

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

---

**Fakulta strojní**

**Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**

**Virtuální model CNC dřevoobráběcího stroje pro zpracování deskového materiálu**

**Virtual model of CNC woodworking machine for processing chipboard material**

Diplomová práce

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Mechatronika

Vedoucí práce: Ing. Martin Nečas MSc., Ph.D.

**Bc. Pavel Houfek**

---

**Praha 2018**



# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Houfek** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **420514**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Mechatronika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Virtuální model CNC dřevoobráběcího stroje pro zpracování deskového materiálu.**

Název diplomové práce anglicky:

**Virtual model of CNC woodworking machine for processing chipboard material**

Pokyny pro vypracování:

1. Popis virtuálního modelu CNC dřevoobráběcího stroje a jeho funkčnosti
2. Vytvoření dynamického simulačního modelu s řízením a realizací pohybu X, Y pomocí řemenového převodu
3. Vytvoření dynamického simulačního modelu s řízením a realizací převodu X, Y pomocí pastorku a ozubeného hřebenu
4. Vizualizace simulovaného stroje v Simulinku s využitím CADových dat a řízením prostřednictvím G kódu (např. Beckhoff CNC/NCI).
5. Porovnání a kritické zhodnocení chování simulovaných variant stroje

Seznam doporučené literatury:

- Štecha, J., Havlena, V.: Teorie dynamických systémů, Vydavatelství ČVUT, Praha 1993
- Havlena, V., Štecha, J.: Moderní teorie řízení, Vydavatelství ČVUT, Praha 1994
- Stejskal V., Bauma V., Vampola T.: Kmitání mechanických soustav - doplňkové skriptum. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003.
- Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání. Sobotáles, Praha 1994.
- Souček P.: Servomechanismy ve výrobních strojích, Vydavatelství ČVUT, 2004

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **25.04.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **17.08.2018**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

  
Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

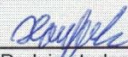
  
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

27.4.2018  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Virtuální model CNC dřevoobráběcího stroje pro zpracování deskového materiálu“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce Ing. Martina Nečase MSc., Ph.D. a s použitím odborné literatury uvedené v seznamu literatury.

V Praze dne .....

Podpis.....

## **PODĚKOVÁNÍ**

Chci poděkovat zejména svému vedoucímu diplomové práce Ing. Martinu Nečasovi MSc., Ph.D. za velmi přínosné konzultace nad podobou výsledného řešení programu a nad problémem, které se při vypracovávání vyskytly. Déle chci také poděkovat své rodině za vytvoření zázemí, které mi umožnilo diplomovou práci vytvořit.

## **ABSTRAKT**

Práce se zabývá vytvořením virtuálního modelu dřevoobráběcího CNC stroje pro zpracování deskového materiálu. Úvod do problematiky je proveden pomocí obecných trendů vývoje techniky a popisem simulovaného stroje. Dále je uveden přehled fyzikálních zákonů a teorií, ze kterých bylo vycházeno při tvorbě simulačního algoritmu. V praktické části je popsána struktura vytvořeného programu a jednotlivých používaných dílčích funkcí a podprogramů. Pro každou virtuální osu stroje jsou uvedeny číselné hodnoty parametrů, grafické výstupy ze simulace a rovnice integrované uvnitř programu. Na závěr je vytvořený program zhodnocen a jsou porovnány varianty konstrukce dle zadání. Uvedeny jsou také možná budoucí rozšíření programu, aby lépe aproximoval realitu.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

virtuální model, matematická simulace, dynamická simulace, dřevoobráběcí stroj, řízení pomocí PID, průmysl 4.0

## **ABSTRACT**

The thesis look into the making of a virtual model of CNC woodworking machine for processing chipboard material. An introduction to the problem is made by describing general trends in technology development and by a description of the simulated machine. It gives an overview of the physical laws and theories, which were used in the making of the simulation algorithm. The practical part describes the structure of the created program and the used individual sub-functions and sub-programs. For each virtual machine axis state numeric input parameter values, graphical outputs from the simulation and the equations integrated in the program. Finally, the program is evaluated and the design variants of the machine are compared. There are describe also possible future extensions of the program to better approximate the reality.

## **KEY WORDS**

virtual model, mathematical simulation, dynamics simulation, woodworking machine, PID control, industry 4.0

# OBSAH

<b>ÚVOD</b> .....	<b>7</b>
<b>1 DIGITÁLNÍ PROTOTYPY</b> .....	<b>8</b>
1.1 Průmysl 4.0.....	8
1.2 Popis simulovaného stroje .....	9
<b>2 FYZIKÁLNÍ POZADÍ</b> .....	<b>14</b>
2.1 Dynamika tuhého tělesa.....	14
2.2 Dynamika poddajného tělesa.....	19
2.3 Tekutinové systémy .....	22
<b>3 MATEMATICKÁ SIMULACE</b> .....	<b>27</b>
3.1 Numerický řešič rovnic .....	27
3.2 Algoritmus řízení .....	29
3.3 Osa X .....	30
3.4 Osa Y .....	39
3.5 Osa Z.....	51
3.6 Pneumatický výsuv nástroje .....	55
3.7 Vizualizace modelu .....	59
<b>4 ZÁVĚR</b> .....	<b>62</b>
<b>5 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ</b> .....	<b>64</b>
<b>6 SEZNAM OBRÁZKŮ</b> .....	<b>68</b>
<b>7 POUŽITÁ LITERATURA</b> .....	<b>69</b>
<b>8 SEZNAM PŘÍLOH</b> .....	<b>71</b>
<b>9 PŘÍLOHY</b> .....	<b>72</b>

## ÚVOD

Virtuální simulace v oblasti výrobních procesů a strojů se stávají stále důležitější. S pomocí stále rostoucí výpočetní síly digitální techniky je možné simulovat a zkoušet složité fyzikální procesy před stavbou samotného zařízení. Využívají se základní principy mechaniky tuhých i poddajných těles, elektrických obvodů i teorie řízení, které byly objeveny v minulosti, ale používají se zcela novým způsobem. Jsou sestaveny do simulace, která běží “online”, v reálném čase, a mají připravené ovládací rozhraní pro uživatele. Je umožněno ovládat virtuální stroj a přitom číst i data, které nelze měřit nebo jen s velkými obtížemi a tím je dán lepší náhled do vnitřních procesů v konstrukci.

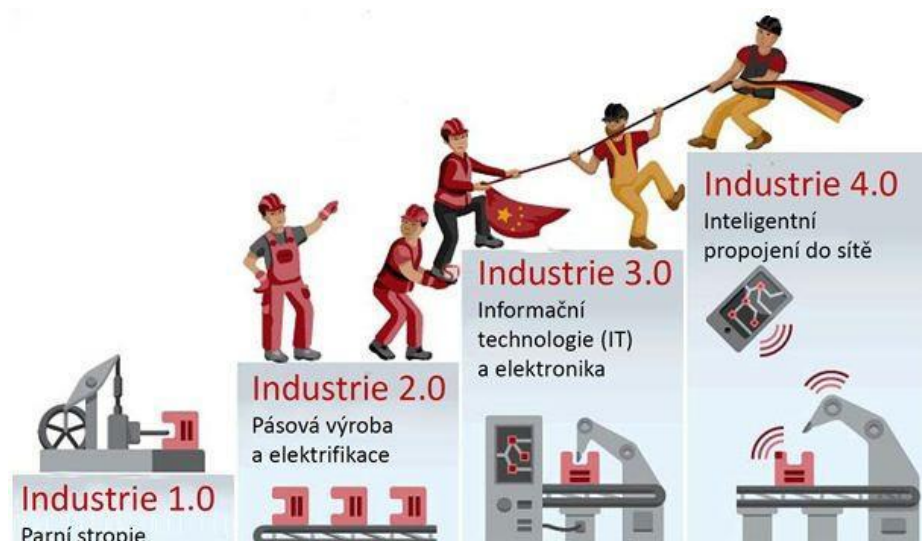
Výsledky těchto simulací pomáhají konstruktérům a návrhářům strojů k vytvoření optimální konstrukce v koordinaci s návrhem řízení pohonů a řídicího systému. Tak mohou vznikat mnohem složitější a robustnější varianty strojů. Snadno lze u nich měnit parametry a zkoušet různé varianty uspořádání. Virtuální modely najdou využití také pro potřeby školení pracovníků. Ovládání i odezva virtuálního modelu je stejná jako u skutečného stroje, ale nehrozí zničení drahých součástí při chybě v programu. Ze simulací jednotlivých strojů lze virtuálně poskládat a simulovat celý výrobní proces. Tato myšlenka je základem pro iniciativu s názvem Průmysl 4.0.

Důležitost virtuálních simulací bude postupně, se zvyšující se digitalizací výroby, růst. Trendem je získat maximální množství informací o produktu, který teprve vznikne, aby se zkrátilo období návrhu na minimum. Do návrhu tak mohou být snadněji zahrnuty požadavky na mechanickou únosnost, zpracování materiálů, technologii opracování, snadnou montáž, ale také možnosti recyklace a likvidace produktu.

# 1 DIGITÁLNÍ PROTOTYPY

## 1.1 Průmysl 4.0

V posledních letech sílí vliv iniciativy zvané Průmysl 4.0. Jeho myšlenkou je změna povahy běžného průmyslu i celé společnosti vlivem nového použití moderních technologií, zvýšit poptávku po moderních průmyslových technologiích a v tomto důsledku podpořit a urychlit vývoj robotiky a automatických řídicích systémů nezávislých na lidské obsluze. (VOJÁČEK, 2016) V základu této změny stojí zejména propojení kyberneticko-fyzikálních systémů, rozšířené používání umělé inteligence a sdílení dat pomocí tzv. internetu věcí (Internet of Things). (ODBOR 31300, 2016) Cílem je vytváření inteligentních továren, které budou schopny pružně a autonomně reagovat na momentální podmínky provozu, provádět výstupní kontrolu výroby, sbírat provozní data a pomocí webového rozhraní všechny tyto informace v reálném čase odesílat obsluze. (ODBOR 31300, 2016)



Obr. 1 Umístění Průmyslu 4.0 do kontextu historického vývoje techniky (VOJÁČEK, 2016)

Spojení virtuálního kybernetického světa a fyzikální reality s sebou přináší významné interakce těchto systémů v kontextu celé společnosti. (ODBOR 31300, 2016) Zahrnuje kompletní digitalizaci, robotizaci a automatizaci většiny běžných výrobních činností i běžného života. Na úrovni průmyslové výroby jde nejen o nahrazení monotónní manuální lidské práce prací robotů, ale také o nahrazení manuálního zadávání výrobních dat do stroje pomocí automatizovaných podnikových systémů. (VOJÁČEK, 2016) Informace budou sdíleny mezi jednotlivými materiály, polotovary, obrobky, výrobními stroji až po skladové hospodářství, logistiku a obchod. Vyráběné položky i stroje budou označovány mikročipy,



kteře ponesou informace o historii kařždého kusu. (VOJÁČEK, 2016) Kařždá z těchto částí by měla mít přístup ke společnému webověmu rozhraní.

Jako příklad lze uvést obrábění na soustruhu. Obsluha přiveze paletu s polotovary pro obrábění a robotický manipulátor přečte informace z čipu palety, aby zjistil, o které výrobky se jedná. Vyhodnotí nejméně zatížený soustruh a začne zakládat polotovary do upnutí. Zde i obráběcí stroj přečte informaci z čipu kařždého polotovaru, kde zjistí, o jaký jde materiál, jaké bylo jeho tepelné zpracování, apod. a na základě těchto informací zvolí podle vloženého algoritmu nejjvhodnější řezné podmínky. Po dokončení obrábění dojde ke kontrole rozměrů a jakosti a tyto informace jsou zapsány na čip daného polotovaru i do historie stroje.

### **1.1.1 Digitální prototypy**

Jedním z konceptů vycházejících z myšlenky Průmyslu 4.0 je vytváření virtuálních prototypů výrobků před jejich uvedením do výroby. Tyto virtuální výrobky by měly obsahovat veškeré informace a popisovat reálné chování produktu. Součástí jsou tedy nejen CADová data nesoucí informace o geometrickém uspořádaní a hmotových veličinách, ale také popis dynamického chování elektronických, mechanických a řídicích prvků produktu. Uplatňuje se zde tzv. mechatronický přístup navrhování složitých produktů. (ŠVENDA, 2011)

Mechatronické navrhování výrobku spočívá v návrhu jako celku, který tvoří elektrický, mechanický a řídicí softwarový systém. Nejedná se již o stroj doplněný elektronikou nebo o samotné programovatelné obvody. Spojením návrhu je dosaženo určité synergie ze všech oblastí. (VALÁŠEK, 1996) Tímto přístupem navrhování získáme více než pouhý součet částí.

## **1.2 Popis simulovaného stroje**

Konkrétní výrobní stroj, jehož popisem se zabývá tato práce, vzniká ve spolupráci mezi firmou Houfek a.s. a Ústavem mechaniky, biomechaniky a mechatroniky na ČVUT. Tyto instituce společně vyvíjejí obráběcí stroj určený na deskové dřevěné materiály s CNC řízením. Firma Houfek a.s. chce tímto strojem rozšířit své portfolio obráběcích CNC strojů pro deskové materiály. V současné době firma vyrábí CNC obráběcí centrum typu ORION. Tento typ stroje má pevně umístěný obrobek, nad nímž se pohybuje konzolová konstrukce s příčným ramenem. (Houfek a.s.) Druhým strojem v tomto druhu sortimentu je typ MERCURY. Konstrukcí je velice podobný ORIONu, je jeho větší a mohutnější variantou. Tato varianta je určena zejména pro výrobu nábytkových dílů, jako jsou např. okenní rámy,

dveře, apod. Oba typy strojů mají pro lepší tlumení vibrací vyplněnou základní konstrukci betonem. (Houfek a.s.)

Obráběná deska je obsluhou umístěna na válečkovou dráhu. Zde je zachycena poháněným posuvem pomocí vakuových přísavek a přesouvána do požadovaných poloh. Posuv v tomto směru je pro účely vytvoření modelu v této práci považován za osu X. Pohon je tvořen řízeným synchronním servomotorem s převodovkou. Řetězec pokračuje hnací řemenicí s ozubeným řemenem, aby nedocházelo k nežádoucím skluzům při posuvu a tím ke ztrátě informace o přesné poloze obrobku. Řemenový převod je tvořen řemenicí hnací, připojenou k motoru, a hnanou, která pouze slouží k vedení řemenu a jeho napínání. Posuvová část je upevněna přímo na řemen napnutý mezi řemenicemi. Při dosažení požadované polohy obrobku a před obráběcími operacemi dojde k jeho upnutí pomocí bočních lišt, které vysune pneumatický válec. Tím je deska nehybně připravena k obrábění. (LEDR, 2018)



Obr. 2 Válečková dráha obráběcího stroje

Příčně přes válečkovou dráhu je portál, na němž jsou vodící plochy pro příčný posuv. Pro účely modelování je považován za osu Y. Vodící plochy jsou umístěny na vodorovné části portálu. Prakticky jde o válečková lineární vedení. Zkoumány jsou dvě konstrukční varianty pohony Y-ové osy. První variantou je pohon pomocí pastorku a ozubeného hřebenu. Ozubený hřeben je umístěn na portálu, poblíž lineárního vedení. Pastorek je součástí pohyblivé části osy Y. Je zakončením řetězce počínajícího u synchronního servomotoru a pokračujícího přes převodovku. (LEDR, 2018)

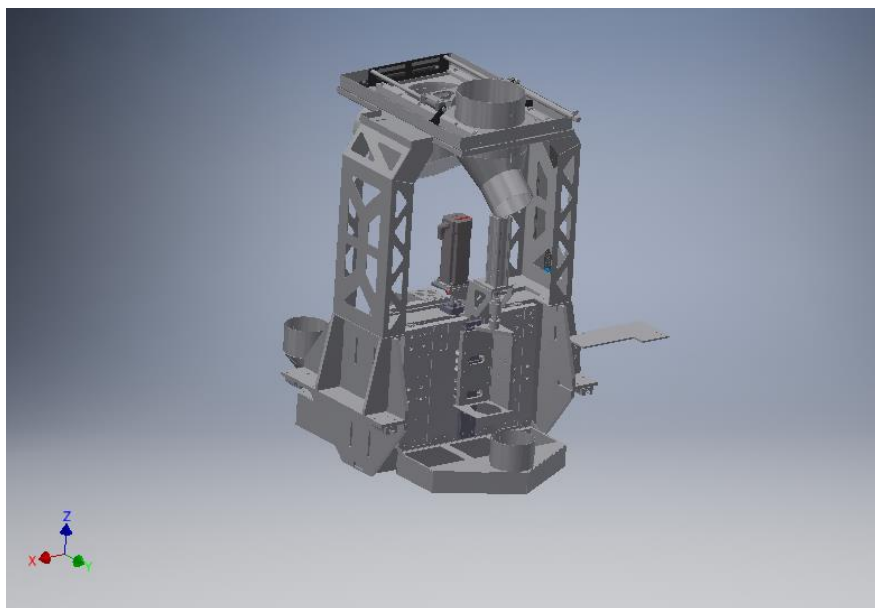
Druhou konstrukční variantou pohony osy Y je použitím řemenového převodu. Téměř totožná konstrukce jako v případě osy X. Servomotor přes převodovku pohání hnací řemenici.

Druhá řemenice doplňuje řemenový převod a slouží k napínání řemene. Pohyblivá část je spojena s řemenem, čímž se při otáčení řemenic posouvá. Hlavní rozdíl oproti předchozí variantě je v umístění motoru. Zatímco v konstrukci s pastorkem je motor umístěn na pohyblivém tělese a dochází k odvalování po hřebenu, tak u řemenového převodu je motor umístěn na portálu. (LEDR, 2018)



Obr. 3 Portál osy Y, který je umístěn na spodním rámu s válečkovou dráhou

Na pohyblivé části osy Y je umístěn svislý posuv. Pro účely popisu považován za osu Z. Zde pohon začíná opět u synchronního motoru s převodovkou, který pohání pohybový šroub. Na pohyblivé části osy Z jsou umístěny nástroje pro obrábění. Každý nástroj je upnut na píst pneumatického válce, který ho vysouvá do definované pracovní polohy. Tím je vložena možnost ovládat zcela nezávisle nástroje. Dle řídicího programu jsou vysouvány podle potřeby jednotlivé druhy vrtáků. (LEDR, 2018)



Obr. 4 Saně posouvající se příčně po portálu, na němž je umístěn svislý posuv Z

Pro posuvy všech hlavních os jsou zvoleny servomotory typu AM8543 od firmy Beckhoff.

Statický moment	$M_s$	5,56	Nm
Jmenovitý moment	$M_0$	5,3	Nm
Jmenovité otáčky	$n_0$	2500	ot/min
Jmenovitý výkon	$P_0$	1,39	kW
Špičkový moment	$M_{max}$	28	Nm
Statický proud	$I_s$	2,9	A
Špičkový proud	$I_{max}$	16,6	A
Momentová konstanta	$K_M$	1,94	Nm/A
Napěťová konstanta	$K_V$	136	mV/ot/min
Počet pólů	$p$	8	-
Moment setrvačnosti rotoru	$J$	6,43	kg.cm <sup>2</sup>
Hmotnost	$m$	5,9	kg
Napájení	400 VAC		

Tab. 1 Tabulka parametrů motoru AM8543 (Beckhoff)

Převodovka, umístěná za motorem, je typu LP090S-MF1-10-0G1 od firmy Wittenstein. Jde o malé planetové převodovky se sníženou vůlí mezi zuby.

Převodový poměr	$i$	10	-
Úhlová vůle mezi zuby	$\psi$	0°8'	-
Jmenovitý moment	$M_0$	45	Nm
Maximální moment	$M_{max}$	90	Nm
Kritický moment	$M_e$	190	Nm
Průměrný moment bez zátěže	$M_b$	0,4	Nm
Maximální axiální síla	$F_{a_{max}}$	1900	N
Maximální radiální síla	$F_{r_{max}}$	2400	N
Jmenovité vstupní otáčky	$n_1$	3400	ot/min
Maximální vstupní otáčky	$n_{1_{max}}$	6000	ot/min
Účinnost	$\eta$	97	%
Hmotnost	$m$	4	kg
Torzní tuhost	$C_{t21}$	8,5	Nm/arcmin
Moment setrvačnosti	$J$	1,4	kg.cm <sup>2</sup>

Tab. 2 Tabulka parametrů převodovky LP090S (Wittenstein)

## 2 FYZIKÁLNÍ POZADÍ

Sestavovaný virtuální model stroje vychází se základních fyzikálních principů. Při popisu jsou uplatněny zejména jevy z oblasti dynamiky těles a jejich soustav. Dále také teorie kmitajících systémů a poddajných těles. Okrajově byla použita i teorie popisu tekutinových systémů.

### 2.1 Dynamika tuhého tělesa

Tuhé těleso považujeme při popisu jeho dynamiky za soustavu hmotných bodů, které mají mezi sebou konstantní vzdálenosti. Těleso se působením vnějších sil nedeformuje a frekvence působících sil je mnohem nižší než nejnižší vlastní frekvence soustavy. K popisu chování tuhého tělesa využijeme vztahy pro popis soustavy hmotných bodů. Sumu  $N$  hmotných bodů o hmotnosti  $m_i$  nahradíme intergrálem přes nekonečný počet bodů s elementární hmotností. (VALÁŠEK, 2004)

$$m = \int_m dm = \int_V \rho dV \quad [1]$$

Pohybové rovnice pro libovolné tuhé těleso lze odvodit ze zákona zachování hybnosti a zákona zachování momentu hybnosti. Obecné vyjádření zákona zachování hybnosti pro kontinuum. (Ing. PLEŠEK, 2015)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{V_t} \vec{b} dV_t + \int_{S_t} \vec{t} dS_t \quad [2]$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \vec{v} dV_t = \int_{V_t} \vec{b} dV_t + \int_{S_t} \vec{t} dS_t \quad [3]$$

$$\int_{V_t} \rho \vec{a} dV_t = \int_{V_t} \vec{b} dV_t + \int_{S_t} \vec{t} dS_t \quad [4]$$

Aplikováním uvedeného obecného vztahu [4] na tuhé těleso je získána jednodušší forma vyjádření. Tuhé těleso je nedeformovatelné, tudíž není potřeba rozlišovat mezi objemovou a povrchovou silou, stejně tak předpokládáme konstantní hustotu v celém objemu tělesa, takže integrál přes objem dává hmotnost tělesa  $m$ . (VALÁŠEK, 2004)

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^E \quad [5]$$

Rovnice rotačního pohybu vychází ze zákona zachování momentu hybnosti. (Ing. PLEŠEK, 2015)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \vec{\xi} \times \rho \vec{v} dV_t = \int_{V_t} \vec{\xi} \times \vec{b} dV_t + \int_{S_t} \vec{\xi} \times \vec{t} dS_t \quad [6]$$

Stejným způsobem lze aplikovat obecný zápis zákona na tuhé těleso. Získá se tím zjednodušený vztah. (VALÁŠEK, 2004)

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i \times \rho \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i \times \vec{F}_i^E \quad [7]$$

$$\frac{dL_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{is}^E \quad [8]$$

$$\frac{d^1 L_s}{dt} = \frac{d(\underline{S}_{12} {}^2 L_s)}{dt} = \dot{\underline{S}}_{12} {}^2 L_s + \underline{S}_{12} \frac{d^2 L_s}{dt} = \underline{S}_{12} {}^2 \underline{\Omega}_{12} {}^2 L_s + \underline{S}_{12} {}^2 \underline{I}_s {}^2 \underline{\dot{\omega}}_{12} \quad [9]$$

$$\frac{d^1 L_s}{dt} = \underline{S}_{12} ({}^2 \underline{\Omega}_{12} {}^2 L_s + {}^2 \underline{I}_s {}^2 \underline{\dot{\omega}}_{12}) = \underline{S}_{12} ({}^2 \underline{I}_s {}^2 \underline{\dot{\omega}}_{12} + {}^2 \underline{\omega}_{12} \times {}^2 \underline{I}_s {}^2 \underline{\omega}_{12}) \quad [10]$$

$${}^a \underline{I}_s {}^a \underline{\alpha}_{12} + {}^a \underline{\omega}_{12} \times {}^a \underline{I}_s {}^a \underline{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^n {}^a M_{is}^E \quad [11]$$

Pohybové rovnice tělesa v prostoru [5] a [11] popisují obecně volné tuhé těleso se 6 stupni volnosti a nazývají se Newton-Eulerovy rovnice. Reálná tělesa jsou vždy omezena v pohybu interakcí s ostatními tělesy. Kontakty více těles jsou uskutečňovány pomocí kinematických vazeb. Každá z nich omezuje určitý počet stupňů volnosti tělesa podle svého uspořádání.

Druhým způsobem popisu jsou Lagrangeovy rovnice, které reprezentují analytický přístup, kdy rovnice jsou odvozeny pomocí energetických veličin. Pohybující se hmoty popíšeme pomocí kinetické energie  $E_k$  a akumulaci energie v pružinách potenciální energií  $E_p$ . Vnější silové účinky jsou popisovány principem virtuálních prací nebo virtuálních výkonů. Přístup, ve kterém převádíme veškerý pohyb všech členů na nezávislé souřadnice, je přes Lagrangeovy rovnice II. druhu. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \quad [12]$$

kde  $q$  jsou nezávislé souřadnice,  $\dot{q}$  nezávislé rychlosti a  $Q$  zobecněné síly.

Tímto způsobem vznikají vlastní pohybové rovnice soustavy, které lze přímo řešit, zejména numerickými metodami. Ovšem sestavování rovnic tímto způsobem je obtížně

algoritmizovatelné. Pro využití ve výpočetní technice jsou nejvhodnější Lagrangeovy rovnice smíšeného typu. (BRDIČKA, a další, 1987)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial s_j} = Q + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j} \quad [13]$$

kde  $s_j$  jsou souřadnice popisující soustavu,  $\dot{s}_j$  derivace zavedených souřadnic,  $\lambda_k$  Lagrangeovy multiplikátory,  $f_k$  vazbové rovnice a  $r$  počet vazbových rovnic.

Dosažením za kinetickou energii a po jejím zderivování se dostane maticový zápis téže rovnice. (BRDIČKA, a další, 1987)

$$\underline{M}(\underline{s}) \underline{\ddot{s}} = \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) + \underline{J}^T \underline{\lambda} \quad [14]$$

V této rovnici jsou dva neznámé vektory. Je potřeba mít další rovnice pro získání hodnot závislých zrychlení  $\underline{\ddot{s}}$  a Lagrangeových multiplikátorů  $\underline{\lambda}$ . Další sada rovnic, která je k dispozici, pro řešení soustavy jsou vazbové podmínky mezi tělesy mechanismu. Pro řešení je ale potřeba rovnice pro závislá zrychlení, tudíž se provede druhá derivace vazbových rovnic. [15] Maticově je lze zapsat takto.

$$\underline{f}(\underline{s}) = \underline{0} \quad [15]$$

$$\underline{J}(\underline{s}) \underline{\dot{s}} = \underline{0} \quad [16]$$

$$\underline{J}(\underline{s}) \underline{\ddot{s}} + \underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} = \underline{0} \quad [17]$$

Pomocí těchto dvou rovnic lze sestavit celkové řešení soustavy.

$$\begin{bmatrix} \underline{M}(\underline{s}) & \underline{J}^T(\underline{s}) \\ \underline{J}(\underline{s}) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{s}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \\ -\underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} \end{bmatrix} \quad [18]$$

Takto vytvořená soustava je však náchylná na numerickou nestabilitu. K řešení jsou použity místo původních vazbových podmínek jejich druhé derivace a může být ztracena informace o konstantách a lineárních závislostech. V každém časovém kroku výpočtu je proto nutné kontrolovat míru splnění vazbových podmínek. Řešení je možné upravit různými způsoby. Mezi hlavní metody patří numerický převod do nezávislých souřadnic a Baumgartova stabilizace. (STEJSKAL, a další, 1996)

### 2.1.1 Numerický převod do nezávislých souřadnic

Algoritmus převodu do nezávislých souřadnic řeší soustavu s plným splněním vazbových rovnic. Ze zavedených nadbytečných souřadnic  $\underline{s}$  jsou pomocí matice numerického převodu  $\underline{T}$  vybírány souřadnice nezávislé. Definiční vztah platí i pro rychlostní a akcelerační podobu, protože matice  $\underline{T}$  je konstantní.



$$\underline{q} = \underline{T} \underline{s} \quad [19]$$

$$\underline{\dot{q}} = \underline{T} \underline{\dot{s}} \quad [20]$$

$$\underline{\ddot{q}} = \underline{T} \underline{\ddot{s}} \quad [21]$$

Matici  $\underline{T}$  lze získat přímou volbou nezávislých souřadnic a jejím zadáním. Lze také využít algoritmus pro exaktní výběr nezávislých souřadnic založený na singulárním rozkladu Jacobiho matice.

Základem numerického převodu soustavy do nezávislých souřadnic je propojení vazbových podmínek s volbou nezávislých souřadnic. Derivací vazbových rovnic je získána Jacobiho matice. Obdobnou rovnicí dává rychlostní podoba převodu souřadnic. (STEJSKAL, a další, 1996)

$$\underline{J}(\underline{s}) \underline{\dot{s}} = \underline{0} \quad [22]$$

$$\underline{T} \underline{\dot{s}} = \underline{\dot{q}} \quad [23]$$

Tyto dvě maticové rovnice lze přepsat do jedné.

$$\begin{bmatrix} \underline{J}(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix} \underline{\dot{s}} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad [24]$$

Ze vztahu jsou vyjádřeny závislé souřadnice jako funkce souřadnic nezávislých.

$$\underline{\dot{s}} = \begin{bmatrix} \underline{J}(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} = [\underline{R}^*(\underline{s}) \quad \underline{R}(\underline{s})] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad [25]$$

$$\underline{\dot{s}} = \underline{R}(\underline{s}) \underline{\dot{q}} \quad [26]$$

Aby mohl být proveden uvedený krok, je nutné, aby matice  $\begin{bmatrix} \underline{J}(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix}$  byla regulární a tudíž invertovatelná. Tato vlastnost by měla být kontrolována v každém kroku výpočtu. Takto odvozená matice  $\underline{R}(\underline{s})$  je ortogonální vůči Jacobiho matici. Tuto vlastnosti si lze ověřit dosazením vztahu [26] do rovnice [22]. Aby tato nová rovnice mohla být splněna, součin  $\underline{J}(\underline{s})\underline{R}(\underline{s})$  musí být nulový, protože nezávislé souřadnice mohou nabývat libovolné hodnoty. Pro dosazení do rovnice [14] je potřeba vyjádřit ještě zrychlení závislých souřadnic. Vychází se z rovnic [22],[20] a provede se jejich časová derivace. (STEJSKAL, a další, 1996)

$$\underline{J}(\underline{s}) \underline{\ddot{s}} + \underline{J}'(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} = \underline{0} \quad [27]$$

$$\underline{T} \underline{\ddot{s}} = \underline{\ddot{q}} \quad [28]$$

Dále se postupuje analogicky jako v přechozím vyjádření závislých rychlostí.

$$\begin{bmatrix} \underline{J}(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix} \underline{\ddot{s}} = \begin{bmatrix} -\underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} \\ \underline{\ddot{q}} \end{bmatrix} \quad [29]$$

$$\underline{\ddot{s}} = \begin{bmatrix} \underline{J}(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} \\ \underline{\ddot{q}} \end{bmatrix} = [\underline{R}^*(\underline{s}) \quad \underline{R}(\underline{s})] \begin{bmatrix} -\underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} \\ \underline{\ddot{q}} \end{bmatrix} = -\underline{R}^*(\underline{s}) \underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} + \underline{R}(\underline{s}) \underline{\ddot{q}} \quad [30]$$

Odvozené vztahy pro závislé rychlosti a závislá zrychlení se dosadí do rovnice [14] a vyjádří se soustava v nezávislých souřadnicích. (STEJSKAL, a další, 1996)

$$\underline{M}(\underline{s}) \underline{\ddot{s}} = \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) + \underline{J}^T \underline{\lambda} \quad [31]$$

$$\underline{M}(\underline{s}) \left[ -\underline{R}^*(\underline{s}) \underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} + \underline{R}(\underline{s}) \underline{\ddot{q}} \right] = \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) + \underline{J}^T \underline{\lambda} \quad [32]$$

$$\underline{R}^T(\underline{s}) \underline{M}(\underline{s}) \left[ -\underline{R}^*(\underline{s}) \underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} + \underline{R}(\underline{s}) \underline{\ddot{q}} \right] = \underline{R}^T(\underline{s}) \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) + \underline{R}^T(\underline{s}) \underline{J}^T \underline{\lambda} \quad [33]$$

$$\underline{R}^T(\underline{s}) \underline{M}(\underline{s}) \underline{R}(\underline{s}) \underline{\ddot{q}} = \underline{R}^T(\underline{s}) \underline{M}(\underline{s}) \underline{R}^*(\underline{s}) \underline{j}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \underline{\dot{s}} + \underline{R}^T(\underline{s}) \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \quad [34]$$

$$\underline{M}_q \underline{\ddot{q}} = \underline{J}_q + \underline{p}_q \quad [35]$$

### 2.1.2 Baumgartova stabilizace

Metoda Baumgartovy stabilizace pohlíží na řešenou soustavu jako na diferenciální rovnici řízeného systému. Matematicky je tato metoda jednodušší než převod rovnice do nezávislých souřadnic, ale zajištění stability řešení není tak spolehlivé. Při klasickém řešení Lagrangeových rovnic je použita druhá derivace vazbových rovnic [17]. Lze ji také zapsat pouze jako derivaci vazbových podmínek. (BRDIČKA, a další, 1987)

$$\underline{\dot{f}} = 0 \quad [36]$$

Z hlediska přístupu Baumgartovou stabilizací představuje tato rovnice dynamický systém šíření chyb, který je na mezi stability. Lze se o tom přesvědčit nalezením pólů systému.

$$\lambda^2 = 0 \quad [37]$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad [38]$$

Pro příznivější chování numerických chyb je zavedena upravená diferenciální rovnice druhého řádu tvořící tlumený systém s volitelnými konstantami. Hodnoty těchto konstant jsou následně voleny tak, aby vznikl silně tlumený systém šíření chyb.

$$\ddot{f} + 2\alpha \dot{f} + \beta^2 f = 0 \quad [39]$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0 \quad [40]$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \frac{\sqrt{4\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad [41]$$

Do rovnice [39] se dosadí derivace vazbových rovnic [16] a [17]. Vyjádří se soustava rovnic jako [18], ale s rozdílnou pravou stranou. V ní jsou obsaženy konstanty diferenciální rovnice šíření chyb. (STEJSKAL, a další, 1996)

$$\begin{bmatrix} \underline{M}(\underline{s}) & \underline{J}^T(\underline{s}) \\ \underline{J}(\underline{s}) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{s}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}(\underline{s}, \underline{\dot{s}}) \\ -\underline{J}(\underline{s}, \underline{\dot{s}})\underline{\dot{s}} - 2\alpha\underline{J}(\underline{s})\underline{\dot{s}} - \beta^2\underline{f}(\underline{s}) \end{bmatrix} \quad [42]$$

## 2.2 Dynamika poddajného tělesa

Chování poddajných těles se zabývá oblast pružnosti a pevnosti. V základní podobně jde o statická zatížení působící na danou soustavu a zjišťování jejich deformací. Konstrukce musí být pro numerické zpracování vždy nejdříve diskretizována. Proces diskretizace je aplikován na kontinuum, které je tím rozděleno do menších topologicky jednoduchých podoblastí a lze tak pro ně snadno vyjádřit analytické vztahy. Tyto menší podoblasti se nazývají prvky a tvoří základní kameny výpočetní metody MKP<sup>1</sup>. Při hledání závislosti mezi zatížením součástí a její deformací se lze vždy dopracovat k základnímu vztahu. (KANÓCZ, a další, 2007)

$$\underline{K} \underline{X} = \underline{f} \quad [43]$$

kde je  $\underline{K}$  matice tuhosti,  $\underline{X}$  vektor pole posunutí a  $\underline{f}$  vektor vnějších sil

Řešením této soustavy lze získat pole posunutí jednotlivých diskretizovaných bodů prvků. Pro popis dynamického chování je nutné přidat setrvačné síly, které působí při zrychlení diskretizovaných bodů. Aplikováním D'Alembertova principu jsou tyto síly zavedeny a jsou poskládány matice hmotnosti  $\underline{M}$  pro jednotlivé prvky. V reálných dynamických dějích dochází i k disipaci části energie a tím k tlumení pohybu. Pro popis disipace v lineárních soustavách, byla zavedení síla viskózního tlumení, která je funkcí rychlosti pohybu. Pomocí ní je na jednotlivých prvcích poskládána matice tlumení  $\underline{B}$ . Vznikne rozšířená základní rovnice [43] o tyto členy. (KANÓCZ, a další, 2007)

$$\underline{M} \underline{\ddot{X}} + \underline{B} \underline{\dot{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{f} \quad [44]$$

kde  $\underline{M}$  je matice hmotnosti,  $\underline{B}$  matice tlumení.

Rovnice kmitajících soustav lze sestavovat různými přístupy. Základní přístup vycházejících z vektorové mechaniky je pomocí uvolnění jednotlivých těles použití Newton-Eulerových rovnic.

---

<sup>1</sup> Metoda konečných prvků

$$m\underline{a}_s = \sum_{i=1}^n F_i^E \quad [45]$$

$${}^a\underline{I}_s {}^a\underline{\alpha}_{12} + {}^a\underline{\omega}_{12} \times {}^a\underline{I}_s {}^a\underline{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^n {}^aM_{is}^E \quad [46]$$

Druhým přístupem jsou Lagrangeovy rovnice. Pohybující se hmoty se popíší pomocí kinetické energie  $E_k$ , disipovaná energii v tlumení se popíše pomocí Rayleighovy disipativní funkce  $R$  a akumulaci energie v pružinách potenciální energií  $E_p$ . Vnější silové nepotenciální účinky jsou popisovány principem virtuálních prací nebo virtuálních výkonů. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = \underline{Q}^* \quad [47]$$

Další přístupy k přímému sestavování rovnic již vycházejí z energetického přístupu analytické mechaniky. Jedná se zejména o rovnice umožňující přímý výpočet jednotlivých koeficientů matice hmotnosti, tuhosti a tlumení. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad [48]$$

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad [49]$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \quad [50]$$

Přístupy k sestavení rovnic lze zvolit různé, ale pokud jsou všechny prvky soustavy lineární, tak vznikne výsledná soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu.

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{B} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{f} \quad [51]$$

kde  $\underline{M}$  je matice hmotnosti,  $\underline{B}$  matice tlumení,  $\underline{K}$  matice tuhosti a  $\underline{f}$  vektor vnějších sil.

Základní analýzou lineárních kmitajících systémů je určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů soustavy. Tím je získána informace o kritických frekvencích pro budící síly. V této analýze se vychází z volné netlumené soustavy. (VALÁŠEK, 2004)

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{0} \quad [52]$$

Provede se odhad řešení vlastních kmitů

$$\underline{X} = \underline{a} \sin(\Omega t) \quad [53]$$

$$\ddot{\underline{X}} = -\Omega^2 \underline{a} \sin(\Omega t) \quad [54]$$

Dosadí se do soustavy rovnic

$$-\underline{M} \Omega^2 \underline{a} \sin(\Omega t) + \underline{K} \underline{a} \sin(\Omega t) = \underline{0} \quad [55]$$

$$(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) \underline{a} = \underline{0} \quad [56]$$

Vzniklá soustava má jedno triviální řešení pro  $\underline{a} = \underline{0}$ . V tomto případě by se však jednalo o statickou rovnováhu a z hlediska dynamiky by nebylo co řešit. Druhé netriviální řešení je v případě, že determinant  $(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M})$  bude nulový. Tento determinant se nazývá frekvenční. (VALÁŠEK, 2004)

$$\det|\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}| = 0 \quad [57]$$

Vlastní frekvence se určí jako vlastní čísla matice, kdy platí  $\lambda_v = \Omega_v^2$ . Zpětným dosazením do rovnice [56] lze dopočítat vlastní vektory náležející jednotlivým vlastním číslům a tím určit jednotlivé vlastní tvary kmitu soustavy.

$$(\underline{K} - \Omega_v^2 \underline{M}) \underline{a}_v = \underline{0} \quad [58]$$

Pro další používání se vlastní vektory normují podle ortogonality.

$$\underline{u}_v^T \underline{M} \underline{u}_v = 1 \quad [59]$$

$$\underline{u}_v^T \underline{K} \underline{u}_v = \Omega_v^2 \quad [60]$$

Vlastní vektor  $\underline{a}_v$  je normován na vektor  $\underline{u}_v$  odvozeným vztahem. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$\underline{u}_v = \frac{\underline{a}_v}{\sqrt{\underline{a}_v^T \underline{M} \underline{a}_v}} \quad [61]$$

Vlastní tvary kmitu i vlastní frekvence lze zapsat maticově. Získá se tím spektrální matice  $\underline{\Omega}^2$  a modální matice  $\underline{U}$ , které jsou definovány vztahy [62].

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\Omega}_n^2 \end{bmatrix} \quad \underline{U} = [\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \dots \quad \underline{u}_n] \quad [62]$$

Při aplikování matic na zápisy [59] a [60] vzniknou vztahy mezi maticí hmotnosti, tuhosti, spektrální maticí a modální maticí.

$$\underline{U}^T \underline{M} \underline{U} = \underline{I} \quad [63]$$

$$\underline{U}^T \underline{K} \underline{U} = \underline{\Omega}^2 \quad [64]$$

S využitím vztahů [63] a [64] lze analyticky snadno řešit i tlumené kmitající soustavy. Hlavní požadavek je, aby tlumení v soustavě bylo proporcionální a matice  $\underline{B}$  byla diagonalizovatelná. Musí být splněna podmínka [65]. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$\underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{B} = \underline{B} \underline{M}^{-1} \underline{K} \quad [65]$$

Zavádí se transformace fyzikálních souřadnic do modálních souřadnic pomocí modální matice.

$$\underline{X} = \underline{U} \underline{q}_m \quad [66]$$

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{B} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{0} \quad [67]$$

$$\underline{M} \underline{U} \ddot{\underline{q}}_m + \underline{B} \underline{U} \dot{\underline{q}}_m + \underline{K} \underline{U} \underline{q}_m = \underline{0} \quad [68]$$

$$\underline{U}^T \underline{M} \underline{U} \ddot{\underline{q}}_m + \underline{U}^T \underline{B} \underline{U} \dot{\underline{q}}_m + \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} \underline{q}_m = \underline{0} \quad [69]$$

$$\ddot{\underline{q}}_m + \underline{\Delta} \dot{\underline{q}}_m + \underline{\Omega}^2 \underline{q}_m = \underline{0} \quad [70]$$

V takto transformovaném vztahu jsou všechny matice koeficientů diagonální. Soustavu lze tudíž řešit jako  $n$  samostatných diferenciálních rovnic.

$$\ddot{q}_{mv} + 2b_{rv}\Omega_v \dot{q}_{mv} + \Omega_v^2 q_{mv} = 0 \quad v = 1, 2 \dots n \quad [71]$$

Řešení lze následně již převzít z řešení volných kmitů soustavy s jedním stupněm volnosti. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$q_{mv} = e^{-b_{rv}\Omega_v t} \left[ \left( \cos(\Omega_{bv} t) + \frac{b_{rv}}{\sqrt{1 - b_{rv}^2}} \sin(\Omega_{bv} t) \right) q_{v0} + \frac{\dot{q}_{v0}}{\Omega_{bv}} \sin(\Omega_{bv} t) \right] \quad [72]$$

Toto řešení lze zapsat zpět do maticového tvaru.

$$\underline{q}_m = \underline{E}_t \left[ (\underline{c} \cos_{bt} + \underline{b}_r \sin_{bt}) \underline{q}_{m0} + \underline{\Omega}_b^{-1} \underline{\sin}_{bt} \dot{\underline{q}}_{m0} \right] \quad [73]$$

Pomocí zpětné modální transformace je získáno řešení pro požadované fyzikální souřadnice. (STEJSKAL, a další, 2003)

$$\underline{X}(t) = \underline{U} \underline{E}_t \left[ (\underline{c} \cos_{bt} + \underline{b}_r \sin_{bt}) \underline{U}^T \underline{M} \underline{X}_0 + \underline{\Omega}_b^{-1} \underline{\sin}_{bt} \underline{U}^T \underline{M} \underline{v}_0 \right] \quad [74]$$

Odvozené analytické řešení volných kmitů tlumené soustavy lze využít pro kontrolu správnosti numerického řešení implementovaného v programu. Soustavě se nastaví stejné počáteční podmínky a vypnou se všechny vnější budící účinky. Výsledky těchto dvou řešení by se měly lišit pouze o chybu numerické náhrady derivace.

## 2.3 Tekutinové systémy

Popis chování pneumatického systému vychází z teorie mnohopólového modelování. Toková veličina je tvořena objemovým průtokem  $Q(t)$  a spádovou veličinu tvoří rozdíl tlaků  $\Delta p$ . Pro zjednodušený mnohopólový popis pneumatického systému jsou zavedeny určité předpoklady. (VALÁŠEK, 1996)

- Proudové trubice lze popsat modelem se soustředěnými parametry
- Proudové pole lze popsat jednorozměrně
- Změny tlaku a objemu probíhají v celé proudové trubici současně

Tyto předpoklady lze použít, pokud je délka potrubí zanedbatelná vůči délce postupné vlny  $\gamma$ .

$$l \ll \frac{\gamma}{4} = \frac{c}{4f} \quad [75]$$

kde  $l$  je délka potrubí,  $c$  rychlost šíření tlakového vzruchu v tekutině a  $f$  frekvence časových změn signálu. (VALÁŠEK, 1996)

Pokud uvedená podmínka není splněna, je nutno rozložit proudovou trubici na více částí tak, aby na těchto dílčích úsecích podmínka splněna byla. Pro popis chování tekutinového systému vycházíme ze základních fyzikálních zákonů pro popis kontinua.

Aplikace zákona zachování hmoty je vyjádřena pomocí rovnice kontinuity. (Ing. PLEŠEK, 2015)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\xi} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad [76]$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny a  $\vec{v}$  rychlost proudění tekutiny

Zákon zachování hybnosti, pomocí kterého je vyjádřena obecná pohybová rovnice kontinua. (Ing. PLEŠEK, 2015)

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{b} = \rho \dot{\vec{v}} \quad [77]$$

kde  $\underline{\underline{\sigma}}$  je napětí v tekutině vyvolané vnějším působením,  $\vec{b}$  vektor objemové síly a  $\dot{\vec{v}}$  materiálová derivace rychlostního pole proudu tekutiny

Zákon zachování energie vyjadřuje bilanci mezi mechanickou, tepelnou a vnitřní energií tekutiny. (Ing. PLEŠEK, 2015)

$$\kappa - \text{div} \vec{h} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = \rho \dot{u} \quad [78]$$

kde  $\kappa$  je tepelný zdroj,  $\vec{h}$  tepelný vektor,  $\underline{\underline{D}}$  je symetrická část rychlostního gradientu tekutiny a  $\dot{u}$  materiálová derivace měrné vnitřní energie.

Tekutinové mechanismy přenášejí zejména energii tlakovou  $E_p$ . Při průchodu jednotlivými prvky a trubicemi se tato vstupní energie přeměňuje jiné druhy. Na základě těchto přeměn se rozlišují různé druhy odporů. Disipací energie a její přeměnou na tepelnou energii je charakterizován odpor proti pohybu tekutiny. Zvyšováním kinetické energie je popsán odpor proti zrychlení částic tekutiny a třetí složku tvoří odpor proti deformaci, který charakterizuje změnu objemu při změně tlaku. (VALÁŠEK, 1996)

V mnohopólovém modelování je odpor proti pohybu analogií k elektrickému odporu. Pro tekutinové systémy je definován rovnicí [79].

$$R_h = \frac{dp}{dQ} \quad [79]$$

Pomocí veličiny odporu lze vyjádřit tlakový úbytek na použitých prvcích systému. Odpor může být lineární  $n = 1$ , pokud předpokládáme laminární proudění nebo kvadratický  $n = 2$ , pokud je předpoklad vzniku vírů a turbulencí.

$$\Delta p = R_h Q^n \quad [80]$$

Hodnoty odporu proti pohybu  $R$  jsou získávány praktickým měřením na reálných prvcích nebo za použití CFD simulací. Pro některé jednodušší geometrie a laminární proudění lze i hodnotu odporu  $R$  vyjádřit analyticky. Jako příklad lze uvést proudění v kruhové trubici. (NOŽIČKA, 2007)

$$R_{h_{lam}} = \frac{128\nu}{\pi d^4} L \rho \quad [81]$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita tekutiny,  $d$  průměr trubice,  $L$  délka trubice a  $\rho$  hustota tekutiny.

Odpor proti zrychlení popisuje přeměnu tlakové energie  $E_p$  na energii kinetickou  $E_k$ . V mnohopólovém modelování je analogií k indukčnosti cívky.

$$H = \frac{\Delta p}{\dot{Q}} \quad [82]$$

Obdobně jako pro veličinu  $R$  lze pomocí odporu proti zrychlení vyjádřit tlakový úbytek. (VALÁŠEK, 1996)

$$\Delta p = H \frac{dQ}{dt} \quad [83]$$

Hodnotu součinitele  $H$  lze vyjádřit ze zákona zachování energie pro jednorozměrné proudění. (NOŽIČKA, 2007)

$$E_p + E_k = konst. \quad [84]$$

$$Vp + \frac{1}{2}mv^2 = konst. \quad [85]$$

$$Vp + \frac{1}{2}m \left( \frac{\dot{V}}{S} \right)^2 \quad [86]$$

$$\dot{V}p + V\dot{p} + \frac{1}{2} \frac{m}{S^2} 2\dot{V}\ddot{V} = 0 \quad [87]$$

Při předpokladu  $\dot{p} = 0$  a  $\dot{V} = Q$  lze psát upravený tvar.

$$Qp + \frac{m}{S^2} Q\dot{Q} = 0 \quad [88]$$



$$p = -\frac{m}{S^2}\dot{Q} = H\dot{Q} = H\frac{dQ}{dt} \quad [89]$$

Třetí přeměna tlakové energie vyvolá změnu objemu tekutiny, dochází tedy k její přeměně na deformační energii. Parametrem popisujícím tuto přeměnu je odpor proti deformaci, který má analogii s elektrickou kapacitou kondenzátoru. (VALÁŠEK, 1996)

$$D = \frac{dp}{dV} = \frac{\dot{p}}{\dot{V}} = \frac{\dot{p}}{Q} \quad [90]$$

Deformací tekutiny vzniká tok částic.

$$Q = \frac{1}{D} \frac{dp}{dt} \quad [91]$$

Na hodnotu odporu  $D$  má vliv spousta vnější vlivů. Mezi nimi jsou například takové vlivy, zda se jedná o expanzi nebo kompresi, či podle kterého termodynamického děje změna objemu probíhá. Pro kapaliny se používá vztah. (VALÁŠEK, 1996)

$$D = \frac{V}{E_a} \quad [92]$$

kde  $E_a$  je adiabatický modul objemové pružnosti kapaliny.

V případě pneumatických systémů vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu. (NOŽIČKA, 1998)

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad [93]$$

Pro izotermický děj lze odvodit, že odpor proti deformaci lze vyjádřit.

$$D = -rT\rho^2 \quad [94]$$

kde  $r$  je univerzální plynová konstanta,  $T$  termodynamická teplota a  $\rho = \frac{1}{v}$  hustota plynu.

Při sestavování tekutinových obvodů a pro popis jejich chování jsou používány dva zákony, které jsou přímou analogií s prvním a druhým Kirchhoffovým zákonem v elektrických obvodech. Prvním z nich je Zákon o uzlech, který bilancuje průtoky v uzlech. (VALÁŠEK, 1996)

*„Jestliže se v nějakém uzlu stýká více tekutinových proudů, pak algebraický součet jejich průtoků v je v daném uzlu roven nule.“<sup>2</sup>*

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad [95]$$

Druhým zmíněný je Zákon o okruzích, který bilancuje tlakové spády.

---

<sup>2</sup> (VALÁŠEK, 1996) str. 54

*„Algebraický součet tlakových spádů v každém uzavřeném okruhu hydraulického obvodu je roven nule.“<sup>3</sup>*

$$\sum_{k=1}^m \Delta p_k = 0 \quad [96]$$

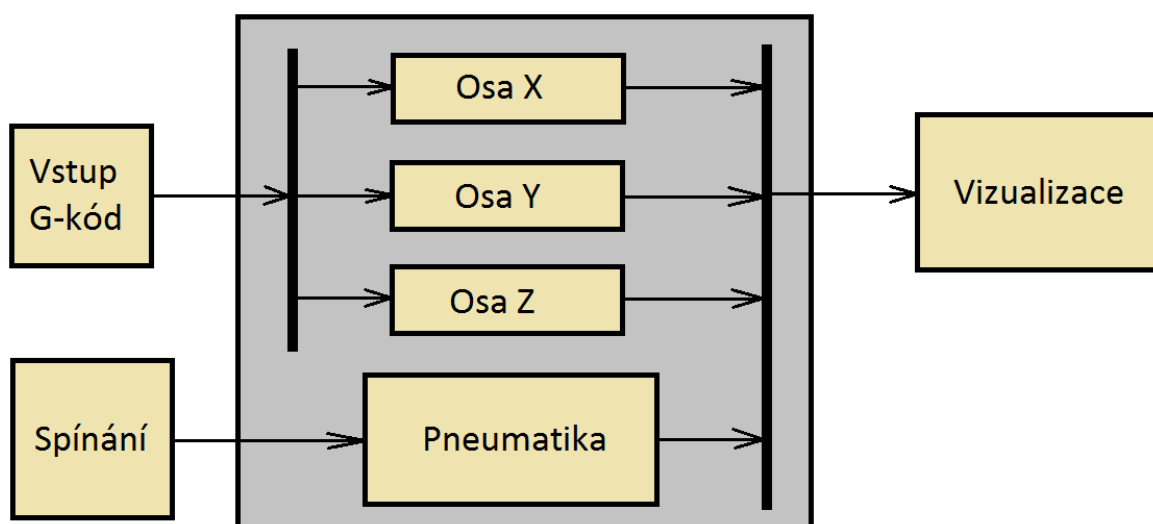
S použitím výše uvedených vztahů lze sestavovat diferenciální rovnice pro hydraulické a pneumatické systémy. Včetně popisu přestavování rozvaděčů, dynamiky vysouvání pístů lineárních pohonů a průběhů vyrovnávání tlaku.

---

<sup>3</sup> (VALÁŠEK, 1996) str. 54

### 3 MATEMATICKÁ SIMULACE

Celý stroj se vyznačuje základním rámem, se kterým jsou v kontaktu jednotlivé pohyblivé osy. Modelovaný stroj má v základu 3 osy a tedy posuvné 3 stupně volnosti, které jsou na sobě nezávislé. Vzhledem k této skutečnosti byla každá osa modelovaná ve vlastním dynamickém modelu. Nejdřív byl sestaven obecný numerický řešič pro dynamiku soustavy. Pro řešení pohybových veličin a reakcí byl zvolen přístup přes Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, které mají metody řešení vhodné pro algoritmizaci. Byla zvolena metoda řešení spočívající v numerickém převodu do nezávislých souřadnic.



Obr. 5 Schématické zobrazení matematické simulace

Vstupem do soustavy jsou souřadnice požadované polohy, které mohou být čteny z G-kódu. Vstupují do simulačního bloku, ve kterém je obsažena dynamika a řízení. Na něj je navázán výstupní blok zajišťující vizualizaci mechanické soustavy.

#### 3.1 Numerický řešič rovnic

Řešič byl sestaven tak, aby vstupem a zároveň požadavkem na nastavení programátorem bylo pouze několik funkčních bloků. Celá funkce řešiče se skládá z několika bloků. Vstupní je blok „MechanismDimensions“, kde jsou zadávány rozměry mechanismu, hmotnostní veličiny i další rozměrové nebo silové konstanty. Vstupem do bloku je síla/moment aktuátoru, který se zařazuje do výstupních vektorů. Sestavuje se matice hmotnosti  $\underline{M}$ , vektor obsahující rozměry mechanismu Dimensions a vektor se silovými parametry a vnějšími silami ExternalForce.

Další vstupní funkční blok „ForceVector“, který musí programátor nastavit, je pro sestavení vektoru sil. Vstupují do něj jak již sestavené vektory a matice z bloku „MechanismDimensions“, tak závislé souřadnice a závislé rychlosti ve zpětné vazbě. Uvnitř bloku se dopočítávají silové účinky závislé na poloze nebo rychlosti. Mezi tyto síly patří zejména pasivní odpory nebo síly v pružinách a v tlumičích. Následně jsou všechny silové účinky sestaveny podle působení na daných souřadnicích do vektoru sil.

Třetí vstupní blok sestavuje Jacobiho matici vazeb  $J(\underline{s})$ . Zde je zadána Jacobiho matice tak, jak byla ručně odvozena. Vstupem do bloku je vektor Dimensions s rozměry mechanismu a ve zpětné vazbě také závislé souřadnice  $\underline{s}$ , na kterých může Jacobiho matice záviset.

Dále je nutné již jen nastavit počáteční hodnoty závislých souřadnic  $\underline{s}_0$  a rychlostí  $\underline{\dot{s}}_0$ , počáteční hodnotu Jacobiho matice  $J(\underline{s}_0)$  pro výpočet její časové derivace a matici  $\underline{B}$ , která vybírá nezávislé souřadnice  $\underline{q}$  z vektoru závislých souřadnic  $\underline{s}$ .

Pro samotný numerický převod do nezávislých souřadnic je vytvořen blok „TransformToIndependentCoordinates“. Zde jsou sestaveny rovnice podle výše uvedené teorie převodu do nezávislých souřadnic. Je sestavena matice z Jacobiho  $J$  a výběrové matice  $\underline{B}$  a provedena její inverze.

$$\begin{bmatrix} J(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} J(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} = [\underline{R}^* \quad \underline{R}] \quad [97]$$

$$\underline{\dot{s}} = \begin{bmatrix} J(\underline{s}) \\ \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} = [\underline{R}^* \quad \underline{R}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix} = \underline{R}\underline{\dot{q}} \quad [98]$$

Poté jsou numericky převedeny vstupní matice hmotnosti, Jacobiho matice a vektor sil do tvaru pro nezávislé souřadnice.

$$\underline{M}_q = \underline{R}^T \underline{M} \underline{R} \quad [99]$$

$$\underline{J}_q = \underline{R}^T \underline{M} \underline{R}^* \underline{j} \quad [100]$$

$$\underline{P}_q = \underline{R}^T \underline{P} \quad [101]$$

Pomocí nových matic jsou vypočteny zrychlení v nezávislých souřadnicích. Nezávislé rychlosti jsou poté získány postupnou integrací.

$$\underline{\ddot{q}} = \underline{M}_q^{-1} \cdot (\underline{J}_q \underline{\dot{s}} + \underline{P}_q) \quad [102]$$

$$\underline{\dot{q}} = \int \underline{\ddot{q}} dt \quad [103]$$

Hodnoty rychlostí všech závislých souřadnic jsou poté dopočteny pomocí matice  $\underline{R}$  a použitím vztahu [26], na kterém bylo založeno odvození numerického převodu do nezávislých souřadnic. Závislé souřadnice získáme další numerickou integrací rychlostí.

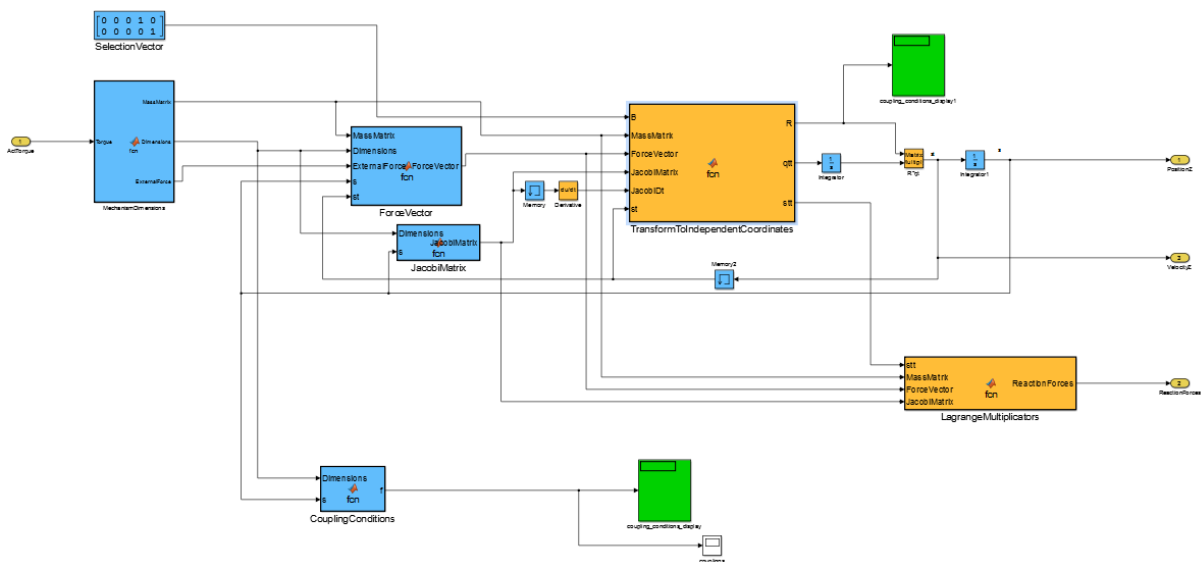
$$\underline{\dot{s}} = \underline{R}\underline{\dot{q}} \quad [104]$$

$$\underline{s} = \int \underline{\dot{s}} dt \quad [105]$$

Takto získané závislé souřadnice a rychlosti jdou do výstupu z bloku a zároveň do zpětné vazby pro výpočet Jacobiho matice a vektoru sil pro následující výpočtový krok.

Výpočtový algoritmus obsahuje ještě jeden funkční blok pro výpočet reakčních sil. Z vypočítaných nezávislých zrychlení  $\underline{\ddot{q}}$  jsou také získávána všechna závislá zrychlení  $\underline{\ddot{s}}$ . Pro tento výpočet je použita výše uvedená rovnice [30], pomocí které byl odvozen převod do nezávislých souřadnic. Získaná závislá zrychlení jsou použita pro výpočet Lagrangeových multiplikátorů, které při popisu fyzikálními souřadnicemi lze interpretovat jako reakční síly. Použita je výchozí rovnice vyplývající z definice Lagrangeových rovnic smíšeného typu. Zrychlení jsou již známa, tak Lagrangeovy multiplikátory zůstávají jedinou neznámou v rovnicích.

$$\underline{\lambda} = \underline{J}^{-T} (\underline{M} \underline{\ddot{s}} - \underline{p}) \quad [106]$$

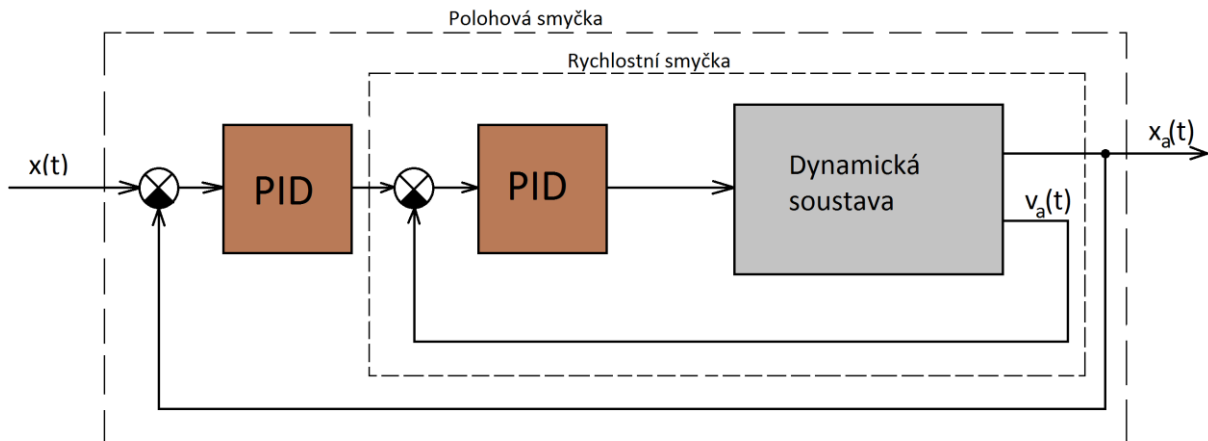


Obr. 6 Simulinkové schéma numerického řešiče

### 3.2 Algoritmus řízení

Vytvořené dynamické modely jednotlivých os jsou vzájemně nezávislé. Každá má navržen samostatný algoritmus řízení. Pro zpětnovazební řízení os obráběcích strojů je

používána kaskádní regulace PID regulátorů. Stejná řídicí smyčka byla zvolena i pro virtuální model.



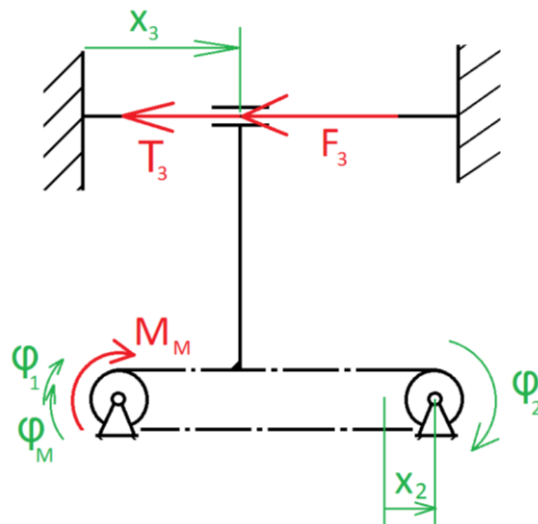
Obr. 7 Schématický obrázek kaskádní regulace

Kaskádní regulace má obvykle 3 úrovně řízení. Nejnižší a nejrychlejší regulační smyčka je pro nastavení elektrického proudu. Přeneseně lze říci, že je díky ní udržován moment na motoru a jde tedy o úroveň integrovanou do samotného motor driveru. Nadřazená smyčka je rychlostní, která udržuje požadovanou rychlost otáčení motoru. Její reakce jsou o něco pomalejší než u proudové smyčky. Vnější regulační smyčka je polohová. Jejím úkolem je zajistit dosažení požadované polohy motoru.

Kaskádní regulace použitá ve virtuálním modelu má použity pouze 2 regulační smyčky. Při sestavování rovnic modelu a řízení bylo vycházeno z předpokladu ideálního motoru. Tedy že změna proudu ovlivní změnu momentu okamžitě, bez přechodového jevu. Proudové časové konstanty jsou tak malé, že by nebylo možné je v časovém kroku dynamické simulace zohlednit.

### 3.3 Osa X

Pohon osy X se skládá z řemenového převodu, pomocí kterého je rotační pohyb motoru převáděn na lineární pohyb unášecí hlavy a obrobku. Soustava je modelována jako jednorozměrná úloha. Hmotnost tělesa X je výpočtově koncentrována na úrovni řemenového pásu, aby nedocházelo ke klopení. Vstupní ovládanou veličinou je krouticí moment hnacího motoru  $M_M$ , který je pomocí převodovky přenášen na hnací řemenici. Výstupní sledovanou veličinou je poloha obrobku  $x$ .



Obr. 8 Model mechanické soustavy osy X

Do modelu řemenového převodu byla zahrnuta celá pohonná část. Pomocí jedné soustavy je modelován vstupní moment od motoru, převodovka, hnací řemenice, hnaná řemenice, posouvané těleso a poddajné řemeny. Vlivem zahrnutých poddajností v řemenu, v převodovce a napínání řemenu vzniká soustava těles se 4 stupni volnosti. Proměnné jsou zvoleny ve vztahu [107].

$$s_X: \{\varphi_m, \varphi_1, \varphi_2, x_3, x_2\} \quad [107]$$

kde  $\varphi_m$  je natočení hřídele motoru,  $\varphi_1$  natočení hnací řemenice,  $\varphi_2$  natočení hnané řemenice,  $x_2$  posunutí hnané řemenice vlivem napínání pásu a  $x_3$  je posun tělesa osy.

S takto zavedenými souřadnicemi vzniká matice hmotnosti o velikosti 5x5.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [108]$$

Pro daný popis a konfiguraci mechanické soustavy byla sestavena pouze jedna vazbová rovnice [110]. Popisuje vztah mezi natočením hřídele motoru a natočením hnací řemenice.

$$n_{vr} = n_s - n_{st} = 5 - 4 = 1 \text{ vazbové rovnice} \quad [109]$$

$$f: \varphi_1 - i\varphi_m = 0 \quad [110]$$

Z vazbové rovnice odvozená Jacobiho matice má rozměr 1x5

$$\underline{J} = [-i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad [111]$$

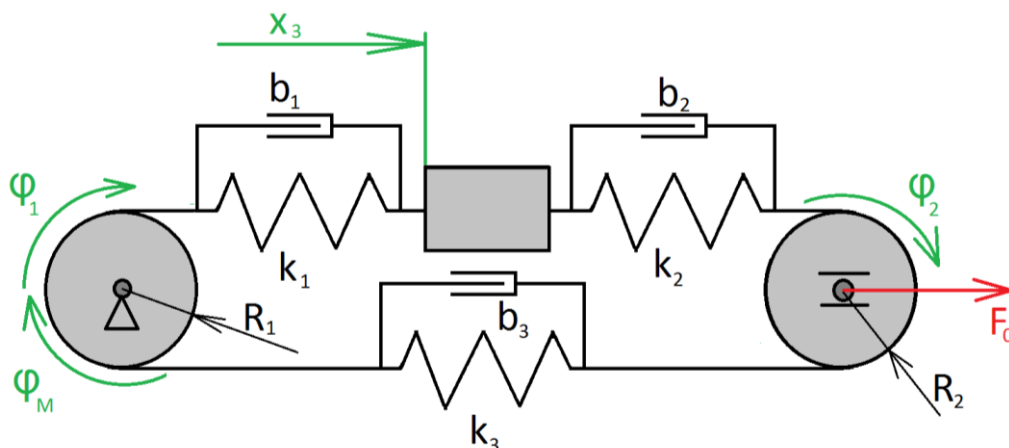
### 3.3.1 Řemenový převod

Při popisu pohonů jednotlivých os hraje významnou roli tuhost převodu. V tomto případě jde o převod ozubeným řemenem. Hodnota tuhosti řemenu je řádově jiná, než tuhost ocelové konstrukce. Těto vlastnosti se ve většině případů využívá pro tlumení vibrací od motoru a pro snížení rázů při prudkém rozjezdu nebo brždění. Při přesném polohování je potřeba toto chování popsat, protože přechodové jevy způsobené poddajností řemenu by zhoršovaly polohování stroje.

Řemeny byly modelovány jako paralelní zapojení pružiny a tlumiče. Pružina popisuje poddajnost řemenu při dynamických jevech a tlumič popisuje materiálové tlumení kmitů v řemenu. Pro první přiblížení byly zvoleny klasické lineární modely pružiny a tlumiče.

$$F_k = kx \quad [112]$$

$$F_b = b\dot{x} \quad [113]$$



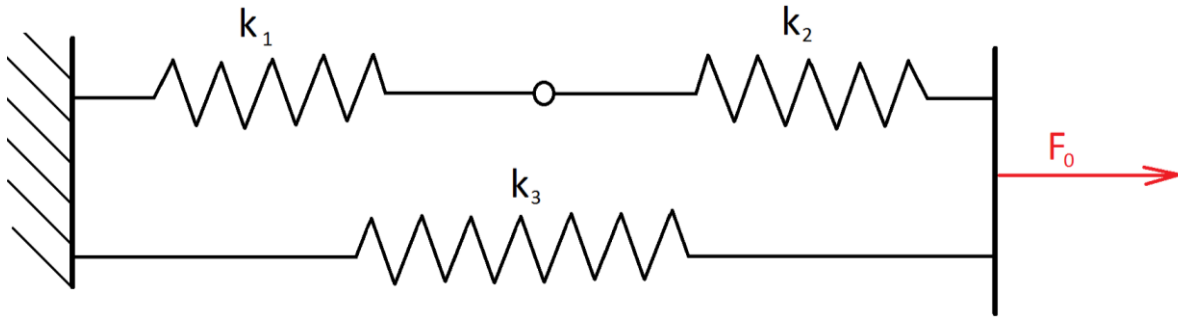
Obr. 9 Model řemenového převodu

Vazbu mezi jednotlivými tělesy tvoří pouze poddajné prvky, které generují sílu v závislosti na stlačení nebo prodloužení. Síla v první pružině vzniká, pokud se  $x_3 \neq \varphi_1 R_1$ . Vlivem setrvačností a pasivních účinků tato situace nastává vždy, když motor pohne řemenicí o nějaké  $\Delta\varphi$ . Bez uvažování statického předpětí by síla v první pružině byla popsána rovnicí.

$$S_1 = k_1(x_3 - \varphi_1 R_1) \quad [114]$$

Pokud se vezme v úvahu statické předpětí řemenu, tak je nutno přidat člen zohledňující statickou deformaci pružin.





Obr. 10 Soustava pružin představující řemenový převod

Soustava pružin je tvořena paralelní pružinou 3 se dvěma do série zapojenými pružinami 1 a 2. Na paralelních pružinách se síla rozděluje v poměru tuhostí jednotlivých větví. Deformace je však stejná.

$$F_0 = S_3 + S_{12} = (k_3 + k_{12})x_2 \quad [115]$$

Naproti tomu v sériovém spojení pružin se přenáší stejné síly na obě pružiny  $S_{12} = S_1 = S_2$ . Jejich deformace se ale rozdělí v poměru jejich tuhostí.

$$x_2 = x_{s1} + x_{s2} \quad [116]$$

$$\frac{S_{12}}{k_{12}} = \frac{S_1}{k_1} + \frac{S_2}{k_2} \quad [117]$$

$$\frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \rightarrow \quad k_{12} = k_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2} \quad [118]$$

Spojením rovnice [115] a [118] vyplývá vztah pro sílu v pružině při statické deformaci.

$$S_{12} = S_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 \quad [119]$$

Do statické deformace pružiny je přidán mechanismus vzniku síly v důsledku předeptnutí řemene.

$$S_1 = k_1(x_3 - \varphi_1 R_1) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 \quad [120]$$

$$S_1 = k_1 \left( x_3 - \varphi_1 R_1 + \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2 \right) \quad [121]$$

Vztahy pro zbylé dvě pružiny vznikly analogickým způsobem.

$$S_1 = k_1(x_3 - \varphi_1 R_1 + x'_2) = k_1 \Delta_1 \quad [122]$$

$$S_2 = k_2(\varphi_2 R_2 - x_3 + x''_2) = k_2 \Delta_2 \quad [123]$$

$$S_3 = k_3(\varphi_2 R_2 - \varphi_1 R_1 + x_2) = k_2 \Delta_2 \quad [124]$$

Pro zjednodušení zápisu byla zavedena substituce [125] a [126].

$$x'_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2 = k_{12} x_2 \quad [125]$$

$$x''_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x_2 = k_{21} x_2 \quad [126]$$

Síly vznikající vlivem tlumení vibrací v řemenu byly odvozeny obdobným způsobem. Tlumící síla je generována v závislosti na relativní rychlosti deformace. Tuto závislost lze získat časovou derivací deformace odvozené při sestavování sil v pružinách  $\Delta_j$ .

$$B_1 = b_1 \dot{\Delta}_1 = b_1 (\dot{x}_3 - \dot{\varphi}_1 R_1 + k_{12} \dot{x}_2) \quad [127]$$

$$B_2 = b_2 \dot{\Delta}_2 = b_2 (\dot{\varphi}_2 R_2 - \dot{x}_3 + k_{21} \dot{x}_2) \quad [128]$$

$$B_3 = b_3 \dot{\Delta}_3 = b_3 (\dot{\varphi}_2 R_2 - \dot{\varphi}_1 R_1 + \dot{x}_2) \quad [129]$$

Vektor zobecněných sil se následně sestaví takto. Do vektoru zobecněných sil byly síly tlumiče a pružiny zavedeny jako závislé na zavedených souřadnicích.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} M_M \\ S_1 R_1 - S_3 R_1 + B_1 R_1 - B_3 R_1 \\ -S_2 R_2 + S_3 R_2 - B_2 R_2 + B_3 R_2 \\ -S_1 + S_2 - B_1 + B_2 - F_{T_X} + F_X \\ F_0 - S_2 - S_3 - B_2 - B_3 \end{bmatrix} \quad [130]$$

### 3.3.2 Model třecích sil

Model základní třecí síly byl zvolen podle Coulombova zákona tření, kde je rozlišen koeficient tření statický  $f_{stat}$  a dynamický  $f_{dyn}$ . Algoritmus třecí síly kontroluje velikost výslednice sil působících na těleso a porovnává tuto hodnotu s maximální tečnou reakcí  $T_0 = f_{stat} N$ . Pokud je výslednice sil menší než  $T_0$ , tak je velikost tečné reakce rovna velikosti výslednice sil, ale je opačně orientovaná. Jakmile by vnější síly překročily mezní hodnotu, tak se těleso dostane do pohybu a tečná reakce se změní na třecí sílu  $F_T = f_{dyn} N$

### 3.3.3 Tuhost řemene

Koeficienty tuhosti pro řemen byly určovány z teorie napjatosti při jednoosém tahu.

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{F}{EA} l \quad [131]$$

$$F = \frac{EA}{l} \Delta l = k \cdot \Delta l \quad [132]$$

Tuhost jednotlivých částí řemenu je stanovena.

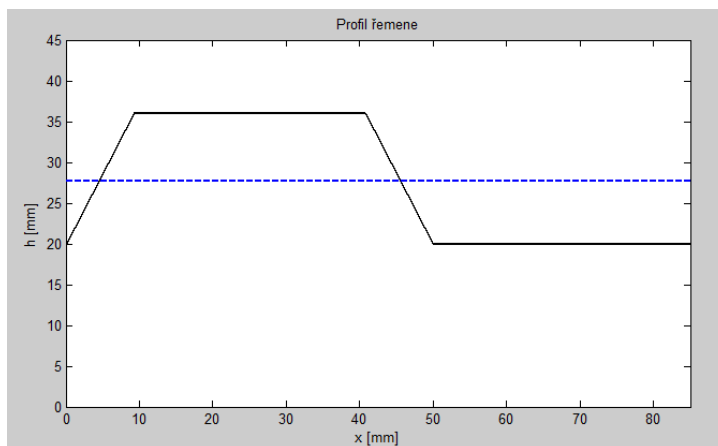
$$k_{\check{r}em} = \frac{E_{\check{r}em} A_{\check{r}em}}{l_{\check{r}em}} \quad [133]$$

kde  $E_{\check{r}em}$  je modul pružnosti v podélném tahu řemenu,  $A_{\check{r}em}$  střední průřez řemenu a  $l_{\check{r}em}$  délka dané části řemenu mezi tuhými tělesy.

Střední průřez řemenu  $A_{\check{r}em}$  byl stanoven jako střední hodnota proměnného průřezu přes jeden zub a jednu zubovou mezeru na řemenu.

$$A_{\check{r}em} = h_{stř} \cdot w_{\check{r}em} \quad [134]$$

$$h_{stř} = \frac{1}{P} \int_0^P h(x) dx \quad [135]$$



Obr. 11 Profil ozubeného řemene

Uvedené parametry vstupují do výpočtu jako číselné hodnoty.

Moment setrvačnosti motoru	$I_m$	0,0162	kg.m <sup>2</sup>
Roztečný průměr řemenice 1	$D_1$	100	mm
Roztečný průměr řemenice 2	$D_2$	100	mm
Vzdálenost mezi řemenicemi	$L_{\check{r}em}$	1000	mm
Hmotnost posuvného zařízení osy X	$m_x$	2	kg
Hmotnost obrobku	$M$	10	kg
Hmotnost řemenice	$m_{\check{r}em}$	1	kg
Převodový poměr	$p$	0,1	-
Modul pružnosti řemenu	$E$	20	N/mm <sup>2</sup>
Střední výška ozubeného řemenu	$h_{stř}$	5	mm
Šířka řemenu	$w_{\check{r}em}$	5	mm
Tlumení v části řemenu 1	$b_{1x}$	50	N.m.s/m
Tlumení v části řemenu 2	$b_{2x}$	50	N.m.s/m
Tlumení v části řemenu 3	$b_{3x}$	25	N.m.s/m
Součinitel smykového tření	$f$	0,1	-
Předpětí řemenu	$Q_x$	500	N

Tab. 3 Parametry osy X

### 3.3.4 Odezva osy X

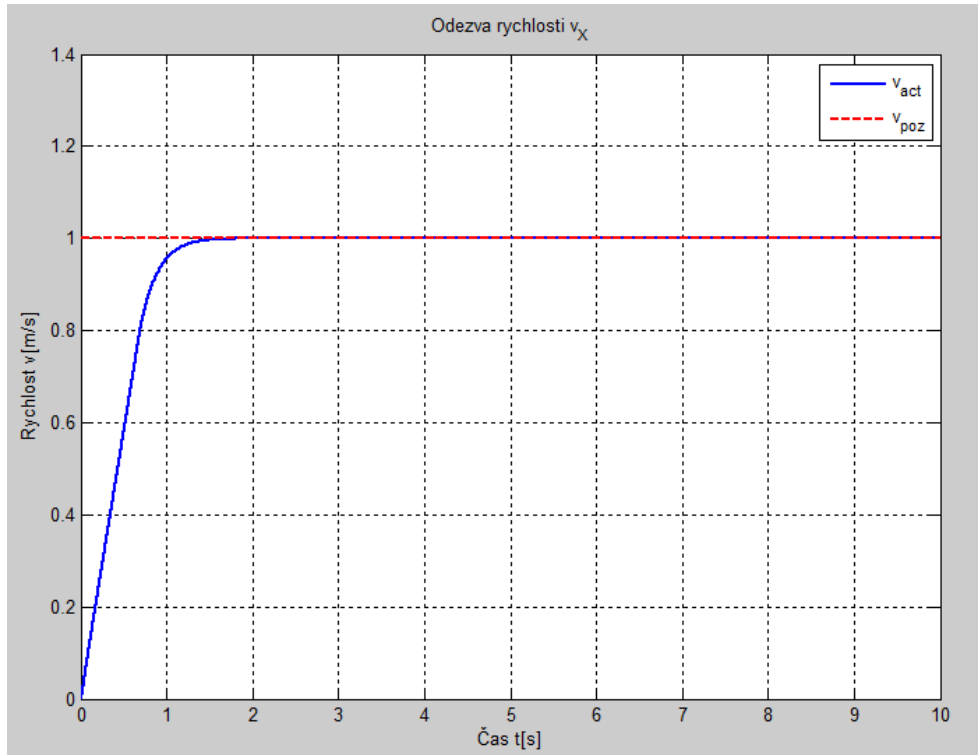
K sestavenému dynamickému modelu soustavy bylo přidáno řízení pomocí kaskádní regulace. Regulovanou vstupní veličinou je moment na servomotoru. Proudová regulační smyčka je vynechána, pouze je vloženo omezení krouticího momentu motoru. Hodnoty omezení motoru vychází z katalogových údajů. Pro motory, které budou pravděpodobně použity na pohon, je jmenovitý moment 10 Nm. Programové omezení momentu bylo zvoleno na hodnotu 15 Nm.

Vnitřní regulační smyčka je rychlostní. Velikost rychlosti je rovněž omezena hodnotou 5 m/s. Při pracovních posuvech by byla hodnota snížena na rychlost dle požadovaných řezných podmínek. Nastavení rychlostního PID regulátoru bylo provedeno na hodnoty uvedené v Tab. 4

Proporcionální zesílení	P	75
Integrální zesílení	I	0
Derivační zesílení	D	2
Konstanta filtru derivační složky	N	100

Tab. 4 Parametry rychlostního PID regulátoru osy X

Při těchto parametrech má rychlostní smyčka odezvu na jednotkový skok odpovídající soustavě 1. řádu. Časová konstanta tohoto přechodu na  $\tau \cong 0,5$  s.



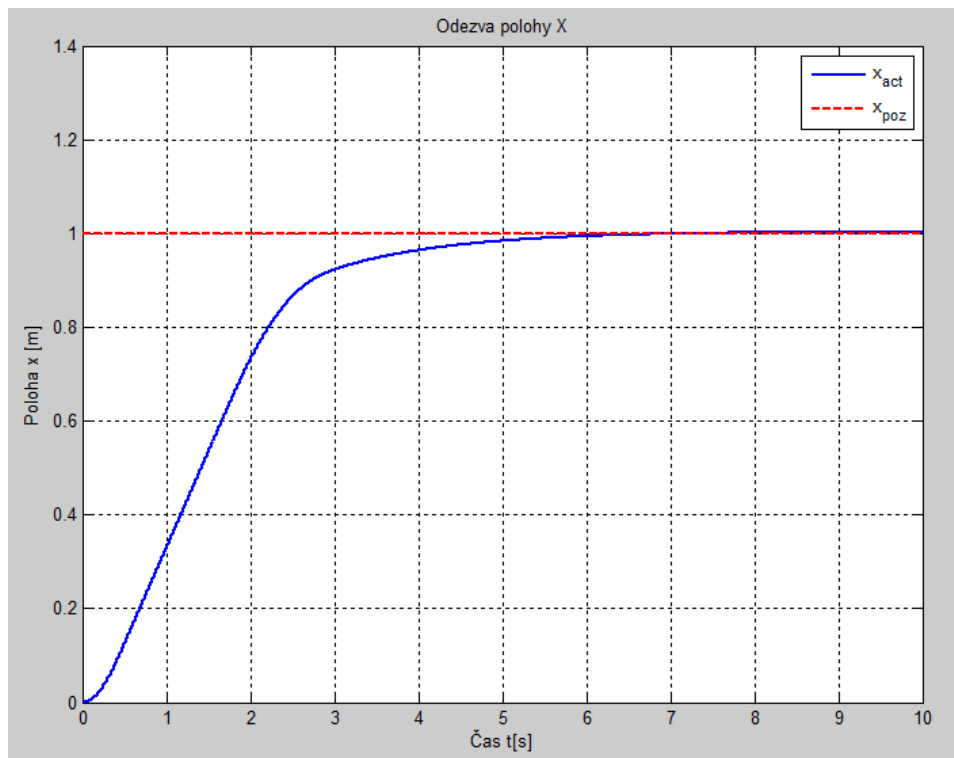
Obr. 12 Odezva rychlostní smyčky na jednotkový skok

Nadřazená regulační smyčka je pro nastavení přesné polohy. Testování vhodnosti zvolených PID parametrů bylo opět při převedení jednotkového skoku na vstup.

Proporcionální zesílení	P	2
Integrální zesílení	I	0,005
Derivační zesílení	D	2
Konstanta filtru derivační složky	N	1000

Tab. 5 Parametry polohového PID regulátoru osy X

Odezva má již znaky soustavy vyššího řádu. Zejména pomalejší náběh zpočátku a pomalejší doběh na konečnou hodnotu. Požadované jednotkové polohy je dosaženo až v čase 7 s od hrany vstupního signálu.



Obr. 13 Odezva polohové smyčky na jednotkový skok

### 3.3.5 Frekvenční vlastnosti

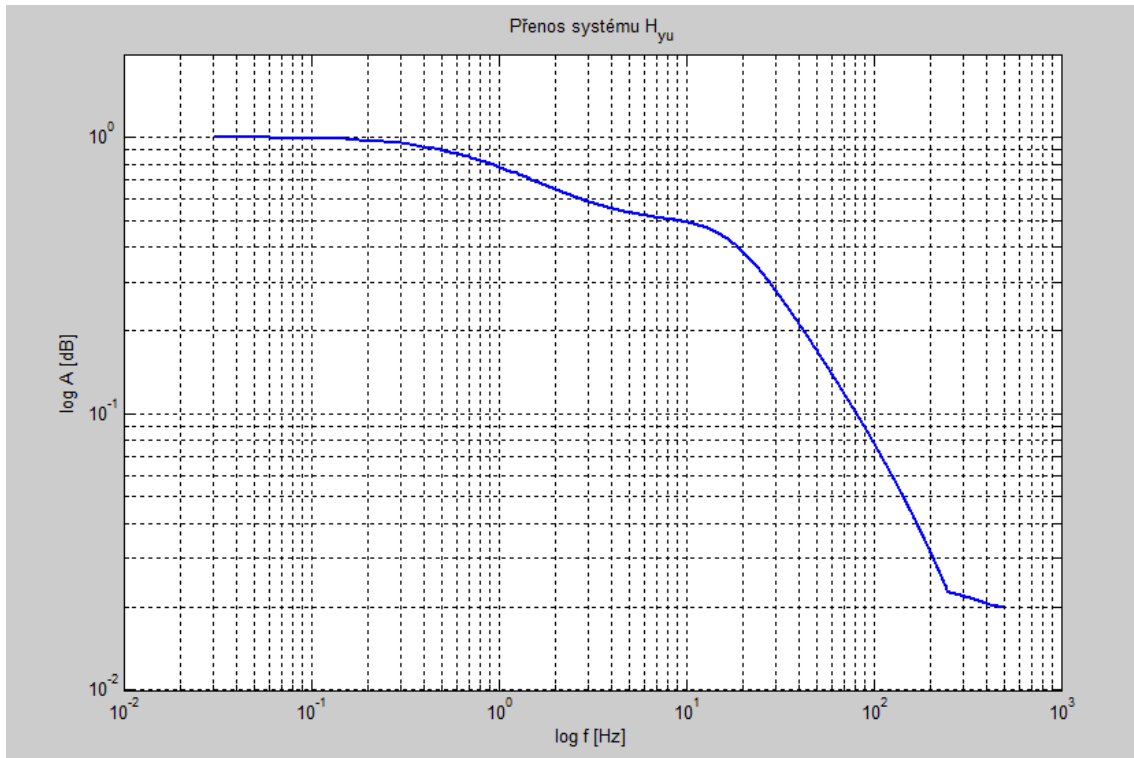
Lineární soustavu lze snadno analyzovat pomocí matematických nástrojů lineární algebry a získat analytické řešení soustavy pro harmonické buzení a kontrolu správnosti numerického řešiče. Pomocí výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů lze získat hodnoty rezonančních frekvencí soustavy a tvarů kmitů.

Frekvenční analýza osy proběhla pomocí Fourierovy transformace. Soustava s přidanou regulací byla buzena pomocí signálu typu chirp v rozsahu frekvencí od 0 Hz do 1000 Hz po dobu 20 s. Byla provedena Fourierova transformace vstupního signálu  $u(t)$

$\xrightarrow{FT} U(f)$  a odezvy soustavy  $y(t) \xrightarrow{FT} Y(f)$ . Podílem těchto dvou veličin byl získán frekvenční přenos soustavy.

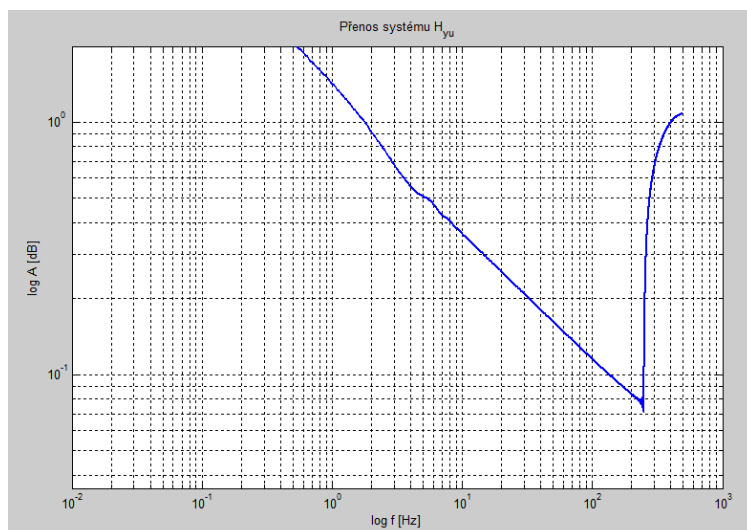
$$H^2(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} \quad [136]$$

Přenos byl vykreslen do Bodeho diagramu v logaritmických souřadnicích. Lze vidět, že již při buzení s frekvencí o velikosti 1 Hz dochází k útlumu o 3 dB a dále amplituda výstupního signálu klesá.



Obr. 14 Bodeho diagram osy X při uvažování lineární soustavy

Při vložení omezení na velikost akčního zásahu přestává být soustava lineární. Přenosy soustavy jsou nástrojem pouze pro popis chování soustav lineárních, ale pro ilustraci je vložen graf znázorňující změnu frekvenčního chování soustavy. Rychlost pohybu byla omezena na maximálně 5 m/s.



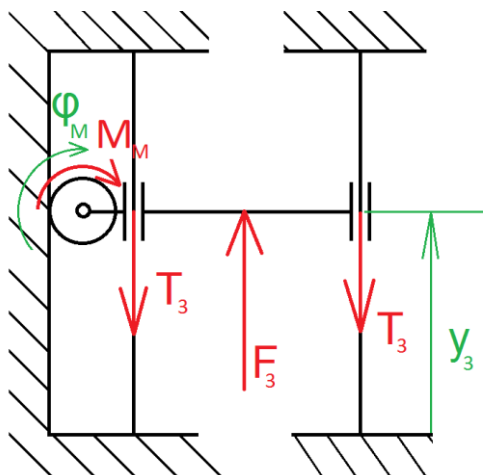
Obr. 15 Bodeho diagram osy X s omezenými akčními zásahy

### 3.4 Osa Y

Tato osa byla modelována ve dvou variantách, které jsou následně vzájemně porovnány. Řešené konstrukční varianty byly uvedeny již v kapitole 1.2.

#### 3.4.1 Pastorek a hřeben

První variantou uspořádání osy Y je s pohonem pomocí ozubeného pastorku a hřebenu. Motor je umístěn na pohyblivé části osy a pohyb je vyvozen odvalováním.



Obr. 16 Model mechanické soustavy osy Y s pastorkem a ozubeným hřebemem

Takováto soustava má 1 stupeň volnosti. Pro zjednodušení ručně odvozovaných věcí byl zvolen popis pomocí dvou souřadnic, lineární polohy osy  $y_3$  a natočení motoru s pastorkem  $\varphi_m$ .

$$s_{Y1}: \{y_3, \varphi_m\} \quad [137]$$

Při tomto přeuročném popisu je vyžadována jedna vazbová rovnice [139], která propojí obě souřadnice.

$$f: y_3 - \frac{D_{gear}}{2} \varphi_m = 0 \quad [138]$$

kde  $D_{gear}$  je průměr roztečné kružnice pastorku.

Odvozená Jacobiho matice má velikost 1x2 a vychází konstantní.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{D_{gear}}{2} \end{bmatrix} \quad [139]$$

Obdobně malý rozměr má i matice hmotnosti. Je v ní zahrnuta hmotnost tělesa osy Y a veškerých součástí na ní umístěných  $m_Y$  a moment setrvačnosti motoru a pastorku  $I_m$ .

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_Y & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad [140]$$

Síly působící na osu jsou popsány vektorem zobecněných sil. Od motoru působí hnací moment  $M_M$ . Odpor proti pohybu tvoří třecí síly  $F_T$  a také přidaná externí síla  $F_Y$ , která se přenáší z místa řezu do rámu stroje.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} F_Y - 2F_T \\ M_M \end{bmatrix} \quad [141]$$

Pro třecí sílu  $F_T$  lze dále rozepsat její závislost na hmotnosti tělesa osy  $m_Y$  a směru pohybu osy Y.

$$F_T = f_{dyn} N_Y \cdot \text{sgn}(\dot{y}_3) = f_{dyn} G_Y \cdot \text{sgn}(\dot{y}_3) = f_{dyn} m_Y g \cdot \text{sgn}(\dot{y}_3) \quad [142]$$

Číselné hodnoty parametrů zadaných ve výpočtovém algoritmu osy Y s ozubeným hřebenem a pastorkem.

Hmotnost saní osy Y	$m_Y$	150	kg
Moment setrvačnosti motoru+pastorku	$I_m$	0,5	kg.m <sup>2</sup>
Roztečný průměr pastorku	$D_{gear}$	400	mm
Koeficient smykového tření	$f$	0,1	-

Tab. 6 Parametry osy Y s pastorkem

### 3.4.2 Odezva osy Y s pastorkem a hřebenem

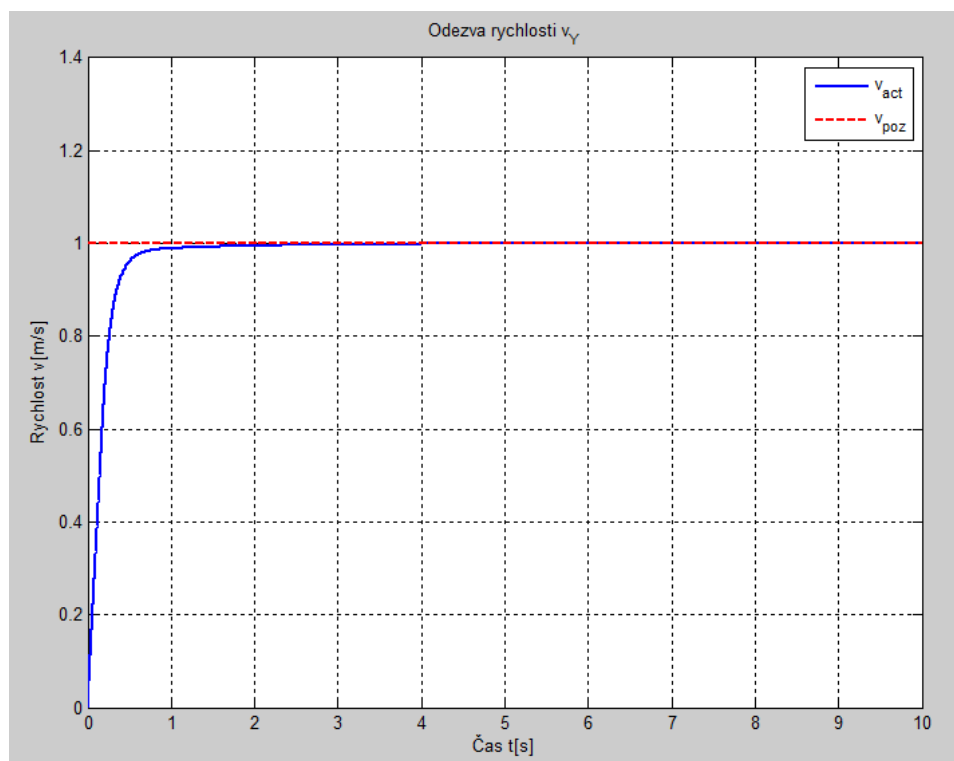
Struktura regulace je stejná jako u osy X. Nastavení rychlostního PID regulátoru dává rychlou odezvu při změně požadované rychlosti.

Proporcionální zesílení	P	300
Integrální zesílení	I	200
Derivační zesílení	D	0
Konstanta filtru derivační složky	N	1000

Tab. 7 Parametry rychlostního PID regulátoru osy Y



Ke stabilizaci rychlosti dochází přibližně za 2 sekundy. Časová konstanta odezvy je  $\tau \cong 0,3 \text{ s}$ . Rychlou reakci na začátku zajišťuje proporcionální složka, po ní dotahuje přesnou hodnotu integrační složka.

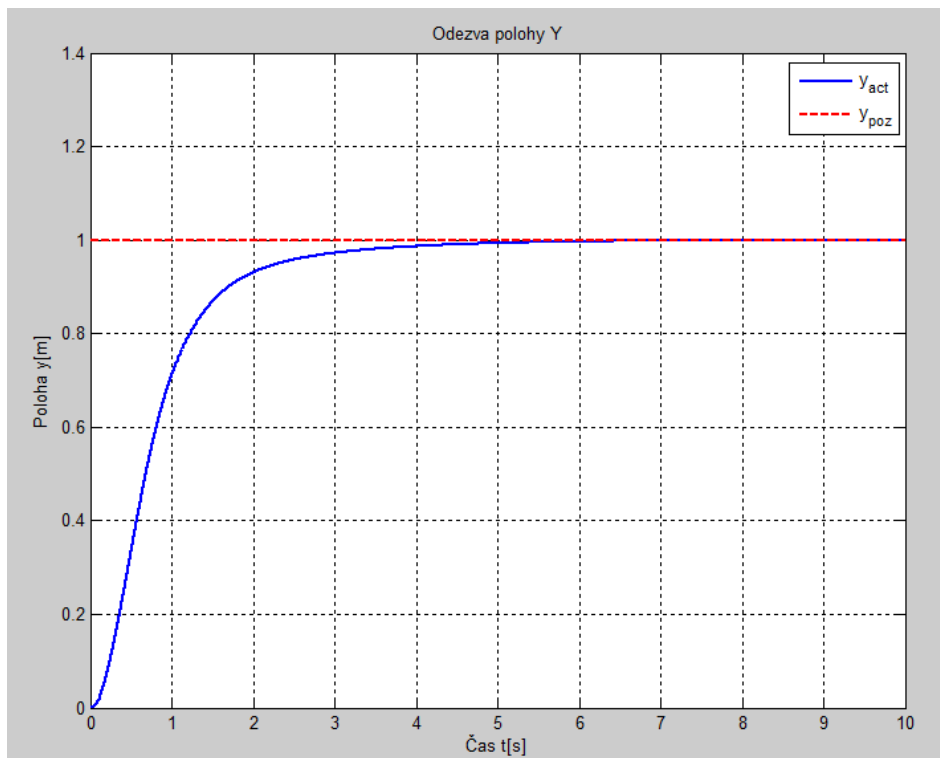


Obr. 17 Odezva rychlostí smyčky na jednotkový skok

Doba odezvy na požadovanou polohu je delší než na požadovanou rychlost. Dosažení jednotkové polohy nastává za 6 s. Soustava se chová podle vyššího řádu derivace, než je první.

Proporcionální zesílení	P	0,6
Integrační zesílení	I	0,001
Derivační zesílení	D	0,002
Konstanta filtru derivační složky	N	1000

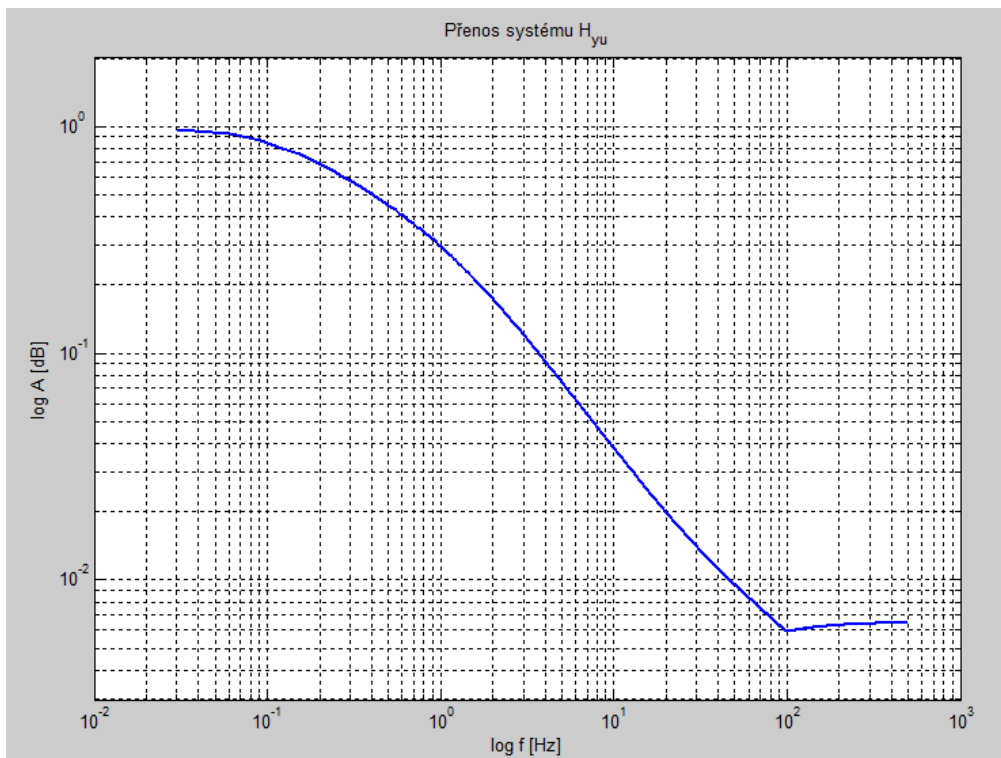
Tab. 8 Parametry polohového PID regulátoru osy Y



Obr. 18 Odezva polohové smyčky na jednotkový skok

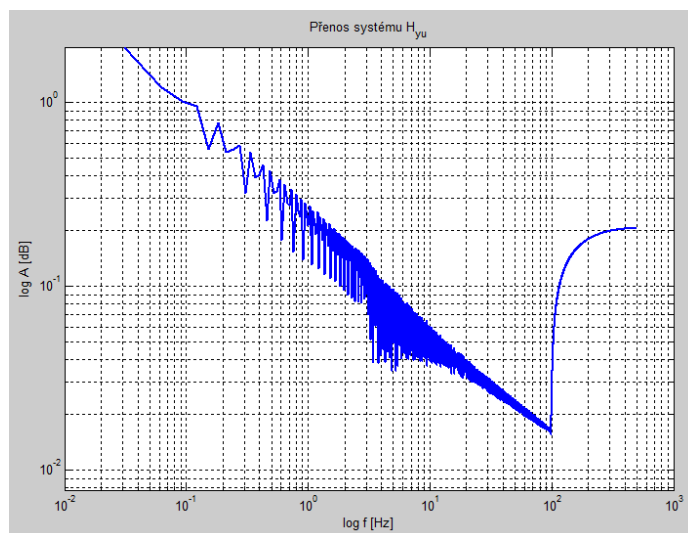
### 3.4.3 Frekvenční vlastnosti

Konstrukční varianta osy Y s pastorkem a ozubeným hřebenem má, už z principu konstrukce, vyšší tuhost převodu. Zpočátku má soustava jednotkovou hodnotu zesílení, ale relativně brzy začíná klesat. Do vyšších frekvencí klesá hodnota s konstantním sklonem. Průběh odpovídá soustavě prvního řádu. V popisu soustavy nejsou zachyceny žádné rezonanční jevy.



Obr. 19 Bodeho diagram osy Y lineární soustavy

Ilustrační frekvenční přenos poté, co byly vloženy omezení na velikost akčního zásahu. Již od frekvence buzení 0,15 Hz klesá zesílení prudce dolů. Při zobrazení v logaritmických souřadnicích lze tento pokles proložit přímkou pod úhlem 45°.

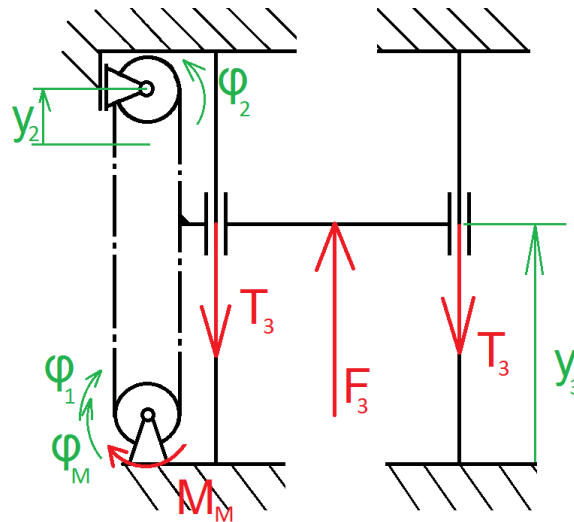


Obr. 20 Bodeho diagram osy Y s omezenými akčními zásahy

### 3.4.4 Řemenový převod

Druhá varianta uspořádání osy Y je s pohonem pomocí řemenového převodu stejně, jako je to realizováno u osy X. Do soustavy je zahrnuta celá pohonná část včetně obou

řemenic a převodovky mezi motorem a řemenicí 1. Tato varianta má už z podstaty použitého převodu mnohem nižší tuhost polohy, ale více tlumí přenášené vibrace.



Obr. 21 Model mechanické soustavy osy Y s řemenovým převodem

Zvolen byl stejný popis jako pro soustavu s řemenovým převodem na ose X. Poloha těles soustavy je určena 5-ti nadbytečnými souřadnicemi [144].

$$s_Y: \{\varphi_m, \varphi_1, \varphi_2, y_3, y_2\} \quad [143]$$

kde  $\varphi_m$  je natočení hřídele motoru,  $\varphi_1$  natočení hnací řemenice,  $\varphi_2$  natočení hnané řemenice,  $y_2$  posunutí hnané řemenice vlivem napínání pásu a  $y_3$  je posun tělesa osy.

S takto zavedenými souřadnicemi vzniká matice hmotnosti o velikosti 5x5.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [144]$$

Při takto zvolené konfiguraci mechanické soustavy byla sestavena pouze jedna vazbová rovnice, která popisuje vztah mezi natočením hřídele motoru a natočením hnací řemenice.

$$f: \varphi_1 - i\varphi_m = 0 \quad [145]$$

Z vazbové rovnice odvozená Jacobiho matice má rozměr 1x5.

$$\underline{J} = [-i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad [146]$$

Vazba mezi jednotlivými tělesy je opět silová, protože na sebe tělesa působí přes pružné elementy v podobě řemenu. Výsledný vektor zobecněných sil má stejný tvar jako vektor zobecněných sil na ose X.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} M_M \\ S_1 R_1 - S_3 R_1 + B_1 R_1 - B_3 R_1 \\ -S_2 R_2 + S_3 R_2 - B_2 R_2 + B_3 R_2 \\ -S_1 + S_2 - B_1 + B_2 + F_Y - 2F_T \\ F_0 \end{bmatrix} \quad [147]$$

Parametry osy Y s poddajnými řemenovým převodem.

Moment setrvačnosti motoru	$I_m$	0,0162	kg.m <sup>2</sup>
Roztečný průměr řemenice 1	$D_1$	100	mm
Roztečný průměr řemenice 2	$D_2$	100	mm
Vzdálenost mezi řemenicemi	$L_{řem}$	2000	mm
Hmotnost osy Y	$m_y$	150	kg
Hmotnost řemenice	$m_{řem}$	1	kg
Převodový poměr	$p$	0,1	-
Modul pružnosti řemenu	$E$	20	N/mm <sup>2</sup>
Střední výška ozubeného řemenu	$h_{stř}$	5	mm
Šířka řemenu	$w_{řem}$	5	mm
Tlumení v části řemenu 1	$b_{1x}$	50	N.m.s/m
Tlumení v části řemenu 2	$b_{2x}$	50	N.m.s/m
Tlumení v části řemenu 3	$b_{3x}$	25	N.m.s/m
Součinitel smykového tření	$f$	0,1	-
Předpětí řemenu	$Q_x$	500	N

Tab. 9 Parametry osy Y s řemenovým převodem

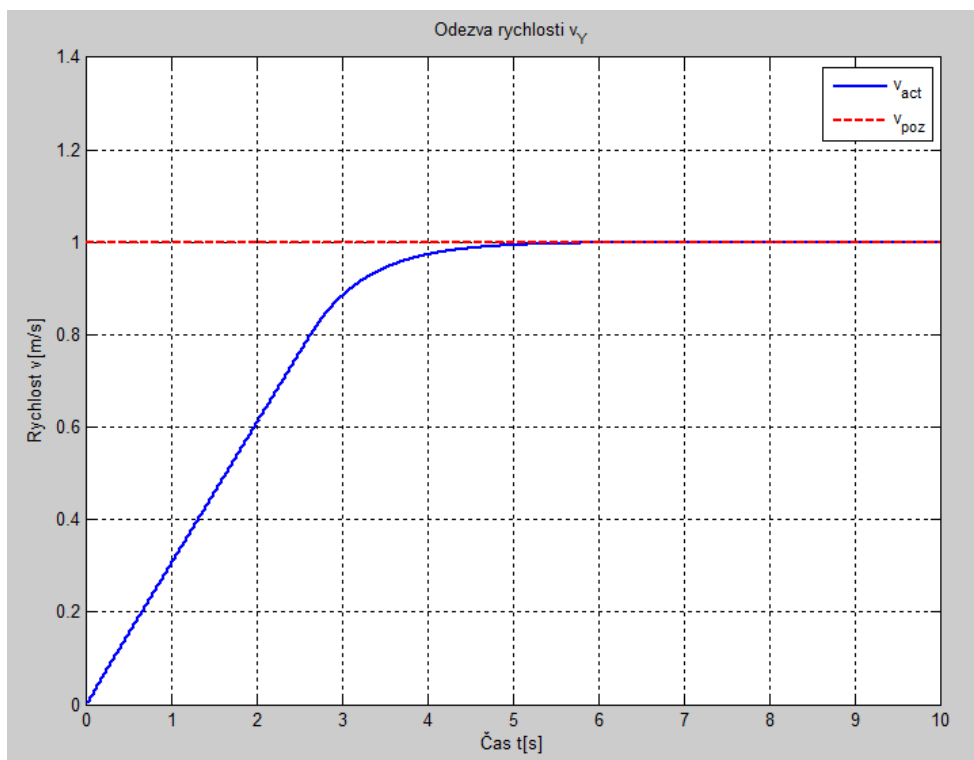
### 3.4.5 Odezva osy Y s řemenovým převodem

Při porovnání odezvy s druhou konstrukční variantou je odezva rychlosti na jednotkový skok pomalejší. Způsobeno to je zejména nižší tuhostí převodu a tím i potřebou opatrnějších akčních zásahů, aby se soustava nerozkmitala.

Proporcionální zesílení	P	75
Integrální zesílení	I	0
Derivační zesílení	D	2
Konstanta filtru derivační složky	N	100

Tab. 10 Parametry rychlostního PID regulátoru osy Y

Časová konstanta náběhu rychlosti na jednotkovou je  $\tau \cong 6$  s. Lineární část křivky je růst rychlosti při konstantním zrychlení, tedy konstantní síle motoru. Motor je v této oblasti na horní hranici momentu.

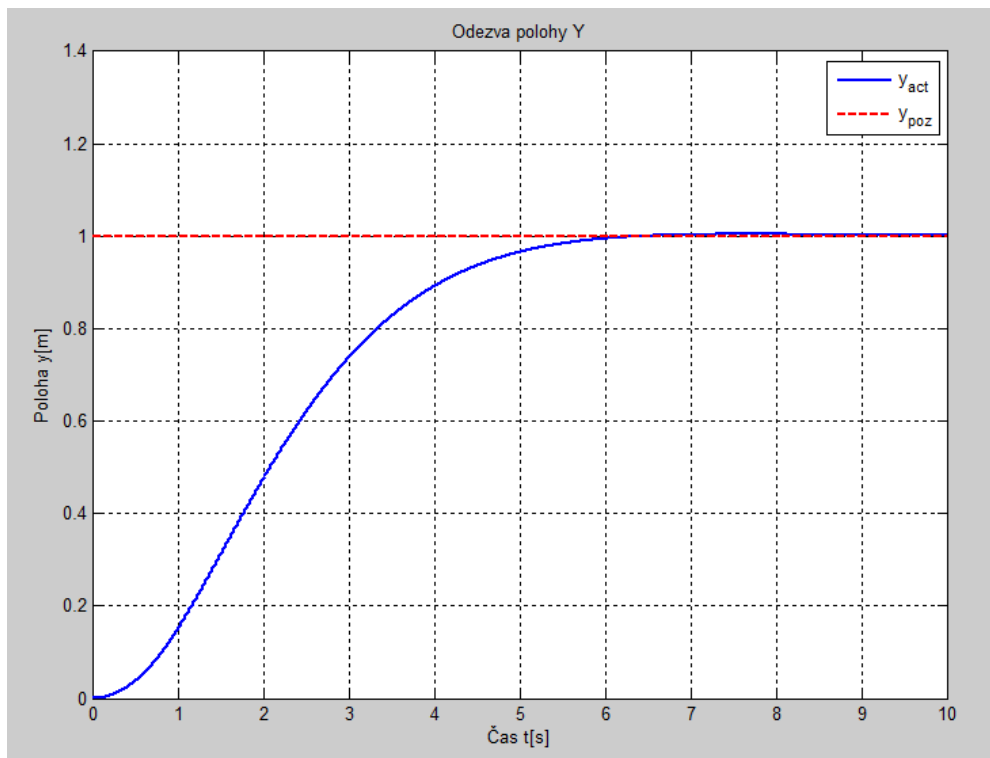


Obr. 22 Odezva rychlostí smyčky na jednotkový skok

Dosažení jednotkové polohy trvá déle. Uspokojivá hodnota je dosažena nejdříve v čase 6 s. Náběh polohy nemá typický tvar pro soustavu popsanou diferenciální rovnicí. Je zde hodně patrný vliv omezení akčního zásahu, který způsobí, že střední část je nárůst polohy lineární, tedy při konstantní rychlosti.

Proporcionální zesílení	P	0,5
Integrální zesílení	I	0
Derivační zesílení	D	0
Konstanta filtru derivační složky	N	1000

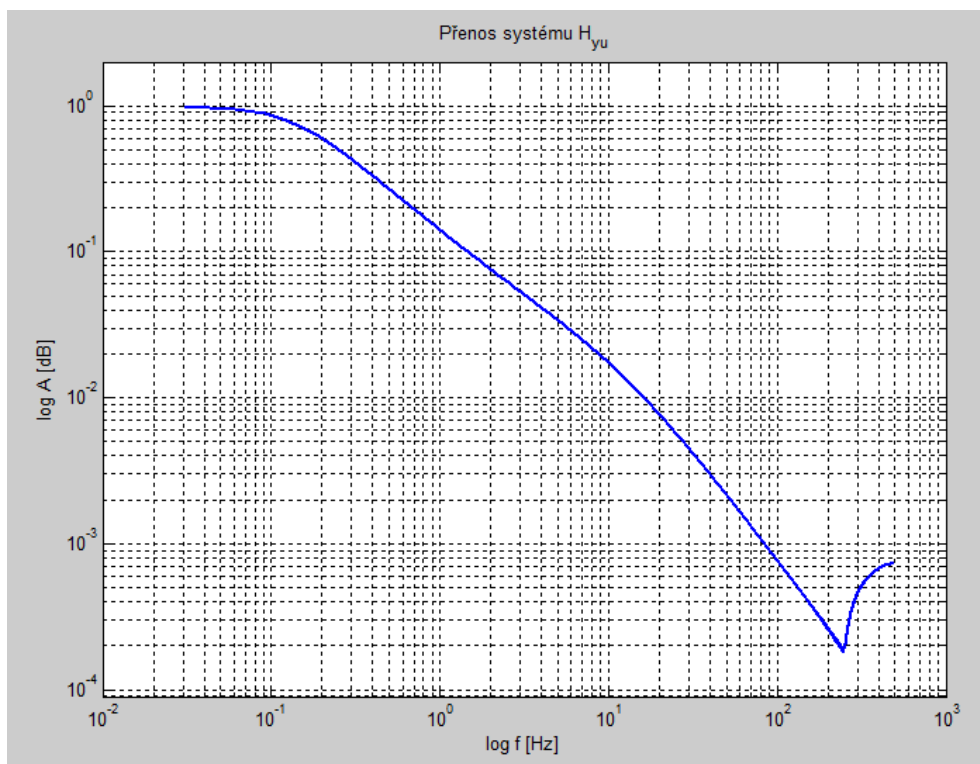
Tab. 11 Parametry polohového PID regulátoru osy Y



Tab. 12 Odezva polohové smyčky na jednotkový skok

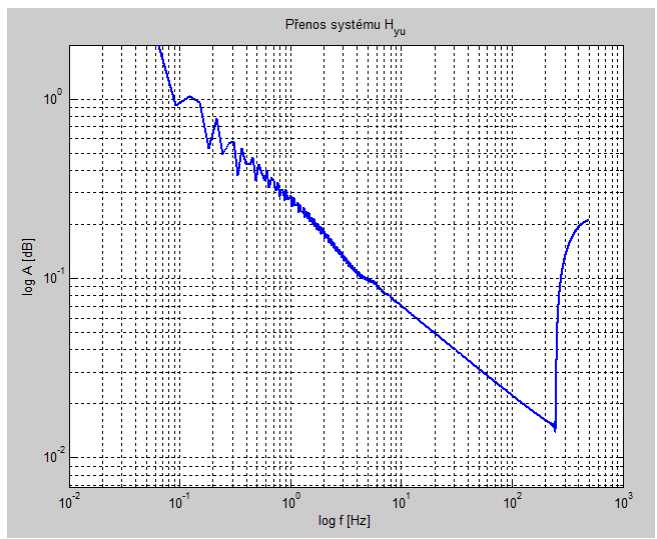
### 3.4.6 Frekvenční vlastnosti

Oproti předchozí variantě, zde začíná zesílení klesat již při nižších frekvencích. Konstantní je pouze do hodnoty 0,03 Hz a poté pozvolna klesá. Poddajnost soustavy se projevuje rychlým poklesem zesílení. Amplituda výstupního signálu opět relativně rychle klesá z počáteční hodnoty 1. Od frekvence 10 Hz je pokles zesílení ještě prudší.



Obr. 23 Bodeho diagram osy Y lineární soustavy

Přenos nelineárního systému je podobný se soustavou s pastorkem. Od nízké frekvence prudký pokles a je odstraněna i rezonance vlivem poddajnosti.



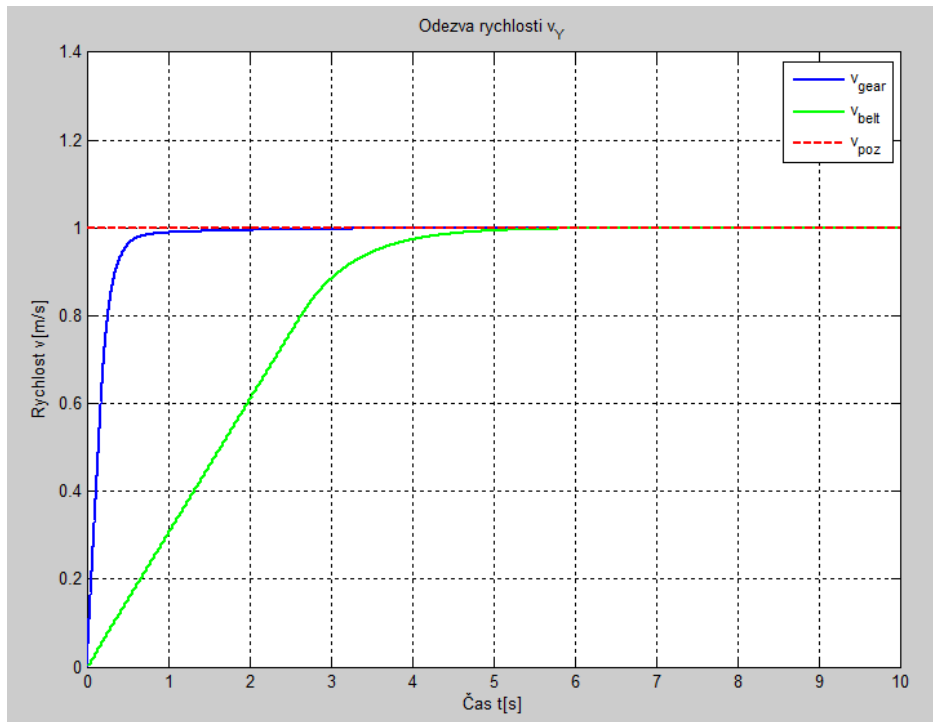
Obr. 24 Bodeho diagram osy Y soustavy s omezenými akčními zásahy

### 3.4.7 Porovnání

Pro porovnání chování a vlastností modelovaných variant osy Y byly generované křivky vloženy do společných grafů. Na odezvě rychlostní smyčky lze pozorovat kratší dobu odezvy první konstrukční varianty. Doba dosažení požadované hodnoty jednotkové rychlosti

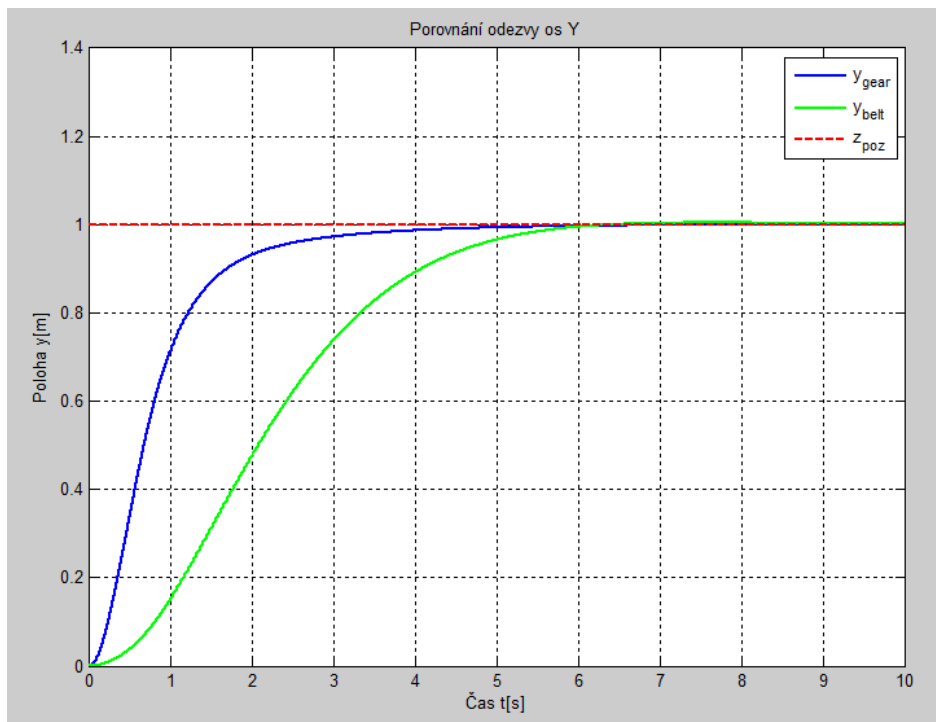


je pro pastorek poloviční než u varianty s řemenovým převodem. Tam je dynamika omezena, aby nedocházelo k rozkmitávání soustavy.



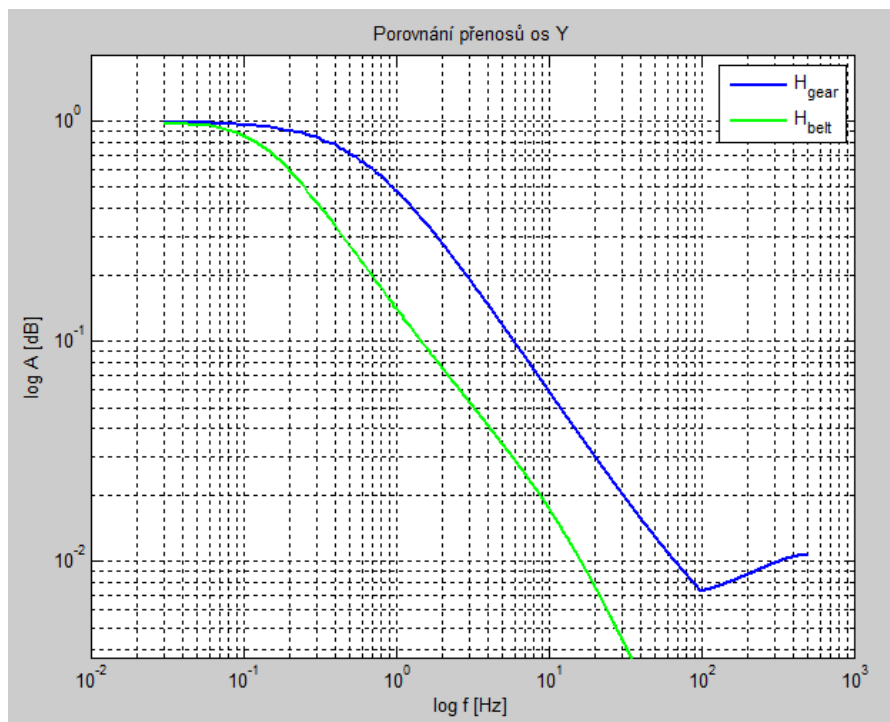
Obr. 25 Porovnání odezvy rychlostní smyčky variant osy Y

Při porovnání odezev polohových smyček lze pozorovat obdobný jev jako u smyčky rychlostní. Varianta s pastorkem má rychlejší dynamiku a dříve se přiblíží k požadované hodnotě, ale přesné hodnoty je dosaženo jen o 1 s dříve než s řemenovým převodem. Zde je průběh pomalejší, ale plynule je dosaženo požadované polohy. S řemenovým převodem je soustava vyššího řádu než s pastorkem a má hladší průběh odezvy.



Obr. 26 Porovnání odezvy polohové smyčky variant osy Y

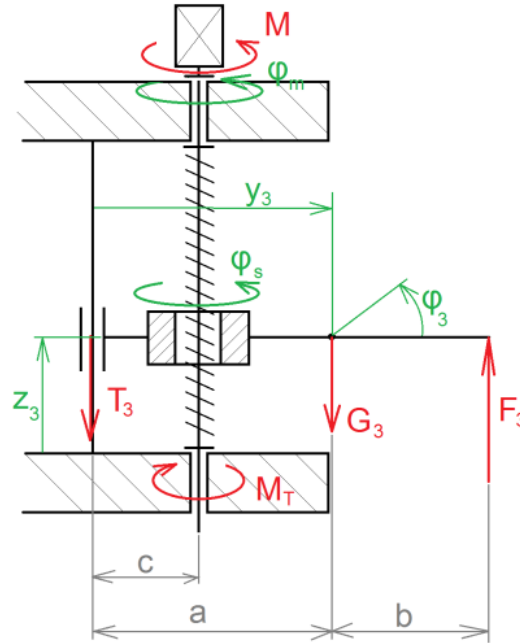
Stejně tak u frekvenčních přenosů obou os je vidět, že zesílení varianty s řemenovým převodem klesá mnohem rychleji, než je tomu u pastorku. První varianta poklesne o 3 dB až při frekvenci buzení 0,25 Hz zatímco druhá varianta této hodnoty dosáhne už při frekvenci 0,1 Hz. Řemenový převod tedy lépe tlumí budící frekvence.



Obr. 27 Porovnání Bodeho diagramů variant osy Y

### 3.5 Osa Z

Tato osa je modelována jako dvourozměrná úloha se dvěma stupni volnosti. Ty vznikají vlivem vložené poddajnosti pohybového šroubu, který převádí rotační pohyb motoru na lineární pohyb osy, a lze vypočítat reakční síly v uložení pohybového šroubu. Numerický výpočet zadané soustavy je proveden pomocí uvedeného řešiče.



Obr. 28 Schéma osy Z s poddajným pohybovým šroubem

Pro popis soustavy bylo zvoleno 5 závislých souřadnic [149], aby byl popsán její pohyb včetně klopných reakcí tělesa 3.

$$s_Z: \{y_{Z3}, z_3, \varphi_3, \varphi_m, \varphi_s\} \quad [148]$$

Při uvažování poddajnosti pohybového šroubu má soustava 2 stupně volnosti.

$$n_{st} = 2 \quad [149]$$

$$n_{vr} = n_s - n_{st} = 5 - 2 = 3 \text{ vazbové rovnice} \quad [150]$$

Vazbové rovnice soustavy

$$f_1: y_{Z3} - a = 0 \quad [151]$$

$$f_2: z_3 - i\varphi_m = 0 \quad [152]$$

$$f_3: \varphi_3 = 0 \quad [153]$$

Vstupními parametry do řešiče je ručně sestavená matice hmotnosti, Jacobiho matice vazeb a vektor zobecněných sil. Matice hmotnosti soustavy má velikost 5x5

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m + I_s \end{bmatrix} \quad [154]$$

Jacobiho matice vazeb vzniklá derivací vazbových rovnic podle souřadnic má rozměr 3x5.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [155]$$

Do vektoru sil byly zahrnuty všechny působící síly na uvedených souřadnicích.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_3 - m_3 g - F_T \\ F_3 b + F_T a \\ -M_T - k_t(\varphi_s - \varphi_m) - b_t(\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_m) \\ M_T - k_t(\varphi_s - \varphi_m) + b_t(\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_m) \end{bmatrix} \quad [156]$$

Všechny uvedené parametry vstupující do výpočtu osy Z jsou uvedeny číselně.

Hmotnost osy Z	$m_z$	50	kg
Moment setrvačnosti osy Z	$I_z$	0,5	kg.m <sup>2</sup>
Moment setrvačnosti motoru a šroubu	$I_m$	0,2043	kg.m <sup>2</sup>
Převodový poměr	$p$	0,1	-
Rozměr	$a$	200	mm
Rozměr	$b$	200	mm
Modul pružnosti ve smyku	$G$	81000	N/mm <sup>2</sup>
Hustota oceli	$\rho$	7800	kg/m <sup>3</sup>
Střední průměr šroubu	$d_2$	19,254	mm
Stoupání závitu	$P$	5	mm
Úhel profilu	$\alpha$	30	°
Výpočtová délka pohybového šroubu	$L_{výp}$	250	mm
Materiálové tlumení šroubu	$b_{screw}$	100	N.s/m

Tab. 13 Parametry osy Z

### 3.5.1 Tuhost pohybového šroubu

Stanovení hodnoty tuhosti  $k_t$  pohybového šroubu vychází z teorie napjatosti v krutu kruhového průřezu a lineární teorie pružnosti. Rovnice pro zkroucení prutu kruhového průřezu.

$$\Delta\varphi = \nu_\varphi l = \frac{\tau_0}{G} l = \frac{Ml}{GJ} \quad [157]$$

kde  $\varphi$  je úhel zkroucení prutu v radiánech,  $\nu_\varphi$  je poměrné zkroucení,  $M$  působící moment,  $l$  délka prutu,  $G$  modul pružnosti ve smyku a  $J$  polární moment průřezu.

Tuhost je definována charakteristickou rovnicí  $M = k_t \varphi$ . Pokud se upraví vztah [158] do tvaru o stejné struktuře, lze výpočet tuhosti  $k_t$  odvodit.

$$M = \frac{GJ}{l} \varphi \quad [158]$$

Z čehož vyplývá předpis pro tuhost.

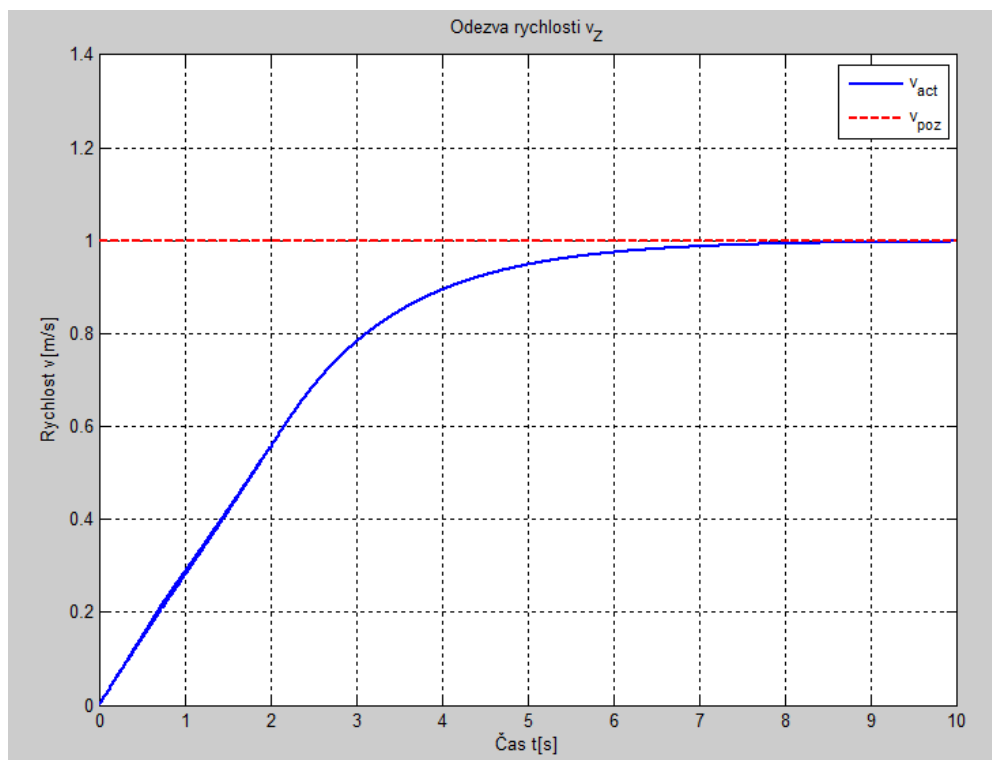
$$k_t = \frac{GJ}{l} \quad [159]$$

### 3.5.2 Odezva osy Z

Odezva na jednotkový skok rychlostní smyčky je poměrně pomalá. Dosažení jednotkové rychlosti trvá téměř 8 s, přestože má PID regulátor vysoké zesílení. Zásadní roli zde hraje omezení velikosti akčního zásahu. Lineární nárůst rychlosti je při konstantním zrychlení, tedy konstantní síle. Soustava tedy zrychluje maximálním možným zrychlení, které umožňuje motor.

Proporcionální zesílení	P	1100
Integrální zesílení	I	0
Derivační zesílení	D	1000
Konstanta filtru derivační složky	N	1000

Tab. 14 Parametry rychlostního PID regulátoru osy Y

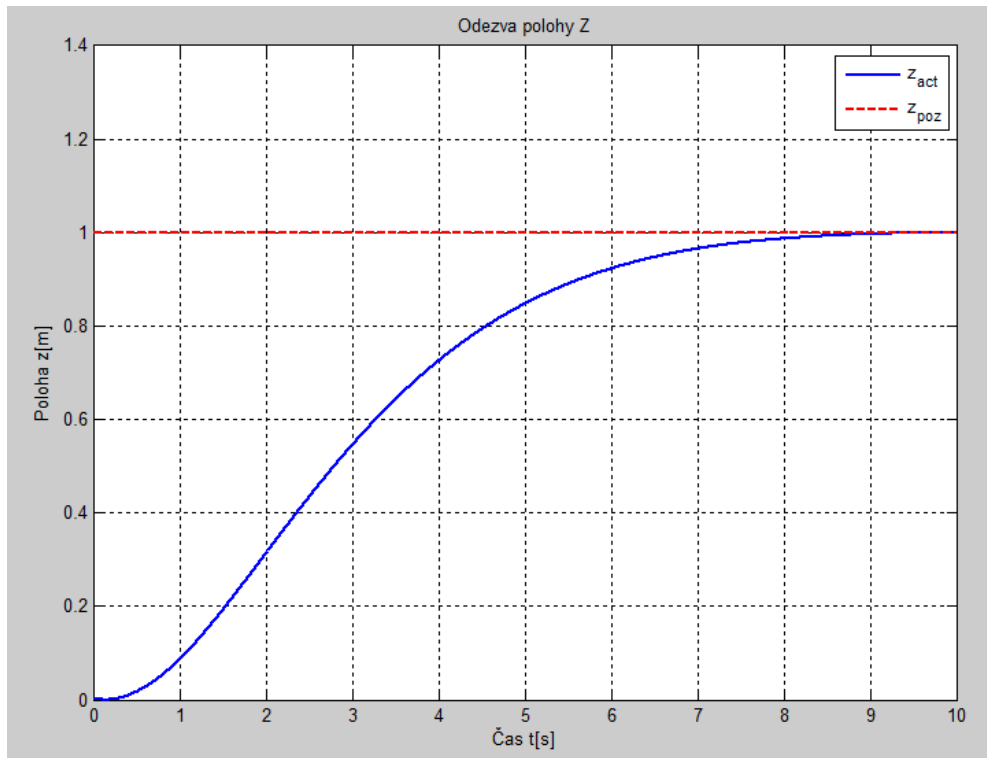


Obr. 29 Odezva rychlostní smyčky osy Z na jednotkový skok

Odezva polohové smyčky je rovněž pomalá. Velký vliv má nastavení smyčky rychlostí. Doba dosažení požadované jednotkové polohy se blíží hodnotě 10 s.

Proporcionální zesílení	P	1
Integrální zesílení	I	0,001
Derivační zesílení	D	1
Konstanta filtru derivační složky	N	100

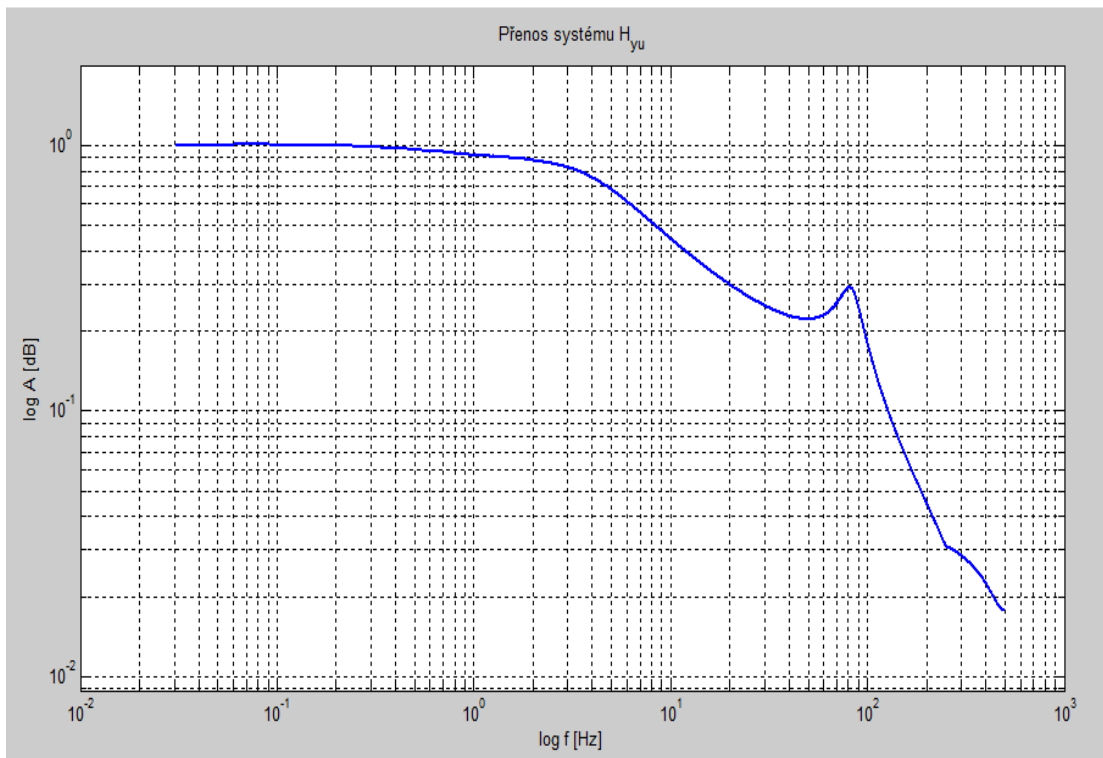
Tab. 15 Parametry polohového PID regulátoru osy Z



Obr. 30 Odezva polohové smyčky osy Z na jednotkový skok

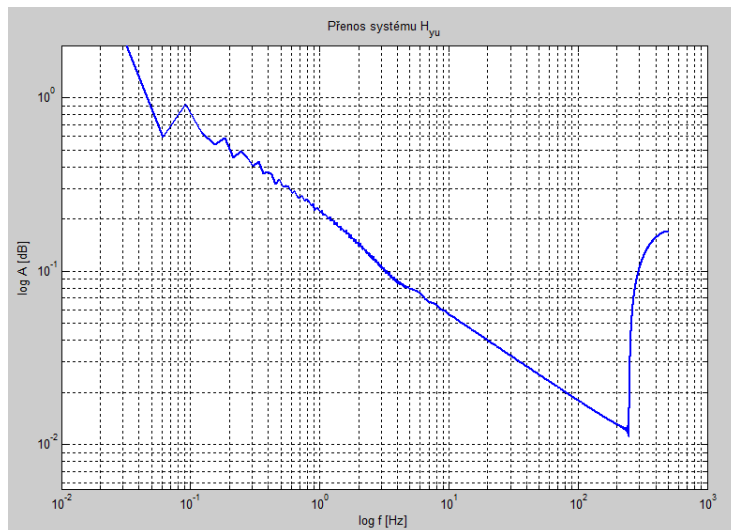
### 3.5.3 Frekvenční vlastnosti soustavy

Frekvenční charakteristika osy Z byla získána stejným způsobem jako v předchozích případech. Přibližně jednotková hodnota zesílení je udržena až do hodnoty 1 Hz, při dalším zvyšování frekvence již začíná klesat. V charakteristice lineární soustavy si lze všimnout rezonančního vrcholu kolem budicí frekvence 80 Hz. Tento jev v chování soustavy je zachycen díky vložení poddajnosti pohybového šroubu do matematického popisu soustavy. Poté již zesílení prudce klesá.



Obr. 31 Bodeho diagram osy Z lineární soustavy

Frekvenční přenos soustavy s omezením na maximální hodnotu akčního zásahu klesá již při nízké frekvenci. Zpočátku je pokles prudký, od hodnoty 0,1 Hz ho již lze proložit přímkou se sklonem  $45^\circ$ . Vlivem omezení akčního zásahu vymizela rezonance z frekvenční charakteristiky.

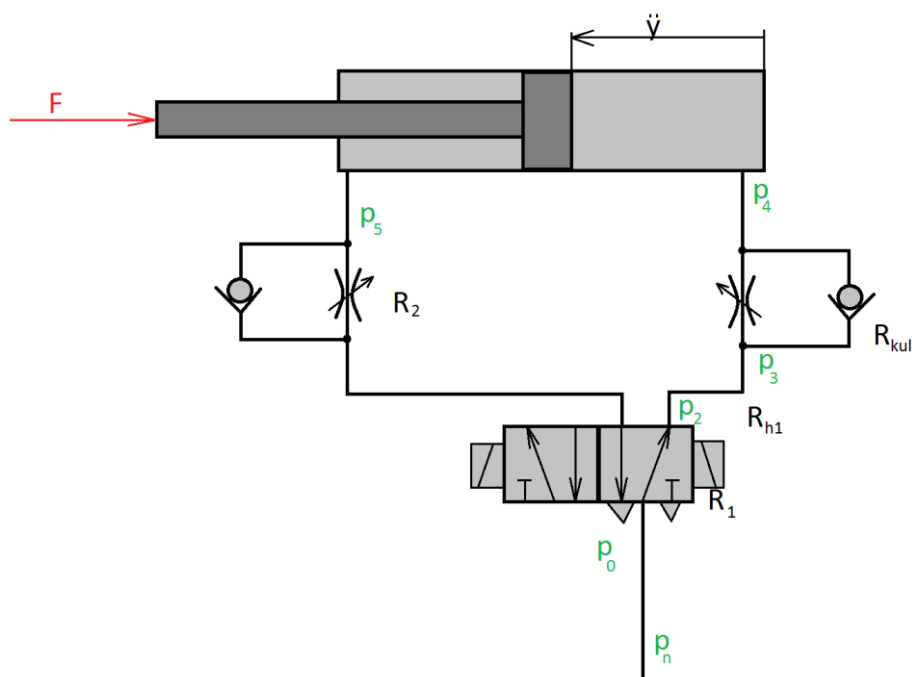


Obr. 32 Bodeho diagram osy Z s omezenými akčními zásahy

### 3.6 Pneumatický výsuv nástroje

Na pohyblivé části osy Z jsou umístěny pneumatické válce a na každém je samostatný obráběcí nástroj. Vysunutí pneumatických válců je ovládané nezávisle na posuvu os i na

ostatních válcích. Model pneumatického válce, včetně spínacího rozvaděče by modelován dle vztahů uvedených v kapitole 2.3.



Obr. 33 Schéma popisovaného pneumatického obvodu

Hydraulické odpory na vložených prvcích jsou považovány za kvadratické, protože na hranách vznikají turbulentní víry. Odpor v potrubí je považován na lineární.

$$R_1 Q_1^2 = p_n - p_2 \quad [160]$$

$$R_{h1} Q_1 = p_2 - p_3 \quad [161]$$

$$R_{kul} Q_1^2 = p_3 - p_4 \quad [162]$$

kde  $R_1$  je odpor rozvaděče,  $R_{h1}$  odpor potrubí,  $R_{kul}$  odpor trasy škrťacího ventilu přes kuličku,  $p_n$  napájecí tlak,  $p_2, p_3, p_4$  tlaky v místech dle Obr. 33.

Z takto zavedených rovnic se vyjádří tlak působící v místě pístu  $p_4$  a objemový tok tekutiny  $Q_1$ .

$$p_4 = p_2 - R_{h1} Q_1 - R_{kul} Q_1^2 \quad [163]$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{p_n - p_2}{R_1}} \quad [164]$$

Stejným postupem je zaveden odpor ve výstupním potrubí. Zde vede trasa tekutiny rovnou do atmosféry, tak je zde pouze jeden odpor, který je považován za lineární.

$$R_2 Q_2 = p_5 - p_0 \quad [165]$$

kde  $R_2$  je odpor výstupního potrubí,  $p_0$  atmosférický tlak a  $p_5$  tlak na straně pístu s pístnicí.



Pomocí rovnice [166] je vyjádřen výstupní objemový tok tekutiny  $Q_2$ .

$$Q_2 = \frac{p_5 - p_0}{R_2} \quad [166]$$

Po vyjádření popisu odporů na vstupním i výstupní vedení se popis zaměří na samotný pneumatický motor. Nejdříve se zavedou pneumatické veličiny pomocí odporu proti deformaci. Odpor pro deformaci na výstup umožní vyjádřit diferenciální rovnicí pro výstupní tlak  $p_5$ .

$$Q_2 = S_2 \dot{y} - \frac{1}{D} \dot{p}_5 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_5 = D(S_2 \dot{y} - Q_2) \quad [167]$$

kde  $S_2$  je plocha pístu na straně pístnice,  $y$  poloha pístu a  $D$  odpor proti deformaci.

Stejný přístupem lze vyjádřit odpor proti deformaci na vstupní straně pístu. Zde se ovšem vyskytuje problém proměnné  $p_4$ , která je funkcí  $p_4 = p_4(Q_1)$  a je tedy nutné vyjádřit její derivaci.

$$Q_1 = S_1 \dot{y} - \frac{1}{D} \dot{p}_4 \quad [168]$$

kde  $S_1$  je plocha pístu

Vztah pro  $\dot{p}_4$  je získán časovou derivací rovnice [164].

$$\dot{p}_4 = \dot{p}_2 - R_{h1} \dot{Q}_1 - 2R_{kul} Q_1 \dot{Q}_1 \quad [169]$$

Objevuje se zde další neznámá funkce a tou je  $\dot{Q}_1$ , kterou je nutné rovněž vyjádřit. Je získána opět časovou derivací, tentokrát rovnice [165] a upravena na použitelné podoby.

$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{p_n - p_2}{R_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{\dot{p}_2}{R_1} \right) = -\frac{\dot{p}_2}{2R_1 \sqrt{\frac{p_n - p_2}{R_1}}} = -\frac{\dot{p}_2}{2R_1 Q_1} \quad [170]$$

Odvozené vztahy se dosadí do rovnice odporu proti deformaci a vyjádří se diferenciální rovnice hledaného tlaku  $p_2$ .

$$Q_1 = S_1 \dot{y} - \frac{1}{D} \dot{p}_4 = S_1 \dot{y} - \frac{1}{D} (\dot{p}_2 - R_{h1} \dot{Q}_1 - 2R_{kul} Q_1 \dot{Q}_1) \quad [171]$$

$$Q_1 = S \dot{y} - \frac{1}{D} \left( \dot{p}_2 + R_{h1} \frac{\dot{p}_2}{2R_1 Q_1} + 2R_{kul} Q_1 \frac{\dot{p}_2}{2R_1 Q_1} \right) \quad [172]$$

$$\dot{p}_2 = \frac{D(Q_1 - S_1 \dot{y})}{1 + \frac{R_{h1}}{2R_1 Q_1} + \frac{R_{kul}}{R_1}} \quad [173]$$

Pro celkový popis pneumatického motoru je nutné zahrnout i dynamické jevy. Proto je pro píst sestavena Newton-Eulerova pohybová rovnice.

$$m \ddot{y}_p = -F_p + p_4 S_1 - p_5 S_2 \quad [174]$$

kde  $m_p$  je hmotnost pístu a pístnice a  $F_p$  vnější síla působící proti pohybu pístu.

Z odvozených diferenciálních rovnic tekutinového systému [168], [174] a [175] byl odvozen stavový popis, pro řešení soustavy.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(-F + S_1 x_3 - S_2 x_4) \\ \frac{D(Q_1 - S_1 x_2)}{1 + \frac{R_{h1}}{2R_1 Q_1} + \frac{R_{kul}}{R_1}} \\ D(S_2 x_2 - Q_2) \end{bmatrix} \quad [175]$$

Vstupní parametry pneumatického obvodu jsou v numerické podobě uvedeny v Tab.

16

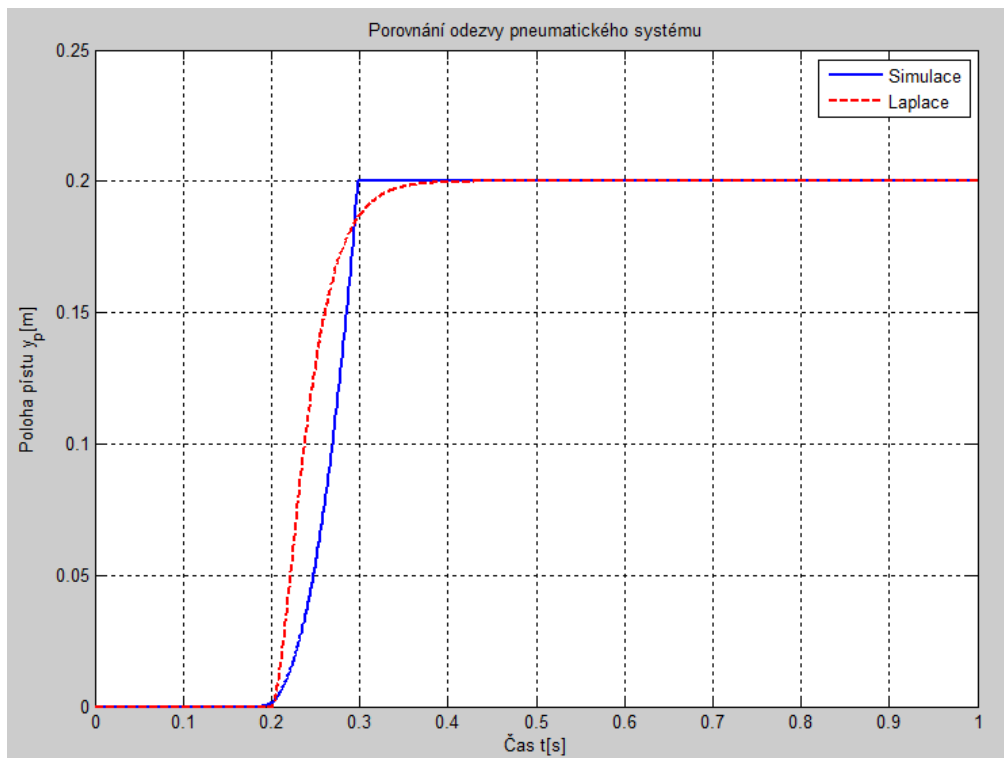
Třecí síla ve válci	$T_p$	50	N
Hmotnost pístu	$m_p$	2	kg
Průměr pístu	$D$	50	mm
Průměr pístnice	$d$	20	mm
Zdvih pístu	$L$	200	mm
Teplota vzduchu	$T$	20	°C
Atmosférický tlak	$p_0$	101 400	Pa
Pracovní tlak	$p_n$	6	bar
Měrná plynová konstanta	$r$	287	J/kg.K
Kinematická viskozita	$\nu$	$10^{-5}$	m <sup>2</sup> /s
Hydraulický odpor rozvaděče na vstupu	$R_1$	50 000	Pa.s/m <sup>3</sup>
Hydraulický odpor škrťacího ventilu	$R_{kul}$	10 000	Pa.s/m <sup>3</sup>
Hydraulický odpor rozvaděče na výstupu	$R_2$	500	Pa.s/m <sup>3</sup>
Průměr přívodní hadice	$D_{h1}$	8	mm
Délka přívodní hadice	$L_{h1}$	1000	mm

Tab. 16 Parametry pneumatického systému

Na základě chování sestavené simulace byla vytvořena přenosová funkce pneumatického válce. K tomuto kroku bylo přistoupeno, aby se snížila celková výpočtová náročnost simulačního programu. Řešení diferenciálních rovnic v Laplaceově oblasti vyžaduje nižší výpočetní výkon než přímá numerická integrace.

$$L(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{0,005s^2 + 0,45s + 10} \quad [176]$$

Koeficienty diferenciální rovnice druhého řádu byly hledány takové, aby řešení co nejlépe aproximovalo výsledky ze simulace pneumatického obvodu získané přímou numerickou integrací.

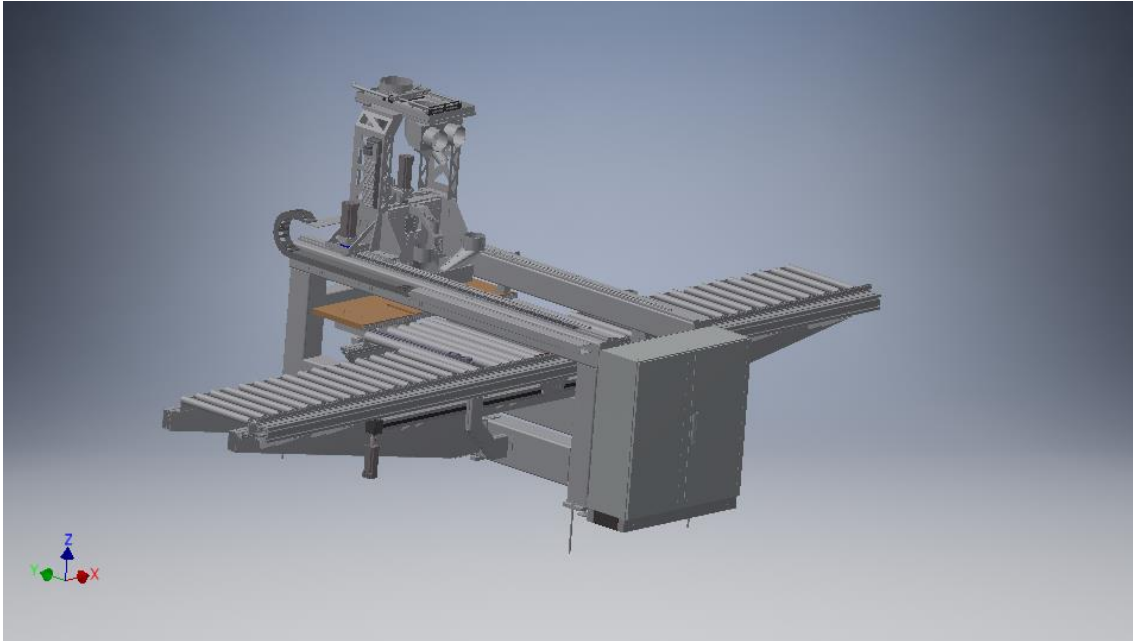


Obr. 34 Porovnání řešení pneu. simulace a přenosové funkce

Modrá křivka je výsledkem přímé numerické integrace uvedeného stavového popisu, Červená křivka, vzniklá z Laplaceova přenosu, se jí snaží aproximovat.

### 3.7 Vizualizace modelu

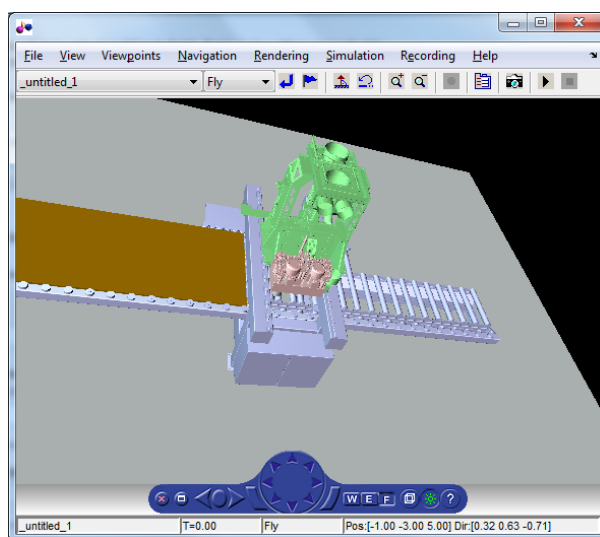
Na dynamickou simulaci CNC stroje navazuje i její vizualizace. Od firmy Houfek a.s. byl dodán CADový model simulovaného stroje. Tento model je určen pro vypracování technické dokumentace, takže je poměrně podrobně vypracovaný. Pro vizualizaci výsledků simulace nejsou potřeba takové detaily, jejichž vykreslování by zbytečně ubíralo výkon výpočtu.



Obr. 35 CAD model CNC stroje

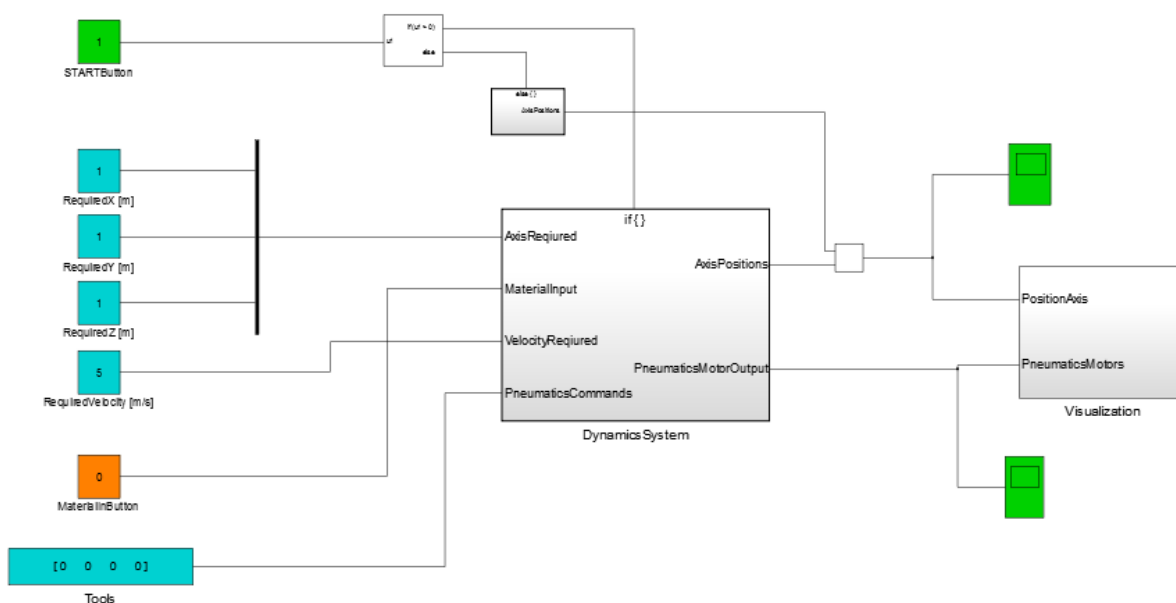
Aby mohl být CAD model přiložen k simulaci zpracovávané v Matlab Simulinku, musí být převeden do odpovídajícího datového formátu. Zatímco Inventor pracuje se soubory typu .ipt pro díl a .iam pro sestavu, tak Simulink se těmito formáty pracovat neumí. Soubory, s nimiž je možné pracovat v Simulinku, jsou formátu virtuální reality .vrm, do kterého ovšem Inventor neumí exportovat. Pro převod je nutný meziformát typu .stl. V Simulinku existuje funkce pro převod STL souboru do formátu VRML.

CADový model vložený do simulace je o něco zjednodušený, aby příliš nezatěžoval výpočet svými detaily, které nejsou důležité pro dynamickou simulaci. Je rozdělen pouze do 3 pohyblivých součástí, pro každou osu jedna součást. Hnědou barvou je zobrazena obráběná dřevěná deska posouvající se po válečkové dráze. Pevný rám válečkové dráhy, včetně portálu je zobrazen světle modrou barvou. Pro odlišení jsou saně osy Y zobrazeny zeleně a svislé saně osy Z červenou barvou.



Obr. 36 Model stroje v rozhraní simulace

Zařazením vizualizace do modelu je dokončeno Simulinkové schéma algoritmu. Vstupem do výpočtu je spouštěcí tlačítko STARTButton, které „zapíná“ stroj, když běží simulace. Další tlačítko je MaterialInButton sloužící k vkládání obrobku. Pokud je aktivní, tak je do dynamické simulace osy X zahrnut i vliv hmotnosti obrobku. Numerické vstupy pro souřadnice udávají požadovanou polohu v prostoru a rychlostní vstup omezuje maximální velikost rychlosti při pohybu na jednotlivých osách. Parametr Tools určuje nástroje, které mají být vysunuty do pracovní polohy.



Obr. 37 Výpočtové schéma stroje vytvořené v Simulinku

## 4 ZÁVĚR

V práci je popsána fyzikální podstata řešeného problému. Jsou uvedeny a odvozeny vztahy pro řešení dynamiky tuhých i poddajných těles a řešení tekutinových systémů. Na základě těchto rovnic by sestaven řešič dynamiky soustav těles. Aplikován byl na modelování jednotlivých posuvových os a doplněn o regulační smyčky. Na základně definovaných budících signálů bylo provedeno hodnocení chování os. Soustava osy Y byla modelována ve dvou variantách a následně byly porovnány odezvy obou variant. Na fyzikální model tekutinového systému byly opět použity odvozené rovnice a byl sestaven stavový model. Všechny jednotlivé systémy byly sestaveny do simulace celého CNC stroje. Byla přidána 3D vizualizace z poskytnutých CAD souborů.

Vytvořený virtuální model je založen na lineárním popisu soustavy. Byly vytvořeny dva virtuální modely pro porovnání jejich chování. Zásadní rozdíl je mezi nimi ve způsobu pohonu osy Y. Varianta používající pro pohon pastorek a ozubený hřeben má už z principu konstrukce mnohem vyšší tuhost převodu. Odezva tohoto systému se blíží soustavě prvního řádu. Popis této varianty byl jednodušší, protože v pohonu nebyly explicitně zahrnuty poddajnosti převodu. Proto je možné uplatnit vyšší dynamiku pohonu a dosažení jednotkové polohy rychlostní smyčky je již za 2 s. Variantě s řemenovým převodem to trvá přibližně 6 s, protože při vyšší dynamice by pravděpodobně došlo k rozkmitání těles. Frekvenční přenosy obou variant jsou velmi podobné. Přenos varianty s řemenovým převodem začíná prudce klesat při nižší frekvenci. Poté má pokles zesílení stejnou směrnici jako varianta s pastorkem a okolo hodnoty 10 Hz se odchýlí k prudšímu poklesu. Je možné, že při podrobnějším modelování by se zde objevil rezonanční vrchol.

Jak bylo zmíněno, sestavený model je téměř lineární. Jediné vložené nelinearity se týkají třecí sil, které mají chování popsáno pomocí nespojitě funkce signum, a zejména omezení velikosti akčního zásahu motoru. Při detailnějším popisování fyzikálních jevů by bylo vhodné uvažovat i nelineárních chování některých prvků. Nelineární chování by mohlo být přidáno k pružným elementům. Při posouvání těles os se mění i délka pružného elementu. Vložením závislosti tuhosti na nekonstantní délce by vznikl nelineární pružný člen. Tím je myšleno zejména proměnnou tuhost řemenu, která se mění v závislosti na jeho odvinuté délce z řemenice a proměnnou tuhost pohybového šroubu při svislém pohybu osy Z. Vhodnější by také bylo více rozpracovat funkci popisující třecí síly. V současně naprogramované variantě pomocí funkce signum není popsán vliv třecích reakce při nehybném tělese. Koeficient

smykového tření by nebyl popsán konstantou, ale byl by funkcí relativní rychlosti. Tato funkce by byla aproximací bodů závislosti  $\mu - v$  získané z měření. Nelineární jev, který má vliv regulaci je vůle v převodech. Tím je myšlena zejména vůle, která se projevuje při změně smyslu pohybu motoru. V převodu musí vždy být, jinak by součásti vůči sobě byly nepohyblivé. V závislosti na kvalitě zpracování převodu se velikost této vůle pohybuje v rozsahu několika úhlových minut až po úhlový stupeň. Další z možných rozšíření by mohlo být zavedení elektricko-mechanického modelu servomotoru. Vstupní veličinou by byl elektrický proud a v řízení by vznikla další regulační smyčka, jejíž parametry by musely být nastavovány.

Rozšíření, které by mohla být na modelu vyzkoušena, se týkají také oblasti regulace. Ve vypracovaném modelu byly zvoleny univerzální PID regulátory, které ovšem mají obtížné možnosti optimálního nastavení. Při zachování lineární soustavy by se optimální regulaci mohly postarat regulátory typu LQR umístěné do kaskádní regulace. Z dynamického modelu by se vyextrahoval stavový popis soustavy analytickým odvozením nebo experimentálním způsobem ze vstupních a výstupních dat modelu. Na něj by už pak bylo snadné aplikovat hledání optimálních parametrů způsobem LQR. Pokud by však model byl nelineární a při jeho dalším rozšiřování bude nutné použít jiné způsoby řízení. Nejpodobnější metodou by bylo použití NQR, které by vyžadovalo sestavení nelineárního stavového popisu a hledání optimálních parametrů regulátoru by muselo probíhat v každém časovém okamžiku. Dalším vhodným způsobem řízení nelineární soustavy by mohl být Pontrjaginův princip maxima. Zde je možné vhodným kritériem zvolit, zda má být pohyb co nejrychlejší, neúspornější, apod. a snadno se vkládají omezení velikosti vstupů.

## 5 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Skalární proměnné

$A_{\text{řem}}$	střední průřez řemenu	[mm <sup>2</sup> ]
$b$	konstanta tlumení	[N.s/m]
$b_r$	poměrné tlumení	[1]
$c$	rychlost šíření tlakového vzruchu	[m/s]
$d$	průměr trubice	[mm]
$L$	délka trubice	[m]
$D$	odpor proti deformaci	[Pa/m <sup>3</sup> ]
$D_{\text{gear}}$	roztečný průměr pastorku	[mm]
$E$	Youngův modul pružnosti v tahu	[N/mm <sup>2</sup> ]
$E_a$	adiabatický modul objemové pružnosti kapaliny	[N/mm <sup>2</sup> ]
$E_k$	kinetická energie	[J]
$E_p$	potenciální energie	[J]
$E_{\text{řem}}$	modul pružnosti v podélném tahu řemenu	[N/mm <sup>2</sup> ]
$F_0$	síla předpětí	[N]
$f$	frekvence	[Hz]
$f_{\text{dyn}}$	dynamický koeficient tření	[1]
$f_k$	vazbová rovnice	[1]
$F_p$	vnější síla působící proti pohybu pístu	[N]
$f_{\text{stat}}$	statický koeficient tření	[1]
$F_Y$	externí síla působící na osu Y	[N]
$F_T$	třecí síla	[N]
$G$	modul pružnosti ve smyku	[N/mm <sup>2</sup> ]
$H$	odpor proti zrychlení	[Pa.s <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> ]
$H(f)$	frekvenční přenos	[1]
$h_{\text{stř}}$	střední výška profilu řemenu	[mm]
$i$	převodový poměr	[1]
$I_m$	moment setrvačnosti motoru	[kg.m <sup>2</sup> ]
$I_1$	moment setrvačnosti hnací řemenice	[kg.m <sup>2</sup> ]
$I_2$	moment setrvačnosti hnané řemenice	[kg.m <sup>2</sup> ]
$I_s$	moment setrvačnosti posuvového šroubu	[kg.m <sup>2</sup> ]
$J$	polární moment průřezu	[mm <sup>4</sup> ]
$k$	konstanta tuhosti	[N/m]
$k_i$	konstanty tuhosti částí řemenu	[N/m]
$k_t$	koeficient úhlové tuhosti	[Nm/rad]
$l_{\text{řem}}$	výpočtová délka řemenu	[mm]
$l_0$	volná délka pružiny	[mm]
$L(s)$	Laplaceův přenos	[1]
$m$	hmotnost	[kg]



$m_2$	hmotnost hnané řemenice	[kg]
$m_p$	hmotnost pístu	[kg]
$m_X$	hmotnost pohyblivé části osy X	[kg]
$m_Y$	hmotnost saní osy Y	[kg]
$m_Z$	hmotnost saní osy Z	[kg]
$M_M$	hnací moment motoru	[Nm]
$n_{vr}$	počet vazbových rovnic	[1]
$n_s$	počet závislých souřadnic	[1]
$n_{st}$	počet stupňů volnosti	[1]
$p$	tlak	[Pa]
$P$	rozteč řemenu	[mm]
$p_n$	napájecí tlak	[Pa]
$p_i$	tlaky v pneumatickém schématu	[Pa]
$\Delta p$	tlakový spád	[Pa]
$p_0$	atmosférický tlak	[Pa]
$Q$	objemový průtok	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_1$	objemový tok vzduchu na vstupu	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_2$	objemový tok vzduchu na výstupu	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_j$	složka vektor zobecněných sil	[N]
$q_j$	složka vektoru nezávislých souřadnic	[m]
$R$	Rayleigho disipativní funkce	[J]
$r$	měrná plynová konstanta	[J/kg.K]
$R_h$	hydraulický odpor proti pohybu	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$R_{h_{lam}}$	hydraulický odpor proti pohybu laminární	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$R_{kul}$	odpor proti pohybu ve škrticím ventilu	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$R_{h1}$	odpor proti pohybu potrubí	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$R_1$	odpor proti pohybu rozvaděče	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$R_2$	odpor proti pohybu výstupu	[Pa.s/m <sup>3</sup> ]
$S$	průřez trubice	[mm <sup>2</sup> ]
$S_1$	plocha pístu	[mm <sup>2</sup> ]
$S_2$	plocha pístu na straně pístnice	[mm <sup>2</sup> ]
$S_i$	síly v pružině	[N]
$s_j$	složka vektoru závislých souřadnic	[m]
$S_t$	povrch tělesa	[m <sup>2</sup> ]
$t$	čas	[s]
$T_0$	tečná reakce	[N]
$T$	termodynamická teplota	[K]
$U(f)$	vstupní signál ve frekvenční oblasti	[1]
$U(s)$	vstupní signál v Laplaceově oblasti	[1]
$v$	rychlost	[m/s]
$V_t$	objem tělesa	[m <sup>3</sup> ]
$w_{řem}$	šířka řemenu	[mm]

$x_3$	poloha posuvového zařízení osy X	[m]
$x_2$	posunutí hnané řemenice při napínání	[m]
$y_2$	posunutí hnané řemenice při napínání	[m]
$y_3$	poloha saní osy Y	[m]
$y_p$	poloha pístu	[m]
$yz_3$	y-nová poloha těžiště saní osy Z	[m]
$Y(f)$	výstupní signál ve frekvenční oblasti	[1]
$Y(s)$	výstupní signál v Laplaceově oblasti	[1]
$z_3$	poloha saní osy Z	[m]
$\alpha$	parametr pro nastavení šíření chyb Baumgartovy stabilizace	[1]
$\beta$	parametr pro nastavení šíření chyb Baumgartovy stabilizace	[1]
$\gamma$	délka postupné vlny	[m]
$\Delta_i$	zobecněná deformace řemenu	[mm]
$\varepsilon$	poměrná deformace	[1]
$\kappa$	tepelný zdroj	[J/m <sup>3</sup> ]
$\lambda$	parametr charakteristické rovnice	[1]
$\lambda_k$	složka vektoru Lagrangeových multiplikátorů	[N]
$\nu$	kinematická viskozita tekutiny	[m <sup>2</sup> /s]
$\nu_\varphi$	poměrné zkroucení	[1]
$\Omega$	vlastní frekvence	[Hz]
$\rho$	hustota	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	normálové napětí	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau$	časová konstanta přechodového jevu	[s]
$\tau_0$	tečné napětí	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\varphi_1$	úhel natočení hnací řemenice	[rad]
$\varphi_2$	úhel natočení hnané řemenice	[rad]
$\varphi_3$	natočení saní osy Z	[rad]
$\varphi_m$	úhel natočení motoru	[rad]
$\varphi_s$	úhel natočení posuvového šroubu	[rad]

#### Vektorové proměnné

$\underline{a}$	nenormovaný vlastní vektor
$\underline{\vec{a}}$	vektor zrychlení
$\underline{B}$	matice tlumení
$\underline{\vec{b}}$	objemová síla
$\underline{D}$	symetrická část rychlostního gradientu
$\underline{f}$	vektor vnějších sil
$\underline{\vec{F}}_i^E$	vektor externí síly působící na těleso
$\underline{\vec{h}}$	tepelný vektor
$\underline{I}$	jednotková matice

$\underline{I}_s$	matice setrvačnosti
$\underline{J}$	Jacobiho matice
$\underline{J}_q$	Jacobiho matice v nezávislých souřadnicích
$\underline{K}$	matice tuhosti
$\underline{L}_s$	moment hybnosti
$\underline{M}$	matice hmotnosti
$\underline{M}_q$	matice hmotnosti v nezávislých souřadnicích
$\vec{M}_{is}^E$	vektor externího momentu působícího na těleso
$\underline{p}$	vektor zobecněných silových účinků
$\vec{p}$	hybnost
$\underline{p}_q$	vektor zobecněných silových účinků v nezávislých souřadnicích
$\underline{q}$	vektor nezávislých souřadnic
$\underline{\dot{q}}$	vektor nezávislých rychlostí
$\underline{\ddot{q}}$	vektor nezávislých zrychlení
$\underline{q}_m$	vektor modálních souřadnic
$\underline{Q}^*$	vektor zobecněných sil bez potenciálních a disipativních sil
$\underline{R}$	matice převodu do závislých souřadnic
$\underline{s}$	vektor závislých souřadnic
$\underline{\dot{s}}$	vektor závislých rychlostí
$\underline{\ddot{s}}$	vektor závislých zrychlení
$\underline{S}_{12}$	matice směrových kosinů
$\vec{t}$	povrchová síla
$\underline{T}$	matice převodu do nezávislých souřadnic
$\underline{u}$	normovaný vlastní vektor
$\underline{U}$	modální matice
$\vec{v}$	vektor rychlosti
$\underline{X}$	vektor pole posunutí
$\underline{\dot{X}}$	vektor pole rychlostí
$\underline{\ddot{X}}$	vektor pole zrychlení
$\underline{\alpha}_{12}$	vektor úhlových zrychlení
$\underline{\Delta}$	matice poměrného tlumení
$\underline{\lambda}$	vektor Lagrangeových multiplikátorů
$\vec{\xi}$	vektor ramene rotace
$\underline{\Omega}_{12}$	matice úhlových rychlostí
$\underline{\Omega}^2$	spektrální matice
$\underline{\omega}_{12}$	vektor úhlových rychlostí
$\underline{\sigma}$	napětí v tekutině vyvolané vnějším působením

## 6 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Umístění Průmyslu 4.0 do kontextu historického vývoje techniky (VOJÁČEK, 2016)	8
Obr. 2 Válečková dráha obráběcího stroje .....	10
Obr. 3 Portál osy Y, který je umístěn na spodním rámu s válečkovou dráhou .....	11
Obr. 4 Saně posouvající se příčně po portálu, na nich umístěn svislý posuv Z .....	12
Obr. 5 Schématické zobrazení matematické simulace .....	27
Obr. 6 Simulinkové schéma numerického řešiče .....	29
Obr. 7 Schématický obrázek kaskádní regulace.....	30
Obr. 8 Model mechanické soustavy osy X.....	31
Obr. 9 Model řemenového převodu .....	32
Obr. 10 Soustava pružin představující řemenový převod .....	33
Obr. 11 Profil ozubeného řemene .....	35
Obr. 12 Odezva rychlostní smyčky na jednotkový skok.....	36
Obr. 13 Odezva polohové smyčky na jednotkový skok.....	37
Obr. 14 Bodeho diagram osy X při uvažování lineární soustavy.....	38
Obr. 15 Bodeho diagram osy X s omezenými akčními zásahy.....	39
Obr. 16 Model mechanické soustavy osy Y s pastorkem a ozubeným hřebenem .....	39
Obr. 17 Odezva rychlostí smyčky na jednotkový skok.....	41
Obr. 18 Odezva polohové smyčky na jednotkový skok.....	42
Obr. 19 Bodeho diagram osy Y lineární soustavy .....	43
Obr. 20 Bodeho diagram osy Y s omezenými akčními zásahy.....	43
Obr. 21 Model mechanické soustavy osy Y s řemenovým převodem .....	44
Obr. 22 Odezva rychlostí smyčky na jednotkový skok.....	46
Obr. 23 Bodeho diagram osy Y lineární soustavy .....	48
Obr. 24 Bodeho diagram osy Y soustavy s omezenými akčními zásahy.....	48
Obr. 25 Porovnání odezvy rychlostní smyčky variant osy Y .....	49
Obr. 26 Porovnání odezvy polohové smyčky variant osy Y .....	50
Obr. 27 Porovnání Bodeho diagramů variant osy Y .....	50
Obr. 28 Schéma osy Z s poddajným pohybovým šroubem.....	51
Obr. 29 Odezva rychlostní smyčky osy Z na jednotkový skok.....	53
Obr. 30 Odezva polohové smyčky osy Z na jednotkový skok.....	54
Obr. 31 Bodeho diagram osy Z lineární soustavy .....	55
Obr. 32 Bodeho diagram osy Z s omezenými akčními zásahy .....	55
Obr. 33 Schéma popisovaného pneumatického obvodu .....	56
Obr. 34 Porovnání řešení pneu. simulace a přenosové funkce.....	59
Obr. 35 CAD model CNC stroje .....	60
Obr. 36 Model stroje v rozhraní simulace.....	61
Obr. 37 Výpočtové schéma stroje vytvořené v Simulinku.....	61

## 7 POUŽITÁ LITERATURA

**Beckhoff.** *AM8543: Servomotor with increased moment of inertia.* [Katalog] místo neznámé : Beckhoff.

**BRDIČKA, M a HLADÍ, A. 1987.** *Teoretická mechanika.* Praha : Academia, 1987. ISBN 21-093-87.

**Houfek a.s.** CNC centrum Mercury. *Houfek a.s.* [Online] [Citace: 13. 7 2018.] <https://www.houfek.com/cnc-centrum-mercury>.

**Houfek a.s.** CNC centrum Orion. *Houfek a.s.* [Online] [Citace: 13. 7 2018.] <https://www.houfek.com/cnc-stroj-orion>.

**Ing. PLEŠEK, Jiří. 2015.** Nelineární mechanika kontinua s příklady. [Online] 30. 9 2015. [Citace: 3. 2 2018.] <http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/MK/MK2015.pdf>.

**KANÓCZ, A. a ŠPANIEL, M. 2007.** *Metoda konečných prvků v mechanice poddajných těles.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03590-0.

**LEDR, Jan. 2018.** Prototyp průběžného vrtacího centra. *TAČR.* Golčův Jeníkov : Houfek a.s., 2018. TH02010454-V6.

**NOŽIČKA, J. 2007.** *Mechanika tekutin.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2007.

**NOŽIČKS, J. 1998.** *Termomechanika.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 1998.

**ODBOR 31300. 2016.** Iniciativa Průmysl 4.0. [Online] 2. 9 2016. [Citace: 18. 11 2017.] <https://www.mpo.cz/assets/dokumenty/53723/64358/658713/priloha001.pdf>.

**STEJSKAL, V. a VALÁŠEK, M. 1996.** *Kinematics and Dynamics of Machinery.* New York : Marcel Dekker, 1996.

**STEJSKAL, V., BAUMA, V. a VAMPOLA, T. 2003.** *Kmitání mechanických soustav-doplňkové skriptum.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2003.

**ŠVENDA, Josef. 2011.** Digitální prototypování v mechatronickém navrhování. *cad.cz.* [Online] Časopis CAD, 2011. [Citace: 18. 11 2017.] <https://www.cad.cz/strojirenstvi/38-strojirenstvi/2309-digitalni-prototypovani-v-mechatronickem-navrhovani.html>.

**VALÁŠEK, M. a kol. 2004.** *Mechanika B.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004.

**VALÁŠEK, M. a kol. 1996.** *Mechatronika.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 1996.

**VOJÁČEK, Antonín. 2016.** Co se skrývá pod výrazy Industry 4.0/Průmysl 4.0. *automatizace.hw.* [Online] HW server s.r.o., 19. 3 2016. [Citace: 18. 11 2017.] <https://automatizace.hw.cz/mimochodem/co-je-se-skryva-pod-vyrazy-industry-40-prumysl-40.html>.

**Wittenstein.** *Low backlash planetary gearheads ECONOMY.* Harthausen : Wittenstein.

## **8 SEZNAM PŘÍLOH**

Program ve formátu .slx na CD