

# ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Návrh vinuté pružiny s progresivním průběhem  
osové a příčné tuhosti

Vyhotovil: Ondřej Ježek

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ctirad NOVOTNÝ, Ph.D.

Praha 2018

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Ježek** Jméno: **Ondřej** Osobní číslo: **437287**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojírenství**  
Studijní obor: **Konstruování podporované počítačem**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Návrh vinuté pružiny s progresivním průběhem osově a příčné tuhosti**

Název bakalářské práce anglicky:

**Design of coil spring with progressive axial and transverse stiffness**

Pokyny pro vypracování:

- 1) Rešerše typů vypružení kolejových vozidel, výpočtu osově a příčné tuhosti válcových pružin, způsoby dosažení progresivní tuhosti.
- 2) Analytické výpočty osově a příčné tuhosti zadané válcové pružiny.
- 3) Numerické výpočty osově a příčné tuhosti zadané válcové pružiny s uvažováním různých okrajových podmínek.
- 4) Návrh geometrie válcové pružiny pro dosažení progresivního tlumení - numerické výpočty.
- 5) Diskuze a závěry.

Seznam doporučené literatury:

Blažek, V. (1953) Pružiny a svazky pružnic : výpočet a konstrukce. SNTL, Praha.  
Meissner, M. (1988) Hamdbuch Federn. VEB Verlag Technik, Berlin.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:


**Ing. Ctírad Novotný, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

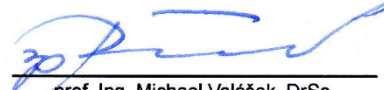
Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
Ing. Ctírad Novotný, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

  
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

2.5.2018  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## Anotační list

Jméno autora:	Ondřej Ježek
Název práce:	Návrh vinuté pružiny s progresivním průběhem osově a příčné tuhosti
Anglický název:	Design of coil spring with progressive axial and transverse stiffness
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Strojírenství
Obor studia:	Konstruování podporované počítačem
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí práce:	Ing. Ctirad Novotný, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 52 Počet obrázků: 46 Počet tabulek: 1
Klíčová slova:	Podvozek Y25 L, vypružení, vinutá pružina, progresivní tuhosti, MKP.
Keywords:	Bogie Y25 L, suspension, coil spring, stiffness progression, FEM.

Anotace:

V rámci této bakalářské práce je zpracována problematika návrhu válcové vinuté pružiny pro podvozky typu Y 25 L. V úvodu práce jsou popsány nejčastěji používané pružící prvky nákladních i osobních kolejových vozidel. V praktické části je pak popsáno mechanické chování zmíněné pružiny. Jsou zde využity analytické i numerické výpočty řešení. Druhá část praktické práce se pak zabývá návrhem vinuté válcové pružiny s progresivní charakteristikou.

Abstract:

This bachelor thesis deals with the design of helical coil springs for bogie Y 25 L. At the beginning of the work the most commonly used spring elements of freight and passenger rail vehicles are described. In the practical part is described the mechanical behavior of the spring. Analytical and numerical calculations are used here. The second part of the practical work deals with the design of a coil spring with a progressive characteristic.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem „Návrh vinuté pružiny s progresivním průběhem osově a příčné tuhosti“ vypracoval samostatně za použití uvedené literatury a pramenů.

V Praze dne .....

.....

Ondřej Ježek

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Ctiradovi Novotnému, Ph.D. za odborné rady a konstruktivní připomínky při vypracování této práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Tomáši Heptnerovi za odborné rady z oboru kolejových vozidel. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat mé rodině a mým přátelům za podporu během psaní práce a během studia.

## **Obsah**

Seznam symbolů.....	3
Seznam obrázků .....	5
Seznam tabulek.....	7
1 Úvod a cíl práce.....	8
2 Pružící prvky .....	9
2.1 Pružící prvky ocelové .....	9
2.1.1 Vinutá válcová pružina.....	9
2.1.2 Pružnice.....	10
2.1.3 Rozsocha.....	11
2.2 Pružící prvky pryžové .....	11
2.2.1 Pryžokovová pružina MEGI .....	11
2.2.2 Pryžový prstenec Clouth.....	11
2.3 Pružící prvky vzduchové .....	11
3 Vinutá válcová pružina.....	13
3.1 Parametry.....	13
3.2 Analytické řešení.....	14
3.2.1 Osová tuhost.....	14
3.2.2 Příčná tuhost.....	19
3.3 Numerické řešení .....	22
3.3.1 Osová tuhost.....	24
3.3.2 Příčná tuhost.....	27
3.3.3 Uložení sady pružin .....	31
3.4 Dynamika válcové vinuté pružiny .....	32
4 Válcová vinutá pružina s progresivní charakteristikou .....	35
4.1 Způsoby dosažení progresu tuhosti .....	35
4.2 Matematický popis ideální progresivní charakteristiky.....	35

4.3	Návrh pružiny s progresivní charakteristikou.....	38
5	Závěr.....	43
6	Bibliografie.....	45



## Seznam symbolů

Symbol	Jednotka	Název
a	[1]	Poměr stlačení a výšky pružiny
d	[m]	Průměr drátu
D	[m]	Střední průměr vinutí
E	[N · m <sup>-2</sup> ]	Modul pružnosti v tahu
e	[m]	Posun neutrálního vlákna
f	[Hz]	Frekvence
G	[N · m <sup>-2</sup> ]	Modul pružnosti ve smyku
g	[m · s <sup>-2</sup> ]	Gravitační zrychlení
h	[m]	Posunutí na funkční oblast $h = y - 18$
i	[1]	Poměr vinutí
I <sub>k</sub>	[m <sup>4</sup> ]	Kvadratický moment plochy
k	[N · m <sup>-1</sup> ]	Osová tuhost pružiny
K	[1]	Korekční součinitel podle Sopwitha
K <sub>k</sub>	[1]	Koeficient nerovnoměrnosti napětí od krouťícího momentu
k <sub>p</sub>	[N · m <sup>-1</sup> ]	Příčná tuhost pružiny
k <sub>pn</sub>	[N · m <sup>-1</sup> ]	Příčná tuhost podle normy
k <sub>pMKP</sub>	[N · m <sup>-1</sup> ]	Příčná tuhost vypočtena numericky
k <sub>pt</sub>	[N · m <sup>-1</sup> ]	Příčná tuhost podle Timošenska a Ponomareva
k <sub>pw</sub>	[N · m <sup>-1</sup> ]	Příčná tuhost podle Wahla
K <sub>s</sub>	[1]	Koeficient nerovnoměrnosti napětí od posouvající síly
l	[m]	Činná délka drátu
L <sub>0</sub>	[m]	Výška nezatížené pružiny
L <sub>1</sub>	[m]	Výška předepnuté pružiny
m	[kg]	Hmotnost
M <sub>k</sub>	[N · m]	Krouťící moment od osově síly
M <sub>o</sub>	[N · m]	Ohybový moment od osově síly
n	[1]	Počet činných závitů
n <sub>T</sub>	[1]	Celkový počet závitů
P	[N]	Příčná síla
Q	[N]	Osová síla
Q <sub>N</sub>	[N]	Tlaková složka osově síly
Q <sub>p</sub>	[N]	Předzatěžující síla
Q <sub>T</sub>	[N]	Složka smyku osově síly
Q <sub>z</sub>	[N]	Zatěžující síla
S	[m <sup>2</sup> ]	Průřez
W <sub>k</sub>	[m <sup>3</sup> ]	Průřezový modul
y	[m]	Osová deformace
z	[m]	Příčná deformace

$\alpha$	[°]	Stoupání činných závitů
$\beta$	[1]	Poměr výšky a průměru pružiny
$\beta_0$	[1]	Poměr počáteční výšky a průměru pružiny
$\delta$	[1]	Poměr průměru drátu a průměru pružiny
$\Delta h_v$	[m]	Užitečné statické sednutí
$\eta$	[°]	Úhel natečení příčné síly
$\vartheta$	[m <sup>-1</sup> ]	Měrný úhel zkroucení
$\lambda$	[m · N <sup>-1</sup> ]	Poddajnost
$\xi$	[1]	Poměr stlačení a počáteční výšky pružiny
$\tau$	[N · m <sup>-2</sup> ]	Maximální napětí
$\tau_k$	[N · m <sup>-2</sup> ]	Smykové napětí od kroutícího momentu
$\bar{\tau}_k$	[N · m <sup>-2</sup> ]	Maximální smykové napětí od kroutícího momentu
$\tau_s$	[N · m <sup>-2</sup> ]	Smykové napětí od posouvající síly
$\bar{\tau}_s$	[N · m <sup>-2</sup> ]	Maximální smykové napětí od posouvající síly

## Seznam obrázků

Obrázek 1: Vinutá válcová pružina.....	9
Obrázek 2: Charakteristika vypružení – vinutá válcová pružina [2] .....	9
Obrázek 3: Pružnice [1].....	10
Obrázek 4: Charakteristika vypružení – pružnice [2].....	10
Obrázek 5: Charakteristika vypružení – rozsocha [2].....	11
Obrázek 6: Pružina MEGI [1].....	11
Obrázek 7: Pružina Clouth [1] .....	11
Obrázek 8: Membránová pružina [1] .....	11
Obrázek 9: Zakončení závěrného závitu [4].....	13
Obrázek 10: Rozložení sil a momentů [6].....	14
Obrázek 11: Rozložení redukovaného napětí von Mises .....	15
Obrázek 12: Závislost součinitelů Wahla a Sopwitha na poměru vinutí $i$ [2].....	16
Obrázek 13: Tuhost závislá na stoupání činných závitů.....	18
Obrázek 14: Příčná deformace [3].....	19
Obrázek 15: Přesnost řešení (lineární elementy) .....	22
Obrázek 16: Přesnost řešení (kvadratické elementy).....	23
Obrázek 17: Zavedení souřadnic .....	23
Obrázek 18: Osová deformace.....	24
Obrázek 19: Zatěžování osovou silou .....	24
Obrázek 20: Přizvedávání závěrného závitu .....	24
Obrázek 21: Zatěžování osovou silou – vetknuté.....	25
Obrázek 22: Uložení na kuličkách .....	25
Obrázek 23: Skluz při zatížení osovou silou.....	26
Obrázek 24: Uložení s nepřesností .....	26
Obrázek 25: Vliv nepřesného uložení.....	27
Obrázek 26: Rotační síla .....	27
Obrázek 27: Zatížení příčnou silou.....	27
Obrázek 28: Příčná deformace v různých směrech.....	28
Obrázek 29: Příčná tuhost při umožnění relaxace.....	29
Obrázek 30: Velikost příčné reakce bez relaxace (10 kN).....	29
Obrázek 31: Velikost příčné reakce s relaxací (10 kN).....	30
Obrázek 32: Velikost příčné reakce bez relaxace (29 kN).....	30
Obrázek 33: Velikost příčné reakce s relaxací (29 kN).....	31

Obrázek 34: Vyrušení sil .....	31
Obrázek 35: Vlastní frekvence samostatné pružiny .....	32
Obrázek 36: Zatížení dvojice pružin .....	33
Obrázek 37: Vlastní frekvence dvojice pružin.....	33
Obrázek 38: Ideální progresivní charakteristika [2] .....	37
Obrázek 39: Porovnání charakteristik .....	37
Obrázek 40: Progresivní pružina .....	38
Obrázek 41: Dosedání činných závitů .....	38
Obrázek 42: Průběh redukovaného napětí von Mises v progresivní pružině .....	39
Obrázek 43: Porovnání výsledků.....	40
Obrázek 45: Rozvinutá část pružiny po zatížení .....	40
Obrázek 44: Rozvinutá část pružiny .....	40
Obrázek 46: Proměnný počet činných závitů .....	41

## **Seznam tabulek**

Tabulka 1: Příčná tuhost .....	28
--------------------------------	----

## **1 Úvod a cíl práce**

Vypružení hraje velmi důležitou roli v transportní technice. Pro jejich výpočet se zpravidla využívají různé analytické vztahy. Tyto vztahy nedokáží zohlednit všechny možné vlivy, které v praxi vznikají. Růst výpočetního výkonu dovoluje modelovat numerickými metodami, jako je například metoda konečných prvků (MKP). Pomocí této metody je možno virtuálně testovat chování pružících prvků při různých okrajových podmínkách. Tato metoda se dá také využít při návrhu a testování složitějších pružících prvků, ovšem nedokáže plně nahradit úlohu experimentu, proto je třeba validovat výpočtové modely.

Tato práce se zabývá výpočtem osově a příčně tuhosti vinuté pružiny. Úvodem v rámci rešerše jsou stručně popsány možnosti vypružení nákladních i osobních kolejových vozidel. Zde jsou uvedeny nejčastější pružící prvky a jejich hlavní vlastnosti. Praktická část se hlouběji zaměřuje na vinutou válcovou pružinu z podvozku Y 25 L. Jsou zde uvedeny analytické a numerické výpočty osově a příčně tuhosti. Také jsou zde řešeny vlivy různých okrajových podmínek. V druhé kapitole praktické části je popsána problematika návrhu vinuté válcové pružiny s progresivní charakteristikou.

## 2 Pružící prvky

V konstrukci podvozku kolejového vozidla pružící prvky zajišťují:

- Snížení dynamických účinků na trať, a především na konstrukci vozu.
- Rovnoměrné zatížení všech kol pojezdu na nerovné trati.
- Dostatečný komfort pro cestující a ochranu pro převážený náklad.

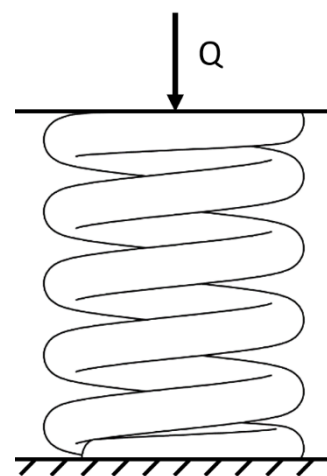
Pro klidný chod pojezdu vozů je vhodné, aby obsahovaly pružící prvky nejen pro svislé vypružení, ale i pro podélné a příčné. Vypružení můžeme rozdělit na jednoduché a dvojitě. Jednoduché vypružení se používá pro jeho omezené vlastnosti u nákladních vozů. Dvojitě vypružení se používá například u vagonů pro přepravu osob, kde je třeba dosáhnout dostatečného komfortu [1].

Níže jsou uvedeny nejpoužívanější typy pružících prvků:

### 2.1 Pružící prvky ocelové

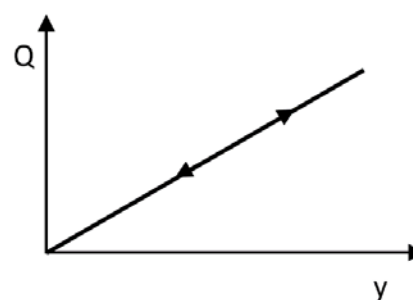
#### 2.1.1 Vinutá válcová pružina

Jedná se o nejčastěji používaný pružící prvek. Tvar tohoto prvku je naznačený na obrázku 1. Vzniká stočením drátu z pružinové oceli do šroubovice a následným přihnutím závěrných závitů a jejich zabroušením. Drát je nejčastěji kruhového průřezu, ale výjimečně se používají i jiné tvary například čtvercové nebo obdélníkové. Výhody šroubovité válcové pružiny jsou malé zastavovací rozměry a dobré využití materiálu – nízká hmotnost. Ovšem její vnitřní tření je zanedbatelné a z tohoto důvodu je vyžadováno použití tlumičů. Uplatnění je velmi široké. Používá se především na svislé vypružení osobních i nákladních vozů [2] [3].



Obrázek 1: Vinutá válcová pružina

Zatěžovací charakteristika vinuté válcové pružiny s konstantním stoupáním je lineární, jak je vidět na obrázku 2. Je to dáno tím, že její vnitřní tření je zanedbatelné a také tím, že nedochází k postupnému dosedání závitů. Charakteristiku lze popsat jednoduchým vzorcem [2]:



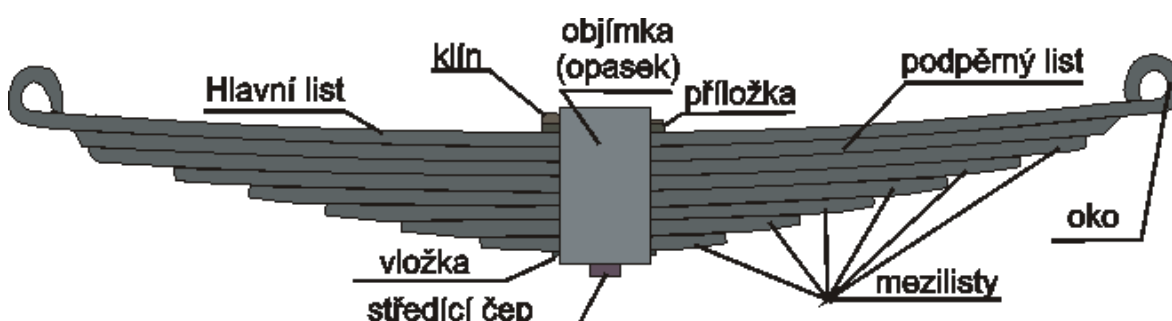
Obrázek 2: Charakteristika vypružení – vinutá válcová pružina [2]

$$Q = k * y \quad (2.1)$$

kde  $k = \text{konst.}$

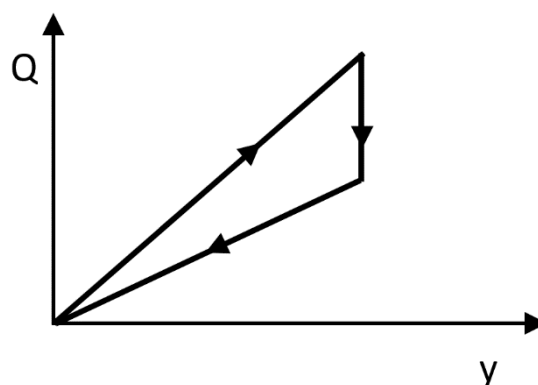
### 2.1.2 Pružnice

V principu se jedná o soustavu pružných listů odstupňovaných délek. Soustava je upevněna v objímce, proti posouvání je zajištěna příložkou a klínem. K zamezení vzájemnému pootočení jsou listy opatřeny podélnou drážkou na horní ploše, do níž zapadne pero umístěné na spodní ploše listu. Proti vzájemnému posouvání mají listy na horní ploše jamku, do které zapadne bradavka, která je umístěna na spodní ploše druhého listu. Sestavu tohoto pružícího prvku můžeme vidět níže na obrázku 3:



Obrázek 3: Pružnice [1]

Při zatěžování pružnice dochází k vzájemnému podélnému posuvu listů. Vznikají třecí síly, které jsou úměrné síle sevření soustavy v objímce. Znamená to, že při stejném průhybu pružnice je rozdílná zatěžující a odlehčující síla. Pružnice má z tohoto důvodu dobrý tlumící účinek, který se ovšem v průběhu času mění v důsledku změny stavu povrchu a mazání. Z tohoto důvodu není třeba přiřazovat tlumící prvky [2] [3]. Zatěžovací charakteristika je zobrazena na obrázku 4.



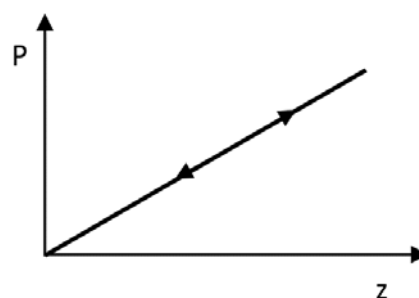
Obrázek 4: Charakteristika vypružení – pružnice [2]

Pružnice má vyšší nároky na zastavěnou plochu a má větší hmotnost v porovnání například s vinutou válcovou pružinou. Používá se pro svislé vypružení především dvounápravových nákladních podvozků [2].



### 2.1.3 Rozsocha

Příklad rozšířeného typu příčného vypružení. Rozsochy zajišťují svislé vedení ložiskové skříně. Dovolují příčné vypružení způsobené boční silou, která vzniká například od rychlé změny směru jízdy (například nájezd na výhybku). Rozsocha nemá žádné vnitřní tření, tudíž její zatěžující charakteristika je lineární [2].

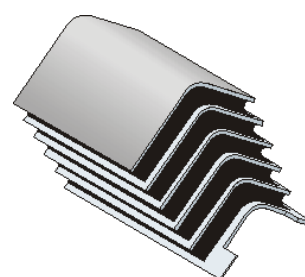


Obrázek 5: Charakteristika vypružení – rozsocha [2]

## 2.2 Pružící prvky pryžové

### 2.2.1 Pryžokovová pružina MEGI

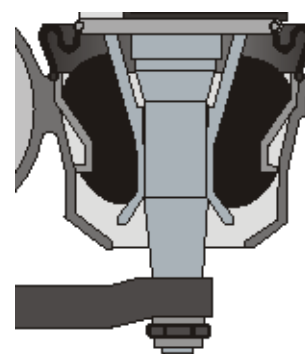
Je složena z šikmých pryžových bloků. Tyto bloky jsou proloženy ocelovými vložkami šípového profilu (obrázek 6). Tuhost v příčném směru je závislá na velikosti sklonu jejich zalomení. Ve svislém směru tuhost tohoto prvku neovlivňuje šípový profil tudíž šikmé pryžové bloky se chovají jako obdélníkové. Využívají se v prvním stupni svislého vypružení podvozků, zároveň splňují úlohu podélného a příčného vedení ložiskové skříně [1] [2].



Obrázek 6: Pružina MEGI [1]

### 2.2.2 Pryžový prstenec Clouth

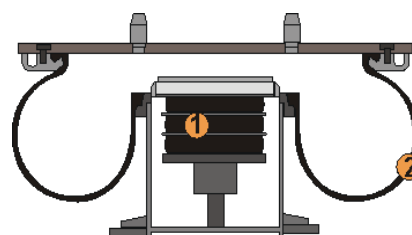
Principem fungování tohoto pružícího prvku je vtlačování trnu do pryžového prstence (obrázek 7). Dochází k odvalování prstence a tlakovému a smykovému namáhání. V porovnání s pryžokovou pružinou MEGI tuhost této pružiny je nižší, ale dosahuje vyšších zdvihů. Ve svislém směru má progresivní charakteristiku (tuhost se zvyšuje s deformací) a v podélném a příčném směru je její charakteristika konstantní [1] [4].



Obrázek 7: Pružina Clouth [1]

## 2.3 Pružící prvky vzduchové

Používají se především v druhém stupni vypružení kolejových vozidel. Je možné upravovat jejich pracovní tlak a tím udržovat stálou výšku při různém zatížení. Existují tři druhy vzduchových pružících



Obrázek 8: Membránová pružina [1]

prvků – vlnovcové, vakové a membránové. V dnešní době se u kolejových vozidel používají pouze membránové, které mají vhodnou příčnou tuhost. Principem jejich pružícího efektu je pohyb pístu ve velkém válci. Prostor mezi pístem a válcem je utěsněn membránou, která se při pohybu pístu deformuje a odvaluje. Na obrázku 8 je schéma membránové pružiny (2), která je uložena na pryžových blocích (1). Vzduchová membránová pružina je vhodná i pro příčné vypružení. Využívá se zejména u osobních vozů, kde je kladen důraz na pohodlí cestujících [1] [2].

### 3 Vinutá válcová pružina

V této části je detailně popsána vnější válcová vinutá pružina pro podvozek typu Y 25 L. Jedná se o nákladní podvozek s maximálním zatížením 22,5 tun na nápravu. Tato pružina je zatížená osovou a příčnou silou. Osová síla je rovna hmotnosti vypružené části prázdného vozu a hmotnosti nákladu. Příčná síla je závislá na hmotnosti vypružené části vozidla a jeho zrychlení. Vzniká při zrychlení nebo zpomalení (v podélném směru) a účinkem příčného zrychlení (při jízdě v obloucích).

U tohoto typu vypružení je teoreticky tuhost v osovém směru konstantní. Průřez vinutého drátu a stoupání činných závitů se nemění. Konec závěrného závitu dosedne na činný závit již při malém zatížení.

Předpokládá se, že tuhost pružiny v příčném směru nebude konstantní. Tuto tuhost ovlivňuje mnoho faktorů. Například směr příčného zatížení ku poloze závěrného závitu nebo výška pružiny vyvolaná svislým zatížením.

#### 3.1 Parametry

**Rozměry:**

Průměr drátu	d	31	[mm]
Střední průměr vinutí	D	163	[mm]
Celkový počet závitů	nt	5,7	[1]
Počet činných závitů	n	4,2	[1]
Výška nezatížené pružiny	L0	260	[mm]
Výška při zatížení 8,8 kN	L1	242	[mm]
Tuhost	k	0,508	[kN · mm <sup>-1</sup> ]
Smysl vinutí		levý	

Závěrné závity jsou přihnuté a zabroušené. Zadaná pružina má na každém konci 0,75 závěrného závitu. Zmíněnou závěrnou část pružiny můžeme vidět na obrázku 9 [4].



Obrázek 9: Zakočení závěrného závitu [4]

**Materiál:**

Pružina je vyrobena z oceli 50CrV4 nebo 51CrV4 podle EN 10089.

Pro tyto oceli se udává:

$$E = 206\,000 \text{ N/mm}^2$$
$$G = 78\,500 \text{ N/mm}^2$$

[5]

## 3.2 Analytické řešení

### 3.2.1 Osová tuhost

Odvození:

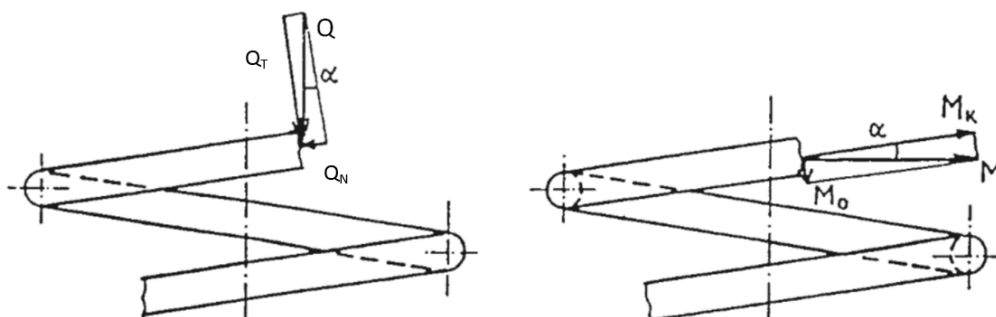
Výpočet maximálního namáhání:

$$\text{Složka tlaku: } Q_N = Q * \sin \alpha \text{ [N]} \quad (3.1)$$

$$\text{Složka smyku: } Q_T = Q * \cos \alpha \text{ [N]} \quad (3.2)$$

$$\text{Složka ohybu: } M_O = \frac{Q * D}{2} * \sin \alpha \text{ [Nm]} \quad (3.3)$$

$$\text{Složka krutu: } M_k = \frac{Q * D}{2} * \cos \alpha \text{ [Nm]} \quad (3.4)$$



Obrázek 10: Rozložení sil a momentů [6]

Úhel  $\alpha$  značí stoupání vinutí pružiny. Pro zjednodušení výpočtu předpokládáme že je velmi malý. Tímto se vyřadí vliv tlaku a ohybu. Rozhodující je pak pouze krut a smyk [6]. Rozložení sil a momentů můžeme vidět na obrázku 10.

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ pak } \sin \alpha = 0; \cos \alpha = 1$$

Napětí vznikající vlivem krouticího momentu pro přímý prut:

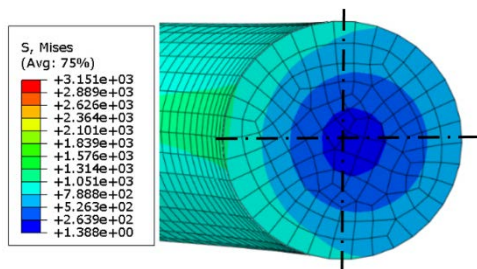
$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{\frac{Q * D}{2}}{\frac{\pi * d^3}{16}} = \frac{8 * Q * D}{\pi * d^3} \quad (3.5)$$

V zakřiveném prutu se neutrální vlákno posouvá o hodnotu:

$$e \cong \frac{d^2}{8D} \quad (3.6)$$

Průběh kroutivého namáhání je nerovnoměrný. Největší namáhání je na vnitřním obvodě drátu. Jeho velikost je:

$$\bar{\tau}_k = \tau_k * K_k \quad (3.7)$$



Obrázek 11: Rozložení redukovaného napětí von Mises

Kde  $K_k$  je koeficient nerovnoměrnosti:

$$K_k = \frac{4i - 1}{4i - 4} \quad (3.8)$$

Kde  $i$  je poměr vinutí:

$$i = \frac{D}{d} \quad (3.9)$$

Zjednodušený průběh pro napětí od posouvající síly pro případ přímého prutu:

$$\tau_s = \frac{Q}{S} \quad (3.10)$$

$$\text{kde } S = \frac{\pi * d^2}{4} \quad (3.11)$$

Ovšem ve skutečnosti je napětí nerovnoměrně rozložené. Podle Žuravského věty má parabolický průběh [6]. Největší napětí je na vodorovném průřezu (vodorovná osa na obrázku 11), tedy i v místě kde vzniká největší napětí od kroutícího momentu:

$$\bar{\tau}_s = \tau_s * K_s \quad \text{kde } K_s = 1,23 \quad (3.12)$$

Maximální napětí vzniká na vnitřní straně vinutí (je možno vidět na obrázku 11).

Jedná se o součet napětí od krutu a posouvající síly:

$$\tau = \bar{\tau}_k + \bar{\tau}_s = \frac{8Q * D}{\pi * d^3} * \frac{4i - 1}{4i - 4} + \frac{4Q}{\pi * d^2} * 1,23 \quad (3.13)$$

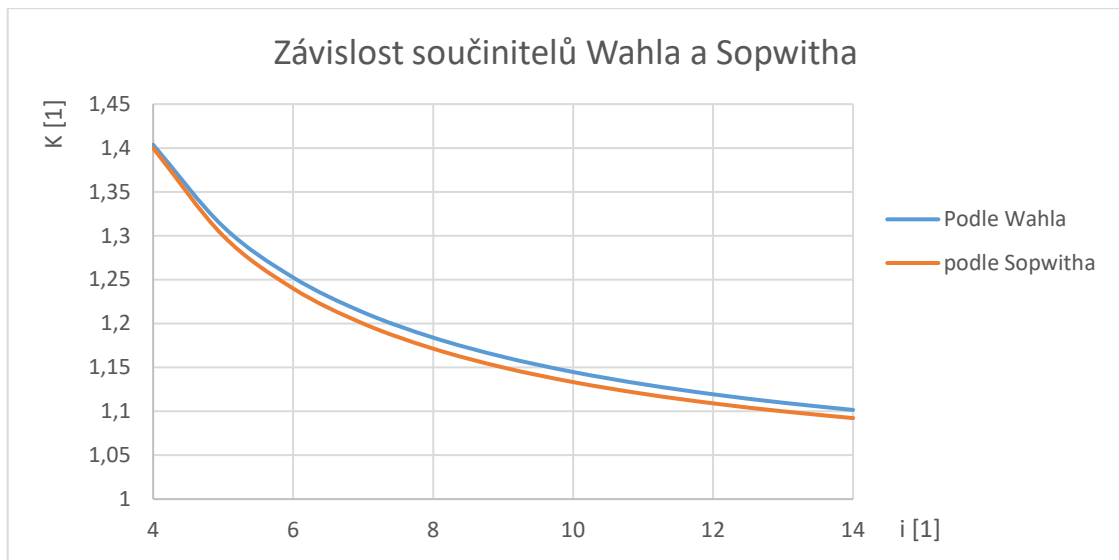
Po úpravě:

$$\tau = \frac{8Q * D}{\pi * d^3} * \left( \frac{4i - 1}{4i - 4} + \frac{0,615}{i} \right) \quad (3.14)$$

Výraz v závorce se nazývá Wahlův korekční součinitel. Podle normy [7] je nahrazen jednodušším součinitelem podle Sopwitha:

$$K = \frac{i + 0,2}{i - 1} \quad (3.15)$$

[2]



Obrázek 12: Závislost součinitelů Wahla a Sopwitha na poměru vinutí  $i$  [2]

Z obrázku 12 je patrné, že oba korekční součinitelé mají velmi podobnou charakteristiku, zvláště v oblasti nejpoužívanějších poměrů vinutí. Korekční součinitel podle Sopwitha nabývá nepatrně menších hodnot, než podle Wahla [2] [6].

### Výpočet deformace:

Měrný úhel zkroucení:

$$\vartheta = \frac{M_k}{G * I_k} \quad (3.16)$$

Kroučící moment: 
$$M_k = \frac{Q * D}{2} \quad (3.17)$$

Kvadratický moment plochy: 
$$I_k = \frac{\pi * d^4}{32} \quad (3.18)$$

Celkové stlačení pružiny:

$$y = \alpha * \frac{D}{2} = \vartheta * l * \frac{D}{2} = \frac{8 * Q * D^3 * n}{G * d^4} \quad (3.19)$$

Tuhost pružiny:

$$k = \frac{Q}{y} = \frac{G * d^4}{8 * D^3 * n} \quad (3.20)$$

[2] [6]

### Dosazení:

Jak již bylo zmíněno u vztahu (3.13), maximální smykové napětí vzniká na vnitřní straně vinutí, kde se sečte napětí od smyku a od krutu:

$$\tau = \frac{8Q * D}{\pi * d^3} * \left( \frac{4i - 1}{4i - 4} + \frac{0,615}{i} \right); \quad i = \frac{D}{d}$$
$$\tau = \frac{8 * 10000 * 163}{\pi * 31^3} * \left( \frac{4 * \frac{163}{31} - 1}{4 * \frac{163}{31} - 4} + \frac{0,615}{\frac{163}{31}} \right) = \mathbf{180,17 \text{ MPa}}$$

Tuhost pružiny v osovém směru:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{G * d^4}{8 * D^3 * n} = \frac{78500 * 31^4}{8 * 163^3 * 4,2} = \mathbf{498,21 \text{ N/mm}}$$

Vypočtená tuhost je téměř stejná v porovnání s tuhostí podle normy [4]. Odchylna je menší jak 1%. Tato nepřesnost mohla vzniknout například zaokrouhlením hodnoty G (modul pružnosti ve smyku).

### **Obecný vztah pro výpočet osové tuhosti:**

Výše jsme si odvodili tuhost těsně vinuté pružiny, kde se úhel stoupání  $\alpha$  blížilo nule. V tomto případě lze zanedbat ostatní vlivy namáhání a uvažovat namáhání pouze na krut. Zadaná pružina má stoupání činných závitů  $6,275^\circ$ , což by mohlo výsledek ovlivnit. Proto je níže uveden obecný vztah pro výpočet osové tuhosti, který zahrnuje všechny přípustné druhy namáhání.

Poddajnost: 
$$\lambda = \frac{1}{k} \quad (3.21)$$

$$\lambda = \frac{D * n}{4 * G * d^2} * \left( 32 * \frac{D^2}{d^2} * \cos^2 \alpha + 64 * \frac{G * D^2}{E * d^2} * \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{G}{E} * \sin^2 \alpha \right) \quad (3.22)$$

První člen druhého činitele v tomto vzorci je podobný s vzorcem 3.19 (jde pouze o jeho převrácenou hodnotu). Tento člen určuje vliv kroutícího momentu. Druhý člen určuje vliv ohybového momentu, třetí člen zahrnuje vliv posouvající síly (deformace smykem) a čtvrtý člen zahrnuje vliv deformace tlakem. Třetí člen, který je ve vzorci uveden, zohledňuje vliv deformace smykem a je bez opravného součinitele nestejnomyšernosti v rozložení tečných napětí po průřezu [8].

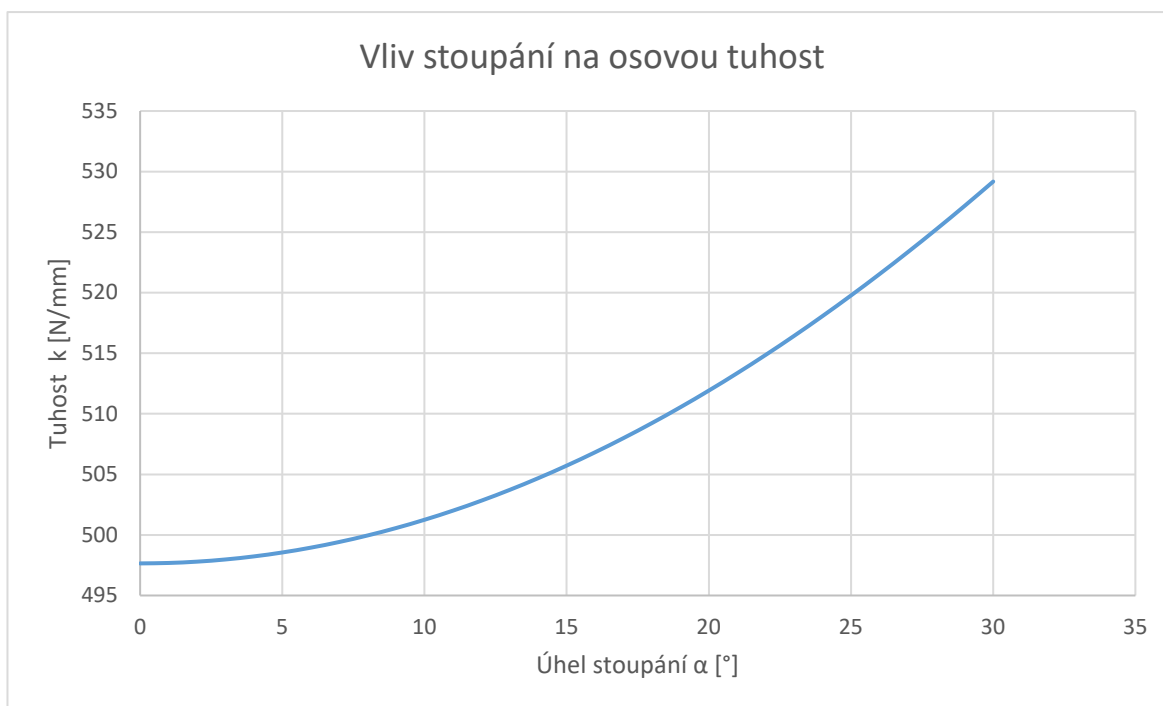
### Dosazení:

$$\lambda = \frac{163 * 4,2}{4 * 78500 * 31^2} * (874,142 + 8,060 + 0,988 + 0,041) = 2,004 * 10^{-3} \text{ mm}/N$$

$$k = \frac{1}{\lambda} = 499,16 \text{ N}/\text{mm}$$

V závorce po dosazení vidíme, jaký vliv na výsledek mají jednotlivé členy. Jasně dominantní je namáhání krutem. Výsledná tuhost, která vyšla ze zjednodušeného vztahu je 498,21 N/mm a tuhost z komplexního vztahu, který zahrnuje všechny přípustné druhy namáhání je 499,16 N/mm. Rozdíl obou výsledků je tedy 0,2 %, což je velmi dobrá shoda, proto uvažovat danou pružinu jako těsně vinutou bylo správné. Z prvotní úvahy bylo předpokládáno, že tuhost z tohoto vztahu vyjde nižší, než tomu bylo ze vztahu pro těsně vinutou pružinu. Důvodem je sčítání jednotlivých vlivů u poddajnosti. Ve skutečnosti vyšla tuhost ale o něco vyšší. Tento rozdíl vnikl díky vynásobení jednotlivých členů úhlem  $\alpha$ . Tímto klesla hodnota u prvního členu z 884,71 (pro těsně vinutou pružinu) na 874,14 a při přičtení zbývajících členů už na hodnotu 884,71 nedosáhne. Z tohoto důvodu vyšla nižší poddajnost a výsledná tuhost tudíž vzrostla.

Pro lepší představu níže uvádím graf tuhosti v závislosti na stoupání činných závitů:

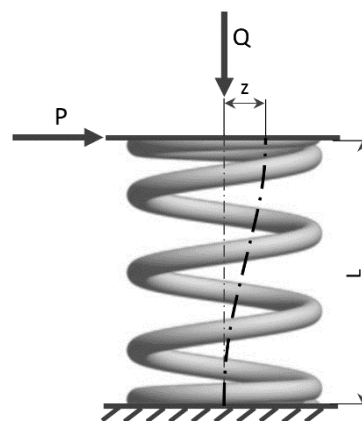


Obrázek 13: Tuhost závislá na stoupání činných závitů



### 3.2.2 Příčná tuhost

Vinuté válcové pružiny se téměř výhradně používají ve svislém vypružení kolejových vozidel. Ve většině aplikací se využívá i příčná poddajnost vinutých pružin. V případě, že se jedná o uložení skříně na podvozku, používá se pojem „vypružení flexi-coil“. Tyto pružiny přejímají tedy funkci i příčného vypružení a zvládají natáčení podvozku vůči skříně kolem jeho svislé osy. Další parametr pro tento druh pružin přibude příčná tuhost  $k_p$ . Ta je definována jako:  $k_p = P/z$  [3]



Obrázek 14: Příčná deformace [3]

Existuje mnoho různých vztahů pro výpočet příčné tuhosti. Tyto vztahy jsou pouze přibližné, protože nezohledňují všechny činitele, jako je například vliv polohy závěrných závitů. S konstantní příčnou tuhostí můžeme počítat do hodnoty  $P = 0,1 * Q$ , pro vyšší násobky, než je 0,1, tuto tuhost významně ovlivňuje vliv ohybového momentu od síly  $Q$ . Zde jsou uvedeny pouze dva vztahy pro výpočet příčné tuhosti. První je Wahlův vzorec, u kterého se mohou pohybovat odchylky od naměřených hodnot do 10 %. Druhý vztah, který zde je uveden byl odvozen ze vzorců pana Timošenka a Ponomareva. Vypočtené hodnoty z tohoto vztahu vykazují odchylky menší jak 10 % v porovnání s hodnotami naměřenými [3].

#### Wahlův vzorec pro příčnou tuhost:

$$k_{pw} = \frac{2,6 * k}{1 + 0,77 * \left(\frac{L_1}{D}\right)^2} * \left(1 - \frac{Q}{0,5 * L_0 * k}\right) \quad (3.23)$$

$$\text{Délka pružiny ku jejímu průměru:} \quad \beta = \frac{L_1}{D} \quad (3.24)$$

$$\text{Počáteční délka pružiny ku jejímu průměru:} \quad \beta_o = \frac{L_o}{D} \quad (3.25)$$

[3]

#### Po dosazení:

$$k_{pw} = \frac{2,6 * 498,2}{1 + 0,77 * \left(\frac{240}{163}\right)^2} * \left(1 - \frac{9964}{0,5 * 260 * 498,2}\right) = 410,6 \text{ N/mm}$$

### Příčná tuhost podle Timošenska a Ponomareva:

$$k_{pt} = \frac{D^2 * (1 - \gamma)}{0,2936 * \frac{(L - 0,5 * d)^3}{K * (L - 1,5d)} + 0,381 * D^2} \quad (3.26)$$

Potřebné koeficienty pro výpočet:

$$\beta_o < 2,62 \quad -> \quad \gamma = 0,357 * a * \beta(\beta - 1,5\delta) \quad (3.27)$$

$$\beta_o > 2,62 \quad -> \quad \gamma = \frac{a * \beta}{0,813 * (\beta_o - \sqrt{\beta_o^2 - 6,87})} \quad (3.28)$$

$$\delta = \frac{d}{D} \quad a = \frac{y}{L} \quad y = \frac{Q}{k} \quad K = 1$$

[3]

Po dosazení:

Výpočet koeficientů:  $\beta_o = \frac{L_o}{D} = \frac{260}{163} = 1,595$

$\beta_o < 2,62$  Volím výpočet koeficientu  $\gamma$ :

$$\gamma = 0,357 * a * \beta(\beta - 1,5\delta)$$

$$\gamma = 0,357 * \frac{20}{240} * \frac{240}{163} * \left( \frac{240}{163} - 1,5 * \frac{31}{163} \right) = 0,052$$

Vypočtená příčná tuhost:

$$k_{pt} = 498,2 * \frac{163^2 * (1 - 0,052)}{0,2936 * \frac{(240 - 0,5 * 31)^3}{1 * (240 - 1,5 * 31)} + 0,381 * 163^2}$$

$$k_{pt} = 459,8 \text{ N/mm}$$

### Příčná tuhost podle normy:

Pro možnost srovnání vypočtených příčných tuhostí je zde uveden výpočet příčné tuhosti podle normy [9]. Jedná se o normu, která se detailně zabývá výpočtem a konstrukcí vinutých válcových pružin.

$$k_{pn} = \frac{\xi * k}{\xi - 1 + \frac{1}{\frac{\beta_o}{1 + \frac{G}{2E}} * \sqrt{\left(\frac{1+G}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1-\xi}{\xi}\right)} * \tan\left(\beta_o * \xi * \sqrt{\left(\frac{1+G}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1+\xi}{\xi}\right)}}\right)} \quad (3.29)$$

$$\text{Osové stlačení ku celkové délce pružiny: } \xi = \frac{y}{L_o} \quad (3.30)$$

[9]

Po dosazení dostáváme příčnou tuhost:

$$k_{pn} = 450,2 \text{ N/mm}$$

Vypočtená tuhost se nejvíce blíží tuhosti ze vztahu Timošenka a Ponomareva. Rozdíly těchto hodnot se liší jen o 2% což vzhledem k jejich přesnosti určené chybovostí aproximace daného problému, můžeme považovat za dobrou shodu. Vypočtená tuhost podle Wahla vykazuje odchylku téměř 9% od vypočtené tuhosti podle normy [9]. Pro potvrzení těchto výsledků využijí numerické řešení.

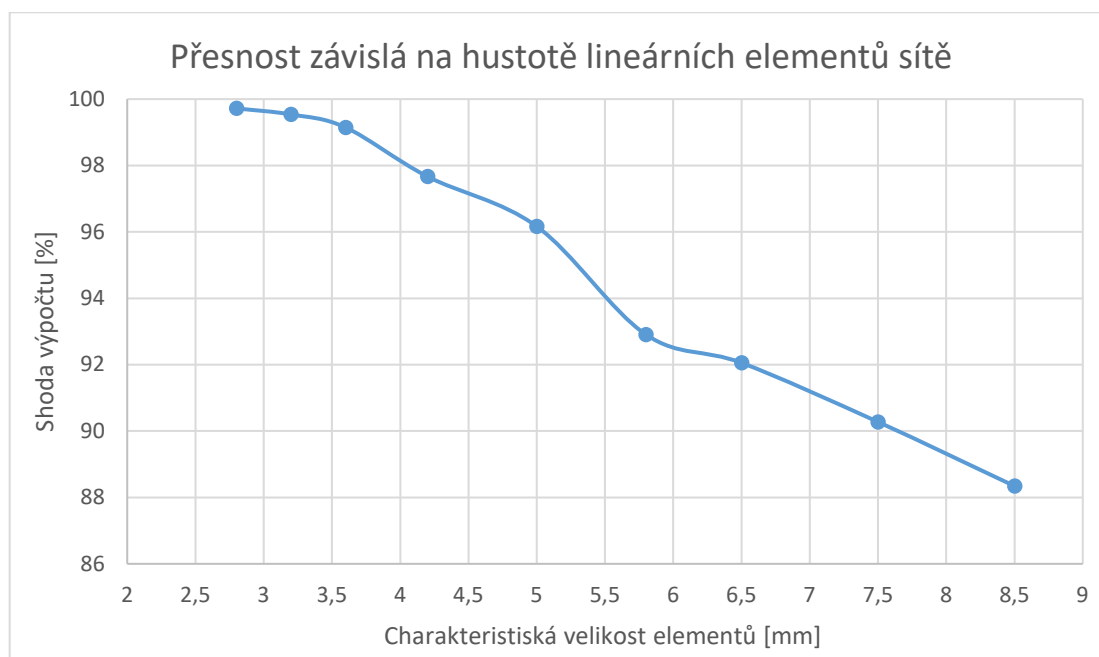
### Analyticky vypočtené příčné tuhosti:

Dle Wahla:	410,6 N/mm
Dle Timošenka a Ponomareva:	459,8 N/mm
Norma [9]:	450,2 N/mm

### 3.3 Numerické řešení

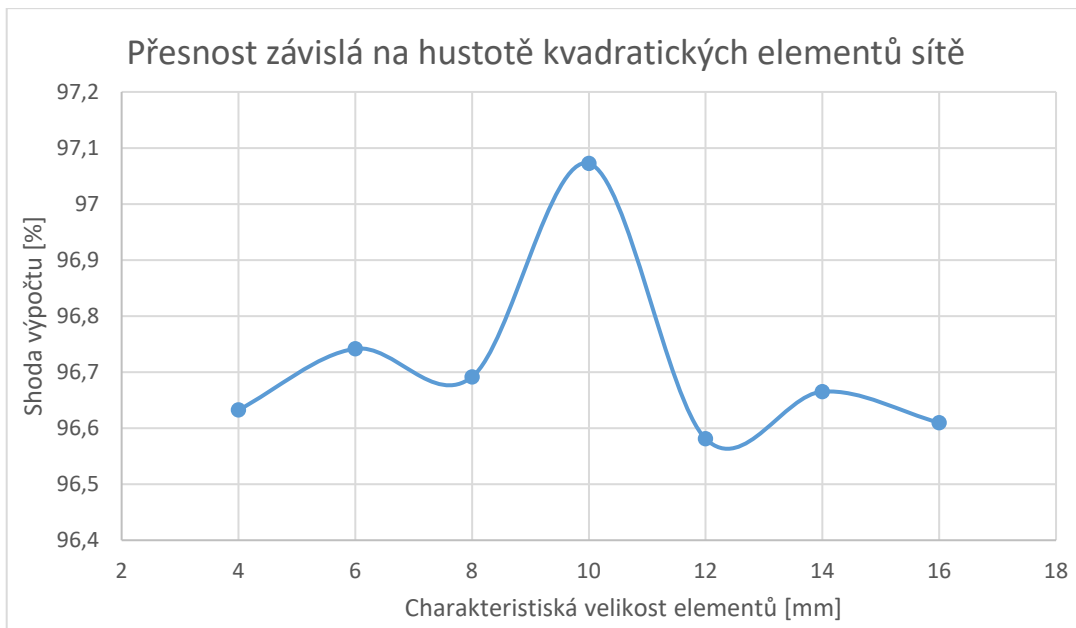
Následující podkapitola pojednává o řešení pomocí metody konečných prvků (MKP). Na tuto metodu se zaměřuje například literatura [10]. Pro numerický výpočet byl zvolen program Abaqus 6-14 a pro samotnou tvorbu výpočetního modelu byla využita literatura [11].

Samotný CAD model vinuté válcové pružiny byl vytvořen v programu SolidWorks 2016 a pomocí formátu STEP byl importován do výpočtového programu. Jelikož se jedná o tvarově složitější těleso bylo třeba pro tvorbu sítě využít dva různé typy prvků. Pro přesnější výsledky upřednostňuji osmi uzlové objemové lineární prvky typu C3D8R (hexadecimální síť). Pro složitější přechodové plochy je volena volná síť ze čtyř uzlových objemových lineárních prvků typu C3D4 (*tetrahedra*). Hustota sítě ovlivňuje přesnost výsledku, avšak příliš velký počet elementů zvyšuje časovou náročnost výpočtu. Proto je vhodné dojít ke kompromisu mezi časovou náročností a zmíněnou přesností. Obrázek 15 uvádí procentuální velikost shody MKP výpočtu osově tuhosti s výpočtem analytickým (3.20) v závislosti na hustotě lineární sítě:



Obrázek 15: Přesnost řešení (lineární elementy)

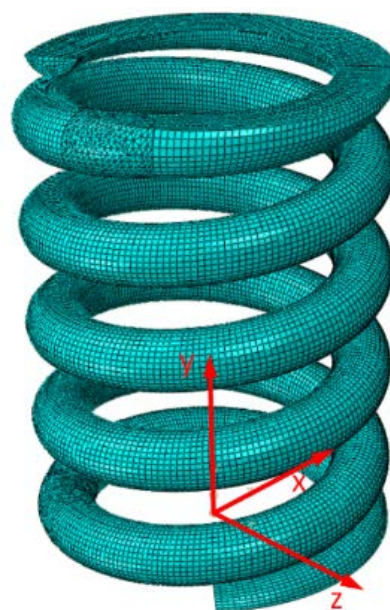
Přesnost výsledků může ovlivnit i stupeň interpolačního polynomu jednotlivých prvků. Z tohoto důvodu je na obrázku 16 zobrazena velikost shody osově tuhosti pro kvadratické prvky při různé hustotě sítě. Výpočet shody je podobný jako v předchozím případě, pouze lineární prvky jsou nahrazeny kvadratickými typu C3D10 a C3D20R.



Obrázek 16: Přesnost řešení (kvadratické elementy)

Na obrázku 16 lze vidět, že se shoda pohybuje kolem 96,8%. To ovšem není tak dobrý výsledek jako tomu bylo u lineárních prvků při vyšší hustotě. Z tohoto důvodu byly zvoleny lineární prvky o charakteristické velikosti 2,8mm.

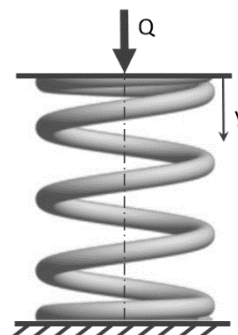
Model pružiny je vložen mezi dvě nedeformovatelné desky, přes které je pružina zatížena. Všechny kontaktní a dosedací plochy mají koeficient tření 0,2. Na obrázku 17 je zavedený souřadnicový systém, ze kterého nadále budeme vycházet. Níže je detailně popsáno chování vinuté válcové pružiny s konstantním stoupáním činných závitů.



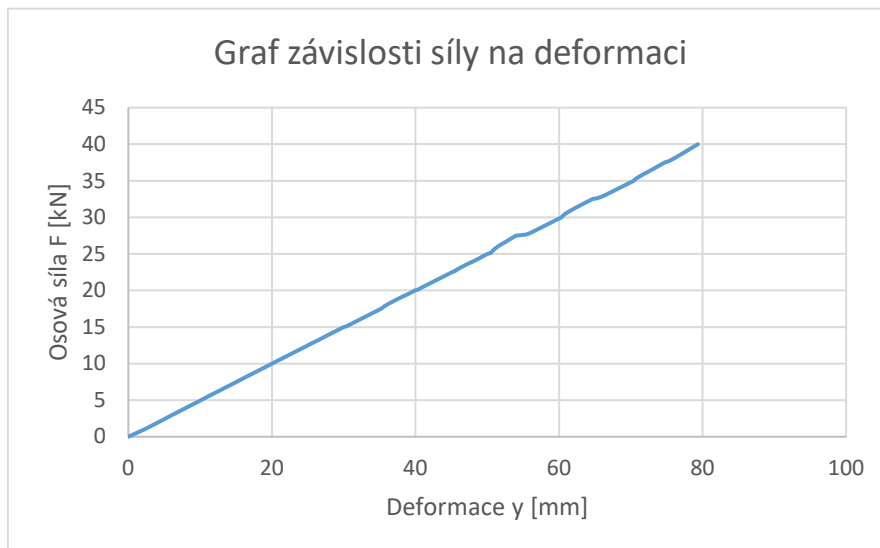
Obrázek 17: Zavedení souřadnic

### 3.3.1 Osová tuhost

Zajímá nás posunutí horní desky ve směru osy  $y$  v závislosti na velikosti zatěžující síly  $Q$  (obrázek 18). Na základě analytického výpočtu předpokládáme lineární průběh tuhosti na obrázku 19:



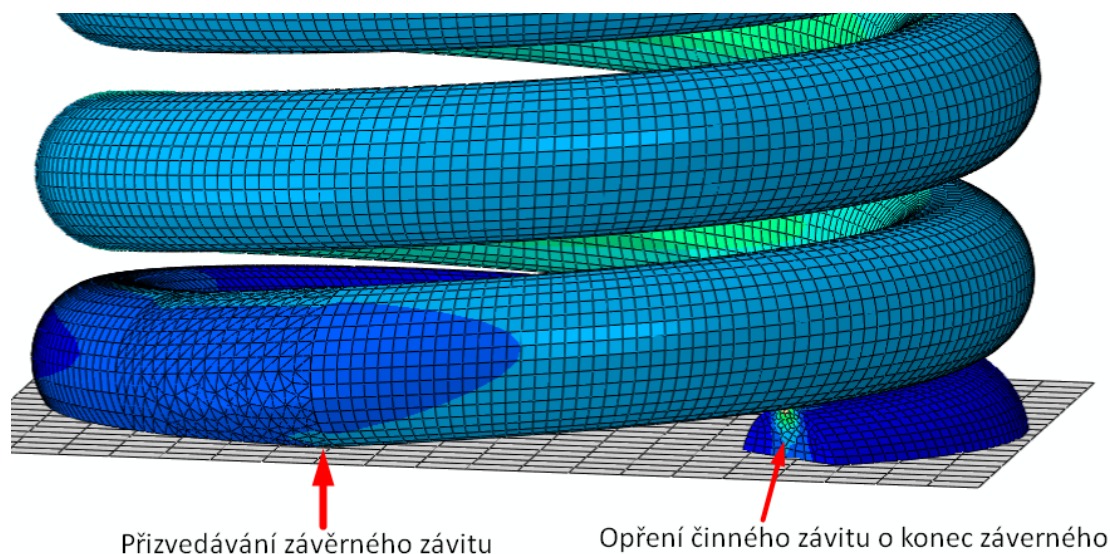
Obrázek 18: Osová deformace



Obrázek 19: Zatěžování osovou silou

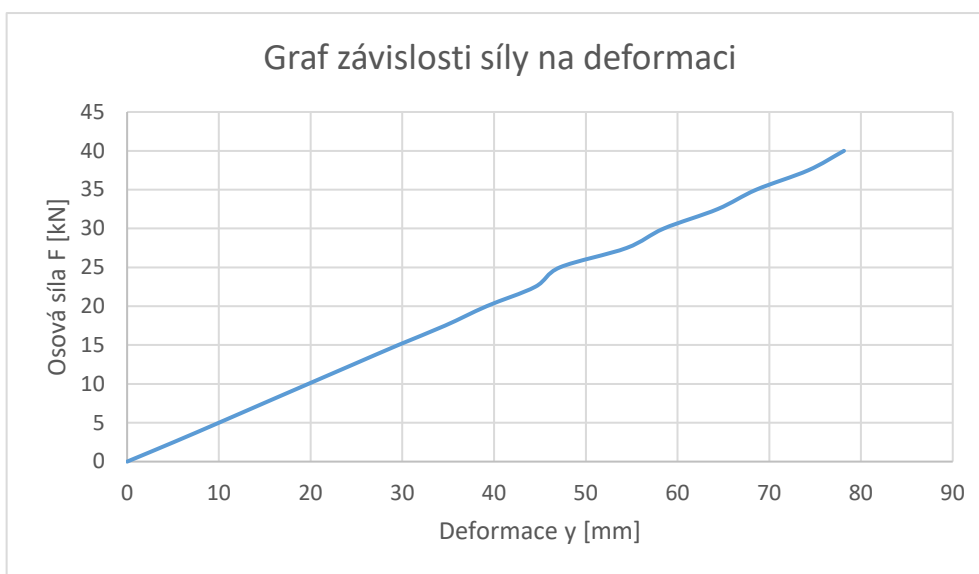
Výsledná tuhost  $k = 497,75 \text{ N/mm}$

Výslednou tuhost pružiny při tomto uložení ovlivňuje přizvedávání závěrných závitů. K tomuto jevu dochází vlivem „páčivé“ síly, která vzniká při dotyku činného závitu na konec závěrného závitu. Tímto do činnosti vstupuje větší délka drátu namáhaná na ohyb a výsledná tuhost pružiny je menší. Zmíněné přizvedávání je naznačeno na obrázku 20:



Obrázek 20: Přizvedávání závěrného závitu

Jelikož se jedná o zjednodušený model pružiny, naměřené výsledky od vypočtených se mohou lišit. Reálná pružina má konec závěrného závitu vykovaný do obdélníkového profilu a je zde vytvořena dosedací plocha mezi činným a závěrným závitem. Tento „žlábek“ způsobuje, že činný závit v tomto bodě je níže a nedochází k tak velkému přizvednutí závěrného závitu, a proto výsledná tuhost pružiny je vyšší. Z tohoto důvodu je pro porovnání níže uvedena tuhost pružiny, která má oba konce vetknuté. Zde tedy nemůže docházet ke zmíněnému přizvedávání závěrného závitu:



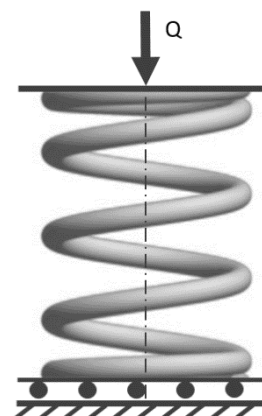
Obrázek 21: Zatěžování osovou silou – vetknuté

Výsledná tuhost  $k = 507,53 \text{ N/mm}$

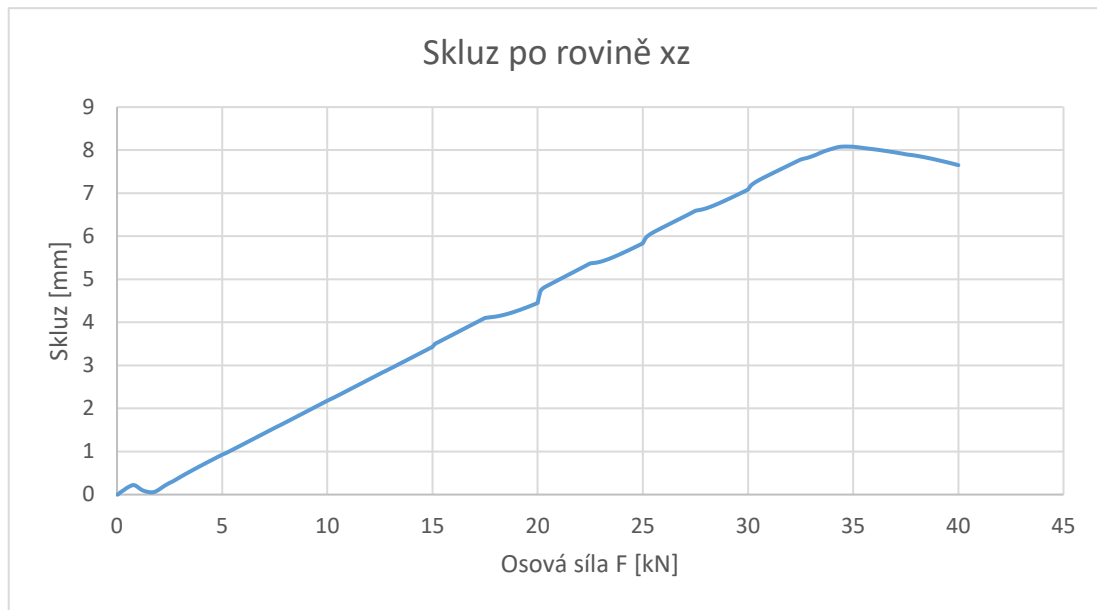
Z těchto výsledků můžeme usoudit, že tuhost ideálně vyrobené pružiny při experimentu se bude pohybovat mezi hodnotami 497,75 N/mm a 507,53 N/mm.

#### Uložení na „kuličkách“:

Vlivem tvaru pružiny při jejím zatížení nevzniká v uložení pouze reakční síla ve směru osy y – axiální. Vznikají také vedlejší reakce, které jsou do uložení přenášeny skrze tření. Toto se dá ověřit experimentem ve kterém uložíme pružinu na kuličky a budeme pozorovat posuvy její spodní části po rovině xz (obrázek 22). V našem případě MKP modelu mohu zajistit tento efekt nulovým třením mezi spodní deskou a zabroušenou plochou závěrného závitu. Posuvy této plochy jsou znázorněny na obrázku 23:



Obrázek 22: Uložení na kuličkách

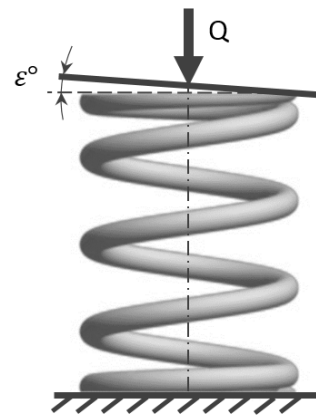


Obrázek 23: Skluz při zatížení osovou silou

Dle grafu vidíme, že tyto skluzy nejsou zanedbatelné. Pokud pružinu umístíme na podložku se třením vzniknou poměrně velké tečné reakce, které zamezí zmíněným posuvům. To osovou tuhost příliš neovlivní, ale velmi ovlivní příčnou tuhost pružiny (vysvětleno v podkapitole výpočtu příčné tuhosti).

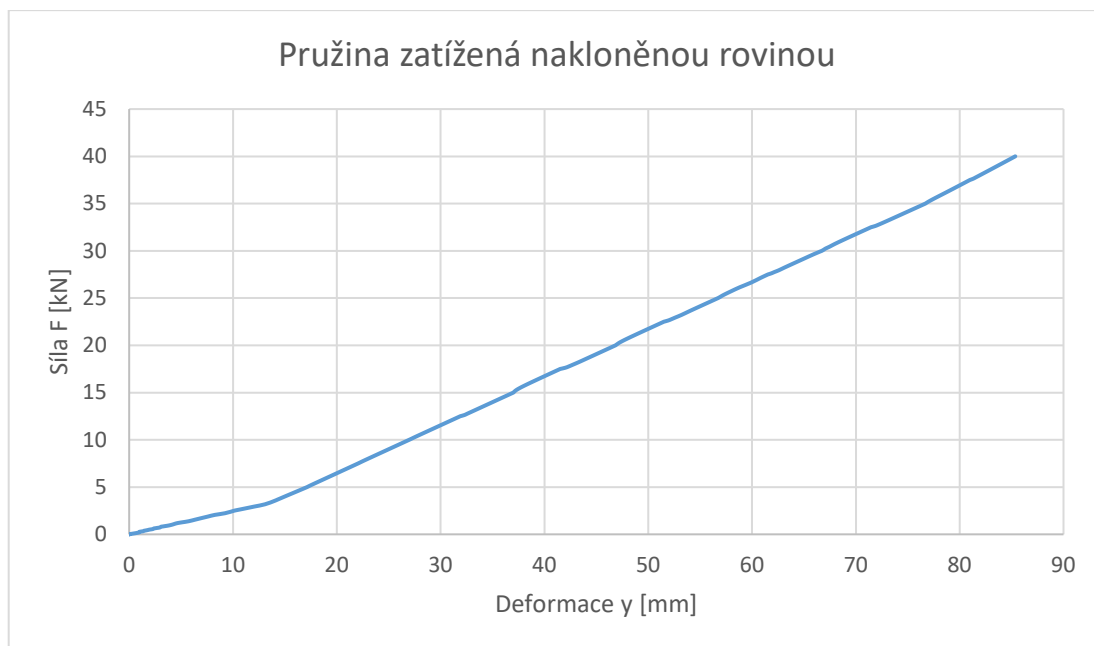
#### **Uložení mezi dvě nakloněné roviny:**

Uložení válcové pružiny u podvozku vagónu typu Y 25 nikdy nebude dokonalé. Vlivem výrobních nepřesností a nečistot nebudou obě dosedací plochy rovnoběžné, také dosedací plochy závěrných závitů nemusí být dokonale kolmé na osu pružiny. Zajímá nás, zda výsledná osová tuhost bude tímto ovlivněna. Pro větší názornost jsem provedl uložení mezi dvě desky, které svírají úhel  $4^\circ$ . Maximální tolerovaná nepřesnost dle normy [12] pro toto uložení je pouze  $1,77^\circ$ . Na obrázku 25, který je uveden níže, vidíme že se charakteristika liší. Tuhost je z počátku menší a pak přechází na svojí původní tuhost zhruba  $498 \text{ N/mm}$ . To je způsobeno tím, že při malých zatěžujících silách nedochází k plošnému dosednutí desky na závěrný závit, ale pouze k bodovému kontaktu. Při zatížení větší silou než  $3000 \text{ N}$  deska dosedne plošně na závěrný závit a válcová pružina tím získá svojí původní osovou tuhost. V praxi tento efekt nijak neovlivní vlastnosti pružiny, protože je zatížená v rozmezí  $8,8 \text{ kN}$  a  $29,1 \text{ kN}$  [4].



Obrázek 24: Uložení s nepřesností

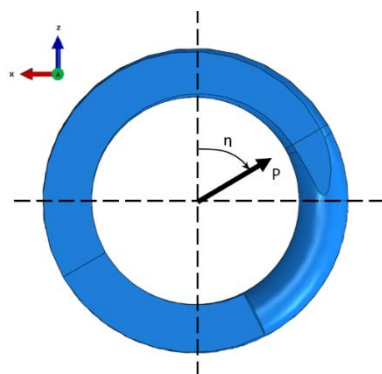




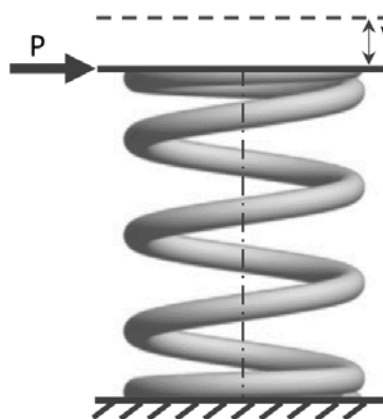
Obrázek 25: Vliv nepřesného uložení

### 3.3.2 Příčná tuhost

Při pohybu vozu po trati působí na vypružení podélné a příčné síly. Ty vznikají při změně rychlosti (například brždění) a při náhlé změně směru (například průjezd výhybkou) anebo při jízdě obloukem rychlostí, při které není převýšením koleje kompenzován účinek odstředivé síly na vypružení v příčném směru. Podvozek Y 25 L je konstruován tak, že maximální příčná výchylka je  $\pm 10$  mm a maximální podélná výchylka je 4 mm a to pouze v jednom směru. V opačném směru je tato hodnota nulová [12]. Pro výpočet příčné tuhosti byl model pružiny předzatížen o posunutí ve směr osy y o hodnotu -20 mm, což odpovídá zhruba 10 kN (obrázek 27). Kolmo na její podélnou osu působí síla o hodnotě 1500 N, která se otáčí po směru hodinových ručiček o úhel  $22,5^\circ$ , jak je naznačeno na obrázku 26. Je třeba zjistit pohyb horních uzlů pružiny po rovině xz. Horní deska se nemůže natáčet.



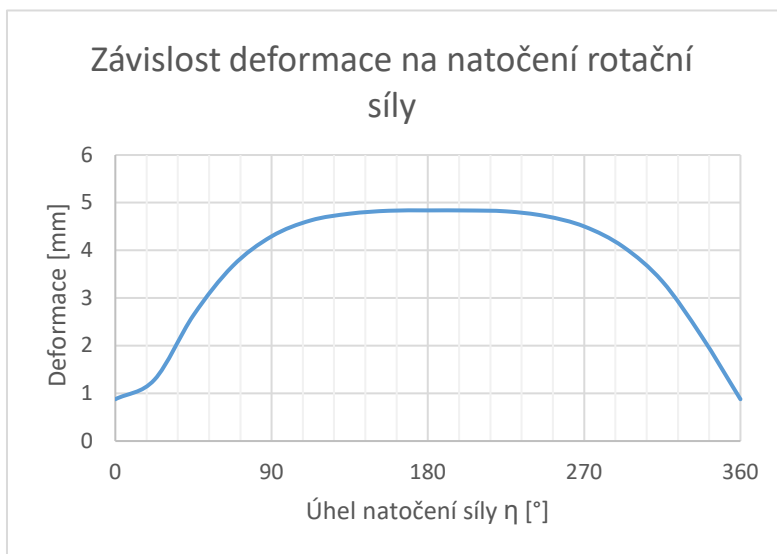
Obrázek 26: Rotační síla



Obrázek 27: Zatížení příčnou silou

$\eta$ [°]	xz [mm]	k [N/mm]
0	0,88	1710,3
22,5	1,29	1167,3
45	2,64	568,2
67,5	3,67	408,9
90	4,29	349,3
112,5	4,63	324,1
135	4,77	314,5
157,5	4,83	310,5
180	4,84	310,0
202,5	4,84	310,1
225	4,82	311,3
247,5	4,72	317,8
270	4,50	333,2
292,5	4,07	368,2
315	3,35	447,8
337,5	2,21	680,1
360	0,88	1710,3

Tabulka 1: Příčná tuhost



Obrázek 28: Příčná deformace v různých směrech

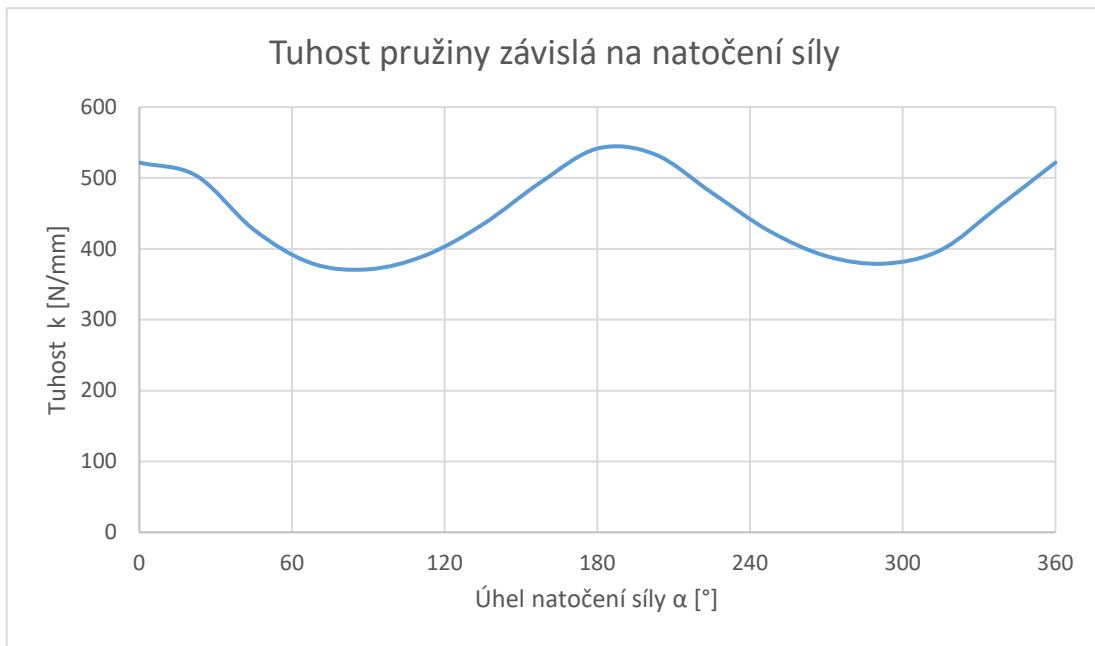
Dle vypočtených hodnot vidíme (tabulka 1), že příčná tuhost není konstantní, ale je závislá na poloze závěrných konců pružiny. Nejvyšší tuhost je ve směru osy z (obrázek 28).

### Vliv natočení sady pružin na příčnou tuhost:

Pokud vypruženou část vozu umístíme na stejně orientované pružiny dojde k podobnému chování jako u uložení na „kuličkách“. Při osovém zatížení dochází k příčným posuvům a při následném zatěžování příčnou silou se změní i příčná tuhost. Umožnění příčného srovnání při osovém zatížení bude zde dále uvedeno jako relaxace. Tento typ uložení razantně zmenšuje vliv závěrného závitu na příčnou tuhost. Dle obrázku 29 sice vidíme, že se příčná tuhost s natočením mění, ale tato změna není tak velká jako tomu bylo u předchozího uložení. V tomto případě můžeme porovnat výsledky s výsledkem z analytického řešení:

- Příčná tuhost podle normy [9]:  $k_{pn} = 450,2 \text{ N/mm}$
- Průměrná tuhost z MKP výpočtu:  $k_{pMKP} = 445,6 \text{ N/mm}$

Odchylka MKP výpočtu příčné tuhosti od tuhosti podle normy [9] je 1%, což můžeme považovat za velmi dobrou shodu. Přes skutečnost, že přesnou příčnou tuhost neznáme, můžeme usoudit, že Wahlův vztah (3.23) z analytického výpočtu je méně přesný.

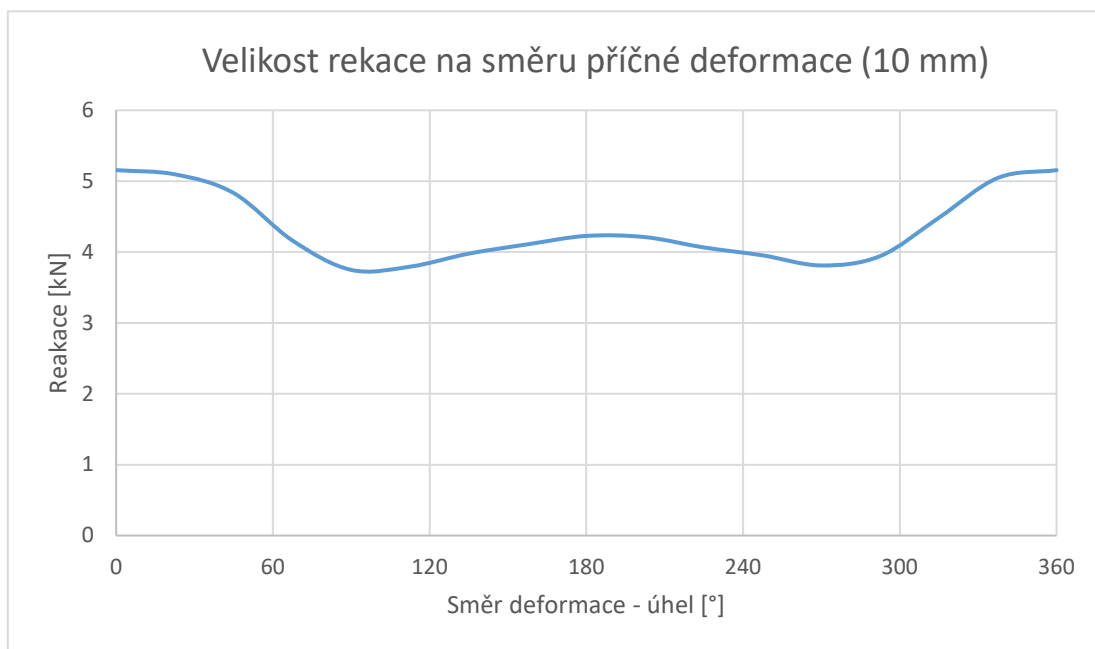


Obrázek 29: Příčná tuhost bez umožnění relaxace

### Zjištění reakcí při příčné výchylce 10 mm a osově síle 10 kN:

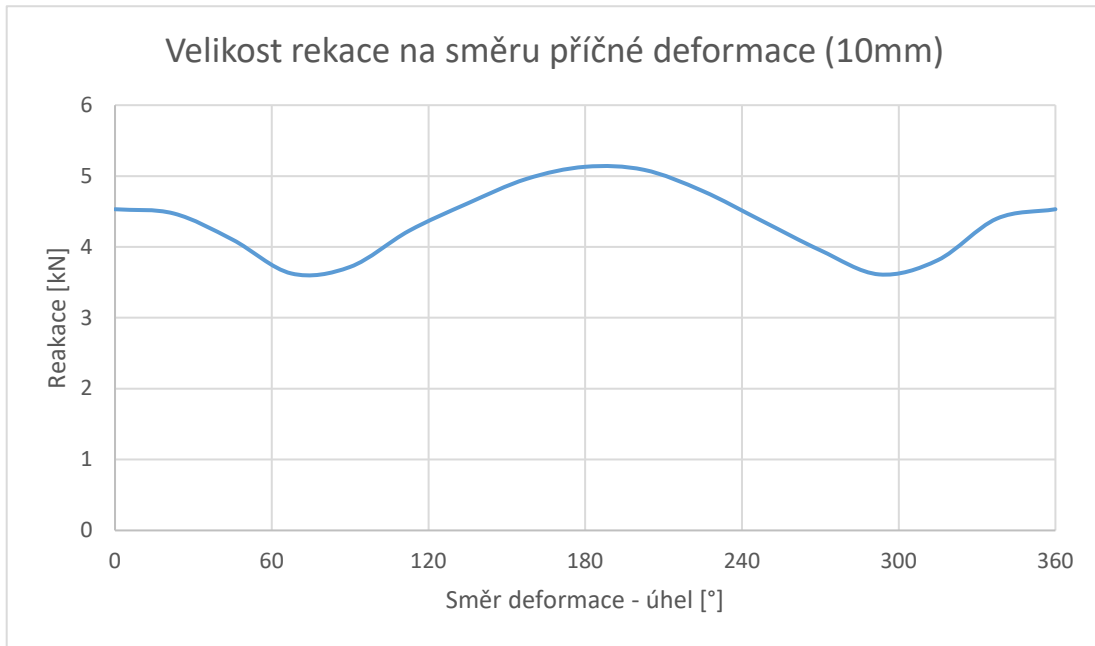
Příčná deformace válcové pružiny je omezena na výchylku 10 mm. Osová síla odpovídá zatížení vypruženou částí prázdného vozu. Pokud známe velikost reakční síly a hmotnost vypružené části, můžeme pomocí jednoduchého vzorce  $P = m \cdot a$  zjistit maximální možné příčné zrychlení nákladního vozu. Níže uvádím výpočty pro dvě různá uložení:

#### 1. Velikost příčné reakce bez možnosti relaxace:



Obrázek 30: Velikost příčné reakce bez relaxace (10 kN)

## 2. Velikost příčné reakce s možností relaxace:

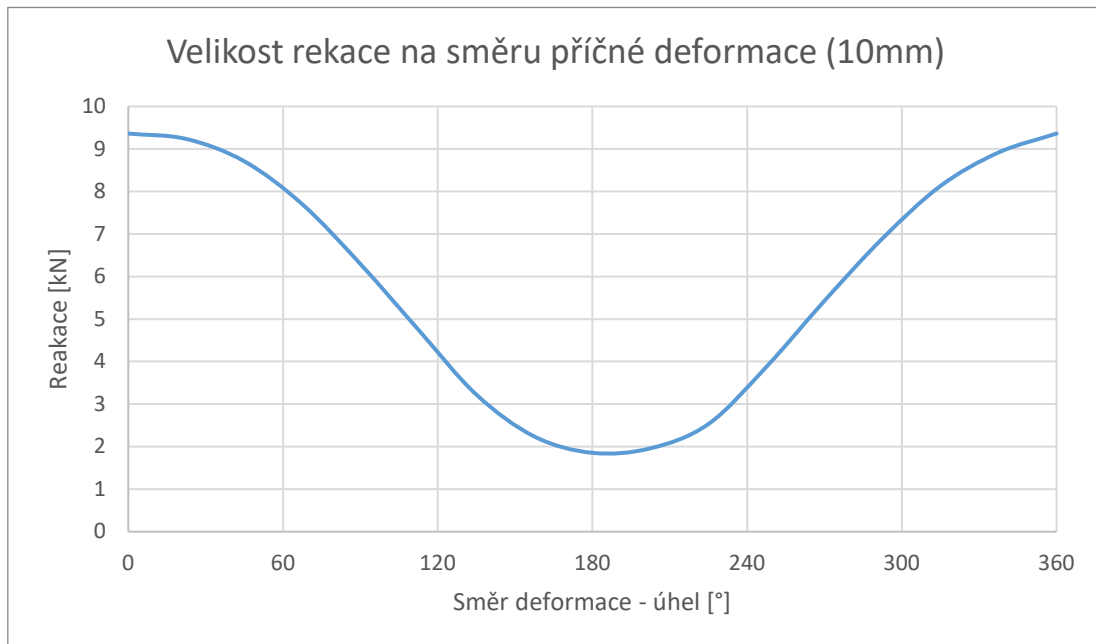


Obrázek 31: Velikost příčné reakce s relaxací (10 kN)

### Zjištění reakcí při příčné výchylce 10 mm a osově síle 29 kN:

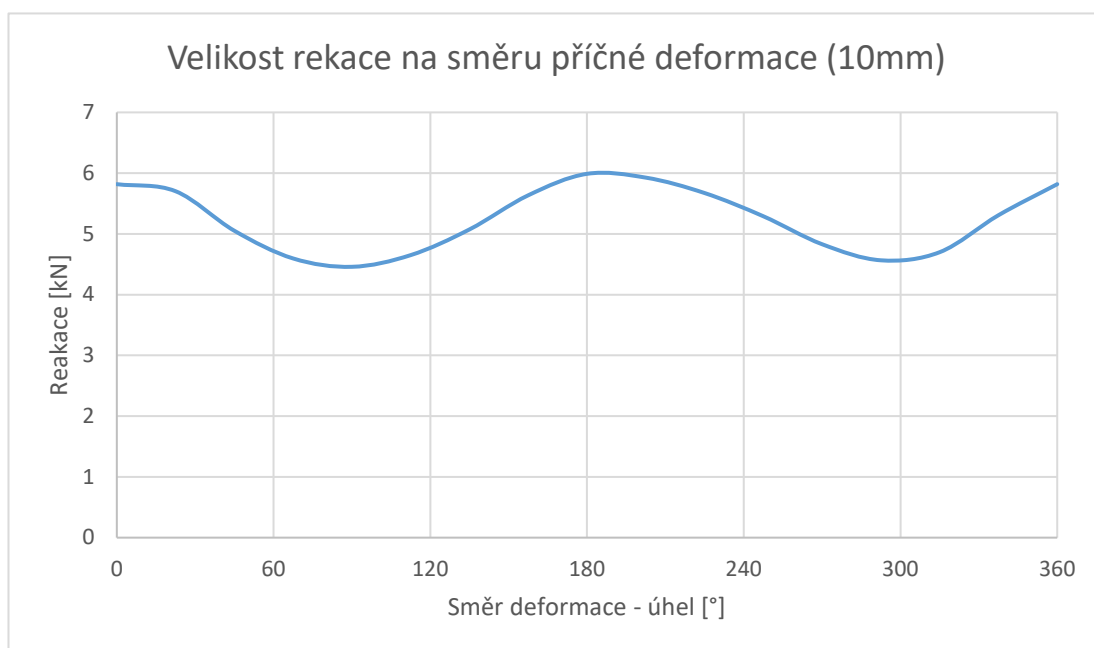
Příčná deformace válcové pružiny je omezena na výchylku 10 mm. Osová síla odpovídá zatížení vypruženou částí maximálně zatíženého vozu.

#### 1. Velikost příčné reakce bez možnosti relaxace:



Obrázek 32: Velikost příčné reakce bez relaxace (29 kN)

## 2. Velikost příčné reakce s možností relaxace:



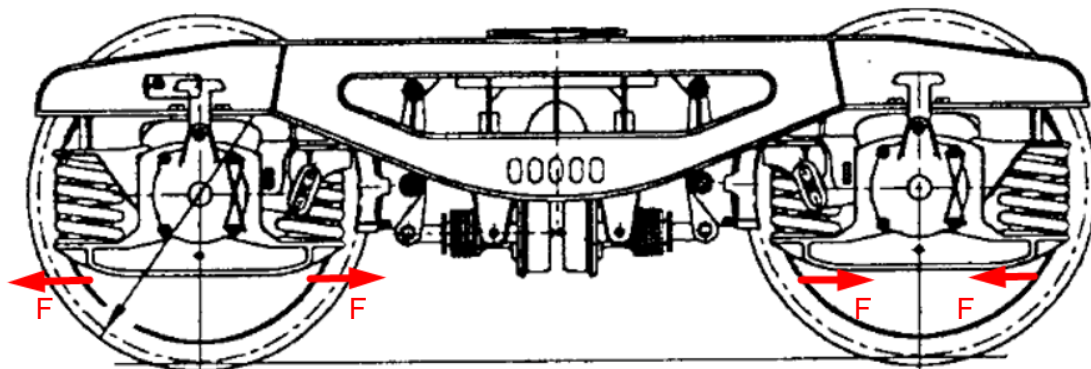
Obrázek 33: Velikost příčné reakce s relaxací (29 kN)

Průměrná tuhost z MKP výpočtu:

$$k_{\text{PMKP}} = 524,0 \text{ N/mm}$$

### 3.3.3 Uložení sady pružin

Z vypočtených dat vidíme, že příčná tuhost vinuté válcové pružiny se liší podle směru působícího zatížení. Pokud všechny válcové pružiny na podvozku uložíme stejným směrem dojde k stejnému chování jako při uložení „na kuličkách“. Při předzatížení by se vypružená část podvozku příčně posunula. Abychom tomuto jevu předešli je třeba tyto síly vhodným uložením pružin vyrušit. K silovému vyrušení dochází, pokud dvojice válcových pružin bude mít spodní konec závěrných závitů nasměrovaný k sobě nebo od sebe. Obrázek 34 znázorňuje příklad vyrušení sil:



Obrázek 34: Vyrušení sil

### 3.4 Dynamika válcové vinuté pružiny

Základními vstupními údaji pro návrh svislého vypružení nákladního podvozku jsou tíhy  $Q_p$  a  $Q_z$  a užitečné statické sednutí  $\Delta h_v$ . Pokud je závislost mezi tíhou a statickým sednutím lineární můžeme průběh vlastní frekvence vyjádřit ve tvaru [2]:

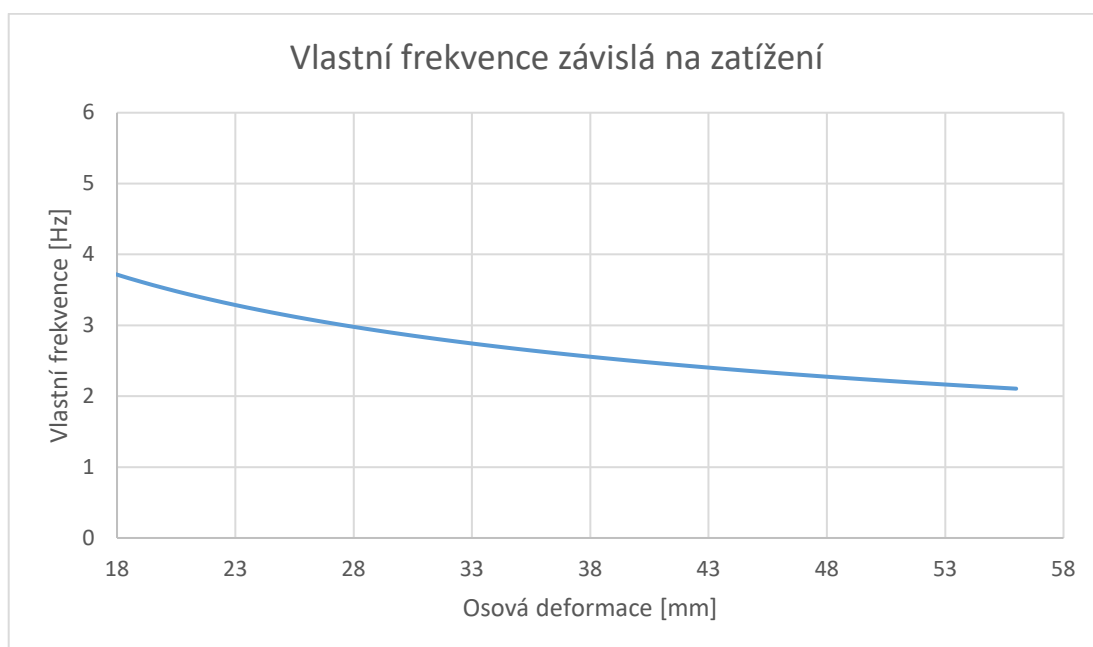
$$f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{k * g}{Q_p * \frac{Q_z - Q_p}{\Delta h_v} * z}} \quad (3.31)$$

Působící síla na pružinu od prázdného vozu:  $Q_p = 8800 \text{ N}$

Působící síla na pružinu od plně naloženého vozu:  $Q_z = 52500 \text{ N}$

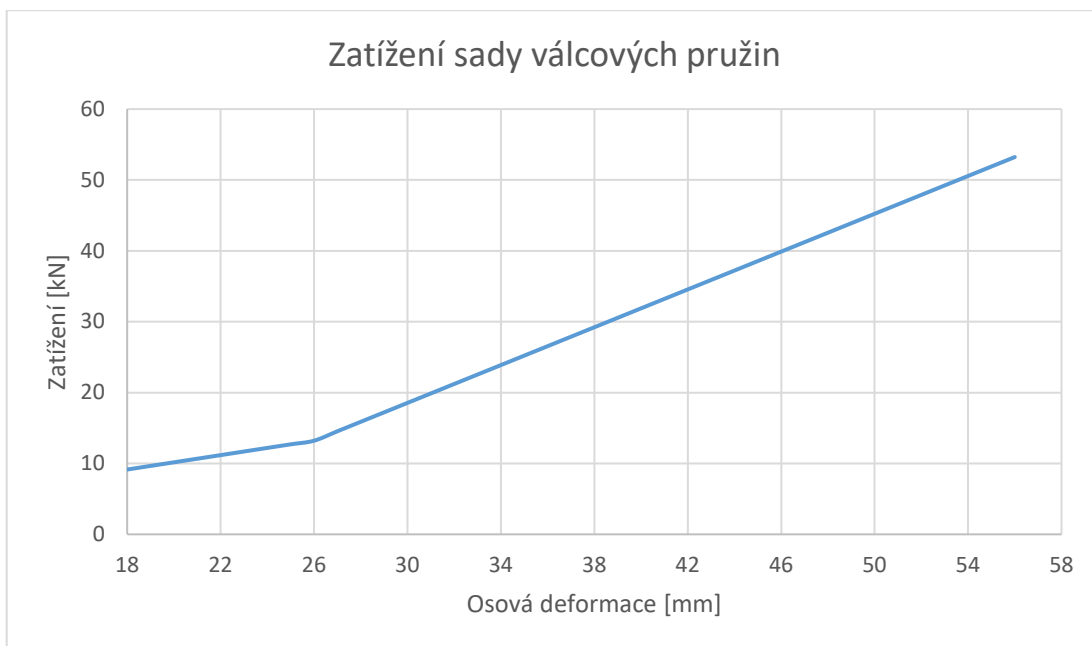
Užitečné statické sednutí:  $\Delta h_v = 38 \text{ mm}$

[4]



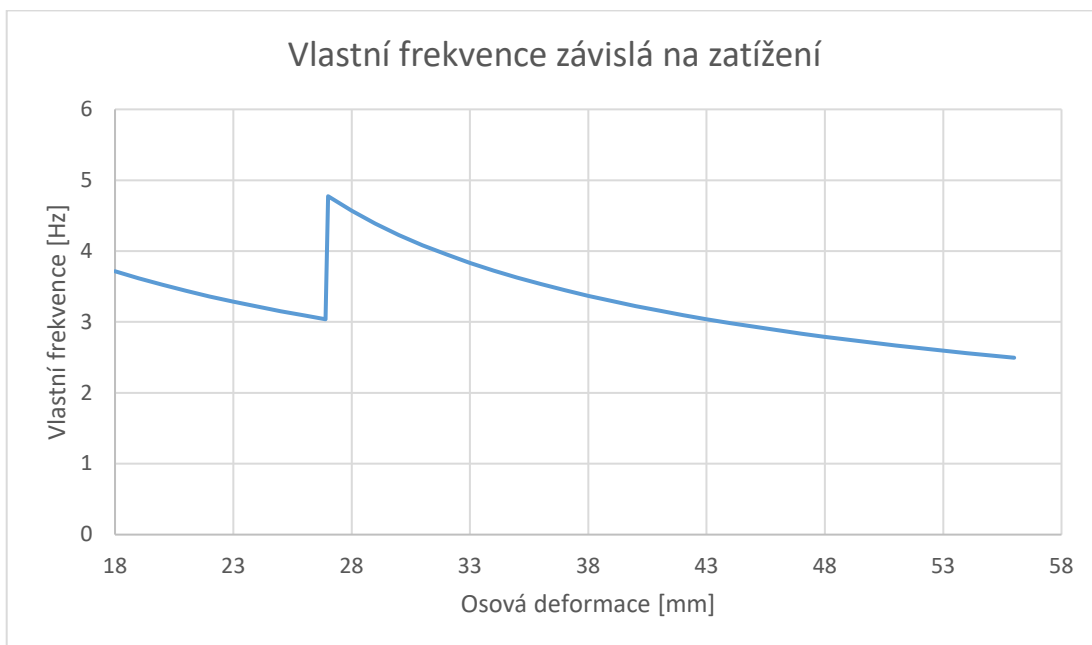
Obrázek 35: Vlastní frekvence samostatné pružiny

Z obrázku 35 vidíme, že se jedná o hyperbolu. Rozsah mezi nejvyšší a nejnižší vlastní frekvencí je poměrně velký. U prázdného vozu tyto frekvence značně stoupají. Navíc z pevnostního hlediska není vhodné, aby takto velký rozsah zátěže nesl pouze jeden pružící prvek. Z tohoto důvodu se v praxi využívají dvojice do sebe vložených pružin. Při zatížení vypruženou částí prázdného vozu je v činnosti pouze jedna pružina a druhá (kratší) se zapojí při větším zatížení. Tím se zvýší tuhost celku. Obrázek 36 znázorňuje zmíněnou změnu tuhosti při použití dvojice pružin [2]:



Obrázek 36: Zatížení dvojice pružin

Skoková změna tuhosti změní i vlastní frekvenci vypružené části. Z obrázku 37 lze vidět, že rozdíl těchto frekvencí v pracovních oblastech není tak velký, jako tomu bylo u samostatné pružiny:



Obrázek 37: Vlastní frekvence dvojice pružin

Z tohoto obrázku lze vidět, že se vlastní frekvence liší pouze o 1 Hz, když porovnáme zátěže od prázdného a plně naloženého vozu. Z hlediska dynamiky vozidla je samozřejmě optimální, jestliže vlastní frekvence zůstane konstantní. Tímto se dostáváme k ideální progresivní charakteristice vypružení (tuhost roste

exponenciálně s deformací). Progresivní charakteristika není jen charakteristikou stálé vlastní frekvence, ale i stálé bezpečností proti vykolejení [2]. Z těchto důvodů je žádoucí, abychom se k této charakteristice při návrhu svislého vypružení co nejvíce přiblížili. V následující kapitole je popsán návrh vinuté válcové pružiny s progresivní charakteristikou.



## **4 Válcová vinutá pružina s progresivní charakteristikou**

Tato kapitola se zabývá návrhem vinuté válcové pružiny s progresivní charakteristikou, která je určena pro podvozek typu Y 25 L. Z toho důvodu je nutné, aby její vnější rozměry byly shodné s vinutou válcovou pružinou, která byla počítána v předešlé kapitole.

### **4.1 Způsoby dosažení progresive tuhosti**

Progrese tuhosti je snižování poddajnosti v závislosti na deformaci. Tuto změnu tuhosti pružiny lze docílit postupným dosedáním činných závitů. Délka drátu (namáhaná převážně na krut) se bude zmenšovat. Tohoto jevu můžeme dosáhnout hned několika způsoby. Ty je možné vyčíst ze vzorce (4.1), který popisuje tuhost vinuté válcové pružiny namáhané čistě na krut. Z něj lze vidět, že pro dosažení progresive se dají použít tři parametry –  $d$  (průměr drátu),  $D$  (střední průměr pružiny v daném místě) a  $n$  (počet činných závitů). Vlastnosti materiálu neuvažují, protože pro dosažení progresive nelze v praxi použít. Jelikož drát, ze kterého je navinutá válcová pružina, by musel spojitě s délkou měnit modul pružnosti ve smyku a v tahu, což je v praxi téměř nedosažitelné.

$$k_{(y)} = \frac{Q}{y} = \frac{G * d^4}{8 * D^3 * n_{(y)}} \quad (4.1)$$

Progresi můžeme dosáhnout postupnou:

- změnou stoupání
- změnou průřezu drátu
- změnou průměru pružiny
- nebo některou z kombinací těchto tří variant

Vzhledem k tvaru vinuté válcové pružiny je vhodné, aby její střední část dosedala jako poslední. Například pro dosažení progresive pomocí změny průřezu drátu bude jeho největší průřez v polovině výšky pružiny.

### **4.2 Matematický popis ideální progresivní charakteristiky**

Cílem je, aby vlastní frekvence  $f$  byla konstantní při jakémkoliv zatížení.

Okamžitá tuhost svislého vypružení:

$$k = \frac{dQ}{dh} \quad (4.2)$$

Hmotnost vozové skříně:

$$m = \frac{Q}{g} \quad (4.3)$$

Vztah pro vlastní frekvenci a úprava do diferenciálního tvaru:

$$f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{g * dQ}{Q * dh}} \quad f = konst. \quad (4.4)$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{4 * \pi^2 * f^2}{g} * dh \quad (4.5)$$

$$\ln Q = \frac{4 * \pi^2 * f^2}{g} * h + C \quad (4.6)$$

$$Q = e^C * e^{\frac{4 * \pi^2 * f^2}{g} * h} \quad (4.7)$$

Dosazení okrajových podmínek:

Předzatížení:  $h = 0 \quad Q = Q_p \quad Q_p = e^C * e^{\frac{4 * \pi^2 * f^2}{g} * 0} \quad (4.8)$

Plné zatížení:  $h = \Delta h_v \quad Q = Q_z \quad Q_z = e^C * e^{\frac{4 * \pi^2 * f^2}{g} * \Delta h_v} \quad (4.9)$

$$e^C = Q_p \quad f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{g}{\Delta h_v} * \ln \frac{Q_z}{Q_p}} \quad (4.10)$$

Matematický přepis grafu 38:

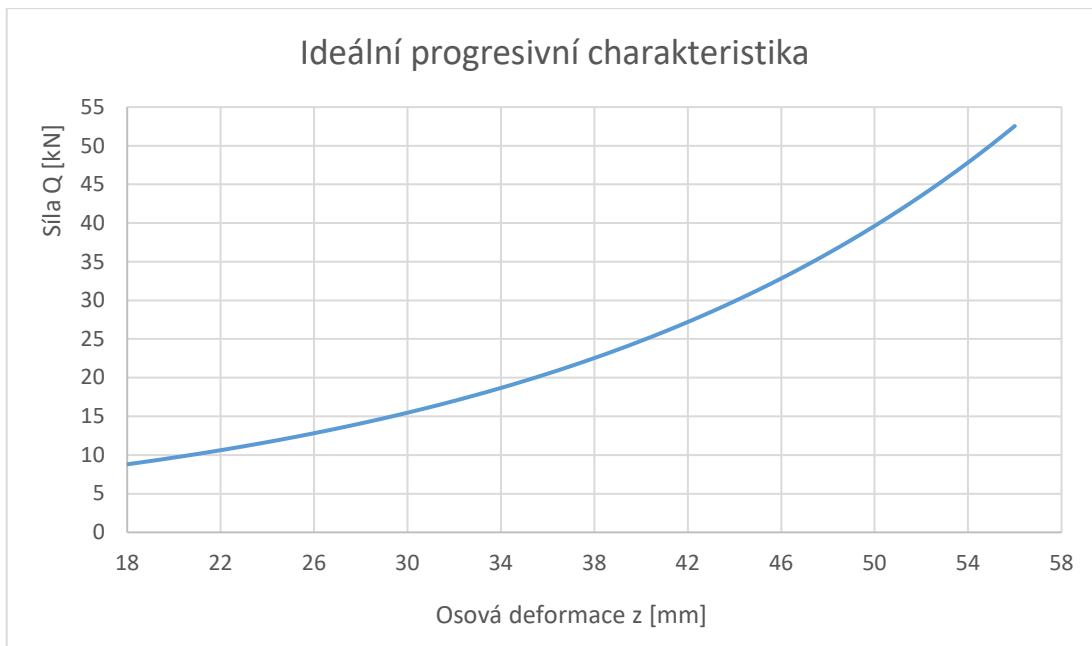
$$Q = Q_p * e^{\left(\frac{1}{\Delta h_v} * \ln \frac{Q_z}{Q_p}\right) * h} = Q_p * \left(\frac{Q_z}{Q_p}\right)^{\frac{h}{\Delta h_v}} \quad (4.11)$$

[2]

Po dosazení:

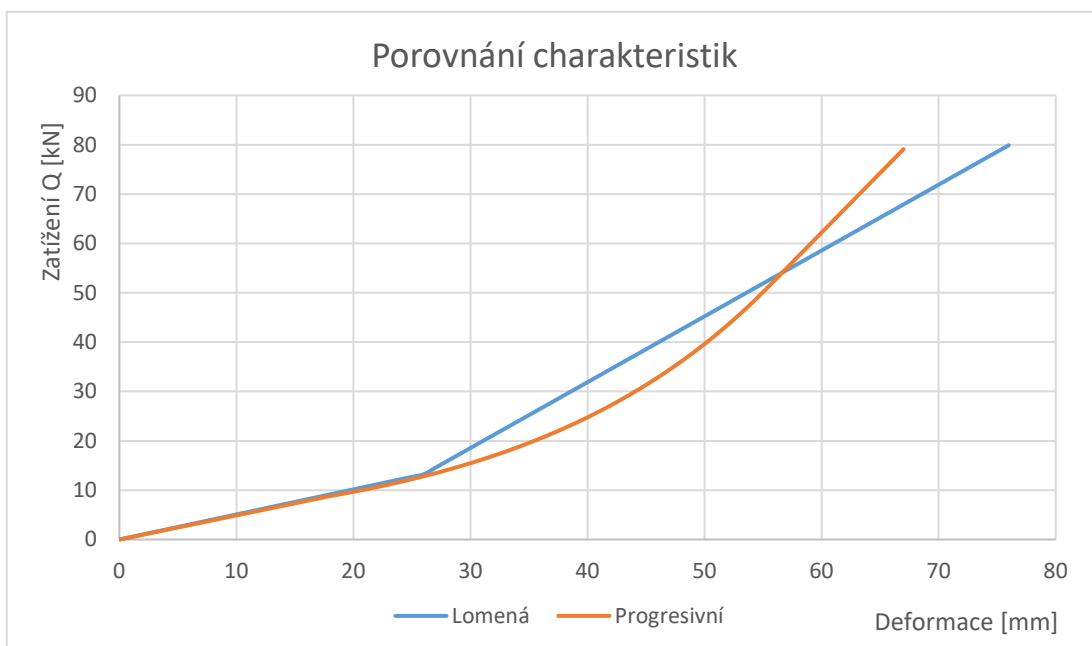
$$f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{9,81}{0,038} * \ln \frac{52500}{8800}} = 3,42 \text{ Hz}$$

Vypočtenou konstantní frekvenci lze měnit pouze změnou statického sednutí  $\Delta h_v$ .



Obrázek 38: Ideální progresivní charakteristika [2]

Pro návrh vinuté válcové pružiny potřebujeme zatěžující charakteristiku pro celou oblast, ve které se pružina může pohybovat. Obrázek 38 znázorňuje pouze pracovní oblast, nezohledňuje náběh do pracovní oblasti ani možné rázy při plném zatížení. Z tohoto důvodu byla charakteristika vhodně rozšířena. Na obrázku 39 můžeme vidět, že náběh do pracovní oblasti je lineární, což je nejjednodušší varianta řešení. Rozšíření za pracovní oblast bylo zvoleno také lineární, protože pokračování v progresivní charakteristice by znamenal příliš velký přírůstek tuhosti.

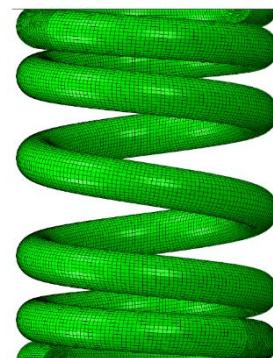


Obrázek 39: Porovnání charakteristik

Charakteristika je rozšířena až do zatížení 80 kN, což odpovídá 1,5násobku maximálního zatížení.

### 4.3 Návrh pružiny s progresivní charakteristikou

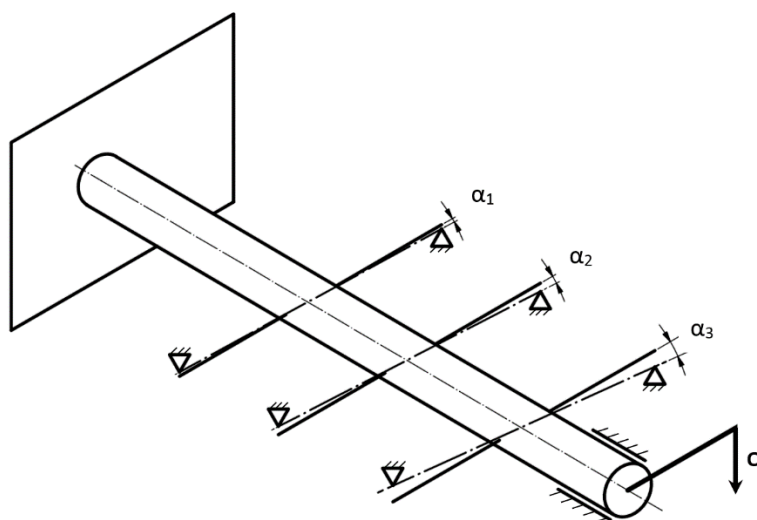
Pro zachování vnějších rozměrů vinuté válcové pružiny se pokusím dosáhnout progrese pomocí změny stoupání. Závěrnou část uvažuji stejnou, jaká je u vnější válcové pružiny z podvozku Y 25 L (závěrná část závitů má stoupání  $2,5^\circ$ ). Pro zajištění plynulého přechodu ze závěrné části na část činnou je třeba, aby se stoupání postupně zvětšovalo od spodu (vrchu). Nejvyšší stoupání bude tedy na středu pružiny (obrázek 40). Cílem je, aby vinutí na středu pružiny při plném zatížení nedosedlo. Ostatní rozměry válcové pružiny jsem se rozhodl ponechat, z důvodu zachování tuhosti při malé deformaci.



Obrázek 40: Progresivní pružina

#### Princip dosažení progrese:

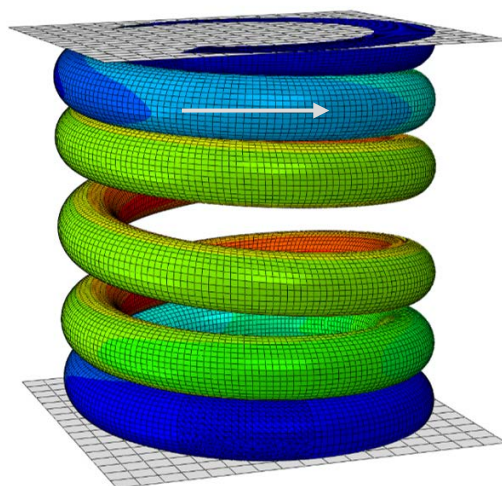
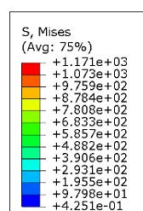
Při zatěžování vinuté válcové pružiny se spojitou změnou stoupání dochází k postupnému dosedání činných závitů. Na obrázku 41 je, pro snazší pochopení, pružina rozvinutá do přímky. Pružinový drát je namáhán na krut momentem  $M_k$ . Pokud pružinu zatěžujeme osovou silou, roste kroutící moment a dochází k deformaci (zkrutu). Tímto způsobem činné závity začínají postupně dosedat. Nejprve na závětrnou část závitů a později i na činnou část závitů.



Obrázek 41: Dosedání činných závitů

Vidíme, že při dosednutí již není tato část dále namáhaná na krut. Na obrázku 41 je toto znázorněno dorazy. Napětí v tomto místě odpovídá hodnotě momentu při dosedu této části. Při zvýšení zátěže na pružinu se zmíněné napětí v tomto bodě nemění (uvažuji napětí pouze od krutu, napětí například od ohybu neuvažuji). Z toho vyplývá, že pokud je pružina zatížena osovou silou, počet činných závitů se zmenšuje a tím tuhost pružiny roste.

Postupnou změnu redukovaného napětí von Mises (jak činné závitě dosedaly) je velmi dobře vidět na MKP modelu:

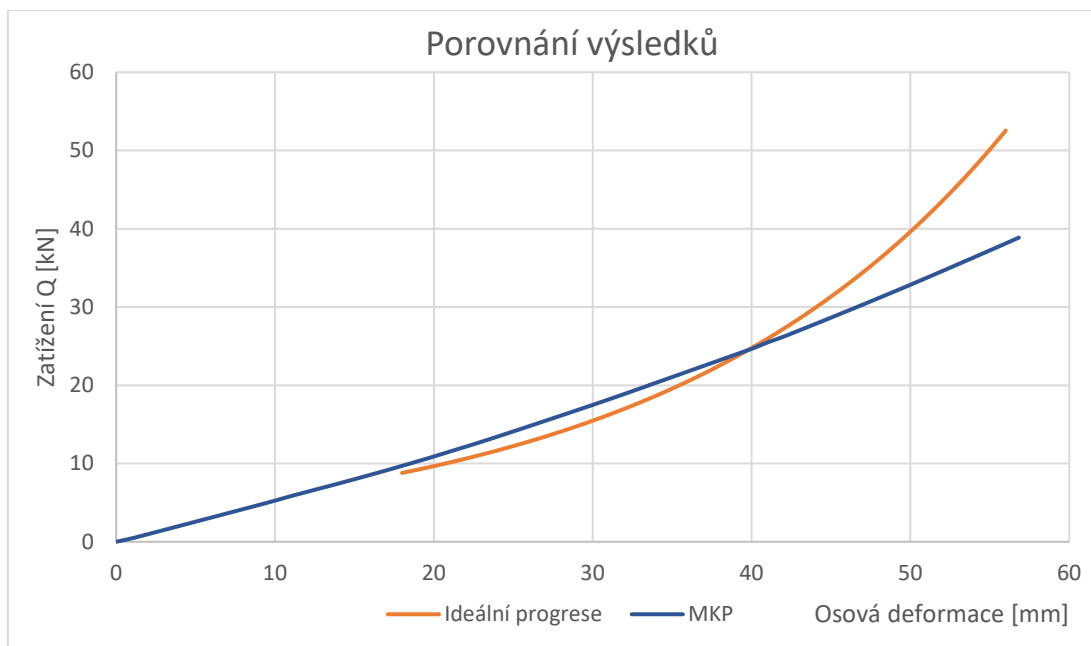


Obrázek 42: Průběh redukovaného napětí von Mises v progresivní pružině

### Omezující vlivy dosažení ideální progresse:

#### Osová tuhost:

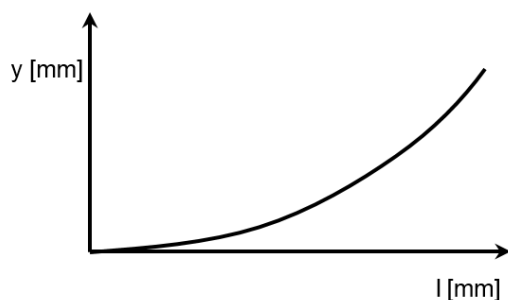
Model pružiny byl vytvořen tak, aby bylo dosaženo co největší progresse pomocí změny stoupání. Tuto pružinu můžeme vidět na obrázku 40. Závěrná část spojitě přechází do činné části. Přírůstek stoupání je zvolen tak, aby po zatížení pružiny nedocházelo k přizvedávání (odvalování) závitů. Bylo třeba docílit nepřerušovaného čárového styku dosednutých závitů. Za těchto omezení není možné dosáhnout potřebné progresse tuhosti. Na obrázku 43 jsou výsledky z MKP modlu porovnané s ideální progresivní charakteristikou:



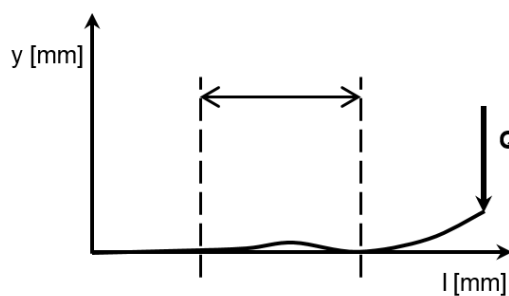
Obrázek 43: Porovnání výsledků

### Odvalování závitů:

Vzniká, pokud je přírůstek stoupání příliš velký. Závity sice na sebe při zatížení osovou silou dosedají, ale při zvýšení zatížení se daná část závitu zase nadzvedne. To je naznačeno na obrázku 44. V zakótované oblasti se redukované napětí srovná (zprůměruje), což je nežádoucí.



Obrázek 45: Rozvinutá část pružiny



Obrázek 44: Rozvinutá část pružiny po zatížení

### Počet činných závitů:

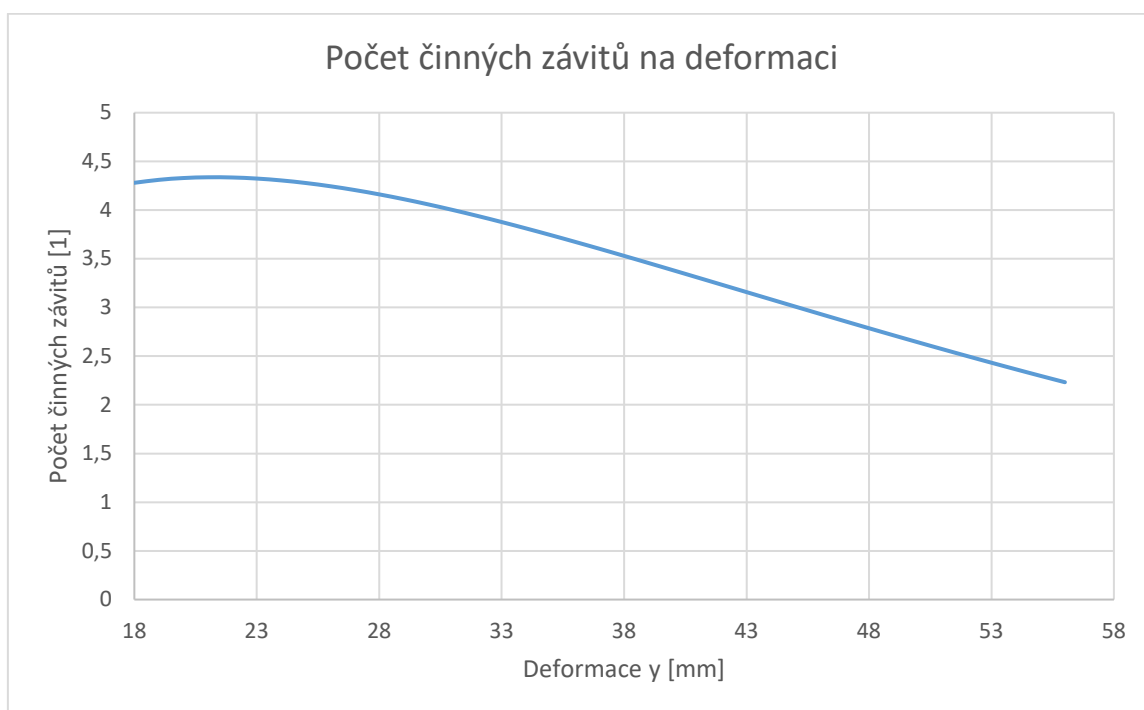
Pro dosažení ideální progresivní charakteristiky pružiny je třeba zjistit kolik závitů bude činných v závislosti na osově deformaci pružiny. Níže je dosažení do jednoduchého vzorce (4.12), kde  $k_{(y)}$  není konstanta, ale mění se s deformací. Za  $Q$  je dosazený matematický přepis ideální progresivní charakteristiky. Za  $k_{(y)}$  je dosazena tuhost těsně vinuté pružiny s proměnným počtem činných závitů  $n_{(y)}$  v závislosti na deformaci.

$$Q = k_{(y)} * y \quad (4.12)$$

$$Q_p * e^{\left(\frac{1}{\Delta h_v} * \ln \frac{Q_z}{Q_p}\right) * h} = \frac{G * d^4}{8 * D^3 * n_{(y)}} * y \quad (4.13)$$

$$n_{(y)} = \frac{G * d^4 * y}{8 * D^3 * Q_p * e^{\left(\frac{1}{\Delta h_v} * \ln \frac{Q_z}{Q_p}\right) * (y-18)}} \quad (4.14)$$

Dosažením do posledního vztahu dostáváme průběh, který je naznačený na obrázku 46:



Obrázek 46: Proměnný počet činných závitů

Z grafu vidíme, že počet činných závitů nejprve roste a až později začne klesat podle předpokladu. Rostoucí počet závitů s deformací nedává reálný technický smysl. Což značí, že navržená pružina má příliš velký silový přírůstek při malé deformaci. Proto je třeba upravit geometrii tak, aby se počáteční tuhost snížila. Toho lze dosáhnout například změnou průřezu drátu, nebo celkovým počtem činných závitů.

### Další možný postup:

Pro dosažení potřebné progresse jsem zvolil postupnou změnu stoupání válcové pružiny. Dle obrázku 43 vidíme, že k určité progresi došlo, ale k ideální progresivní charakteristice se to zdaleka neblíží. Ovšem numerický výpočet nám potvrdil hypotézu o dosedání činných závitů a jejich vyřazování z činnosti. Tato informace se dá uplatnit při dalším návrhu progresivních pružin. Dalším možným postupem pro dosažení potřebné progresse u válcové pružiny, která by nahradila dvojici do sebe vložených pružin u podvozku Y 25 L, je kombinace změny stoupání a změny průřezu vinutí. To vyžaduje i změnu závěrných částí u kterých nemůže být ponecháno konstantní stoupání, jako tomu bylo doposud. Průměr by se měnil orientačně z rozměru  $d_1 = 21 \text{ mm}$  na  $d_2 = 40 \text{ mm}$ . Tyto hodnoty jsou vypočteny ze vztahu (3.14) na základě předpokladu konstantního smykového napětí od předzatížení na plného zatížení. Vidíme, že změna průměru drátu je velká a při konstantním stoupáním vinutí by závity na střední části pružiny byly velmi blízko sebe, což je nežádoucí pro dosažení postupnému dosedání závitů při zatížení. Z tohoto důvodu je třeba využít i postupnou změnu stoupání vinutí. Postupnou změnu průměru vinutí nelze použít při zachování stejné zástavby. Příkladem pro postupnou změnu průměru vinutí je kónická vinutá pružina.



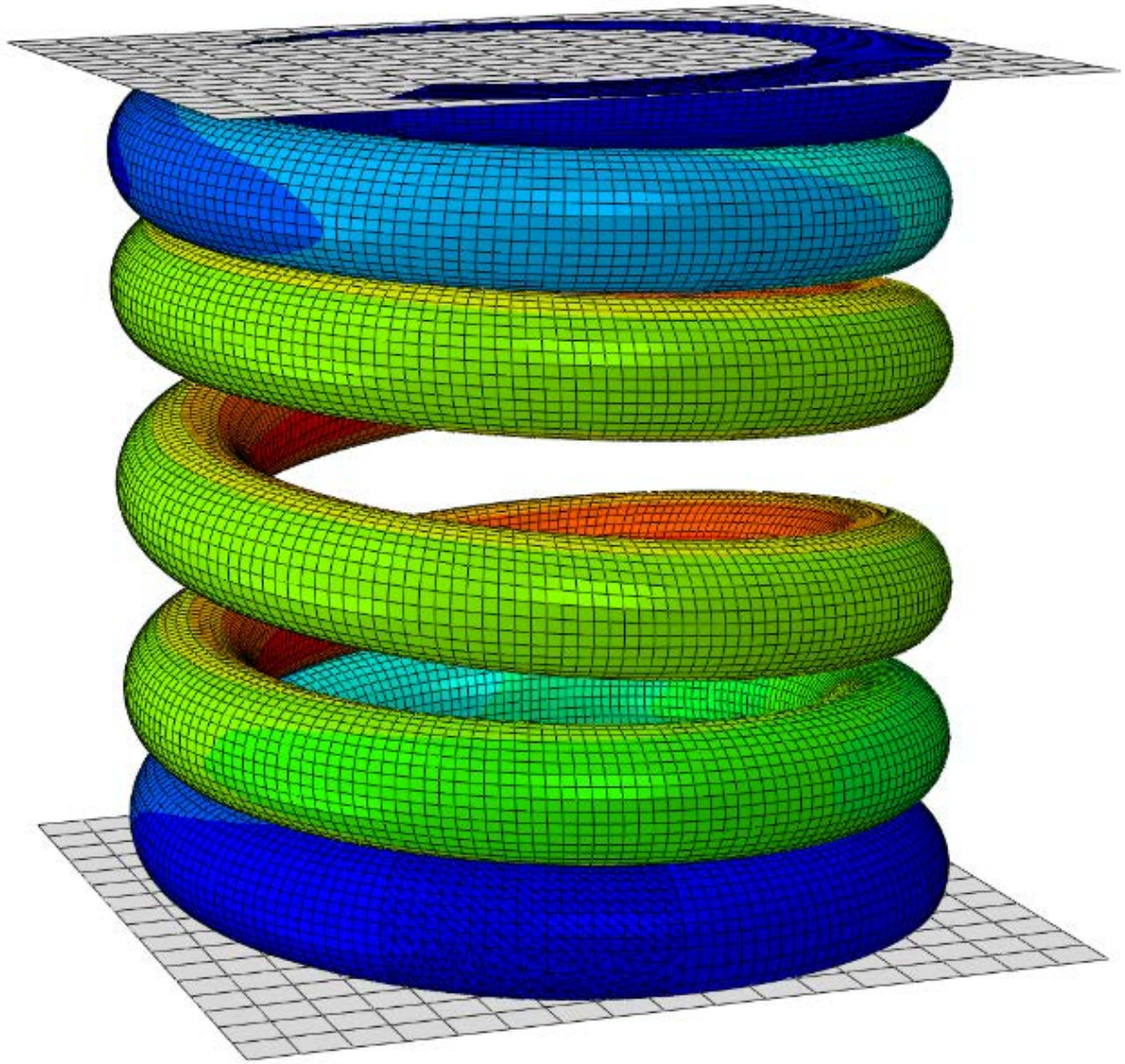
## 5 Závěr

Práce je zaměřena na výpočet mechanických vlastností vinuté válcové pružiny jako je osová a příčná tuhost. Na úvod v rámci rešerše jsou popsány základní pružící prvky pro vypružení osobních i nákladních kolejových vozidel. Jsou zde stručně popsány jejich vlastnosti a možné použití.

Praktická část bakalářské práce je rozdělena na dvě kapitoly. První se hlouběji zaměřuje na vlastnosti vinuté válcové pružiny, která se využívá u podvozku typu Y 25 L. Druhá se zabývá návrhem pružiny progresivní, která nahrazuje sadu dvou do sebe vložených pružin z téhož podvozku.

V první kapitole v praktické části se zaměřuji na mechanické vlastnosti vinuté válcové pružiny (osová a příčná tuhost). Pro jejich výpočet využívám analytické a numerické (MKP) řešení. U osově tuhosti jsem pružinu uvažoval jako těsně vinutou, podle vztahu (3.20). Ve srovnání s numerickým výpočtem mi vyšla velmi dobrá shoda, výsledky se lišily pouze o 0,1 %. V případě příčné tuhosti takto dobrá shoda nenastala, protože analytické výpočty jsou zde přibližné. Nedokáží zohlednit všechny možné vlivy, jako je například poloha závěrného závitu a způsob uložení. Pokud bych srovnal analytický výpočet tuhosti podle normy s výpočtem numerickým, tak rozdíl výsledků se lišil o 1 %. U jiných vztahů pro výpočet příčné tuhosti jsem takto dobrých výsledků nedosáhl.

V druhé kapitole v praktické části jsem se pokusil o návrh vinuté válcové pružiny s progresivní charakteristikou. Způsob dosažení progresu jsem zvolil pomocí změny stoupání činných závitů. Předpoklad byl takový, že závity na sebe budou postupně dosedat a tím se vyřadí činnosti. Tento předpoklad se potvrdil jako správný, ovšem potřebné progresu jsem nedosáhl. Další možný postup pro dosažení potřebné progresu je kombinace změny stoupání a změny průřezu vinutí. To však znamená upravit celou geometrii pružiny. Navíc z technologického hlediska výroby takto tvarově složitého pružícího prvku bude velmi nesnadná. Avšak pokud bychom tyto problémy vyřešili získáme pružící prvek, který je vzhledem k dynamice vozidla velmi výhodný.



## 6 Bibliografie

- [1] *Vagóny* [online]. Nové Město nad Metují: Bc. Martin Zítko, b.r. [cit. 2018-05-11]. Dostupné z: <http://www.vagony.cz/>
- [2] MARUNA, Zdeněk. *Metodika konstruování kolejových vozidel: osobní a nákladní podvozky*. Vyd. 1. Praha: Ediční středisko Českého vysokého učení technického, 1988.
- [3] IZER, Jiří. *Kolejové vozy*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1988.
- [4] UIC-KODEX 517. *Güterwagen - Teile der Federaufhängung - Normung*. 7. Ausgabe. 2006.
- [5] *Bohdan Bolzano* [online]. Kladno, b.r. [cit. 2018-05-18]. Dostupné z: [https://www.bolzano.cz/assets/files/TP/MOP\\_%20Tycova\\_ocel/EN\\_10083/MOP\\_51CrV4.pdf](https://www.bolzano.cz/assets/files/TP/MOP_%20Tycova_ocel/EN_10083/MOP_51CrV4.pdf)
- [6] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2010. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [7] ČSN 02 6015 *Šroubovitě pružiny válcové tlačné a tažné z tyčí kruhového průřezu, tvářené za tepla: Základní pojmy, výpočet a směrnice pro konstrukci*. Český normalizační institut, 1977.
- [8] BATANOV, Michajl a N. PETROV. *Ocelové pružiny: Technologie výroby a ochrana proti korozi*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953. Knižnice kovoprůmyslu.
- [9] ČSN EN 13906-1 (026001) *N Šroubové válcové pružiny vyráběné z drátů a tyčí kruhového průřezu - Výpočet a konstrukce*. Praha: Český normalizační institut, 2003. Dostupné také z: <http://csnonline.agentura-cas.cz/>
- [10] BATHE, Klaus-Jürgen. *Finite element procedures*. 2nd ed. New Delhi: PHI Learning, 2012. Eastern economy edition. ISBN 978-81-203-1075-9.
- [11] *Abaqus 6.14 documentation* [online]. Providence, RI, USA: Dassault Systèmes, 2014 [cit. 2018-05-11]. Dostupné z: <http://abaqus.software.polimi.it/v6.14/index.html>

- [12] ČSN EN 16235. ČSN EN 16235 (280350) A Železniční aplikace - Přejímací zkoušky jízdních charakteristik kolejových vozidel - Nákladní vozy - Podmínky pro upuštění od jízdních zkoušek podle EN 14363 u nákladních vozů s definovanými charakteristikami. 1. 12. 2014. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, b.r.