

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická



Diplomová práce

## **Modelování robotické helikoptéry**

*Bc. Petr Bartoš*

Vedoucí práce: Ing. Jan Chudoba

Studijní program: Kybernetika a robotika

Obor: Kybernetika a robotika

Leden 2019



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 7.1.2019

.....



## **Poděkování**

Chtěl bych v první řadě poděkovat své rodině za podporu během celého studia a dále všem, kteří mě podporovali a kteří mi v mé práci pomáhali při řešení problémů. Především děkuji Ing. Janu Chudobovi za vedení práce.



## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá vytvořením realistického modelu robotické vícerotorové helikoptéry pro účely jejího řízení. Práce zahrnuje seznámení s dynamikou vícerotorových helikoptér a přehled metod identifikace dynamických systémů. Identifikace navrženého modelu je provedena na základě měření na reálné helikoptěře. Verifikace výsledného modelu je provedena proti datům získaných z reálné helikoptéry.

**Klíčová slova:** modelování, identifikace, bezpilotní letoun

## **Abstract**

This thesis deals with the creation of a realistic model of a robotic multi-engine helicopter for the purpose of its control. The thesis includes familiarization with the dynamics of multi-engine helicopters and an overview of methods of identifying dynamic systems. The identification of the proposed model is based on measurements on a real helicopter. Verification of the resulting model is performed against data obtained from a real helicopter.

**Keywords:** modelling, identification, unmanned aerial vehicle





## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bartoš** Jméno: **Petr** Osobní číslo: **420355**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra měření**  
Studijní program: **Kybernetika a robotika**  
Studijní obor: **Kybernetika a robotika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Modelování robotické helikoptéry**

Název diplomové práce anglicky:

**Modelling of the Robotic Helicopter**

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je vytvoření realistického modelu robotické vícerotorové helikoptéry pro účely jejího řízení. Model bude respektovat řízení helikoptéry v horizontálním a vertikálním směru a otáčení kolem svislé osy.

- Seznamte se s dynamikou vícerotorových helikoptér.
- Prostudujte metody identifikace dynamických systémů a zvolte vhodnou strukturu modelu helikoptéry a metodu pro identifikaci jeho parametrů.
- Na základě měření na reálné helikoptéře a proveďte identifikaci navrženého modelu.
- Výsledný model verifikujte proti datům získaným z reálné helikoptéry a vyhodnoťte jeho využitelnost pro následný návrh regulátoru rychlosti a polohy helikoptéry.

Seznam doporučené literatury:

- [1] ALAIMO, A., V. ARTALE, C. MILAZZO, A. RICCIARDELLO a L. TREFILETTI. Mathematical Modeling and Control of a Hexacopter. International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Grand Hyatt Atlanta, Atlanta, GA, 2013, (May 28-31, 2013).
- [2] MOUSSID, Mostafa, Adil SAYOUTI, a Hicham HICHAM. Dynamic Modeling and Control of a HexaRotor using Linear and Nonlinear Methods. International Journal of Applied Information Systems (IJ AIS). Foundation of Computer Science FCS, New York, USA, 2015, (No.5, August 2015). ISSN 2249-0868.
- [3] BÁČA, Tomáš. Model predictive control of micro aerial vehicle using onboard microcontroller. Praha, 2015. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze. Fakulta elektrotechnická. Katedra počítačů
- [4] BRESCIANI, Tommaso. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Lund, 2008. Master Thesis. Lund University. Department of Automatic Control.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jan Chudoba, ČIIRK Praha 6**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **07.11.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: \_\_\_\_\_

Platnost zadání diplomové práce:

**do konce zimního semestru 2019/2020**

Ing. Jan Chudoba  
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.  
podpis děkana(ky)



# Obsah

<b>Seznam obrázků</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Dynamika dronu</b>	<b>2</b>
2.1 Matematický popis vlastností . . . . .	5
2.2 Matematický popis pohybu . . . . .	7
<b>3 Přístupy identifikace</b>	<b>13</b>
3.1 Greybox identifikace . . . . .	13
3.1.1 Základní měření . . . . .	13
3.1.2 Odvození geometrie a dynamiky . . . . .	14
3.1.3 Experimentální měření . . . . .	19
3.1.4 Tabulkové hodnoty a porovnání . . . . .	22
3.2 Blackbox identifikace . . . . .	23
3.2.1 Dynamický LTI systém . . . . .	24
3.2.2 Geometrické metody . . . . .	25
3.2.3 Maticové aproximační metody . . . . .	27
3.2.4 Singular Value Decomposition . . . . .	30
<b>4 Identifikace konstant modelu</b>	<b>31</b>
4.1 Provedení experimentu . . . . .	32
4.2 Zvolené metody aproximace . . . . .	35
4.2.1 Aproximace pomocí SVD . . . . .	35
4.2.2 Dvoubodová metoda aproximace . . . . .	36
4.3 Zpracování dat . . . . .	36
<b>5 Porovnání kvality modelu</b>	<b>40</b>
5.1 Budoucí regulace polohy a rychlosti . . . . .	44
<b>6 Závěr</b>	<b>45</b>
<b>7 Literatura</b>	<b>47</b>



## Seznam obrázků

2.1	Schéma hexakoptéry s význačnými veličinami. Převzato z [1]. . . . .	2
2.2	Schéma rozložení tahu motorů pro řízení kolektivního tahu vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2]. . . . .	3
2.3	Schéma rozložení tahu motorů pro boční náklon vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno. . . . .	4
2.4	Schéma rozložení tahu motorů pro podélný sklon vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno. . . . .	4
2.5	Schéma rozložení tahu motorů pro směrovou rotaci vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno. . . . .	5
2.6	Souřadnicové systémy dronu. Převzato z [3]. . . . .	6
2.7	Schématické propojení ideálních subsystémů hexakoptéry. Převzato z [3] . . . .	12
3.1	Model rotoru. Převzato z [8] a upraveno. . . . .	14
3.2	Model nosné konstrukce. Převzato z [1] a upraveno. . . . .	15
3.3	Model řídicího modulu. Převzato z [8] a upraveno. . . . .	16
3.4	Model motoru. Převzato z [8]. . . . .	17
3.5	Model vrtule. Převzato z [8]. . . . .	18
3.6	Sestava kyvadla pro měření setrvačnosti podle osy Z. Převzato z [10]. . . . .	20
3.7	Sestava kyvadla s kótami. Převzato z [10]. . . . .	21
3.8	Sestava kyvadla pro měření tahu motoru. Převzato z [10]. . . . .	22
3.9	Schématické znázornění Blackbox systému. Převzato z [12]. . . . .	23
3.10	Přehled nejvýznamějších I/O metod identifikace. Převzato z [14]. . . . .	26
3.11	Přechodová charakteristika systému 1. řádu. Převzato z [16] a upraveno. . . . .	27
3.12	Přechodová charakteristika systému N-tého řádu. Převzato z [16]. . . . .	28
3.13	Schématické zobrazení modelu systému aproximovaného metodou ARX. Převzato z [13]. . . . .	28
4.1	Fotografie identifikované hexakoptéry . . . . .	32
4.2	Fotografie hexakoptéry po havárii při měření dat . . . . .	34
4.3	Ukázka datového záznamu z testovacího letu (boční náklon - Roll). . . . .	37
4.4	Výstup algoritmu pro odhad systému pomocí SVD (rotace Roll). . . . .	37
4.5	Výstup algoritmu pro odhad systému pomocí SVD (rotace Pitch). . . . .	38
5.1	Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Pitch. . . . .	40
5.2	Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Roll. . . . .	41
5.3	Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Yaw. . . . .	42
5.4	Porovnání identifikovaných modelů pro odhad pohybu v ose Z. . . . .	42
5.5	Porovnání odhadu rychlosti v ose Y. . . . .	43
5.6	Porovnání odhadu rychlosti v ose X. . . . .	43



## 1 Úvod

Tato práce se zabývá analýzou a realizací matematického modelu hexakoptéry. Jedná se o šestivrtulový, dálkově ovládaný bezpilotní letoun, s možností vertikálního vzestupu i přistání. V angličtině jsou tyto letouny označovány zkratkami UAV – *Unmanned Aerial Vehicle* a VTOL – *Vertical Take-Off and Landing*. Obecně jsou však známé jako multikoptéry nebo drony.

V práci jsou zahrnuty dva různé přístupy identifikace modelu. Každý z těchto přístupů je teoreticky analyzován s ohledem na dynamiku a chování modelovaného systému. Následně je realizována identifikace modelu podle naměřených dat ze senzorů během průběhu letu hexakoptéry. Pro záznam dat byly využity senzory jimiž je dron vybaven, a také externí senzory v prostorách testovací laboratoře. Práci zakončuje vyhodnocení věrohodnosti odezev modelu v porovnání s reálným dronem. Matematický model bude sloužit pro návrhy a testování různých druhů regulací.

Drony v posledních několika letech zažívají obrovský rozmach, který je nejvíce znatelný v civilním letectví. Děje se tak hlavně kvůli jejich široké využitelnosti a relativně snadnému ovládní. Často slouží pro průzkum těžko dostupných míst, nebo oblastí, které jsou pro člověka nebezpečné. Druhy situací, ve kterých se drony nejvíce využívají jsou bezpečnostní nebo záchranné akce, armádní akce, profesionální natáčení a v poslední době i logistika. Kromě profesionálního využití slouží i jako zábava pro volný čas.

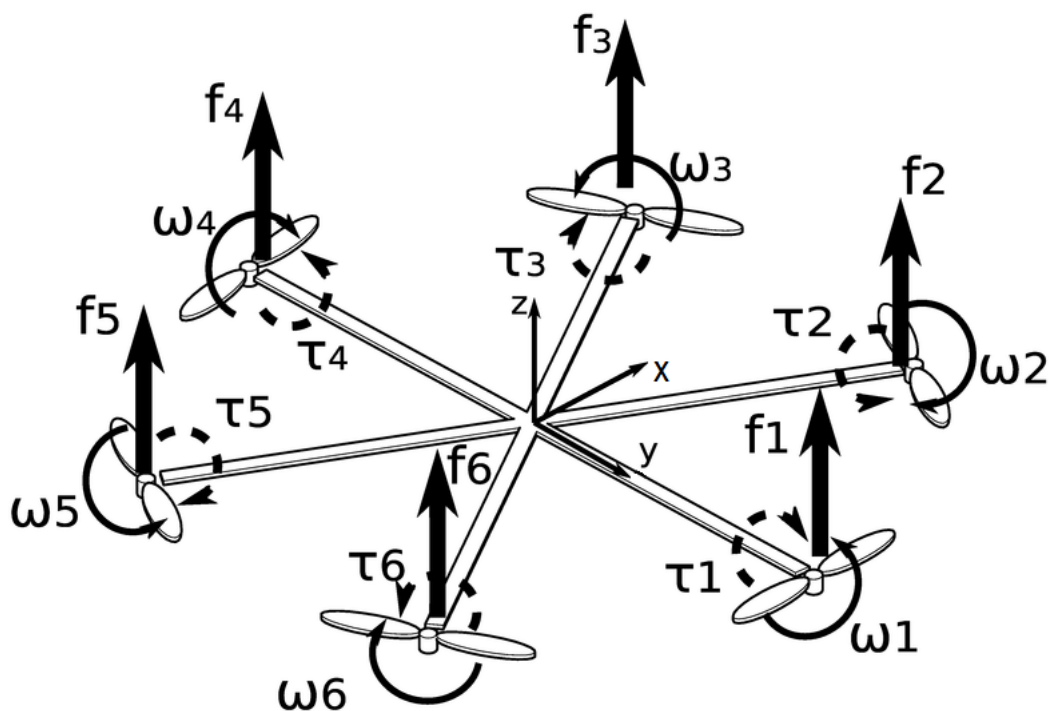
Nejznámějšími zástupci jsou čtyřvrtulové drony neboli quadrokoptéry. Každá multikoptéra je vybavena senzory sloužícími pro autonomní regulaci jednotlivých vrtulí nebo pro detailnější sledování letových veličin a polohy. Těmito senzory jsou 3-osý akcelerometr, 3-osý gyroskop a v neposlední řadě GPS přijímač. Dalším doplňujícím prvkem bývá často kamera.

Rozdělení dronů může být koncipováno i podle stupně autonomnosti. To znamená, jak složité úkoly je dron schopen plnit samostatně, bez zásahu člověka. Jestli je plně řízen dálkově, není autonomní a vlastní regulace spočívá jen v řízení otáček jednotlivých vrtulí pro zachování požadované rychlosti a orientace. Naopak plně autonomní dron je schopen sám doletět na místo určení, vyhýbat se překážkám, plánovat trajektorii letu a podobně.

## 2 Dynamika dronu

Hexakoptéra je šestivrtulový dron, patřící do skupiny tzv. multikoptér. Stavba těla hexakoptéry je přizpůsobena tak, aby se jednalo o pevné, středově vyvážené těleso. Tělo dronu se skládá ze šesti symetricky rozložených ramen, vycházejících ze středu tělesa. Vnější konce ramen tvoří vrcholy pomyslného šestiúhelníku. Na každém tomto vrcholu je umístěna vrtule, která je poháněna elektrickým motorem. Vrtule jsou rozděleny do dvou trojic, kde se jedna trojice vrtulí otáčí v jednom směru a druhá trojice v opačném směru. Vrtule, které se otáčejí ve stejném směru, spolu nesousedí. Při řízeném náklonu multikoptéry by kvůli tomu docházelo k nežádoucím rotacím. Řídící deska spolu s napájecím bateriovým systémem je pro zachování symetrie umístěna ve středu již zmiňovaného šestiúhelníku.

Řízení pohybu dronu probíhá skrze řízení otáček, respektive úhlové rychlosti, jednotlivých vrtulí. Jelikož se jedná o druh dronu VTOL, nebo-li letoun s vertikálním vzletem i přistáním, má každá vrtule tah směrem vzhůru a tlačí proud vzduchu dolů. Podle obrázku 2.1 vidíme, že u jednotlivých vrtulí můžeme definovat úhlovou rychlost  $\omega_i$ . Tato veličina má v závislosti na tvaru vrtule vliv na další dvě veličiny zásadně ovlivňující chování multikoptéry. První z nich je vertikální síla  $f_i$ , která umožňuje samotný let. Druhou veličinou je rotační moment  $\tau_i$ , který působí opačným směrem, než je směr otáčení vrtule. Multikoptéra setrvává ve stejné prostorové orientaci, pouze pokud je úhlová rychlost všech vrtulí stejná. Rotační momenty se tak vzájemně vruší.



Obrázek 2.1: Schéma hexakoptéry s význačnými veličinami. Převzato z [1].

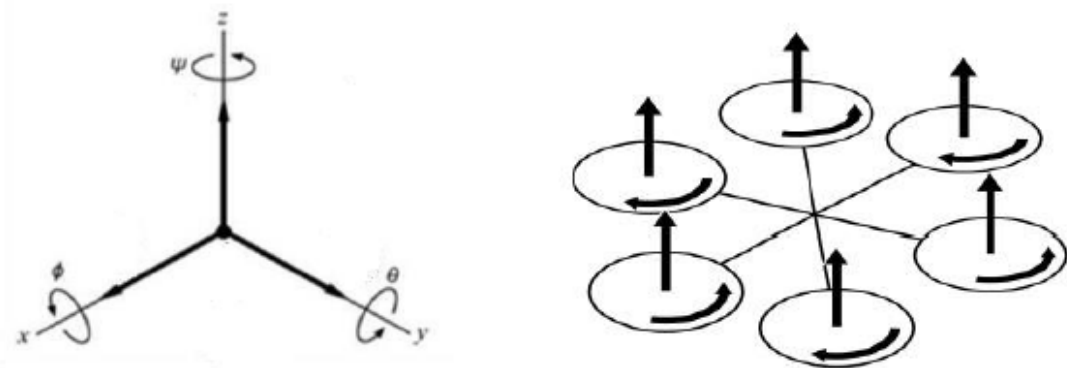


Stejně jako většina letounů má také hexakoptéra 6 stupňů volnosti, nebo-li 6DOF (*Degree Of Freedom*). Odtud se odvíjí čtyři základní pohyby tělesa, které je nutné regulovat:

- *Kolektivní tah*
- *Boční náklon* (Roll)
- *Podélný sklon* (Pitch)
- *Směrová rotace* (Yaw)

### Kolektivní tah

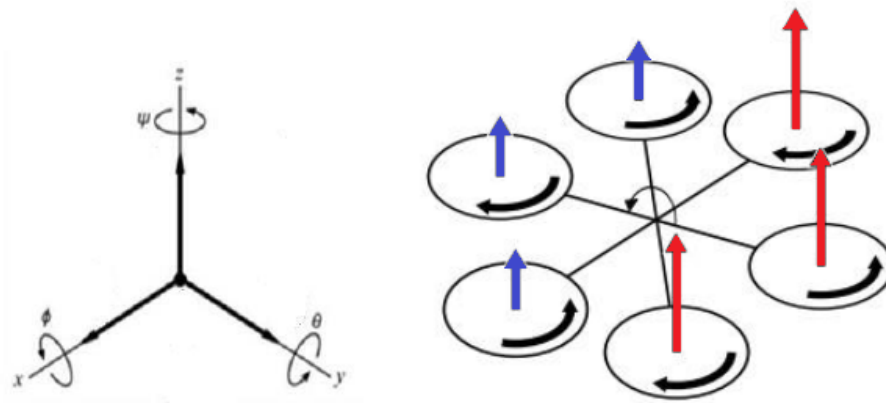
Rychlost, nebo přesněji úhlová rychlost vrtulí, případně síla tahu motorů je hlavní řídicí veličinou. Umožňuje pohyb a veškeré manévrování dronu. V závislosti na úhlové rychlosti vrtulí se úměrně mění jimi generovaný proud vzduchu, který umožňuje vertikální pohyb multikoptéry. Všechny vrtule mají stejný sklon lopatek a tím pádem při stejných otáčkách generují stejný tah. Ovládním kolektivního tahu se zvyšují nebo snižují otáčky všech vrtulí současně (viz. obrázek 2.2). Konstantní výkon rotorů je zapotřebí k překonání gravitační síly a udržení dronu ve vzduchu. Dále se zvyšováním otáček řídí stoupání a snižováním otáček klesání dronu.



Obrázek 2.2: Schéma rozložení tahu motorů pro řízení kolektivního tahu vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2].

### Roll

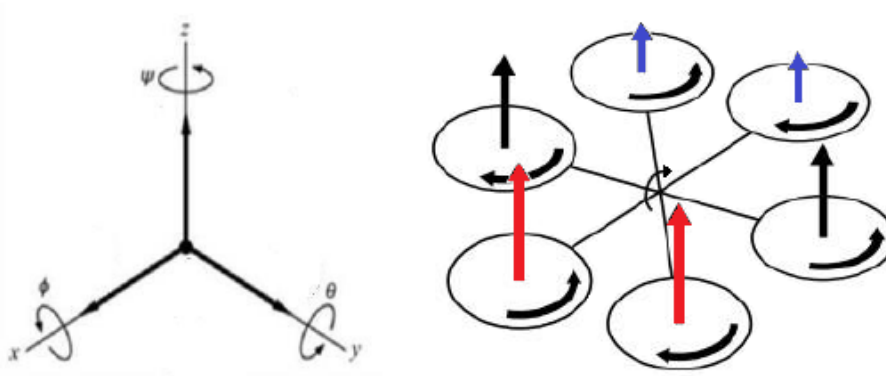
Boční náklon, též klonění, (anglicky: **roll**) je realizován odděleným řízením úhlové rychlosti vrtulí po bočních stranách hexakoptéry. Jak lze vidět na obrázku 2.3, jedná se o rotaci podle osy X. Úhlová rychlost trojice motorů na jedné boční straně je zvýšena a na druhé trojici motorů dojde k úměrnému snížení úhlové rychlosti. Celkový výkon motorů tedy zůstává stejný, dochází pouze k náklonu a k příslušnému pohybu hexakoptéry do boku.



Obrázek 2.3: Schéma rozložení tahu motorů pro boční náklon vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno.

## Pitch

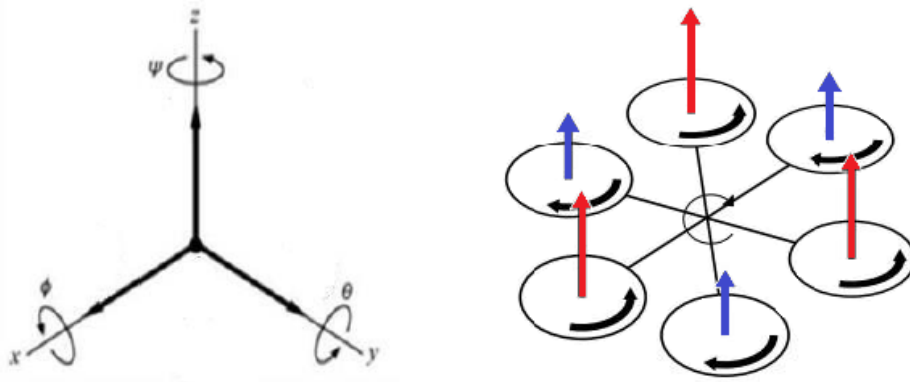
Podélný sklon, též klopení, (anglicky: **pitch**) je rotací dronu podle osy Y. Realizace sklonu je zde provedena odděleným řízením pouze dvou dvojic motorů, a to na přední a zadní straně hexakoptéry. Na obrázku 2.4 je znázorněn zvýšený tah dvou zadních vrtulí a naopak úměrně tomu snížený tah dvou předních vrtulí. V tomto případě je sklon i pohyb hexakoptéry směrem dopředu.



Obrázek 2.4: Schéma rozložení tahu motorů pro podélný sklon vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno.

## Yaw

Směrová rotace (anglicky: **yaw**) je opět realizována odděleným řízením úhlové rychlosti dvou trojic vrtulí. Avšak protože se jedná o rotaci podle osy Z, je řízení odděleno podle toho, v jakém směru se daná vrtule otáčí. V případě obrázku 2.5 je zvýšena rychlost trojice vrtulí otáčejících se v protisměru hodinových ručiček a snížena rychlost druhé trojice vrtulí, otáčejících se v opačném směru. Celkový výkon všech motorů v součtu opět zůstává stejný. Hexakoptéra takto setrvává ve stejné pozici i výšce, ale rotuje po směru hodinových ručiček.



Obrázek 2.5: Schéma rozložení tahu motorů pro směrovou rotaci vzhledem k souřadnému systému dronu. Převzato z [2] a upraveno.

## 2.1 Matematický popis vlastností

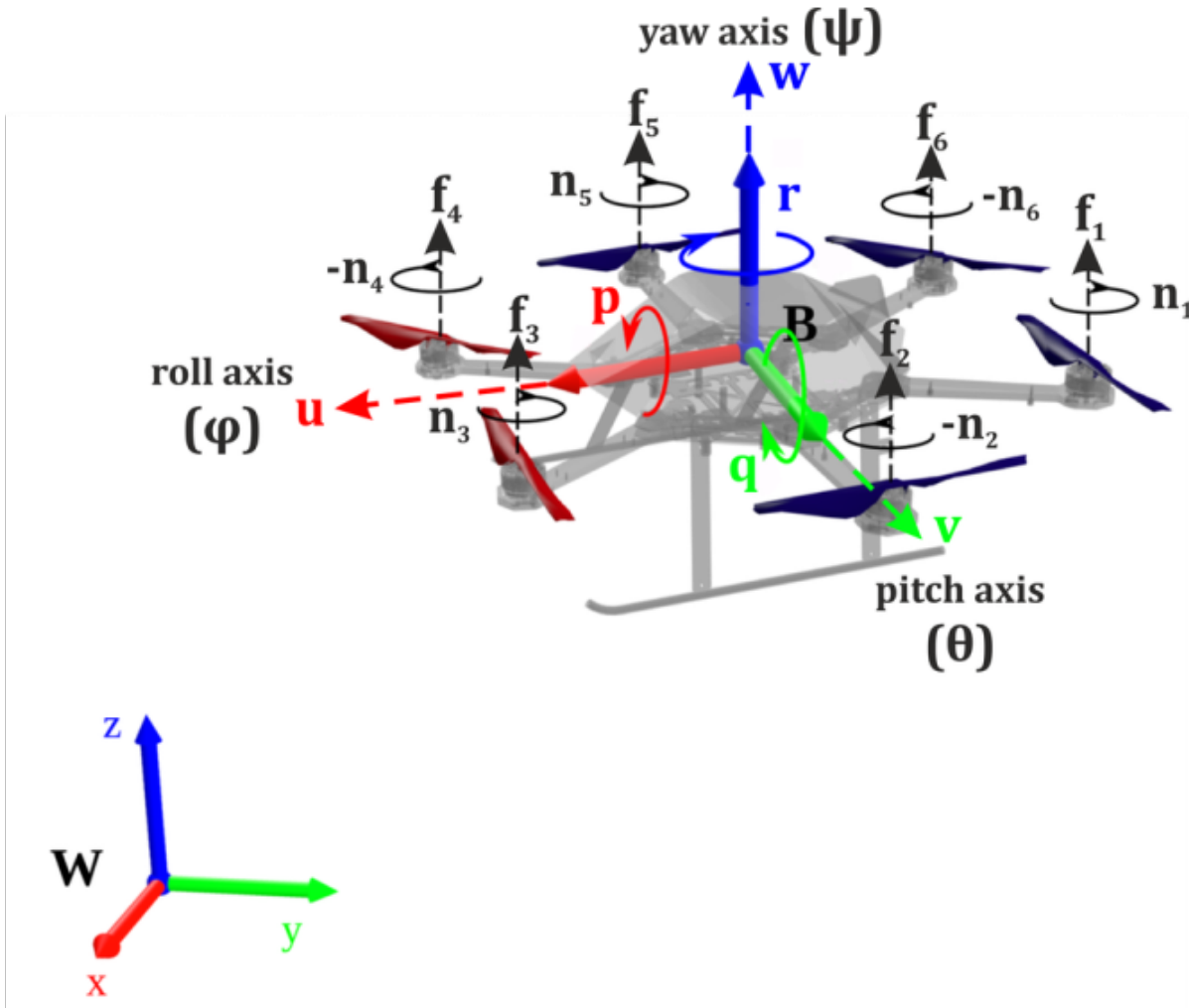
Pro popsání pohybu hexakoptéry jsou nutné dva referenční souřadnicové systémy, zobrazené na obrázku 2.6:

- *World inertial frame* – souřadnicový systém, označený jako **W**, má počátek umístěný na zemském povrchu. Nejčastěji se jedná o místo, kde dron odstartoval.
- *Body-fixed frame* – souřadnicový systém, označený jako **B**, je umístěný v geometrickém středu hexakoptéry. Systém je porovnáván s world inertial framem pro výpočet změn základních pohybů (roll, pitch, yaw a kolektivního tahu).

Orientace hexakoptéry je dána třemi Eulerovými úhly, které vyjadřují velikost rotací popsaných výše. Jmenovitě jde o  $\varphi$  vyjadřující úhel náklonu roll,  $\theta$  vyjadřující úhel sklonu pitch a  $\psi$  vyjadřující úhel rotace yaw. Dohromady tyto úhly dávají vektor  $\eta = [\varphi; \theta; \psi]^T$ , určující orientaci multikoptéry v prostoru. Vzhledem k dynamice a fyzikálním možnostem multikoptéry jsou rozsahy úhlů omezeny následovně:  $(\varphi, \theta) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  a  $\psi \in (-\pi; \pi)$ .

Pozice hexakoptéry je dána vektorem  $\xi = [x; y; z]^T$ . Prvky vektoru udávají vzdálenost od počátku inerčního souřadnicového systému **W**.

Následně lineární rychlosti hexakoptéry, vztahené k souřadnému systému B, jsou vyjádřeny vektorem  $V = [u; v; w]^T$  a úhlové rychlosti vyjádřeny vektorem  $\omega = [p; q; r]^T$ .



Obrázek 2.6: Souřadnicové systémy dronu. Převzato z [3].

Výpočet aktuální orientace dronu se pro transformaci souřadnic provádí pomocí rotačních matic. Pohyb rozložený na rotace podle jednotlivých souřadných os se transformuje následovně. Pohybem roll konáme rotaci podle osy X o úhel  $\varphi$ :

$$R(x, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Dále pohybem pitch konáme rotaci podle osy Y o úhel  $\theta$ :

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Nakonec pohybem yaw konáme rotaci podle osy  $Z$  o úhel  $\psi$ :

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Součinem těchto tří rotačních matic  $R(x, \varphi)$ ,  $R(y, \theta)$  a  $R(z, \psi)$  získáme známou transformační matici  $C_b^n$ . Výsledná matice vyjadřuje obecnou transformaci rotačních souřadnic z *body fixed-frame* do *world inertial frame*.

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi\sin\theta + \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matice je ortogonální, a tedy její inverze neboli matice pro zpětnou transformaci se jednoduše získá transponováním.  $C_n^{b-1} = C_n^{bT} = C_b^n$

Ohledně výpočtu úhlových rychlostí se pro transformaci ze souřadnicového systému world inertial frame do fixed-body frame využívá matice  $W_\eta$ , jak je ukázáno v [5].

$$W_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Transformace v opačném směru, tedy z fixed-body frame do world inertial frame, se provede přes matici

$$W_\eta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sec\theta\sin\varphi & \cos\varphi\sec\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Odtud tedy z předchozích definic platí vztahy  $\omega = W_\eta\dot{\eta}$  a  $\dot{\eta} = W_\eta^{-1}\omega$ . Důležitou podmínkou je, aby  $W_\eta^{-1}$  bylo definované pouze v případě, že  $\theta \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Při nedodržení této podmínky může dojít ke ztrátě jednoho stupně volnosti<sup>1</sup> a tím ke ztrátě plné říditelnosti.

## 2.2 Matematický popis pohybu

Pohyb dronu je ovlivňován několika efekty, jak mechanickými, tak i aerodynamickými. Dvě hlavní síly jsou gravitace a tah motorů, ale pro realistický model je nutné popsat například i vliv tření vzduchu na rotor. Před stanovením vztahů pro pohyb celého tělesa hexakoptéry určíme obecné podmínky:

- Hexakoptéra je tuhé těleso
- Hexakoptéra má symetrickou strukturu

<sup>1</sup>Může dojít k dosažení tzv. kardanového zámku, kdy dvě osy kardanového závěsu splynou do paralelní kombinace a je na ně aplikována stejná rotace.

- Tahy motorů jsou úměrné kvadrátu otáček vrtulí

Pro odvození dynamického modelu hexakoptéry je využit Newton-Eulerův formalismus. Z toho plynou následující rovnice [6]:

$$\begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega & \wedge mV \\ \omega & \wedge J\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F \\ \sum M \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

kde  $m$  je hmotnost hexakoptéry,  $J$  je diagonální matice momentů setrvačnosti,  $\omega$  je úhlová rychlost a  $M$  jsou točivé momenty.

- Gravitační síla:  $F_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T$ ,  
kde  $g$  je konstanta gravitačního zrychlení.
- Tahová síla:  $F_p = C_n^b \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sum_{i=1}^6 F_i \end{bmatrix}^T = C_n^b \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sum_{i=1}^6 b\omega_i^2 \end{bmatrix}^T$ ,  
kde  $F_i$  je síla tahu každého z motorů a  $b$  je koeficient tahu.
- Tah rotoru  $F_t = k_{ft}v = I_{3 \times 3} \begin{bmatrix} k_{ftx} & k_{fity} & k_{ftz} \end{bmatrix}^T \times \dot{\xi}$ ,  
kde vektor tahové síly rotoru  $k_{ft} = \text{diag}(k_{ftx}, k_{fity}, k_{ftz})$  a  $v$  je translační rychlost.
- Odpor vzduchu:  $T_i = C_t \rho A r^2 \Omega_i^2 = d\Omega_i^2$   
Zde  $A$  značí plochu rotující vrtule,  $C_t$  je koeficient závislý na Reynoldsově čísle,  $\rho$  je hustota vzduchu,  $r$  je poloměr vrtule,  $\Omega_i$  je rychlost otáčení konkrétní vrtule a  $d$  je koeficient působícího odporu vzduchu.

Dalšími efekty, které ovlivňují pohyb multikoptéry jsou točivé momenty.

- Roll moment:  $M_x = bl(-\Omega_2^2 + \Omega_5^2 + \frac{1}{2}(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_6^2))$ ,  
kde  $l$  je vzdálenost od těžiště.
- Pitch moment:  $M_y = bl \frac{\sqrt{3}}{2}(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_6^2)$
- Yaw moment:  $M_z = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_5^2 + \Omega_6^2)$   
Vektor  $M_f$  je definovaný jako:  $M_f = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^T$ .
- Moment aerodynamického odporu:  $M_a = K_{fa}\omega^2 = \begin{bmatrix} K_{f_{ax}}\dot{\varphi}^2 & K_{f_{ay}}\dot{\theta}^2 & K_{f_{az}}\dot{\psi}^2 \end{bmatrix}^T$ ,  
kde  $K_{fa}$  je vektor koeficientů aerodynamického odporu vrtulí.
- Gyroskopický efekt vrtulí:  $M_{gh} = \sum_{i=1}^6 \Omega_r \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^{i+1}\omega_i \end{bmatrix}^T$
- Protiběžný moment yaw:  $M_{gh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_r \dot{\Omega}_r \end{bmatrix}^T$ , kde  $\Omega_r = -\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_5^2 + \Omega_6^2$   
a  $J_r$  je moment setrvačnosti každého motoru.

Rovnice popisující pohyb ve vztahu k body frame hexakoptéry, pojící se s translačním a rotačním pohybem jsou:

► *Translační dynamika*

$$m\dot{\xi} = \sum F = F_p + F_g + F_t \begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}(\cos\varphi\cos\psi\sin\theta + \sin\varphi\sin\psi)\left(\sum_{i=1}^6 F_i\right) - k_{ftx}\frac{\dot{x}}{m} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}(\cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi)\left(\sum_{i=1}^6 F_i\right) - k_{fty}\frac{\dot{y}}{m} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}(\cos\varphi\cos\theta)\left(\sum_{i=1}^6 F_i\right) - k_{ftz}\frac{\dot{z}}{m} - g \end{cases} \quad (2.8)$$

► *Rotační dynamika*

$$J\dot{\omega} = -\omega \wedge J\omega + M_f - M_a - M_{gh} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} J_{xx}\ddot{\varphi} = \dot{\theta}\dot{\psi}(J_{yy} - J_{zz}) - K_{fax}\dot{\varphi}^2 - J_r\Omega_r\dot{\theta} + bl(-\Omega_2^2 + \Omega_5^2 + \frac{1}{2}(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_6^2)) \\ J_{yy}\ddot{\theta} = \dot{\varphi}\dot{\psi}(J_{zz} - J_{xx}) - K_{fay}\dot{\theta}^2 + J_r\Omega_r\dot{\varphi} + bl\frac{\sqrt{3}}{2}(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_6^2) \\ J_{zz}\ddot{\psi} = \dot{\varphi}\dot{\theta}(J_{xx} - J_{yy}) - K_{faz}\dot{\psi}^2 + d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_5^2 + \Omega_6^2) \end{cases} \quad (2.10)$$

Celkovou sílu tahu hexakoptéry a točivé momenty řídí vstupy  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  a  $u_4$ . Vztahy mezi rychlostmi všech šesti motorů a jednotlivými vstupy, jsou popsány následujícími rovnicemi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b & b & b \\ \frac{-bl}{2} & -bl & \frac{-bl}{2} & \frac{bl}{2} & bl & \frac{bl}{2} \\ \frac{-bl\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{bl\sqrt{3}}{2} & \frac{bl\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-bl\sqrt{3}}{2} \\ -d & d & -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \\ \Omega_5^2 \\ \Omega_6^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Jestliže je nutné vypočítat rychlosti otáček z řídicích vstupů, potřebujeme získat inverzní vztah. Invertováním matice v předchozí rovnici dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 + 2u_2 - \frac{bl}{d}u_4) \\ \Omega_2^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 + u_2 - \sqrt{3}u_3 + \frac{bl}{d}u_4) \\ \Omega_3^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 - u_2 - \sqrt{3}u_3 - \frac{bl}{d}u_4) \\ \Omega_4^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 - 2u_2 + \frac{bl}{d}u_4) \\ \Omega_5^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 - u_2 + \sqrt{3}u_3 - \frac{bl}{d}u_4) \\ \Omega_6^2 = \frac{1}{6bl}(lu_1 + u_2 + \sqrt{3}u_3 + \frac{bl}{d}u_4) \end{cases} \quad (2.12)$$

► *Model celkového systému*

Finální úpravou je derivace, která nám poskytne soustavu diferenciálních rovnic pro určení pozice dronu a jeho orientace v prostoru. Aplikováním vztahu 2.7 do vztahu 2.12 a upravením maticové rovnice systému, získáme následující soustavu:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{1}{J_{xx}}[\dot{\theta}\dot{\psi}(J_{yy} - J_{zz}) - K_{fax}\dot{\varphi}^2 - J_r\Omega_r\dot{\theta} + u_2] \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{J_{yy}}[\dot{\varphi}\dot{\psi}(J_{zz} - J_{xx}) - K_{fay}\dot{\theta}^2 + J_r\Omega_r\dot{\varphi} + u_3] \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{J_{zz}}[\dot{\varphi}\dot{\theta}(J_{xx} - J_{zz}) - K_{faz}\dot{\psi}^2 + u_4] \\ \ddot{x} = -\frac{k_{ftx}}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}u_x u_1 \\ \ddot{y} = -\frac{k_{fity}}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u_y u_1 \\ \ddot{z} = -\frac{k_{ftz}}{m}\dot{z} - g + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{m}u_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\text{kde: } \begin{cases} u_x = \cos\varphi\cos\psi\sin\theta + \sin\varphi\sin\psi \\ u_y = \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \end{cases} \quad (2.14)$$

Tato soustava rovnic, prezentující dynamický model hexakoptéry, může být přepsána do tvaru stavové reprezentace  $\dot{X} = f(X, U)$ .  $X \in R^{12}$  je vektor stavových proměnných ve tvaru:

$$X = [\varphi \quad \dot{\varphi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z}]^T \quad (2.15)$$

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12}]^T \quad (2.16)$$



Odtud můžeme definovat následující rovnosti:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \varphi & x_7 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\varphi} & x_8 = \dot{x}_7 = \dot{x} \\ x_3 = \theta & x_9 = y \\ x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\theta} & x_{10} = \dot{x}_9 = \dot{y} \\ x_5 = \psi & x_{11} = z \\ x_6 = \dot{x}_5 = \dot{\psi} & x_{12} = \dot{x}_{11} = \dot{z} \end{array} \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \ddot{\varphi} = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 \Omega_r x_4 + b_1 u_2 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 \Omega_r x_2 + b_2 u_3 \\ \dot{x}_6 = \ddot{\psi} = a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + b_3 u_4 \\ \dot{x}_8 = \ddot{x} = a_9 x_8 + \frac{1}{m} u_x u_1 \\ \dot{x}_{10} = \ddot{y} = a_{10} x_{10} + \frac{1}{m} u_y u_1 \\ \dot{x}_{12} = \ddot{z} = a_{11} x_{12} + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{m} u_1 - g \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Pro zjednodušení vztahů byly definovány substituce:

$$\begin{array}{l|l|l} a_1 = (J_{yy} - J_{zz})/J_{xx} & a_2 = -K_{f_{ax}}/J_{xx} & a_9 = -K_{f_{tx}}/m \\ a_4 = (J_{zz} - J_{xx})/J_{yy} & a_5 = -K_{f_{ay}}/J_{yy} & a_{10} = -K_{f_{ty}}/m \\ a_7 = (J_{xx} - J_{yy})/J_{zz} & a_8 = -K_{f_{az}}/J_{zz} & a_{11} = -K_{f_{tz}}/m \\ a_3 = -J_r/J_{xx} & a_6 = -J_r/J_{yy} & \\ b_1 = l/J_{xx} & b_2 = l/J_{yy} & b_3 = l/J_{zz} \end{array} \quad (2.19)$$

Přepíšeme rovnice 2.18, abychom získali úhlová zrychlení vzhledem k ostatním proměnným neboli rovnice rotačního pohybu.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 \Omega_r x_4 + b_1 u_2 \\ a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 \Omega_r x_2 + b_2 u_3 \\ a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + b_3 u_4 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

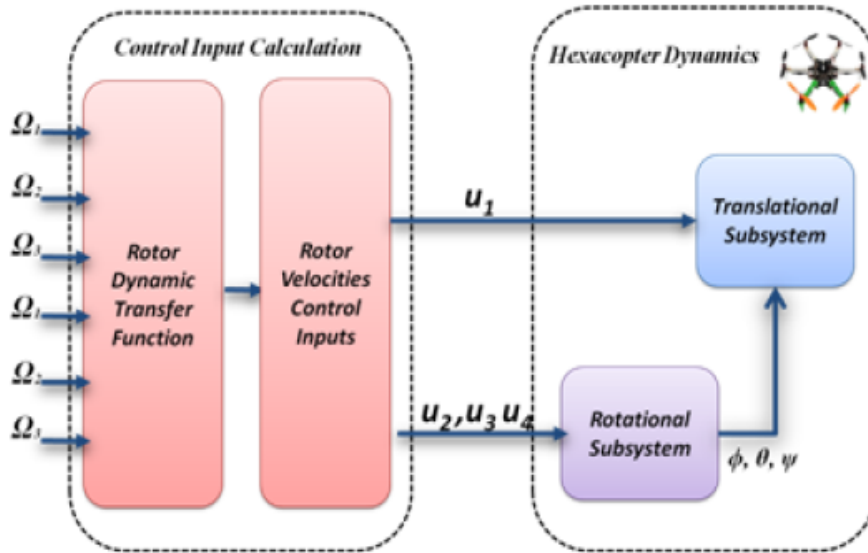
Z rovnice vidíme, že rotační subsystém je plně řízený vstupním řídicím vektorem  $U$ . Systém je závislý pouze na stavových proměnných  $x_1$  až  $x_6$ , což odpovídá  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$ .

Přepíšeme rovnice 2.18, abychom získali zrychlení vzhledem k ostatním proměnným čili rovnice translačního pohybu.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_8 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_9 x_8 + (\cos x_1 \cos x_5 \sin x_3 + \sin x_1 \sin x_5) \frac{u_1}{m} \\ a_{10} x_{10} + (\cos x_1 \sin x_3 \sin x_5 - \sin x_1 \cos x_5) \frac{u_1}{m} \\ a_{11} x_{12} - g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{u_1}{m} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Zde je vidět, že translační subsystém není plně řízený a je závislý na translačních i rotačních stavových proměnných.

Ohledně celého systému lze konstatovat, že úhly ani jejich časové derivace nezávisí na translačních složkách. Na druhou stranu translace závisí na úhlech. V ideálním případě si lze představit celý systém, popsany soustavou 2.13, složený ze dvou subsystémů (úhlové rotace a lineární translace), jako na obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Schématické propojení ideálních subsystémů hexakoptéry. Převzato z [3]

#### ► Dynamika rotoru

Odvození dynamiky odpovídá rotoru, který je poháněn stejnosměrným motorem, jehož známé rovnice jsou:

$$L \frac{di}{dt} = u - Ri - k_m \omega_m \text{ a } J \frac{d\omega_m}{dt} = \tau_m - \tau_d, \quad (2.22)$$

kde  $L$  je indukčnost vinutí,  $i$  je procházející proud,  $u$  je napájecí napětí,  $k_m$  je konstanta motoru,  $\omega_m$  jsou otáčky motoru,  $J$  je moment setrvačnosti,  $\tau_m$  je moment motoru a  $\tau_d$  zatěžovací moment. V případě, že je použit malý motor s velmi nízkou indukčností, může být dynamika stejnosměrného motoru druhého řádu zjednodušena

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{k_m^2}{R} \omega_m - \tau_d + \frac{k_m}{R} u \quad (2.23)$$

Zahrnutím vrtulí a modelů převodů může být rovnice přepsána do tvaru:

$$\dot{\omega}_m = -\frac{1}{\tau} \omega_m - d\omega_m^2 / \eta r^3 J + \frac{1}{k_m \tau} u, \quad (2.24)$$

kde  $\frac{1}{\tau} = \frac{k_m^2}{R J}$ ,  $d$  je koeficient aerodynamického odporu a  $\eta$  je účinnost převodů. Rovnice může být linearizovaná kolem pracovního bodu  $\dot{\omega}_0$  na tvar  $\dot{\omega}_m = -A\omega_m + Bu + C$ .

### 3 Přístupy identifikace

Během této kapitoly budou popsány dva nejčastěji využívané přístupy pro analýzu a testování multikoptér a identifikaci jejich parametrů systému. Rozdíl mezi přístupy spočívá v tom, do jaké míry známe vnitřní strukturu daného systému - zda známe systém kompletně celý, nebo jen jeho část a zbytek na základě měření odhadujeme, nebo neznáme strukturu systému vůbec a odhadujeme ji pouze na základě odezvy na dané vstupní signály. Diskutovanými druhy přístupů jsou black box (černá skříňka) a grey box (šedá skříňka):

- *Grey box* – systém je částečně známý, obecně známé, definované nebo odvozené vlastnosti systému, avšak neznámé parametry a koeficienty
- *Black box* – vnitřní struktura systému není známá, odhadování kompletní struktury včetně parametrů na základě chování a měření odezvy systému

Mezi tyto druhy testování patří také white box (bílá skříňka), kde se jedná o systém se zcela známou strukturou. Testuje se zde správná funkce systému, jeho jednotlivých komponent a případná optimalizace. Avšak touto metodou se zde zabývat nebudeme.

#### 3.1 Greybox identifikace

Tento přístup se ve velké míře opírá o teoretické znalosti vlastností a dynamiky hexakoptéry popsané v předchozí kapitole. Existuje několik různých způsobů, jak získat hodnoty konstant a parametrů. Mohou být získány způsoby, jako jsou:

- Základní měření
- Odvození geometrie, dynamiky a aerodynamiky
- Tabulkové hodnoty z dokumentace
- Experimentální odhad a porovnání

##### 3.1.1 Základní měření

V procesu identifikace jde o přesná měření hmotnosti, délek a elektrická měření. Pro měření hmotnosti je vhodné použít digitální laboratorní váhu s menším rozsahem, ale s vyšší přesností. U měření délek nebo velikostí závisí při volbě vhodného měřicího nástroje na požadovaném rozsahu. Pro tyto účely jsou vhodné dva nástroje: svinovací metr a analogové, nebo digitální posuvné měřítko. Přesnost měření svinovacím metrem závisí na jeho třídě přesnosti. Většinou se jedná o třídu přesnosti II, kde na délce  $1m$  je odchylka  $0,5mm$ , což je pro naše účely naprosto dostačující. Přesnost posuvných měřítok závisí na jejich provedení a pohybuje se v rozmezí od  $0,1mm$  až do  $0,01mm$ .

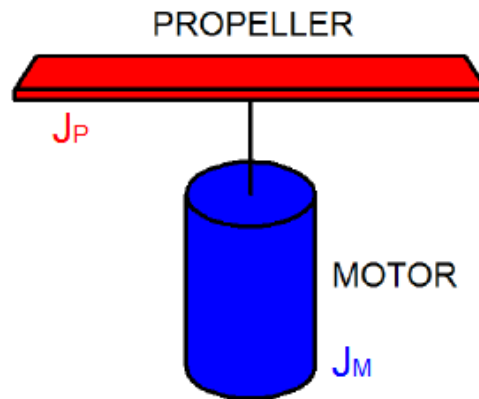
Při měření elektrických veličin je opět vhodné použití dvou různých přístrojů, a to digitálního multimetru a RLC metru. Pomocí RLC metru je možné měření elektrického odporu (R), indukčnosti (L) a kapacity (C) s vysokou přesností (standardně  $\pm 0,1\%$  z naměřené

hodnoty). Lze jej tedy využít pro kontrolu nebo získání přesnějších parametrů motorů, než jsou tabulkové hodnoty v dokumentaci. Pokud neznáme indukčnost motoru a odpor jeho vinutí (potřebné pro vztah 2.22), je použití RLC metru nutné. Digitální multimetr měří s nižší přesností než RLC metr, ale oproti tomu disponuje možností měřit více různých elektrických veličin.

### 3.1.2 Odvození geometrie a dynamiky

Navazující částí je modelování, během kterého je tělo hexakoptéry rozloženo na jednotlivé komponenty. U jednotlivých komponent se odvodí dynamické vlastnosti a zpětně se pak poskládá dynamika celého systému. Při odvozování dynamiky vycházíme z předdefinovaných vlastností, že se jedná o model tuhého, symetrického tělesa. Pro výpočty se použijí hodnoty získané základním měřením. Identifikace se týká momentu setrvačnosti, který lze rozdělit na dvě části:

- Rotační moment setrvačnosti
- Moment setrvačnosti tělesa



Obrázek 3.1: Model rotoru. Převzato z [8] a upraveno.

V první části je cílem odvodit rotační moment setrvačnosti kolem osy motoru. Ten se skládá ze dvou konstant: rotační moment motoru  $J_M$  a rotační moment vrtule  $J_P$ . Na obrázku 3.1 je znázorněn model, popsáný rovnicemi 3.1, 3.2 a 3.3. Motor může být modelován jako plný válec s rozměry odpovídajícími rozměrům motoru, kde  $M_M$  je jeho hmotnost a  $R_M$  poloměr. Obdobně vrtule může být modelována jako obdélník, kde  $W_P$  je šířka vrtule,  $L_P$  délka vrtule a  $M_P$  její hmotnost. Výpočet momentu setrvačnosti plného válce je vzhledem k ose souměrnosti a moment setrvačnosti obdélníku vzhledem k normále od středu obdélníku. Celkový rotační moment je pak součtem dílčích momentů.

$$J_M = \frac{1}{2} M_M R_M^2 \quad (3.1)$$

$$J_P = \frac{1}{12} M_P (W_P^2 + L_P^2) \quad (3.2)$$

$$J_{rot} = J_M + J_P \quad (3.3)$$

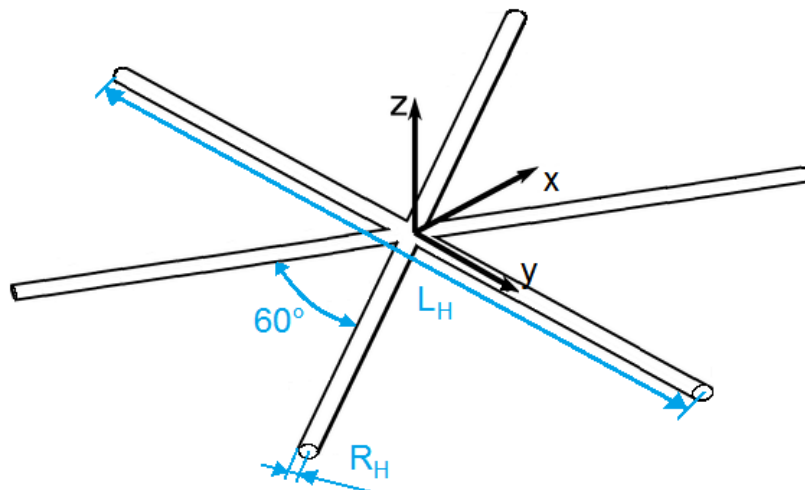
U výpočtu momentu setrvačnosti tělesa, je hlavním cílem identifikovat dynamické chování celé hexakoptéry při rotacích podle definovaných os (X, Y a Z). Jelikož stavba tělesa je symetrická, tenzor momentu setrvačnosti lze zjednodušit na diagonální matici. V této druhé části se odvození zabývá třemi momenty setrvačnosti:  $I_{XX}$ ,  $I_{YY}$  a  $I_{ZZ}$ .

Celková struktura hexakoptéry je rozložena na jednotlivé komponenty, pro jednodušší výpočet geometrie [11]. Zjednodušený přístup je rozdělen na následující části:

- 1 nosná konstrukce tvořená rameny hexakoptéry
- 1 skříňka s řídicí elektronikou
- 6 motorů
- 6 vrtulí

Model konstrukce se šesti rameny můžeme aproximovat třemi dlouhými válci. Válce se protínají v polovině délky. Osy souměrnosti válců přitom leží v jedné rovině a úhel, který každá svírá se sousední osou je vždy  $60^\circ$ . Na obrázku 3.2 je zobrazena struktura modelu.

Díky symetrii hvězdicové struktury, lze vyjádřit moment setrvačnosti podle osy X vztahem



Obrázek 3.2: Model nosné konstrukce. Převzato z [1] a upraveno.

3.4, podle osy Y vztahem 3.5 a podle Z vztahem 3.6. V jednotlivých vztazích je  $L_H$  délka (resp. výška) válce,  $R_H$  je poloměr a  $M_H$  je jeho hmotnost. Z obrázku konstrukce je patrné, že pokud

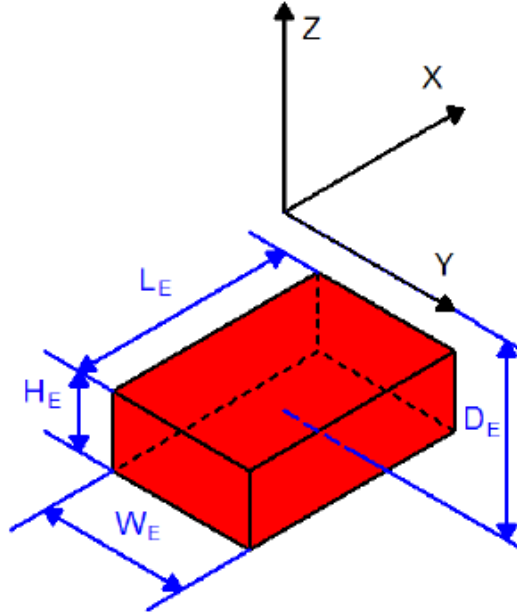
sousední ramena svírají úhel  $60^\circ$ , osa X svírá se sousedními rameny úhel  $30^\circ$ . Osa Y prochází osou souměrnosti ramene, svírá tedy se sousedními rameny úhel  $60^\circ$ .

$$I_{HX} = M_H \left( \frac{R_H^2}{4} + \frac{L_H^2}{12} \right) + 2 \cdot M_H \left( \frac{R_H^2}{4} + \frac{L_H^2}{12} \right) \sin^2 30^\circ \quad (3.4)$$

$$I_{HY} = \frac{1}{2} M_H R_H^2 + 2 \cdot M_H \left( \frac{R_H^2}{4} + \frac{L_H^2}{12} \right) \sin^2 60^\circ \quad (3.5)$$

$$I_{HZ} = 3 \cdot M_H \left( \frac{R_H^2}{4} + \frac{L_H^2}{12} \right) \quad (3.6)$$

Modul s řídicí elektronikou představuje kvádr umístěný mimo střed modelovaného systému. Obrázek 3.3 znázorňuje umístění modelového prvku o hmotnosti  $M_E$ , kde  $L_E$  je délka,  $W_E$  šířka,  $H_E$  výška a  $D_E$  je vzdálenost od středu soustavy. Momenty setrvačnosti v daných souřadných osách, takto umístěného prvku, popisují rovnice 3.7, 3.8 a 3.9.



Obrázek 3.3: Model řídicího modulu. Převzato z [8] a upraveno.

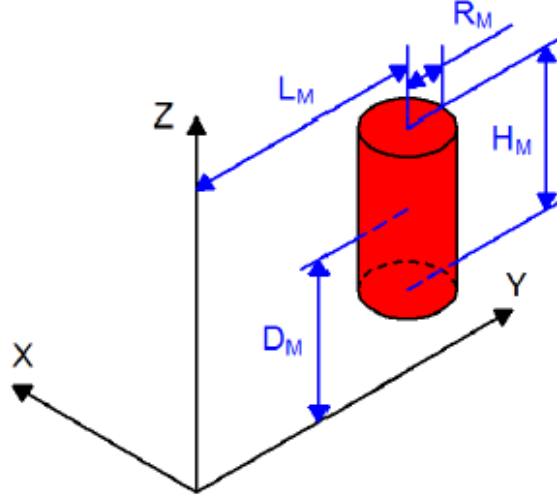
$$I_{EX} = M_E \left( \frac{W_E^2}{12} + \frac{H_E^2}{12} + D_E^2 \right) \quad (3.7)$$

$$I_{EY} = M_E \left( \frac{L_E^2}{12} + \frac{H_E^2}{12} + D_E^2 \right) \quad (3.8)$$

$$I_{EZ} = M_E \left( \frac{R_E^2}{12} + \frac{W_E^2}{12} \right) \quad (3.9)$$

Pro model všech šesti motorů se použije opět tuhý válec o hmotnosti  $M_M$ , poloměru  $R_M$ , výšce  $H_M$ , ve vzdálenosti  $L_M$  od dané osy rotace a ve vzdálenosti  $D_M$  podle osy Z. Na obrázku 3.4 jsou vyznačeny rozměry pro jeden z motorů, ležící na ose Y. Jak už bylo zmíněno dříve, hexakoptéra má symetrickou strukturu. To znamená, že i pozice motorů je podle os rotace

symetrická. Vztahy pro jednotlivé momenty setrvačnosti platí pro více motorů naprosto stejně. Uvážíme-li, že motor číslo  $M1$  je mezi osami  $X$  a  $Y$  souřadného systému, platí pro něj následující



Obrázek 3.4: Model motoru. Převzato z [8].

vztahy:

$$I_{M1X} = M_M \left( \frac{R_M^2}{4} + \frac{H_M^2}{12} + L_M^2 + D_M^2 \right) \quad (3.10)$$

$$I_{M1Y} = M_M \left( \frac{R_M^2}{4} + \frac{H_M^2}{12} + L_M^2 + D_M^2 \right) \quad (3.11)$$

$$I_{M1Z} = M_M \left( \frac{R_M^2}{2} + L_M^2 \right) \quad (3.12)$$

Dále pokud uvažíme, že motor  $M2$  leží v ose  $Y$ , platí pro něj vztahy:

$$I_{M2X} = M_M \left( \frac{R_M^2}{4} + \frac{H_M^2}{12} + L_M^2 + D_M^2 \right) \quad (3.13)$$

$$I_{M2Y} = M_M \left( \frac{R_M^2}{4} + \frac{H_M^2}{12} + D_M^2 \right) \quad (3.14)$$

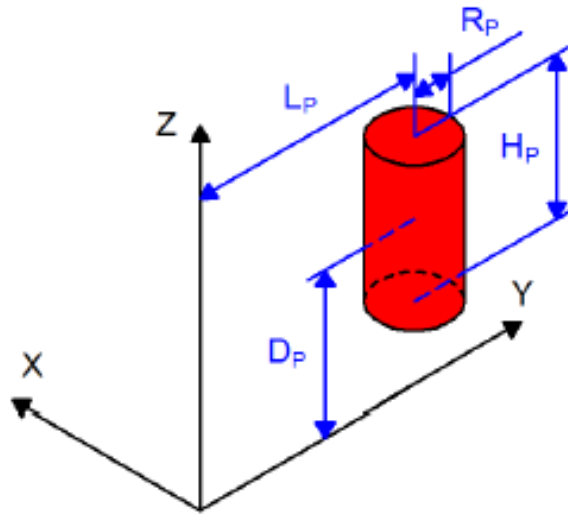
$$I_{M2Z} = M_M \left( \frac{R_M^2}{2} + L_M^2 \right) \quad (3.15)$$

Takže jestli stanovíme pořadí motorů ve směru hodinových ručiček, v návaznosti na úvahy u soustav rovnic pro motor  $M1$  a motor  $M2$ , můžeme díky symetrii konstrukce odvodit vztahy pro zbývající čtyři motory.

$$\begin{aligned} I_{M1X} &= I_{M3X} = I_{M4X} = I_{M6X} & I_{M2X} &= I_{M5X} \\ I_{M1Y} &= I_{M3Y} = I_{M4Y} = I_{M6Y} & I_{M2Y} &= I_{M5Y} \\ I_{M1Z} &= I_{M2Z} = I_{M3Z} = I_{M4Z} = I_{M5Z} = I_{M6Z} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Stejně tak jako motory i šest vrtulí má totožné symetrické rozestavení. Vztahy jsou proto značně podobné. Model tvoří velmi nízký válec, jenž byl vyvozen z rotujícího obdélníku, představujícího model vrtule (viz. obrázek 3.1). Válec má však proměnnou hustotu, protože hustota je závislá na poloměru a s rostoucí vzdáleností od středu hustota klesá. Modelovaný válec na obrázku 3.5 má opět hmotnost  $M_P$ , poloměr  $R_P$ , výšku  $H_P$ , vzdálenost od dané osy rotace  $L_P$  a vzdálenost  $D_P$  podle osy Z.

Momenty setrvačnosti vrtule na motoru  $M1$  odpovídají vztahům:



Obrázek 3.5: Model vrtule. Převzato z [8].

$$I_{P1X} = M_P \left( \frac{R_P^2}{6} + \frac{H_P^2}{12} + L_P^2 + D_P^2 \right) \quad (3.17)$$

$$I_{P1Y} = M_P \left( \frac{R_P^2}{6} + \frac{H_P^2}{12} + L_P^2 + D_P^2 \right) \quad (3.18)$$

$$I_{P1Z} = M_P \left( \frac{R_P^2}{3} + L_P^2 \right) \quad (3.19)$$

Momenty setrvačnosti vrtule na motoru  $M2$  odpovídají vztahům:

$$I_{P2X} = M_P \left( \frac{R_P^2}{6} + \frac{H_P^2}{12} + L_P^2 + D_P^2 \right) \quad (3.20)$$

$$I_{P2Y} = M_P \left( \frac{R_P^2}{6} + \frac{H_P^2}{12} + D_P^2 \right) \quad (3.21)$$

$$I_{P2Z} = M_P \left( \frac{R_P^2}{3} + L_P^2 \right) \quad (3.22)$$



Opět ze stanoveného pořadí motorů a díky symetrii konstrukce hexakoptéry můžeme z předchozích dvou soustav rovnic odvodit vztahy pro zbývající čtyři vrtule.

$$\begin{aligned} I_{P1X} &= I_{P3X} = I_{P4X} = I_{P6X} & I_{P2X} &= I_{P5X} \\ I_{P1Y} &= I_{P3Y} = I_{P4Y} = I_{P6Y} & I_{P2Y} &= I_{P5Y} \\ I_{P1Z} &= I_{P2Z} = I_{P3Z} = I_{P4Z} = I_{P5Z} = I_{P6Z} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Jako poslední zbývá vyjádřit celkové momenty setrvačnosti podél daných souřadných os sečtením všech dílčích komponent.

$$\begin{aligned} I_{XX} &= I_{HX} + I_{EX} + I_{M1X} + I_{M2X} + I_{M3X} + I_{M4X} + I_{M5X} + I_{M6X} \\ &\quad + I_{P1X} + I_{P2X} + I_{P3X} + I_{P4X} + I_{P5X} + I_{P6X} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} I_{YY} &= I_{HY} + I_{EY} + I_{M1Y} + I_{M2Y} + I_{M3Y} + I_{M4Y} + I_{M5Y} + I_{M6Y} \\ &\quad + I_{P1Y} + I_{P2Y} + I_{P3Y} + I_{P4Y} + I_{P5Y} + I_{P6Y} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} I_{ZZ} &= I_{HZ} + I_{EZ} + I_{M1Z} + I_{M2Z} + I_{M3Z} + I_{M4Z} + I_{M5Z} + I_{M6Z} \\ &\quad + I_{P1Z} + I_{P2Z} + I_{P3Z} + I_{P4Z} + I_{P5Z} + I_{P6Z} \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.1.3 Experimentální měření

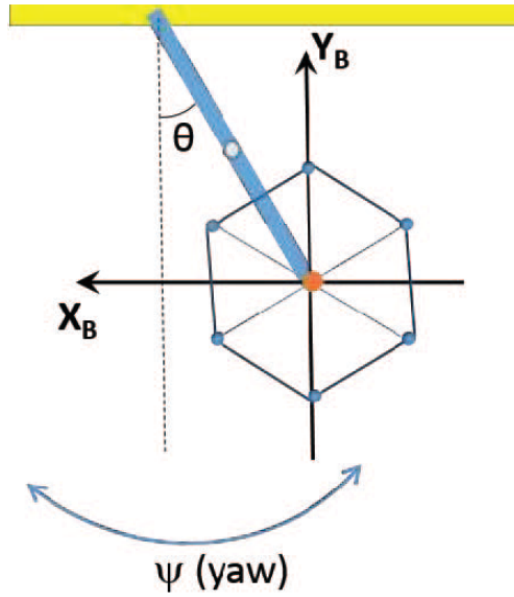
Nevýhodou přímého vyhodnocování parametrů z geometrického rozložení komponent je výpočetní i fyzikální složitost. Kromě toho musí být celá konstrukce rozložena, změřena každá vzdálenost a každá komponenta zvážena. Aplikace tohoto postupu, zvláště na komerční multikoptéry, je časově velmi náročná.

Alternativním způsobem jak získat parametry větší části multikoptéry, případně zjistit dynamiku celého systému, je experimentální měření. Měření tedy může být podrobena jen určitá část, kterou je zapotřebí analyzovat, nebo celá multikoptéra. Pro tento účel lze využít matematické kyvadlo. Zavěšením hexakoptéry na kyvadlo je možné určit její momenty setrvačnosti. Jde o prototyp systému pro demonstraci Lagrangianovského a Hamiltonovského přístupu k dynamice a zařízením s nelineární dynamikou. Rovnice pohybu jsou odvozeny z Lagrangianovi dynamiky:

$$\mathcal{L} = K - V, \quad (3.27)$$

kde  $K$  je kinetická energie a  $V$  je potenciální energie kyvadla. Předpokládáme, že celková energie  $E$  v čase  $t_0$  je rovna maximální potenciální energii  $V$ , a že kinetická energie je nulová. Hmotnost a rozměry systému jsou známé a velikost úhlu vychýlení kyvadla je měřena.

Jak je vidět na obrázku 3.6, kyvadlo pro měření neznámých momentů setrvačnosti se skládá z tuhé tyče, na jejíž jeden konec je připevněna hexakoptéra a druhý konec je spojen s pevnou základnou. Momenty jsou měřeny podle souřadných os hexakoptéry Y a Z.



Obrázek 3.6: Sestava kyvadla pro měření setrvačnosti podle osy Z. Převzato z [10].

Aplikováním Lagrangianovského přístupu můžeme definovat rovnice kinetické a potenciální energie následovně:

$$K = \frac{1}{2} \left[ m_1 l_1^2 + m (l_1 + d)^2 + I_{rod} + I \right] \dot{\theta}^2 \quad (3.28)$$

$$V = m_1 g (1 - l_1 \cos \theta) + mg [1 - (l_1 + d) \cos \theta], \quad (3.29)$$

kde  $l_1$  je vzdálenost mezi spojem na pevné základně a těžištěm tyče,  $d$  je vzdálenost mezi těžištěm tyče a středem hexakoptéry,  $m$  je hmotnost hexakoptéry,  $m_1$  je hmotnost tyče a  $\theta$  je úhel vychýlení kyvadla (viz. obrázek 3.7).  $I_{rod}$  je moment setrvačnosti tyče. Ten se snadno získá ze známých rozměrů a hmotnosti.  $I$  je neznámý moment setrvačnosti hexakoptéry. Použijeme Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (3.30)$$

kde  $\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta}$  a  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = B \sin \theta$ . Pro malé úhly vychýlení může být vlastní frekvence kmitání vyjádřena jako:

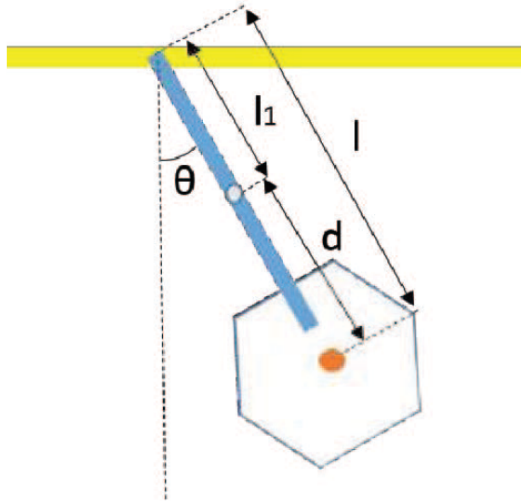
$$\omega^2 = \frac{B}{A}. \quad (3.31)$$

Ze záznamu oscilace soustavy odečteme periodu kyvu. Úpravou tedy dostáváme vztahy:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{B}{A}}}, \quad (3.32)$$

$$I = \frac{T^2}{4\pi^2} \left[ m_1 g \frac{l_1}{2} + mg (l_1 + d) \right] - m_1 \frac{l_1^2}{4} - m (l_1 + d)^2 - I_{rod}. \quad (3.33)$$

Dosažením dob kyvu ve všech osách získáme odpovídající momenty setrvačnosti hexakoptéry.



Obrázek 3.7: Sestava kyvadla s kótami. Převzato z [10].

Experimentální přístup pro identifikaci parametrů, lze využít také pro výpočet tahu a točivého momentu vrtulí. V tomto případě se asi jedná o ideální přístup, protože při řešení aerodynamických vlastností pouze na základě teorie, jde o velmi komplikovanou problematiku.

Tah i točivý moment jsou závislé na druhé mocnině úhlové rychlosti vrtulí. Jestliže rychlost otáčení vrtule  $i$  je  $\Omega_i$ , tak potom generovaný tah  $T_i$  je:

$$T_i = k_T \Omega_i^2, \quad (3.34)$$

kde  $i = 1, \dots, 6$  a  $k_T$  je konstanta pro tah vrtule. Obdobně aerodynamický točivý moment  $C_i$  vrtule  $i$  je:

$$C_i = k_Q \Omega_i^2, \quad (3.35)$$

kde  $k_Q$  je konstanta vrtule pro točivý moment.

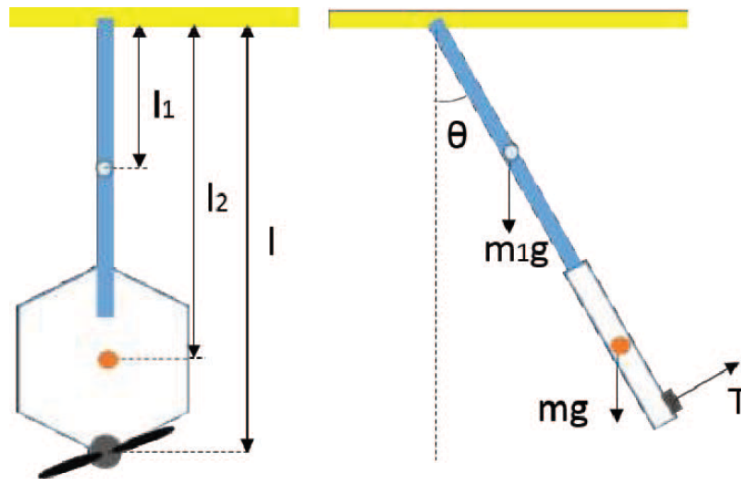
Konstanta tahu  $k_T$  definuje vztah mezi ustáleným tahem, který generuje motor při vznášení a úhlovou rychlostí rotorů. Hexakoptéra je připevněna k tyči kyvadla a má namontovanou pouze jednu vrtuli. Podle obrázku 3.8 vidíme, že tah získáme z následujícího rovnovážného stavu momentů spoje:

$$m_1 l_1 g \sin \theta + m g l_2 \sin \theta - T l = 0, \quad (3.36)$$

kde  $m_1$  je hmotnost tyče,  $l_1$  je vzdálenost mezi spojem na pevné základně a těžištěm tyče,  $m$  je celková hmotnost hexakoptéry,  $l_2$  je vzdálenost mezi spojem na pevné základně a těžištěm hexakoptéry,  $l$  je vzdálenost mezi spojem a bodem aplikace tahu a  $T$  je tah jednoho motoru.

Experiment je prováděn pro různé pulzně šířkové modulace (PWM), jenž slouží jako budící vstupní signál motorů. Tímto způsobem může být odvozen analytický vztah mezi tahem  $T$  a PWM signálem.

Konstanta točivého momentu  $k_Q$  odpovídá rychlosti otáčení každého motoru ve volnoběžné poloze vůči produkovanému točivému momentu v ose motoru. Pro odhad této konstanty může být využit speciální systém bez tření, jako v [10], kde nosné zařízení „plave“ pomocí



Obrázek 3.8: Sestava kyvadla pro měření tahu motoru. Převzato z [10].

vzduchových trysek po žulové desce. Hexakoptéra, se třemi namontovanými vrtulemi, které se otáčejí ve stejném směru, je připevněna na nosné zařízení. Pokus se skládá ze dvou případů:

1. žádná vrtule hexakoptéry není zapnutá a jsou zapnuty trysky nosného zařízení
2. jsou zapnuty pouze tři vrtule hexakoptéry

Předpokládá se, že po celou dobu kdy jsou vrtule vypnuté, je točivý moment konstantní. Obecně měření točivého momentu  $\tau$  vychází z druhého Newtonova zákona

$$\tau = I_z \dot{\omega}_p, \quad (3.37)$$

kde  $I_z$  je moment setrvačnosti podle osy  $Z$  systému a  $\dot{\omega}_p$  je úhlová rychlost celého tělesa. Za daných předpokladů můžeme vyjádřit

$$\tau_0 = 2d_T F, \quad (3.38)$$

kde  $\tau_0$  je měřený točivý moment při vypnutých vrtulích,  $d_T$  je vzdálenost mezi dvěma tryskami a  $F$  je síla produkovaná čtyřmi tryskami.

### 3.1.4 Tabulkové hodnoty a porovnání

Posledním ze způsobů získání některých parametrů je technická dokumentace celé hexakoptéry, případně dokumentace některých součástí. Zde jsou uvedena data přímo od výrobce. Avšak v některých případech vlivem sériové výroby nemusí jít o přesné údaje. Pro případné ověření tabulkových hodnot se musí využít některá měření nebo výpočty.

Pokud je k dispozici více hodnot jednoho parametru provedením několika druhů měření, nebo jen ověření údajů v datovém listu, lze postupovat při výběru několika variantami. První je porovnání konstant a výběr nejrelevantnější hodnoty podle vlastního úsudku. Druhou variantou je vyhodnocení, jak moc se od sebe jednotlivé hodnoty liší. Následuje výběr nejčastější

hodnoty, nebo hodnoty které se sobě blíží. Nakonec je tu varianta průměrné hodnoty, kde se vypočítá aritmetický průměr ze všech nalezených hodnot konkrétního parametru.

### 3.2 Blackbox identifikace

Jedná se o nejčastěji využívanou metodu identifikace pro regulační úlohy v blízkosti rovnovážného stavu systému. Na identifikovaný systém je pohlíženo pouze jen z pohledu vstupů a výstupů. Jde tedy o vnější popis, nejsou známy žádné informace o vnitřní struktuře a fyzikálních vlastnostech systému. Lze měřit pouze signály, které jsou přiváděny na vstup systému a signály z jeho výstupu. Základem identifikace je měření odezvy pro daný vstupní signál. Pro uvedený přístup již existují rozličné metody, jak získat zjednodušený matematický model zkoumaného systému.

Jinými slovy, vstupně-výstupní systém je trojice  $(U, Y, R)$ , kde  $U$  je množina vstupních signálů,  $Y$  je množina výstupních signálů a  $R$  je relace systému. Platí, že  $R \subset U \times Y$ . K tomu, aby byl systém dynamický, musí být proměnný v čase.

V první řadě je však nutné si uvědomit, o jaký druh matematického modelu se jedná, a



Obrázek 3.9: Schématické znázornění Blackbox systému. Převzato z [12].

tedy jaká data budeme zpracovávat. Určíme, zda jde o systém:

- ▶ *Deterministický / stochastický* – Jestliže lze chování systému jednoznačně popsat a při opakování má za stejných počátečních podmínek a stejném vstupním signálu vždy stejný výstup, považujeme takový systém za deterministický. Naopak pokud jednomu vstupnímu signálu může odpovídat několik různých výsledků, s různou pravděpodobností, je takový systém považován za stochastický.
- ▶ *Spojitý / diskrétní* – V tomto případě se jedná o rozdělení z pohledu proměnné času. Pokud čas nabývá reálných hodnot, jedná se o systém spojitý. Pokud náleží do oboru celých čísel, a to i v případě vzorkovaného spojitého systému, jedná se o diskrétní systém.
- ▶ *Lineární / nelineární* – Systém je lineární, jestliže množiny vstupů  $U$  a výstupů  $Y$  jsou lineární podprostory, kde  $(u_1, y_1) \in \mathfrak{R}$ ,  $(u_2, y_2) \in \mathfrak{R}$  a platí pro ně princip superpozice, tedy  $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \in \mathfrak{R}$ . V opačném případě je systém nelineární.
- ▶ *Časově invariantní* – Systém s nekonečnou osou času, je časově invariantní, pokud nemění své chování v čase. Systém tedy odpovídá na určitý vstupní signál stále stejným výstupním signálem. Odtud platí:  $(u, y) \in R \Rightarrow (u(t + \vartheta), y(t + \vartheta)) \in R, \forall u, y, \vartheta$ .

To jsou jen některé z vlastností identifikovaných systémů. Dále se postupně dělí podle podrobnějších kritérií, avšak výše uvedené vlastnosti patří k těm zásadním, na nichž závisí způsob výpočtu parametrů modelu. Další zásadní znalostí o systému je počet jeho vstupů a výstupů. Tato vlastnost značí kolika různými proměnnými můžeme řídit chování systému a na kolika veličinách se může dané řízení projevit. V tomto směru se systémy dělí na:

- *SISO (Single Input - Single Output)* – systém s jednou vstupní veličinou a jednou výstupní, existuje pouze jeden vztah určující závislost mezi vstupem a výstupem (obvykle přenos systému)
- *MIMO (Multiple Input - Multiple Output)* – systém s několika vstupními veličinami a několika výstupními, kde existuje více vztahů určujících závislost mezi jednotlivými vstupy a výstupy, přičemž jeden vstup může ovlivňovat více výstupů a obdobně jeden výstup může být ovlivňován více vstupy

a samozřejmě kombinace těchto variant jako *SIMO* a *MISO*. Konkrétní metody identifikace se zásadně liší skutečností, zda je předmětem jejich výpočtu odhad parametrů, či nikoliv. Přehled některých identifikačních metod je uveden na obrázku 3.10. Nicméně, jak bylo zmíněno v úvodu práce, v našem případě chceme získat zjednodušený matematický model systému, na kterém mohou být laděny regulátory pro různé úlohy. Soustředíme se tedy pouze na parametrické metody.

### 3.2.1 Dynamický LTI systém

Jakýkoliv dynamický systém lze popsat diferenciálními (případně diferenčními) rovnicemi. Je-li možné systém popsat lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, jedná se o *lineární časově invariantní systém* (LTI systém). Řešení těchto systémů v časové oblasti je však velmi náročné. Pro zjednodušení výpočetní náročnosti se využívá Laplaceovy transformace, která transformuje vztah z časové oblasti do frekvenční. Namísto derivací je zaveden operátor  $s$  o příslušné mocnině, jak je naznačeno na standardní formě LTI 1. řádu:

$$\mathcal{L}\{\dot{x} - ax = bu(t)\} \Rightarrow sX(s) - aX(s) = bU(s). \quad (3.39)$$

Vstupně-výstupní popis systému shrnuje všechny možné páry hodnot vstup-výstup. U lineárních systémů mohou být charakterizovány pouze jedním párem, jako je například impulzní nebo skoková odezva. Uvažujeme-li vstupně-výstupní systém (I/O systém) popsaný diferenciální rovnicí

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u, \quad (3.40)$$

kde  $u$  je vstup a  $y$  výstup. Vidíme, že se zde vyskytují i derivace vstupu. Aplikací Laplaceovy transformace se diferenciální rovnice skládá ze dvou polynomů:

$$\begin{aligned} a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\ b(s) &= b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m, \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde polynom  $a(s)$  je charakteristický polynom systému. Následující úpravou získáme přenos  $H(s)$ , systému popsaného rovnicí 3.40:

$$\begin{aligned} a(s)Y(s) &= b(s)U(s) \\ H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kde  $Y(s)$  je Laplaceův obraz výstupního signálu a  $U(s)$  je obraz vstupního signálu. Přenos systému jednoznačně určuje vztah mezi vstupním a výstupním signálem. Využitím tohoto vztahu můžeme určit, jak se bude systém chovat pro různé vstupní signály. Aplikací inverzní Laplaceovy transformace na výstupní obraz systému získáme jeho časový průběh.

### 3.2.2 Geometrické metody

Při identifikaci SISO systémů se pro odhad parametrů využívá převážně přechodová charakteristika. Tou rozumíme časovou odezvu systému v ustáleném stavu, na okamžitou změnu vstupního signálu. Změna na vstupu bývá obvykle v podobě jednotkového skoku, kdy je vstupní signál v čase  $t < t_0$  nulový, v čase  $t = t_0$  se změnil na jednotku a zůstává nadále konstantní. Díky této skokové změně vstupního signálu se na výstupu zřetelně projeví dynamika systému. Z přechodové charakteristiky lze získat koeficienty přenosové funkce.

Získání koeficientů závisí na řádu systému, který identifikujeme, respektive jakou přenosovou funkcí chceme neznámý systém aproximovat. Podle tvaru průběhu přechodové charakteristiky je do jisté míry možné odhadnout o kolikátý řád systému se jedná. V případě aproximace systémem 1. řádu (bez zpoždění), jehož přechodová charakteristika je vidět na obrázku 3.11, má přenosová funkce tvar:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (3.43)$$

Zesílení soustavy  $K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$  získáme z podílu ustálených hodnot vstupního a výstupního signálu, kde  $u(\infty)$  je ustálená hodnota vstupního signálu a  $y(\infty)$  je ustálená hodnota výstupního signálu. Časovou konstantu  $T$  určíme z průsečíku vodorovné přímky v úrovni  $y(\infty)$  a tečny průběhu výstupního signálu, která prochází počátkem. Tento průsečík také odpovídá přibližně 63% ustálené hodnoty  $y(\infty)$ .

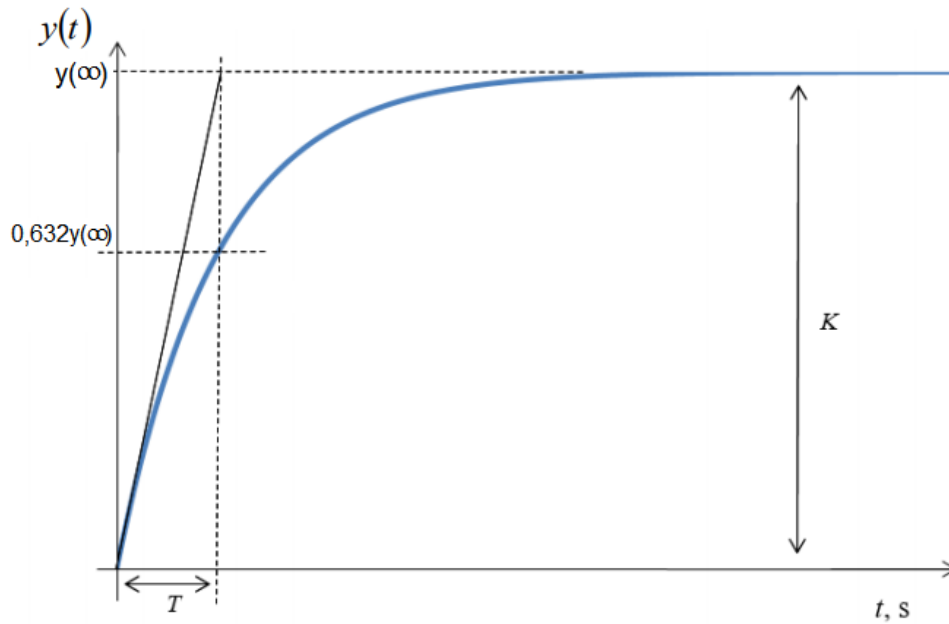
V některých případech nemusí být aproximace systémem pouze 1. řádu dostačující. Poté nastává nutnost zvýšit stupeň aproximační soustavy nebo přidat dopravní zpoždění systému. Jedním z mnoha způsobů je použití jedné ze Strejcových metod, které lze využít, pokud vykazuje odezva systému aperiodický průběh. Obrázek 3.12 znázorňuje metodu aproximace soustavy  $n$ -tého řádu se stejnými časovými konstantami. Parametry přenosu 3.44 určíme následujícím

Method	Input	Model	Output	Linear Process	Nonlinear Process	Allowable Signal-to-Noise ratio	Online Processing	Offline Processing	Batch Processing	Real-Time Processing	Time-Variant Systems	MIMO Systems	Resulting Model Fidelity	Scope of Application
Determination of Characteristic Values		$\frac{K}{(1+Ts)^n}$		✓	-	must be very large	-	✓	✓	-	-	-	Average	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rough model</li> <li>• Controller tuning</li> </ul>
Fourier Analysis		$G(j\omega_s)$		✓	-	must be large	✓	✓	✓	✓	-	✓	Average	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Validation of theoretically derived models</li> </ul>
Frequency Response Measurement		$G(j\omega_s)$		✓	-	average	✓	✓	✓	-	-	✓	Very good	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Validation of theoretically derived models</li> <li>• Design of classical (linear) controllers</li> </ul>
Correlation Analysis		$g(t_s)$		✓	-	can be small	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Good	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determination of signal relations</li> <li>• Determination of time delays</li> </ul>
Model Adjustment		$\frac{b_0 + b_1 s}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$		✓	✓	must be large	✓	✓	-	✓	✓	-	Average	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parameterization of models</li> </ul>
Parameter Estimation		$\frac{b_0 + b_1 s}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$		✓	✓	can be small	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Good	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Design of adaptive controllers</li> <li>• Adaptive controllers</li> <li>• Fault detection</li> </ul>

✓ = Applicable; - = Not applicable

Obrázek 3.10: Přehled nejvýznamějších I/O metod identifikace. Převzato z [14].





Obrázek 3.11: Přechodová charakteristika systému 1. řádu. Převzato z [16] a upraveno.

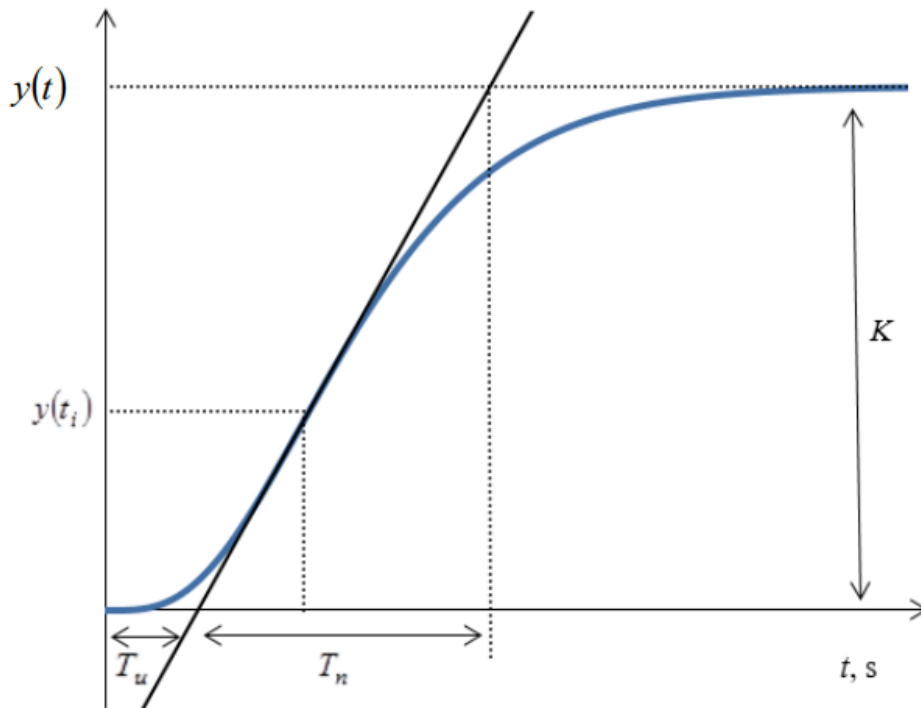
postupem:

$$H(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (3.44)$$

Zesílení soustavy se vypočítá stejným způsobem jako v předchozím případě  $K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$ , kde  $u(\infty)$  je ustálená hodnota vstupního signálu a  $y(\infty)$  je ustálená hodnota výstupního signálu. Přechodová charakteristika je vždy normovaná k ustálené hodnotě  $y(\infty)$ . Jak je uvedeno v [17], sestrojením tečny v inflexním bodě určíme  $\tau$  podle vztahu  $\tau = \frac{T_u}{T_n}$ , kde  $T_u$  je doba průtahu a  $T_n$  je doba náběhu. Podle hodnoty  $\tau$  určíme z příslušné tabulky nejbližší vyšší řád  $n$  aproximační soustavy a souřadnici inflexního bodu  $y(t_i)$ . Pomocí této souřadnice určíme v grafu přechodové charakteristiky přesněji inflexní bod a odečteme souřadnici  $t_i$ . Hodnotu časové konstanty  $T$  určíme ze vztahu  $T = \frac{t_i}{n-1}$ , případně pokud se ještě navíc vyskytuje dopravní spoždění, tak upravíme vztah na  $T = \frac{t_i - T_d}{n-1}$ , kde  $t_i$  je souřadnice času v inflexním bodě přechodové charakteristiky,  $T_d$  je časová konstanta dopravního zpoždění a  $n$  je řád aproximační soustavy.

### 3.2.3 Maticové aproximační metody

Alternativním přístupem Blackbox identifikace dynamických systémů jsou výpočetní maticové metody, které jsou výhodné zejména pro aproximaci složitějších systémů, jako jsou MIMO systémy a nelineární systémy. V těchto případech se v principu jedná o regresivní metody, kde se využívá odhad pomocí nejmenších čtverců, *Singular Value Decomposition* (SVD) a metody jako *Autoregressive exogenous* (ARX), nebo *Autoregressive-moving-average model with exogenous inputs model* (ARMAX). Aproximační metody ARX, ARMAX a jim podobné se v podstatě liší pouze v tom, jak vysoce komplexní odhad systému řeší. Zda se zabírají celkovým přenosem systému a pouze zahrnují faktor šumu, nebo odhadují i hustotu a parametrizování šumů.

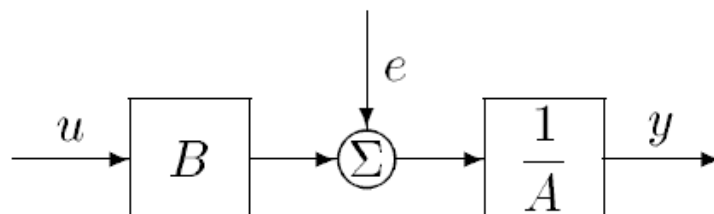


Obrázek 3.12: Přechodová charakteristika systému N-tého řádu. Převzato z [16].

Jednodušší formou identifikace MIMO LTI systémů je metoda ARX, která má v časové doméně následující strukturu:

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t). \quad (3.45)$$

Zde je  $y(t)$  p-dimenzionální sloupcový vektor obsahující výstupní signály v čase  $t$ ,  $u(t)$  je m-dimenzionální sloupcový vektor obsahující vstupní signály,  $e(t)$  je p-dimenzionální sloupcový vektor obsahující bílý šum signálů,  $G_0(q)$  je matice přenosové funkce LTI systému s operátorem časového posuvu  $q$  a  $H_0(q)$  je stabilní LTI systém s minimální fází, reprezentující šum. Odpovídající model systému 3.45 je reprezentovaný maticemi přenosových funkcí



Obrázek 3.13: Schématické zobrazení modelu systému aproximovaného metodou ARX. Převzato z [13].

$G(q, \theta)$  a  $H(q, \theta)$ , které jsou parametrizovány neznámým vektorem parametrů  $\theta$ . Tyto matice

přenosových funkcí definují jeden krok predikce odchyly:

$$\varepsilon(t, \theta) = H(q, \theta)^{-1} [y(t) - G(q, \theta)u(t)]. \quad (3.46)$$

Struktura ARX modelu z obrázku 3.13 je dána maticemi přenosových funkcí následovně:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{A(q, \theta)} \quad (3.47)$$

$$H(q, \theta) = \frac{1}{A(q, \theta)}, \quad (3.48)$$

kde matice  $A(q, \theta)$  a  $B(q, \theta)$  jsou dány maticovými polynomy:

$$A(q, \theta) = I_p + A_1q^{-1} + \dots + A_{na}q^{-na} \quad (3.49)$$

$$B(q, \theta) = B_0 + B_1q^{-1} + \dots + B_{nb}q^{-nb}, \quad (3.50)$$

přičemž  $I_p$  je jednotková matice s dimenzí  $p \times p$ . Index  $na$  odpovídá stupni maticového polynomu  $A(q, \theta)$  a index  $nb$  stupni maticového polynomu  $B(q, \theta)$ . Využitím struktury ARX modelu je vztah predikce odchyly 3.46 vyjádřen lineární regresí ve formě:

$$\varepsilon(t, \theta) = A(t, \theta)y(t) - B(t, \theta)u(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta, \quad (3.51)$$

kde  $\varphi(t)$  je tzv. *regresní matice* obsahující vstupní a výstupní data z minulosti až do času  $t$ . Jestliže máme soubor dat o délce  $N$ , odhad vektoru parametrů  $\hat{\theta}_N$  se získá minimalizačním kritériem nejmenších čtverců, definovaným jako optimalizační problém:

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^T(t, \theta) \Lambda^{-1} \varepsilon(t, \theta), \quad (3.52)$$

kde  $\Lambda$  je váhová matice, která je obvykle volená rovna jednotkové matici  $I_p$ . Řešení tohoto optimalizačního problému může být získáno analyticky a pro  $\Lambda = I_p$  je rovno:

$$\hat{\theta}_N = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right]. \quad (3.53)$$

Kvůli faktu, že predikce odchyly je afinní v parametrech, řešení lze získat rychle, což je důvod pro popularitu tohoto přístupu v případě, že aproximovaný model má mnoho vstupů a výstupů, a tedy i mnoho parametrů [9].

### 3.2.4 Singular Value Decomposition

Singulární dekompozice (SVD) spočívá v rozložení matice  $A \in C^{m \times n}$  s hodnotí  $r \leq \min(m, n)$  na součin:

$$A = U\Sigma V^*, \quad (3.54)$$

kde  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  a  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in R^{r \times r}$  řazené tak, že  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , dále  $U \in C^{m \times m}$  a  $V \in C^{n \times n}$  jsou unitární matice.

Podle [15] máme  $U = [U_1, U_2]$  s  $U_1 \in C^{m \times r}$ ,  $U_2 \in C^{m \times (m-r)}$  a  $V = [V_1, V_2]$  s  $V_1 \in C^{n \times r}$ ,  $V_2 \in C^{n \times (n-r)}$ . Odtud můžeme napsat, že:

$$A = U\Sigma V^* = U_1 \Sigma_r V_1^*. \quad (3.55)$$

Pokud  $U$  a  $V$  jsou unitární, máme následující rovnosti:

$$U^*U = \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = I_m, \quad U_1^*U_1 = I_r, \quad (3.56)$$

$$V^*V = \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = I_n, \quad V_1^*V_1 = I_r, \quad (3.57)$$

kde  $I_m$ ,  $I_n$ ,  $I_r$  jsou jednotkové matice o daných dimenzích  $m$ ,  $n$  a  $r$ . Vztah  $A = U_1 \Sigma_r V_1^*$  implikuje také

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^*, \quad (3.58)$$

což je užitečná vlastnost v teorii řízení MIMO systémů. Uvážíme-li vztah mezi signály  $y$  a  $v$  daný  $y = Av$ , můžeme psát

$$y = Av = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* v. \quad (3.59)$$

Z dalších odvození pro maximum a minimum plyne, že hodnota maximálního zesílení závisí na směru vektoru  $v$ . Pak  $Av = Av_1 = \sigma_1 u_1 = y$ , tedy zesílení je ve směru levého singulárního vektoru  $u_1$ , a také stejného singulárního čísla  $\sigma_1$ . Obdobně pro minimální zesílení dostáváme  $Av = Av_r = \sigma_r u_r = y$ .

## 4 Identifikace konstant modelu

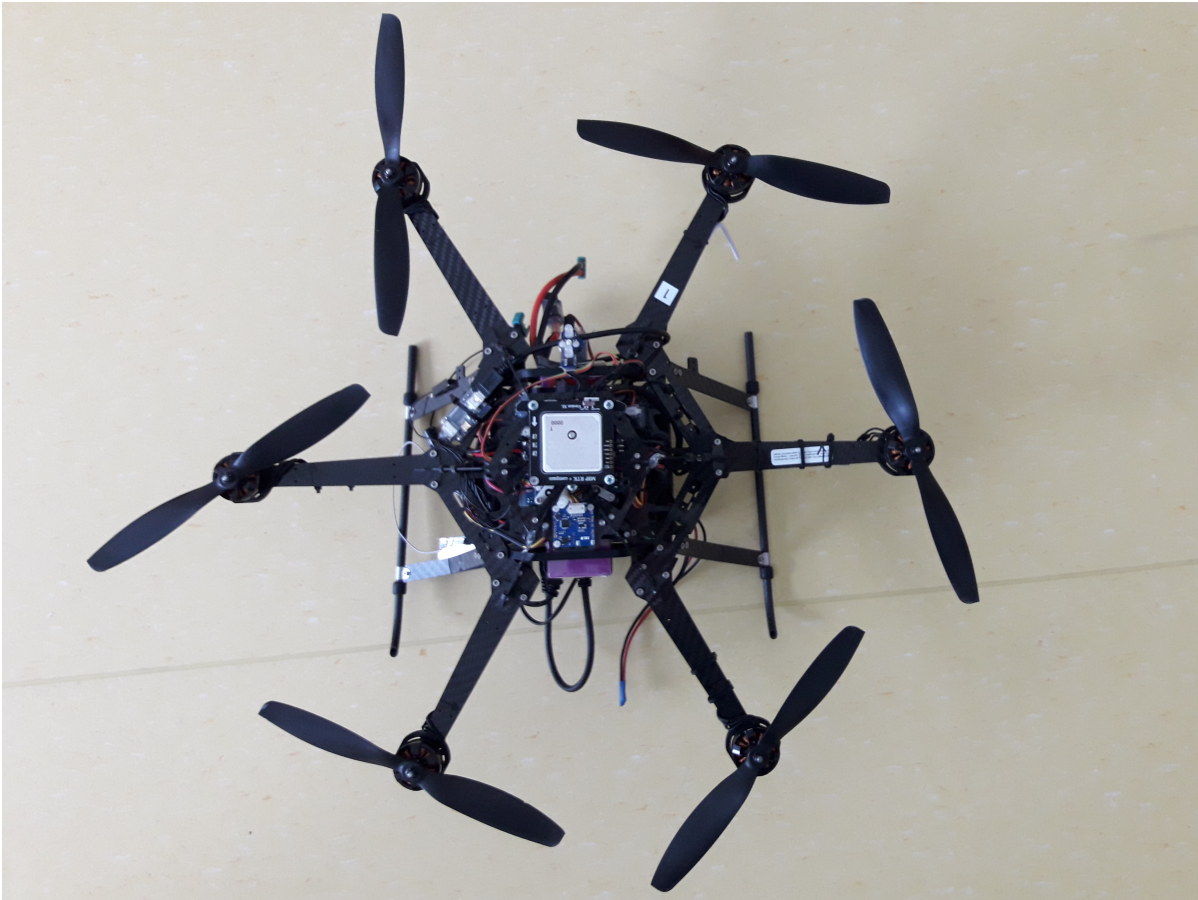
Předmětem testování a modelování byla komerčně dostupná hexakoptéra *AscTec Firefly* (viz. obrázek 4.1) od společnosti *Ascending Technologies*. Tento model disponuje redundantním pohonným systémem a mechanicky tlumeným užitečným zatížením. Dron je uzpůsobený pro účely automatických letových experimentů řízených pomocí GPS, aplikace počítačového vidění a venkovní navigace. Technické parametry testované hexakoptéry jsou [18]:

- Rozměry:  $605 \times 665 \times 165$  mm
- Velikost vrtulí: 8"
- Výkon motorů:  $6 \times 100$ W
- Maximální tah: 36N
- Maximální zatížení: 600g
- Maximální hmotnost: 1600g
- Maximální rychlost: 15m/s

K tomu je hexakoptéra vybavena dvěma procesorovými deskami *AscTec Atomboard* a *AscTec Mastermind* s výkonnými procesory Intel a předinstalovaným operačním systémem Linux Ubuntu. K procesorovým deskám je možné připojit množství senzorů, jako kamery, laserový scanner, LiDAR apod. Bezdrátovou sériovou komunikaci s hexakoptérou poskytují moduly XBee.

Pro vytvoření matematického modelu byl zvolen blackbox přístup. Tímto způsobem je totiž velice zjednodušena vnitřní struktura modelu, kterou by bylo jinými přístupy mnohem náročnější identifikovat. Navíc tento přístup aproximace celého systému je dostatečně přesný a výhodný pro účely následného vývoje různých úloh regulace. Díky znalosti odezvy systému na řídicí signály, bez ohledu na komplikovanost vnitřní struktury, lze lépe aplikovat regulační smyčky.

Cílem identifikace modelu je tedy zjištění dynamiky systému jako celku, na nějž bude možné později aplikovat složitější regulační úlohy. Jelikož se jedná o UAV se šesti stupni volnosti (6 DOF), bylo by zbytečně komplikované snažit se získat např. kompletní stavový popis dynamiky. Rozdělíme ji na jednotlivé přenosové funkce systému v hlavních směrech pohybu hexakoptéry, čímž získáme několik SISO systémů. Předpokladem pro model je následné určení rychlosti, polohy, atp. To znamená nutnost naměření dostatečného množství dostatečně přesných dat z manuálně řízeného letu hexakoptéry pro kvalitní identifikaci modelu.



Obrázek 4.1: Fotografie identifikované hexakoptéry

#### 4.1 Provedení experimentu

Veškeré měření probíhalo v laboratoři CIIRC<sup>1</sup>, kde byl navíc, pro přesné sledování polohy dronu, využit externí lokalizační systém Vicon<sup>2</sup>. Díky tomuto systému bylo možné přesně zaznamenávat rotace hexakoptéry kolem každé osy i její přesnou polohu v monitorované oblasti. Další výhodou laboratorních podmínek byla minimalizace rušení, zejména co se týče vlivu povětrnostních podmínek při venkovním létání. Nevýhodou je však omezený letový prostor daný nejen stavbou interiéru, ale i prostorem, který je schopen snímat lokalizační systém.

Ovládání bylo rozděleno na dva řídicí signály. Důvodem pro rozdělení ovládání dronu bylo usnadnění manuální regulace. Jeden řidič měl za úkol stabilizaci dronu v klidové poloze a druhý řidič měl za úkol udávat akční zásahy pro měření odezvy v daném pohybu. Rozdělené ovládání mělo samozřejmě i své nevýhody. Jelikož musely být řídicí signály nejen sečteny, ale i zaznamenány pro pozdější zpracování, probíhala komunikace mezi ovladači a hexakoptérou přes počítač. Vlivem této náročnější komunikace měla odezva na řídicí signál udávající akční

<sup>1</sup> Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC ČVUT) – vysokoškolský ústav Českého vysokého učení technického v Praze (ČVUT). Dostupné z: <https://www.ciirc.cvut.cz/cs/>.

<sup>2</sup> Motion Capture System VICON – průmyslový systém pro přesné řízení a sledování objektů v reálném čase. Dostupné z: <https://www.vicon.com/motion-capture/engineering>.

zásahy výrazné zpoždění a zesílení. Tyto vlastnosti značně komplikovali ovládání hexakoptéry.

Původním záměrem bylo měření dat z pozvolného létání ze strany na stranu, což v časové závislosti tvoří sinusový průběh zaznamenaného pohybu a mimo jiné simuluje i přirozený pohyb hexakoptéry. Z důvodu omezeného prostoru v laboratoři, větších rozměrů hexakoptéry a problémům s odezvou řízení se nakonec tento způsob měření nedal dobře realizovat. Způsob naměření dat byl tedy přehodnocen. Realizován byl méně přirozený druh letu, který je však bližší klasickému řešení problematiky regulace a řízení, a to odezva na jednotkový skok. Při regulaci hexakoptéry dost dobře nelze udávat skokové změny referenční hodnoty a navíc ve většině případů je přímo nežádoucí, ale z přechodové charakteristiky lze jednoduše zjistit dynamiku systému. V průběhu experimentu byly udávány větší či menší akční zásahy ve všech význačných směrech pohybu hexakoptéry. Bohužel, při několikatém pokusu o výrazný, déle trvající akční zásah, došlo z důvodu horších reakcí na řízení ke ztrátě kontroly nad hexakoptérou a následné havárii. Z rozsahu poškození, zachyceném na obrázku 4.2, bylo zřejmé, že hexakoptéra není nadále schopná letu.

Všechna data potřebná pro identifikaci modelu se online zaznamenávala na palubním počítači. Vstupní signály modelu pro daný pohyb jsou udávány v jednotkách, které odpovídají interním jednotkám v rozhraní. Tyto jednotky v rozhraní jsou úměrné požadovanému náklonu v radiánech:

- *Thrust control* – řízení rychlosti pohybu, nebo-li celkového požadovaného tahu motorů
- *Roll control* – řízení velikosti bočního náklonu
- *Pitch control* – řízení velikosti podélného sklonu
- *Yaw control* – řízení rychlosti směrové rotace

Bližší popis pohybů dronu, iniciovaných těmito signály, je uveden v kapitole 2. Dalšími zaznamenanými daty byly výstupní signály systému čili data ze senzorů snímajících reálnou polohu a pohyb hexakoptéry. Měření polohy a pohybu lze rozdělit následovně:

- *Palubní měření*
  - akcelerometr
  - gyroskop

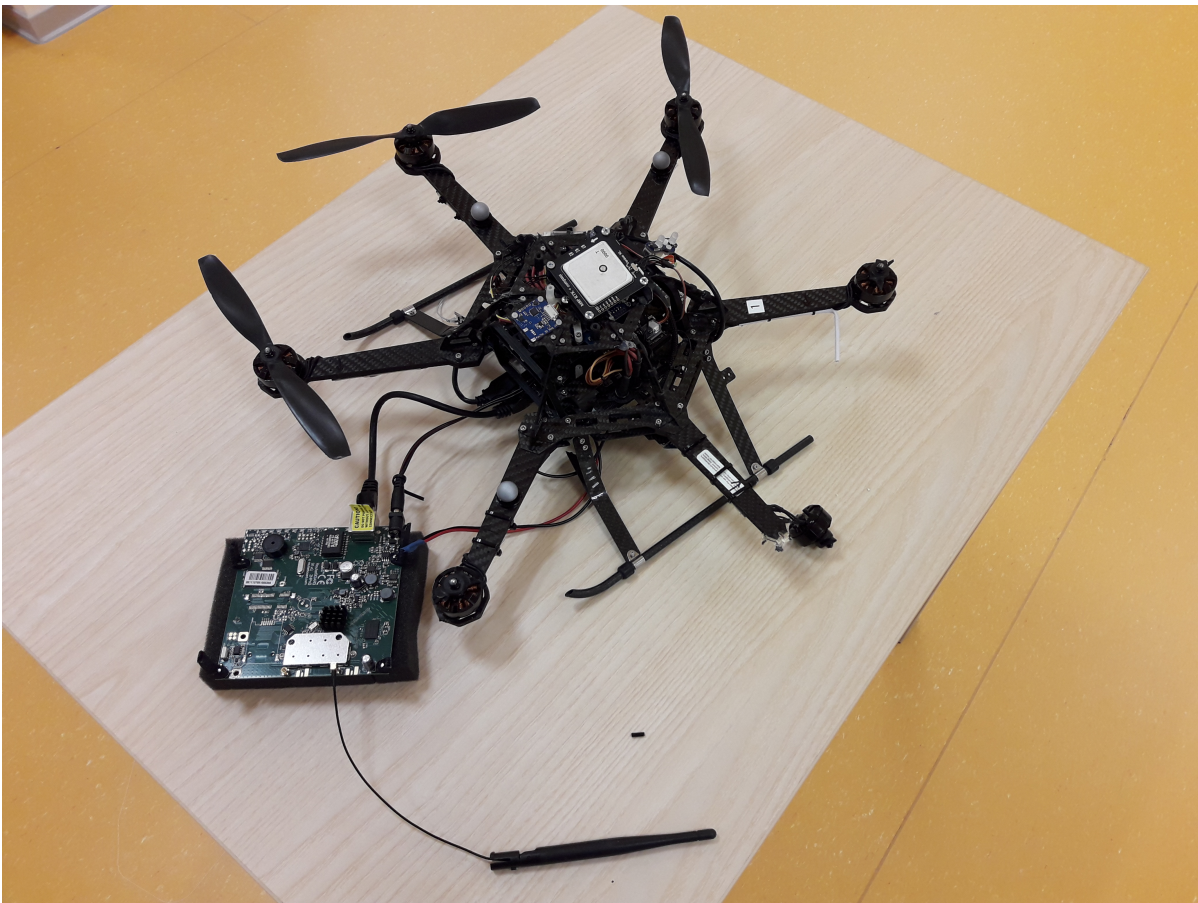
Tyto senzory jsou součástí vnitřního řídicího systému hexakoptéry. Data se online odesílala z dronu do počítače, kde byla sloučena s daty řídicích signálů a daty z externího měření. Kvůli online záznamu dat, odesílaných po paketech, došlo k poklesu průměrné vzorkovací frekvence přibližně na 100Hz a k tomu data nejsou rovnoměrně rozložena. V tomto případě se však nejedná přímo o data z jednotlivých senzorů, ale o jejich fúzi, udávající úhel rotace hexakoptéry ve stupních. Data pouze přímo z akcelerometru nebo

gyroskopu by pravděpodobně podléhala vysokému šumu a nebyla by pro naše účely dostatečně přesná. Fúzovaná data jsou bezšumová, což zvyšuje jejich čitelnost.

- *Externí měření*

- všesměrová rotace
- pozice

O dosti přesnější měření zastává externí měřicí systém Vicon, který měří nejen polohu v kartézských souřadnicích, ale i úhly rotace daného objektu. Poloha je systémem měřena v metrech a úhly rotace v radiánech. Systém má maximální vzorkovací frekvenci 450Hz, ale v našem případě byla upravena na 120Hz. Na úkor přesnosti je zde omezující prostor. Jelikož lokalizační systém Vicon se skládá ze soustavy kamer, které jsou ve většině případů umístěny na kovové konstrukci podél obvodových zdí, není možné stoprocentně pokrýt celý prostor v objektu. Mohou vzniknout tzv. hluchá místa, ve kterých není objekt pro systém viditelný.



Obrázek 4.2: Fotografie hexakoptéry po havárii při měření dat



## 4.2 Zvolené metody aproximace

Rozložením MIMO blackbox systému na dílčí podsystémy, jsme získali 4 SISO modely, které aproximují dynamiku hexakoptéry v jejích hlavních směrech pohybu. Pro vytvoření modelu je ideální co nejnižší přípustný řád systému. Z tohoto důvodu byl zvolen model se systémy 1. řádu, které byly během prvotního testování uznány za dostačující. Vybrané aproximační metody jsou následující:

1. Metoda nejmenších čtverců pomocí SVD
2. Dvoubodová metoda

Metody, vybrané pro porovnání jejich kvality aproximace reálného systému, spočívají v analýze vždy jedné přechodové charakteristiky. Jejich hlavními rozdíly je použití dat z charakteristiky pro odhad koeficientů a výstupní přenosová funkce aproximovaného systému.

### 4.2.1 Aproximace pomocí SVD

V této části jde o metodu identifikace přechodové charakteristiky systému 1. řádu bez zpoždění, avšak ne běžným geometrickým přístupem, ale pomocí maticového výpočtu parametrů přenosu ze změřených dat, za použití singulární dekompozice. K výpočtu jsou nutná data, zachycující přechodovou charakteristiku systému 1. řádu, popsaného přechodovou funkcí 3.43. Algoritmus pro výpočet parametrů (umístěný na příloženém CD) vychází z teorie singulární dekompozice a minimalizace metodou nejmenších čtverců, popsané v [15].

V návaznosti na teorii popsanou v sekci 3.2.4, budeme uvažovat problém minimalizace nejmenších čtverců, kde řešení  $x$  systému lineárních rovnic  $Ax = b$  je řešeno minimalizací  $\|b - Ax\|_2$ . Úpravou dostaneme, že minimalizované  $x$  je řešením:

$$A^T Ax = A^T b. \quad (4.1)$$

Přepsáním rovnice vzhledem ke vztahům v sekci 3.2.4, získáme rovnost ve tvaru:

$$V_1 \Sigma_r^2 V_1^T x = (U_1 \Sigma_r V_1^T)^T b = V_1 \Sigma_r U_1^T b, \quad (4.2)$$

jejíž kompletním řešením je:

$$x_w = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b + V_2 w, \quad (4.3)$$

pro libovolné  $w \in R^{m-r}$ .

### 4.2.2 Dvoubodová metoda aproximace

Jedná se o aproximační metodu přechodové charakteristiky systému 1. řádu s dopravním zpožděním. Nyní už jde o geometrický přístup, protože výpočet koeficientů systému vychází z časové závislosti bodů odečtených z průběhu přechodové charakteristiky (podobně jako v sekci 3.2.2). Tato metoda byla vybrána pro pozdější srovnání, přičemž namísto zvýšení řádu systému, přidáme do systému dopravní zpoždění. Přenosová funkce takového systému je ve tvaru:

$$H(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \cdot e^{-T_d s}, \quad (4.4)$$

kde  $K$  je zesílení,  $T_1$  je časová konstanta a  $T_d$  je dopravní zpoždění systému. Zesílení  $K$  se vypočítá standardně ze vztahu:

$$K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}, \quad (4.5)$$

kde  $y(\infty)$  je ustálená hodnota výstupního signálu a  $u(\infty)$  je ustálená hodnota vstupního signálu. Dále z přechodové charakteristiky stanovíme hodnoty  $y_{0,7} = 0,7 \cdot y(\infty)$ ,  $y_{0,33} = 0,33 \cdot y(\infty)$  a jim odpovídající časové okamžiky  $t_{0,7}$  a  $t_{0,33}$ . Z hodnot časů  $t_{0,7}$  a  $t_{0,33}$  vypočítáme stěžejní parametry přenosu podle následujících vztahů [17]:

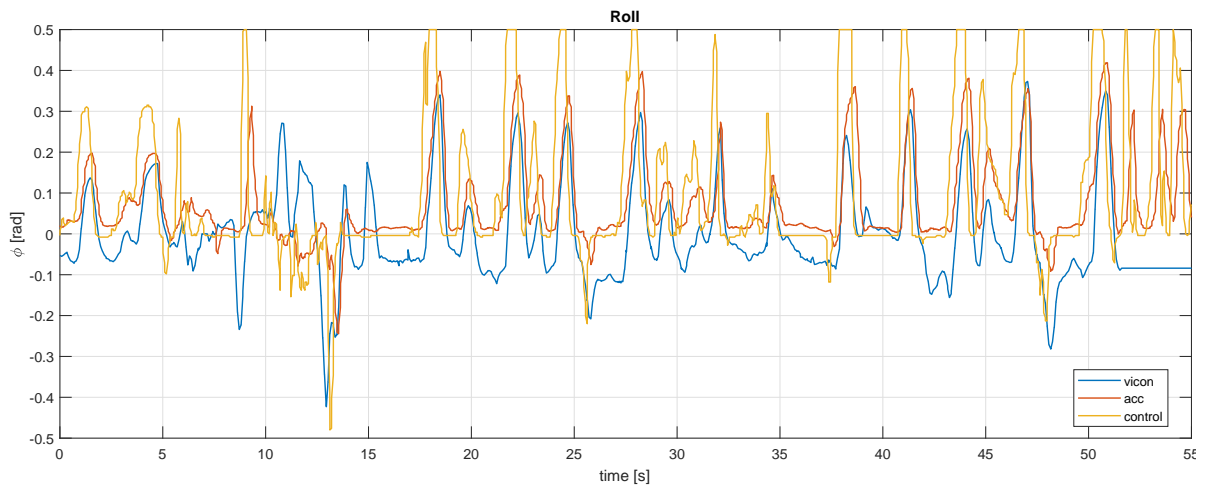
$$T_1 = 1,245 \cdot (t_{0,7} - t_{0,33}) \quad (4.6)$$

$$T_d = 1,498 \cdot t_{0,33} - 0,498 \cdot t_{0,7}. \quad (4.7)$$

## 4.3 Zpracování dat

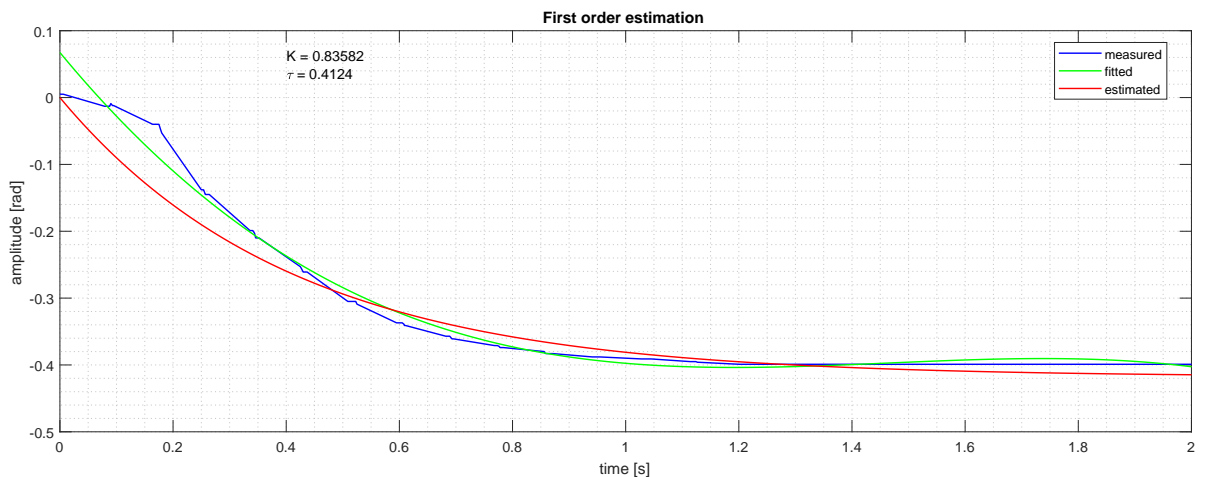
Během experimentu byla zaznamenána data z externích senzorů i senzorů na palubě hexakoptéry a signály povelů z vysílaček (viz. sekce 4.1). Před samotnou identifikací byla data z palubních senzorů převedena na radiány. Na obrázku 4.3 je ukázka průběhů dat bočního náklonu (Roll) v radiánech. Z těchto záznamů je pro každý z hlavních pohybů hexakoptéry provedena selekce datových úseků, ve kterých je co nejlépe zachycena přechodová charakteristika. Na zvolený výběr dat se aplikují obě identifikační metody. Z průběhů dat je také vidět, že záznam ze systému Vicon obsahuje časté výpadky, který je například zachycen na konci grafu. Mimo to je v grafu, mezi 5. a 10. sekundou záznamu zachycena anomálie, kdy senzory vykazují opačný směr pohybu. Dále pozorujeme, že v průběhu letu vzniká na datech z externího systému offset vůči palubním senzorům. Jelikož tato odchylka setrvává pouze během doby letu, může být příčinou nedokonalost interních regulátorů hexakoptéry, které ji neudržují v rovnovážné poloze. Navzdory tomu hůře vzorkované průběhy z palubních senzorů jsou stabilnější, nejspíš kvůli jejich fúzi i s řídicím signálem. Úseky průběhů ze systému Vicon jsou tedy vhodnější pro identifikaci a průběhy z palubních senzorů jsou vhodnější pro následnou validaci odezvy.

Identifikace pomocí singulární dekompozice využívá k výpočtu data z celé přechodové charakteristiky výstupního signálu i data vstupního signálu. Pro zvýšení přesnosti výpočtu je součástí algoritmu uměle prodloužená ustálená hodnota přidáním několika zkopírovaných hodnot posledního vzorku signálu. Dále je také aplikováno proložení vybraných výstupních dat



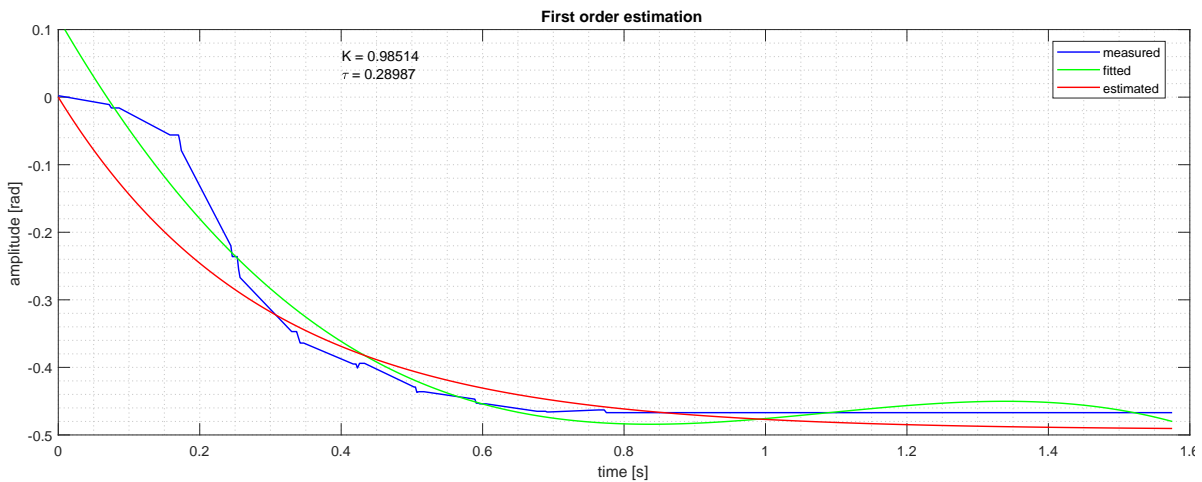
Obrázek 4.3: Ukázka datového záznamu z testovacího letu (boční náklon - Roll).

aproximačním polynomem, protože data se vzorkují relativně malou frekvencí. Pro tento účel se nejlépe osvědčil polynom 3. řádu. Následně jsou teprve takto aproximovaná data použita pro výpočet koeficientů systému. Ze získaných koeficientů je pro srovnání vykreslena odezva odhadnutého systému, spolu s původní odezvou i aproximačním polynomem. Na obrázku 4.4 je zobrazen jeden z výsledků pro odhad systému při bočním náklonu. Dále na obrázku 4.5 je zobrazen jeden z odhadů pro podélný sklon (Pitch).



Obrázek 4.4: Výstup algoritmu pro odhad systému pomocí SVD (rotace Roll).

Na rozdíl od předchozí metody je vstupními daty do algoritmu Dvoubodové metody pouze několik hodnot odečtených z vybrané přechodové charakteristiky. Jak už bylo popsáno v sekci 3.2.2, jedná se konkrétně o ustálenou hodnotu průběhu a pro tuto metodu dvě stěžejní časové hodnoty určující, kdy průběh dosáhne 33% a 70% z ustálené hodnoty. Poslední potřebnou hodnotou je ustálená hodnota řídicího vstupu, jenž je uvažován jako skokový konstantní signál. Odečtené hodnoty se dosadí do vztahů 4.5, 4.6 a 4.7 pro výpočet koeficientů přechodové funkce.



Obrázek 4.5: Výstup algoritmu pro odhad systému pomocí SVD (rotace Pitch).

Pro správnou analýzu je nutné vždy počátek daného úseku signálu posunout do počátku obou souřadnic. Důležité je si také uvědomit jaká data se chytáme analyzovat, resp. jaký pohyb uvažujeme a co je jeho výstupem. V případě rotací Pitch a Roll je vstupními signály řízení úhel podélného sklonu a bočního náklonu hexakoptéry, které jsou úměrné rychlostem pohybu v ose X a ose Y. Zde je možné z naměřených dat aproximovat systémy přímo mezi řídicím signálem a danou rotací. V případě směrové rotace (Yaw) nebo i výšky letu (osa Z) však nelze takto jednoduše odhadovat systém přímo. Řídicím signálem pro Yaw určujeme rychlost rotace hexakoptéry kolem osy Z, jelikož se změna úhlu jeví jako astatický systém. Aproximaci systému tedy provádíme mezi řízením a derivací úhlu rotace Yaw. Pro rozumný výpočet derivace zvolené části signálu, bylo nutné opět průběh aproximovat. Pro tento účel se nejlépe osvědčil polynom 4. řádu. Úhel otočení způsobený akčním zásahem získáme integrací neboli přidáním integračního členu  $I = \frac{1}{s}$  do přenosové funkce. Obdobně pak při řízení výšky (pohybu ve směru osy Z) je řídicím signálem určována rychlost stoupání, případně klesání hexakoptéry, respektive změna kolektivního tahu motorů (Thrust). Pro odhad systému opět tedy vycházíme z derivace polohy v ose Z. V obou těchto případech vykazuje identifikovaná přechodová charakteristika vlastnosti vyššího řádu, jelikož obsahuje nezanedbatelnou dobu průtahu. Tu lze ovšem jednoduše aproximovat dopravním zpožděním. Z toho plyne, že aproximace systémem 1. řádu bez dopravního zpoždění je zde nevhodná.

Z více záznamů letu hexakoptéry a různých úseků dat, které byly vhodné pro aproximaci, bylo pro každý z pohybů identifikováno několik přenosových funkcí. Přenosové funkce 1. řádu bez dopravního zpoždění jsou značeny písmenem  $H$  a přenosové funkce 1. řádu s dopravním zpožděním jsou značeny písmenem  $G$ :

## ► Roll

$$H_{R1} = \frac{0,803}{0,270s + 1} \quad (4.8)$$

$$G_{R1} = \frac{0,766}{0,274s + 1} \cdot e^{-0,034s} \quad (4.9)$$

$$H_{R2} = \frac{0,852}{0,411s + 1} \quad (4.10)$$

$$G_{R2} = \frac{0,808}{0,271s + 1} \cdot e^{-0,121s} \quad (4.11)$$

$$H_{R3} = \frac{0,836}{0,412s + 1} \quad (4.12)$$

$$G_{R3} = \frac{0,798}{0,321s + 1} \cdot e^{-0,102s} \quad (4.13)$$

## ► Pitch

$$H_{P1} = \frac{0,779}{0,384s + 1} \quad (4.14)$$

$$G_{P1} = \frac{0,718}{0,173s + 1} \cdot e^{-0,192s} \quad (4.15)$$

$$H_{P2} = \frac{0,963}{0,981s + 1} \quad (4.16)$$

$$G_{P2} = \frac{0,798}{0,290s + 1} \cdot e^{-0,355s} \quad (4.17)$$

$$H_{P3} = \frac{0,985}{0,290s + 1} \quad (4.18)$$

$$G_{P3} = \frac{0,934}{0,143s + 1} \cdot e^{-0,143s} \quad (4.19)$$

## ► Yaw

$$G_{Y1} = \frac{1,606}{0,224s + 1} \cdot e^{-0,099s} \quad (4.20)$$

$$G_{Y2} = \frac{4,484}{0,263s + 1} \cdot e^{-0,106s} \quad (4.21)$$

$$G_{Y3} = \frac{3,075}{0,196s + 1} \cdot e^{-0,244s} \quad (4.22)$$

## ► Thrust

$$G_{T1} = \frac{3,520}{0,207s + 1} \cdot e^{-0,098s} \quad (4.23)$$

$$G_{T2} = \frac{3,288}{0,192s + 1} \cdot e^{-0,146s} \quad (4.24)$$

$$G_{T3} = \frac{2,557}{0,154s + 1} \cdot e^{-0,222s} \quad (4.25)$$

## 5 Porovnání kvality modelu

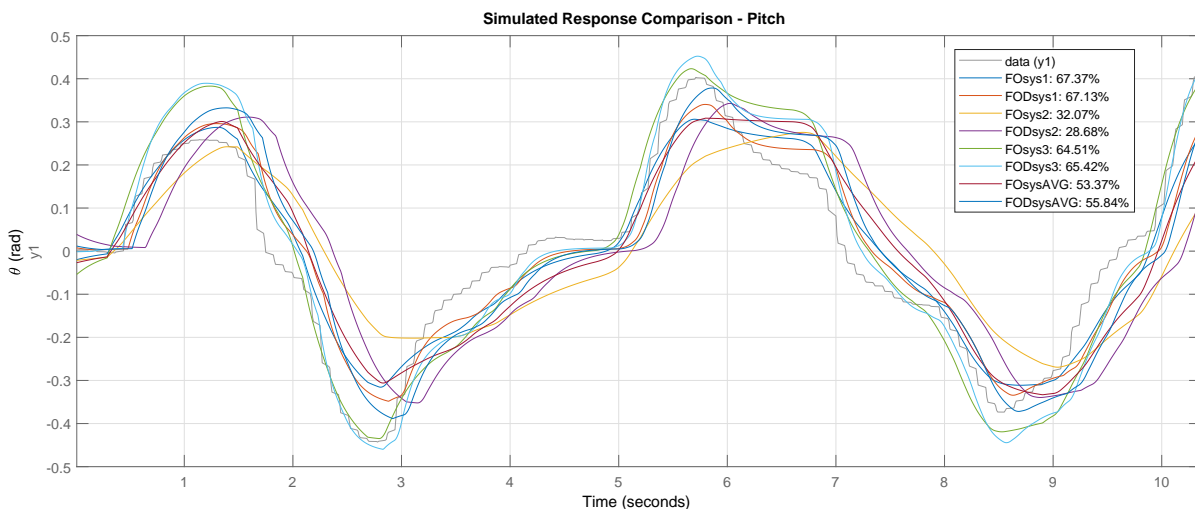
Obsahem této kapitoly je otestování a vzájemné porovnání jednotlivých identifikovaných matematických modelů. Jelikož pro každý modelovaný subsystém bylo opakovaným měřením identifikováno několik modelů, je možné zahrnout do testování i odpovídající průměrné přenosové funkce. Ty jsou pak ve tvaru:

$$G_{avgR} = \frac{k_{avgR}}{sT_{avgR} + 1} \cdot e^{-sT_{d_{avgR}}}, \quad (5.1)$$

kde koeficienty  $k_{avgR}$ ,  $T_{avgR}$  a  $T_{d_{avgR}}$  jsou vypočítány z aritmetického průměru odpovídajících koeficientů přenosových funkcí daného subsystému.

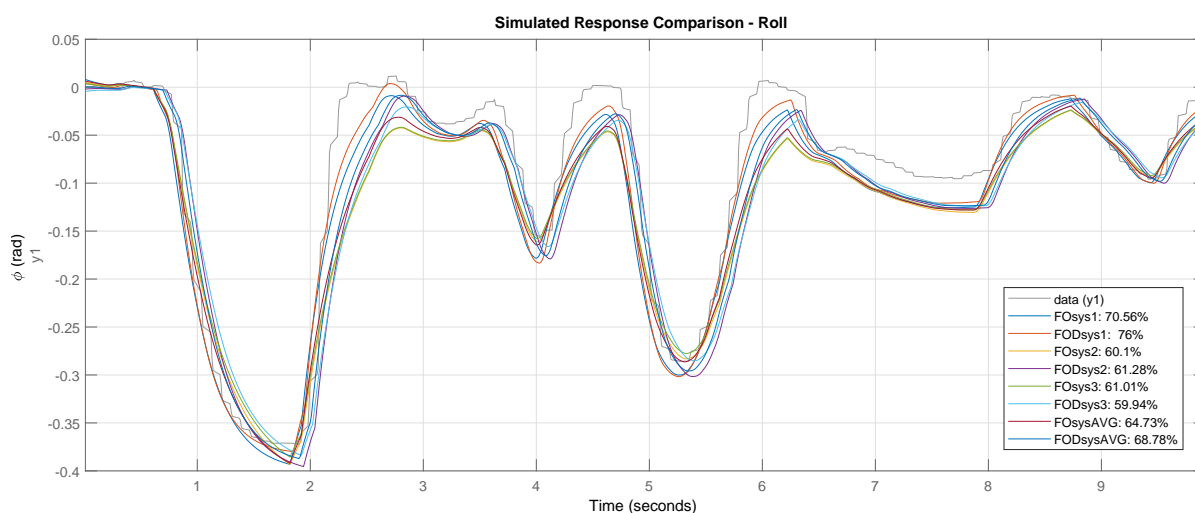
Výsledky testování kvality odhadu na různých úsecích dat byly značně rozdílné. Mimo jiné byla v některých případech omezující i délka dat vhodných pro validaci modelů. Pořadí kvality modelů, co se týče vzájemné přesnosti odhadu, bylo však ve většině případů stejné. Délka testovaných dat se pohybuje v rámci jednotek sekund, kdy by se ještě neměla výrazně projevit odchylka vlivem integrační složky modelu.

Na obrázku 5.1 lze vidět porovnání odezev modelů s reálným systémem pro podélný sklon. Odhad výstupu systému identifikovanými modely byl úspěšný, ale vyskytují se i výjimky méně kvalitních odhadů. Největší shodu průběhů má *FOsys1*, model se systémem 1. řádu bez dopravního zpoždění, jehož přenosovou funkci popisuje vztah 4.14. Shoda s reálným signálem činí 67,37%. Nejlepší výsledek mezi modely 1. řádu s dopravním zpožděním má model *FODsys1* s úspěšností 67,13% a přenosovou funkcí uvedenou vztahem 4.15. Tento model je celkově hned na druhém místě v kvalitě odhadu výstupního signálu.



Obrázek 5.1: Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Pitch.

Na obrázku 5.2 lze vidět porovnání odezev modelů s reálným systémem pro boční náklon. Zde je celkově o dost lepší úspěšnost všech modelů, drží se nad 59% shody s reálnými daty. Největší shodu průběhů má model *FODsys1* se systémem 1. řádu s dopravním zpožděním, jehož přenosovou funkci popisuje vztah 4.9. Shoda s reálným signálem činí 76.0%. Nejlepší výsledek mezi modely 1. řádu bez dopravního zpoždění má model *FOsys1* s přenosovou funkcí uvedenou vztahem 4.14. Tento model je celkově hned na druhém místě v kvalitě odhadu výstupního signálu se shodou 70,56%.



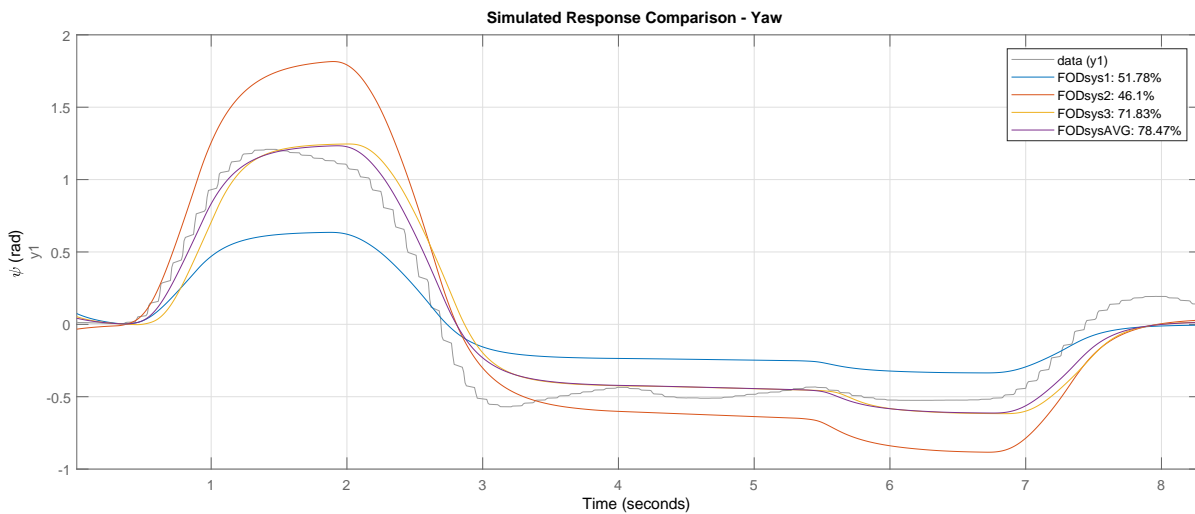
Obrázek 5.2: Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Roll.

Na obrázku 5.3 lze vidět porovnání odezev modelů s reálným systémem pro směrovou rotaci. Jak je uvedeno v sekci 4.3, jsou v tomto případě přenosy vynásobeny integrátorem  $I = \frac{1}{s}$ , aby bylo možné získat úhel rotace  $\psi$ . Celková úspěšnost těchto modelů je procentuálně podobná jako v předchozích případech, ale v tomto případě se jedná o mnohem větší absolutní odchylku úhlu. Největší shodu průběhů má model *FODsysAVG* s průměry identifikovaných koeficientů z přenosů 4.20, 4.21 a 4.22, jehož přenosová funkce je následující:

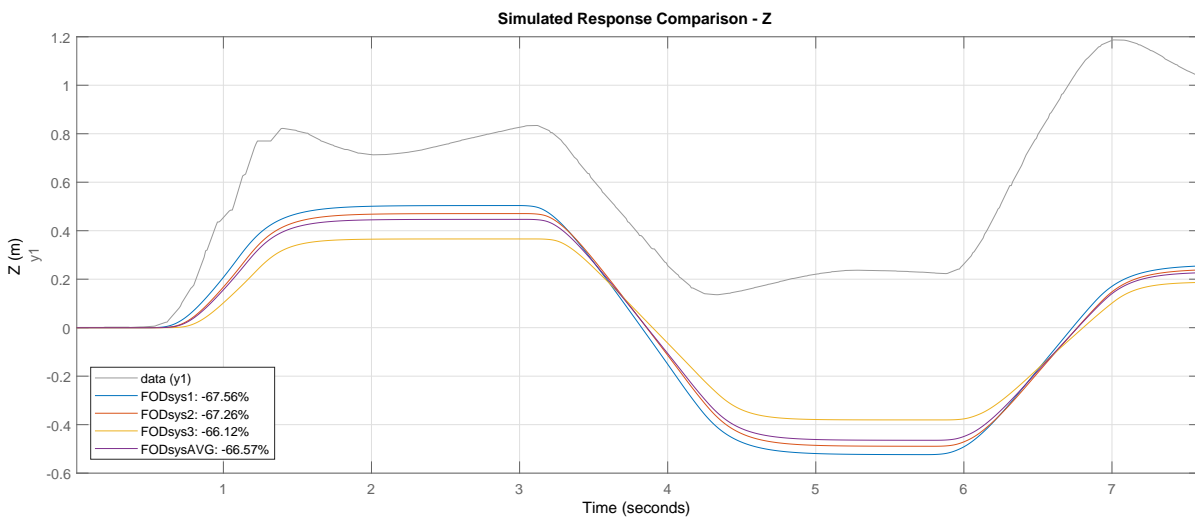
$$G_{avg\psi} = \frac{3,055}{0,227s + 1} \cdot e^{-0,15s}. \quad (5.2)$$

Model se shoduje s reálným signálem v 78,47% testovaného průběhu. Druhou nejlepší shodu má model *FODsys3* se shodou 71,83%.

Na obrázku 5.4 lze vidět porovnání odezev modelů s reálným systémem pro výšku letu. Opět jsou v tomto případě přenosy vynásobeny integrátorem  $I = \frac{1}{s}$ , aby bylo možné získat polohu v ose Z. Odhady modelů zde z pohledu procentuální shody nejsou příliš kvalitní. Integrace přenosové funkce modelu způsobuje značné odchýlení výsledného odhadu výšky od změřených hodnot. Jednotlivé odezvy však věrohodně reagují na změny řízení. Nejúspěšnější v odhadu výšky je model *FODsys3*, kterému odpovídá přenosová funkce 4.25.



Obrázek 5.3: Porovnání identifikovaných modelů pro odhad úhlu Yaw.

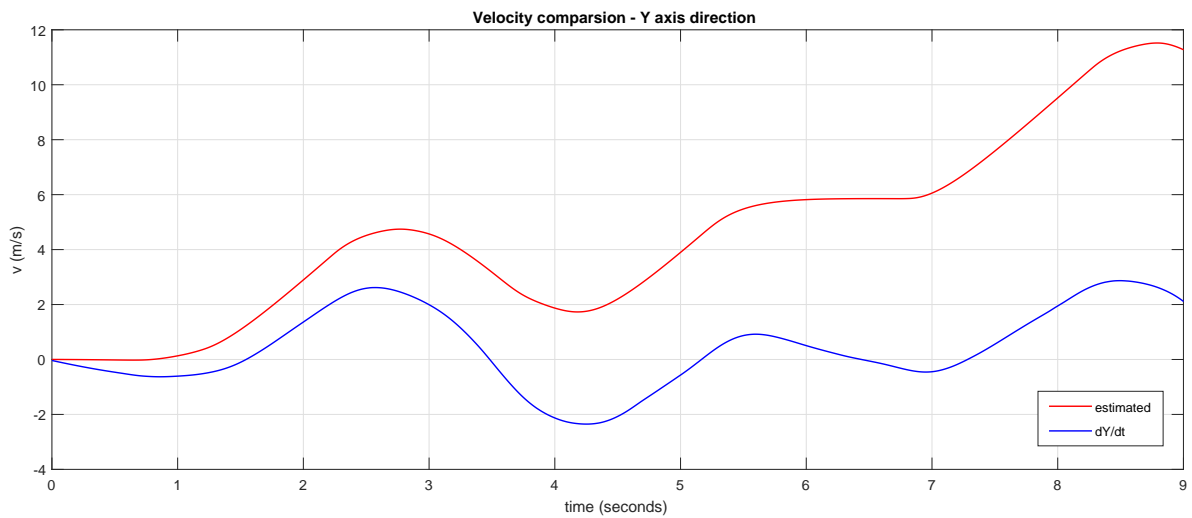


Obrázek 5.4: Porovnání identifikovaných modelů pro odhad pohybu v ose Z.

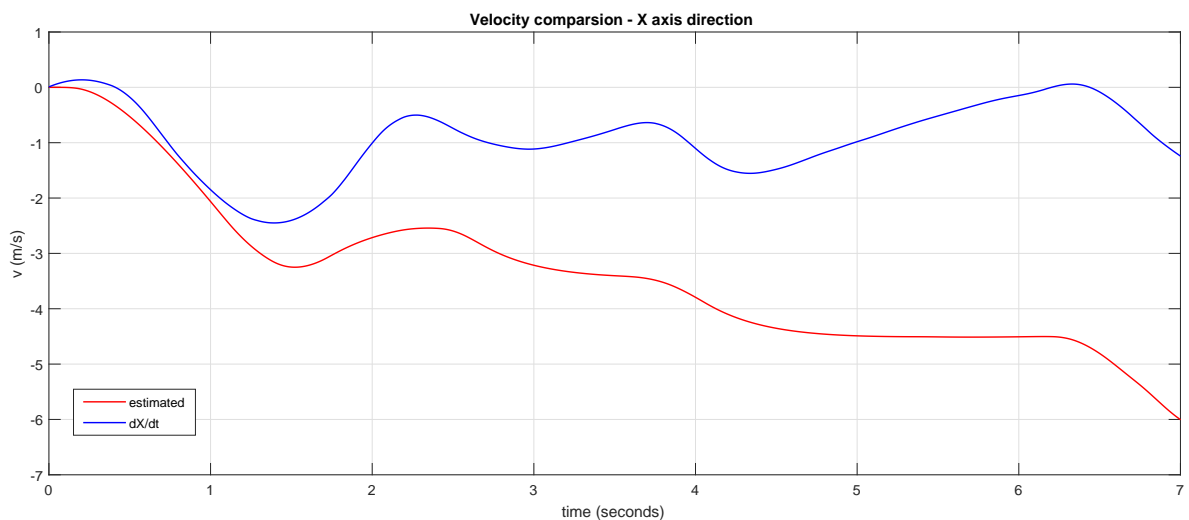
Obrázek 5.5 srovnává průběh rychlosti pohybu hexakoptéry ve směru osy Y s průběhem odhadované rychlosti modelem systému. Jelikož velikost úhlu náklonu je úměrná zrychlení, odhadovaná rychlost vychází z integrace přenosové funkce 4.9, která byla vyhodnocena jako nejlepší model pro odhad rotace Roll. Z grafu vidíme, že odhad rychlosti kopíruje změny, ale vlivem integrační složky dochází k výraznému zvětšování odchylky od reálného průběhu.

Obrázek 5.6 srovnává průběh rychlosti pohybu hexakoptéry ve směru osy X s průběhem odhadované rychlosti modelem systému. Obdobně jako v předchozím případě vychází odhadovaná rychlost z integrace přenosové funkce 4.14, která byla vyhodnocena jako nejlepší model pro odhad rotace Pitch. V grafu je opět vidět, že odhad rychlosti kopíruje změny, ale kvůli integraci se odhad od reálné hodnoty vzdaluje.





Obrázek 5.5: Porovnání odhadu rychlosti v ose Y.



Obrázek 5.6: Porovnání odhadu rychlosti v ose X.

Srovnáme-li všechny identifikované modely, vidíme že kvalita aproximace subsystémů hexakoptéry, se při identifikaci z převedených dat na jinou veličinu značně zhoršuje. Vložením jednoduchého integrátoru  $I = \frac{1}{s}$  do soustavy se docílí integrace signálu, ale zároveň dojde ke znásobení integrační odchytky, kterou je nutné v případě regulace kompenzovat. Samotná identifikace dynamického přenosu je zatížena při nejmenším určitou chybou měření, která se derivováním či integrováním signálu projeví mnohem výrazněji. Během těchto převodů se zásadně projeví i nevhodná volba aproximačního polynomu na proložení naměřených dat nebo nevhodně vybraný datový úsek pro identifikaci. Přesnost identifikovaných modelů je v těchto případech menší. Druhou nevýhodou, která může vnést nepřesnosti do identifikace, byla neúplná možnost využití dynamiky hexakoptéry, kvůli omezenému manévrovacímu prostoru. Tím se nedosáhlo ideálního ustálení měřených veličin po skokové změně akčního zásahu.

Zaměříme-li se více na samotné průběhy analyzovaných dat (viz. obrázek 4.3), lze konstatovat že offset průběhu lokalizačního systému Vicon, který byl diskutován již v sekci 4.3, je způsoben stabilním náklonem hexakoptéry. Pro tento výsledek svědčí i fakt, že většina řídicích povelů je ve stejném směru, tedy ve snaze kompenzovat drift. V rámci porovnání těchto dvou signálů je možné také ověřit, že jednotka řídicího signálu odpovídá požadovanému úhlu náklonu v radiánech. Přesněji je toto srovnání vyjádřeno koeficienty zesílení přechodových funkcí pro Roll a Pitch, avšak je třeba brát v úvahu, že nedošlo k úplnému ustálení přechodových charakteristik.

## 5.1 Budoucí regulace polohy a rychlosti

Použití identifikovaných modelů k regulaci výšky, polohy, apod. za použití pouze jednoduché regulační smyčky, např. s PID regulátorem, není většinou dostačující. Zvláště pro některé náročnější regulační úlohy, využívající rychlejší dynamiku, by bylo dobré i zvolit vhodnější identifikační přístup, který lépe vystihuje chování při regulaci. Takovým způsobem může být analytický přístup identifikace z dat přeurené soustavy. Podobně jak je popsáno v práci [7], má systém hexakoptéry, stejně jako jiných letounů, stavy určující pozici a její derivace. Množství těchto stavů je nutné v rámci regulace znát. Tím pádem je regulační smyčka s PID regulátorem sledující jen řízený stav nedostačující. Pokud navíc nejsou všechny stavy měřitelné, je nutná implementace stavového pozorovatele. Jedná se o dynamický systém, který je simulován souběžně s řízeným systémem. Má stejný počet vstupů i stejný řád jako reálný systém a je řízen stejnými signály. Všechny jeho stavy jsou pozorovatelné a odpovídají reálnému systému.

Velmi využívaným druhem stavového pozorovatele je Kalmanův filtr. Jde o velice robustní iterativní algoritmus pro odhadování stavů. Kromě jeho využití jako pozorovatele, má skvělé filtrovací schopnosti. Používá se tedy také pro filtrování šumu nebo odstranění biasu z dat záznamu letu a korekci integrační chyby. Aplikací Kalmanova filtru lze dobře realizovat regulace letu na velké vzdálenosti apod.

## 6 Závěr

V této práci byla provedena teoretická analýza různých identifikačních přístupů matematického modelu, s ohledem na dynamiku a chování modelovaného systému hexakoptéry. Následně byla vybrána a realizována identifikace modelu, podle naměřených dat z průběhu testovacích letů. Identifikací bylo vytvořeno několik modelů z různých dat pro jednotlivé jednodušší systémy, na které byl matematický model hexakoptéry rozložen. K dispozici byla data ze senzorů, jimiž je hexakoptéra vybavena, a dále data z externího měřicího systému v prostorách laboratoře. Odhady aproximovaných modelů byly porovnány proti naměřeným datům z průběhu letu a byla diskutována jejich kvalita. Ke konci práce byla provedena krátká diskuze ohledně zaměření v navazujících regulacích polohy a rychlosti.

V průběhu práce byly zjištěny poznatky důležité pro následné využití hexakoptéry v další práci. Byly vybrány modely nejlépe aproximující jednotlivé subsystémy a provedeno srovnání odhadů rychlostí pohybu. Dynamika řízení rotací podélného sklonu a bočního náklonu má podobné chování, přičemž podélný sklon má průměrně větší zesílení, což je nejspíš dáno geometrií hexakoptéry a rozložením pohonů. Z naměřených dat byl vyvozen poznatek, že hexakoptéra má malý drift, a tedy v klidovém stavu nedrží pozici. Dále kvůli nedostatečnému ustálení signálu nelze určit s úplnou jistotou, zda vstupní veličina v interních jednotkách rozhraní odpovídá požadovanému náklonu v radiánech, ale ve většině případů došlo k dosažení 80-90% vstupního signálu.



## 7 Literatura

- [1] Scheme of the hexacopter. In: *ResearchGate — Share and discover research* [online]. Copyright © ResearchGate [cit. 05.11.2018]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/figure/Scheme-of-the-hexacopter\\_fig1\\_305174572](https://www.researchgate.net/figure/Scheme-of-the-hexacopter_fig1_305174572).
- [2] SAINI, Harkamaljit Singh. System Modelling and Simulation of Hexacopter. 2016. A Project Report. California State University, Long Beach. Department of Electrical Engineering.
- [3] Coordinate frames used for the modeling of the Micro Aerial Vehicle and forces acting on it. In: *Autonomous Robots Lab* [online]. Autonomous Robots Lab. [cit. 12.11.2018]. Dostupné z: <https://www.autonomousrobotslab.com/multirotor-dynamics.html>.
- [4] ALAIMO, A., V. ARTALE, C. MILAZZO, A. RICCIARDELLO a L. TREFILETTI. Mathematical Modeling and Control of a Hexacopter. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Grand Hyatt Atlanta, Atlanta, GA, 2013, (May 28-31, 2013).
- [5] ALDERETE, T.S., Thomas S. Simulator aero model implementation. *NASA Ames Research Center*. Moffett Field, California. Dostupné z: <http://www.aviationsystemsdivision.arc.nasa.gov/publications/hitl/rtsim/Toms.pdf>.
- [6] MOUSSID, Mostafa, Adil SAYOUTI, a Hicham HICHAM. Dynamic Modeling and Control of a HexaRotor using Linear and Nonlinear Methods. *International Journal of Applied Information Systems (IJ AIS)*. Foundation of Computer Science FCS, New York, USA, 2015, (No.5, August 2015). ISSN 2249-0868.
- [7] BÁČA, Tomáš. Model predictive control of micro aerial vehicle using onboard microcontroller. Praha, 2015. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze. Fakulta elektrotechnická. Katedra počítačů
- [8] BRESCIANI, Tommaso. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Lund, 2008. Master Thesis. Lund University. Department of Automatic Control.
- [9] LESKENS, M., L.B.M. VAN KESSEL, P.M.J. VAN DEN HOF. MIMO closed-loop identification of an MSW incinerator. *Control Engineering Practice* 10 (2002) 315–326. Elsevier Science Ltd. All rights reserved. Received 21 November 2000.
- [10] CAPELLO, Elisa, Hyeongjun PARK, Bruno TAVORA, Giorgio GUGLIERI, and Marcello ROMANO. Modeling and Experimental Parameter Identification of a Multicopter via a Compound Pendulum Test Rig. Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS). November 23-25, 2015. Cancun, Mexico.
- [11] McKERROW, P. Modelling the Draganflyer four-rotor helicopter. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 26 April - 1 May 2004. 4, 3596-3601.
- [12] Archivo:Blackbox3D.png. In: *Wikipedia, la enciclopedia libre* [online]. [cit. 15.12.2018]. Dostupné z: <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Blackbox3D.png>.

- [13] LJUNG, Lennart. Black-box Models from Input-output Measurements. *For the 18th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Budapest. 2001.
- [14] ISERMANN, R., M. MÜNCHHOF. Introduction in Identification for Processus. *Identification of Dynamic Systems*. DOI 10.1007/978-3-540-78879-9\_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [15] ANTSAKLIS, P.J., A.N. MICHEL. *A Linear Systems Primer*. Birkhäuser, Boston, MA, 2007.
- [16] PILGR, Jiří. Návrh PID regulátoru pro řízení systémů s dopravním zpožděním metodou MOMI. Pardubice, 2017. Diplomová práce. Univerzita Pardubice. Fakulta elektrotechniky a informatiky.
- [17] Metody identifikace systémů z přechodových charakteristik [online]. Dostupné z: <http://books.fs.vsb.cz/Identifikace/str/metody.htm>.
- [18] AscTec Firefly - AscTec Research. *Ascending Technologies Customer Wiki*. [online]. Dostupné z: <http://wiki.asctec.de/display/AR/AscTec+Firefly>.