujícími se kuličkami. Uvidíme, že* ***výpočet stykové poddajnosti kuličkového šroubu je možno použít i pro axiální kuličková ložiska a ložiska s kosoúhlým stykem u jeho uložení.*** *Na rozdíl od případu tahu a krutu se bude jednat o složky poddajnosti nezávislé na poloze matice, ale závislé na osovém zatížení.*

A5. Stykové deformace kuličkových šroubů, axiálních a kosoúhlých kuličkových ložisek

Úvodní poznámka: *Podrobný výpočet stykových deformací kuličkových šroubů podává mezinárodní norma „**Kugelgewindetriebe – statische axiale Steifigkeit - DIN ISO 3408-4**“. V tomto textu ale uvedeme zjednodušený postup, který nedává příliš odlišné výsledky a zaměříme se pouze na případ tzv.**dvoubodového styku** kuliček a závitů matice a šroubu (viz **obr.10a**). Vzhledem k množství potřebných symbolů není možno se této normy přesně držet při značení některých veličin. Často se budeme odvolávat na **lit.[2]**, kde je důkladně rozebrán podobný problém stykových deformací valivých ložisek.*

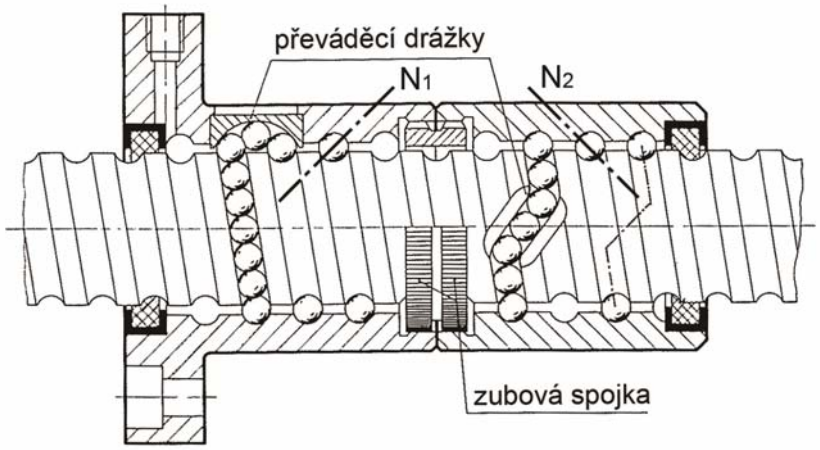
Kuličkové šrouby se používají hlavně k převedení rotačního pohybu na přímočarý, méně často (pro svoji nesamosvornost) i naopak. V provedení s oboustranně předepnutou maticí jsou ze všech typů šroubů používány nejčastěji. Jejich hlavními přednostmi jsou
- vysoká přesnost
- při vhodně zvoleném předepnutí vysoká tuhost a malý třecí moment
- při účinném krytování minimální nároky na údržbu a dlouhá životnost.

Přesně vybroušené závity šroubu i matice nejsou v přímém kontaktu, ale jsou odděleny kuličkami, které se odvalují v souhlasných závitových drahách. Počet styčných závitů šroubu a matice bývá větší než dva (někdy až sedm) podle požadované únosnosti. Kuličky opouštějící aktivní délku závitu jsou při vzájemné rotaci šroubu a matice usměrňovány tvarovaným zakončením (tzv. deflektorem), činnými kuličkami vytlačovány do zpětného převáděcího kanálu a posléze vráceny na počátek oběžné dráhy. Vzniká tak jeden nebo více recirkulačních okruhů, kde kuličky podle vzájemného smyslu rotace šroubu a matice obíhají v jednom či druhém směru. Recirkulace může být pro každý závit samostatná nebo společná pro více závitů. Pro bezvůlový chod je nutno použít dvě navzájem rozepřené matice, jejichž kuličky se dotýkají na protilehlých stranách profilu závitu šroubu. Jedná se o **dvoubodový** styk s jednou stykovou normálou – viz **obr.10a**. U méně častého styku čtyřbodového mají kuličky větší průměr a jsou mezi oběžnými



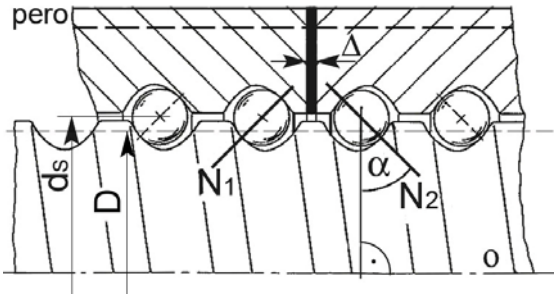
Obr.10a *Dvoubodový styk kuličky v gotickém profilu závitu*

drahami šroubu i matice sevřeny, dosedají s předpětím na obou bocích závitů a každá má dvě zkřížené stykové normály. Čtyřbodové provedení se vyznačuje většími pasivními odpory a je používáno jen u podřadnějších aplikací. Jeden z možných způsobů rozepření je na **obr.11a**: jednochodý šroub a dvojice matic mají samostatnou recirkulaci u každého závitu a vzájemné natočení matic je seřiditelné vloženou jemnou zubovou spojkou.



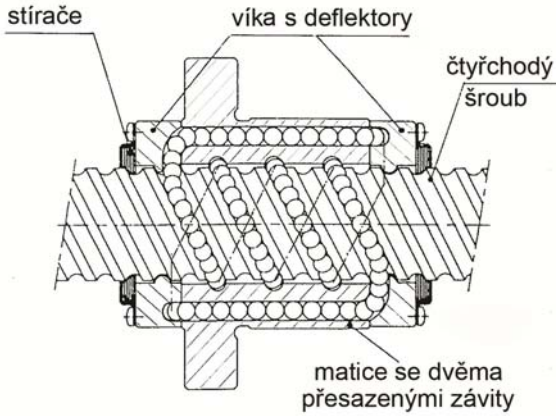
Obr.11a *Jednochodý šroub s dvojicí předepnutých matic do **„O“** a samostatnou recirkulací pro každý závit (dvoubodový styk kuliček není detailně prokreslen)*

Po navlečení na šroub na sebe matice dosednou čelními plochami a podle vyznačené polohy stykových normál **N_1** a **N_2** vznikne předpětí v kontaktu do **„O“**. Úhel stykové normály α je stejně jako u valivých ložisek měřen mezi spojnicí kontakních bodů a kolmicí na osu rotace a nejčastěji bývá $\alpha = 45^0$ - viz **obr.10a** nebo **obr.11b** (zde jsou matice rozepřeny distančním kroužkem vhodné tloušťky Δ a fixovány proti natočení společným perem, kontakt je do **„O“**).

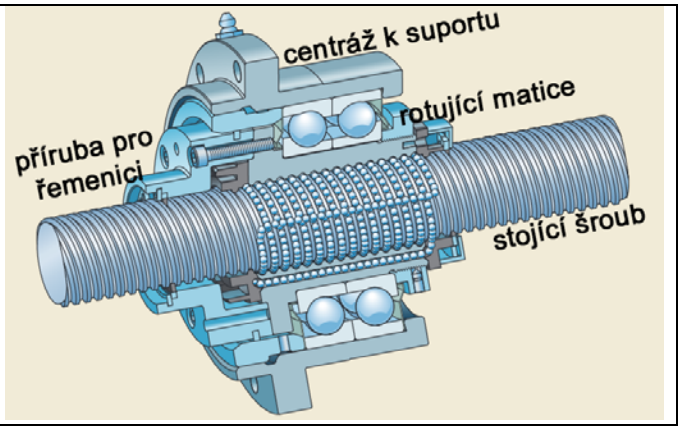


Obr.11b *Vytvoření předpětí distančním kroužkem (gotický profil závitu, dvoubodový styk)*
d_s ... jmenovitý průměr, D ... střední (efektivní) průměr šroubu

Profil závitu u kuličkových šroubů bývá nejčastěji tzv. **"gotický"**, který je tvořen dvěma protínajícími se kruhovými oblouky s poloměrem poněkud větším než u kuliček. Časté je i provedení podle **obr.12** s jedním tělesem matice, kde je předpětí dosaženo vybroušením dvou nebo více vzájemně přesazených závitů. Každý z obou recirkulačních okruhů má svůj převáděcí kanál. Zde je možno uspořádat stykové normály i do **"X"**.
V dalším textu ukážeme, že předpětí přináší kromě bezvůlového chodu i zvýšení tuhosti. Pro plné využití této přednosti je nutné i bezvůlové uložení konců rotujícího šroubu pomocí axiálně předepnutých ložisek (nejčastěji kosoúhlých, ale i jehlových nebo kuželíkových). Radiální a axiální uložení může nebo nemusí být oddělené. Porovnání jednotlivých způsobů uložení ukazuje na nesporné výhody varianty se stojícím šroubem podle **obr.2D** a někteří výrobci proto nabízejí rotující matici s integrovanými kosoúhlými ložisky, viz příklad na **obr.13**.



Obr.12 *Čtyřchodý šroub a kompaktní matice s předpětím pomocí přesazení závitů*



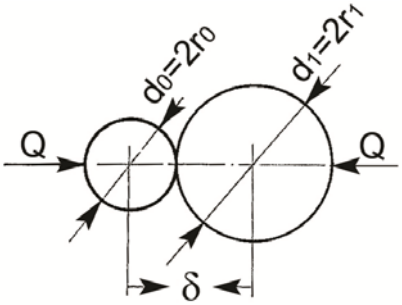
Obr.13 *Rotující matice s integrovanými kosoúhlými ložisky (SKF)*

Poznámka: *U provedení na* ***obr.12*** *je možno využít volných závitových drah na šroubu a vyrobit v matici čtyři závity s nezávislými recirkulačními okruhy, jejichž vratné kanály budou v čelním pohledu uspořádány po* 90^0. *Tím se zvýší počet nosných kuliček dvakrát.*

5.1 Použití Hertzovy teorie

V práci H. Hertze ("Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte" - Leipzig 1882) je podán základní nelineární vztah mezi silou Q a pružnou deformací δ při styku dvou těles s kulovými povrchy o průměrech d_0, d_1 a z materiálů o modulech pružnosti E_0, E_1

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{4{,}5\left(1-\mu^2\right)^2 Q^2}{d\left(\frac{2E_0E_1}{E_0+E_1}\right)^2}} \quad \text{[N, m, N/m}^2\text{]} \qquad (27)$$



Obr.14 *Kontakt dvou koulí*

Součet křivostí („společná křivost“) obou kulových ploch je $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$, takže pod odmocninou dosazujeme za

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1}.$$

Poissonovo číslo μ je uvažováno pro oba materiály stejné.

U plochy vypouklé (konvexní) je křivost kladná, u plochy vyduté (konkávní) je záporná. V mezním případě dotyku koule s kulovou jamkou o stejném průměru vychází společná křivost nulová (stejně jako u kontaktu dvou rovinných těles) a podle (27) je nulová i deformace. Pro nejčastější kombinaci materiálů **ocel – ocel** ($E_0 = E_1 = 2{,}1\cdot 10^{11}$, $\mu = 0{,}3$) vychází

$$\delta = 0{,}44\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{Q^2/d} \qquad (27a)$$

U kontaktu dvou stejně velkých koulí o průměru d_0 dosazujeme za $1/d = 2/d_0$ a $\delta = 0{,}55\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{Q^2/d_0}$, u kontaktu koule a roviny je $1/d = 1/d_0 + 1/\infty = 1/d_0$ a $\delta = 0{,}44\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{Q^2/d_0}$, u koule mezi dvěma rovinami je $\delta = 0{,}88\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{Q^2/d_0}$, viz **obr.18**.

Úprava Hertzova vztahu pro kuličková ložiska

Oběžné dráhy u kroužků kuličkových ložisek mají na rozdíl od kulové plochy různé křivosti v různých řezech. Podle **obr. 15** definujeme dvě tzv. **hlavní křivosti**:

1) první hlavní křivost (v rovině obsahující osu rotace ložiska, tj. v rovině nákresny) je u vnitřního i vnějšího kroužku záporná: $-1/R < 0$

2) druhá hlavní křivost (v rovině kolmé k rovině nákresny a obsahující stykovou normálu) je

- u vnějšího kroužku záporná: $\frac{-2}{d_S/\cos\alpha + d_0} < 0$

- u vnitřního kroužku kladná: $\frac{+2}{d_S/\cos\alpha - d_0} > 0$

(d_0 ....průměr kuliček, d_S .....průměr oběžné dráhy středů kuliček).

Kontaktní plochy při pružné deformaci ložisek již nejsou na rozdíl od případu dvou koulí kruhové, ale eliptické a pro určení jejich hlavních poloos vyžaduje Hertzova teorie součty všech čtyř hlavních křivostí dotýkajících se ploch. U ložiska s kosoúhlým stykem to je tedy

- pro kuličku a vnější kroužek: $\sum_{i=1}^{4}\rho_{ext} = \frac{2}{d_0} + \frac{2}{d_0} - \frac{2}{R} - \frac{2\cos\alpha}{d_S + d_0\cos\alpha}$ (27b)

- pro kuličku a vnitřní kroužek: $\sum_{i=1}^{4}\rho_{\text{int}} = \frac{2}{d_0} + \frac{2}{d_0} - \frac{2}{R} + \frac{2\cos\alpha}{d_S - d_0\cos\alpha}$ (27c)

U axiálního ložiska (úhel stykové normály $\alpha = 90^0$, $\cos\alpha = 0$) je druhá hlavní křivost obou kroužků nulová a odpadá poslední sčítanec. S využitím součtů (27b,c) je možno po složitém výpočtu eliptických integrálů určit rozměry kontaktních elips a následně styková napětí i deformace zvlášť pro oba kroužky a výsledky sečíst.

Výpočet pro kosoúhlá ložiska přenáší norma **DIN ISO 3408-4** na kuličkové šrouby zjednodušeně zavedením opravných koeficientů.

Na základě rozsáhlých experimentů v celé historii vývoje valivých ložisek byl Hertzův postup zjednodušován a korigován. Pro **celoocelová** axiální a kosoúhlá kuličková ložiska je v **lit.[2]** uveden vztah pro normálovou deformaci δ_n ve tvaru

$$\delta_n = 0{,}218\cdot 10^{-7}\psi\cdot\sqrt[3]{Q^2/d_0} \quad \text{[N, m]} \qquad (28)$$

kde Q je normálová síla na jednu kuličku. Korekční koeficient ψ závisí na poměru R/d_0 (což je tzv. **koeficient přimknutí** kuliček k oběžné dráze) a dále na poměru $\frac{d_0}{d_S/\cos\alpha}$, viz **obr.15**.

Při výpočtu axiální poddajnosti je nutno normálové deformace vyčíslit podle (28) zvlášť pro vnitřní i vnější kroužek, sečíst je a následně přepočítat přes úhel stykové normály do osy ložiska. Vzhledem k obtížnému určování poloměru R je ale celý postup pro různé typy ložisek ještě více zjednodušován, protože v praxi bývají hodnoty křivostí u kroužků a kuliček v určitém obvyklém poměru (např. u kuličkových šroubů bývá typicky koeficient přimknutí $R/d_0 \approx 0{,}55$).

5.2 Axiální kuličková ložiska

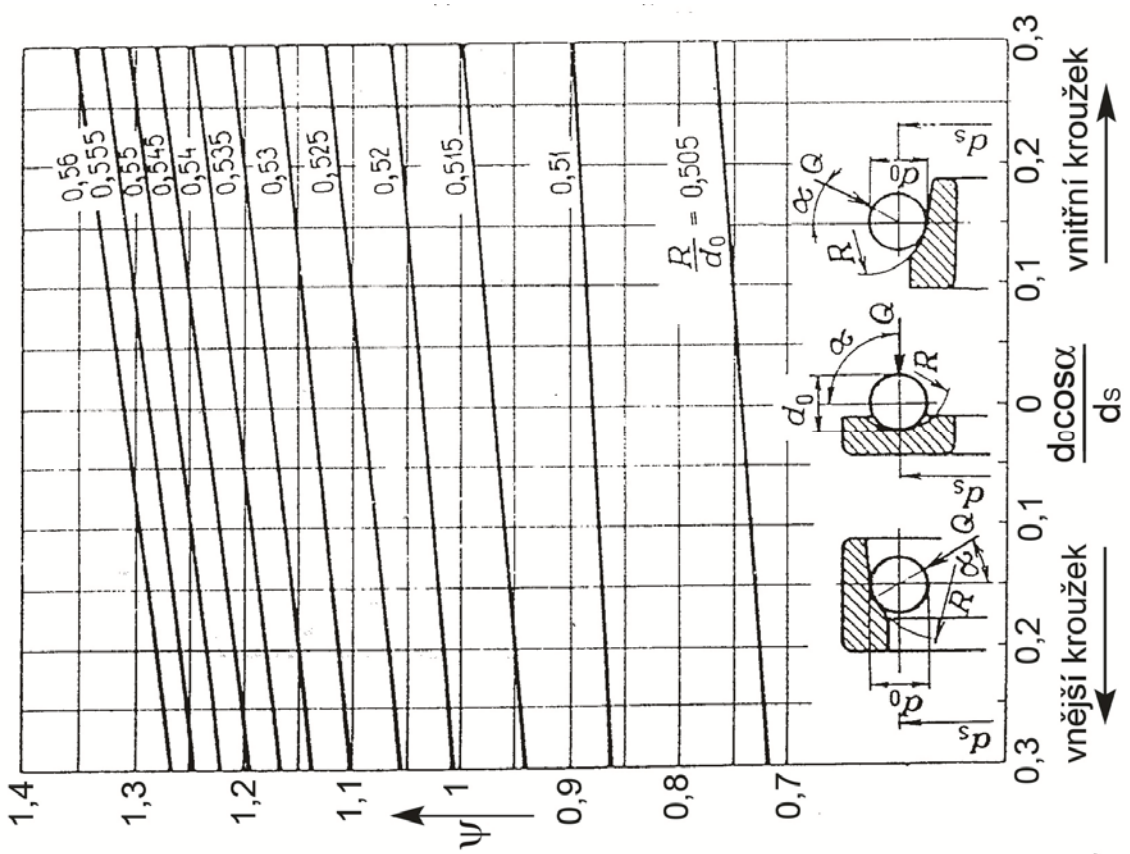
Pro celkovou normálovou deformaci jedné kuličky v **obou** oběžných drahách uvádí **lit.[2]** přibližný vztah, který neobsahuje korekční koeficient ψ:

$$\delta_n = 0{,}523\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{Q^2/d_0}$$

To je u axiálního ložiska zároveň i deformace δ, měřená ve směru jeho osy, takže při celkovém počtu nosných kuliček v ložisku n a celkové osové síle na ložisko F platí $Q = F/n$ a po dosazení je

$$\delta = 0{,}523\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt[3]{\frac{F^2}{d_0 n^2}} \quad \text{[N, m]} \qquad (29)$$

Do výpočtu bývá zahrnuta i nejistota ve výrobních a montážních chybách, takže **počet nosných kuliček, na které se rozloží síla F (tzv. "efektivní počet"), bývá odhadován asi na 70 až 80% z jejich celkového počtu.**



Obr.15 *Korekční koeficient ψ (převzato z **[lit.2]**)*

5.3 Kuličková ložiska s kosoúhlým stykem

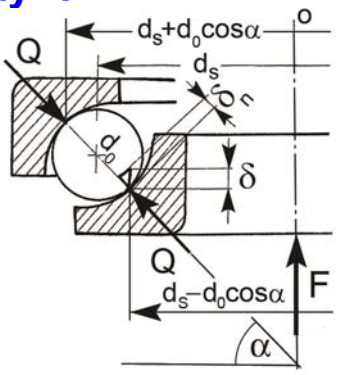
Pro celkovou normálovou deformaci jedné kuličky v **obou** oběžných drahách uvádí opět **lit.[2]** přibližný vztah

$$\delta_n = 0{,}436 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt[3]{Q^2/d_0}$$

V **obr.16** platí pro přepočet deformace a síly z normálového do osového směru vztahy $F = nQ\sin\alpha$, $\delta_n = \delta \sin\alpha$ a po dosazení je

$$\delta = \frac{0{,}436 \cdot 10^{-7}}{(\sin\alpha)^{5/3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{d_0 n^2}} \quad \text{[N, m]} \qquad (30)$$

Číslo n je opět **efektivní počet kuliček**. Typické hodnoty úhlu stykové normály jsou $\alpha = 15^0, 25^0, 40^0$, u speciálních provedení pro vřetena obráběcích strojů $\alpha = 60^0$.



Obr.16

Poznámka: *Dosazením $\alpha = 90^0$ do (30) neobdržíme konstantu* 0,523 *ze vztahu (29) pro axiální ložisko, protože součty křivostí (27b,c) se pro oba typy liší !!*

5.4 Kuličkové šrouby

Doporučená konstanta úměrnosti nebývá pro gotický profil závitu u kuličkových šroubů udávána, takže ji zvolíme uprostřed mezi případem axiálního a kosoúhlého ložiska ve vztazích (29) a (30). Vychází hodnota $0{,}48 \cdot 10^{-7}$ a celková normálová deformace **v obou oběžných drahách** bude

$$\delta_n = 0{,}48 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt[3]{Q^2/d_0}$$

Přepočet deformace a síly přes úhel stykové normály α a úhel stoupání šroubovice β je patrný z **obr.17a**. Průměry závitových drah matice a šroubu (resp. průměry, na nichž leží

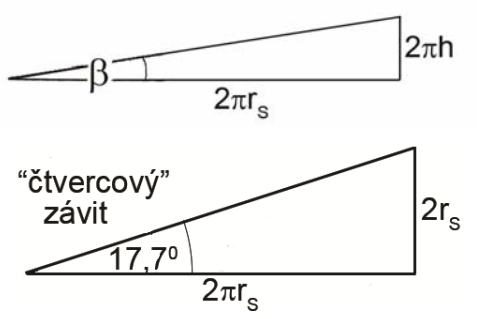
kontaktní body) jsou rozdílné, takže jsou různé i jejich úhly stoupání. Dále budeme uvažovat pouze průměr oběžné dráhy středů kuliček (**jmenovitý průměr**) $d_S = 2r_S$ a pro příslušný úhel stoupání šroubovice bude platit

$$tg\beta = \frac{2\pi h}{2\pi r_S} = \frac{h}{r_S}$$

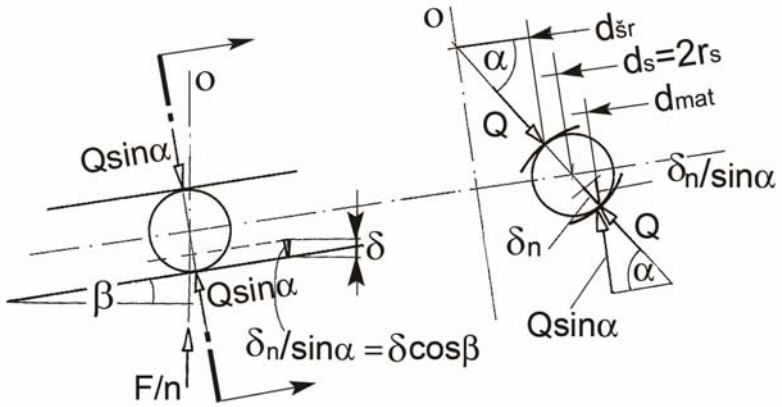
kde rozměr stoupání je $h\ [m/rad]$, viz **obr.17**.

Osová deformace je $\delta = \frac{\delta_n}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$, celková osová síla $F = nQ\sin\alpha \cdot \cos\beta$ a po dosazení

$$\delta = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-7}}{(\sin\alpha \cdot \cos\beta)^{5/3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{d_0 n^2}} \qquad (31)$$



Obr.17 *Úhel stoupání šroubovice na jmenovitém průměru*



Obr.17a *Přepočet normálové deformace a síly do osy kuličkového šroubu*

Úhel stykové normály je u většiny výrobců kuličkových šroubů stejný, $\alpha = 45^0$. Úhel stoupání β bývá tak malý, že je často možno položit $(\cos\beta)^{5/3} \approx 1$. Např. u extrémního případu **čtvercového šroubu**, kde stoupání na otáčku je rovno jmenovitému průměru, t.j.

$$2\pi h = 2r_S,\ tg\beta = 1/\pi,\ \beta = 17{,}7^0$$

je $(\cos\beta)^{5/3} = 0{,}923$. Konstanta před odmocninou v (31) tedy v intervalu stoupání $0^0 < \beta < 17{,}7^0$ může nabývat hodnot $0{,}855 \div 0{,}93$.

Poznámky: ***1)*** *Norma* ***DIN ISO 3408-4*** *důsledně rozlišuje průměry, na kterých leží kontaktní body šroubu a matice, tj.* $d_{šr} = d_s - d_0\cos\alpha$ *a* $d_{mat} = d_s + d_0\cos\alpha$ *(viz např.* ***obr.10a,16,20a****) a výpočet deformace je prováděn pro šroub a matici zvlášť. Náš přibližný předpoklad* $d_s \approx d_{šr} \approx d_{mat}$ *ale nezpůsobuje u úhlu* β *podstatnou chybu, zvláště když v mnoha případech je* $d_s >> d_0$. *Průměr* $d_{šr}$ *je přibližně možno ztotožnit se středním průměrem závitu šroubu, který jsme již dříve označili* D.

2) *Úhel stykové normály je standartně u všech výrobců kuličkových šroubů* $\alpha = 45^0$ ***a předpokládá se, že je konstantní, nezávislý na axiální síle a jí způsobených deformacích.***

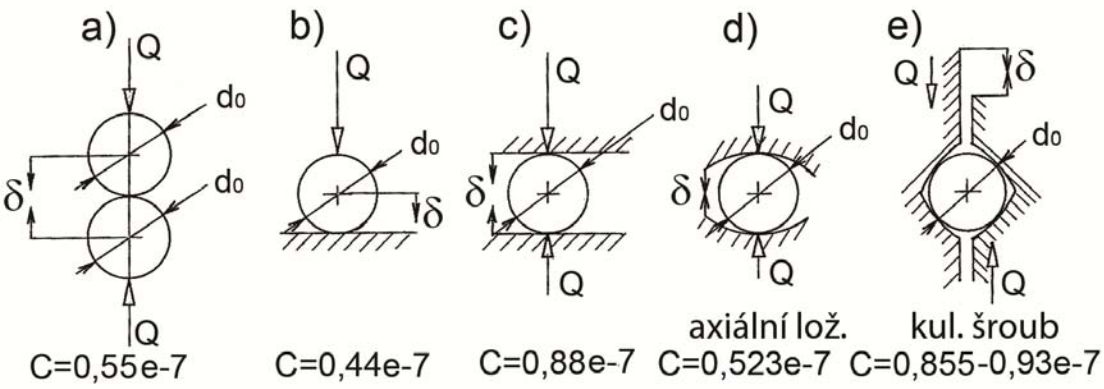
Shrnutí

Všechny dále uvedené výpočty tuhosti kuličkových šroubů lze aplikovat i na ložiska axiální a kosoúhlá s tím, že úhel stoupání šroubovice je u nich $\beta = 0^0$ a u axiálních ložisek je navíc úhel stykové normály $\alpha = 90^0$. Vztahy (29), (30), (31) shrneme do jediného univerzálního tvaru

$$\delta == C \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{d_0}} = C \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{d_0 n^2}} \qquad C = \frac{(0{,}436 \div 0{,}523) \cdot 10^{-7}}{(\sin\alpha \cdot \cos\beta)^{5/3}} \qquad (32)$$

Axiální ložiska $\alpha = 90^0,\ \beta = 0^0$	Kosoúhlá ložiska $\beta = 0^0$	Kuličkové šrouby $\alpha = 45^0,\ \beta = 0^0 \div 17{,}7^0$
$C = 0{,}523 \cdot 10^{-7}$	$C = 0{,}436 \cdot 10^{-7} / (\sin\alpha)^{5/3}$	$C = 0{,}855 \cdot 10^{-7} / (\cos\beta)^{5/3} = (0{,}855 \div 0{,}93) \cdot 10^{-7}$

Na **obr.18** je uvedeno několik nejtypičtějších případů. Jde vesměs o normálové síly i deformace, jen v případě **e)** je již proveden přepočet do osy šroubu přes úhel stykové normály i stoupání. U **a)** až **c)** vycházíme ze vztahu (27a).



Obr.18 *Konstanty úměrnosti pro různé tvary a počet kontaktních ploch (ocel - ocel),* ***a), b)....*** *jedna kontaktní plocha,* ***c), d), e)....*** *dvě kontaktní plochy*

Poznámka: *Ve všech předchozích výpočtech jsme předpokládali celoocelovou kombinaci kuliček i oběžných drah. Hertzův vztah (27) umožňuje výpočty i pro jinou, dnes častou kombinaci, kdy kuličky jsou keramické (tzv. hybridní šrouby a ložiska). Pro keramiku (kubický nidrid křemíku* ***Si_3N_4****) se udává modul pružnosti* $E_{Si} = 3{,}2 \cdot 10^{11}\, N/m^2$. *Společný (též redukovaný) modul pružnosti v (27) bude* $E^* = \dfrac{2E_{ocel}E_{Si}}{E_{ocel}+E_{Si}} = \dfrac{2 \cdot 2{,}1 \cdot 3{,}2}{2{,}1+3{,}2} \cdot 10^{11} = 2{,}54 \cdot 10^{11}\, N/m^2$ *a ve vztahu (27a) se konstanta* 0,44 *zmenší na* 0,39 *(vliv menšího Poissonova čísla se prakticky neprojeví). Ve všech předešlých i následujících vztazích by bylo pro hybridní variantu nutno dosazovat menší konstantu* $C^* = 0{,}88C$. *Toto* 12% *snížení deformací sice není podstatné, ale keramika přináší další výhody, viz* ***kap.A7****.*

5.4.1 Styková tuhost jedné nepředepnuté matice

Diferencováním nelineárního vztahu (32) vychází

$d\delta = \dfrac{2C}{3 \cdot \sqrt[3]{Fn^2 d_0}}\, dF$, takže tuhost je funkcí zatěžující síly: $k(F) = \dfrac{dF}{d\delta} = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{d_0 n^2}{C^3} F}$ (33)

Pokud ji chceme vyjádřit jako funkci deformace, vyjdeme z inverzní funkce k (32):

$F = \sqrt{\dfrac{d_0 n^2}{C^3}\delta^3}$, $k(\delta) = \dfrac{dF}{d\delta} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{d_0 n^2}{C^3}\delta}$ (34)

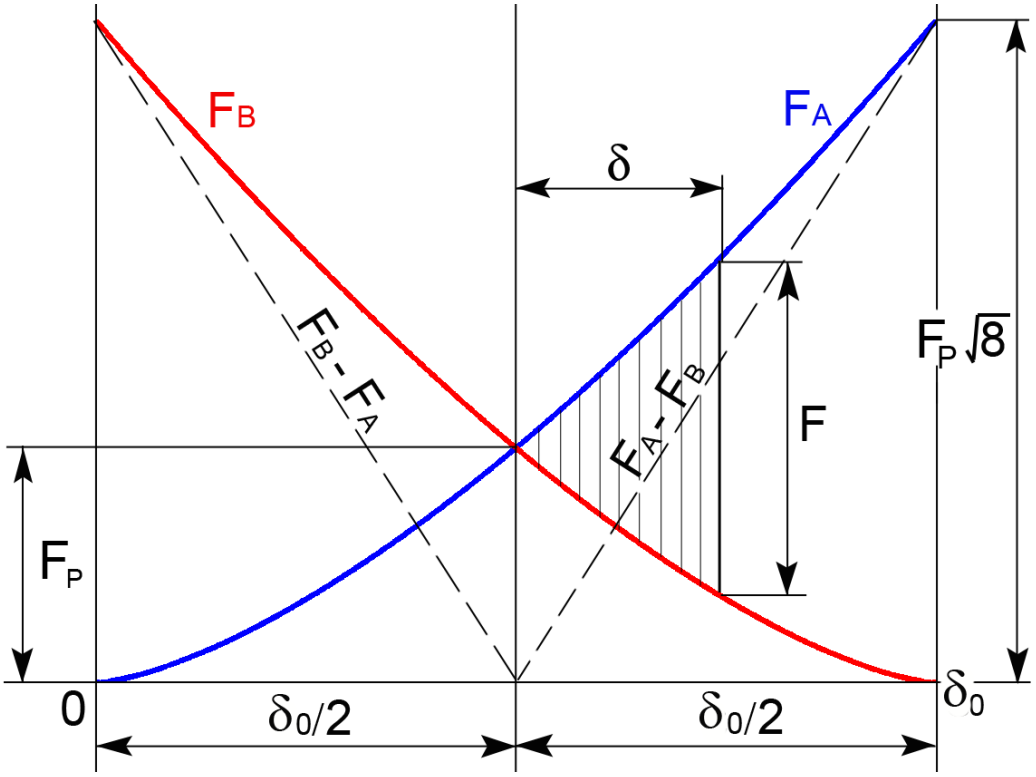
Tuhost tedy roste se třetí odmocninou zatěžující síly nebo s druhou odmocninou způsobené deformace. V **obr.20** je druhý způsob (34) vynesen čárkovaně (platí čárkovaná vodorovná souřadná osa, tj. $0 < \delta/\delta_0 < 1$).

5.4.2 Styková tuhost dvou předepnutých matic

Vzájemným předepnutím dvou matic (nebo ložisek) proti sobě o míru δ_0 se každá strana deformuje o míru $\delta_0/2$ a podle (32) mezi nimi vznikne vnitřní předepínací síla F_P:

$\dfrac{\delta_0}{2} = C \cdot \sqrt[3]{\dfrac{F_P^2}{d_0 n^2}}$ nebo obráceně $F_P = \sqrt{\dfrac{d_0 n^2}{8C^3}\delta_0^3}$ (35)

Při osovém zatížení celé předepnuté soustavy vnější silou F u matice **A** zatížení vzroste, u matice **B** klesne a dojde k posuvu δ, viz **obr.19**.



Obr.19 *Deformační charakteristika dvou předepnutých matic*
Pozor: průběhy $F_A - F_B$ *a* $F_B - F_A$ *nejsou přesně lineární!!!*

Síly jsou $$F_A = \sqrt{\frac{d_0 n^2}{C^3}} \cdot \left(\frac{\delta_0}{2} + \delta\right)^{3/2} \qquad F_B = \sqrt{\frac{d_0 n^2}{C^3}} \cdot \left(\frac{\delta_0}{2} - \delta\right)^{3/2} \tag{36}$$

Pro vnější sílu platí

$$F = F_A - F_B = \sqrt{\frac{d_0 n^2}{C^3}} \cdot \left[\left(\frac{\delta_0}{2} + \delta\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{2} - \delta\right)^{3/2}\right] = F_P \sqrt{8} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{\delta_0}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{\delta_0}\right)^{3/2}\right] \tag{36a}$$

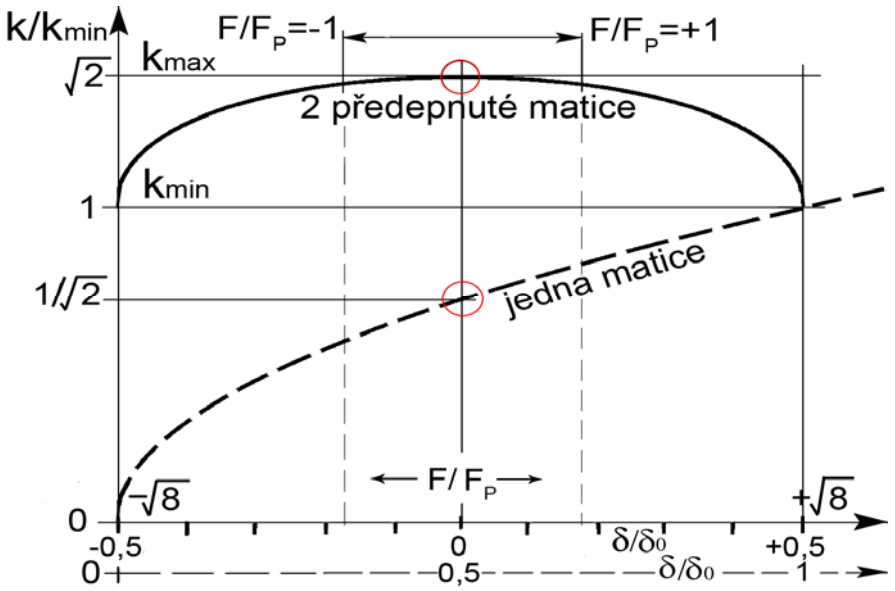
(číslo n je stále efektivní počet kuliček jedné matice!!). Snadno se lze přesvědčit, že vztah (36a) je **téměř lineární** (čárkované čáry v obrázku), takže jeho derivace (tj. tuhost) se nebude měnit tak výrazně, jako u jedné nepředepnuté matice. Maximální odchylka čárkovaných čar od přesných přímek je asi 6%. Deformace δ se musí pohybovat jen v intervalu

$$-0{,}5 \le \delta/\delta_0 \le +0{,}5 \quad \text{tj.} \quad -\sqrt{8} \le F/F_P \le +\sqrt{8} \tag{36b}$$

aby nedošlo k zániku předpětí a odlehnutí kuliček některé z matic. Tuhost je derivací (36a):

$$k = \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{d_0 n^2}{C^3}} \cdot \left[\sqrt{\frac{\delta_0}{2} + \delta} + \sqrt{\frac{\delta_0}{2} - \delta}\right] \qquad [N/m] \tag{37}$$

viz plná čára v bezrozměrném grafu na **obr.20**.



Obr.20 *Porovnání tuhosti jedné a dvou předepnutých matic*
(pro každou křivku platí jiná stupnice na vodorovné ose!!)

Stupnice F/F_P na vodorovné ose není vyznačena a je téměř lineární. Tuhost jedné nepředepnuté matice je vyznačena čárkovaně s posunutím počátku souřadného systému doleva. U dvou matic je pro $\delta = \pm\delta_0/2$ tuhost minimální a právě tak veliká, jako u jedné matice pro $\delta = \delta_0$; pro $\delta = 0$ je tuhost dvou matic maximální:

$$k_{MAX} = 3\sqrt{\frac{d_0 n^2}{2C^3}\delta_0} = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{d_0 n^2}{C^3}F_P} = k_{MIN}\sqrt{2} \qquad (38)$$

Z **obr.20** je patrné, že styková tuhost je v silovém intervalu $-1 \le F/F_P \le +1$ téměř konstantní. Převrácená hodnota stykové tuhosti (**styková poddajnost**) kuličkového šroubu se dvěma předepnutými maticemi tedy roste se zatížením, jehož vliv zahrneme do konstanty K_F:

$$c_{styk} = \frac{1}{k} = K_F \frac{C}{3\sqrt[3]{d_0 n^2 F_P}}$$

$K_F = 1$ pro $\delta = 0, F = 0$.... šroub axiálně nezatížen, tuhost je maximální
$K_F = 1{,}015$ pro $\delta = \pm 0{,}1675\delta_0$ ....šroub zatížen silou $F = \pm F_P$
$K_F = 1{,}075$ pro $\delta = \pm 0{,}3406\delta_0$ ....šroub zatížen silou $F = \pm 2F_P$
$K_F = \sqrt{2}$ pro $\delta = \pm 0{,}5\delta_0$ ....šroub zatížen maximální přípustnou silou $F = \pm F_P\sqrt{8} \approx \pm 2{,}83F_P$.

Vyčíslíme-li z (31) konstantu $C = \dfrac{0{,}48\cdot 10^{-7}}{(\sin\alpha\cdot\cos\beta)^{5/3}}$ pro nejčastější hodnotu $\alpha = 45^0$, vychází konečný vztah pro stykovou poddajnost dvou předepnutých matic ve tvaru

$$c_{styk} = K_F \frac{0{,}285\cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{(\cos\beta)^5 d_0 n^2 F_P}} \qquad (38a)$$

a v intervalu krajních hodnot stoupání $\beta = 0^0$ a $\beta = 17{,}7^0$ (čtvercový šroub) je

$$c_{styk} = K_F \frac{(0{,}285 \div 0{,}31)\cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{d_0 n^2 F_P}} \quad \text{nebo ještě přibližněji} \quad c_{styk} \approx \frac{0{,}3\cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{d_0 n^2 F_P}} \qquad (38b)$$

Konstanta $0{,}285\cdot 10^{-7}$ v čitateli platí pro $\beta = 0^0$, hodnota $0{,}31\cdot 10^{-7}$ pro čtvercové šrouby. Je patrné, že vliv stoupání je nepodstatný. V intervalu $-F_P \le F \le +F_P$ zaniká i vliv zatížení, neboť konstanta K_F se mění jen o necelá dvě procenta, takže je možno uvažovat $K_F \approx 1$.

Poznámky: ***1)*** *I když vztah (38) k tomu svádí, styková tuhost by neměla být zvyšována nastavením většího předpětí F_P, neboť roste pomalu jen s jeho třetí odmocninou. Ukážeme později ve vztahu (47), že třecí moment roste s mocninou první, takže přílišné předpětí způsobuje větší tření, nežádoucí ohřev a snižuje životnost.* ***Výrobci doporučují omezit předepínací sílu na 10% (max. 20%) dynamické únosnosti a provozní síla by neměla překročit její dvojnásobek:***

$$F_P < (0{,}1 \div 0{,}2) C_{dyn} \qquad -2F_P < F < 2F_P$$

2) *Z grafu na* ***obr.20*** *je patrné, že styková tuhost jedné matice, zatížené silou $F = F_P$ (která způsobí deformaci $\delta_0/2$), je poloviční ve srovnání s tuhostí dvou vzájemně předepnutých matic toutéž silou, neboť se jedná o paralelní řazení dvou stejných pružin. V obrázku jsou příslušné hodnoty zvýrazněny.*

Srovnání s výpočtem podle normy DIN ISO 3408-4

1) Tuhost jedné nepředepnuté matice počítá uvedená norma podle vztahu

$$k_1(F) = 1{,}5 \cdot \sqrt[3]{(i \cdot \bar{k})^2 F}$$

kde i .... počet závitů a $\bar{k}\ \left[N/m^{3/2}\right]$ .... tzv. **„součinitel tuhosti jednoho závitu“**, jehož složitý výpočet vychází ze součtů čtyř křivostí (27b,c) a z rozměrů kontaktních elips zvlášť pro styk kuličky s maticí a kuličky se šroubem. Je uvažován **plný** počet nosných kuliček a výpočet eliptických integrálů se obchází zavedením opravných koeficientů. Vliv výrobních chyb je zohledněn dalším opravným koeficientem, který má rozpětí od 0,8 (toleranční třída přesnosti 5) do 1 (třída 0 a 1). Někteří výrobci zahrnují do součinitele tuhosti i počet závitů, takže v jejich katalogu je uveden $i-$krát větší.

Srovnáním tohoto postupu s naším přibližným vztahem (33) docházíme k ekvivalenci výrazů $(i \cdot \bar{k})^2 \leftrightarrow d_0 n^2 / C^3$, kde konstanta C závisí podle (32) na úhlu stoupání β a výrobní chyby jsme zohlednili zavedením **efektivního** počtu kuliček n, tj. 70% z celkového počtu.

2) Při výpočtu **tuhosti dvou předepnutých matic** norma nezohledňuje proměnnost vnějšího zatížení, která je patrná z **obr.20**. Do vztahu pro $k_1(F)$ se za vnější sílu pouze dosazuje síla předepínací, tj. $F = F_P$ a místo koeficientu 1,5 je před odmocninou $\sqrt{8} \approx 2{,}83$:

$$k_2 = \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{(i \cdot \bar{k})^2 F_P} \quad \text{(nezávisle na zatěžující síle)} \qquad (39)$$

Srovnáním se vztahem pro maximální tuhost (38) bychom zjistili, že náš zjednodušený výpočet by s výpočtem podle normy souhlasil při vnějším zatížení $F \approx 1{,}85 F_P$.

5.4.3 Vliv radiální deformace šroubu a tělesa matice

Další složkou, která může ovlivnit posuv v axiálním směru, jsou radiální deformace tělesa matice a někdy i šroubu, zvláště je-li podélně provrtán kvůli průchodu chladicí kapaliny. Těleso matice představuje silnostěnnou trubku, která je rozpínána radiálními složkami sil od kuliček (tedy „vnitřním přetlakem“) a podobně šroub je namáhán přetlakem vnějším. Oba případy je možno řešit pomocí **teorie silnostěnných nádob**. Protože se jedná o velmi potřebné vztahy i v jiných technických aplikacích (např. v hydraulických pohonech - potrubí, lineární hydromotory), v **kap. A9 (Dodatek)** je zopakován podrobný postup podle **[lit.6]**, který vede na popis deformací pomocí Eulerovy rovnice 2.řádu (D7). Jejím řešením jsme získali vztahy (D15) a (D16).

1. Vliv rozepnutí tělesa matice: těleso matice uvažujeme jako dutý válec o délce L_{mat}, vnějším poloměru R_{mat} a středním vnitřním poloměru, který je přibližně $r_{mat} = r_s + r_0 \cos\alpha$, viz **obr.20a**. Radiální složka F_{rad} osové síly F se rozloží na jednotlivé kuličky, vyvozující vnitřní „přetlak“ p_i, pro který platí

$$F_{rad} = \frac{F}{tg\alpha} = 2\pi r_{mat} L_{mat} p_i$$

Roztažení vnitřního poloměru je podle (D15)

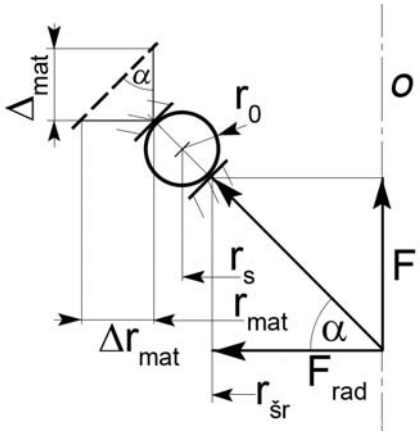
$$\Delta r_{mat} = \frac{r_{mat} p_i}{E}\left(\frac{r_{mat}^2 + R_{mat}^2}{R_{mat}^2 - r_{mat}^2} + \mu\right)$$

Odpovídající posuv ve směru osy matice je

$$\Delta_{mat} = \frac{\Delta r_{mat}}{tg\alpha}$$

a spojením všech tří vztahů vychází lineární závislost mezi silou a deformací

$$\Delta_{mat} = \frac{F}{2\pi E L_{mat} tg^2\alpha}\left(\frac{r_{mat}^2 + R_{mat}^2}{R_{mat}^2 - r_{mat}^2} + \mu\right) \qquad (39a)$$



Obr.20a

2. Vliv radiálního stlačení šroubu: střední vnější poloměr šroubu je přibližně $r_{šr} = r_s - r_0\cos\alpha$, vnitřní poloměr (u podélně vrtaného šroubu) označíme $r_{0šr}$. Deformace vnějším „přetlakem“ kuliček p_e nastává opět na délce matice L_{mat} (vyztužující vliv volných úseků šroubu vpravo i vlevo od matice zanedbáváme). Na poloměru $r_{šr}$ platí analogicky

$$\frac{F}{tg\alpha} = 2\pi r_{šr} L_{mat} p_e$$

Stlačení vnějšího poloměru šroubu je podle (D16)

$$\Delta r_{šr} = -\frac{r_{šr} p_e}{E}\left(\frac{r_{šr}^2 + r_{0šr}^2}{r_{šr}^2 - r_{0šr}^2} - \mu\right)$$

Odpovídající posuv ve směru osy šroubu je

$$\Delta_{šr} = \frac{\Delta r_{šr}}{tg\alpha} = \frac{-F}{2\pi E L_{mat} tg^2\alpha}\left(\frac{r_{šr}^2 + r_{0šr}^2}{r_{šr}^2 - r_{0šr}^2} - \mu\right) \qquad (39b)$$

Vzájemný osový posuv šroubu a matice Δ je dán rozdílem $\Delta = \Delta_{mat} - \Delta_{šr}$ a výsledný vztah pro axiální složku poddajnosti, způsobenou radiálními deformacemi šroubu a matice, je tedy

$$c_{rad\to ax} = \frac{\Delta}{F} = \frac{1}{2\pi E L_{mat} tg^2\alpha}\left(\frac{r_{mat}^2 + R_{mat}^2}{R_{mat}^2 - r_{mat}^2} + \frac{r_{šr}^2 + r_{0šr}^2}{r_{šr}^2 - r_{0šr}^2}\right) \qquad (39c)$$

U neprovrtaného šroubu bude $r_{0šr} = 0$ a při typické hodnotě $\alpha = 45^O$ lze vztah (39c) upravit na jednoduchý tvar

$$c_{rad\to ax} = \frac{\Delta}{F} = \frac{R_{mat}^2}{\pi E L_{mat}\left(R_{mat}^2 - r_{mat}^2\right)} = \frac{R_{mat}^2}{E V_{mat}} \qquad (39d)$$

kde $\pi L_{mat}\left(R_{mat}^2 - r_{mat}^2\right) = V_{mat}$ je objem válcového tělesa matice.

Poznámky: ***1)*** *Výsledný vztah (39c) byl odvozen pro jednu nepředepnutou matici. V případě předepnutí (ať již dvou samostatných matic nebo dvou vzájemně přesazených závitů podle* ***obr.12****) nastává podobný jev jako u sil na* ***obr.19****: výchozí „přetlak“ od předepínací síly je při vnějším zatížení jednou maticí zvyšován a druhou snižován. Jedná se opět o paralelní řazení pružin, takže výsledná tuhost bude dvojnásobná a* ***poddajnost ve vztazích (39c,d) je nutno dělit dvěma****.*

2) *Na rozdíl např. od (32) se zde jedná o přímou úměru mezi silou a deformací, takže tato složka poddajnosti je konstantní a samozřejmě i nezávislá na poloze matice na šroubu. Ve většině případů je vnější průměr tělesa matice dostatečně velký a poddajnost* $c_{rad\to ax}$ *nehraje vůči hodnotě* c_{styk} *významnou roli.*

A6. Pasivní odpory ložisek a kuličkových šroubů

Výpočty třecích sil a momentů jsou vždy velmi nejisté a směrodatné hodnoty se dají získat pouze z experimentů. Dále uvedeme některé zjednodušené vztahy, udávané od výrobců pro axiální a kosoúhlá ložiska a pokusíme se je přenést i na kuličkové šrouby.

6.1 Třecí moment podle výrobců ložisek

Třecí moment ložiska, zatíženého osovou silou F, je ovlivněn viskozním třením a stykovými deformacemi:

$$M_T = M_{Tv} + M_{Tdef}$$

Podle **[1]** a údajů **FAG** platí u axiálních a kosoúhlých ložisek vztahy

- pro viskozní složku momentu: $M_{Tv} = K_v d_S^3 (\upsilon \cdot n)^{2/3} \ [Nm]$ (40)

$K_v = 0{,}07 \div 0{,}2$ ... podle způsobu mazání;

$d_S = 2r_S\,[m]$ ...střední průměr ložiska (oběžný průměr středů kuliček);

$\upsilon\,[mm^2/s]$ ... kinematická viskozita oleje;

$n[ot/min]$ ... otáčky (pozor: viskozita a otáčky nejsou zadány v základních jednotkách!!);

- pro deformační složku (ložiska axiální a kosoúhlá s úhlem styku $\alpha = 40^0$):

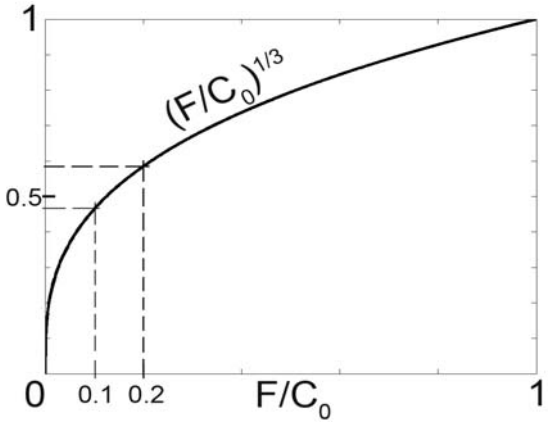
$$M_{T\,def} = K_{def}\, d_S F \cdot \sqrt[3]{F/C_0} \ [Nm] \qquad (40a)$$

$F\,[N]$ ... osová síla

$C_0\,[N]$ ...statická únosnost

$K_{def} = (0{,}8 \div 1{,}3)\cdot 10^{-3}$ ....podle provedení ložiska. V extrémním rozmezí zatížení $F/C_0 = (0{,}1 \div 1)$ je přibližně $\sqrt[3]{F/C_0} = (0{,}5 \div 1)$ - viz **obr.21**, takže lze psát

$$M_{Tdef} = (0{,}4 \div 1{,}3)\cdot 10^{-3} d_S F \qquad (40b)$$



Obr.21

Příklad: *Kosoúhlé ložisko FAG 7211B.TVP:*

- úhel styku $\alpha = 40^0$

- průměr $d_S = 80mm$

- statická únosnost $C_0 = 36000N$

- statické zatížení 50%, tj. $F = 0{,}5C_0 = 18000N$

- otáčky $n = 1000 ot/min$.

Podle (40) vychází horní odhad viskozní složky třecího momentu pro typickou hodnotu viskozity $\upsilon = 25mm^2/s$ *(při teplotě oleje* $45^0 C$*)*

$$M_{Tv} = 0{,}2 \cdot 0{,}08^3 \cdot (25 \cdot 1000)^{2/3} = 0{,}09 \ \ Nm$$

$$M_{Tdef} = (0{,}4 \div 1{,}3)\cdot 10^{-3} \cdot 18000 \cdot 0{,}08 = 0{,}576 \div 1{,}872 \ \ Nm$$

Je vidět, že viskozní složka hraje malou roli. Proto ji dále nebudeme uvažovat, ale místo toho přijmeme v (40b) horní odhad, takže bude

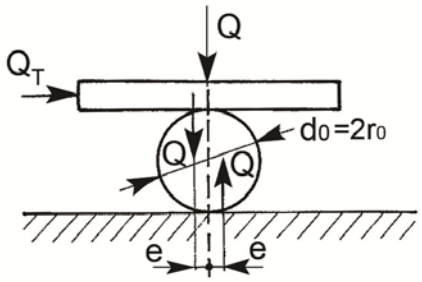
$$M_T \approx 1{,}3\cdot 10^{-3} d_S F = 2{,}6\cdot 10^{-3} r_S F \qquad (40c)$$

Podle tohoto vztahu roste třecí moment úměrně se zatížením a s průměrem.

6.2 Třecí moment podle teorie valivého tření

V literatuře se hodnoty ramena valivého tření e v **obr.22** udávají pro ložiskovou ocel (nezávisle na průměru d_0) se značným rozptylem:

Horák (Praktická fyzika) ..... $e = 0{,}001 \div 0{,}005 mm$
Dubbel (Technický průvodce) ..... $e = 0{,}005 \div 0{,}01 mm$
Výrobci ložisek a kul. šroubů ..... $e = 0{,}01 mm$.
V dalších výpočtech přijmeme horní odhad $e = 0{,}01 mm$.
Pro třecí sílu na jedné kuličce platí $Q_T d_0 = 2eQ$, takže $Q_T = Q\frac{e}{r_0} = Qtg\varphi$, kde $\frac{e}{r_0} = tg\varphi \approx \varphi$.... **úhel valivého tření**.



Obr.22 *Rameno valivého tření*

Třecí síla tedy klesá s rostoucím poloměrem valivého tělíska. Je-li axiální ložisko s n kuličkami a oběžným průměrem jejich středů $d_S = 2r_S$ zatíženo osovou silou $F = nQ$, celkový třecí moment bude

$$M_T = nQ_T r_S = nQ\frac{e}{r_0} r_S = Fr_S tg\varphi$$

Pokud by vztah (40c) platil i pro axiální ložisko, srovnáním by vyšlo

$$r_S F tg\varphi = 2{,}6 \cdot 10^{-3} r_S F$$

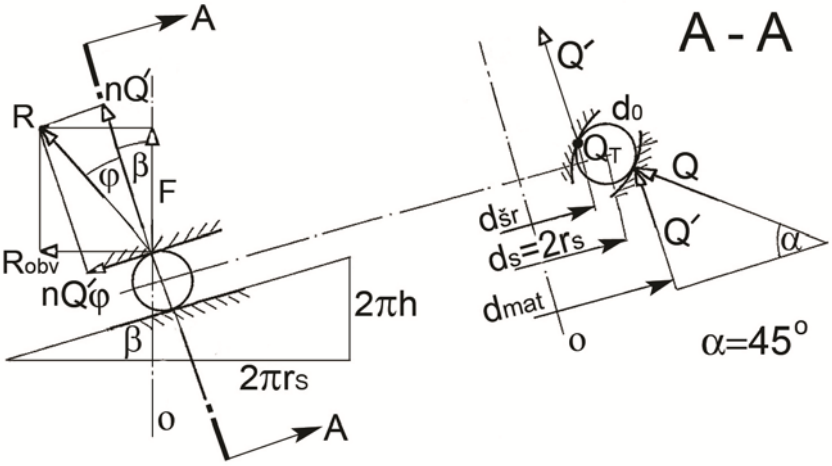
neboli $tg\varphi = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$. *Výp*očet podle výrobců ložisek a podle teorie valivého tření (při výše uvedené průměrné hodnotě $e = 0{,}01 mm$) by tedy vyšel stejně při $\frac{e}{r_0} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$, tj. při průměru kuličky asi $d_0 \approx 8 mm$. V dalších výpočtech zaokrouhlíme hodnotu třecího úhlu na

$$tg\varphi \approx \varphi = 0{,}003 \ [rad] \qquad (41)$$

6.2.1 Jedna nepředepnutá matice

Rozklad sil je na **obr.23**. Budeme zjednodušeně předpokládat stejné poloměry valení, tedy i **stejné úhly stoupání u šroubu i matice**: $d_{šr} \approx d_{mat} \approx d_S = 2r_S$, $tg\beta = h/r_S$. Přepočet úhlu valivého tření z (41) přes úhel styku $\alpha = 45^0$ (v **obr.23** vpravo):

$$Q_T = \frac{e}{r_0} Q = \frac{e}{r_0 \sin\alpha} Q' = Q' tg\varphi = Q'\varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r_0 \sin\alpha} = \frac{0{,}003}{\sin 45^0} \approx 0{,}004 \ [rad] \ ...0{,}23^0 \qquad (41a)$$



Obr.23 *Třecí síla u nepředepnuté soustavy šroub - jedna matice (n ... počet kuliček)*

Převod z rotace na posuv

1. Neuvažujeme-li tření, je pro překonání axiální síly F nutný krouticí moment

$$M_{ideální} = r_S F tg\beta = Fh$$

2. Při zahrnutí vlivu tření moment vzroste na hodnotu

$$M = r_S R_{obv} = r_S F tg(\beta + \varphi) = r_S F \frac{tg\beta + tg\varphi}{1 - tg\beta\, tg\varphi} = r_S F \frac{h + r_S\varphi}{r_S - h\varphi}$$

Třecí moment je $$M_T = M - M_{ideální} = \varphi F \frac{h^2 + r_S^2}{r_S - h\varphi} \qquad (42a)$$

(pro kosoúhlé ložisko by byl třecí moment $M_{T,h=0} = r_S F \varphi$ jak bylo již dříve uvedeno pro ložisko axiální, pouze se zvětšila hodnota φ). Účinnost je podíl práce síly F na dráze h ku práci momentu M na úhlu 1 rad :

$$\eta_{R\to P} = \frac{M_{ideální}}{M} = \frac{tg\beta}{tg(\beta+\varphi)} = \frac{Fh}{r_S F \frac{h + r_S\varphi}{r_S - h\varphi}} = \frac{1-\varphi\, tg\beta}{1+\varphi/tg\beta}$$ .... (plná čára v **obr.24**) (42b)

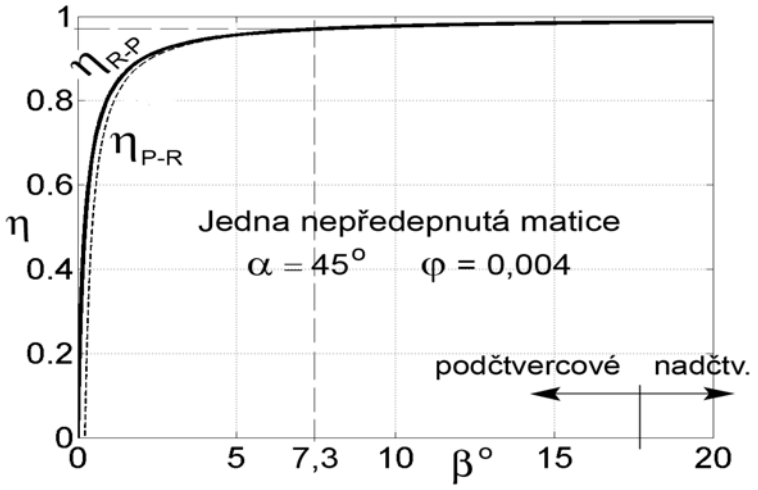
Převod z posuvu na rotaci

Analogicky k předchozímu případu je možno odvodit

$$\eta_{P\to R} = \frac{r_S F tg(\beta-\varphi)}{Fh} = \frac{1-\varphi/tg\beta}{1+\varphi\, tg\beta}$$ (v **obr.24** čárkovaně) (43)

Snadno se dá dokázat, že oba průběhy účinnosti rostou až do stoupání $\beta \approx 45^0$, kde se shodnou a dále začnou klesat. Např. šroub s průměrem $d_S = 50mm$ by měl maximální účinnost při stoupání $160\,mm/ot$ a při stoupání $20\,mm/ot$ (tj. $\beta = 7{,}3^0$) vychází při převodu z rotace na posuv i obráceně účinnost 97%.

Poznámka: *Ve výpočtech podle výrobců ložisek (40c) i podle teorie valivého tření (42a) je vidět, že pokud zatěžující síla bude nulová, třecí moment zaniká. Účinnost by tedy měla být u nepředepnutých soustav na síle nezávislá - viz (42b),(43). Ve skutečnosti vždy existuje určité, byť nepatrné tření i v nezatíženém stavu (např. viskozní složka (40), kterou jsme zanedbali), takže i při chodu naprázdno již ztráty existují!! Tato okolnost zvláště vyniká u* ***předepnutých soustav*** *ložisek nebo matic u kuličkových šroubů, kde* ***při chodu naprázdno je nutno překonat třecí moment, vzniklý vnitřní předepínací silou. Někteří autoři uvádějí i v tomto případě pro účinnosti paušálně určité číselné hodnoty bez ohledu na vnější zatížení, což je zásadně chybný postup.*** *Správnější přístup ukážeme v další kapitole.*



Obr.24 *Účinnost u nepředepnuté soustavy šroub - jedna matice*

6.2.2 Dvě předepnuté matice, převod z rotace na posuv

Rozklad sil je zjednodušeně uveden na **obr.25** (matice v levé části obrázku je zobrazena pouze bodem, detail je vptavo). Třecí úhel φ je pro názornost zvětšen („zaboření“ kuliček do oběžných drah) a plnými čarami je zakreslen speciální případ **nezatíženého** šroubu, kdy se předpětí rozdělí symetricky mezi obě matice, takže $Q_A' = Q_B'$ a velikosti reakcí R_A, R_B jsou stejné. Pro obvodové síly matic **A,B** platí

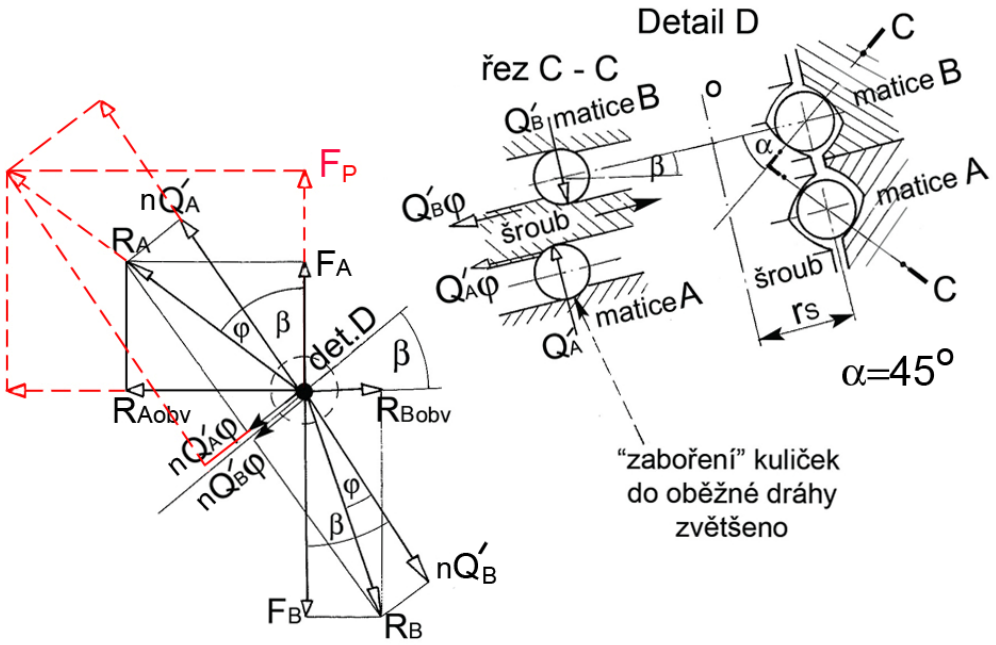
$$R_{Aobv} = F_A tg(\beta+\varphi) \qquad R_{Bobv} = F_B tg(\beta-\varphi)$$

Krouticí moment, potřebný k překonání vnější osové síly $F = F_A - F_B$, je

$$M = r_S\left(R_{Aobv} - R_{Bobv}\right) = r_S F_A tg\left(\beta + \varphi\right) - r_S F_B tg\left(\beta - \varphi\right) \tag{44a}$$

V případě nulového tření (tj. $\varphi = 0$) by byl ideální moment

$$M_{ideální} = r_S\left(F_A - F_B\right) tg\beta \tag{44b}$$



Obr.25 *Třecí síly u předepnuté soustavy šroub - dvě matice (n ... počet kuliček)*

Nesmí nás překvapit, že v **obr.25** je $F_A < F_B$, neboť k tomu, aby bylo vůbec možno šroub rozběhnout, je nutno nejprve překonat tření, tj. dosáhnout stavu $F = 0$, takže podle **obr.19** a vztahu (35) bude $F_A = F_B = F_P$. Tento stav je naznačen čárkovaně.

Třecí moment nezatíženého šroubu tedy získáme dosazením F_P do (44a):

$$M_{T0} = r_S F_P tg\left(\beta + \varphi\right) - r_S F_P tg\left(\beta - \varphi\right)$$

a po úpravách při dosazení $tg\varphi = \varphi$ je

$$M_{T0} = 2\varphi\, r_S F_P \frac{1 + tg^2\beta}{1 - \varphi^2 tg^2\beta} \tag{45}$$

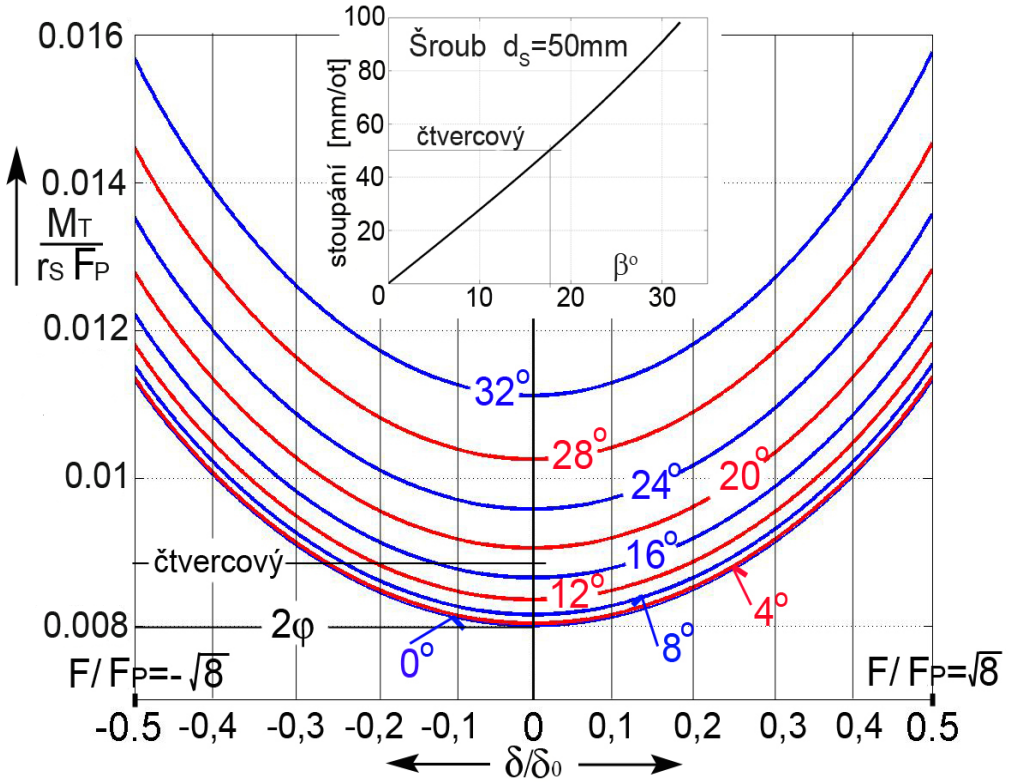
Dalším osovým zatěžováním síla F_A ve vztahu (44a) roste, F_B klesá a třecí moment zjistíme z rozdílu momentu skutečného a momentu ideálního

$$M_T = r_S F_A tg\left(\beta + \varphi\right) - r_S F_B tg\left(\beta - \varphi\right) - r_S\left(F_A - F_B\right) tg\beta$$

Dosazením za F_A, F_B z (36) a po delších úpravách vychází třecí moment **zatíženého** šroubu

$$M_T = \varphi\, r_S F_P \sqrt{8}\left(1 + tg^2\beta\right) \cdot \left[\frac{\left(1/2 + \delta/\delta_0\right)^{3/2}}{1 - \varphi tg\beta} + \frac{\left(1/2 - \delta/\delta_0\right)^{3/2}}{1 + \varphi tg\beta}\right] \tag{46}$$

Při $\delta = 0$ se nutně vracíme ke vztahu (45). Na **obr.26** je bezrozměrný graf závislosti třecího momentu šroubu na jeho osovém zatížení pro různá stoupání a pro úhel valivého tření $\varphi = 0{,}004$, který je již přepočten přes úhel stykové normály $\alpha = 45^0$ - viz (41a). Ve výřezu je zakreslen i převod úhlu β na stoupání $s\ [mm/ot]$ pro typický šroub s průměrem 50mm.



Obr.26 *Třecí moment u předepnuté soustavy šroub - dvě matice (pro $\varphi = 0{,}004$)*

Třecí moment roste lineárně s průměrem a předepínací silou. Jeho nárůst z odlehčeného stavu $F = 0$ do plného zatížení $F = \pm F_P\sqrt{8}$ (tedy $\delta/\delta_0 = \pm 0{,}5$) je nelineární v rozmezí $1{:}\sqrt{2}$ (při $\beta = 0^0$ přesně, při $\beta \neq 0^0$ přibližně). Podobně jako u vztahu (38b) pro poddajnost je možno i vztah (46) vyjádřit zjednodušeně zavedením konstanty K_F :

$$M_T = 2K_F\varphi\, r_S F_P \frac{1+tg^2\beta}{1-\varphi^2 tg^2\beta} \qquad (47)$$

$K_F = \sqrt{2}$ pro $\delta = \pm\delta_0/2$ ....šroub axiálně zatížen maximální přípustnou silou $F = \pm F_P\sqrt{8}$,
$K_F = 1$ pro $\delta = 0$.... šroub axiálně nezatížen a znovu se vracíme k (45).
Úhel stoupání šroubovice β se projeví na nárůstu třecího momentu stejně jako u poddajnosti velmi málo. Např. pro "čtvercový" šroub ($\beta = 17{,}7^0$) dává vztah (46) jen o 11% větší hodnotu než pro $\beta = 0^0$. Pokud bychom chtěli u šroubů s malým stoupáním výsledek dále zjednodušit, dosadíme $tg\beta \approx 0$ do (47) a přijmeme-li nejčastější hodnotu $K_F = 1$, obdržíme

$$M_T \approx 0{,}008 \cdot r_S F_P + M_{TX} \qquad (47a)$$

kde přídavný moment M_{TX} zahrnuje další pasivní odpory, které jsou nezávislé na zatížení a exaktně neidentifikovatelné. Je třeba si totiž uvědomit, že při výpočtu bylo uvažováno pouze valivé tření a zanedbáno tření kluzné, které nastává mezi sousedními kuličkami při jejich rotaci, neboť v místě vzájemného kontaktu jsou jejich obvodové rychlosti protisměrné. Další kluzné tření kuliček nastává v recirkulačních kanálech a konečně je nutno uvažovat i tření ve stíracích kroužcích proti nečistotám. Přídavný moment M_{TX} může být dokonce i převažující složkou a někteří výrobci proto vkládají mezi kuličky distanční podložky ve tvaru čoček - rozptylek, které mají dobré kluzné vlastnosti (bronz, teflon atd). Rovněž samostatná recirkulace kuliček pro každý závit zvlášť (viz **obr.11a**) je z hlediska tření výhodnější.

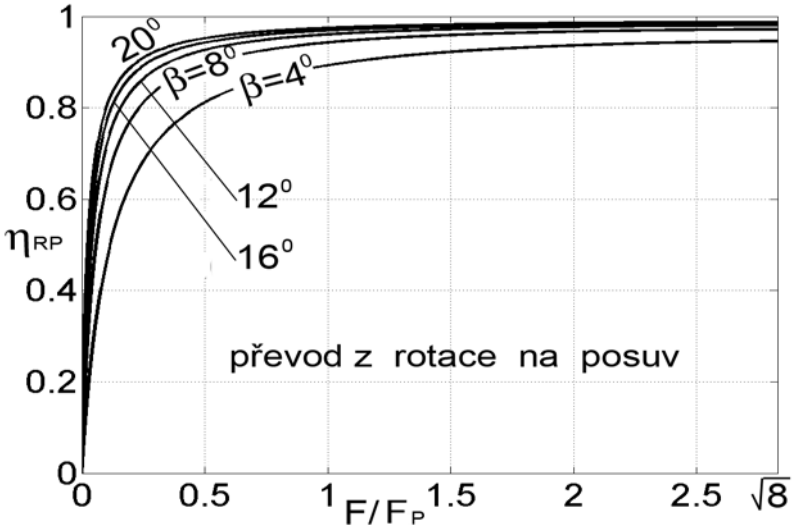
Konstanta 0,008 v (47a) je logicky dvojnásobná proti konstantě $\varphi = 0{,}004$ v (42a), neboť tentokrát jde o dvě matice, zatížené stejnou silou F_P.

I když výše uvedené výpočty jsou založeny na některých odhadech a zaokrouhleních, jednoznačně se ukazuje, že **zvyšování stoupání je z energetického hlediska výhodné, neboť třecí moment závisí na stoupání jen málo a šroub se při stejné rychlosti suportu může točit pomaleji, čímž klesá zmařený výkon, ohřívající šroub i matici.**

Účinnost předepnuté soustavy dvě matice - šroub vyjádříme pomocí (44a,b):

$$\eta_{R\to P} = \frac{M_{ideální}}{M} = \frac{(F_A - F_B)tg\beta}{F_A tg(\beta+\varphi) - F_B tg(\beta-\varphi)} \qquad (47b)$$

Průběhy účinnosti v závislosti na zatížení pro různé úhly stoupání β jsou na **obr.27**. Stejně jako v **obr.24** je vidět příznivý vliv většího stoupání.

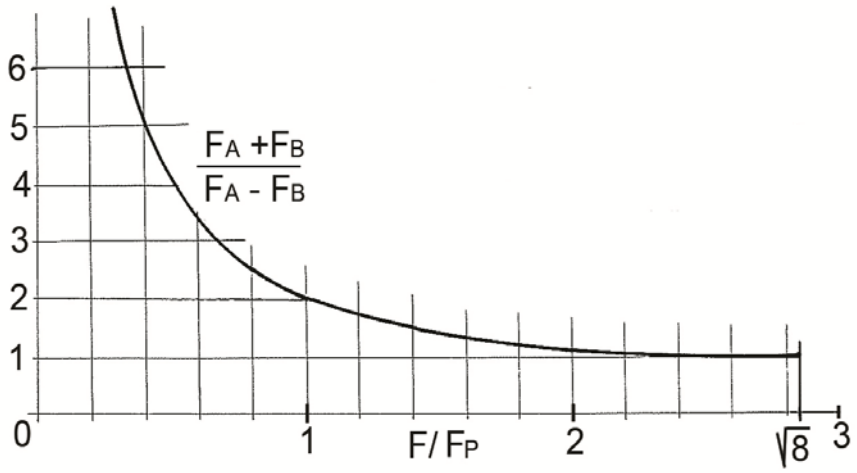


Obr.27 *Účinnost předepnuté soustavy šroub - dvě matice při převodu z rotace na posuv*

Po zanedbání velmi malých veličin $tg\varphi \cdot tg\beta \approx \varphi \cdot tg\beta << 1$ (a stejně tak $\varphi^2 \cdot tg\beta$ a $\varphi \cdot tg^2\beta$) je možno vztah (47b) upravit na přibližný tvar

$$\eta_{R\to P} \approx \frac{1}{1+\varphi\frac{r_S}{h}\cdot\frac{F_A+F_B}{F_A-F_B}} \qquad (47c)$$

Průběh koeficientu $\frac{F_A+F_B}{F_A-F_B}$, který vyjadřuje závislost na zatížení, je na **obr.27a**.



Obr.27a *Korekční koeficient zatížení podle (36)*

Protože v předepnuté soustavě existuje i v případě odlehčeného šroubu třecí moment M_{T0}, účinnost se při malém zatížení zhoršuje a při úplném odlehčení klesne do nuly.

Znovu je nutno zdůraznit, že **udávání konkrétní hodnoty účinnosti předepnutých soustav bez informace o velikosti vnějšího zatížení nemá smysl**.

Velikost třecího momentu rozhodujícím způsobem omezuje tzv. **otáčkový součinitel** kuličkového šroubu, tedy součin $d_S \times n$, kde

$d_S [mm]$ ... jmenovitý průměr šroubu, $n \left[\min^{-1}\right]$ ... vzájemné otáčky šroubu a matice.

Typické hodnoty (podle konstrukčního provedení a třídy přesnosti) se pohybují okolo

$$d_S \times n \approx 100\ 000 \div 120\ 000$$

A7. Kuličkové šrouby - shrnutí

Výše uvedené výpočty stykové tuhosti a třecího momentu kuličkového šroubu je možno aplikovat i na kuličková axiální i kosoúhlá ložiska a jejich předepnuté dvojice. Změna nastane jen v hodnotě číselné konstanty ve vztahu (32), úhel stoupání šroubovice β bude nulový a u axiálních ložisek dosazujeme úhel stykové normály $\alpha = 90^0$. Při numerických výpočtech ale nastávají problémy s odhadem velikosti předepnutí δ_0 nebo předepínací síly F_P. Výrobci šroubů je většinou nezveřejňují a můžeme je pouze odhadovat podle udávaných hodnot statické a dynamické únosnosti. Často doporučovanou hodnotou předpětí je desetina dynamické únosnosti. Rovněž zjištění počtu kuliček a jejich průměru může činit potíže. Dále byl odhadnut úhel valivého tření, který se může případ od případu lišit. K námitkám, že uvedené exaktní výpočty jsou tak založeny na nepřesných nebo mnohdy chybějících výchozích údajích, je nutno podotknout, že se jimi alespoň ujasňují některé kvalitativní souvislosti:

- optimalizační výpočty z hlediska dosažitelného zrychlení podle **kap.A4** vedou většinou na větší stoupání, než byli konstruktéři doposud zvyklí používat. Průběhy třecího momentu a účinnosti na **obr.24**, **26** a **27** ukazují, že z hlediska energetických ztrát je volba vyššího stoupání jednoznačně výhodným krokem. Jak ukazuje vztah (38b), podezření na pokles stykové tuhosti rovněž není opodstatněné. Kompenzace poklesu torzní tuhosti zvýšením průměru při optimalizaci metodou referenčního šroubu z **kap.4.3** sice může vést na průměr šroubu, který není obsažen v rozměrových řadách výrobců, přesto ale usnadní konstruktérovu volbu.

Závěrečná upozornění

Dlouhý šroub má zpožďující vliv na regulaci při přenosu síly z motoru na suport. Jak bylo doloženo, s velkým stoupáním šroubu roste význam krutových (smykových) deformací. Rychlost jejich šíření v oceli podle teorie kontinua je $c* = \sqrt{G/\rho_{Fe}} = 3200\ [m/s]$. Při řízení polohy NC strojů vzniká tedy dopravní zpoždění, neboť suport s maticí "pozná" až po určité době, že motor zabral. Např. u šroubu $L = 3{,}2m$ může být dopravní zpoždění až $1ms$, což je několikanásobek taktu výpočtu řídicího systému a obsluhy pohonů!! Takt obsluhy proudové a rychlostní regulace bývá ještě kratší (např. $32\mu s$ i méně), takže dlouhý šroub může degradovat možnosti řídicí elektroniky.

Kvůli omezení vzpěrného namáhání při ohřevu oboustranně axiálně uloženého šroubu se používá jeho **tahové předepnutí**. Tím je ale ovlivněno **stykové předepnutí** mezi šroubem a maticemi:

- při orientaci matic do "**X**" stykové předepnutí roste,
- při orientaci matic do "**O**" stykové předepnutí klesá.

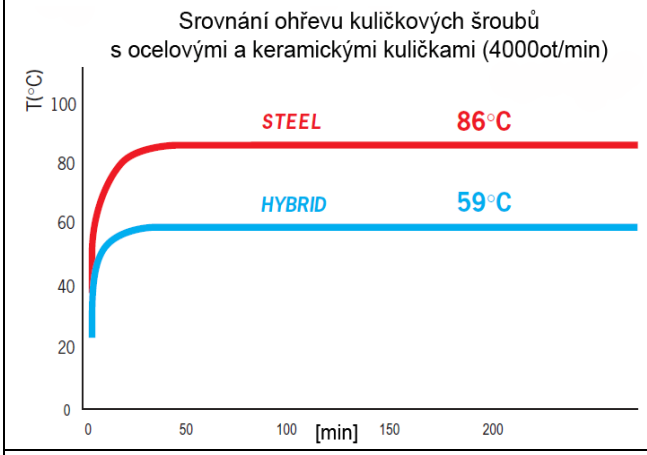
U tahového předepnutí šroubů **s velkým stoupáním** dochází ke změně stoupání, která je vůči průměru kuliček procentuálně větší než u stoupání malého, takže výrobcem nastavené stykové předepnutí lze výrazně ovlivnit !!!

U rychloběžných vřetenových ložisek se stalo téměř zvykem používat **keramické kuličky z kubického nitridu křemíku Si_3N_4**. Přestože již byla zvládnuta technologie výroby keramických ložiskových kroužků (udává se maximální průměr až 200mm), trvalé místo v obráběcích strojích zaujala jen **ložiska hybridní**, u nichž jsou keramické pouze kuličky.

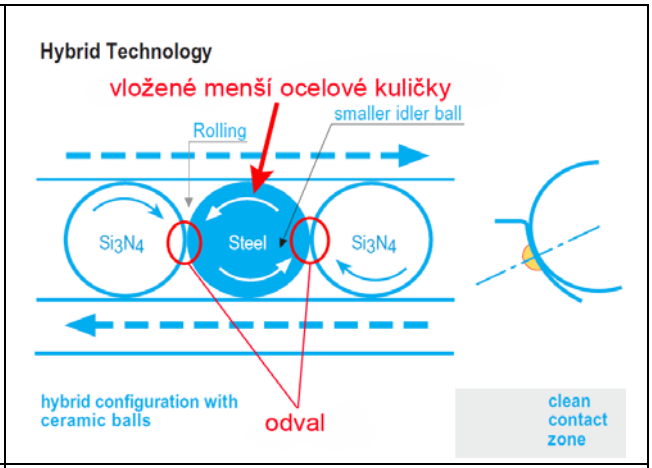
Uvedeme některé výhodné fyzikální vlastnosti keramiky:

- hustota 3200 kg/m^3 .... skoro třetina oproti oceli
- modul pružnosti E_{Si}=3,2·10^{11} N/m^2 ≈ 1,5 E_{ocel}
- Poissonovo číslo μ = 0,26
- tvrdost 1500 až 1700 HV10
- teplotní roztažnost 3 $\mu m/m/K$ ..... téměř čtvrtina oproti oceli !!
- maximální provozní teplota až 1000^{0}C
- menší tření, ohřev a dilatace, větší tuhost a životnost
- materiál je nemagnetický, nevodivý, téměř absolutně odolný proti korozi a u ložisek s tukovou náplní se udává její až trojnásobná životnost proti ložiskům s ocelovými kuličkami.

Keramické kuličky se prosazují i u šroubů. Jejich vliv na zmenšení poddajnosti sice není podstatný (v **kap.5.4** jsme vyčíslili asi 12%), ale hlavně snižují ohřev, jak je doloženo na **obr.28** (fy. Umbra). Další možná úprava ke zmenšení tření je na **obr.29**:
- aby při vzájemném „postrkování se“ kuliček v oběžné dráze nedocházelo vlivem protisměrného pohybu mezi jejich povrchy k nežádoucímu tření a hlukovým emisím, vkládají se distanční nenesoucí kuličky s nepatrně menšími průměry. Mezi kontaktními plochami tak vznikne správný odval a kluzné tření je nahrazeno valivým, klesne však počet nosných kuliček.



Obr.28 *Ohřev kuličkového šroubu s ocelovými a keramickými kuličkami (Umbra)*



Obr.29 *Vkládání menších kuliček kvůli zajištění odvalu (Umbra)*

Příklady výpočtů

1. Kuličkový šroub KSK Kuřim, typ K50x40, provedení matice APVR

(dvouchodá předepnutá), materiálem šroubu, matice i kuliček je ocel ($\mu = 0{,}3$).

Katalogové údaje výrobce:

- *jmenovitý průměr* $d_S = 50mm$
- *stoupání* $s = 40\,mm/ot$, *tj.* $h = 0{,}0064\,m/rad$

- *úhel styku* $\alpha = 45^0$
- *průměr kuliček* $d_0 = 7{,}144 mm$
- *počet závitů každého chodu* $i = 2{,}4$
- *délka tělesa matice* $L_{mat} = 143 mm$
- *vnější průměr tělesa matice* $D_{mat} = 2R_{mat} = 85 mm$ *(neuvažujeme přírubu)*
- *statická únosnost* $C_{stat} = 114570 N$
- *dynamická únosnost* $C_{dyn} = 42340 N$
- *předepínací síla* $F_P = 0{,}1 C_{dyn} = 4234 N$
- *styková tuhost* $k = 1060\, N/\mu m$ .... *poddajnost* $c_{styk} = 1/k = 0{,}94\, \mu m/1000 N$

(výrobce ale neudává postup výpočtu, pro jaké osové zatížení, nebo jestli je tuhost zjištěna měřením a za jakých podmínek).

Zjednodušený výpočet podle (38a,b):

Předpokládáme rotující oboustranně axiálně uložený a neprovrtaný šroub o délce $2m$.

a) Maximální složená poddajnost v tahu a krutu:

- *střední (efektivní) průměr* $D \approx d_{šr} = d_S - d_0 \cos\alpha = 45 mm$
- *maximum poddajnosti podle tabulky na* ***obr.4a*** *(varianta* ***B****)*

$$c_{T2} + c_{K1} = 3\, \mu m/1000 N \quad \text{při zdvihu} \quad y = 1415 mm$$

b) Styková poddajnost:

- *úhel stoupání* $\beta = arctg \frac{s}{\pi d_S} = arctg \frac{40}{50\pi} = 0{,}2493 rad = 14{,}3^0$
- *odhad efektivního (nosného) počtu kuliček každého chodu 70% (podle* ***obr.17****)*

$$n = 0{,}7 \frac{\pi d_S i}{d_0 \cos\beta} = 0{,}7 \cdot \frac{2{,}4 \cdot 50\pi}{7{,}144 \cdot \cos\beta} \approx 38$$

Ve vztahu (38a) volíme $K_F = 1{,}02$ *(předpokládáme zatížení šroubu silou* $F = F_P$*):*

$$c_{styk} = K_F \frac{0{,}285 \cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{(\cos\beta)^5 d_0 n^2 F_P}} = \frac{1{,}02 \cdot 0{,}285 \cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{(\cos\beta)^5 \cdot 7{,}144 \cdot 10^{-3} \cdot 38^2 \cdot 4234}} = 0{,}868 \cdot 10^{-9}\, m/N$$

$$c_{styk} = 0{,}868\, \mu m/1000 N \qquad k = 1/c_{styk} = 1152\, N/\mu m$$

(vychází o 9% vyšší hodnota stykové tuhosti oproti katalogu).

Poznámka: ***Kontrolní výpočet stykové tuhosti podle DIN ISO 3408-4 (vydání z r. 2011)*** *dává po dosazení* $F_P = 4234 N$ *do vztahu (39) hodnotu* $k = 1233\, N/\mu m$. *Součinitel tuhosti vychází* $\bar{k} = 58{,}3\, N/\mu m^{3/2}$, *ale podrobný postup jeho stanovení neuvádíme, neboť bezplatné veřejné šíření zmíněné normy není možné. KSK Kuřim uvádí hodnotu* $\bar{k} = 174\, N/\mu m^{3/2}$ *bez informací o způsobu výpočtu (zřejmě se ale jedná o celý součin* $i \cdot \bar{k}$*).*

c) Vliv radiální deformace:

- *vnitřní střední průměr matice* $d_{mat} = 2r_{mat} \approx d_S + d_0 \cos\alpha = 55 mm$

Poddajnost jednoho chodu je podle (39d)

$$c_{1(rad \to ax)} = \frac{R_{mat}^2}{\pi E L_{mat}\left(R_{mat}^2 - r_{mat}^2\right)} = \frac{42{,}5^2}{\pi \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}143\left(42{,}5^2 - 27{,}5^2\right)} = 1{,}82 \cdot 10^{-11}\, m/N \approx 0{,}02\, \mu m/1000 N$$

Poddajnost celé matice s oběma předepnutými chody je

$$c_{2(rad \to ax)} \approx 0{,}01\, \mu m/1000 N$$

d) Odhad třecího momentu podle teorie valivého tření:

- ve vztahu (47) volíme $K_F = 1{,}02$ (šroub zatížen silou $F = F_P$) a úhel valivého tření $\varphi = 0{,}004$.

Třecí moment je

$$M_T = 2K_F \varphi\, r_S F_P \frac{1+tg^2\beta}{1-\varphi^2 tg^2\beta} = 2 \cdot 2{,}04 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}025 \cdot 4234 \cdot \frac{1+tg^2\beta}{1-0{,}004^2 tg^2\beta} = 0{,}92 Nm$$

Poznámka: *Vypočtený třecí moment nezahrnuje další vlivy (kluzné tření mezi kuličkami a ve vratných kanálech, tření stíracích kroužků) a poroste rovněž s axiálním zatížením. Např. výrobce servopohonů* ***Indramat*** *udává při návrhu celé posuvové osy orientační (a spíše nadsazený) odhad pro konstrukční skupinu šroubu včetně ložisek*

$$M_{Tcelk}[Nm] \approx d_S[cm]$$

Neuvádí se ale způsob uložení (jednostranné, oboustranné) a typ ložisek.

2. Srovnání se vzorovým výpočtem v DIN ISO 3408-4

Ve zmíněné normě je proveden vzorový výpočet pro šroub s těmito parametry:

- *jmenovitý průměr* $d_S = 63{,}5mm$
- *stoupání* $s = 5\,mm/ot$
- *úhel styku* $\alpha = 45^0$
- *průměr kuliček* $d_0 = 3{,}5mm$
- *dvojice předepnutých matic, počet závitů jedné matice* $i = 5$
- *předepínací síla* $F_P = 4000N$
- *axiální zatížení* $F = 8000N$
- *styková tuhost* $k = 2923\,N/\mu m$ .... *poddajnost* $c_{styk} = 1/k = 0{,}342\,\mu m/1000N$

Srovnávací výpočet provedeme pouze pro stykovou tuhost podle (38a,b):

- *úhel stoupání* $\beta = arctg\frac{s}{\pi d_S} = arctg\frac{5}{63{,}5\pi} = 0{,}0251rad = 1{,}44^0$
- *odhad efektivního (nosného) počtu kuliček jedné matice 70%*

$$n = 0{,}7\frac{\pi d_S i}{d_0 \cos\beta} = 0{,}7 \cdot \frac{5 \cdot 63{,}5\pi}{3{,}5 \cdot \cos\beta} \approx 200$$

- *volíme* $K_F = 1{,}075$ *(šroub zatížen silou* $F = 2F_P$*):*

$$c_{styk} = K_F \frac{0{,}285 \cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{(\cos\beta)^5 d_0 n^2 F_P}} = \frac{1{,}075 \cdot 0{,}285 \cdot 10^{-7}}{\sqrt[3]{(\cos\beta)^5 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 200^2 \cdot 4000}} = 0{,}372 \cdot 10^{-9}\, m/N$$

$$c_{styk} = 0{,}372\,\mu m/1000N \qquad k = 1/c_{styk} = 2690\,N/\mu m$$

(vychází o 8% nižší hodnota stykové tuhosti oproti normě).

Pro nezatížený šroub (tj. $K_F = 1$) je tuhost $k = 2890\,N/\mu m$, což téměř souhlasí s výpočtem podle normy.

Nejistota výpočtů

Vliv přesnosti výroby: *zjednodušený výpočet stykové tuhosti podle vztahu (38a) vykázal asi 9% kladnou odchylku od katalogu výrobce, resp.8% zápornou od výpočtu podle normy DIN-ISO. Nejistota výsledku je ovlivněna především stanovením efektivního počtu kuliček (uvažovali jsme 70% z celkového počtu). Naopak v normě je vliv výrobních chyb zohledněn korekčním součinitelem, který má rozpětí od 80% (toleranční třída přesnosti 5) do 100% (třída 0 a 1). Skutečný počet činných kuliček se může ještě podstatně snížit instalací distančních čoček – rozptylek nebo celých ohebných klecí, popř. vložením nenosných kuliček podle* ***obr.29****.*

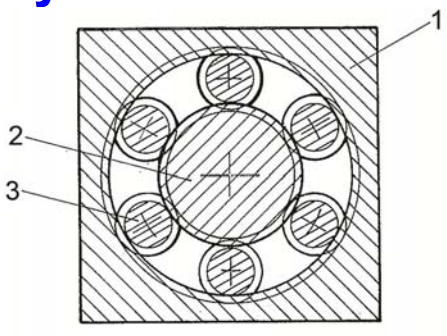
Vliv koeficientu přimknutí *(viz* ***obr.15****):* *norma DIN-ISO na rozdíl od vztahu (38a) vyžaduje jeho znalost, ale výrobci jej většinou neudávají. Ve vzorovém výpočtu byla použita hodnota*

$$R/d_0 = 0{,}55\,.$$

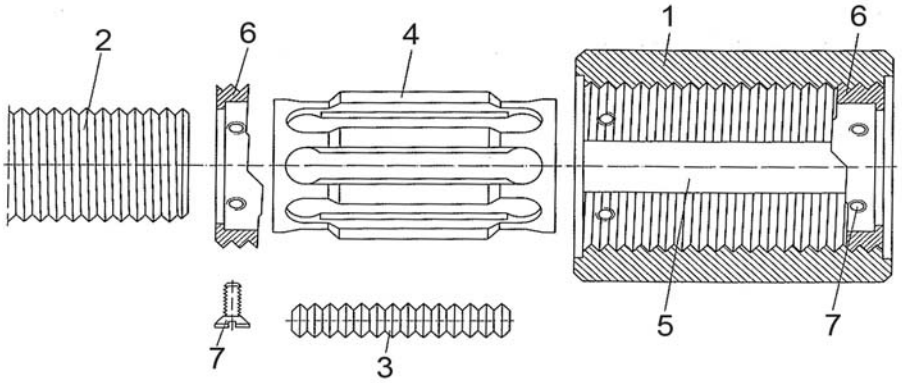
Vliv úhlu stykové normály: *standartní hodnotou u kuličkových šroubů je* $\alpha = 45^0$ *a ve vztahu (38a) i v normě se předpokládá jeho nezávislost na zatížení. Tento předpoklad je ale problematický, zvláště blíží-li se koeficient přimknutí hodnotě 0,5.*

A8. Planetové šrouby

Náhrada kluzného tření valivým je u těchto šroubů provedena tak, že mezi závity šroubu a matice jsou vložena válcová tělíska se zápichy nebo závity, zapadajícími do závitů šroubu a matice. Tělíska konají planetový pohyb, jak je naznačeno v **obr.30**. Výrobci nabízejí dvě provedení. **Typ 1** (viz **obr.31**): pro malé rychlosti pohybu (malá stoupání) mají valivá tělíska **3** pouze zápichy, které svými zaoblenými boky zapadají do závitů šroubu **2** a matice **1**, majících **souhlasná** stoupání. Tělíska konají při odvalu axiální pohyb a musí být tudíž vedena v kleci **4**, mající podélná vybrání delší, než je délka tělíska. Recirkulace tělísek je zajištěna kroužkem **6** s čelní vačkou, která tělísko po každém jeho oběhu vrátí o stoupání zpět. Závit matice je v místě vracení tělísek přerušen vybráním **5**.



Obr.30 *Planetový šroub*
1-matice, 2-šroub, 3-valivá tělíska



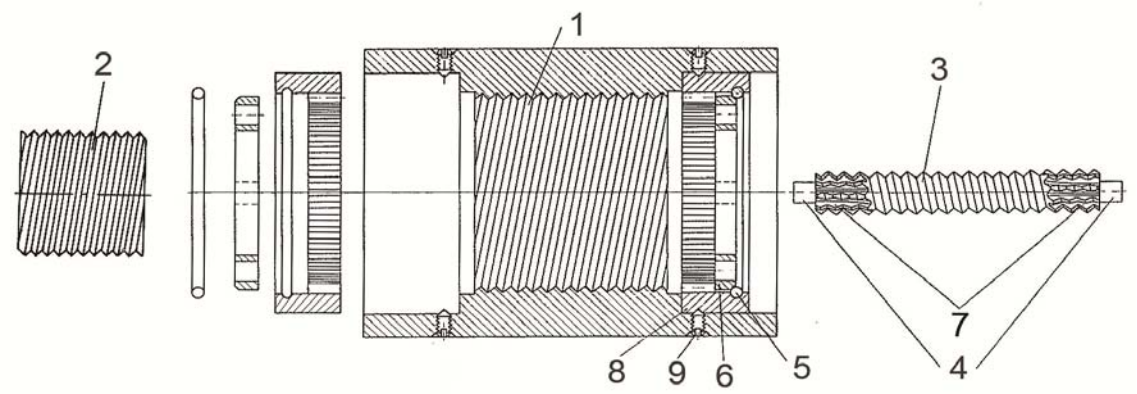
Obr.31 *Pomaloběžný planetový šroub s nuceným vracením tělísek*

Provedení se vyznačuje (kromě ostatních výhod uváděných u kuličkových šroubů) zvláště vysokou tuhostí. Vzhledem k rázům při vracení tělísek je však vhodné jen pro nižší otáčky. Výrobce SKF doporučuje maximální hodnoty součinu

$$d \times n < 40\ 000 \quad \text{při rotujícím šroubu}$$

$$d \times n < 12\ 000 \quad \text{při rotující matici.}$$

Typ 2 (viz **obr.32**): pro větší rychlosti pohybu mají valivá tělíska **3** jednoduchý závit, jehož zaoblené boky zapadají do vícechodých závitů šroubu **2** a matice **1**, majících **opačná** stoupání.



Obr.32 *Vícechodý planetový šroub*

Axiální pohyb tělísek při odvalu nenastává. Jejich přesné vedení zaručuje pevný kroužek **8** s vnitřním ozubením, do kterého zabírají ozubené konce tělísek **7**. Další (otočný) kroužek **6** má otvory, v nichž se otáčejí válcové konce tělísek **4**. Otáčky jsou výrobcem omezeny podmínkou $d \times n < 140\ 000$ bez ohledu na to, rotuje-li šroub nebo matice. Tyto šrouby jsou opět velmi únosné a použitelné ve velmi tvrdých provozních podmínkách.

Podobně jako u kuličkových šroubů, je i u obou typů šroubů planetových možno předepnout dvě matice proti sobě, čímž se vymezí vůle a zvýší tuhost i odolnost proti rázům.

A9. DODATEK
Válcová silnostěnná nádoba

***Poznámky**: 1)* *Základní postupy následujících výpočtů podali jako první G. Lamé a E. Clapeyron pod názvem „Mémoires sur l'équilibre intérieure des corps solides homogénes" (Mémoires présentés par divers savants, Vol.4, 1833).*

2) *Teorie silnostěnných nádob se uplatňuje nejen v případě „vnitřního přetlaku" v tělese kuličkové matice, ale i v dalších technických oblastech, jako jsou např. tlaková potrubí a lineární hydromotory (hydraulické válce), nalisované náboje, rotující kotouče atd.*

Obecný Hookův zákon pro trojosou napjatost pláště uzavřené nádoby

Uvažujeme střední část dlouhého pláště dostatečně daleko o vík podle ***obr.D1****, kde se neprojevuje jejich vyztužující vliv. Elementární prvek jednotkové délky pláště leží na poloměru* x*, viz též* ***obr.D2****. Hlavní napětí a prodloužení (radiální, tečné a osové) jsou*

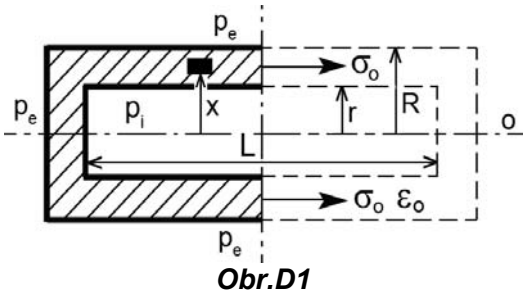
$$\sigma_{r,t,o}(x),\ \ \varepsilon_{r,t,o}(x)$$

Poměrná změna objemu elementárního prvku

$$\Delta V/V = \varepsilon_V = \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_o$$

Obecný Hookův zákon:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_o) \\ E\varepsilon_t &= \sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_o) \\ E\varepsilon_o &= \sigma_o - \mu(\sigma_r + \sigma_t) \end{aligned} \qquad (D1)$$



Obr.D1

Sečtením vychází

$$E\varepsilon_V = (1-2\mu)(\sigma_r + \sigma_t + \sigma_o)$$

Osamostatnění rovnic pro každý hlavní směr:

$$\sigma_t + \sigma_o = \frac{E\varepsilon_V}{1-2\mu} - \sigma_r \quad \text{a podobně} \quad \sigma_r + \sigma_o = \ldots. \quad \text{a} \quad \sigma_r + \sigma_t = \ldots.$$

$$E\varepsilon_{r,t,o} = \sigma_{r,t,o} - \mu\left(\frac{E\varepsilon_V}{1-2\mu} - \sigma_{r,t,o}\right) \quad \text{nebo obráceně} \quad \sigma_{r,t,o} = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_{r,t,o} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V\right) \qquad (D2)$$

Připravíme si derivaci $\sigma_r' = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_r' + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V'\right)$ *(D3)*

Silová rovnováha na elementárním prvku:

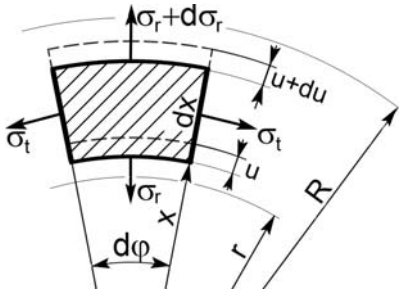
$$(\sigma_r + d\sigma_r)(x+dx)d\varphi - \sigma_r x d\varphi = \sigma_t dx \sin d\varphi$$

Zanedbání součinu $dx d\sigma_r$ *a dosazení* $\sin d\varphi = d\varphi$*:*

$$(d\sigma_r x + dx\sigma_r)d\varphi = \sigma_t dx d\varphi \,|: dx d\varphi$$

$$(d\sigma_r x + dx\sigma_r)/dx = \sigma_t \quad \text{neboli} \quad x d\sigma_r / dx + \sigma_r = \sigma_t$$

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{x} = \frac{d\sigma_r}{dx} = \sigma_r' \qquad (D4)$$



Obr.D2

Dosazení z (D2) a (D3) a vykrácení členem $\frac{E}{1+\mu}$*:*

$$\frac{\varepsilon_t - \varepsilon_r}{x} = \varepsilon_r' + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V' \qquad (D5)$$

V ***obr.D2*** *je* u *... radiální posuv na poloměru* x *a* du *... prodloužení míry* dx*, takže*

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi u}{2\pi x} = \frac{u}{x}, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dx} = u', \quad \varepsilon_o = konst \quad \text{(řezy kolmé k ose } o \text{ jsou rovinné!!)} \qquad (D6)$$

Derivace rovnic (D6): $\varepsilon_t' = \frac{u'x - u}{x^2}$, $\varepsilon_r' = u''$, $\varepsilon_o' = 0$ *a dosazením do (D5) je*

$$\frac{u}{x^2} - \frac{u'}{x} - u'' = \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V' \quad \text{ale zároveň platí} \quad \varepsilon_V' = \varepsilon_o' + \varepsilon_t' + \varepsilon_r' = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x} + u''$$

Srovnání obou rovnic: $\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V' = -\varepsilon_V'$ *tj.* $\frac{1-\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V' = 0 = (pro\ \mu = 0{,}3) = 1{,}75\varepsilon_V'$

takže musí být $\varepsilon_V' = 0$*, neboli* $\varepsilon_V = konst$ *a podle (D2) také* $\sigma_o = konst$

z čehož vyplývá, že objemové přetvoření i osové napětí jsou rovnoměrně rozložena.

Diferenciální rovnice přejde na ***Eulerovu rovnici 2. řádu*** *(rovnici silnostěnných nádob)*

$$u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0 \qquad (D7)$$

Partikulární řešení je $u = x^n$*, tj.* $n(n-1)x^{n-2} + nx^{n-2} - x^{n-2} = 0$

Pro libovolné x *musí být* $n(n-1) + n - 1 = 0$*, neboli* $n = \pm 1$ *a obecné řešení je*

$$u = C_1 x + C_2 x^{-1} \qquad (D8)$$

Poměrná prodloužení jsou podle (D6)

$$\varepsilon_t = C_1 + C_2 x^{-2} \quad a \quad \varepsilon_r = C_1 - C_2 x^{-2}$$

a napětí po dosazení do (D2)

$$\sigma_t = \frac{E}{1+\mu}\left(C_1 + C_2 x^{-2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V\right) \quad a \quad \sigma_r = \frac{E}{1+\mu}\left(C_1 - C_2 x^{-2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V\right)$$

Zavedením konstant $K_1 = \frac{E}{1+\mu}\left(C_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_V\right)$ *a* $K_2 = \frac{C_2 E}{1+\mu}$ *vycházejí napětí*

$$\sigma_t = K_1 + K_2 x^{-2} \qquad \sigma_r = K_1 - K_2 x^{-2} \qquad \sigma_t + \sigma_r = 2K_1 \qquad (D9)$$

Okrajové podmínky na vnitřním a vnějším povrchu nádoby jsou:

$$\sigma_r(r) = -p_i = K_1 - \frac{K_2}{r^2}, \quad \sigma_r(R) = -p_e = K_1 - \frac{K_2}{R^2} \quad (p_i \text{ ... vnitřní tlak, } p_e \text{ ... vnější tlak})$$

(záporná znaménka proto, že tlaky p_i, p_e *jsou kladná čísla a napětí jsou označována jako tahová).*

Řešením obou rovnic pro dvě neznámé K_1 *a* K_2 *vyjde*

$$K_1 = \frac{p_i r^2 - p_e R^2}{R^2 - r^2} = (\sigma_o) \qquad K_2 = (p_i - p_e)\frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \qquad (D10)$$

*Konstanta K_1 zde má význam rovnoměrně rozloženého osového napětí v myšleném řezu uzavřené nádoby z **obr.D1**, které označujeme (σ_o) kvůli odlišení od případu nádoby otevřené (trubky), kde je osové napětí σ_o ve vztazích (D1) nulové!! Dosazením K_1, K_2 do (D9) vychází*

$$\sigma_t = \frac{p_i r^2 - p_e R^2}{R^2 - r^2} + (p_i - p_e)\frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} x^{-2} \qquad \sigma_r = \frac{p_i r^2 - p_e R^2}{R^2 - r^2} - (p_i - p_e)\frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} x^{-2} \qquad (D11)$$

$$\sigma_t + \sigma_r = 2\frac{p_i r^2 - p_e R^2}{R^2 - r^2} = 2(\sigma_o)$$

Spojením (D1) a (D11) je možno určit změnu vnitřního a vnějšího poloměru i délky uzavřených i otevřených nádob.

***Poznámky**: **1)** U otevřené nádoby je osové napětí nulové ($\sigma_o = 0$), ale podélný rozměr se podle třetí rovnice v (D1) mění!!*
***2)** Hydraulické (resp. pneumatické) lineární motory (válce) považujeme za nádoby uzavřené, ale při výpočtu osového napětí se při působení tlaku odečítá průřez pístnice. Například v **obr.D3** je*

$$\sigma_o = \frac{p_i\left(r^2 - r_P^2\right)}{R^2 - r^2}$$

a při velkém průměru pístnice $r_P \to r$ osové napětí postupně zaniká.

Příklady

A. Uzavřená nádoba namáhaná pouze vnitřním přetlakem

*Na **vnitřním průměru** ($x = r$, $p_e = 0$), je podle (D11)*

$$\sigma_t = p_i\frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma_r = -p_i, \quad \sigma_o = (\sigma_o) = \frac{p_i r^2}{R^2 - r^2} \quad \text{a stále platí, že } \sigma_t + \sigma_r = 2(\sigma_o).$$

Poměrné prodloužení vnitřního obvodu (a také poloměru) určíme z (D1):

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_o)}{E} = \frac{p_i}{E}\cdot\frac{r^2(1-2\mu) + R^2(1+\mu)}{R^2 - r^2}$$

Poměrné délkové prodloužení pláště nádoby o vnitřní délce L:

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_o - \mu(\sigma_r + \sigma_t)}{E} = \frac{\sigma_o(1-2\mu)}{E} = \frac{p_i}{E}\cdot\frac{r^2(1-2\mu)}{R^2 - r^2}$$

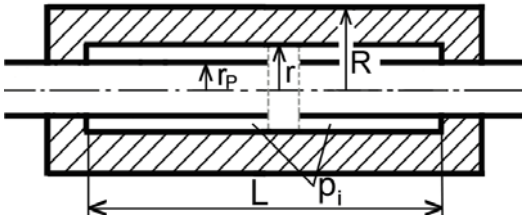
Poměrná změna vnitřního objemu:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi(r+\Delta r)^2(L+\Delta L) - \pi r^2 L}{\pi r^2 L} = (1+\varepsilon_t)^2(1+\varepsilon_o) - 1 = 2\varepsilon_t + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_o + 2\varepsilon_t\varepsilon_o + \varepsilon_t^2\varepsilon_o$$

Po zanedbání malých veličin 2. a 3.řádu a pro $\mu = 0{,}3$ je

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 2\varepsilon_t + \varepsilon_o = \frac{p_i}{E}\cdot\frac{3r^2(1-2\mu) + 2R^2(1+\mu)}{R^2 - r^2} = \frac{p_i}{E}\cdot\frac{1{,}2r^2 + 2{,}6R^2}{R^2 - r^2} \qquad (D12)$$

B. Lineární hydromotor s průchozí pístnicí (obr.D3)



***Obr.D3** Lineární hydromotor*

*Postup je stejný jako v předchozím **příkladu A** s tím rozdílem, že osové napětí σ_o je menší, neboť tlak p_i působí pouze na mezikruží; vnější tlak $p_e = 0$. Do vnitřního objemu nezahrnujeme objem samotné pístnice. Zanedbáváme změnu průměru (stlačení) pístnice a délku pístu (v **obr.D3** je vyznačen čárkovaně). Tečné i radiální napětí zůstávají:*

$$\sigma_t = p_i \frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma_r = -p_i$$

$$\sigma_o = \frac{p_i\left(r^2 - r_P^2\right)}{R^2 - r^2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma_t - \mu\left(\sigma_r + \sigma_o\right)}{E}, \qquad \varepsilon_o = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_o - \mu\left(\sigma_r + \sigma_t\right)}{E} \qquad \textit{(D13)}$$

- *původní vnitřní objem při* $p_i = 0$ *je* $V = \pi\left(r^2 - r_P^2\right)L$

- *nový objem* $V + \Delta V = \pi\left[\left(r + \Delta r\right)^2 - r_P^2\right]\left(L + \Delta L\right)$

- *změna vnitřního objemu* $\Delta V = \pi\left[\left(r + \Delta r\right)^2 - r_P^2\right]\left(L + \Delta L\right) - \pi\left(r^2 - r_P^2\right)L$ *(D14)*

Další úpravy již nevedou ke zjednodušení a rychlejší je numerický výpočet. Pro $r_P \to 0$ *se nutně vracíme k případu* ***A****.*

C. Otevřená nádoba (trubka) namáhaná pouze vnitřním přetlakem

Na ***vnitřním poloměru*** *(*$x = r$*) platí nadále pro tečné i radiální napětí vztahy (D11) při* $p_e = 0$*, ale do obecného Hookeova zákona dosazujeme osové napětí* $\sigma_o = 0$*. Je tedy*

$$\sigma_t = p_i \frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma_r = -p_i, \quad \sigma_o = 0$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \mu\sigma_r\right) = \frac{p_i}{E}\left(\frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2} + \mu\right) \quad \textit{.... vnitřní poloměr se zvětšuje} \qquad \textit{(D15)}$$

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta L}{L} = \frac{-\mu\left(\sigma_r + \sigma_t\right)}{E} = \frac{-2\mu p_i r^2}{E\left(R^2 - r^2\right)} \quad \textit{.... trubka se zkracuje}$$

- *původní vnitřní objem při* $p_i = 0$ *je* $V = \pi r^2 L$

- *nový objem* $V + \Delta V = \pi\left(r + \Delta r\right)^2\left(L + \Delta L\right)$

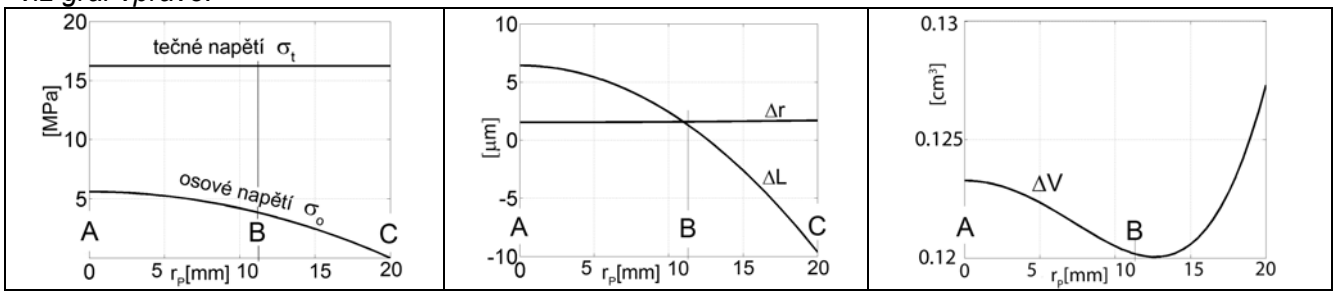
- *změna vnitřního objemu trubky* $\Delta V = \pi\left(r + \Delta r\right)^2\left(L + \Delta L\right) - \pi r^2 L$

Změna délky a poloměru u trubky je stejná jako u lineárního hydromotoru, jehož poloměr pístnice se blíží poloměru pístu, tj. $r_P \to r$*. Změna objemu je však v tomto mezním případě jiná (u trubky hraje roli ještě objem, daný jejím zkrácením a průměrem pístnice)!!*

Dále provedeme výpočty pro lineární hydromotor s průchozí (oboustranně vyvedenou) pístnicí s těmito parametry:

$D = 2R = 55mm, d = 2r = 40mm, d_P = 2r_P = 22mm, L = 600mm$*, tlak* $p_i = 5MPa, \; p_e = 0$*.*

Délka pístu je zanedbána. Nejprve určíme napětí σ_t, σ_o *a následně pomocí vztahů (D13) a (D14) změny rozměrů i vnitřního objemu pro celý možný rozsah průměru pístnice v intervalu* $0 < r_P < r$*. Výsledky jsou patrné z* ***obr.D4****. Tečné napětí se nemění, osové napětí s rostoucím poloměrem pístnice* r_P *klesá, takže hydromotor se postupně zkracuje, kdežto vnitřní poloměr* r *jen nepatrně roste. Tyto dvě protichůdné změny rozměrů mají za následek, že vnitřní objem se mění velmi málo – viz graf vpravo.*



Obr.D4 *Vliv průměru pístnice na napětí a změny rozměrů i objemu lineárního hydromotoru*

V grafech i v následující tabulce jsou vyznačeny hodnoty pro tři následující případy:
***A** ... uzavřená nádoba (hydromotor bez pístu a pístnice),*
***B** ... kompletní hydromotor s průchozí pístnicí o poloměru* $r_P = 11mm$,
***C** ... samotný plášť hydromotoru (trubka).*

	$\sigma_t\ [MPa]$	$\sigma_o\ [MPa]$	$\Delta r\ [\mu m]$	$\Delta L\ [\mu m]$	$V\ [cm^3]$	$\Delta V\ [cm^3]$
A	16,23	5,61	1,53	6,42	754	0,123
B	16,23	3,92	1,58	1,56	526	0,12
C	16,23	0	1,69	-9,62	754	0,115

U některých technických aplikací (např. u nalisovaných nábojů nebo u podélně vrtaných kuličkových šroubů) je potřebné znát i změny rozměrů trubky při vnějším přetlaku – viz dále.

D. Otevřená nádoba (trubka) namáhaná pouze vnějším přetlakem

*Na **vnitřním poloměru** platí po dosazení* $x = r$ *a* $p_i = 0$ *do (D11)*

$$\sigma_t = -\frac{2p_eR^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_o = 0$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = -\frac{2p_eR^2}{E\left(R^2 - r^2\right)} \quad \text{.... vnitřní poloměr se zmenšuje}$$

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2\mu p_eR^2}{E\left(R^2 - r^2\right)} \quad \text{.... trubka se natahuje.}$$

*Na **vnějším poloměru** platí pro* $x = R$ *a* $p_i = 0$

$$\sigma_t = -p_e\frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma_r = -p_e\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} = -p_e, \quad \sigma_o = 0$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \mu\sigma_r\right) = -\frac{p_e}{E}\left(\frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2} - \mu\right) \quad \text{.... vnější poloměr se zmenšuje} \qquad (D16)$$

Vztah (D15) používáme při výpočtu rozepnutí vnitřního průměru kuličkové matice působením radiálních sil od kuliček a analogicky (D16) při výpočtu stlačení vnějšího průměru kuličkového šroubu, je-li tento podélně provrtán kvůli chlazení.

Literatura

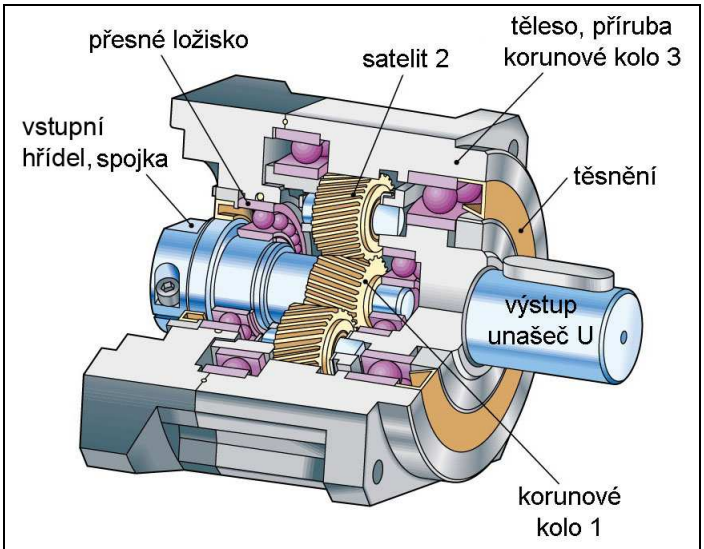
[1] *Eschmann, Hasbargen, Weigand: Ball and Roller Bearings, J. Wiley and S., 1985*
[2] *Fröhlich, J.: Technika uložení s valivými ložisky, SNTL, 2. vydání 1980, kap.7 (str.93-121)*
[3] *Souček, P.: Servomechanismy ve výrobních strojích, Vydavatelství ČVUT, 2004*
[4] *Souček, P.: Pohony výrobních zařízení, Vydavatelství ČVUT, 1994*
[5] *Timošenko, S. P.: Strength of Materials II, D.Van Nostrand Co., New York, 6/1930*
[6] *Janatka, J: Pružnost a pevnost II., SNTL Praha, 1957*
[7] *Lamé, G.: Lecons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, §80, Paris, Bachelier, Imprimeur – Libraire, 1852*
[8] *Norma DIN ISO 3408-4: Kugelgewindetriebe - statische axiale Steifigkeit, 2011.*

B. Pohony s pastorkem – hřebenem a vloženou planetovou převodovkou

B1. Proč planetové převody?

Čelní vícestupňové převodovky, vložené mezi motor a převod pastorek - hřeben, mají řadu nectností, typických pro tento konstrukční princip a výrazně ovlivňujících kvalitu regulace pohonů. Je to zejména:
- **velká celková vůle**, která vzniká sčítáním vůlí u seriově řazených převodových stupňů;
- **nízká tuhost**, která je způsobena hlavně průhyby a krutem dlouhých hřídelů, radiálními deformacemi ložisek a sčítáním stykových poddajností u jednotlivých zubových záběrů. Průhyby hřídelů způsobují křížení spoluzabírajících zubů a tím
- **značné vnitřní tření**, které se projevuje velkou hysterezí na deformační charakteristice.

Tyto nedostatky jsou ve velké míře potlačeny u **převodovek planetových**, které jsou pro použití v regulačních pohonech obecně vhodnější. Jejich princip umožňuje dosáhnout **vysoké převody dopomala s menším počtem převodových stupňů.** Jejich další zásadní odlišností od převodovek klasických je **větvení toku výkonu přes několik** (nejméně tři, ale i více) **paralelních větví – satelitů.** Dochází tak hlavně k poklesu zatížení a tím i deformací jednotlivých paralelních větví. Téměř vždy je použito **alespoň jedno kolo s vnitřním ozubením, což přispívá ke zvětšení koeficientu záběru a zmenšení skluzů. Axiální zástavba je kratší,** čímž **klesá vliv průhybů na celkovou poddajnost.** Nižší relativní rychlosti v určitých místech převodovky umožňují použít **tužší (např. jehlová) ložiska**, která snižují radiální deformace v uložení hřídelů. Celá **konstrukce je středově symetrická**, takže **dochází k výhodné kompenzaci radiálních sil a tím k zmenšení průhybu hřídelů**. Z energetického hlediska je zajímavé, že u některých typů planetových převodovek může být celková účinnost vyšší, než u odpovídajícího převodu klasického (dále ukážeme, že jde např. o jednu modifikaci nejčastějšího typu 2K-U, tj. dvě korunová kola – unašeč podle **obr.1**). V neposlední řadě umožňuje planetový princip výrazně **efektivnější využití vnitřního prostoru skříně**, což vede k **poklesu vnějších zástavbových rozměrů i celkové hmotnosti.** Pro všechny výše zmíněné výhody je koaxiální kombinace **rychloběžný elektromotor – planetová převodovka dopomala** velmi oblíbena zvláště u kloubových robotů. Nároky na přesnost a smontovatelnost jsou ale u planetových převodovek vyšší než u převodů obyčejných.



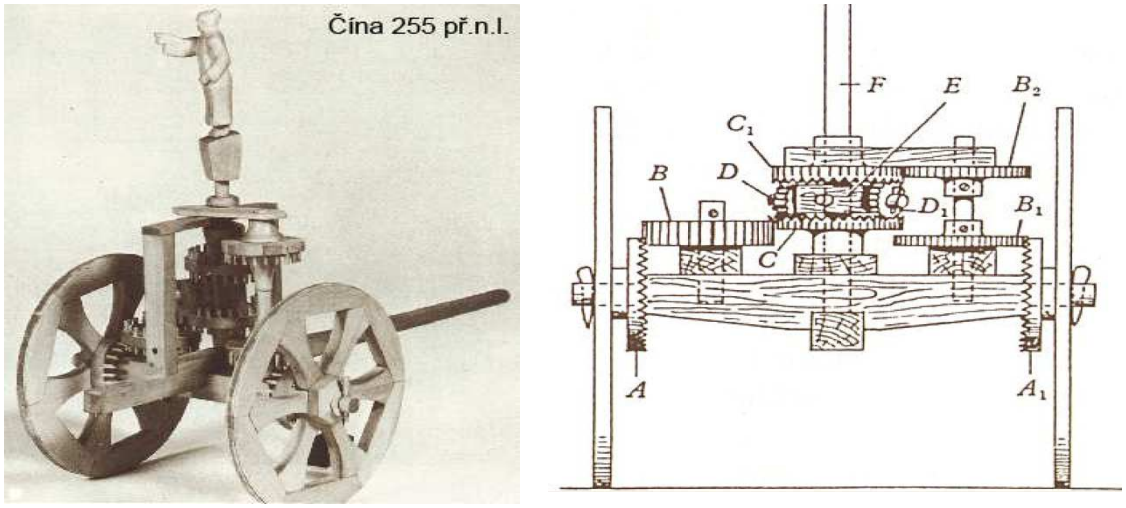
Obr.1 *Převodovka 2K-U (nejčastější uspořádání)*

Historie

U planetových převodů vycházíme z obecného schématu, kterým je tzv. **planetový diferenciál**, vzniklý uvolněním všech rotačních členů od rámu. Např. v **obr.1** je rámem korunové kolo 3, jehož uvolněním vznikne tříhřídelová koaxiální soustava se dvěma stupni volnosti a teprve znehybněním některého ze tří hřídelů vznikne převodovka, ať již klasická

(s nehybným členem U) nebo planetová (nehybné je kolo 1 nebo častěji 3). V tomto textu se budeme zabývat pouze převodovkami s čelním ozubením (přímým nebo šikmým), ale u diferenciálů je výhodná kombinace i s koly kuželovými.

Jednou z historicky nejstarších realizací (255 př.n.l.) je čínský kompasový vůz na **obr.1a**, využívaný pro orientaci vojska v mlze při dlouhých pochodech. Jedná se o čelně kuželový planetový diferenciál, u něhož ruka figury umístěné na hřídeli F ukazuje stále stejnou světovou stranu bez ohledu na změnu směru jízdy.



Obr.1a *Kompasový vůz (Národní muzeum pro vědu a technologii ve Stockholmu)*

Některé katalogové údaje

Pro porovnání vlastností bylo z firemních katalogů vybráno několik planetových převodovek s podobnými převodovými poměry i krouticími momenty. Vesměs se jedná o dvoustupňové převodovky 2K-U (jako na **obr.5a**) s větvením toku výkonu přes 3 satelity. Udávaná tuhost je oproti klasickým převodovkám značně větší a vůle až o řád menší.

Typ - výrobce	**Jmen. moment** $M_K\,[Nm]$	**převod/počet stupňů** $p\,/\,i$	**tuhost na výstupu** $[Nm/arc\,\min]$	**vůle na výstupu** $[arc\,\min]$
Alpha TP+110MA	1570	22/2st.	730	1
Alpha TP+110MA	1600	27,5/2st.	725	1
Alpha TP+300MF	2100	21/2st.	800	2÷3
Alpha TP+300MF	2400	25/2st.	950	2÷3
Alpha SP+210MF	1500	20/2st.	400	3÷5
Alpha SP+210MF	1500	25/2st.	400	3÷5
Alpha classic SP+240MF	1700	20/2st.	350	4÷6
Alpha SP+240MF	2500	20/2st.	550	3÷5
Alpha SP+240MF	2500	25/2st.	550	3÷5
Alpha SP+240MC	1700	28/2st.	350	4÷6
Alpha SP+240MC	1730	25/2st.	550	4÷5
Alpha SP+240MC	1770	20/2st.	550	4÷5
STÖBER P922-0250ME	2000	25/2st.	332	4
NEUGART PLN 190	1800	25/2st.	140	5
AB Series AB220	2000	25/2st.	225	3÷5
+ZF+ Servoplan PG1200/2	1200	25/2st.	149	4÷6
Harmonic Drive HPG65	850	25/2st.	375	3

Poznámka: *Převodovky ALPHA: MF… cyklické zatížení v režimu S5, MC… trvalé zatížení S1.*

B2. Kinematika a účinnost planetových převodovek

Dále bude uveden klasický způsob výpočtu účinnosti planetového převodu, vycházející z Willisovy metody. Lze dokázat, že v určitých případech je možno s planetovou převodovkou dosáhnout ve srovnání s převodovkou klasickou energetických úspor. I když problém zmařené energie v převodech u NC strojů a robotů není prioritou (na rozdíl od např. větrných elektráren, kde jde o velké výkony a planetové převody jsou nezastupitelné, viz **obr.16**), je to další argument ve prospěch planetového principu.

2.1 Odhad ztrát základního (vnitřního) převodu

Směr toku výkonu planetovou převodovkou na **obr.1** (kdy hnacím členem je korunové kolo 1, hnaným členem unašeč U a kolo 3 stojí) označíme symbolem $(1 \to U)^3$. Může být i opačný, tj. $(U \to 1)^3$. **Základní** (též **vnitřní**) **převod** p_V planetové převodovky vznikne znehybněním unašeče U, ze kterého učiníme pouhý vložený hřídel (nebo více hřídelů, nesoucích satelity 2) a umožníme rotaci kolu 3. Vznikne tak dvojstupňová převodovka s vloženými koly 2 (dříve satelity), u které může opět být směr toku výkonu $(1 \to 3)^U$ nebo $(3 \to 1)^U$. Zjednodušeně ji můžeme považovat za klasickou převodovku se třemi v rámu uloženými hřídeli a třemi koly po dvou zubových záběrech (1-2 a 2-3).

Základní veličinou, od které se odvíjejí výsledky všech dalších energetických výpočtů, je **účinnost jednoho zubového záběru**, kterou označíme symbolem η_V. Zahrneme do ní i ztráty v rotačním uložení příslušných hřídelů (ložisek). Z mnoha dostupných literárních pramenů a více nebo méně složitých vztahů uvádíme jediný vztah pro tzv. **činitel ztrát** v čelním ozubení (podíl ztrát na příkonu):

$$\xi = 1 - \eta_V = \frac{f \pi \varepsilon_E}{4 \cos \beta} \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{z'} \right) \qquad (1)$$

- z ... počet zubů menšího kola, z' ... počet zubů většího kola;
- kladné znaménko platí pro vnější ozubení, záporné pro vnitřní ozubení;
- nerozhoduje směr toku výkonu, tj. které z kol z a z' je hnací a které hnané;
- koeficient tření $f = 0{,}04 \div 0{,}08$;

ε_E ... koeficient záběru;

β ... úhel šikmého ozubení (u přímého ozubení je $\beta = 0^0$).

Vztah (1) logicky zohledňuje fakt, že ztráty vnitřního ozubení jsou vždy menší, neboť jsou menší relativní rychlosti (skluzy) mezi spoluzabírajícími boky zubů. Minimalizaci skluzů u vnitřního záběru dosáhneme přiblížením počtů zubů z a z' (viz např. kola z_1, z_2 v **obr.8a**). Rovněž úhel β hraje roli, neboť u šikmého ozubení přistupuje axiální složka třecí síly. Přesnou použitelnost (1) ale zpochybňuje nejistota v odhadu koeficientu tření f a stanovení koeficientu záběru ε_E, které je nemožné bez podrobnějších konstrukčních podkladů. V dalších úvahách budeme předpokládat vyšší třídu kvality a přesnosti (kalené a broušené zuby, valivá ložiska atd.) a používat hodnoty v intervalu $\xi = 1 - \eta_V = 0{,}01 \div 0{,}04$.

2.2 Willisova metoda výpočtu převodu – základní vztahy

Převodový poměr (krátce „převod“) mezi hnacím členem i a hnaným členem j je poměr úhlových rychlostí ω_i / ω_j, tedy poměr počtu zubů z_j / z_i. Obě rychlosti jsou měřeny vůči vztažnému systému k (v případě klasických převodovek s vloženými hřídeli je vztažným systémem nehybné těleso převodovky). Kladné znaménko platí při souhlasném směru

rotace (např. řemenový převod nebo pár kol s vnitřním ozubením jednoho kola), záporné znaménko při opačném směru rotace.

A. Převod ze členu i **na** j **při stojícím členu** k :

$$p_{ij}^{k} = \frac{\omega_{ik}}{\omega_{jk}} = \frac{\omega_i - \omega_k}{\omega_j - \omega_k} = \pm\frac{z_j}{z_i} \qquad (2)$$

Odpovídající symbol pro tok výkonu je $(i \to j)^k$.

B. Reciproký převod $(j \to i)^k$:

$$p_{ji}^{k} = \frac{1}{p_{ij}^{k}} = \pm\frac{z_i}{z_j} \qquad (2a)$$

C. Záměnu pohyblivosti provedeme tak, že vztažným systémem učiníme člen j :

$$p_{ik}^{j} = \frac{\omega_{ij}}{\omega_{kj}} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_k - \omega_j} = \frac{\omega_i - \omega_j + \omega_k - \omega_k}{\omega_k - \omega_j} = 1 - \frac{\omega_i - \omega_k}{\omega_j - \omega_k} = 1 - p_{ij}^{k} \qquad (3)$$

Symbol pro tok výkonu je $(i \to k)^j$.

D. Seriové řazení převodů: vztažný systém je m , seriově řazené členy i, j, k , dílčí převody $(i \to j)^m$ a $(j \to k)^m$. Celkový převod v režimu $(i \to k)^m$ je

$$p_{ik}^{m} = p_{ij}^{m} \cdot p_{jk}^{m} \qquad (3a)$$

Vztahy (2),(2a),(3),(3a) jsou univerzálním prostředkem ke kinematickým výpočtům všech planetových převodovek. Obecný postup pro stanovení převodu a energetických poměrů ukážeme dále na nejčastějším uspořádání převodovky 2K-U.

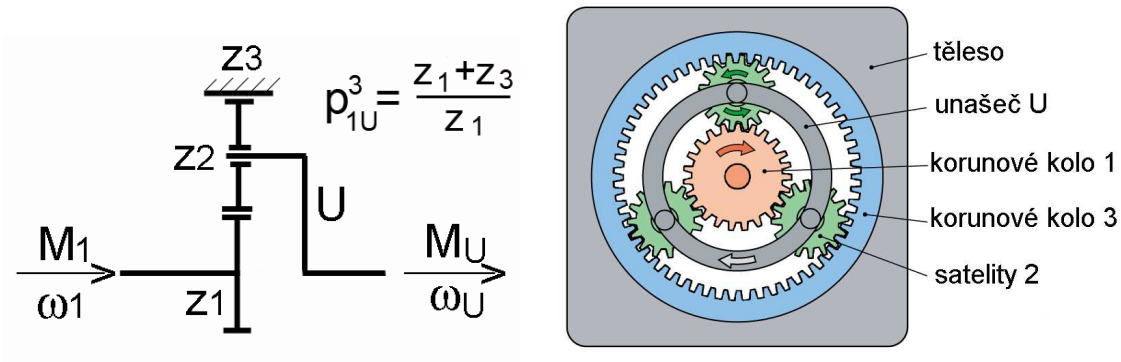
2.3 Převodovka 2K-U, jeden stupeň, tok výkonu (1 - U)[3]

(tj. z kola 1 na unašeč, kolo 3 stojí - viz **obr.1**, **obr.2**)

Kinematické schéma v **obr.2** vlevo je kresleno obvyklým způsobem jen s jedním satelitem. Satelity bývají nejméně tři, ale i pět a více.

Základní (vnitřní) převod zvolíme z kola 1 na kolo 3 (zpevněný unašeč U):

$$p_V = p_{13}^{U} = \left.\frac{\omega_1 - \omega_U}{\omega_3 - \omega_U}\right|_{\omega_U = 0} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1} < 0$$ (jeden vnější, jeden vnitřní záběr)



Obr.2 *Jednostupňová planetová převodovka 2K-U*

Účinnost základního převodu (odhad):

- účinnost jednoho vnějšího zubového záběru včetně ložisek $\eta_{Vext} = 0{,}97$
- účinnost jednoho vnitřního zubového záběru včetně ložisek $\eta_{Vin} = 0{,}98$

Dva zubové záběry (jeden vnější, jeden vnitřní):

$\eta_V = \eta_{Vext} \cdot \eta_{Vin} = 0{,}95$ bez ohledu na počet satelitů, neboť tok výkonu se přes ně rozvětvuje a ztráty se mezi jednotlivé paralelní větve rovnoměrně rozdělí.

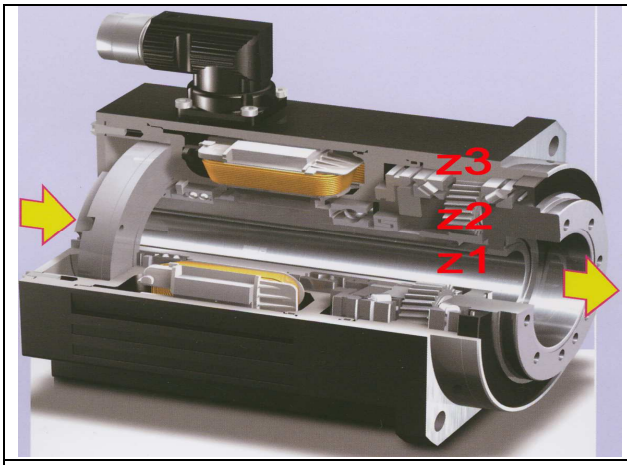
Planetový převod z kola 1 na unašeč U (zpevněné kolo 3):

$$p_{1U}^{3}=\left.\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_U-\omega_3}\right|_{\omega_3=0}=\frac{\omega_1}{\omega_U}=1-p_{13}^{U}=1+\frac{z_3}{z_1}=\frac{z_1+z_3}{z_1}>0 \qquad (4)$$

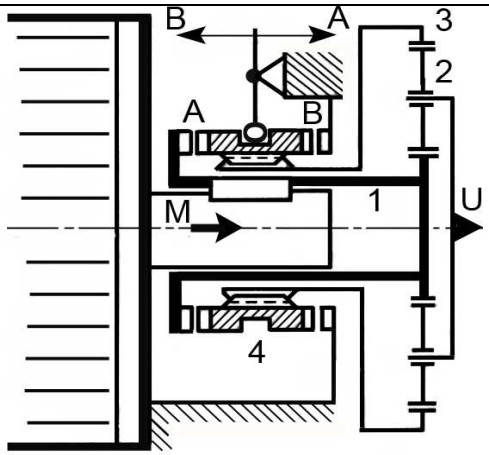
Základní převod je záporný ($p_{13}^{U}<0$, tedy také $p_{31}^{U}=1/p_{13}^{U}<0$), takže planetový převod zachovává smysl otáčení při libovolné kombinaci vstupu a výstupu, tj.

$$p_{1U}^{3}, p_{U1}^{3}, p_{3U}^{1}, p_{U3}^{1}>0$$

Převod p_{1U}^{3} je větší než jedna, tedy dopomala. Na **obr.3a** je zobrazena oblíbená koncepce tzv. **elektropřevodovky**, která sestává z rychloběžného synchronního elektromotoru a převodovky typu 2K-U, jejíž výstupní hřídel (unašeč) je uložen na dvojici kuželíkových ložisek. Konstrukčně je reálné dosáhnout maximální hodnotu $p_{1U\max}^{3}=5\div10$. Dutý hřídel umožňuje provléci pohybový šroub a na přírubu připevnit matici, čímž vznikne tzv. **elektromatice**.



Obr.3a *Elektropřevodovka 2K-U*



Obr.3b *Dvourychlostní pohon vřetena s řaditelnou převodovkou 2K-U*

Na **obr.3b** je schéma dvourychlostní převodovky (od motoru přímo nebo dopomala), oblíbené hlavně u pohonů vřeten obráběcích strojů. Je-li přesuvná zubová spojka v poloze **A**, korunové kolo 3 je zpevněno s hřídelem motoru a tím i s korunovým kolem 1, takže převodovka se otáčí jako celek vysokými otáčkami motoru bez relativního pohybu satelitů. V poloze **B** se korunové kolo 3 stává rámem a otáčky motoru jsou redukovány na unašeči U podle vztahu (4) a krouticí moment se zvětší.

Poznámka: *Při* $z_3 >> z_1$ *nemusí být základní převod* p_{13}^{U} *oproti planetovému až na znaménko příliš odlišný (* $p_{1U}^{3}=1+z_3/z_1=1-p_{13}^{U}$*), což umožňuje realizaci reverzační převodovky doplněním o přesuvnou spojku, která střídavě zpevňuje s rámem kolo 3 nebo unašeč U.*

Energetická bilance

Na rozdíl od obyčejných převodů, kde se poloha hřídelů a tím i poloha působišť obvodových sil v záběru zubů nemění, u převodů planetových obvodové síly obíhají často velkými rychlostmi a samy jsou též velké. Jejich příslušný výkon (součin rychlosti a síly) nazveme jako **„vnitřní výkon“**, který je navenek převodovky nevyužitelný a může být mnohonásobkem skutečného výkonu, odebíraného na výstupním hřídeli. Ukážeme později, že např. u převodovky z **obr.12a** s příkonem 300W bude využitelný odebíraný výkon asi 150W, ale uvnitř převodovky „obíhá“ výkon téměř 15kW!!

Při energetických výpočtech zavedeme obecnou úmluvu pro všechny typy převodů:

- příkon P je **kladný** (smysl momentu a úhlové rychlosti na hnacím hřídeli jsou shodné);
- výkon N je **záporný** (smysl momentu a úhlové rychlosti na hnaném hřídeli je opačný);
- ztrátový výkon (krátce ztráty) Z je **záporný**.

Zákon zachování energie (výkonu) je $P+N+Z=0$.
Účinnost jakéhokoliv stroje je poměr výkonu a příkonu. Protože je zvykem ji uvádět jako kladné číslo $(0<\eta<1)$, můžeme podle předchozí úmluvy použít tři možnosti podle toho, které z veličin P,N,Z máme k dispozici:

$$\eta=\frac{-N}{P}=\frac{P+Z}{P}=\frac{N}{N+Z} \tag{4a}$$

Ztráty je možno pomocí účinnosti získat dvěma způsoby (z příkonu nebo z výkonu):

$$Z=-P(1-\eta)=\frac{N(1-\eta)}{\eta} \tag{4b}$$

Uvolněním hřídele kola 3 od rámu a zavedením reakčního momentu M_3 vznikne tzv. **planetový diferenciál**, pro jehož **momentovou rovnováhu** platí:

$$M_1+M_U+M_3=0 \tag{4c}$$

Podle typu režimu převodovky je rámem zachycován moment M_U (základní režim) nebo M_3 (planetový režim). Po vynásobení obou stran rovnice (4c) úhlovou rychlostí unašeče vychází

$$M_1\omega_U+M_U\omega_U+M_3\omega_U=0 \tag{4d}$$

Obecná podmínka **výkonové rovnováhy** (zachování energie) na planetovém diferenciálu se třemi souosými hřídeli 1,U,3 je

$$M_1\omega_1+M_U\omega_U+M_3\omega_3+Z=0 \tag{5}$$

Odečtením (5) a (4d) se vyruší členy $M_U\omega_U$ a vychází

$$M_1(\omega_1-\omega_U)+M_3(\omega_3-\omega_U)+Z=0 \tag{6}$$

Vztah (6) vyjadřuje energetickou rovnováhu základního převodu se stojícím unašečem, kdy rámem je zachycen moment M_U. Dosazením $\omega_3=0$ do rovnice (5) vychází energetická rovnováha planetového převodu při stojícím kole 3, kdy je rámem zachycen moment M_3:

$$M_1\omega_1+M_U\omega_U+Z=0 \tag{7}$$

V (6) i (7) jsou stále stejné ztráty Z, takže můžeme vyslovit důležitý a obecně platný závěr:

- při zachování momentů na všech hřídelích jsou ztráty převodovky v základním i v planetovém režimu stejné.

U ztrát planetových převodovek nerozhoduje počet satelitů, neboť tok výkonu se rozvětvuje a ztráty se mezi jednotlivé větve (satelity) rovnoměrně rozdělí.

Poměrný potenciální výkon

Zatímco u planetového režimu je směr toku výkonu dán, tj. v naší převodovce $(1\rightarrow U)^3$, o směru toku výkonu v režimu základním zatím nejsme schopni rozhodnout. K tomu je třeba porovnat velikost výkonů (resp. příkonů) v obou režimech. Aby porovnání mělo smysl, **je třeba vybrat člen, který se v obou režimech pohybuje**, což je u naší převodovky člen 1.

Poměr výkonů v základním a planetovém režimu na daném členu je tzv. poměrný potenciální výkon μ.

Poměr výkonů pro člen 1 získáme z (6) a (7):

$$\mu_1=\frac{M_1(\omega_1-\omega_U)}{M_1\omega_1}=1-\frac{\omega_U}{\omega_1}=1-p_{U1}^3=1-\frac{1}{p_{1U}^3}=1-\frac{z_1}{z_1+z_3}=\frac{z_3}{z_1+z_3}>0$$

Protože $\mu_1 > 0$ a v planetovém režimu je jmenovatel $M_1\omega_1$ příkonem, musí být čitatel $M_1(\omega_1 - \omega_U)$ také příkonem, tj. tok výkonu se při zachování momentů přechodem ze základního na planetový režim nemění:

- planetový režim: směr toku výkonu je $(1 \to U)^3$, $P_{PL} = M_1\omega_1 > 0$ je příkon
- základní režim: směr toku výkonu je $(1 \to 3)^U$, $P_V = M_1(\omega_1 - \omega_U) > 0$ je příkon.

Pro ztráty je tedy nutno použít první tvar pro příkon z (4b):

- ztráty základního převodu, který má účinnost η_V, jsou

$$Z = -P_V(1-\eta_V) = -M_1(\omega_1 - \omega_U)(1-\eta_V)$$

To jsou ale též ztráty převodu planetového, jehož účinnost η_{PL} bude

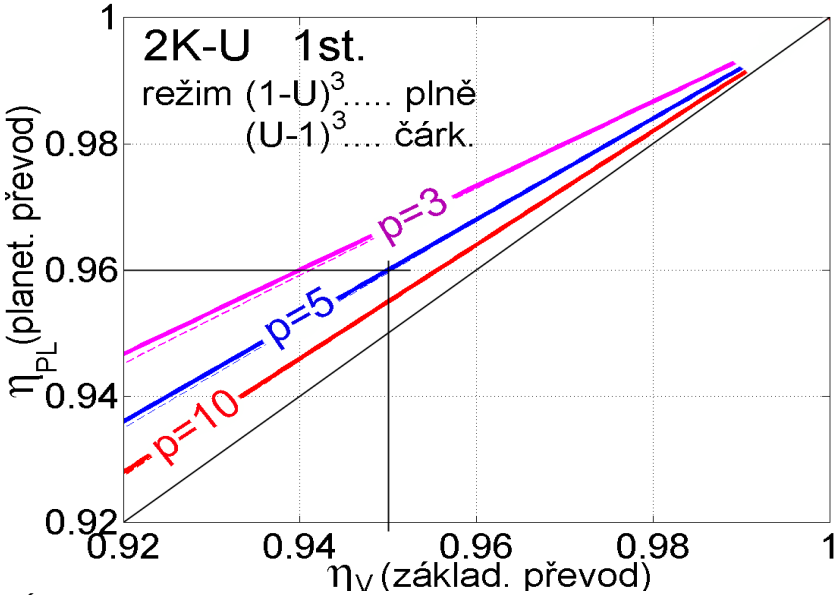
$$\eta_{PL} = \frac{P_{PL}+Z}{P_{PL}} = 1+\frac{Z}{P_{PL}} = 1-\frac{M_1(\omega_1-\omega_U)(1-\eta_V)}{M_1\omega_1} = 1-(1-p_{U1}^3)(1-\eta_V) = \eta_V + p_{U1}^3(1-\eta_V) > \eta_V \qquad (8)$$

Protože $p_{U1}^3 = \frac{z_1}{z_1+z_3} > 0$, druhý sčítanec vpravo v (8) je nutně kladný, takže

účinnost planetového převodu 2K-U v režimu $(1 \to U)^3$ je větší než u převodu základního.

Pro vybrané hodnoty $p_{1U}^3 = 3{,}5{,}10$ a různé hodnoty η_V je účinnost η_{PL} vynesena silnými čarami v **obr.4**. Např. pro $p_{1U}^3 = 5$, $\eta_V = 0{,}95$ vychází $\eta_{PL} = 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}96$.

Poznámka: *Poměrný potenciální výkon nemusí být vždy kladný, neboť záleží na typu převodovky. Např. u převodovky z **obr.12a** je poměrný potenciální výkon členu 5 záporný, takže je-li jmenovatel v planetovém režimu výkonem (člen 5 je výstupem), čitatel v základním režimu je příkonem (člen 5 se stal vstupem).*



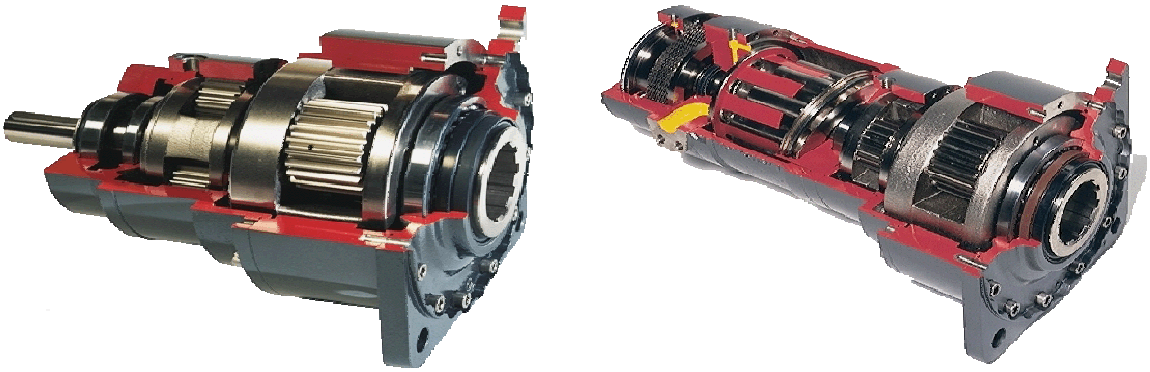
Obr.4 *Účinnost jednostupňové převodovky 2K-U v přímém režimu (plné čáry) a v reciprokém režimu (téměř splývající čárkované čáry).*

2.4 Účinnost dvoustupňového planetového převodu 2K-U

(tok výkonu (1 - U)^3 zachován)

Pro větší převody dopomala je možné seriové řazení dvou jednostupňových převodovek (viz **obr.5a,b**). Při použití předchozí hodnoty tedy bude $\eta_{PL} = \eta_{PL1} \cdot \eta_{PL2} = 0{,}96^2 = 0{,}92$. Průměrná hodnota účinnosti u převodovek různých výrobců v úvodní tabulce je $0{,}93 \div 0{,}96$, což je v dobré shodě s výše uvedenou metodikou výpočtu. Na **obr.5b** je

pohon s hřebenem a dvěma pastorky, z nichž každý je poháněn svým motorem přes dvojstupňovou převodovku. Vzájemným „elektrickým“ rozepřením pastorků je dosaženo vymezení vůle v ozubeních a tím jsou eliminovány rázy při reverzaci.



Obr.5a *Dvojstupňová převodovka 2K-U, vpravo varianta s hydromotorem*

Princip je zřejmý z **obr.5c**:

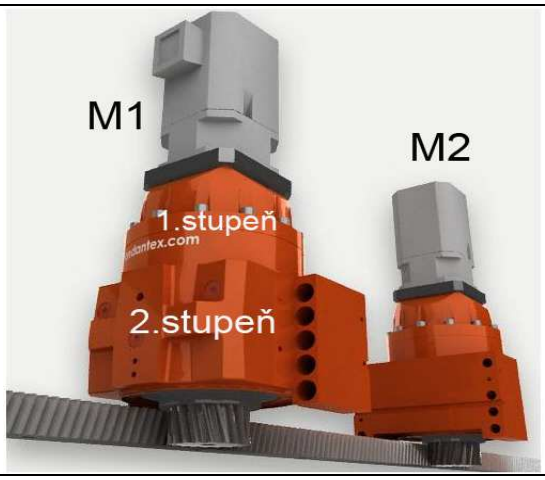
- krouticí momenty obou elektromotorů jsou úměrné proudům podle vztahů

$$M_1 = K_M (I + I_0),\ M_2 = K_M (I - I_0)$$

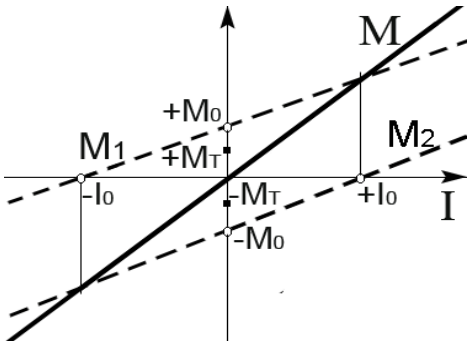
K_M .... momentová konstanta motorů
I .... proměnný řídicí proud
I_0 .... konstantní „předepínací“ proud.

Výsledný krouticí moment je $M = M_1 + M_2 = 2K_M I$

Konstantní hodnota proudu I_0 by měla být volena tak, aby vyvolala tzv. předepínací moment $M_0 = K_M I_0$, který by měl spolehlivě překonat tření v poháněném stroji, jehož vliv je vyjádřen momentem M_T.



Obr.5b *Zdvojený pohon s planetovými převodovkami a pastorky s hřebenem*



Obr.5c *Vymezení vůle v ozubení dvojicí předepnutých pastorků*

2.5 Typ 2K-U, tok výkonu (U-1)[3]

Tento tzv. **reciproký** (též **inverzní**) režim bývá používán méně často a tam, kde pohonný motor je pomaloběžný a je třeba jít směrem ke stroji dorychla. Příkladem je dvourychlostní pohon stolu karuselu prstencovým motorem na **obr.13** nebo pohon generátoru větrné elektrárny na **obr.16**, kde vrtule má velmi nízké otáčky okolo $15\,ot/\min$ a generátor vyžaduje otáčky synchronní (např. pro čtyřpólový stroj $1500\,ot/\min$). Reciproký režim může nastat nechtěně i v případě režimu $(1 \rightarrow U)^3$, když dojde k výpadku proudu a hnací elektromotor je přes převodovku roztáčen dorychla setrvačností stroje.

Základní (vnitřní) převod zvolíme tentokrát $p_V = p_{31}^U = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_3} < 0$ (mohli bychom ho ale ponechat jako v **kap.2.3**, neboť jeho účinnost je předpokládána stejná, tj. $\eta_V = 0{,}95$). Převod v planetovém režimu je nyní dorychla

$$p_{U1}^3 = \frac{\omega_U}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} < 1$$

Poměrný potenciální výkon počítáme opět na členu 1 a je stále stejný (kladný):

$$\mu_1 = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_U)}{M_1\omega_1} = \frac{z_3}{z_1 + z_3} > 0$$

Jmenovatel je u planetového převodu v režimu $(U \to 1)^3$ nyní výkonem ($N_{PL} = M_1\omega_1 < 0$), takže čitatel musí být u základního převodu také výkonem, tj. $N_V = M_1(\omega_1 - \omega_U) < 0$. Ztráty základního převodu nyní počítáme pomocí výkonu, tj. z druhého vztahu (4b):

$$Z = \frac{N_V(1-\eta_V)}{\eta_V} = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_U)(1-\eta_V)}{\eta_V}$$

Účinnost planetového převodu je

$$\eta_{PLinv} = \frac{N_{PL}}{N_{PL} + Z} = \frac{M_1\omega_1}{M_1\omega_1 + \frac{M_1(\omega_1 - \omega_U)(1-\eta_V)}{\eta_V}} = \frac{\eta_V}{\eta_V + (1 - p_{U1}^3)(1-\eta_V)} = \frac{\eta_V}{1 - p_{U1}^3(1-\eta_V)} \qquad (8a)$$

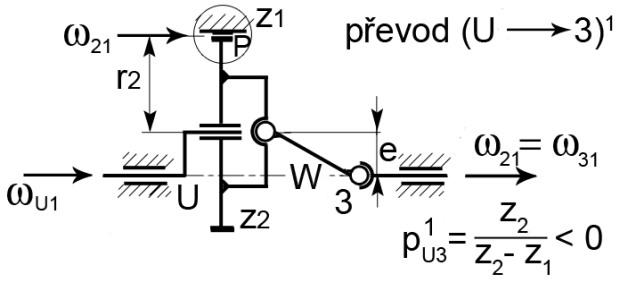
Jmenovatel v (8a) je menší než jedna, takže je $\eta_{PLinv} > \eta_V$.

Účinnost v reciprokém planetovém režimu $(U \to 1)^3$ je opět větší než u převodu základního. Průběhy jsou prakticky stejné jako u přímého režimu, viz čárkované čáry v **obr.4**. V **kap.B3** ukážeme, že nerovnost $\eta_{PL} > \eta_V$ platí i v režimech $(U \to 3)^1$ a $(3 \to U)^1$.

2.6 Převodovka 1K-U, tok výkonu $(U\text{-}3)^1$

(tj. z unašeče na hřídel 3, viz **obr.6**)

U těchto převodovek je minimalizován počet ozubených kol (viz **obr.6**) a jsou prostorově velmi úsporné. Počet satelitů může být samozřejmě větší než jedna a nejčastěji jsou instalovány dva po 180° na dvojitém excentru. Úhlovou rychlost ω_{21} kola 2 vůči rámu (kolu 1) a tedy i výstupní moment je třeba vyvést z pólu pohybu **P** do osy hřídele 3 vhodným spojovacím členem, který nesmí způsobit nerovnoměrnost chodu, aby stále přesně platilo $\omega_{21} = \omega_{31}$.



Obr.6 *Převodovka 1K-U ($\omega_{21} = \omega_{31}$)*

Řešením je např. kardanův hřídel s dvojicí správně orientovaných křížových kloubů; jiné možnosti budou zmíněny později. Ztráty v tomto spojovacím členu v dalších úvahách zanedbáme.

Poznámka: *Spojovací člen bývá někdy označován písmenem **W** a převodovky tohoto typu se označují též jako **1K-U-W**. V dalším výkladu se většinou přidržíme kratšího označení.*

Postup výpočtu budeme demonstrovat na konkrétním zadání v **příkladu 1**:

***Příklad 1*: Převodovka 1K-U-W**

Režim toku výkonu	$(U \to 2)^1$ *resp.* $(U \to 3)^1$
Výkon hnacího motoru (příkon převodovky)	$2000W$
Otáčky hnacího motoru	$2400 ot/\min$
Počet zubů korunového kola	$z_1 = 126$
Počet zubů satelitu	$z_2 = 123$
Účinnost základního převodu	$\eta_V = 0{,}99$

Vysoká hodnota účinnosti základního převodu η_V *je zdůvodnitelná blízkými počty zubů* z_1, z_2, *protože skluzy a tedy i třecí ztráty jsou u vnitřního zubového záběru minimální, viz též vztah (1). Ať zvolíme základní převod v režimu* $(1 \to 3)^U$ *nebo* $(3 \to 1)^U$ *, bude vždy kladný. Zvolme tedy*

$$p_V = p_{12}^U = p_{13}^U = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{z_2}{z_1} = 0{,}976$$

- *úhlová rychlost na vstupu převodovky* $\omega_U = \frac{2400 \cdot 2\pi}{60} = 251{,}33 \ rad/s$;
- *vstupní krouticí moment* $M_U = 2000 / 251{,}33 = 7{,}96 Nm$.

Planetový převod je $p_{U2}^1 = p_{U3}^1 = \frac{1}{p_{3U}^1} = \frac{1}{1 - p_{31}^U} = \frac{1}{1 - z_1/z_2} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} = \frac{123}{-3} = -41 < 0$ *(9)*

Převodovka obrací smysl rotace a při malém rozdílu v počtech zubů (malé excentricitě e*) je možno dosáhnout vysokých převodů dopomala. Teoretický minimální rozdíl je sice* $z_1 - z_2 = 1$, *u evolventního ozubení je ale technicky realizovatelná hodnota nejméně 2 (zde máme 3).*

Výstupní úhlová rychlost je $\omega_2 = \omega_3 = -\frac{251{,}33}{41} = -6{,}13 \ rad/s$.

Podmínka momentové rovnováhy na všech třech souosých hřídelích zní

$$M_1 + M_U + M_3 = 0 \quad \Big| \cdot \omega_U$$

$$M_1\omega_U + M_U\omega_U + M_3\omega_U = 0$$

$$M_1\omega_1 + M_U\omega_U + M_3\omega_3 + Z = 0 \quad \text{... výkonová rovnováha}$$

Obě poslední rovnice od sebe odečteme:

$$M_1(\omega_1 - \omega_U) + M_U(\omega_U - \omega_U) + M_3(\omega_3 - \omega_U) + Z = 0 \qquad \text{neboli}$$

$$M_1(\omega_1 - \omega_U) + M_3(\omega_3 - \omega_U) + Z = 0$$

Poměrný potenciální výkon počítáme na členu 3, který se pohybuje v obou režimech:

$$\mu_3 = \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)}{M_3\omega_3} = 1 - \frac{\omega_U}{\omega_3} = 1 - p_{U3}^1 = 1 - \frac{z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{126}{3} = 42 > 0$$

Směr toku výkonu u členu 3 se tedy přechodem ze základního na planetový režim nemění. Jmenovatel je u planetového převodu v režimu $(U \to 3)^1$ *výkonem (*$N_{PL} = M_3\omega_3 < 0$*), takže čitatel je u základního převodu v režimu* $(1 \to 3)^U$ *také výkonem, tj.* $N_V = M_3(\omega_3 - \omega_U) < 0$. *Ztráty základního převodu počítáme pomocí výkonu:*

$$Z = \frac{N_V(1 - \eta_V)}{\eta_V} = \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)(1 - \eta_V)}{\eta_V}$$

$$\eta_{PL} = \frac{N_{PL}}{N_{PL} + Z} = \frac{M_3\omega_3}{M_3\omega_3 + \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)(1 - \eta_V)}{\eta_V}} = \ldots\ldots = \frac{\eta_V}{1 - p_{U3}^1(1 - \eta_V)} \qquad (9a)$$

Při předpokládané hodnotě $\eta_V = 0{,}99$ *je tedy* $\eta_{PL} = \dfrac{0{,}99}{1+41\cdot 0{,}01} = 0{,}702$.

Na rozdíl od vztahu (8) u převodovky 2K-U je účinnost převodovky 1K-U výrazně menší než jedna, neboť převod p^1_{U3} *ve jmenovateli rovnice (9a) je velké záporné číslo. Situaci může zachránit vysoká účinnost základního převodu, kterou je možno dosáhnout kvalitním povrchem boků zubů (kalením a broušením), nebo cykloidním ozubením s otočnými pouzdry podle* ***obr.8b*** *vlevo. Např. pro extrémní hodnotu* $\eta_V = 0{,}995$ *by byla účinnost stále jen* $\eta_{PL} = 0{,}826$. *Je vidět, že i nepodstatné zvýšení účinnosti je draze vykoupeno konstrukční i výrobní náročností. Závislost účinnosti planetového převodu na účinnosti převodu základního pro vybrané hodnoty převodů* $p^1_{U3} = -20,-30,-41$ *ukazují plné čáry v* ***obr.7****, kde je též patrné, že se stoupající hodnotou převodu účinnost výrazně klesá. Výkon na výstupu planetové převodovky je* $N_{PL} = -\eta_{PL} P_{PL} = -0{,}702\cdot 2000 = -1404W$ *a výstupní krouticí moment*

$$M_3 = \frac{N_{PL}}{\omega_3} = \frac{-1404}{-6{,}13} = 229{,}1 \ Nm$$

Povšimněme si, že v planetovém režimu je výstupní moment kladný (stejně jako vstupní), neboť působí proti smyslu výstupní úhlové rychlosti, která je záporná.

Ztráty v převodovce jsou $Z = \dfrac{M_3(\omega_3 - \omega_U)(1-\eta_V)}{\eta_V} = \dfrac{229{,}1\cdot(-6{,}13-251{,}33)\cdot 0{,}01}{0{,}99} = -596 \ W$

a tvoří téměř 30% z příkonu hnacího motoru $2000W$. *Stále platí rovnost*

$$P + N + Z = 2000 - 1404 - 596 = 0$$

Z podmínky momentové rovnováhy vyplývá moment, zachycený rámem (tj. kolem 1):

$$M_1 = -M_U - M_3 = -7{,}96 - 229{,}1 = -237{,}06 Nm$$

Číselné hodnoty jsou shrnuty v následující tabulce:

	Planetový režim $(U \to 3)^1$	***Základní režim*** $(1 \to 3)^U$
převod	$p^1_{U3} = -41$	$p^U_{13} = 0{,}976$
účinnost	$\eta_{PL} = \eta^1_{U3} = 0{,}702$	$\eta_V = 0{,}99$, *činitel ztrát* $\xi = 0{,}01$
vstupní rychlost (rad/s)	$\omega_U = 251{,}33$	$\omega_1 - \omega_U = -251{,}33$
výstupní rychlost (rad/s)	$\omega_3 = \omega_U \,/\, p^1_{U3} = -6{,}13$	$\omega_3 - \omega_U = (\omega_1 - \omega_U)/\, p^U_{13} = -257{,}46$
vstupní moment (Nm)	$M_U = 7{,}96$	$M_1 = -237{,}06$
příkon P *(W)*	$P = M_U \omega_U = 2000$	$P = M_1(\omega_1 - \omega_U) = 59580$
výkon N *(W)*	$N = -P\cdot\eta_{PL} = -1404$	$N = -P\cdot\eta_V = -58984$
výstupní moment (Nm)	$M_3 = N/\omega_3 = 229{,}1$	$M_3 = N/(\omega_3 - \omega_U) = 229{,}1$
ztráty $Z = -P - N$ *(W)*	$Z = -596$	$Z = -596$

Poznámky: ***1)*** *V režimu základního převodu* $(1 \to 3)^U$ *je zpevněn unašeč a jsou zachovány momenty. Na uvolněném hnacím kole 1 bude úhlová rychlost* $-2400 ot/\min = -251{,}33 rad/s$ *a moment* $M_1 = -237{,}06 Nm$, *tedy příkon (zaokrouhleně) 59,6 kW!! Na výstupu zůstává moment* $M_3 = 229{,}1 Nm$ *a úhlová rychlost je* $-257{,}46 rad/s$, *tedy výkon asi -59 kW!!! I při vysoké účinnosti základního převodu (99%) činí ztráty cca -0,6 kW. Tato hodnota není u základního převodu podstatná, ale významně poškozuje energetickou bilanci převodu planetového.*

2) *Malou účinnost planetové převodovky je možno zjednodušeně vysvětlit přímo na* ***obr.6****, kde pro ilustraci zvolíme modul ozubení* $m = 1mm$, *takže bude* $r_2 = z_2 m/2 = 61{,}5mm$, *excentricita* $e = 1{,}5mm$, $r_1 = r_2 + e = 63mm$:

*- výstupní moment $M_3 = 229{,}1Nm$ je způsoben obvodovou silou, působící v pólu pohybu **P** na poloměru r_1. Její velikost je $M_3 / r_1 = 3637\,N$. Zatímco u standardních převodů s pevnými hřídeli se působiště sil (tj. póly při odvalování kol) nepohybují, u našeho planetového převodu obíhá působiště této velké síly velkou úhlovou rychlostí $\omega_U - \omega_3 = 257{,}46\,rad/s$ po obvodu kola 1, takže příslušný výkon je -59 kW, což je zároveň výkon převodu základního. Jde o fiktivní výkon, který se navenek nedá využít (tzv. **vnitřní** nebo též **potenciální** výkon). Je to čitatel ve vztahu pro poměrný potenciální výkon μ_3 a v našem případě je 42-krát vyšší, než skutečný využitelný výkon na výstupním hřídeli planetové převodovky $M_3\omega_3 = -1404W$.*

2.7 Typ 1K-U, tok výkonu (3-U)^1

Tento režim je u převodovek typu 1K-U většinou nežádoucí vzhledem k možné samosvornosti, jak ukážeme dále. **Poměrný potenciální výkon** členu 3 je stejný jako v **příkladu 1**:

$$\mu_3 = \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)}{M_3\omega_3} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} > 0$$

ale tentokrát vyšetřujeme režim $(3 \to U)^1$, neboli jmenovatel je nyní u planetového převodu příkonem ($M_3\omega_3 > 0$), takže čitatel musí být u základního převodu také příkonem, tj. $M_3(\omega_3 - \omega_U) > 0$. Ztráty základního převodu nyní počítáme pomocí příkonu:

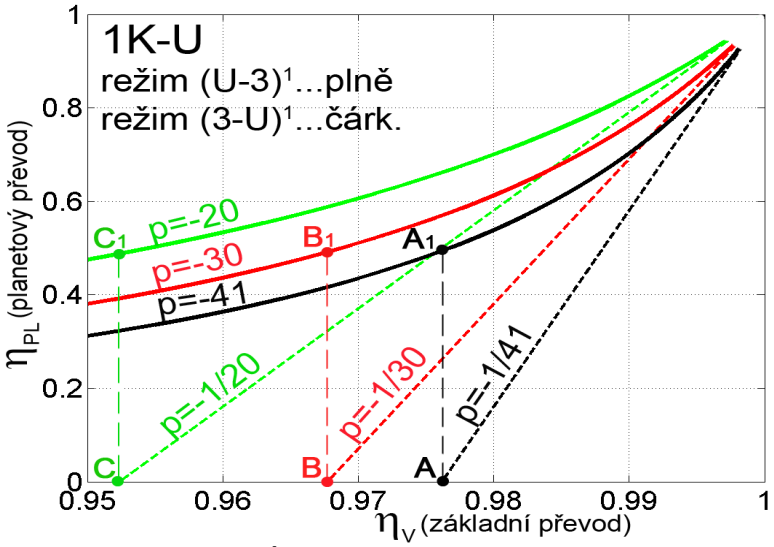
$$Z = -P(1-\eta_V) = -M_3(\omega_3 - \omega_U)(1-\eta_V)$$

Účinnost v planetovém režimu je

$$\eta_{PLinv} = \frac{prikon + ztráty}{prikon} = \frac{M_3\omega_3 - M_3(\omega_3 - \omega_U)(1-\eta_V)}{M_3\omega_3} = 1 - (1 - p_{U3}^1)(1-\eta_V) =$$

$$= p_{U3}^1 + (1 - p_{U3}^1)\eta_V = p_{U3}^1(1-\eta_V) + \eta_V \qquad (9b)$$

(viz čárkované čáry v **obr.7**).

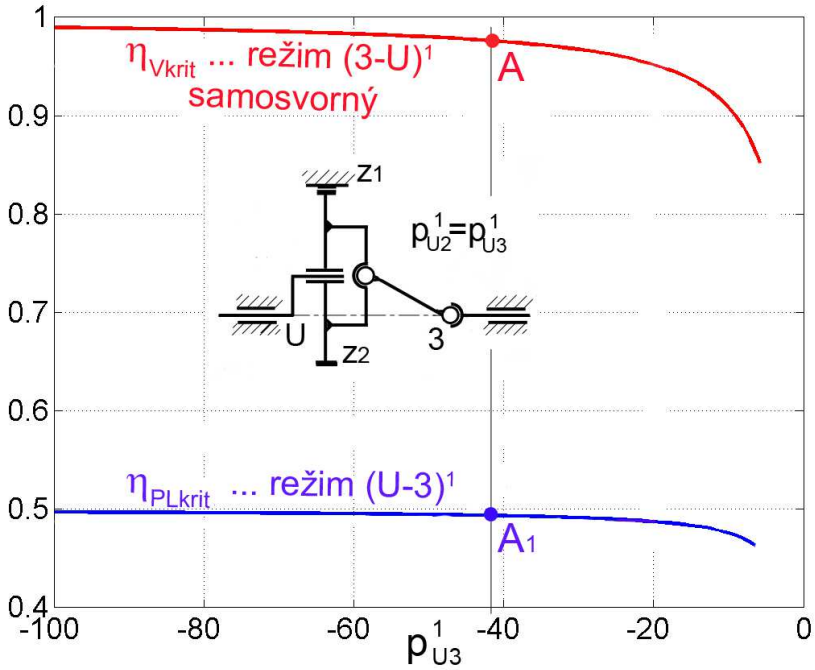


***Obr.7** Účinnost převodovky 1K-U*

U převodovek 1K-U hrozí v reciprokém režimu $(3 \to U)^1$ i při vysoké účinnosti základního převodu samosvornost, tj. $\eta_{PLinv} = 0$. Z (9b) snadno zjistíme, že příslušná účinnost základního převodu je $\eta_{Vkrit} = \frac{p_{U3}^1}{p_{U3}^1 - 1}$ (viz body **A**,**B**,**C** v **obr.7** a horní červená křivka

v **obr.7a**). Dosazením této hodnoty do vztahu (9a) vychází pro přímý režim $(U \to 3)^1$ účinnost $\eta_{PLkrit} = \dfrac{p_{U3}^1}{2\,p_{U3}^1 - 1}$ (body **A**$_1$,**B**$_1$,**C**$_1$ v **obr.7** a dolní modrá křivka v **obr.7a**).

Protože u těchto převodovek vždy platí, že $\left|p_{U3}^1\right| >> 1$, hranice samosvornosti v reciprokém režimu nastává asi při $\eta_{PLkrit} \approx 0{,}5$. Například pro převodovku z **příkladu 1** ($p_{U3}^1 = -41$) by nastala samosvornost v reciprokém režimu při $\eta_{Vkrit} = 0{,}976$ a příslušná účinnost v přímém režimu by byla $\eta_{PLkrit} = 0{,}494$. Vysoká účinnost základního převodu má tedy u převodovek 1K-U zásadní význam a je všeobecnou snahou nahrazovat u nich kluzné tření valivým, a to i v samotném ozubení, jak bude popsáno u převodovek typu Cyclo na **obr.8b** vpravo.



Obr.7a *Samosvornost převodovky 1K-U v reciprokém režimu*

Poznámka: *Do reciprokého režimu* $(3 \to U)^1$ *se může nechtěně dostat i převodovka z režimu* $(U \to 3)^1$ *při náhodném výpadku proudu u hnacího elektromotoru. V případě, že není tento stav bezpečně ošetřen (např. pojistnou spojkou), bude motor roztáčen přes převodovku setrvačností dobíhajícího stroje a v případě samosvornosti převodovky může dojít k jejímu poškození.*

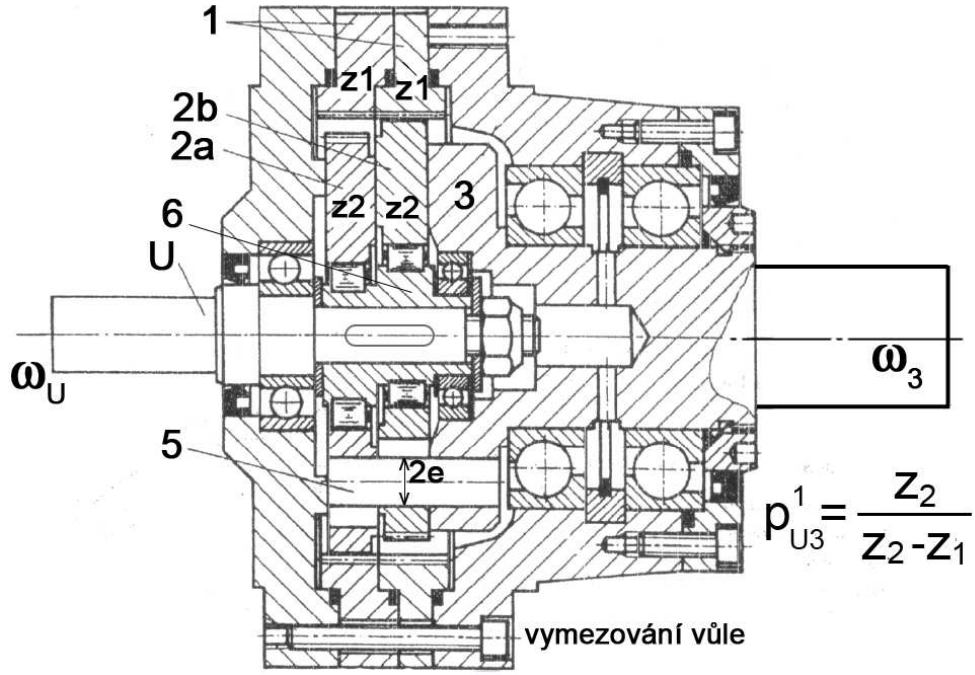
2.8 Vyvedení momentu z převodovek typu 1K-U (člen W)

V této kapitole stručně zmíníme několik variant převodovek, které jsou všechny odvozeny od základního uspořádání 1K-U. Hlavním konstrukčním problémem je vyvedení rotace satelitu 2 do společné osy unašeče a korunového kola 1 bez kinematické úhlové chyby.

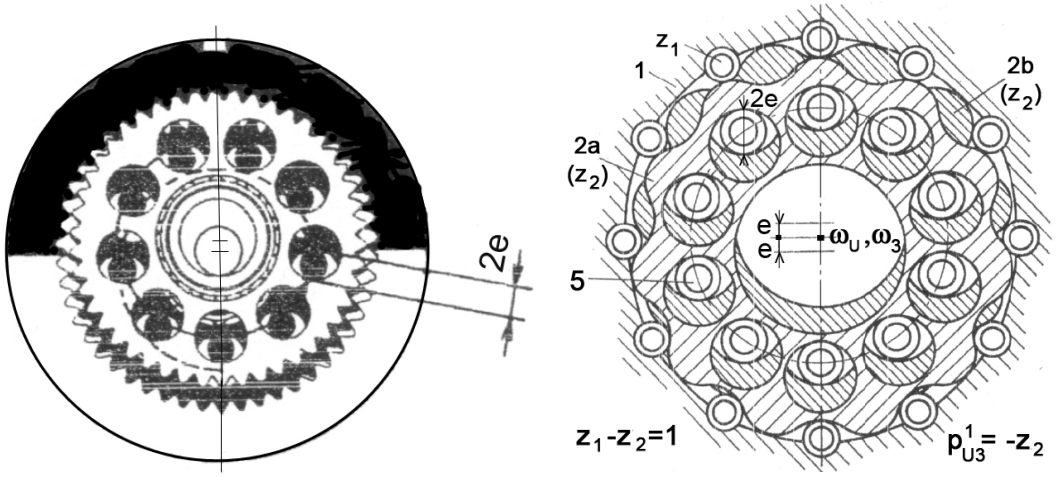
Na **obr.6** je schématicky naznačen **kardanův hřídel se dvěma křížovými klouby**. U aplikací, nenáročných na rovnoměrnost chodu (např. u starších kuchyňských robotů), může být použit ohebný hřídel.

Princip s **čelní čepovou spojkou je** znázorněn na **obr.8a**. Jsou použity dva shodné satelity 2a,2b, uložené na dvojexcentru 6 po 180^0, které zabírají v protilehlých místech do společného korunového kola 1. Uspořádání je středově souměrné, takže odstředivé síly se navzájem ruší a při plochém tvaru satelitů nehrají roli ani deviační momenty. Krouticí moment je vyveden na výstupní hřídel 3 pomocí čepů 5, upevněných v přírubě výstupního

hřídele. Čelní pohled na satelity je na **obr.8b** (vlevo s evolventním, vpravo s cykloidním ozubením). Čepy s průměrem $2e$ zabírají do kruhových otvorů satelitů, které ve vzájemném překrytí vytvářejí průchozí vejčité otvory, mající při otáčení převodovky stálý rozměr rovněž $2e$, takže je zaručen záběr všech čepů.



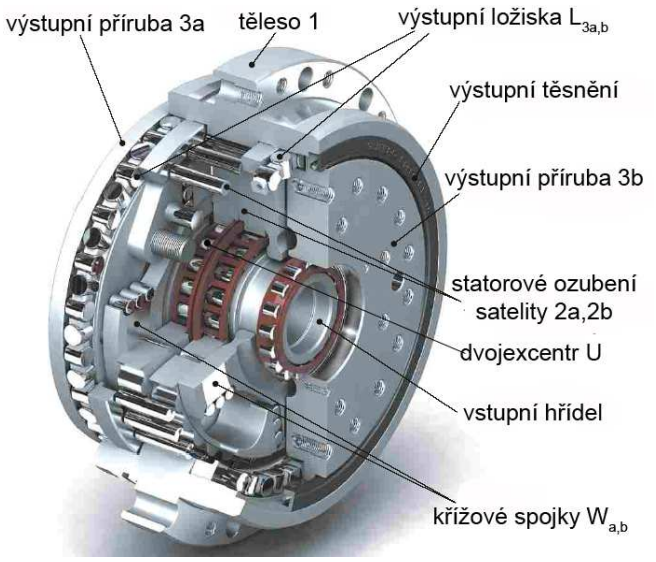
Obr.8a *Převodovka 1K-U s čepovou spojkou*



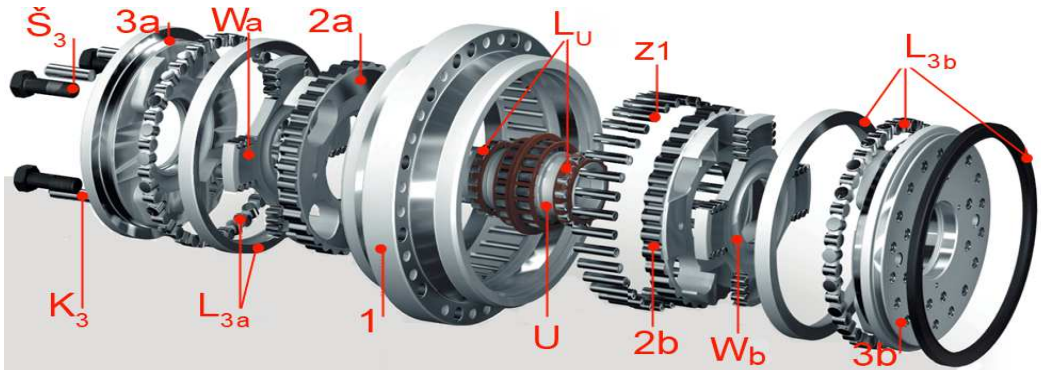
Obr.8b *Čelní pohled na průnik otvorů satelitů (vlevo evolventní, vpravo cykloidní ozubení)*

Rozklad sil ve styčných plochách otvorů a čepů napovídá, že největší část krouticího momentu přenášejí čepy v oblasti, natočené od místa zubových záběrů o 90^0 (v obrázku okolo vodorovné osy souměrnosti). Všechny tři možné vůle (zubové záběry obou satelitů a styk čepů s vejčitými otvory) je možno vymezit najednou tím, že společné statorové korunové kolo 1 je rozděleno a obě jeho části se vůči sobě nepatrně natočí. U převodovek 1K-U-W tohoto typu s **cykloidním ozubením** podle **obr.8b** vpravo je možný minimální rozdíl počtů zubů $z_1 - z_2 = 1$, tedy $p^1_{U3} = -z_2$. V obrázku platí $p^1_{U3} = -11$, ale u skutečných provedení může být převod větší (-50 až -100). Zuby statorového kola bývají tvořeny ložiskovými válečky nebo jehlami a satelity mají tvar obvodové vačky. Při vzájemném odvalu jsou stále v kontaktu všechny zuby statoru i satelitů, takže převodovka je velmi únosná a odolná vůči rázům. Je možné i vybavení statorových zubů z_1 a čepů 5 výstupního hřídele otočnými pouzdry, čímž se sníží třecí ztráty.

Konstrukčně zajímavá převodovka typu 1K-U-W (firemní název **TwinSpin**, slovenská firma Spinea) je zobrazena ve složeném stavu na **obr.9a**, v rozloženém na **obr.9b**. Má opět dva satelity 2a,b s cykloidním ozubením, valivě uložené na dvojexcentru U jako v **obr.8a** nebo **obr.8b**. Statorovými zuby z_1 jsou ložiskové jehly a každý satelit má svůj člen W ve tvaru kříže **valivé Oldhamovy spojky**. Výstupním členem jsou dvě navzájem pevně spojené příruby 3a,3b, uložené na válečkových ložiskách se zkříženými válečky $L_{3a,b}$. Obě příruby jsou přesně skolíkovány a sešroubovány lícovanými šrouby $Š_3$, které volně procházejí otvory v satelitech a křížových členech $W_{a,b}$. Kříže valivých Oldhamových spojek zabírají přes vložené válečky vždy jedním ramenem do vybrání v satelitech, druhým kolmým ramenem do vybrání ve výstupních přírubách 3a,3b.



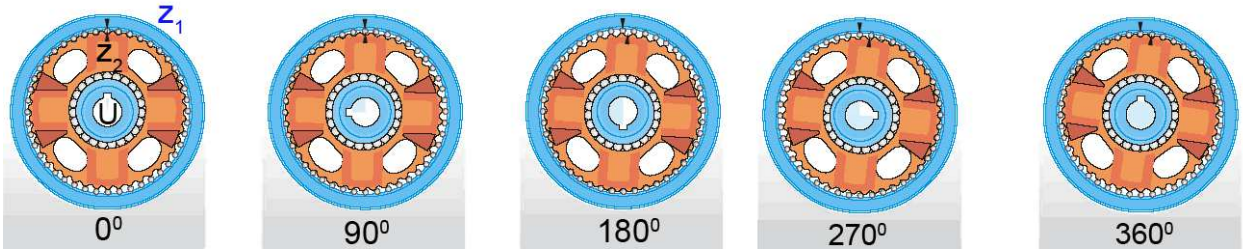
Obr.9a *Převodovka TwinSpin (fy. Spinea)*



Obr.9b *Rozložená převodovka TwinSpin*

Převodovka je velmi kompaktní s malými axiálními rozměry a má malé třecí ztráty díky valivému uložení křížů $W_{a,b}$. Výstupní válečková ložiska $L_{3a,b}$ jsou schopna přenášet velké axiální i radiální síly a klopné momenty, takže převodovka může zároveň nahradit rotační uložení např. u kloubů manipulátorů a průmyslových robotů. Na **obr.10** jsou zachyceny fáze pohybu u cykloidních převodovek, kde je většinou $z_1 - z_2 = 1$, tj. $p^1_{U3} = -z_2$.

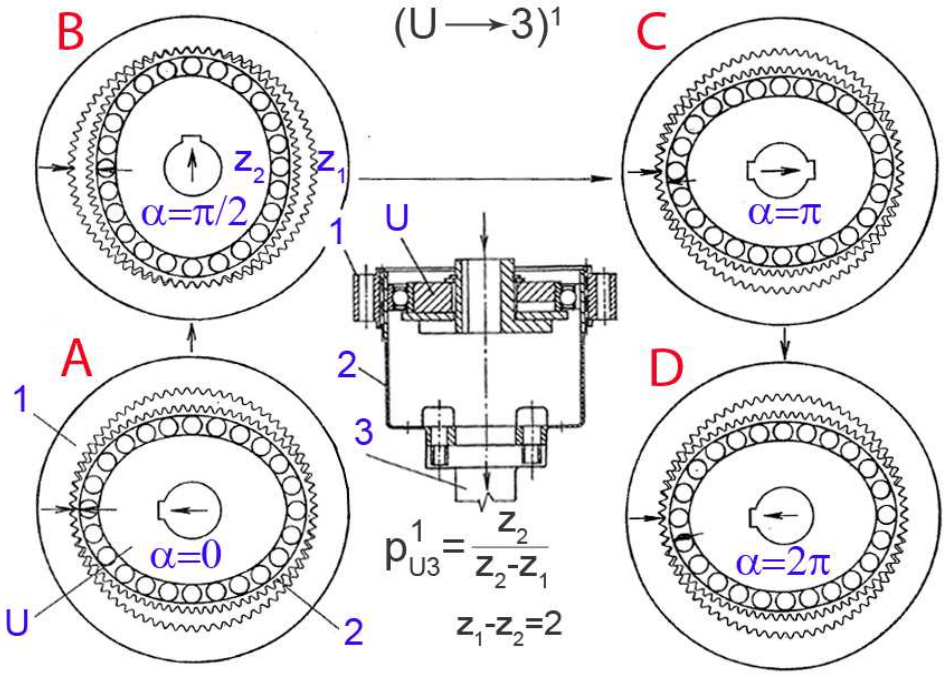
Přírubová konstrukce např. u typu TwinSpin umožňuje využít jako rám také přírubu 3, takže převod bude $p^3_{U1} = 1 - p^1_{U3} = 1 + z_2 = z_1$. Ve výjimečných případech se cykloidní převodovky používají i v reciprokém režimu p^1_{3U} nebo p^3_{1U} (tedy dorychla), ale s handicapem menší účinnosti nebo dokonce s rizikem samosvornosti, jak bylo zmíněno v předchozí kapitole.



Obr.10 *Fáze pohybu cykloidní převodovky*

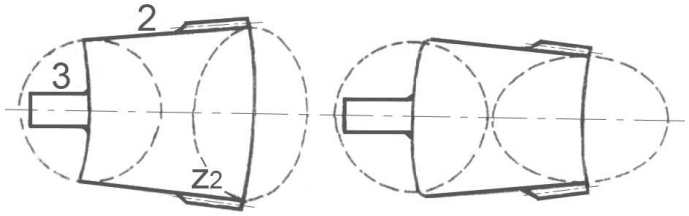
2.9 Harmonické („vlnové“) převodovky

Podle kinematického principu lze harmonické převodovky zařadit do skupiny 1K-U se dvěma protilehlými satelity. Princip a jednotlivé fáze pohybu ukazuje **obr.11a**. Funkci satelitů na dvojexcentru přejímá pružný oválný ozubený věnec 2 se dvěma protilehlými záběry do vnitřního ozubení kruhového statoru 1. Vstupní hřídel U roztáčí tzv. „generátor vln“, který je tvořen eliptickým valivým ložiskem, rozpínajícím plášť pružného členu 2 s vnějším jemným ozubením. Natáčením generátoru vln se přesouvá oblast zubového záběru členu 2 a statoru 1 a v důsledku diference počtů zubů $z_1 - z_2$ (nejčastěji pouhé 2 zuby) dojde za jednu otáčku generátoru ke vzájemnému natočení o tuto diferenci. Výstupní koaxiální hřídel 3 je spojen s kruhovým dnem členu 2 přírubou a deformace mezi dnem a oválným obvodem v místě ozubení se vyrovnává ve volné a poměrně dlouhé deformační zóně, která zvětšuje délku převodovky (viz též **obr.11b**). Pro převod platí opět vztah $p_{U3}^{1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}$ s tím, že nejčastěji bývá $z_1 - z_2 = 2$. V obrázcích je kresleno ozubení zjednodušeně přímo do vnějšího kroužku eliptického ložiska. Uspořádání je opět středově souměrné s výhodou velkého počtu zubů v záběru a tím velké únosnosti, i když modul ozubení je malý.



Obr.11a *Harmonická převodovka, fáze pohybu* ***A,B,C,D***

Stěna členu 2 by měla být tenká kvůli snížení cyklických změn napětí při přechodu z kruhového na oválný tvar, na druhé straně však nesmí snížit torzní tuhost a únosnost převodovky. Při malé diferenci počtů zubů jsou vzájemné pohyby jejich boků při odvalu a tím i třecí ztráty malé, ale navíc přistupují i malé axiální pohyby a třecí síly při vyrovnávání oválného na kruhový tvar.

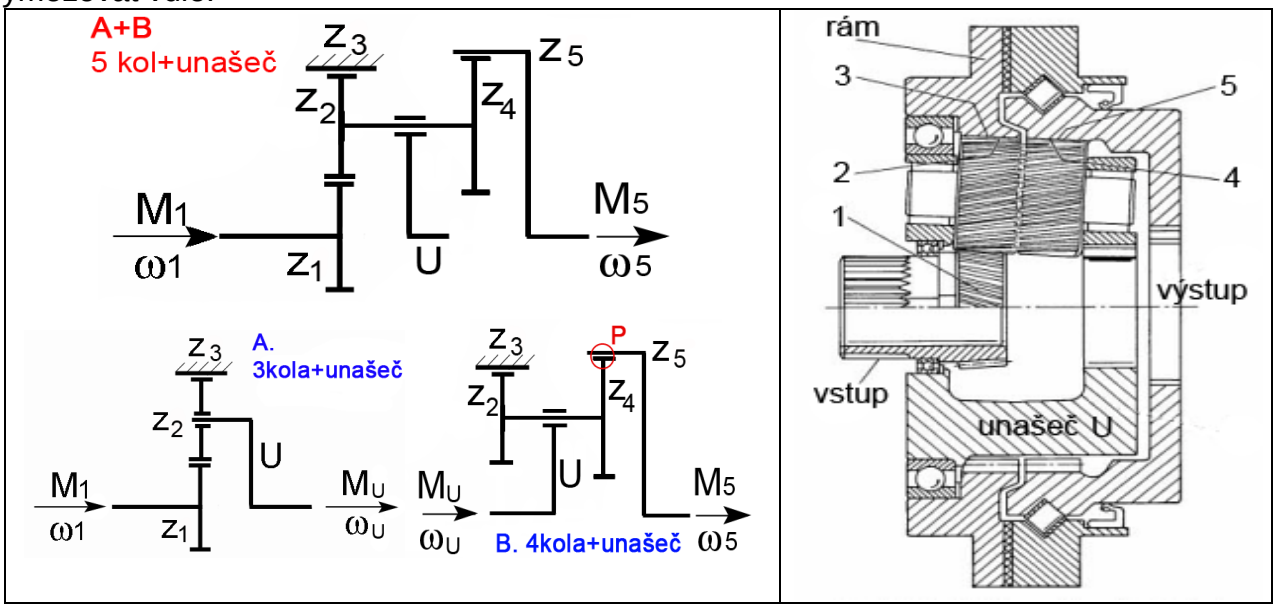


Obr.11b *Deformace pružného členu 2 (přehnaně)*

2.10 Speciální vícestupňové převodovky

V předchozích kapitolách jsme ukázali, že nejlepší energetické poměry vykazuje převodovka typu 2K-U podle **obr.1**, a to dokonce i v reciprokém režimu dorychla. Její dosažitelný převod je ale omezen konstrukčně přijatelnými rozměry na hodnoty $p^3_{1U\max} = 5 \div 10$, takže pro realizaci větších hodnot je třeba použít dvojstupňové uspořádání (**obr.5a,b**), u kterého narůstá stavební délka. Dvojstupňová převodovka s vysokým převodem dopomala ve velmi kompaktním prostorově úsporném uspořádání je na **obr.12** (firemní název „**WOLFROM**“, fy. **+ZF+**). Pro svůj plochý tvar je v kombinaci s rychloběžným motorem vhodná zvláště k zabudování do kloubů robotů. Podle **obr.12** vlevo dole vznikne seriovým spojením typu 2K-U z **obr.2** (kola $z_1 \div z_3$) a další převodovky 2K-U s dvojsatelitem z_2, z_4 a korunovými koly z_3, z_5.

Na schématickém řezu převodovkou je vidět, že satelity i korunová kola nejsou přesně čelní, ale mírně kuželové a osy satelitů jsou šikmé, takže axiálními přísuvy je možno vymezovat vůle.



Obr.12 *Dvojstupňová převodovka WOLFROM (+ZF+)*
*(**P**….pól pohybu kola 4 vůči 5)*

Sloučením obou dílčích převodovek vznikne společný unašeč, kola z_2, z_3 je možno u jedné z nich ušetřit a převodovka bude mít

- vstup ….. korunové kolo 1 (vnější ozubení);
- výstup ….. korunové kolo 5 (vnitřní ozubení);
- těleso (rám) …. korunové kolo 3 (vnitřní ozubení);
- satelity 2,4 navzájem pevně spojeny;
- unašeč U se volně točí uvnitř převodovky.

A. První stupeň (viz též **obr.2**): základní převod $(1 \to 3)^U$, $p^U_{13} = -z_3/z_1$

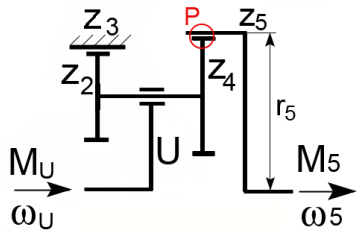
- planetový převod $(1 \to U)^3$: $p^3_{1U} = 1 - p^U_{13} = 1 + z_3/z_1$

B. Druhý stupeň (tzv. „**diferenční převodovka**“, varianta **B** v **obr.12**, nebo **obr.12a**):

- základní převod $(3 \to 5)^U$, $p^U_{35} = \frac{z_5}{z_4} \cdot \frac{z_2}{z_3}$

- planetový převod $(U \to 5)^3$: $p^3_{U5} = \frac{1}{p^3_{5U}} = \frac{1}{1 - p^U_{53}} = \frac{1}{1 - z_3 z_4 / z_2 z_5} = \frac{z_2 z_5}{z_2 z_5 - z_3 z_4}$ (9c)

Vztah (9c) poskytuje široké možnosti změny převodu při malé diferenci počtů zubů, tedy bez výrazné změny rozměrů kol (odtud název „diferenční“). Připustíme-li např. počty zubů korunových kol z_3, z_5 v intervalu $98 \div 101$ a u satelitů z_2, z_4 v intervalu $85 \div 88$, dosáhneme škálu převodů p^3_{U5} od -661 do $+662$. Přitom je možno pomocí korekce na osovou vzdálenost realizovat i takové kombinace, kde je (při stejném modulu) $z_3 - z_2 \neq z_5 - z_4$.



Obr.12a *Diferenční planetová převodovka*

C. Celkový převod typu WOLFROM v **obr.12** je $p^3_{15} = p^3_{1U} \cdot p^3_{U5} = \frac{z_1 + z_3}{z_1} \cdot \frac{z_2 z_5}{z_2 z_5 - z_3 z_4}$.

<u>Příklad 2</u>: Diferenční planetová převodovka 2K-U (obr.12a) v režimu $(U \to 5)^3$*:*
$z_3 = 99,\ z_5 = 100,\ z_2 = z_4 = 87$, *modul* $m = 1mm$. *Protože je* $z_3 - z_2 = 12 \neq z_5 - z_4 = 13$, *musí být provedena korekce na stejnou osovou vzdálenost.*
Pohonný motor: $\omega_U = 300 rad/s,\ M_U = 1Nm$. *Příkon v planetovém režimu je* $M_U \omega_U = 300W$.

Základní převod zvolíme v režimu $(3 \to 5)^U$*:* $p^U_{35} = \frac{z_5}{z_4} \cdot \frac{z_2}{z_3} = 1{,}01$

Jeho účinnost předpokládáme (bez ohledu na směr toku výkonu, který zatím neznáme) $\eta_V = \eta^U_{53} = \eta^U_{35} = 0{,}99$ *(činitel ztrát* $\xi = 0{,}01$*). Tato relativně vysoká hodnota je zdůvodněna blízkými průměry spoluzabírajících kol, takže odvaly se dějí s minimálními skluzy.*

Planetový převod je $p^3_{U5} = \frac{z_2 z_5}{z_2 z_5 - z_3 z_4} = \frac{z_5}{z_5 - z_3} = 100$ *takže* $\omega_5 = 3 rad/s$.

Poměrný potenciální výkon členu 5 je $\mu_5 = \frac{M_5(\omega_5 - \omega_U)}{M_5 \omega_5} = 1 - p^3_{U5} = -99 < 0$, *takže při přechodu z planetového na základní režim se obrací tok výkonu a člen 5 je v základním režimu vstupem. Příkon na něm je* $M_5(\omega_5 - \omega_U) > 0$. *Ztráty tedy počítáme z příkonu základního převodu:*

$$Z = -P(1 - \eta_V) = -M_5(\omega_5 - \omega_U)(1 - \eta_V) \qquad (9d)$$

Účinnost planetového převodu (člen 5 je výstupní):

$$\eta^3_{U5} = \frac{N}{N + Z} = \frac{M_5 \omega_5}{M_5 \omega_5 - M_5(\omega_5 - \omega_U)(1 - \eta_V)} = \frac{\omega_5}{\omega_5 - (\omega_5 - \omega_U)(1 - \eta_V)} = \frac{3}{3 - (3 - 300)0{,}01} = 0{,}5025$$

Výkon je $N = -300 \cdot 0{,}5025 = -150{,}75W$ *a výstupní moment* $M_5 = N/\omega_5 = -50{,}25Nm$. *Ztráty podle (9d) jsou* $Z = -50{,}25 \cdot 297 \cdot 0{,}01 = -149{,}24W$.
Číselné hodnoty jsou shrnuty v následující tabulce:

	Planetový režim $(U \to 5)^3$	***Základní režim*** $(3 \to 5)^U$
převod	$p^3_{U5} = 100$	$p^U_{35} = 1{,}01$
účinnost	$\eta^3_{U5} = 0{,}5025$	$\eta_V = 0{,}99$, *činitel ztrát* $\xi = 0{,}01$
vstupní rychlost (rad/s)	$\omega_U = 300$	$\omega_5 - \omega_U = -297$
výstupní rychlost (rad/s)	$\omega_5 = \omega_U / p^3_{U5} = 3$	$\omega_3 - \omega_U = (\omega_5 - \omega_U) p^U_{35} = -300$

vstupní moment (Nm)	$M_U = 1$	$M_5 = -50{,}25$
příkon P (W)	$P = M_U \omega_U = 300$	$P = M_5(\omega_5 - \omega_U) = 14924{,}25$
výkon N (W)	$N = -P \cdot \eta_{U5}^3 = -150{,}75$	$N = -P \cdot \eta_V = -14775$
výstupní moment (Nm)	$M_5 = N/\omega_5 = -50{,}25$	$M_3 = N/(\omega_3 - \omega_U) = 49{,}25$
ztráty $Z = -P - N$ (W)	$Z = -149{,}25$	$Z = -149{,}25$

***Poznámky*: 1)** *Jak bylo řečeno dříve, momenty v základním i planetovém režimu jsou shodné. V základním režimu je rámem zachycen moment $M_U = 1Nm$, v planetovém režimu je rámem zachycen moment $M_3 = 49{,}25Nm$. V obou režimech platí momentová rovnováha:*

$M_3 + M_U + M_5 = 49{,}25 + 1 - 50{,}25 = 0$.

2) *Podobně jako u převodovky na* ***obr.6*** *(**příklad 1**) vysvětlíme pojem **vnitřní** nebo též **potenciální** výkon:*

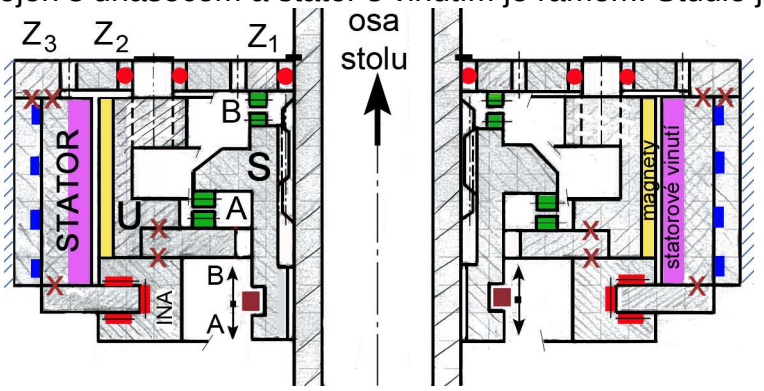
*- výstupní moment planetové převodovky $M_5 = -50{,}25Nm$ je způsoben obvodovou silou $F = M_5/r_5$, působící v pólu pohybu P na poloměru r_5. U standardních převodů s pevnými hřídeli se póly pohybu (působiště sil) nepohybují, ale u našeho planetového převodu obíhá bod **P** po obvodě kola 5 úhlovou rychlostí $\omega_5 - \omega_U$, takže výkon obíhající síly F je $M_5(\omega_5 - \omega_U) = 14924{,}25\ W$ a je číselně roven příkonu převodu základního. Nevyužitelný fiktivní výkon (potenciální výkon členu 5) je v našem případě téměř 100-krát vyšší, než skutečný reálně využitelný výkon na výstupním hřídeli $M_5\omega_5 = -150{,}75\ W$. I když je ozubení i uložení kol vyrobeno kvalitně (činitel ztrát je velmi malý, zde $\xi = 0{,}01$), i jedno procento z hodnoty téměř $15kW$ představuje významnou velikost ztrát, které počítáme podle (9d), tedy z fiktivní hodnoty, dané součinem výstupního velkého momentu a velké úhlové rychlosti, která je téměř rovna rychlosti vstupní.*

B3. Příklady uplatnění planetových převodovek

Svými výhodami jsou planetové převodovky předurčeny k použití v mnoha oblastech strojírenství, nejen u výrobních strojů a robotů, jak bylo ukázáno na **obr.3b,5b**.

Rychloběžná osa C s prstencovým motorem

Díky vysoké účinnosti převodovek 2K-U i v reciprokém režimu je možno realizovat dvourychlostní otočný stůl obráběcího stroje pomocí vysokomomentového prstencového motoru, tentokrát ale od motoru přímo nebo dorychla. Prstencový motor má rotor s magnety pevně spojen s unašečem a stator s vinutím je rámem. Studie je na **obr.13**:



Obr.13 *Dvourychlostní otočný stůl s prstencovým motorem*

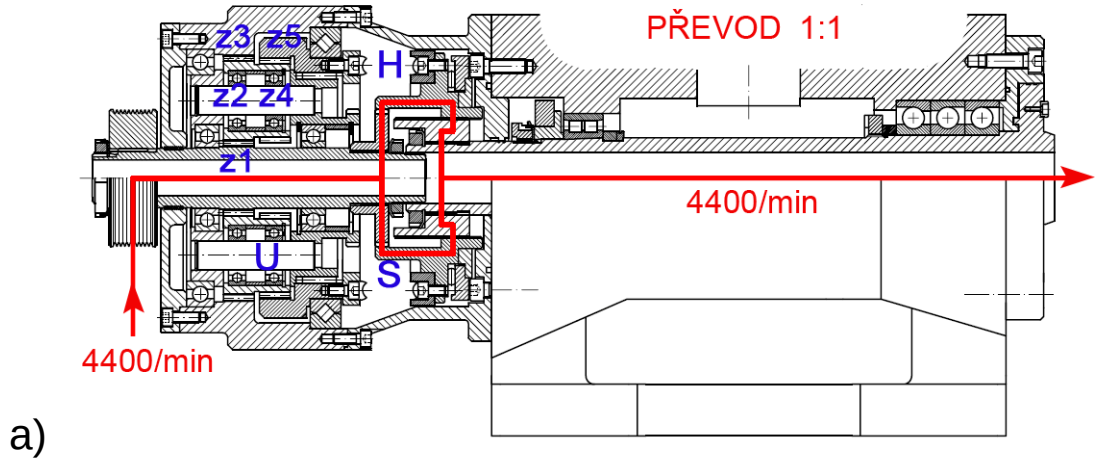
- přímý náhon na vřeteno – čelní zubová spojka **S** je v poloze **A**;

- pohon dorychla $(U \to 1)^3$ - spojka **S** je v poloze **B**: $p_{U1}^3 = \dfrac{z_1}{z_1 + z_3} < 1$ …. viz **kap.2.5**.

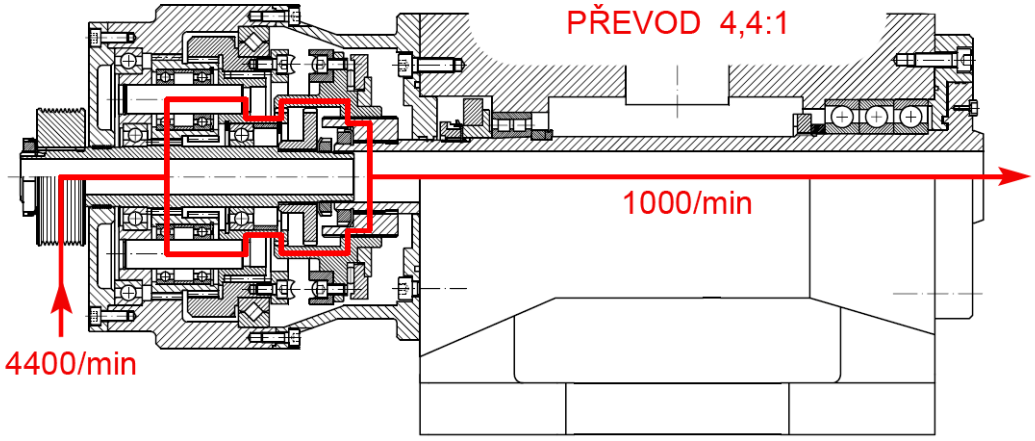
Třírychlostní pohon vřetena soustruhu

Konstrukční studie je na **obr.13a,b,c**. Převodovka typu WOLFROM s přesuvnou spojkou **S** je umístěna souose s vřetenem soustruhu. Číslování ozubených kol souhlasí s **obr.12**. Jsou vyznačeny toky výkonu pro všechny tři polohy spojky:

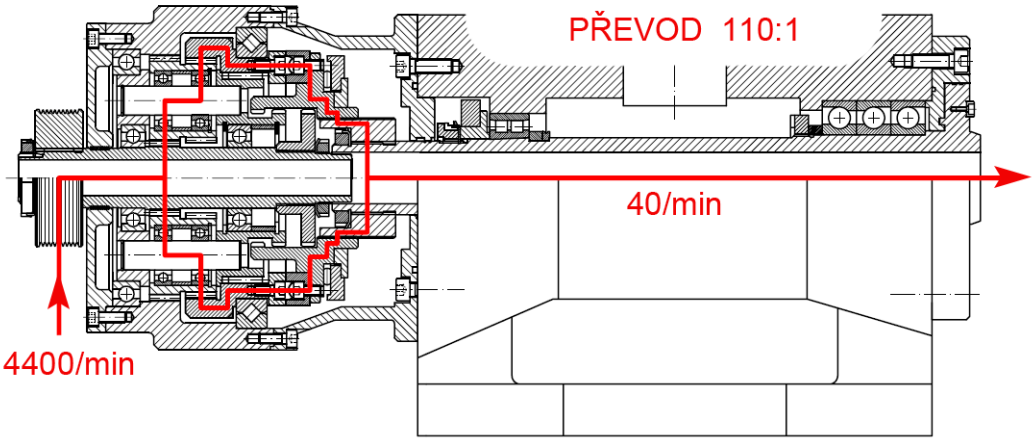
- v poloze zcela vpravo (**obr.13a**) je vřeteno spojeno přímo s hnací řemenicí na vstupním hřídeli převodovky a převod je 1:1 (rychloběžný režim);
- v prostřední poloze spojky (**obr.13b**) je s vřetenem spojen unašeč **U** a převod je $p_{1U}^{3} = 1 + z_3 / z_1$ (střední otáčky);



a)



b)



c)

Obr.13a,b,c *Třírychlostní pohon vřetena soustruhu*

- v poloze spojky zcela vlevo se přes čelní bezvůlovou Hirthovu spojku **H** spojí s vřetenem korunové kolo 5 a výsledný převod je výrazně dopomala $p_{15}^{3} = \frac{z_1 + z_3}{z_1} \cdot \frac{z_2 z_5}{z_2 z_5 - z_3 z_4}$.

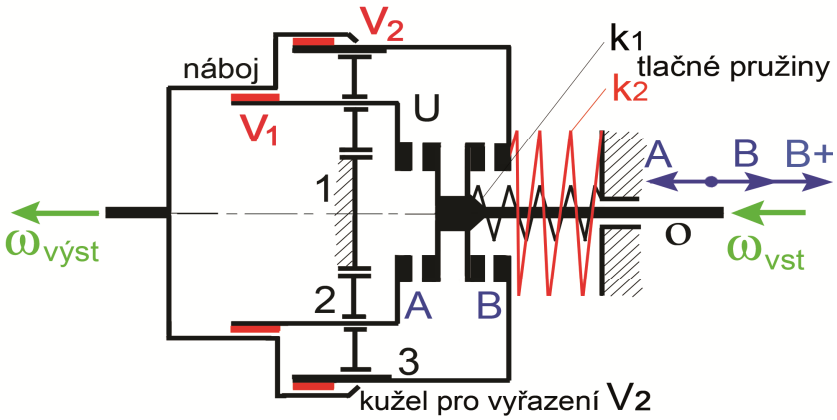
V obrázcích není prokreslen pákový řadicí mechanismus.

Jízdní kolo

Lidská pohodlnost je hlavním hnacím motivem technického vývoje tam, kde je člověk odkázán jen na svoji hnací sílu. To mj. potvrzují nejstarší výrobci valivých ložisek (např. FAG), podle kterých byl vývoj v této oblasti nejvíce urychlen rozšířením velocipedu. Svojí dobrou účinností se zde prosadily i řaditelné planetové převodovky v kombinaci se spojkami a volnoběhy, integrované do náboje zadního kola.

Třístupňová planetová převodovka 2K-U (Fichtel & Sachs)

U tohoto nejjednoduššího provedení je znehybněno korunové kolo 1 (viz **obr.14**). Převodovka je doplněna dvěma válečkovými volnoběhy V_1 a V_2, dvoustrannou spojkou a dvěma tlačnými pružinami o tuhostech k_1 a k_2. Volnoběh V_1 je trvale zařazen, volnoběh V_2 je do pracovní polohy zatlačen pružinou k_2 a lze ho vyřadit axiálním pohybem kola 3 směrem vpravo přes kuželové osazení náboje. Základní převod je $p_{31}^{U} = -z_1/z_3$.



Obr.14 *Třírychlostní převodovka 2K-U (Fichtel & Sachs)*

1. Převod od hnací osy O **dorychla:** spojka je pružinou k_1 zatlačena do polohy **A** a spojuje osu O s unašečem, tok výkonu je $(O \to 3)^1 = (U \to 3)^1$. Převod je

$$p_{U3}^{1} = \frac{1}{p_{3U}^{1}} = \frac{1}{1 - p_{31}^{U}} = \frac{z_3}{z_1 + z_3} < 1$$

Unašeč je tedy pomalejší než kolo 3, takže volnoběh V_1 prokluzuje a moment se do náboje přenáší z kola 3 volnoběhem V_2.

2. Přímý náhon: spojka je přesunuta do polohy **B**, osa O je spojena s kolem 3, volnoběh V_2 stále zařazen. Unašeč se točí pomaleji než kolo 3, neboť $p_{3U}^{1} = 1 - p_{31}^{U} = \frac{z_1 + z_3}{z_3} > 1$, takže volnoběh V_1 prokluzuje a moment se opět přenáší z kola 3 volnoběhem V_2.

3. Převod od hnací osy O **dopomala:** spojka je v poloze **B+**, volnoběh V_2 je vyřazen kuželovým osazením v náboji, tok výkonu $(3 \to U)^1$. Převod $p_{OU}^{1} = p_{3U}^{1} = \frac{z_1 + z_3}{z_3} > 1$, moment se přenáší volnoběhem V_1.

Pro ilustraci provedeme **výpočet účinnosti v režimu dorychla** $(U \to 3)^1$. Poměrný potenciální výkon je třeba počítat na členu 3:

$$\mu_3 = \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)}{M_3\omega_3} = 1 - \frac{\omega_U}{\omega_3} = 1 - p_{U3}^1 = 1 - \frac{z_3}{z_1 + z_3} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} > 0$$

Protože v planetovém režimu je $M_3\omega_3$ výkonem, součin $M_3(\omega_3 - \omega_U)$ je také výkonem a ztráty základního převodu počítáme podle vztahu

$$Z = \frac{N(1-\eta_V)}{\eta_V} = \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)(1-\eta_V)}{\eta_V}$$

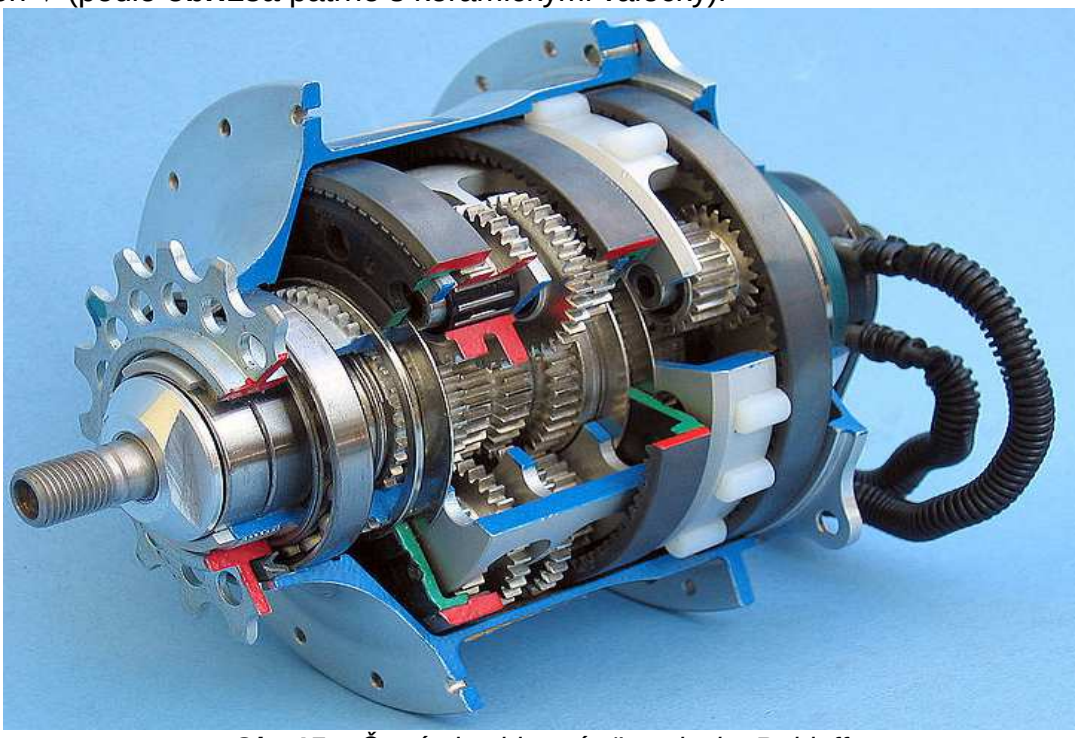
Účinnost planetového převodu určíme pomocí jeho výkonu (ztráty jsou stále stejné!!)

$$\eta_{PL} = \frac{N_{PL}}{N_{PL} + Z} = \frac{M_3\omega_3}{M_3\omega_3 + \frac{M_3(\omega_3 - \omega_U)(1-\eta_V)}{\eta_V}} = po\ úpravě = \frac{\eta_V}{1 - p_{U3}^1(1-\eta_V)}$$ (srovnej s (8a)).

Jmenovatel je analogicky s (8a) vždy kladný a menší než jedna, takže stejně jako v případech toku výkonu $(1 \to U)^3$ a $(U \to 1)^3$ v **kap.2.3** a **kap.2.5** je účinnost v režimu $(U \to 3)^1$ také větší než u převodu základního. Bez důkazu uvádíme, že totéž platí i v režimu $(3 \to U)^1$.

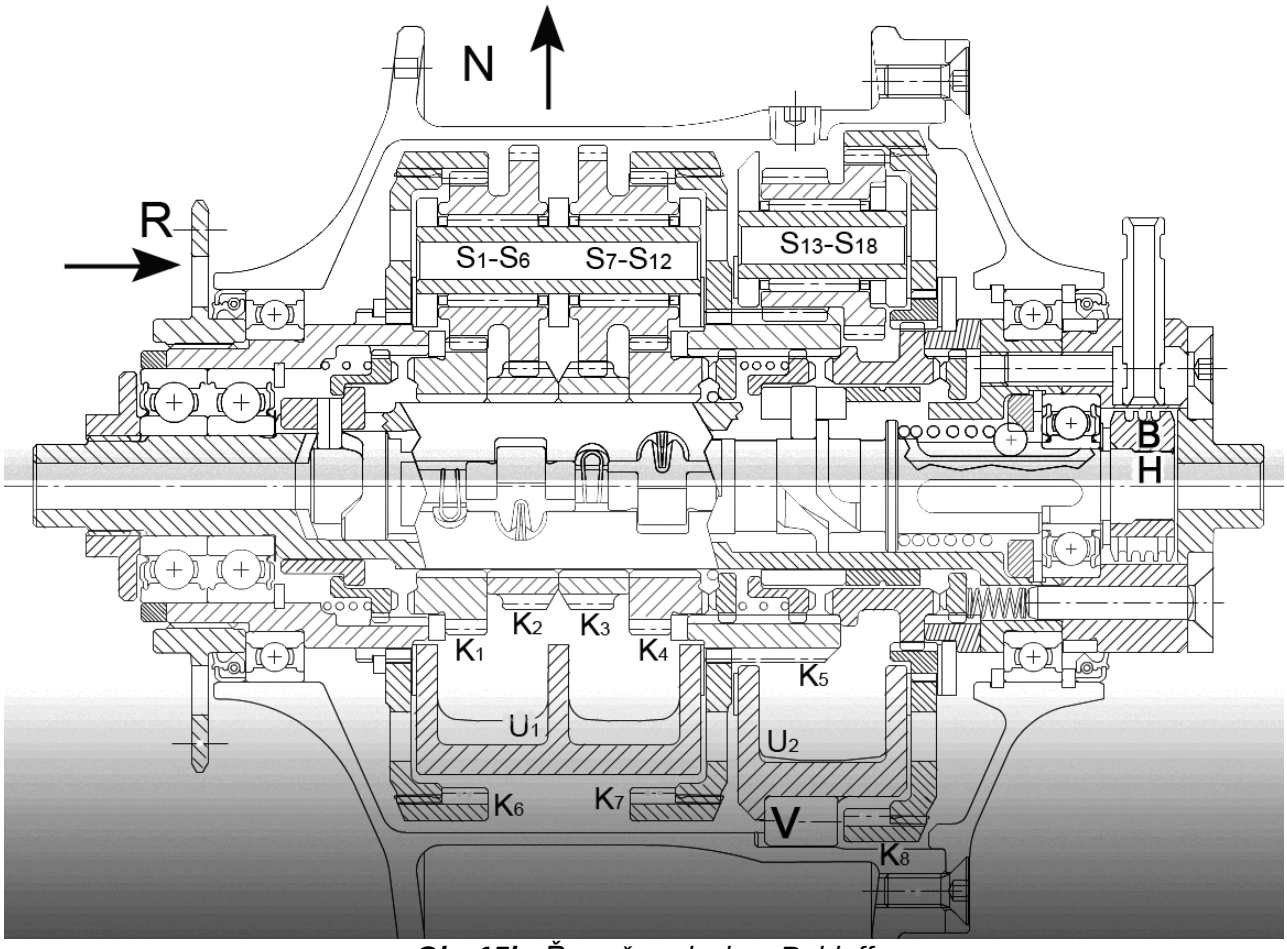
Čtrnáctistupňová (!!) převodovka fy. Rohloff

Tato unikátní převodovka (**obr.15a,b,c**) obsahuje pět korunových kol $K_1 \div K_5$ na centrálním hřídeli, dva unašeče U_1, U_2, tři trojice dvojsatelitů $S_1 \div S_{18}$ na jehlových ložiskách, tři vnější korunová kola $K_6 \div K_8$ (celkem tedy 26 ozubených kol) a válečkový volnoběh V (podle **obr.15a** patrně s keramickými válečky).

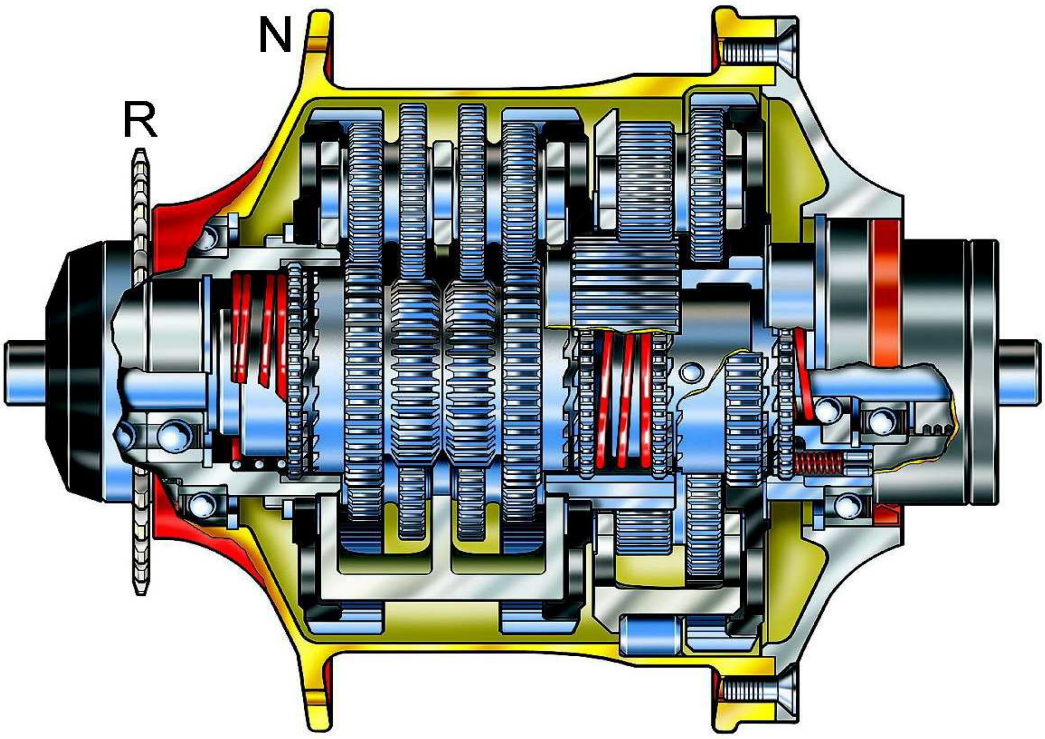


Obr.15a *Čtrnáctirychlostní převodovka Rohloff*

Řazení pomocí přesuvných spojek s čelním i obvodovým ozubením je ovládáno vačkovým hřídelem H, natáčejícím se uvnitř centrálního hřídele pomocí lankového bubínku B.



Obr.15b *Řez převodovkou Rohloff*

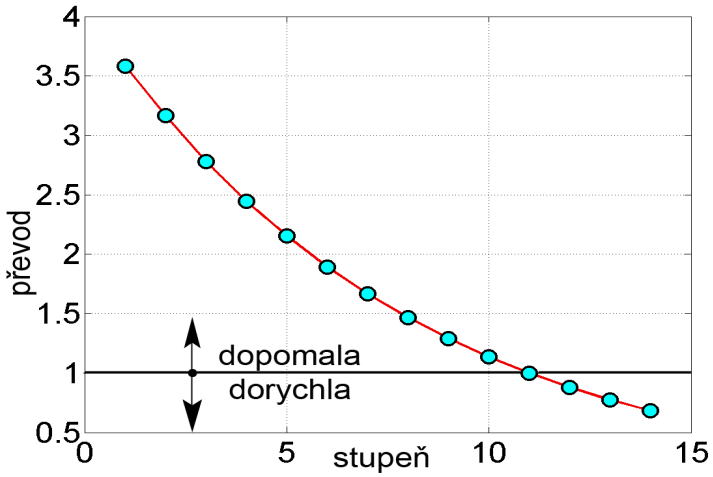


Obr.15c *Čtrnáctirychlostní převodovka Rohloff*

Způsob řazení nebudeme popisovat, neboť je velmi komplikovaný a v **obr.15b** není podrobně prokreslen. Firma udává odstupňování převodových stupňů následovně:

Stupeň	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Převod	3,584	3,165	2,778	2,445	2,155	1,894	1,667	1,466	1,292	1,135	1,000	0,881	0,774	0,682

Deset převodových stupňů z řetězky zadního kola R na jeho náboj N je dopomala, jedenáctý stupeň je jedna ku jedné a zbývající tři jsou dorychla, viz **obr.15d**. Převodovka má trvalou olejovou náplň a u všech převodových stupňů se udává účinnost nad 95%.



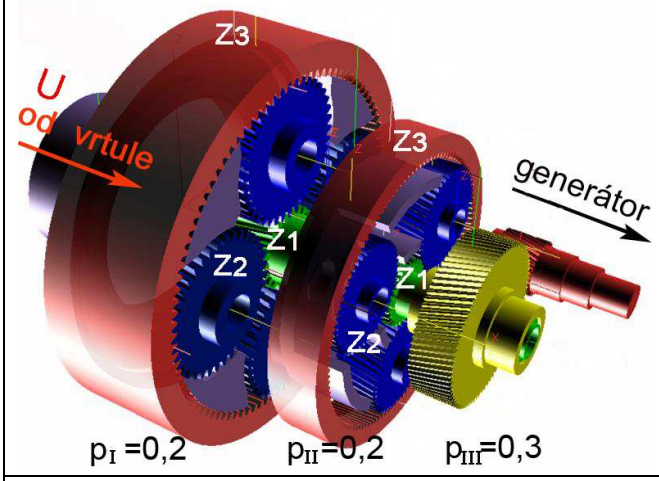
Obr.15d *Odstupňování převodů převodovky Rohloff*

Větrné elektrárny (dvakrát 2K-U dorychla)

Planetové převodovky typu 2K-U se zde používají pro zpřevodování dorychla od rotoru vrtule na generátor, často ve dvou stupních s přídavným čelním soukolím. Dvě za sebou řazené převodovky na **obr.16** pracují v režimu $(U \to 1)^3$ s převodovými poměry, které byly odhadnuty přímo z rozměrů kol v obrázku:

$$p_I = p_{II} = p_{U1}^3 = \frac{z_1}{z_1 + z_3} \approx 0{,}2$$

S přídavným čelním soukolím $p_{III} \approx 0{,}3$ vznikne celkový převod dorychla $p_{celk} = 0{,}012$. Například pro otáčky vrtule $18\,ot/\min$ bychom na generátoru získali přímo synchronní otáčky $1500\,ot/\min$. Větvení toku výkonu u rozměrných převodovek se děje přes více satelitů kvůli rovnoměrnému rozdělení namáhání a zachování kruhovitosti věnce, který může mít průměr až 2m – viz **obr.17**.

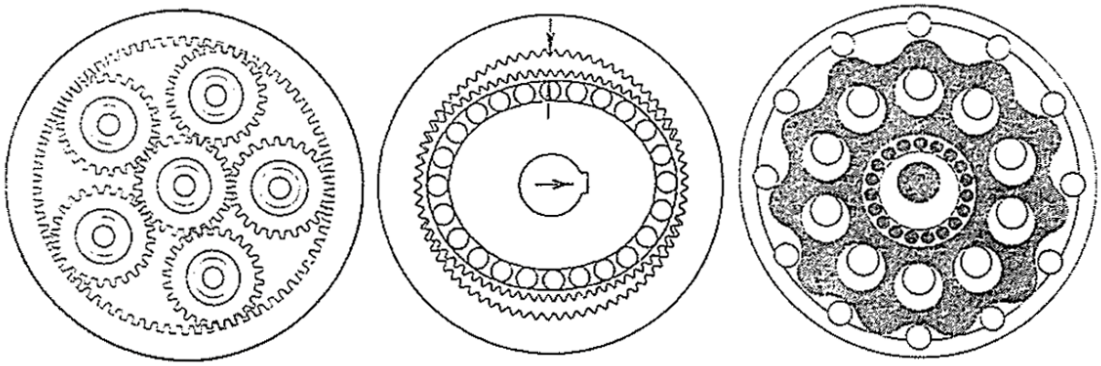


Obr.16 *Pohon generátoru větrné elektrárny (převody odhadnuty podle rozměrů z obrázku)*

Obr.17 *Rozvětvení toku výkonu přes 8 paralelních větví, elektrárna Wikov 2MW, vrtule 16ot/min, 1350kNm*

B4. Statistická metoda pro výpočet tuhosti planetových převodovek (podle lit.[2])

Základním předpokladem pro dále uvedené výpočty je velký počet zubů v záběru, který je u všech typů převodovek z **obr.18** dobře splněn. Například u harmonických převodovek se udává, že jejich geometrie umožňuje záběr i přes 50% z celkového počtu zubů kola 2 v **obr.11a**. Dále ukážeme, jak počet skutečně se dotýkajících zubů závisí na statistickém rozložení výrobních chyb a zatížení převodovky.



Planetová *Harmonická* *Cykloidní*

Obr.18 *Typy přesných koaxiálních převodovek*

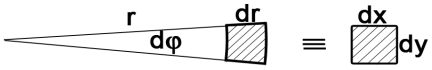
4.1 Odvození základních vztahů

Výchozím vztahem pro statistické výpočty je **Gaussova funkce v základním tvaru**

$$f(x)=e^{-x^2} \quad \text{nebo analogicky} \quad f(y)=e^{-y^2} \tag{10}$$

Vyšetříme součin dvou integrálů $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$ pomocí substituce

$x^2+y^2=r^2, \quad dx\cdot dy = rd\varphi \cdot dr$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r\cdot e^{-r^2}dr =$$

$$= \left(substituce\ r^2=\tau,\ 2rdr=d\tau\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \pi \quad \text{(substituce } y=x,\ dy=dx\text{):} \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^2 = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{10a}$$

Funkce e^{-x^2} je sudá, takže její integraci je možno zjednodušit volbou mezí $-\infty,0$ nebo $0,\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\int_{-\infty}^{0} = 2\int_0^{+\infty} = \sqrt{\pi}$$

Výpočet nevlastního integrálu si dále usnadníme rozdělením intervalu integrace na dva, např.

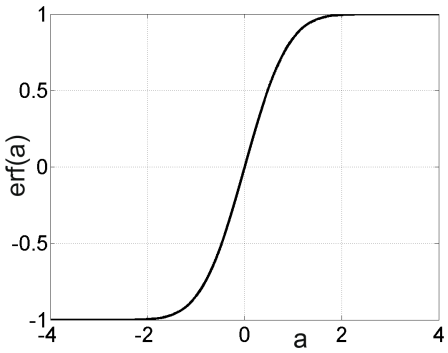
$$\int_{-\infty}^{0} = \int_{-\infty}^{a} + \int_a^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Často se používá první ze dvou dílčích integrálů $\int_{-\infty}^{a}$, takže po úpravě posledního vztahu a obrácení pořadí integrace vychází

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2}\,dx = 1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{a} e^{-x^2}\,dx = 1+erf(a) \qquad (10b)$$

kde jsme zavedli tzv. **chybovou funkci** (error function), jejíž nezávisle proměnnou je horní mez a:

$$erf(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{a} e^{-x^2}\,dx \qquad (10c)$$



Obr.19a *Chybová funkce*

Chybová funkce je lichá (viz **obr.19a**), neboť s použitím substituce $x=-y, dx=-dy$ vychází

$$erf(-a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{-a} e^{-x^2}\,dx=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{a} e^{-y^2}\,dy=-erf(a)$$

Gaussovu funkci (10) v normalizovaném tvaru získáme $\sqrt{\pi}$ - násobným snížením: $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

Její integrál (plocha po čarou) je $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 1$

Dále ji zobecníme zavedením konstant

$$\mu = konst,\ \sigma = konst \quad \text{a substitucí } x=\frac{\xi-\mu}{\sigma\sqrt{2}},\ dx=\frac{d\xi}{\sigma\sqrt{2}}$$

μ.... vodorovné posunutí grafu $f_n(x)$, σ.... jeho rozšíření a $\sigma\sqrt{2}$ - násobné snížení. Z funkce $f_n(x)$ vznikne funkce

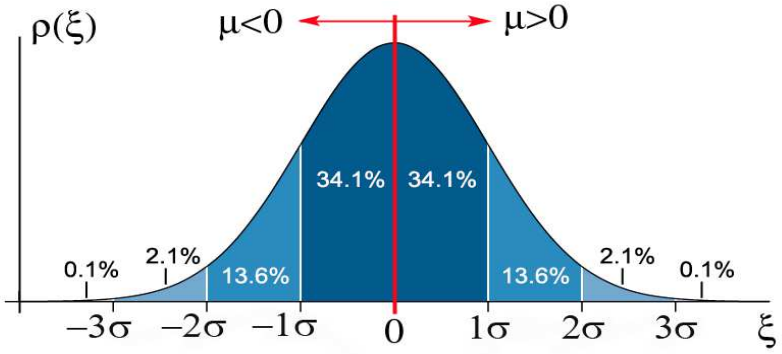
$$\rho(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (10d)$$

(tzv. **Gaussovo normální rozdělení** veličiny ξ, viz **obr.19b** nebo **obr.22**). Maximum normálního rozdělení nastává při $\xi=\mu$: $\rho_{\max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Stále platí, že integrál normálního rozdělení (plocha pod čarou funkce) je na intervalu $(-\infty,+\infty)$ roven jedné:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\xi)d\xi=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,d\xi = 1 \qquad (10e)$$

V **obr.19b** je vyznačeno procentuální rozdělení velikosti plochy po čarou.

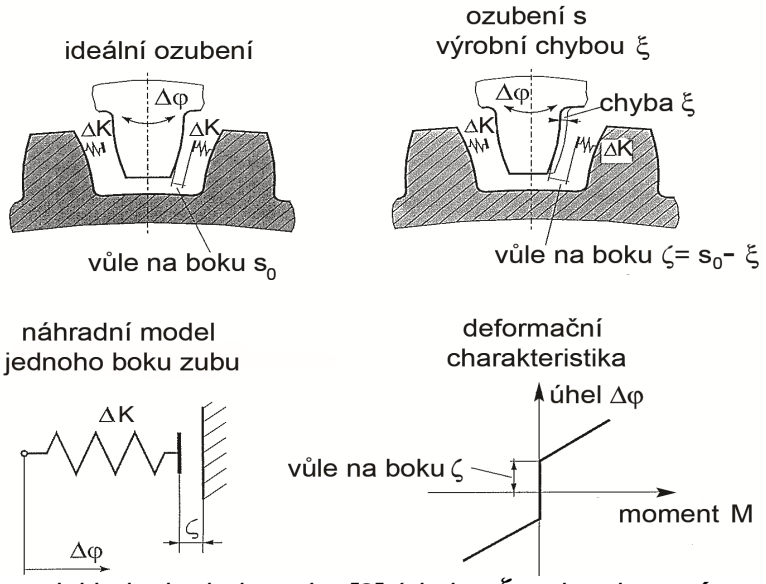


Obr.19b *Gaussovo normální rozdělení pro* $\mu=0$

4.2 Lineární model jednoho zubu

V tomto modelu sloučíme ohybové deformace zubů se stykovými deformacemi v jejich bocích a nahradíme je dvěma symetrickými pružinami s **konstantními** tuhostmi ΔK podle

obr.20. **Je to odlišný přístup od výpočtů stykových deformací u kuličkových šroubů, kde nás Hertzova teorie přivedla k nelineárním vztahům**. Zavedeme tato označení:
s_0 … požadovaná zubová vůle dokonale přesného ozubení na jednom boku; její velikost je nastavitelná např. oddálením os spoluzabírajících kol;
ς … skutečná zubová vůle na jednom boku;
ξ … náhodná výrobní odchylka (chyba) na jednom boku. Je-li chyba kladná, zub je silnější.



Obr.20 *Lineární model jednoho boku zubu* ***[2]*** *(chyba ξ nakreslena* ***záporná,*** *zub je slabší)*

Platí tedy, že $\varsigma = s_0 - \xi$ (11)

- při $\xi = s_0$ je $\varsigma = 0$, nastává dotek boků zubů (např. zub 4 v **obr.21**);
- při $\xi > s_0$ je $\varsigma < 0$, vůle je záporná, nastává předpětí.

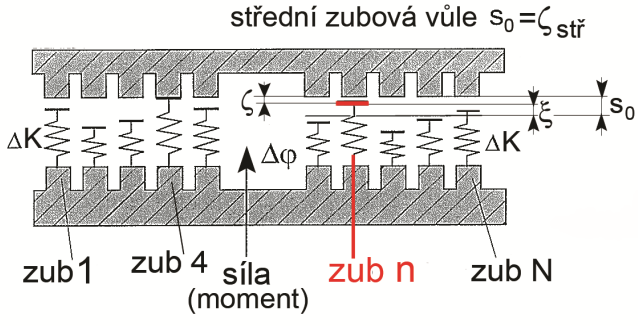
V obrázku je zjednodušeně naznačen průběh deformační charakteristiky jednoho boku zubu (natočení ozubeného kola $\Delta\varphi$ při působení momentu M) v případě kladné vůle.

4.3 Statistický model více zubů

Uvažujeme celkem N aktivních zubů, kde rozměr každého z nich je zatížen náhodnou výrobní chybou ξ. Náhradní přímočarý model v **obr.21** obsahuje N různě dlouhých paralelně řazených pružin s konstantními tuhostmi ΔK. Požadovanou zubovou vůli ς nyní vyjádříme jako střední hodnotu skutečných vůlí na jednotlivých zubech, tj. $s_0 = \varsigma_{stř}$

Vůle na jednom boku zubu je tedy

$$\varsigma = s_0 - \xi = \varsigma_{stř} - \xi \quad (11a)$$



Obr.21 *Statistický model více zubů* ***[2]*** *(chyba ξ na n – tém zubu je nakreslena* ***kladná****)*

Poznámky: ***1)*** *Střední hodnota se nejčastěji vyjadřuje pomocí aritmetického průměru, takže střední vůle je* $\varsigma_{stř} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varsigma_i$. *Střední hodnota náhodné chyby je analogicky* $\xi_{stř} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$.

2) *V dalších úvahách se budeme dopouštět určité nepřesnosti v tom smyslu, že Gaussovu spojitou funkci použijeme na diskrétní úlohu, ve které je počet zubů* N *celé číslo.*

Pro rozložení **hustoty pravděpodobnosti** výskytu chyby ξ zvolíme v praxi nejosvědčenější Gaussovo normální rozdělení $\rho(\xi)$ podle (10d), viz **obr.22**. Logickým požadavkem při výrobě přesného ozubení jsou co nejmenší (v ideálním případě nulové) chyby ξ, jinými slovy pravděpodobnost nulové chyby by měla být co největší. Protože maximum funkce $\rho(\xi)$ nastává při $\xi = \mu$, mělo by zároveň platit $\xi_{str} = \mu = 0$ (střední hodnota chyby). Hustota pravděpodobnosti výskytu chyby ξ je nyní

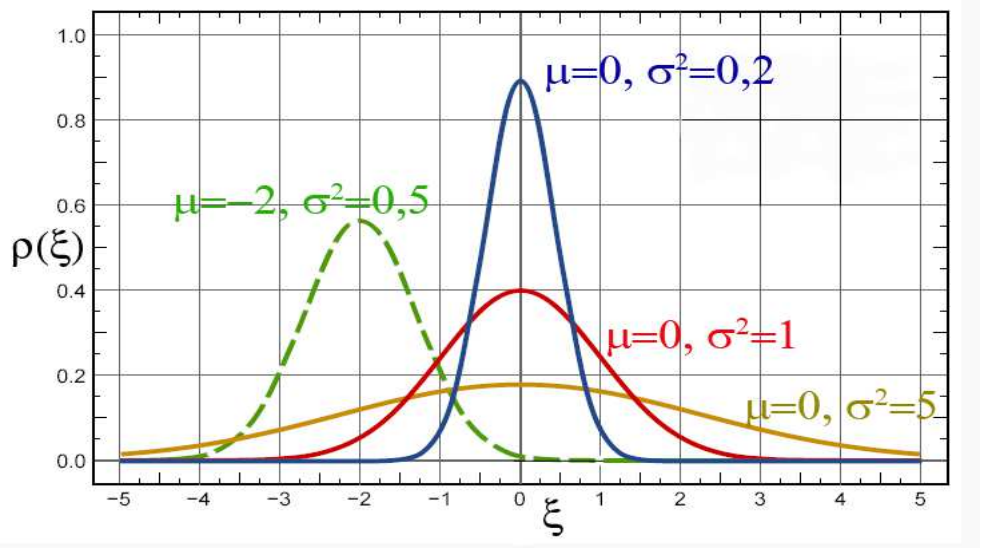
$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{\mu=0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2}} \qquad (12)$$

Jak je patrné z **obr.22**, konstanta σ^2 ovlivňuje šířkový a výškový rozměr křivek, ale plocha pod nimi je stále jednotková!! Čím je σ menší, tím je křivka vyšší a špičatější, neboli výskyt větších chyb klesá a četnější jsou chyby malé. Ve statistických výpočtech se za σ^2 dosazuje aritmetický průměr kvadrátu odchylky chyby od její střední hodnoty, tj. $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i - \xi_{str})^2$ ...tzv. **střední kvadratická odchylka** chyby ξ (též **rozptyl**).

Číslo σ je tzv. **směrodatná odchylka** chyby. V našem případě je tedy $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2}$.

***Poznámky*: 1)** *Ze symetrie křivky* $\rho(\xi)$ *vyplývá, že počet záporných a kladných chyb je stejný. Ve výrobní praxi ale tuto symetrii mohou narušit vlivy, které nepodléhají statistickým zákonitostem, např. pozvolné opotřebovávání strojů a nástrojů při sériové výrobě ozubení, takže veličina* μ *nemusí být stále nulová. Tento druh chyb zde neuvažujeme.*

2) *Vůle* ς *i chyba* ξ *se podle (11a) liší jen o konstantu* s_0 *a mají tedy stejnou směrodatnou odchylku !!!*

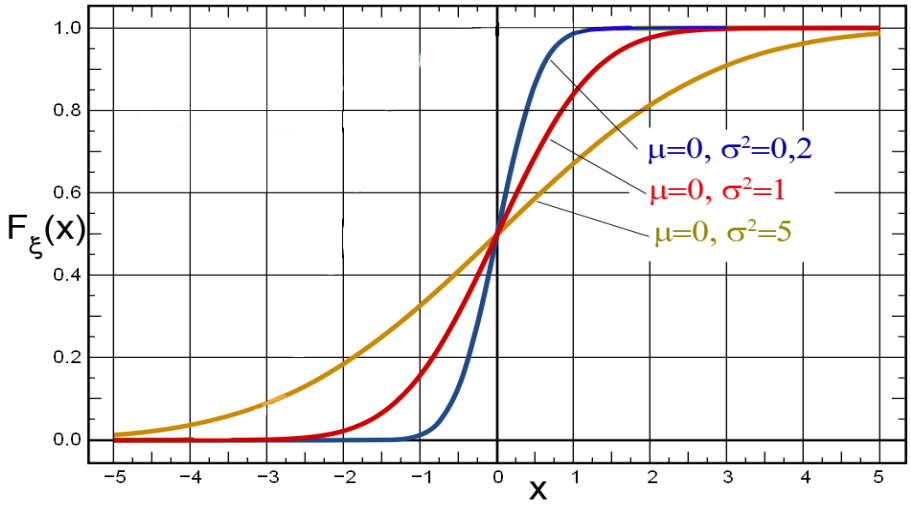


Obr.22 *Gaussovo normální rozdělení hustoty pravděpodobnosti výskytu chyby* ξ *pro různé střední hodnoty* μ *a střední kvadratické odchylky* σ^2

Pravděpodobnost P **výskytu chyby** (tzv. **distribuční funkce, symbol** F) v intervalu $(-\infty, x)$ je dána velikostí plochy pod čarou hustoty $\rho(\xi)$ odleva až k hranici x, tj.

$$F_\xi(x)\big|_{\mu=0} = P(\xi \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2}} d\xi \qquad (13)$$

Distribuční funkce tedy pro $x \to \infty$ konverguje k jedné, jak je vidět na **obr.23**.



Obr.23 *Distribuční funkce chyby* ξ *pro* $\mu = \xi_{stř} = 0$

4.4 Nezatížený převod – jedna strana zubů

Moment je nulový, tj. $\Delta\varphi = 0$. Dosazením za $\xi = s_0 - \varsigma$ z (11a) do (12) vznikne **Gaussovo normální rozdělení vůle** (směrodatná odchylka σ se zachovává!!)

$$\rho(\varsigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\varsigma - s_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (14)$$

Pravděpodobnost zubového kontaktu (tj. $\xi \ge s_0$ neboli $\varsigma \le 0$) je dána distribuční funkcí

$$F_\varsigma(0) = P(\varsigma \le 0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-(\varsigma - s_0)^2}{2\sigma^2}} d\varsigma$$

4.5 Zatížený převod – jedna strana zubů

Působením momentu vznikne nakroucení $\Delta\varphi > 0$, takže pravděpodobnost kontaktu se zvýší a hodnota distribuční funkce vzroste na hodnotu

$$F_\varsigma(\Delta\varphi) = P(\varsigma \le \Delta\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-(\varsigma - s_0)^2}{2\sigma^2}} d\varsigma \qquad (15)$$

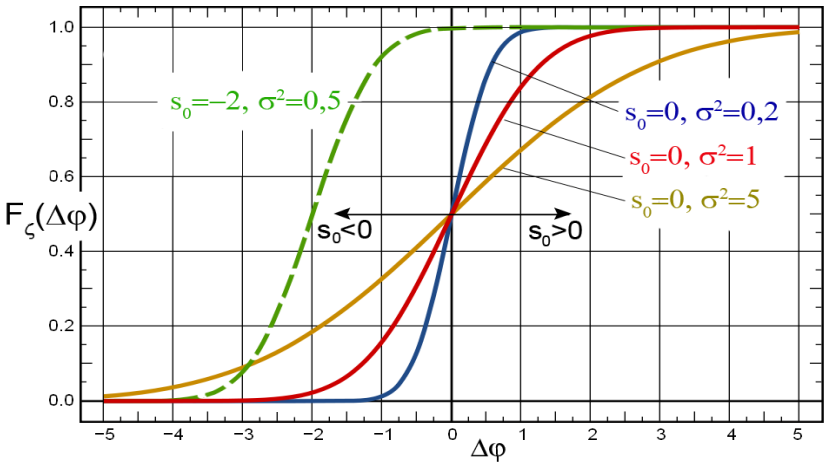
Vztah pro distribuční funkci $F_\varsigma(\Delta\varphi)$ je stejný jako pro funkci $F_\xi(x)$ s tím, že místo střední hodnoty chyby μ (která je ale nulová) dosazujeme střední hodnotu vůle s_0 - viz **obr.24**. S růstem zatížení roste hodnota $\Delta\varphi$ v **obr.21** a dojde k zařazování dalších pružin a přičítání jejich tuhostí ΔK až do stavu úplného kontaktu všech N zubů. Tuhost dosáhne maximum

$$K_{\max} = N \cdot \Delta K \qquad (16)$$

a při dalším zatěžování je již konstantní. V obecném případě je aktuální hodnota

$$K(\Delta\varphi) = K_{\max} \cdot \frac{\text{počet dotýkajících se zubů}}{\text{celkový počet zubů } N} \qquad (16a)$$

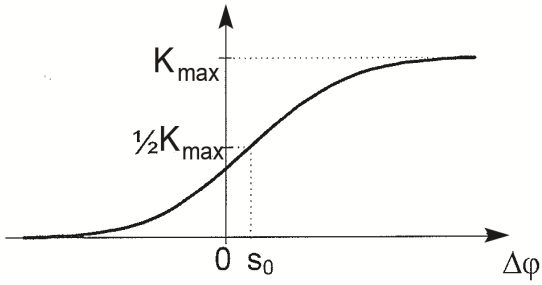
V obrázku je zeleně vyznačen v praxi málo používaný případ „záporné“ vůle $s_0 = -2$, kdy je ozubení předepnuto.



Obr.24 *Distribuční funkce* F_ς *vůle* ς

Závislost tuhosti na zatížení je vidět na **obr.25**. Nejrychlejší růst (inflexní bod) nastává v okolí střední hodnoty vůle s_0, kdy je počet zubů s kladnou a zápornou vůlí stejný a tuhost dosahuje poloviny svého maxima. **Vztah pro tuhost získáme z distribuční funkce** $F_\varsigma(\Delta\varphi)$ vynásobením konstantou $K_{\max}$:

$$K_1(\Delta\varphi)=K_{\max}\cdot F_\varsigma(\Delta\varphi)=\frac{K_{\max}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-(\varsigma-s_0)^2}{2\sigma^2}}\,d\varsigma \qquad (17)$$



Obr.25 *Růst tuhosti se zatížením*

Poznámka: *V našem diskrétním modelu z* ***obr.21*** *by měl být průběh tuhosti správně skokový s elementárními přírůstky* ΔK.

Substitucí $\frac{\varsigma-s_0}{\sigma\sqrt{2}}=x,\ d\varsigma=\sigma\sqrt{2}dx$ a s využitím (10b) přejde vztah (17) na alternativní tvar

$$\frac{K_1(\Delta\varphi)}{K_{\max}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\Delta\varphi-s_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf\left(\frac{\Delta\varphi-s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (17a)$$

4.6 Zatížený převod – obě strany zubů

Pro další postup využijeme pravidlo o tzv. **doplňkové pravděpodobnosti**. Protože maximální hodnota distribuční funkce v intervalu integrace $(-\infty,+\infty)$ je vždy jedna, pro dílčí pravděpodobnosti v intervalech $(-\infty,\Delta\varphi)$ a $(\Delta\varphi,+\infty)$ platí $P(\varsigma\le\Delta\varphi)+P(\varsigma>\Delta\varphi)=1$, neboli

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta\varphi}^{+\infty} e^{\frac{-(\varsigma-s_0)^2}{2\sigma^2}}\,d\varsigma=1-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-(\varsigma-s_0)^2}{2\sigma^2}}\,d\varsigma \qquad (18)$$

Dosavadní úvaha se týkala pouze kontaktů na jedné straně zubů, kde se boky přiblížily o míru $\Delta\varphi$. Proto jsme také v (17) použili označení K_1. Ve skutečnosti je třeba uvažovat současný kontakt na obou stranách zubů podle **obr.20** nahoře. Jedná se o paralelní řazení celkem $2N$ pružin, jejichž tuhosti se sčítají, ale tuhost odpovídající levým pružinám (kde se boky zubů oddalují) je třeba počítat na rozdíl od vztahu (17) s integračními mezemi $-\infty,-\Delta\varphi$. Je tedy

$$K_2(\Delta\varphi) = K_{\max} \cdot F_\varsigma(-\Delta\varphi) = \frac{K_{\max}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\Delta\varphi} e^{\frac{-(\varsigma - s_0)^2}{2\sigma^2}} d\varsigma \qquad (18a)$$

Poznámka: *Hodnota $K_{\max}$ z (16) zůstává stejná, i když uvažujeme deformace obou stran zubů, neboť při rostoucím zatížení počet kontaktů na jedněch bocích stoupá a na druhých ubývá teoreticky až do nuly.*

Substitucí $\varsigma = -x,\ d\varsigma = -dx$, obrácením znaménka a pořadí mezí integrace a konečně použitím pravidla o doplňkové pravděpodobnosti (18) vyjde

$$K_2 = \frac{-K_{\max}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-(-x-s_0)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{K_{\max}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta\varphi}^{+\infty} e^{\frac{-(x+s_0)^2}{2\sigma^2}} dx = K_{\max}\left(1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-(x+s_0)^2}{2\sigma^2}} dx\right)$$

nebo analogicky k (17a)

$$\frac{K_2(\Delta\varphi)}{K_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\Delta\varphi - s_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{-\Delta\varphi - s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (18b)$$

Výslednou tuhost převodovky získáme sečtením výrazů (17) a (18a) po sjednocení symbolů pro integrační proměnné ς, x:

$$K(\Delta\varphi) = K_1 + K_2 = K_{\max} + \frac{K_{\max}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta\varphi} \left(e^{\frac{-(\varsigma - s_0)^2}{2\sigma^2}} - e^{\frac{-(\varsigma + s_0)^2}{2\sigma^2}} \right) d\varsigma \qquad (19)$$

Dalšími úpravami je možno získat alternativní tvar

$$\frac{K(\Delta\varphi)}{K_{\max}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta\varphi} e^{\frac{-\varsigma^2 - s_0^2}{2\sigma^2}} \sinh\left(\frac{s_0\varsigma}{\sigma^2}\right) d\varsigma \qquad (19a)$$

Stejně tak sečtením (17a) a (18b) vychází jiný způsob zápisu

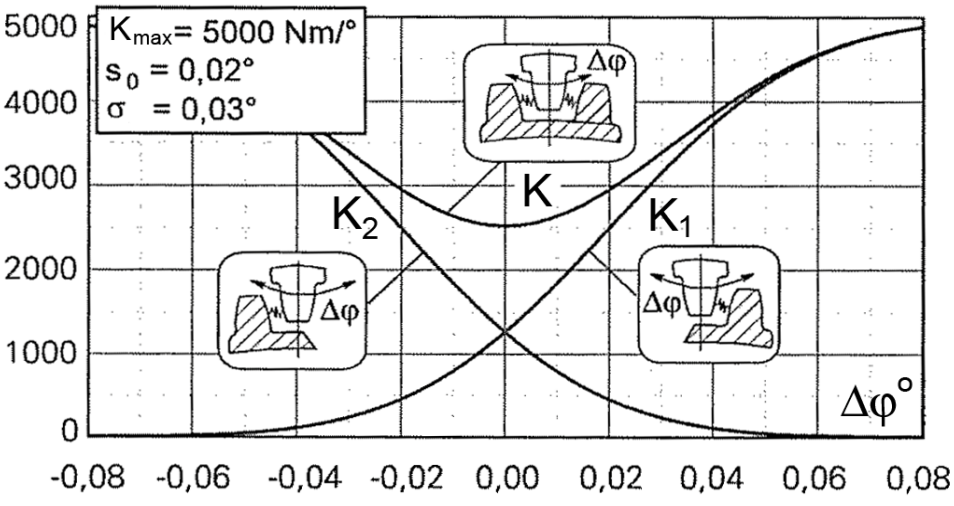
$$\frac{K(\Delta\varphi)}{K_{\max}} = 1 + \frac{1}{2} erf\left(\frac{\Delta\varphi - s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} erf\left(\frac{-\Delta\varphi - s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (19b)$$

V nezatíženém stavu ($\Delta\varphi = 0$) je tuhost dána „charakteristickým“ poměrem s_0/σ:

$$\frac{K(0)}{K_{\max}} = 1 + erf\left(\frac{-s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 1 - erf\left(\frac{s_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (19c)$$

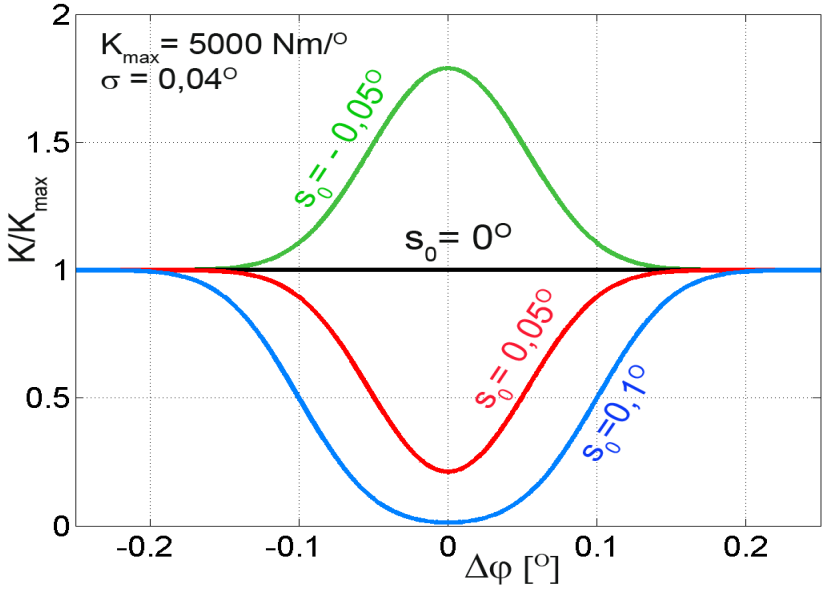
Na **obr.26** jsou zakresleny dílčí i celková tuhost pro hodnoty

$$K_{\max} = 5000\ Nm/^o,\ s_0 = 0{,}02^o,\ \sigma = 0{,}03^o$$



Obr.26 *Sčítání tuhostí při kontaktu na obou bocích zubů* ***[2]***

Při různých hodnotách statistických parametrů s_0, σ mohou mít průběhy výsledné tuhosti K značně odlišný tvar, jak je vidět na **obr.27**. Může dokonce nastat předpětí, kdy střední hodnota vůle s_0 bude záporná, takže $K(0)/K_{\max} > 1$ a tuhost bude maximální v nezatíženém stavu převodovky. **Podobný efekt je znám i u předepnutých valivých ložisek a kuličkových matic**, jak bylo ukázáno v **kap.A** na **obr.20**. U ozubených kol, kde mezi boky zubů nastává vždy skluz, je předepnutí spíše nežádoucí výjimkou, neboť se jím zvyšují třecí ztráty.



Obr.27 *Různé průběhy tuhosti podle statistických parametrů* s_0, σ

Je-li střední hodnota vůle s_0 výrazně větší než směrodatná odchylka chyby, tuhost převodovky v nezatíženém stavu může klesnou až k nule, jak ukazuje spodní křivka v **obr.27**.

4.7 Statická deformační charakteristika

Protože torzní tuhost K se mění s úhlem $\Delta\varphi$, je nutno ji vyjádřit v diferenciálním tvaru

$$K(\Delta\varphi) = dM/d(\Delta\varphi) \quad \text{neboli} \quad dM = K(\Delta\varphi)d(\Delta\varphi) \tag{20}$$

kde M je zatěžující krouticí moment. Integrací (20) s využitím např. (19) získáme závislost momentu na nakroucení počínaje výchozím odlehčeným stavem $M = 0,\ \Delta\varphi = 0,\ K = K(0)$:

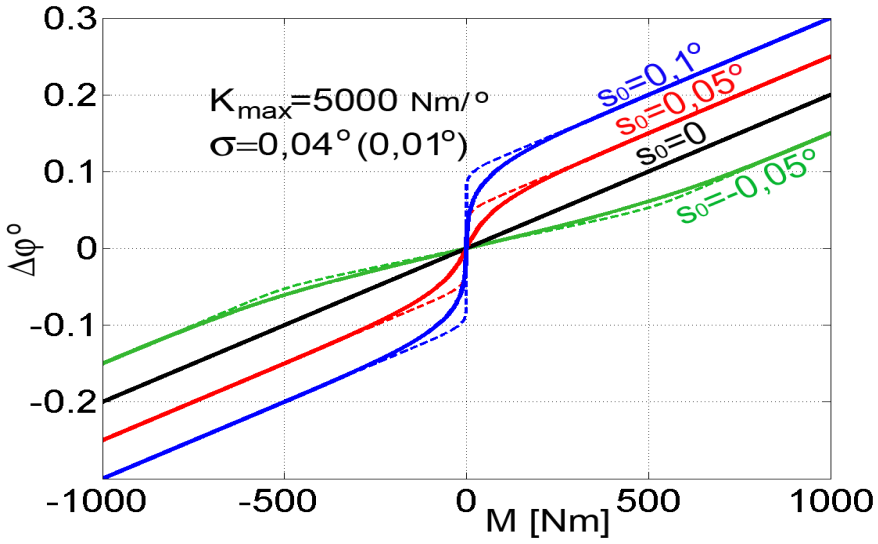
$$M(\Delta\varphi) = \int_0^{\Delta\varphi} K(x)dx \tag{21}$$

Tzv. **deformační charakteristika** je inverzní funkcí

$$\Delta\varphi = fce(M) \tag{22}$$

Na **obr.28** jsou znázorněny průběhy pro obě polarity momentu i nakroucení, získané z (19) numerickou integrací, neboť exaktní výpočet je obtížný. Hodnoty $K_{\max}, \sigma, s_0$ byly převzaty z **obr.27**. V intervalech $\Delta\varphi < -0{,}15^\circ$ a $\Delta\varphi > +0{,}15^\circ$ jsou tuhosti téměř konstantní, takže příslušné deformační charakteristiky jsou lineární. Tvar deformační charakteristiky okolo počátku je silně ovlivněn statistickými veličinami s_0, σ. S klesající hodnotou směrodatné odchylky chyby σ a s růstem střední hodnoty vůle s_0 je průběh ostřeji zalomený a blíží se nespojitému případu klasické vůle z **obr.20**. Z **obr.28** názorně vyplývá známá zkušenost se záběhem nových zařízení (nejen převodovek). U nezaběhnuté

převodovky je větší rozptyl výrobních chyb σ, který se v průběhu zabíhání bude snižovat a s „obrušováním“ nadměrně vyčnívajících tvarů zároveň poroste vůle. Na deformační charakteristice v okolí počátku výrazněji vystoupí skokový průběh (modrá čárkovaná čára pro $s_0 = 0{,}1^o$, $\sigma = 0{,}01^o$). Po záběhu je žádoucí (pokud je to montážně možné) snížit vůli a přiblížit se lineárnímu průběhu (černá čára, $s_0 = 0$);



Obr.28 *Vliv vůle a směrodatné odchylky chyby na tvar deformační charakteristiky okolo počátku (silně $\sigma = 0{,}04^o$, slabě čárkovaně $\sigma = 0{,}01^o$)*

4.8 Měření deformační charakteristiky

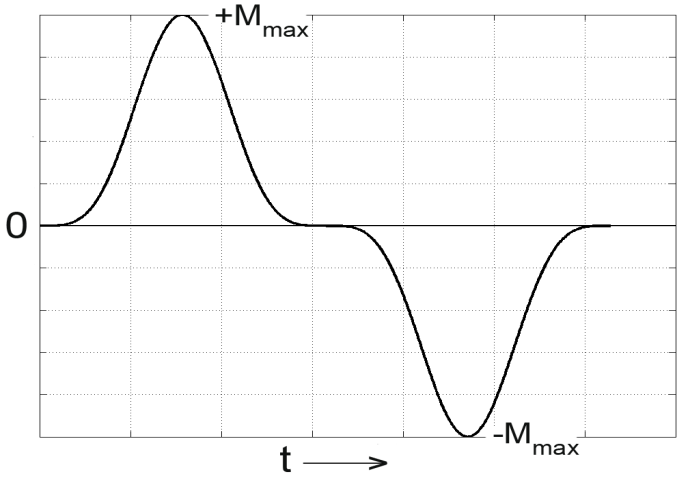
Ve statistickém modelu převodovky na **obr.21** není zahrnut vliv tření mezi zuby, které působí vždy proti směru pohybu. V praxi je tedy třeba rozlišovat, jestli zatěžující moment roste nebo klesá a jaký má smysl. Pro úplnou informaci je při měření deformační charakteristiky nutno vyvíjet moment v obou smyslech, nejlépe v pořadí

$$0 \rightarrow +M_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -M_{\max} \rightarrow 0$$

a tento cyklus vícekrát opakovat. Vykazuje-li proměřovaná převodovka výraznou vůli a průběh deformační charakteristiky v okolí počátku má příznaky nespojitosti (jako v **obr.28** při $s_0 = 0{,}1^o$ a $\sigma = 0{,}01^o$), může při změně polarity momentu docházet k rázům. Při měření se proto doporučuje jeho plynulá a v okolí nuly zpomalená změna, např. podle funkce $M = \pm M_{\max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ s delší časovou periodou T v řádu desítek sekund, viz **obr.29**.

Zajímá nás hlavně tuhost, vztažená na výstupní hřídel. Eventuální přepočet na vstupní hřídel probíhá podle vztahu $K_{vst} = K_{výst} / p_{id}^2$, kde p_{id} je ideální hodnota dokonale přesného převodu, která vychází z počtů zubů. Měří se pro jistotu natočení obou hřídelů bez ohledu na to, který hřídel byl při měření zablokován. Deformace se přepočítává na výstup podle vztahu

$$\Delta\varphi_{výst} = \varphi_{výst} - \frac{1}{p_{id}} \varphi_{vst} \qquad (23)$$



Obr.29 *Doporučený průběh momentu při měření deformační charakteristiky*

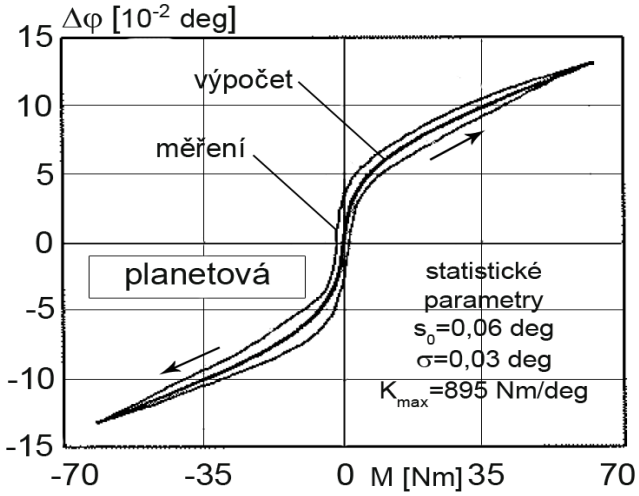
Pro měření úhlů φ_{vst} a $\varphi_{výst}$ se nejčastěji používají inkrementální fotoelektrické snímače s vysokým rozlišením, z jejichž údajů je možno numerickou derivací získat i hodnoty rychlostí ω_{vst} a $\omega_{výst}$. Rozlišení snímačů na vstupním a výstupním hřídeli by mělo být alespoň přibližně odstupňováno podle velikosti převodového poměru. Například pro převodovku s převodem $p_{id} = 50$ je při rozlišení vstupního snímače $36000\,inkr/ot$ doporučené rozlišení výstupního snímače $50 \cdot 36000 = 1{,}8 \cdot 10^6\,inkr/ot$. Měření může být zkresleno kinematickými chybami převodu (viz dále v **kap.B5**). Proto je někdy výhodnější udržovat při měření výstupní hřídel v klidu řízeným momentem $M_{výst}$ a k němu přiřazovat naměřené hodnoty $\Delta\varphi_{vst}$. Při tomto způsobu měření platí

$$K_{výst} = \frac{p_{id} \cdot dM_{výst}}{d\Delta\varphi_{vst}} \qquad (24)$$

Hystereze a účinnost zatěžovacího cyklu

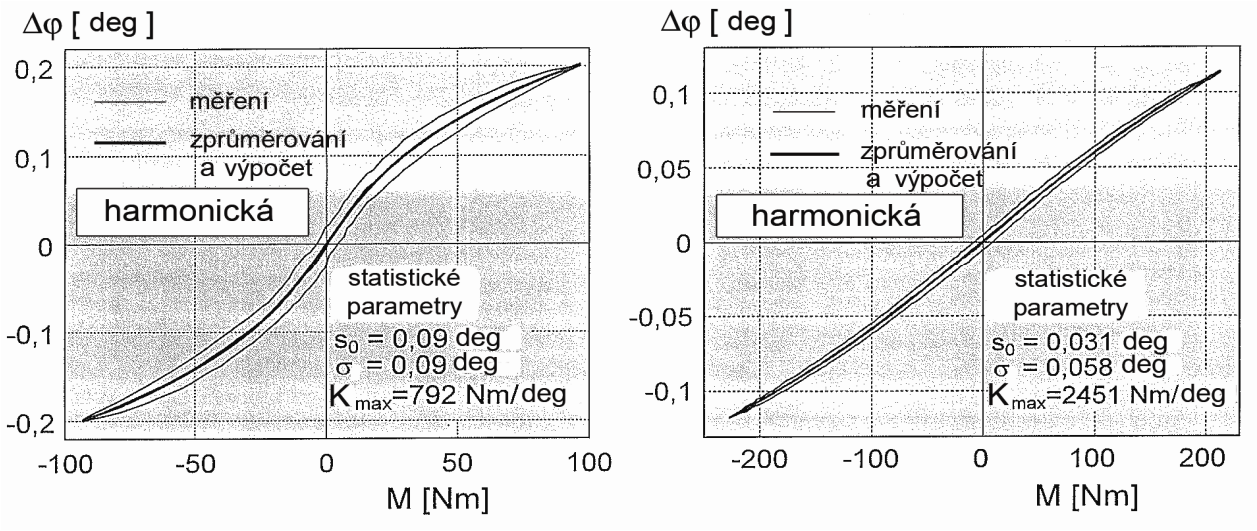
Je třeba zdůraznit, že doposud jsme se zabývali jen samotným ozubením a neuvažovali jsme deformace a vůle dalších konstrukčních skupin celé převodovky (ložisek, hřídelů nebo např. různých provedení spojek u převodovek typu 1K-U-W). Dále uvedené naměřené deformační charakteristiky budou sice aproximovány rovnicemi (19) atd., ale ty je třeba chápat jako náhradní matematický model, ve kterém zodpovědnost za vlastnosti celé převodovky přejímá jen ozubení. Na rozdíl od jednoznačné závislosti $M \leftrightarrow \Delta\varphi$ z **obr.28** vykazují naměřené průběhy vždy hysterezi, způsobenou hlavně třením. Střední silněji vytažené křivky v **obr.30** a **obr.31** byly získány aproximací statistických parametrů s_0, σ a numerickou integrací (19).

Z měření planetové převodovky na **obr.30** lze učinit závěr, že byla vyrobena se zvýšenou přesností nebo dobře zaběhnuta, neboť rozptyl chyb σ je malý. Střední hodnota vůle s_0 a tím i změna směrnice okolo počátku je větší (charakteristický podíl $s_0/\sigma = 2$), neboť u planetových převodovek je více míst s výskytem vůlí než u harmonických (např. uložení satelitů).



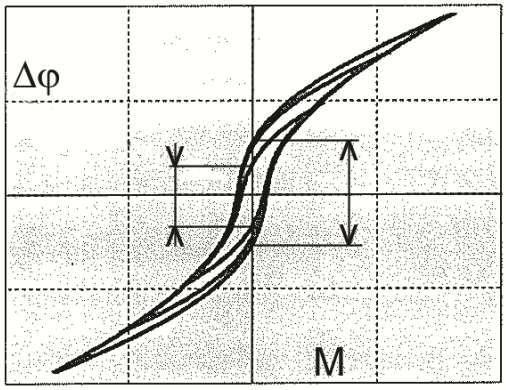
Obr.30 *Deformační charakteristika planetové převodovky (**[2]**),* $s_0/\sigma = 2$

U harmonických převodovek jsou obecně průběhy deformačních charakteristik okolo počátku plynulejší než u planetových, jak je vidět z **obr.31**, neboť míst s možným výskytem vůle je méně. Převodovka z obrázku vlevo vykazuje značnou hysterezi, což ukazuje na větší vliv tření. Naopak téměř lineární průběh s malou hysterezí (obrázek vpravo, $s_0/\sigma = 0{,}5$) signalizuje velmi malou vůli a výhodné třecí poměry, dané optimalizovaným tvarem zubů. Tyto vlastnosti předurčují převodovku k použití v regulačních servopohonech pro přesné řízení polohy.



Obr.31 *Deformační charakteristiky různých harmonických převodovek (**[2]**), vlevo $s_0/\sigma = 1$, vpravo převodovka s optimalizovaným profilem zubů ($s_0/\sigma = 0{,}5$)*

Poznámka: *Ze statistického modelu na **obr.21** je vidět, že pojem **vůle**, jak je používán v obvyklém smyslu u obyčejných převodů (tj. přechodná ztráta kinematické vazby), zde ztrácí význam. Na deformační charakteristice by se klasická vůle projevila nespojitostí (nekonečně velkou směrnicí) v počátku, stejně jako v **obr.20** vpravo dole. To ale teoreticky nemůže u přijatého modelu nastat, neboť podle Gaussova normálního rozložení vždy alespoň u jednoho zubu dochází ke kontaktu. U naměřených hysterezních křivek reálných planetových nebo harmonických převodů lze samozřejmě v případě větší vůle pozorovat náznak nespojitosti v počátku jako např. v **obr.30**, ale jednoznačná identifikace celého rozsahu vůle je obtížná. Používá se též název **„Lost Motion“** (angl.), nebo **„Umkehrspanne“** resp. **„Totgang“** (něm.), v překladu **„ztráta pohybu, mrtvý chod“**. Jeho velikost není jednoznačná a závisí hlavně na amplitudě a rychlosti zatěžovacího cyklu, které jsou určující pro třecí poměry. Na **obr.32** je vidět různá velikost mrtvého chodu při malé a velké amplitudě zatěžování.*

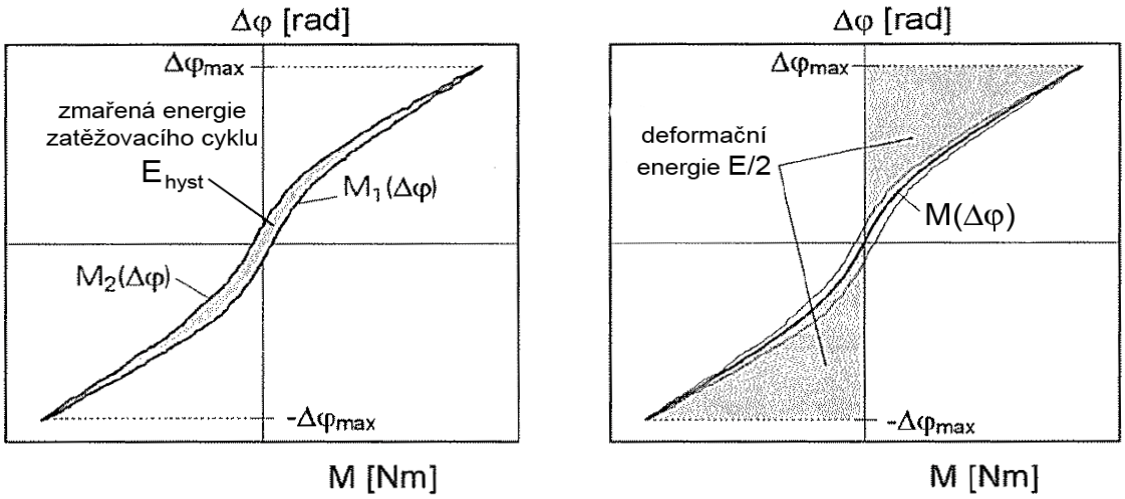


Obr.32 *Vliv amplitudy zatěžovacího cyklu na mrtvý chod*

Energie, vložená do zatěžovacího cyklu při celém oběhu hysterezní smyčky, je $E = 2\int_{-\Delta\varphi\max}^{+\Delta\varphi\max} M(\Delta\varphi)d\Delta\varphi$ (viz **obr.33**) a zmařená energie (plocha hysterezní smyčky)

$$E_{hyst} = \left| \int_{-\Delta\varphi\max}^{+\Delta\varphi\max} M_1(\Delta\varphi)d\Delta\varphi - \int_{-\Delta\varphi\max}^{+\Delta\varphi\max} M_2(\Delta\varphi)d\Delta\varphi \right|$$

Někdy definujeme tzv. „účinnost zatěžovacího cyklu“ $\eta_{hyst} = 1 - \frac{E_{hyst}}{E}$ (25)



Obr.33 *Energie vložená do zatěžovacího cyklu*

Poznámka: *Nelze směšovat pojem η_{hyst} s pojmem účinnosti podle* ***kap.2.3*** *a následujících!!! Tam se jednalo o účinnost při přenosu konstantního výkonu, tj. při ustáleném zatěžovacím momentu i rychlosti (zpravidla při vysokých otáčkách, kdy jsou příznivé mazací podmínky). Veličina η_{hyst} hraje roli hlavně u regulačních pohonů (při jemném nastavování polohy, pomalých reverzacích, časových prodlevách, vibracích atd.) a ovlivňuje kromě oteplení a životnosti hlavně tlumení.*

Kolísání tuhosti (nikoliv se zatížením, ale v závislosti na poloze výstupního hřídele) okolo určité střední hodnoty způsobuje, že tvar deformační charakteristiky (a tím i velikost η_{hyst}) se v závislosti na úhlu $\varphi_{výst}$ mění. Je třeba opakovat měření zatěžovací charakteristiky pro různé polohy výstupního hřídele (např. 360-krát na otáčku) a chápat veličinu η_{hyst} jako funkci $\varphi_{výst}$. Postup je časově i softwareově velmi náročný.

B5. Kinematická přesnost převodů

Předpokládejme, že vstupní úhlová rychlost je dokonale konstantní, tj. $\omega_{vst} = konst$, $\varphi_{vst} = \omega_{vst} t$. Výstupní úhel a úhlová rychlost u dokonale přesného převodu by byly

$$\varphi_{výst\ id} = \varphi_{vst} / p_{id}\ ,\quad \omega_{výst\ id} = \omega_{vst} / p_{id}$$

5.1 Nezatížený převod

Odchylka $\Delta p_{výst}$ od ideální hodnoty převodu p_{id} obsahuje k harmonických složek s amplitudami Δp_k a s periodami $T_k [rad]$, vztaženými na úhel **výstupního** hřídele. Platí

$$\omega_{výst} = \frac{\omega_{vst}}{p_{id} + \Delta p_{výst}}$$

$$\Delta p_{výst} = \sum_k \Delta p_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_k}\varphi_{výst\ id} + \gamma_k\right) = \sum_k \Delta p_k \sin\left(\frac{2\pi\omega_{vst}}{T_k p_{id}} t + \gamma_k\right) \qquad (26)$$

Pro výstupní úhel dokonale přesného převodu by platilo $\varphi_{výst\ id} = \int \omega_{výst\ id}\, dt$, ale jeho skutečná poloha je $\varphi_{výst} = \int \omega_{výst} dt$. Kinematická chyba výstupního úhlu je

$$\Delta\varphi_{Evýst} = \varphi_{výst} - \varphi_{výst\ id} = \int \left(\omega_{výst} - \omega_{výst\ id}\right) dt = \int \left(\frac{\omega_{vst}}{p_{id} + \Delta p_{výst}} - \frac{\omega_{vst}}{p_{id}}\right) dt = -\omega_{vst} \int \left(\frac{\Delta p_{výst}}{p_{id}^2 + p_{id}\Delta p_{výst}}\right) dt$$

Je velmi pravděpodobné, že $\Delta p_{výst} << p_{id}$, takže druhý sčítanec ve jmenovateli lze zanedbat:

$$\Delta\varphi_{Evýst} = -\frac{\omega_{vst}}{p_{id}^2}\int \Delta p_{výst}\,dt = -\frac{\omega_{vst}}{p_{id}^2}\sum_k \int \Delta p_k \sin\left(\frac{2\pi\omega_{vst}}{T_k\, p_{id}}t + \gamma_k\right)dt = \frac{\omega_{vst}}{p_{id}^2}\sum_k \frac{\Delta p_k T_k\, p_{id}}{2\pi\omega_{vst}}\cos\left(\frac{2\pi\omega_{vst}}{T_k\, p_{id}}t + \gamma_k\right)$$

Po úpravě vychází

$$\Delta\varphi_{E\,výst} = \frac{1}{2\pi\ p_{id}}\sum_k \Delta p_k T_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_k}\varphi_{výst\ id} + \gamma_k\right) = \sum_k \Delta\varphi_{Ek} \qquad (27)$$

Kinematickou chybu úhlu nejvíce ovlivňují složky s největší periodou T_k. Mezi k – tou složkou chyby ($\sin$) a jí způsobenou chybou úhlu ($\cos$) je fázový posuv $\pi/2$.

5.2 Zatížený převod

Pro určitý zatěžující moment na výstupu $M_{výst}$ má převodovka torzní tuhost $K_{výst}$, která ale může místně kolísat okolo určité střední hodnoty $K_{stř}$ v závislosti na poloze výstupního hřídele, neboť statistické rozložení výrobních chyb ξ v **obr.21** se s otáčením převodovky mění. Podobně jako u kinematického převodu předpokládáme, že odchylka $\Delta K_{výst}$ od střední hodnoty $K_{stř}$ obsahuje k harmonických složek s amplitudami ΔK_k a s periodami $T_k\,[rad]$, opět vztaženými na úhel **výstupního** hřídele:

$$\Delta K_{výst} = \sum_k \Delta K_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_k}\varphi_{výst\ id} + \beta_k\right) \qquad (28)$$

Opět předpokládáme, že místní odchylka tuhosti je oproti její střední hodnotě velmi malá, tj. $\Delta K_{výst} << K_{stř}$. Při úpravě následujícího výrazu zjednodušíme jmenovatel zanedbáním součinu $\Delta K_{výst}\cdot K_{stř}$, takže

$$\Delta\varphi_{Lvýst} = \frac{M_{výst}}{K_{stř} + \Delta K_{výst}} - \frac{M_{výst}}{K_{stř}} = \frac{-M_{výst}\sum_k \Delta K_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_k}\varphi_{výst\ id} + \beta_k\right)}{K_{stř}^2} = \sum_k \Delta\varphi_{Lk}$$

Kolísání polohy ($-\sin$) je v protifázi s kolísáním tuhosti ($\sin$). Celková torzní deformace při působení momentu $M_{výst}$ je součtem statické deformace a proměnné složky $\Delta\varphi_{Lvýst}$:

$$\varphi_{Lvýst} = \frac{M_{výst}}{K_{stř}} + \Delta\varphi_{Lvýst} = \frac{M_{výst}}{K_{stř}} + \sum_k \Delta\varphi_{Lk} = \frac{M_{výst}}{K_{stř}} - \frac{M_{výst}}{K_{stř}^2}\sum_k \Delta K_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_k}\varphi_{výst\ id} + \beta_k\right) \qquad (29)$$

Výsledná chyba na výstupním hřídeli zatížené převodovky je součtem torzní deformace (29) a kinematické chyby (27):

$$\Delta\varphi_{Cvýst} = \varphi_{Lvýst} + \Delta\varphi_{Evýst} = \frac{M_{výst}}{K_{stř}} + \sum_k \Delta\varphi_{Lk} + \sum_k \Delta\varphi_{Ek} \qquad (30)$$

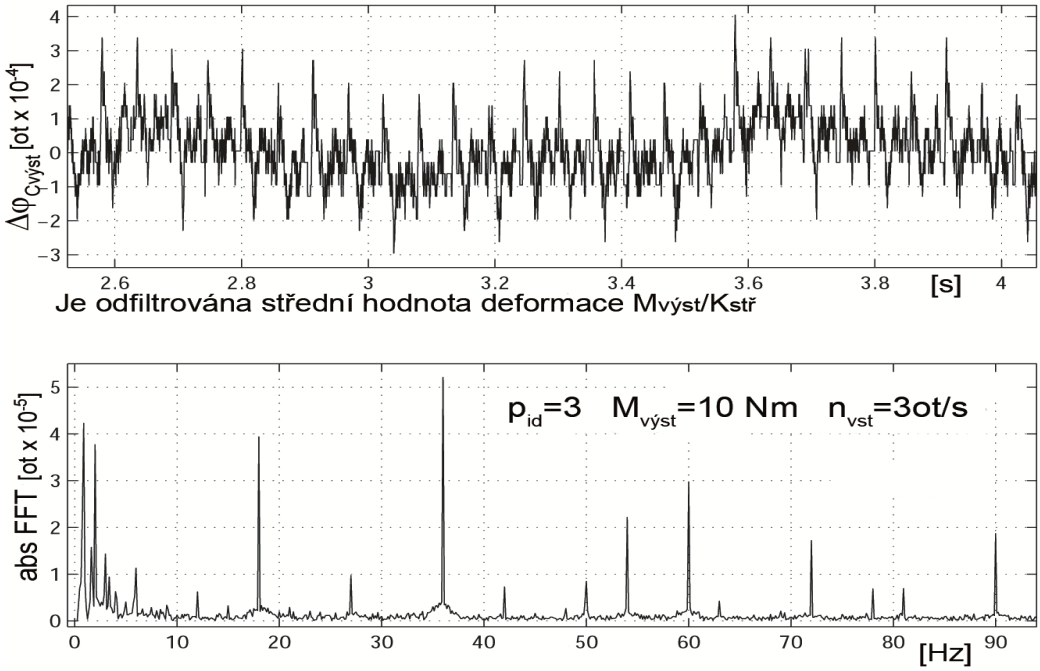
Se zatížením převodovky nemusí nutně dojít ke zhoršení přesnosti a rovnoměrnosti chodu, neboť v součtech spektrálních složek $\Delta\varphi_{Lk}$ a $\Delta\varphi_{Ek}$ záleží kromě velikosti amplitud i na příslušných fázových posuvech β_k, γ_k, které mohou vést v příznivých případech ke vzájemné kompenzaci chyb deformačních a kinematických.

5.3 Měření kinematické přesnosti

Při rovnoměrné rotaci vstupního hřídele a konstantním zátěžném momentu se s dostatečně vysokou vzorkovací frekvencí snímají úhly vstupního i výstupního hřídele a dosazují do vztahu pro celkovou chybu, který je obdobou (23), tj. $\Delta\varphi_{Cvýst} = \varphi_{výst} - \varphi_{vst}/\,p_{id}$ (požadavky na snímače úhlů zůstávají stejné jako při měření deformační charakteristiky).

Získaný časový průběh chyby bývá většinou velmi nepřehledný a je nutno vypočítat z něj frekvenční spektrum. **Vstupní rychlost by při měření měla být co nejrovnoměrnější, neboť při jejím eventuálním kolísání může výrazněji vystoupit vliv setrvačných sil od urychlovaných hmot uvnitř převodovky, což má stejný důsledek, jako kdyby vnější zatěžující moment kolísal.** Ve frekvenčním spektru kinematické chyby se potom objeví i parazitní kmitočty, způsobené hnacím motorem. Takové zkreslení nastane i v případě, že by převodovka měla dokonale konstantní tuhost, takže nebudeme schopni zjistit absenci nebo přítomnost složek $\sum \Delta\varphi_{Lk}$ v rovnici (29). Proto se doporučuje raději zjišťovat tuhost opakovaným měřením zatěžovací charakteristiky podle **kap.4.8**.

Příklad takového „nešťastného“ měření, kde se prolínají vlivy převodovky i motoru (dokonce i na shodných kmitočtech) je na **obr.34**. Planetová převodovka s převodem $p_{id} = 3$ byla zatížena momentem $10 Nm$ proti smyslu otáčení při otáčkách hnacího motoru $180/\min$. V levé části frekvenčního spektra zřetelně vystupuje otáčková frekvence výstupního hřídele $1 Hz$ a její některé násobky, ale nejvýrazněji se projevuje pólová frekvence magnetů rotoru (6 pólů), resp. drážková frekvence vinutí statoru (18 drážek) a jejich vyšší harmonické složky $(36,54,72,90 Hz...)$. Prolínání vlivů motoru a převodovky velmi ztěžuje identifikaci příčin chyb u kompaktních pohonných jednotek např. z **obr.3a,b** nebo **5a,b**. Pro větší informovanost je nutno zkoumat nejen amplitudové, ale i fázové spektrum chyb, neboť v horším případě (např. již vlivem vzájemné úhlové montáže převodovky a motoru) může docházet ke sčítání amplitud.



Obr.34 *Měření kinematické chyby planetové elektropřevodovky (nahoře časový průběh, dole amplitudové frekvenční spektrum)*

B6. Měření na jiných typech převodů

Výše uvedená statistická metoda výpočtu tuhosti koaxiálních převodovek je po určitých modifikacích použitelná i na kuličkové matice a ložiska (u kuličkových matic je samozřejmým předpokladem předpětí, tedy záporná vůle). Postup z **kap.A5** sice respektuje nelineární Hertzův vztah mezi silou a deformací, na druhé straně je ale nepřesný v odhadu tzv. „efektivního počtu“ nosných kuliček, kterým se zohledňují výrobní chyby (v **kap.5.2** je uvedeno nejistých 70%). Oba přístupy k výpočtu tuhosti vedou

na maximum v odlehčeném stavu, jak je vidět ze srovnání grafů na **obr.20** v **kap.A5** a **obr.27** v **kap.B4**.

Měření kinematické přesnosti jiných typů převodů se podobně jako v **kap.5.3** děje synchronním vzorkováním naměřených poloh na vstupu i výstupu.

Posuvová osa s ozubeným řemenem a kuličkovým šroubem

U proměřované posuvové osy podle **obr.1** v **kap.A1** byl místo ozubeného soukolí použit ozubený řemen. Rovnice (23) přejde na tvar

$$\Delta y = y - \frac{h_{id}\, z_1}{z_2}\varphi_M \qquad (31)$$

Δy ... celková chyba polohy stolu;

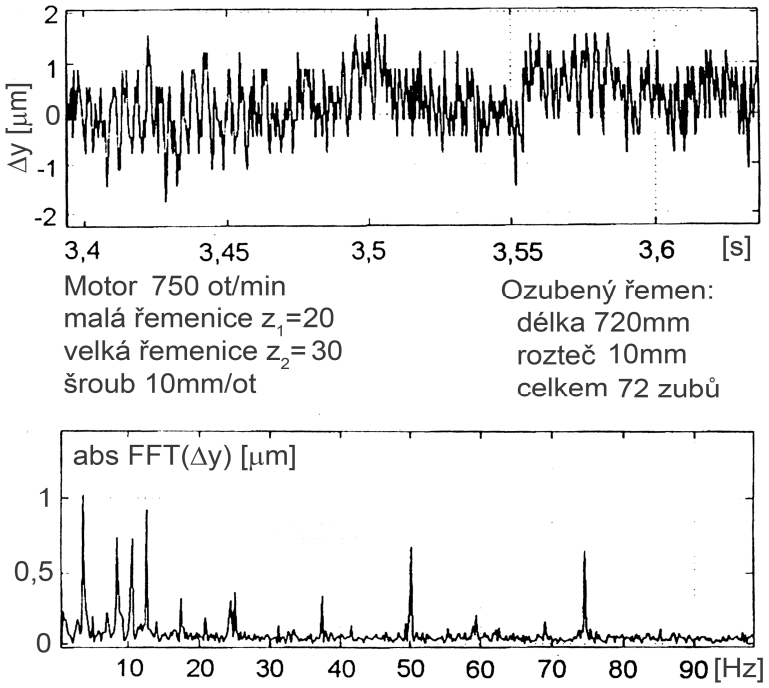
y ... údaj lineárního snímače polohy stolu;

φ_M ... údaj snímače natočení motoru;

$z_2/z_1 = p_{id}$ ... teoretický (ideální) převod;

$h_{id}[m/rad] = s/2000\pi\ [mm/ot]$ ... katalogový údaj stoupání šroubu (ideální stoupání).

Příklad měření kinematické chyby Δy při otáčkách motoru 750 $ot/\min$ (12,5 ot/s) je na **obr.35**.



Obr.35 *Měření kinematické chyby posuvové osys kuličkovým šroubem (nahoře časový průběh, dole amplitudové frekvenční spektrum)*

Z frekvenčního spektra celého převodového řetězce je možno odhadnout vlivy jeho jednotlivých částí na těchto kmitočtech a jejich násobcích:

$12{,}5 \cdot 20/72 = 3{,}5\ (10{,}5\ \text{a}\ 21)\ Hz$ ...nerovnoměrné vytahání řemenu po jeho obvodu;

$12{,}5 \cdot 20/30 = 8{,}3\ (16{,}6)\ Hz$ ....výstřednost velké řemenice (druhý hřídelový kmitočet);

$12{,}5\ (25\ \text{a}\ 37{,}5)\ Hz$ ... výstřednost malé řemenice (první hřídelový kmitočet);

- všudypřítomný síťový kmitočet 50 *Hz*...rušení elektroniky motoru;

$12{,}5 \cdot 6 = 75\ Hz$ ...počet pólů hnacího šestipólového motoru;

$12{,}5 \cdot 20 = 250\ Hz$ (již mimo zobrazený výřez)...zubový kmitočet.

Ve frekvenčním spektru se nutně projeví i nerovnoměrný chod hnacího motoru (zde 75*Hz*), neboť vzniklé setrvačné síly způsobují deformace pružného řemenu. Kromě hřídelových kmitočtů motoru (12,5*Hz*) a šroubu (8,3*Hz*) se objevují i jejich vyšší harmonické složky, což svědčí o tom, že kromě výstředné montáže řemenic je pravděpodobná i jejich chyba ovality. Periodická chyba stoupání šroubu může být „schována“ na druhém hřídelovém kmitočtu 8,3*Hz*. U dlouhých šroubů jsou ale častější délkové chyby neperiodického charakteru, k jejichž identifikaci by bylo nutno instalovat další úhlový snímač natočení šroubu φ_S a upravit vztah (31) na tvar

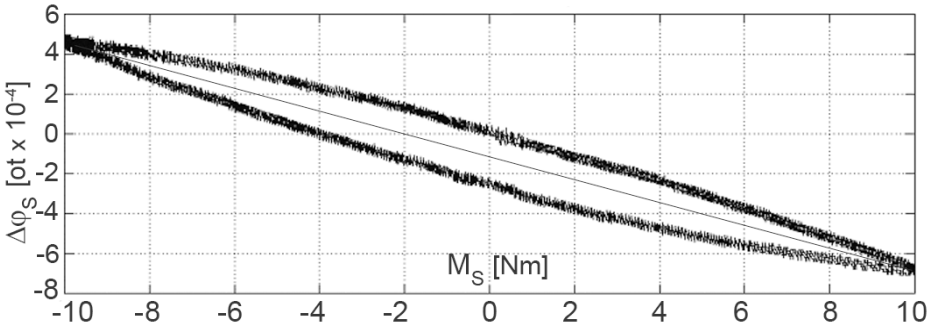
$$\Delta y = y - h_{id}\varphi_S$$

Frekvence 3,5*Hz* odpovídá počtu oběhů celého řemenu za vteřinu a její násobky 10,5*Hz* a 21*Hz* mohou být způsobeny chybami rozteče po jeho délce. Bližší informaci bychom mohli získat pomocí vztahu

$$\Delta\varphi_S = \varphi_S - \varphi_M z_1 / z_2$$

Deformační charakteristika ozubeného řemenu

Z rozboru spektra na **obr.35** je možno učinit závěr, že nejslabším místem celého převodového řetězce byl ozubený řemen. To se potvrzuje i z jeho deformační charakteristiky na **obr.36**, která vykazuje velkou hysterezi a malou tuhost. Ze střední směrnice je možno odhadnout hodnotu (vztaženou na osu šroubu) $M_S / \Delta\varphi_S = 20\,Nm / 12 \cdot 10^{-4}\,ot \approx 46\,Nm/\deg$.



Obr.36 *Deformační charakteristika ozubeného řemenu*

Literatura

[1] *Souček, P.: Pohony výrobních zařízení (servomechanismy) Vydavatelství ČVUT 1994, ISBN 80-01-01159-3*

[2] *Kalender, T.: Statistische Modellierung von Präzisionsgetrieben in elektromechanischen Antriebsystemen (disertační práce TU Hannover), VDI-Verlag GmbH-Düsseldorf 1994 ISBN 3-18-323601-X*

[3] *Souček, P.: Servomechanismy ve výrobních strojích Vydavatelství ČVUT 2004, ISBN 80-01-02902-6*

[4] *Firemní podklady Wikov, Rohloff AG, SPEEDHUB 500/14*

DODATEK - měrové jednotky v pohonech

V tomto textu jsou používány hlavně čtyři ze sedmi základních zákonných měrových jednotek soustavy SI: kilogram [kg], metr [m], sekunda [s], ampér [A]. Méně nebo vůbec není použit kelvin (teplota), kandela (svítivost) a mol (látkové množství).

Pro úhlové míry používáme přednostně radián [rad] (rozměr [1] .... plný úhel/2π).

Se sjednocováním kvantifikace mechanických a elektrických přírodních dějů začal již Charles Augustin Coulomb, který svůj zákon o přitažlivých silách mezi elektrickými náboji (1786) formálně (údajně intuicí) přizpůsobil Newtonovu gravitačnímu zákonu. S vývojem poznání souvislosti elektřiny a magnetizmu podle klasické fyziky (Oersted, Ampére, Faraday, ... atd. až po Maxwella) vyvstávala stále naléhavěji nutnost přijmout jednotnou měrovou soustavu pro všechna odvětví fyziky.

Např. ampér, zařazený mezi základní jednotky, je dnes definován jako proud I=1[A], způsobující vzájemnou sílu $F=2\cdot10^{-7}$[N] mezi dvěma nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe 1[m], vztaženou na délku rovněž 1[m]. Čtenář si zde připomene jednotu přírodních věd a uvědomí si, že striktní rozdělení sfér činnosti při vývoji stroje a návrhu pohonů mezi profese "strojař " a "elektrikář" není na místě. Elektrické a mechanické veličiny i jejich měrové jednotky proto nebývají uváděny odděleně. Jejich označování se ale pro nedostatek vhodných symbolů někdy překrývá a je třeba rozlišovat například (vektory jsou psány tučně):

- ***F*** *.... síla (vektor), ale [F] .... farad (jednotka kapacity C)*
- *C .... kapacita, ale [C] .... coulomb (jednotka elektrického náboje Q)*
- *L .... indukčnost, ale **L**[m] nebo **l** [m] .... délka přímého vodiče (chápána jako vektor)*
- ***H*** *.... intenzita magnetického pole (vektor), ale [H] .... henry (jednotka indukčnosti L)*
- *T .... perioda(doba cyklu), ale [T] .... tesla (jednotka magnetické indukce **B**)*
- *Ω .... úhlový kmitočet, ale [Ω] .... ohm (jednotka pro elektrický odpor R)*
- *E, E_{kin}, E_{pot} .... energie (kinetická, potenciální), ale **E** .... intenzita elektrického pole*
- *W .... práce, energie, teplo, ale [W] .... watt (jednotka pro výkon!!)*
- *P .... výkon (někdy také P... příkon a N .... výkon), ale [N] .... jednotka pro sílu*

atd.

Jednotky jsou zde na rozdíl od veličin psány v hranatých závorkách, i když to nebývá vždy zvykem. Pokud správné chápání symbolů nevyplývá z výkladu, je na rozdíly zvlášť upozorněno.

Odvozené měrové jednotky jsou vytvořeny ze základních přes známé fyzikální zákony z mechaniky a elektrotechniky formou součinů a podílů. Uvádíme jen několik z nich, potřebných ve výkladu o mechanických převodech a elektrických pohonech:

- *1coulomb [C], [As]....el. náboj Q, přenesený proudem I =1[A] za čas t =1[s] (dQ=I·dt);*
- *1 newton [N], [kgm/s^2] .... síla **F**, udělující hmotě m=1[kg] zrychlení **a**=1[m/s^2] (**F**=m·**a**);*
- *1 joule [J], [Nm], [kgm^2/s^2] .... mechanická práce W síly 1[N] na dráze 1[m],*
  - *nebo mech. práce W krouticího momentu 1[Nm] na úhlu 1[rad].*

  Pozor: krouticí moment [Nm] je vektor (rameno x síla ... vektorový součin), ale práce [Nm] je skalár (síla · dráha .... skalární součin);
- *1 watt [W], [Nm/s], [kgm^2/s^3] .... mechanický výkon P, neboli práce síly 1[N] při rychlosti 1[m/s] na dráze 1[m],*
  - *nebo práce krouticího momentu 1[Nm] při rychlosti 1rad/s na úhlu 1 [rad].*

*Ke sjednocení měrových jednotek u pojmů „mechanická“ a „elektrická“ práce je vhodné zavést pojem „**intenzita elektrického pole**“ (vektor, znak **E**), což je síla, kterou elektrické pole působí ve směru svých siločar na jednotkový bodový náboj 1[C]. Mezi silou **F** a nábojem obecné velikosti Q platí vztah **F**[N]=**E**·Q[C], takže rozměr intenzity je*

- ***E*** *[N/C], [kgm/As^3].*

Dále budeme předpokládat ***stacionární homogenní elektrické pole*** *(tj. pole, jehož siločáry jsou přímé rovnoběžné a stejně od sebe vzdálené). Práce síly* ***F****[N] při přemístění náboje Q[C] na vzdálenost* ***L*** *[m] ve směru siločar je (již bez vektorového zápisu)*

$$W_{Q,L} = F \cdot L = E[kgm/As^3] \cdot Q\,[As] \cdot L[m] = E \cdot Q \cdot L[kgm^2/s^2],[Nm],[J].$$

Množství práce, potřebné k přemístění jednotkového bodového náboje 1[C] o míru L [m] je

$$W_{1C,L[m]} = W_{Q,L}/Q = E \cdot L$$

Součin $E \cdot L = U\ [kgm^2/As^3]$ *.... elektrické napětí mezi konci úsečky L. Jeho jednotkou je*

- 1 volt [V], $[kgm^2/As^3]$ *.... napětí, pro které je tato práce právě 1[J].*

Další jednotkou intenzity ***E*** *kromě [N/C],* $[kgm/As^3]$ *je tedy také [V/m].*

Definice napětí nám umožní sjednotit i pojmy „mechanický“ a „elektrický“ výkon. Předpokládejme, že vodičem o délce L protéká konstantní proud I [A] a za čas dt je přenesen náboj dQ=I·dt s vynaložením práce dW síly F elektrického pole. Potřebné napětí mezi konci vodiče je

$$U = dW/dQ = dW/(I \cdot dt)$$ *neboli*

- $U \cdot I = dW/dt = P$ *[W], [Nm/s],* $[kgm^2/s^3]$ *.... elektrický výkon. U stejnosměrného proudu je výkon* $P = U \cdot I$ *[W], [VA];*

- 1 ohm [Ω], [V/A] .... elektrický odpor R .... konstanta úměrnosti mezi stejnosměrným proudem a napětím (z Ohmova zákona $U = R \cdot I$*);*

- $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = U^2/R$ *[W],* $[\Omega A^2]$*,* $[V^2/\Omega]$*; jiné vyjádření výkonu z Ohmova zákona:*

- jiná definice jednoho voltu pomocí výkonu: 1 volt je napětí mezi konci vodiče, při kterém je proudem 1[A] do vodiče dodáván výkon 1[W];

- $[A^2s^4/kgm^2]$ *.... jednotka kapacity C (schopnosti tělesa přijmout náboj). Kapacitu 1[F] má kondenzátor, mezi jehož elektrodami vyvolá náboj 1[As] napětí 1[V]. Čím větší je kapacita, tím větší náboj je třeba ke zvýšení napětí. Mění-li se proud s časem, je nutno změnu náboje a napětí psát v diferenciálním tvaru: 1 farad [F], [C/V], [As/V],*

$$dQ = I(t) \cdot dt = C \cdot dU$$

a po úpravě a integraci vyjde vztah pro napětí na kapacitě

$$U_C(t) = (1/C) \cdot \int I(t)dt$$

- součin $\tau = R \cdot C$ $[V/A] \cdot [As/V] = [s]$ *.... tzv. časová konstanta obvodu odpor – kondenzátor.*

Dále uvedeme veličiny, popisující ***magnetické pole****, jehož vznik je obecně způsoben pohybem elektrického náboje:*

- magnetický tok Φ *(skalár) kvantifikuje magnetické pole názorným způsobem jako počet indukčních čar, procházejících rovinnou plochou* ***S****. Je popsán skalárním součinem*

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}$$

- ***S*** $[m^2]$ *.... orientovaná plocha (vektor se směrem její normály)*

- ***B*** *.... magnetická indukce (vektor mající směr indukčních čar a vyjadřující jejich hustotu, tj. počet, procházející rovinnou plochou 1*$[m^2]$*, postavenou k nim kolmo).*

Podle ***Faradayova indukčního zákona*** *se do uzavřeného elektrického obvodu (závitu, cívky), nalézajícího se v proměnném magnetickém poli, indukuje napětí*

$$U_E = -\,d\Phi/dt$$

(změna magnetického toku může být vyvolána pohybem obvodu, pohybem zdroje mag. toku nebo i změnou proudu);

- rozměr magnetického toku Φ *je tedy [Vs], znak [Wb] .... „weber“;*

- ***B*** *je* $[Vs/m^2]$*, znak [T] .... „tesla“.*

Proměnným proudem I(t) si vodič (závit, cívka) vytvoří proměnné magnetické pole $\Phi(t)$*, indukující podle F. zákona do vodiče napětí, působící proti příčině proudu:*

$$U_L = - d\Phi/dt = - (d\Phi/dI)\cdot (dI/dt) = - L\cdot (dI/dt)$$

Součinitel $L = d\Phi/dI$ („indukčnost“) charakterizuje schopnost cívky a jejího okolí vytvořit si proudem své magnetické pole. Rozměr indukčnosti je [Vs/A], znak [H] .... „henry“;

- součin $L\cdot C$ má rozměr $[H]\cdot[F]=[Vs/A]\cdot[As/V]=[s^2]$;
- tzv. vlastní kmitočet netlumeného oscilátoru (obvodu indukčnost – kapacita) je

$$\Omega = (L\cdot C)^{-1/2} \quad [1/s], [rad/s];$$

- tzv. elektrická časová konstanta obvodu indukčnost - odpor (cívky, vinutí motoru) je podíl

$$\tau_E = L/R$$

a skutečně platí, že $[H] / [\Omega]=[Vs/A] / [V/A]=[s]$;

Rozepsáním Faradayova zákona vychází

$$U_E = - d\Phi/dt = - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})/dt = - (d\mathbf{B}/dt)\cdot\mathbf{S} - \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{S}/dt)$$

Dále budeme předpokládat **stacionární a homogenní magnetické pole**. Jeho indukční čáry jsou přímé, rovnoběžné, stejně od sebe vzdálené a $\mathbf{B}=konst$, tj. $d\mathbf{B}/dt = 0$ a platí

$$U_E = - \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{S}/dt)$$

Změnu toku vyvoláme pohybem přímého vodiče o délce $\mathbf{L}$, který bude protínat indukční čáry pohybem v rovině k nim kolmé a kolmo ke své délce rychlostí $\mathbf{v}=d\mathbf{y}/dt$ [m/s]. Vektor plošné rychlosti vodiče je

$$d\mathbf{S}/dt = d(\mathbf{L} \times \mathbf{y})/dt = (d\mathbf{L}/dt) \times \mathbf{y} + \mathbf{L} \times (d\mathbf{y}/dt)$$

ale délka $\mathbf{L}=konst$, takže $d\mathbf{L}/dt=0$ a zbylý vektor má směr indukčních čar:

$$d\mathbf{S}/dt = \mathbf{L} \times (d\mathbf{y}/dt) = \mathbf{L} \times \mathbf{v}$$

Faradayův zákon se zjednoduší na skalární součin dvou rovnoběžných vektorů

$$U_E = - \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{S}/dt) = - |\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{L}|\cdot|\mathbf{v}| \text{ (již jen prostý součin).}$$

Opět vychází rozměr magnetické indukce $\mathbf{B}$ $[Vs/m^2]$, [T];

- 1 tesla .... magnetická indukce pole, které do vodiče o délce 1[m] při jeho rychlosti 1[m/s] (kolmo a příčně k indukčním čarám) indukuje napětí 1[V].

Magnetická indukce $\mathbf{B}$ primárně vyjadřuje podle **Lorentzova vztahu** silové působení magnetického pole na náboj Q[As], pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$[m/s]:

$$d\mathbf{F}=dQ\cdot\mathbf{v} \times \mathbf{B}=I\cdot dt\cdot(d\mathbf{L}/dt) \times \mathbf{B}= I\cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Po integraci vychází síla, působící na přímý vodič aktivní délky $\mathbf{L}$, protékaný proudem I:

$$\mathbf{F} = I\cdot\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

(vektorový součin podle pravidel pravotočivé vývrtky nebo levé ruky - „prsty ve směru proudu, indukční čáry míří do dlaně, síla ve směru palce“).

Jednotkou magnetické indukce $\mathbf{B}$ je kromě [T], $[Vs/m^2]$ tedy i [N/Am] nebo $[kg/As^2]$. Pole 1[T] působí silou 1[N] na kolmý vodič o délce 1[m], protékaný proudem 1[A].

<u>Některé další jednotky</u>:

j .... imaginární jednotka, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = +1$ ....

- úhlová rychlost ω, ale také úhlový kmitočet ω nebo Ω [rad/s] nebo [1/s];
- počet kmitů (obecně cyklů) za vteřinu $f = \omega/2\pi$ [Hz] ale někdy také [1/s] !!!;
- doba cyklu (kmitu) $T=1/f = 2\pi/\omega$ [s];
- převod $p_{jk}= \omega_j/\omega_k$ [1] je poměr (v tomto případě úhlové) rychlosti <u>hnacího</u> členu j ku rychlosti <u>hnaného</u> členu k;
- celkový převod q[rad/m] mezi rychlostí rotačního motoru [rad/s] a rychlostí suportu [m/s];
- stoupání šroubu h[m/rad] má tedy význam reciprokého převodu mezi posuvem a rotací;

Pro obvyklý údaj v katalozích výrobců „stoupání na otáčku“ platí s[mm/ot]$=2000\pi h$.

Na použití <u>vedlejších a doplňkových měrových jednotek</u> je zvlášť upozorněno („otáčky“ n [1/min], délka [mm],[μm] atd.) nebo vyplývají z fyzikálních zákonů, např.

- tíhové zrychlení g=9,81[m/s^2] .... tíhové zrychlení na povrchu Země ve středním zeměpisném pásmu (síla, působící na hmotu 1kg);

- úhlový stupeň [^{0}], [deg] .... jedna třistašedesátina plného úhlu, $1^0 = 2\pi/360$[rad];

- úhlová minuta [']=1/60[deg], úhlová vteřina ["]=1/60['].

Frekvenční charakteristiky dynamických soustav (poměr amplitud A_1/A_2 a fázový posuv φ dvou harmonických pohybů s kmitočtem ω) jsou zobrazovány v logaritmických souřadnicích s jednotkami $\log_{10}\omega$, $20\log_{10}(A_1/A_2)$ [dB] a $\log_{10}\omega$, φ [rad]. Jeden radián je $180^0/\pi \approx 57{,}3^0$.