



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ**

**V PRAZE**

---

**Fakulta strojní**

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Odbor mechaniky a mechatroniky

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Mechanické vyhodnocení vstupů letadla

v podmínkách testů letového výzkumu

**Daniel Mašťalíř**

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola

Praha 2018



## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem MECHANICKÉ VYHODNOCENÍ VSTUPŮ LETADLA V PODMÍNKÁCH TESTŮ LETOVÉHO VÝZKUMU vypracoval samostatně pod vedením prof. Dr. Ing. Tomáše Vampoly a s užitím literatury uvedené na konci mé bakalářské práce v seznamu použité literatury.

V Praze .....

.....

Jméno a Příjmení

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval svému vedoucímu mé bakalářské práce, prof. Dr. Ing. Tomáši Vampolovi, za odborný dohled, konzultace, vedení a čas, který mi věnoval, které mi značně pomohly k vypracování této bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která mě během studia na vysoké škole plně podporovala, a to jak finančně, tak psychicky.

Anotační list

Jméno autora:	Daniel Maštalíř
Název BP:	Mechanické vyhodnocení vstupů letadla v podmínkách testů letového výzkumu
Anglický název:	Mechanical evaluation of the aircraft inlet under the flight research test condition
Rok:	2018
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	Bezoborové
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí BP:	prof. Dr. Ing. Tomáš Vampola
Bibliografické údaje:	Počet stran 92 Počet obrázků 48 Počet tabulek 5 Počet příloh 3
Klíčová slova:	Ansys, Kmitání, Matlab, Měření tlaku, Metoda konečných prvků, Pevnostní analýza, Pitotova trubice, Prandtlova trubice, Proudění, Rychloměr, Tekutina, Venturiho trubice, Vlastní frekvence
Keywords:	Ansys, Finite element method, Flow, Fluid, Matlab, Natural frequency, Pitot tube, Prandtl tube, Pressure measurement, Speedmeter, Stress analysis, Venturi tube, Vibration
Anotace:	Bakalářská práce se zabývá tlakoměrnými měřicími sondami v leteckých aplikacích. První část této práce je zaměřena na teorii měření rychlosti proudění tekutin metodou měření tlakových diferencí. Cílem druhé části, analytické, je sestavení výpočtového modelu sondy a jejího uchycení ve vstupním kanále letounu metodou konečných prvků.

Annotation:

The bachelor thesis deals with the differential pressure devices in the aviation applications. The first part is focused on the theory of measurement of the speed of the fluids by the differential pressure devices. The aim of the second part is to create static and dynamic analysis of the pitot tube and its mounting in the air inlet of the aircraft engine by the finite element method.

# OBSAH

Seznam obrázků.....	9
Seznam příloh .....	12
Seznam tabulek .....	13
Seznam použitých zkratk a symbolů.....	14
1. Úvod .....	17
2. Proudění.....	19
2.1. Tekutina.....	20
2.2. Stlačitelnost.....	21
2.2.1. Kapalina.....	21
2.2.2. Plyn.....	21
2.3. Viskozita .....	22
2.4. Ideální plyn.....	23
2.5. Typy proudění v leteckých aplikacích .....	23
3. Metody měření rychlosti proudění .....	24
3.1. Rychloměry .....	25
3.1.1. Mezinárodní standartní atmosféra .....	26
3.1.1.1. Rychloměry s hustotní korekcí .....	28
3.1.2. Tlakoměrná krabice .....	28
3.2. Piezometrická trubice.....	29
3.3. Pitotova Trubice .....	29
3.4. Pitotova a statická sonda .....	29
3.5. Prandtlova sonda (pitot-statická).....	32
3.6. Venturiho trubice .....	34
4. Výpočtová část .....	37
4.1. Zjednodušený statický model.....	42
4.2. Podrobnější model (2D) .....	47
4.2.1. Ohybové kmity .....	48
4.2.1.1. Určení vlastních frekvencí .....	53
4.2.1.2. Výpočtový model s dodatečnou hmotou M.....	56
4.2.2. Výpočet vynucených kmitů.....	61
4.2.2.1. Určení vlastních tvarů kmitů.....	63
4.2.2.2. Vlastní tvar kmitu .....	63
4.3. Výpočtový model s vlastním tlumením soustavy .....	73

5. MKP analýza měřicí sondy .....	76
5.1. Model měřicí sondy.....	77
5.1.1. Preprocessor .....	77
5.1.2. Solver.....	81
5.1.3. Postprocessor .....	82
5.1.3.1. Modální analýza-Výpočet vlastní frekvence soustavy .....	82
5.1.3.2. Statická analýza-Tuhostní analýza.....	83
6. Porovnání metod.....	86
6.1. Doba životnosti sondy.....	87
7. Závěr.....	88
8. Seznam použité literatury .....	89



# SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 – Rychlostní profil laminárního proudění .....	19
Obr. 2 - Rychlostní profil turbulentního proudění .....	19
Obr. 3 - Výpočet rychlosti letounu .....	24
Obr. 4 – Princip funkce rychloměru .....	25
Obr. 5 - Mezinárodní standartní atmosféra .....	27
Obr. 6 - Princip měření rychlosti proudění Pitotovou sondou .....	30
Obr. 7 - Princip měření vzdušné rychlosti .....	33
Obr. 8 - Konstrukce Pitot-statické trubice .....	33
Obr. 9 - Rozložení tlaků podél Pitot-statické trubice .....	34
Obr. 10 – Závislost celkového tlaku na vzdušné rychlosti .....	35
Obr. 11 - Princip měření rychlosti proudění Venturiho trubicí .....	35
Obr. 12 - Isometrický pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla.....	38
Obr. 13 - Boční pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla .....	38
Obr. 14 - Půdorysný pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla.....	39
Obr. 15 - Dimenze a sestava části vstupního kanálu .....	39
Obr. 16 - Závislost odporového koeficientu na Reynoldsově čísle.....	42
Obr. 17 - Náčrt vetknutého nosníku zatíženého spojitým zatížením .....	43
Obr. 18 - Závislost průhybu nosníku na vzdálenosti x .....	46
Obr. 19 - Závislost ohybového momentu nosníku na vzdálenosti x .....	46
Obr. 20 - Závislost ohybového napětí na vzdálenosti x .....	47
Obr. 21 - Průhyb nosníku .....	47
Obr. 22 – Diferenciální element nosníku .....	49
Obr. 23 – Diferenciální element nosníku .....	50

Obr. 24 - Vetknutý nosník bez vnějšího zatížení.....	53
Obr. 25 - Vlastní frekvence pro soustavu bez dodatečné hmoty M .....	56
Obr. 26 - Vetknutý nosník bez vnějšího zatížení s dodatečnou hmotou M .	56
Obr. 27 - Vlastní frekvence pro soustavu s dodatečnou hmotou M .....	60
Obr. 28 - Porovnání vlastních frekvencí .....	61
Obr. 29 - Vetknutý nosník zatížený budícím harmonickým zatížením.....	62
Obr. 30 - Závislost vlastních tvarů kmitů na souřadnici x .....	67
Obr. 31 - Vynucené tvary kmitů .....	68
Obr. 32 - Přírůstky celkové výchylky nosníku.....	69
Obr. 33 - Maximální výchylka v závislosti na souřadnici x .....	70
Obr. 34 - Minimální výchylka v závislosti na souřadnici x.....	71
Obr. 35- Závislost ohybového momentu na souřadnici x .....	72
Obr. 36 - Závislost ohybového napětí na souřadnici x .....	73
Obr. 37 - Průběh výchylky tlumeného kmitání .....	75
Obr. 38 - SOLID 186 (BRICK) .....	76
Obr. 39 - Vodící křivka .....	77
Obr. 40 – Objem tělesa .....	78
Obr. 41 - Síť sondy .....	79
Obr. 42 - Vytváření sítě stěny kanálu .....	79
Obr. 43 - Síť stěny kanálu .....	80
Obr. 44 - Definice okrajových podmínek .....	81
Obr. 45 - Deformace sondy při zatížení tlakem .....	83
Obr. 46 - Distribuce ohybového napětí v sondě při zatížení tlakem .....	84
Obr. 47 - Distribuce ohybového napětí v sondě při zatížení tlakem .....	84

Obr. 48 - Napětí ve spojení kanál-výztuha ..... 85

# **SEZNAM PŘÍLOH**

Příloha 1 - Airframe Instrumentation Specification-Air inlet (CD)

Příloha 2 - Výpočtový kód v programu MATLAB (CD)

Příloha 3 - Výpočtový kód v programu ANSYS Mechanical APDL (CD)

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 - Měrné rychlosti při režimu HSCR [29] .....	37
Tabulka 2 - Vlastní frekvence systému bez dodatečné hmoty .....	55
Tabulka 3 - Vlastní frekvence systému s dodatečnou hmotou M.....	60
Tabulka 4 – Vlastní frekvence soustavy .....	82
Tabulka 5 - Výsledné hodnoty jednotlivých metod.....	86

# SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

$Re$	Reynoldsovo číslo	[-]
$\nu$	Kinematická viskozita	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
$d_h$	Hydraulický průměr	$[m]$
$v$	Rychlost proudění	$[m \cdot s^{-1}]$
$\delta$	Součinitel stlačitelnosti	$[Pa^{-1}]$
$V$	Objem tekutiny	$[m^3]$
$K$	Modul objemové pružnosti	$[Pa]$
$M$	Machovo číslo	[-]
$c$	Rychlost zvuku ve vzduchu	$[m \cdot s^{-1}]$
$\tau$	Tečné napětí	$[Pa]$
$\eta$	Dynamická viskozita	$[Pa \cdot s]$
$\rho$	Hustota	$[kg \cdot m^{-3}]$
$p$	Tlak plynu	$[Pa]$
$V$	Objem plynu	$[m^3]$
$n$	Látkové množství	$[mol]$
$R$	Molární plynová konstanta	$[J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}]$
$T$	Termodynamická teplota	$[K]$
$v_a$	Absolutní rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$
$v_r$	Relativní rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$
$v_v$	Rychlost větru	$[m \cdot s^{-1}]$
$t$	Teplota	$[^{\circ}C]$
$g$	Tíhové zrychlení	$[m \cdot s^{-2}]$
$H$	Nadmořská výška	$[m]$
$q$	Dynamický tlak vzduchu	$[Pa]$
$p_c$	Celkový tlak	$[Pa]$
$p_H$	Statický tlak vzduchu ve výšce H	$[Pa]$
$\kappa$	Poissonova konstanta	[-]

$\rho_o$	Hustota vzduchu při mořské hladině	$[kg \cdot m^{-3}]$
$T_o$	Absolutní teplota vzduchu ve výšce H	$[K]$
$p_o$	Tlak vzduchu při mořské hladině	$[Pa]$
$T_H$	Teplota vzduchu ve výšce H	$[K]$
$p$	Tlak	$[Pa]$
$\rho_H$	Hustota proudící látky ve výšce H	$[kg \cdot m^{-3}]$
$c_p$	Měrná tepelná kapacita při stálém tlaku	$[J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}]$
$c_v$	Měrná tepelná kapacita při stálém objem	$[J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}]$
$p_l$	Tlak ve zúžení	$[Pa]$
$v$	Rychlost proudění v místě vstupu	$[m \cdot s^{-1}]$
$p$	Tlak v místě vstupu	$[Pa]$
$v_l$	Rychlost ve zúžení	$[m \cdot s^{-1}]$
$p_l$	Tlak ve zúžení	$[Pa]$
$S$	Průřez na vstupu trubice	$[m^2]$
$S_l$	Průřez v místě zúžení	$[m^2]$
$F_D$	Odporová síla	$[N]$
$C_D$	Bezrozměrný součinitel odporu	$[-]$
$S$	Příčný průřez tělesa	$[m^2]$
$p_D$	Odporový tlak	$[Pa]$
$q_o$	Maximální hodnota spojitého zatížení	$[N \cdot m^{-1}]$
$E$	Youngův modul pružnosti v tahu	$[N \cdot m^{-2}]$
$J$	Kvadratický moment průřezu	$[m^4]$
$M_o$	Ohybový moment	$[N \cdot m]$
$\sigma_o$	Ohybové napětí	$[MPa]$
$W_o$	Modul průřezu v ohybu	$[m^3]$
$m$	Hmotnost	$[kg]$
$a$	Zrychlení	$[m \cdot s^{-2}]$
$F$	Síla	$[N]$
$A$	Plocha průřezu nosníku	$[m^2]$
$\rho$	Hustota materiálu nosníku	$[kg \cdot m^{-3}]$
$T$	Posouvající síla	$[N]$

$p$	Vnější zatížení	[Pa]
$f$	Vlastní frekvence	[Hz]
$\Omega$	Vlastní kruhová frekvence	[s <sup>-1</sup> ]
$\omega$	Budící frekvence	[s <sup>-1</sup> ]
$M$	Bodová tuhá hmota	[kg]
$p_s$	Neměnná složka tlaku	[Pa]
$p_f$	Flukтуаční složka tlaku	[Pa]
$t$	Čas	[s]
$D$	Vnější průměr sondy	[m]
$d$	Vnitřní průřez sondy	[m]
$\Phi_n$	Vlastní tvar kmitu	[-]
$\Phi_n^*$	Normovaný vlastní tvar	[-]
$y$	Výchylka kmitání	[m]
$q_n$	Kinematické buzení	[-]
$\dot{x}$	1. Derivace x podle souřadnice x	[-]
$x'$	1. Derivace x podle času t	[-]
$b$	Konstanta úměrnosti tlumení	[s <sup>-1</sup> ]
$b_r$	Poměrný útlum	[-]
$\sigma_{oc}$	Časovaná mez únavy v ohybu	[MPa]
$\sigma_{pt}$	Mez pevnosti v tahu	[MPa]
$k$	Součinitel bezpečnosti	[-]



## 1. ÚVOD

V dnešní době je transport osob, ale i nákladu nedílnou součástí našich životů. Lidé obvykle cestují za prací, za rodinou nebo za odpočinkem či na dovolenou. Náklad může cestovat například od dodavatele, mezi továrnami v rámci výroby nebo ke koncovému zákazníkovi. Ve všech těchto případech je kladen důraz na různé atributy. Mohou jimi být: rychlost, cena, pohodlí či bezpečnost/spolehlivost dopravy.

V současné době existuje mnoho způsobů přepravy. Pro přepravu lidí a nákladu využíváme automobilovou (autobusovou/kamionovou), železniční, lodní či leteckou dopravu. V posledních desetiletích se do popředí čím dál tím více dostává doprava letecká. Občas je tomu na úkor ceny, to však mnohé lidi neodrazuje, neboť je zde cena většinou kompenzována rychlostí a pohodlím. Tento specifický trh myslí i na lidi, kteří si nemohou dovolit drahé letenky, a tak na poli leteckých společností vznikají nízkonákladové tzv. low-cost společnosti, které nabízejí přepravní kapacitu na úkor pohodlí. I zde však platí, že bezpečnost cestujících je na prvním místě.

Nehledě na typ aerolinek, všechny se snaží snížit náklady na provoz letadla, což může mít dva následky. První z nich jsou vyšší zisky pro aerolinky a druhý z nich je snížení cen pro cestující. A tak stejně jako v automobilovém průmyslu, si letecké společnosti v zájmu snížení nákladů kupují či pronajímají letadla, která jsou vhodná pro jejich typ přepravy a výhodná na provoz a údržbu. Výrobci letadel se snaží všechny tyto atributy upravit v zájmu zákazníka, aby se udrželi na trhu a dokázali konkurovat ostatním společnostem. A stejně tak jako v jiných technických odvětvích, i zde je potřeba investovat do vývoje, aby mohly firmy vyrábějící letadla pružně reagovat na vývoj trhu. Společnosti vyrábějící motory se je snaží vyvíjet tak, aby měly vyšší tah, účinnost, avšak menší spotřebu ke spokojenosti zákazníka. A tak musí být kladeny vysoké nároky i na ně.

V úvodu této práce jsou stručně uvedeny základní vztahy dynamiky tekutin, které budou následně využity v aplikační části práce. V práci jsou uvedeny základní postupy měření rychlosti pomocí tlakových diferencí, tedy měření

rychlostí pomocí tlakoměrných sond. Praktická část bude zaměřena na uložení Pitotovy sondy ve vstupním kanálu motoru letadla, pro kterou bude vytvořena, pomocí zjednodušených analytických modelů, pevnostní analýza v závislosti na zatížení sondy, které budou řešeny pomocí programu MATLAB. Posledním krokem bude vytvoření 3D modelu v software ANSYS MECHANICAL APDL na základě metody konečných prvků a jeho porovnání s analytickými modely.

## 2. PROUDĚNÍ

Proudění je vždy prostorový (trojrozměrný) děj, při kterém určitý směr pohybu částic tekutiny převažuje nad ostatními. Tekutina se pohybuje z oblasti vyššího tlaku do oblasti s tlakem nižším [1]. Proudění považujeme za určené, je-li popsáno rychlostí, tlakem, teplotou a hustotou [2].

Pohyb tekutiny, který se s časem mění, nazýváme nestacionární. Naopak neměnné proudění je nazýváno stacionárním. Děj dále dělíme na laminární (Obr. 1) a turbulentní (Obr. 2) [3]. Při laminárním proudění (malé rychlosti) se tekutina pohybuje ve vrstvách, naopak při proudění turbulentním (vyšší rychlosti) se pohybuje chaoticky [4]. Přechod mezi těmito dvěma typy je definován pomocí mezní hodnoty Reynoldsova podobnostního čísla, která se nazývá kritická hodnota [5]

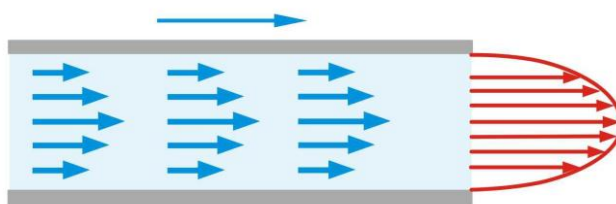
$$Re = \frac{v \cdot d_h}{\nu}, \quad (2.1)$$

kde  $d_h [m]$  hydraulický průměr,

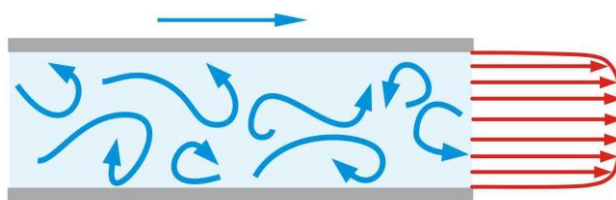
$\nu [m^2 \cdot s^{-1}]$  kinematická viskozita (jmenovatel),

$v [m \cdot s^{-1}]$  rychlost proudění (čitatel).

Pro účely výpočtu tento děj idealizujeme na méně rozměrný (až jednodimenzionální)



Obr. 1 – Rychlostní profil laminárního proudění



Obr. 2 - Rychlostní profil turbulentního proudění

## 2.1. TEKUTINA

Tekutina je látka, která nemá svůj vlastní tvar, a proto se přizpůsobuje okolnímu prostředí a vyplňuje ho [1]. Síly, kterými na sebe působí částice této látky, jsou relativně malé, díky tomu se mohou tyto částice pohybovat a látky tak měnit svůj tvar.

Na rozdíl od pevných látek, tekutina neodolává malým tangenciálním silám, takže se působením těchto sil kontinuálně a nenávratně deformuje, nehledě na velikost působící síly. Tato deformace nezmizí ani po odlehčení vnějších sil.

Poměr síly působící tečně k povrchu tekutiny a plochy této tekutiny se nazývá tečné napětí.

K dokonalé analýze chování látky bychom museli uvažovat každou molekulou zvlášť. Naše výpočty však idealizujeme, a tak si vystačíme s průměrnými hodnotami veličin (průměrná rychlost, teplota, hustota, tlak) pro určitý vzorek zkoumané látky. Abychom mohli s tekutinou počítat v rámci našich schopností a možností, musíme zanedbat její molekulární strukturu a považovat ji za kontinuum, což je spojité prostředí, které zanedbává mezimolekulární vzdálenosti a síly.

Tekutiny můžeme rozdělit na dvě základní podskupiny: kapaliny a plyny [2]. V oboru mechaniky tekutin na tyto látky aplikujeme principy mechaniky. Hlavními postuláty mechaniky tekutin jsou zákony o zachování hmoty, mechanické energie, Newtonovy pohybové zákony a zákony termodynamiky. Pomocí těchto principů jsme schopni předvídat chování některých předem specifikovaných látek [4].

## 2.2.STLAČITELNOST

Stlačitelnost je definována jako změna objemu způsobená změnou působícího tlaku. Vlastnosti látky nám charakterizuje součinitel stlačitelnosti [4]

$$\delta = -\frac{1}{V} \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T \text{ konst}}, \quad (2.2)$$

kde  $\delta [Pa^{-1}]$  součinitel stlačitelnosti,

$V [m^3]$  objem tekutiny,

$\frac{\partial V}{\partial p} [m^3 \cdot Pa^{-1}]$  změna objemu v závislosti na působícím tlaku.

Převrácená hodnota stlačitelnosti je

$$K = \frac{1}{\delta}, \quad (2.3)$$

kde  $K [Pa]$  modul objemové pružnosti.

### 2.2.1. KAPALINA

Síly mezi molekulami kapalin jsou relativně velké (v porovnání s plyny), takže jsou si navzájem méně vzdálené [2]. Se změnou teploty a tlaku téměř nedovolují látce měnit svůj objem [1]. Kapaliny tedy mohou být ve většině případů považovány za nestlačitelné. Pokud je kapacita nádoby, v níž je kapalina umístěna, větší než ona sama, vyplní svým objemem jen část této nádoby.

### 2.2.2. PLYN

Síly molekul plynu jsou ve srovnání s kapalinami menší, což jim dovoluje větší volnost a lehkou změnu objemu v závislosti na tlaku a teplotě [2]. Plyn uzavřený v nádobě zvětšuje svůj objem (rozpíná se), dokud není roven objemu nádoby, proto jsou plynné látky označovány jako stlačitelné [1].

Stlačitelnost plynu může být určena v závislosti na Machově čísle  $M$  [4]

$$M = \frac{v}{c}, \quad (2.4)$$

kde  $v [m \cdot s^{-1}]$  rychlost proudění,

$c [m \cdot s^{-1}]$  rychlost zvuku.

Pokud je rychlost proudění vyšší než  $250 \text{ mph} \approx 0,37 M$  ( $111,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) [6], nelze účinek stlačitelnosti zanedbat. Pokud je změna objemu plynu zanedbatelná, může být plyn považován za látku nestlačitelnou.

### 2.3. VISKOZITA

Tato veličina nám definuje závislost mezi tečným napětím a změnou rychlosti tekutiny. Na základě viskozity vzniká odpor mezi jednotlivými vrstvami tekoucí látky [1]. Při vzájemném posunu jednotlivých vrstev vzniká uvnitř tekutiny tečné napětí, které působí proti směru pohybu působící síly. Toto napětí vzniká i na rozhraní kapalina-stěna [2].

Pro napětí v newtonských tekutinách platí Newtonův zákon tření

$$\tau = \eta \cdot \frac{d_v}{d_y}, \quad (2.5)$$

kde  $\tau [Pa]$  tečné napětí,

$\eta [Pa \cdot s]$  dynamická viskozita,

$\frac{d_v}{d_y} [s^{-1}]$  rychlost smykové deformace.

Mimo viskozity dynamické definujeme i viskozitu kinematickou definovanou jako

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (2.6)$$

kde  $\nu [m^2 \cdot s^{-1}]$  kinematická viskozita,

$\eta [N \cdot m^{-2}]$  dynamická viskozita,

$\rho [kg \cdot m^{-3}]$  hustota.

Viskozita se mění v závislosti na teplotě. U kapalin s rostoucí teplotou klesá a u plynů naopak roste. Pro mnoho tekutin není tečné napětí lineárně

závislé na rychlostním gradientu, takovéto látky nazýváme nenewtonovské [4] a v tomto textu se jimi dále nebudeme zabývat.

## 2.4. IDEÁLNÍ PLYN

Ideální plyn je výpočtový model, kterým jsou idealizovány vlastnosti reálného plynu. Ideální plyn je považován za nevazkou a stlačitelnou tekutinu. V tomto modelu jsou tedy tangenciální síly považovány za nulové. Žádný existující plyn není ideální, avšak pro účely výpočtu může být využito tohoto zjednodušení [4]. Jednotlivé molekuly ideálního plynu jsou považovány za dokonale pružné kuličky, které na sebe silově působí jen v případě srážek [1]. Pro tento model platí stavová rovnice, která charakterizuje daný termodynamický systém [2]

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T, \quad (2.7)$$

kde  $p$  [Pa] tlak plynu,

$V$  [ $m^3$ ] objem plynu,

$n$  [mol] látkové množství,

$R=8,314$  [ $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ ] molární plynová konstanta,

$T$  [K] termodynamická teplota.

## 2.5. TYPY PROUDĚNÍ V LETECKÝCH APLIKACÍCH

Při práci s prouděním v letectví jsou využívány idealizované modely, u kterých jsou zanedbány vlastnosti, které se nemění, nebo pro nás nejsou důležité, protože výrazně neovlivní konečný výsledek [4].

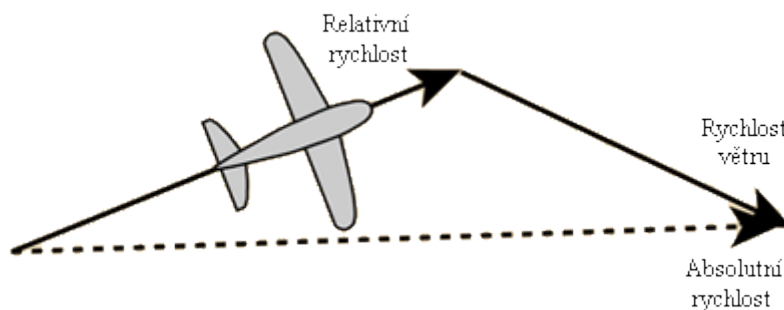
Reálné proudění může být k účelům výpočtu zjednodušeno na:

- proudění ideálního nestlačitelného prostředí –  $\rho = \text{konst}$ ,  $\eta = 0$ ;
- proudění ideálního stlačitelného prostředí –  $\rho \neq \text{konst}$ ,  $\eta = 0$ ;
- proudění nestlačitelného vazkého prostředí –  $\rho = \text{konst}$ ,  $\eta \neq 0$ ;
- proudění stlačitelného vazkého prostředí –  $\rho \neq \text{konst}$ ,  $\eta \neq 0$ ;

### 3. METODY MĚŘENÍ RYCHLOSTI PROUDĚNÍ

Měření rychlosti letounu se převádí na měření tlaku okolního proudění. Rychlost, která je tímto způsobem změřena, se nazývá vzdušná rychlost  $v_r$  (relativní). Jedná se o rychlost, kterou se letadlo pohybuje vůči vzduchu. Rychlost absolutní  $v_a$  (vůči zemi) je získána vektorovým součtem rychlosti relativní  $v_r$  a rychlosti větru  $v_v$ . (Obr. 3) [7].

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_v \quad (3.1)$$



Obr. 3 - Výpočet rychlosti letounu

K tomuto měření slouží trubice a sondy, které jsou instalovány po obvodu letounu. Měřicí zařízení jsou umístovány vně letadla do nerušeného proudu vzduchu, kde nepůsobí žádné síly od motoru, vrtule nebo víry tvořící se na konci křídel, které by ovlivňovaly výsledky měření [8].

Při měření rychlosti letadla jsou tedy sondy montovány na plášť trupu, na křídla a na špičku letadla. Při umístění na křídle je sonda nejčastěji instalována před náběžnou hranu křídla, přičemž osa trubice smí s tětvou křídla svírat nejvýše  $2^\circ$ . Vzdálenost od náběžné hrany by měla odpovídat polovině hloubky křídla a vzdálenost od kraje 10% celkového rozpětí [8]. Pro letouny s raketovým pohonem se volí umístění na dlouhé tyči na špičce letadla. U vrtulníků jsou tato zařízení situována na jeho spodní straně, aby se zabránilo ovlivňování proudu vzduchu způsobené nosným rotorem. Existují dvě nejzákladnější metody, jak měřit rychlost pomocí tlaku [9]. První z nich, Prandtlova (Pitot-statická), je používána při vyšších rozdílech rychlostí. Druhá, Venturiho trubice, se používá pro měření malých rozdílů



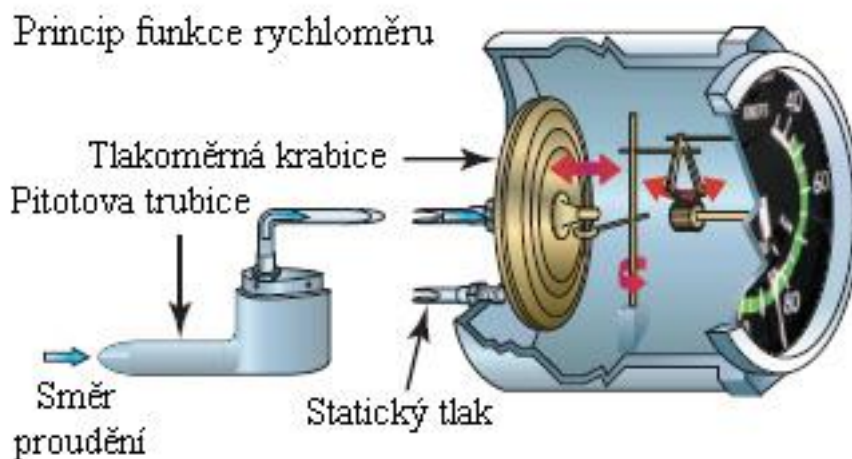
rychlostí, nejčastěji u vrtulníků, které mají nízkou cestovní rychlost (do  $200 \text{ km.h}^{-1}$ ) [10].

V praxi mají letadla několik měřících sond, které nemusí sloužit jen k určení rychlosti. Využívají se totiž například k měření letové výšky, Machova podobnostního čísla nebo rychlosti stoupání (resp. klesání).

Pokud není letoun zrovna v provozu, jsou na sondy nasazeny ochranné kryty a zátky se stuhou červené barvy a nápisem „Remove before flight“, aby se zamezilo vniknutí cizích částí do dutin měřících zařízení. Pro případ zamrznutí měřících částí (dutin sondy), mohou být tato zařízení vybavena i rozmrazovacím systémem.

### 3.1. RYCHLOMĚRY

Rychloměr na Obr. 4 [11] je zařízení ze skupiny letových přístrojů, které pomocí tlakoměrné krabice a ozubeného převodu převádí rozdíl přivedených tlaků na rotační pohyb ručičky, která se pohybuje po kruhové stupnici budíku v kokpitu letounu [8]. Rychloměry jsou cejchovány podle Mezinárodní standartní atmosféry.



Obr. 4 – Princip funkce rychloměru

### 3.1.1. MEZINÁRODNÍ STANDARTNÍ ATMOSFÉRA

MSA (angl. ISA) je model, který definuje fyzikální vlastnosti vzduchu na hladině moře (0 m.n.m)

kde  $t = 15$  [°C] teplota,

$T = 288,15$  [K] termodynamická teplota,

$\rho = 1,225$  [kg · m<sup>-3</sup>] hustota vzduchu,

$p = 1\,013,25$  [hPa] = 760 [torr] tlak vzduchu,

$g = 9,806\,65$  [m · s<sup>-2</sup>] tíhové zrychlení,

$\nu = 1,461 \cdot 10^{-5}$  [m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>] kinematická viskozita [6].

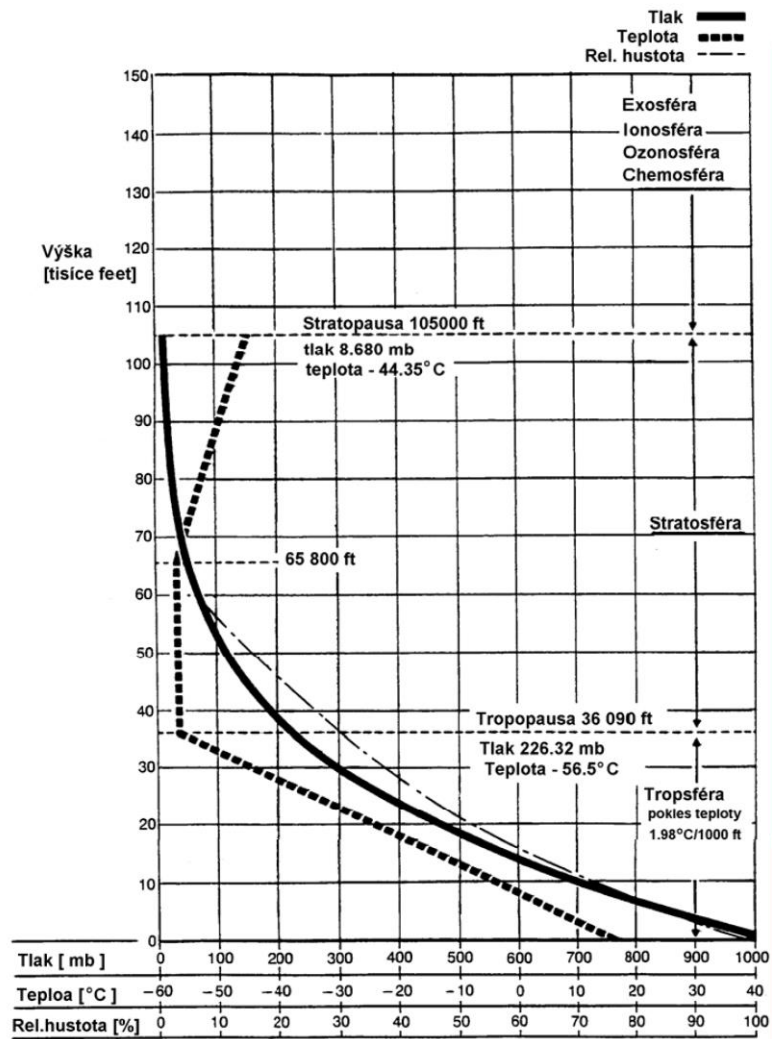
Vzorce pro výpočet jednotlivých veličin na základě MSA ve výšce při zanedbání změny molekulárního složení vzduchu a rozdílu mezi geometrickou a geopotenciální výškou [4]

<i>Teplota</i>	$t = 15 - 0,006\,49 \cdot h$	[°C]	(3.2)
<i>Tlak vzduchu</i>	$p = 1\,013,25 \cdot \left(1 - \frac{0,006\,49}{288,08} \cdot H\right)^{5,2559}$	[hPa]	(3.3)
<i>Hustota vzduchu</i>	$\rho = 1,225 \cdot \left(1 - \frac{0,00649}{288,08} \cdot H\right)^{4,256}$	[kg · m <sup>-3</sup> ]	(3.4)

$H$  [m] nadmořská výška, kde  $H \in \langle 0; 11\,000 \rangle$

Dále existují grafy, ze kterých je možno odečítat přibližné hodnoty veličin (Obr. 5)<sup>[12]</sup>.

MEZINÁRODNÍ STANDARDNÍ ATMOSFÉRA MSA



Obr. 5 - Mezinárodní standardní atmosféra

### 3.1.1.1. RYCHLOMĚRY S HUSTOTNÍ KOREKČÍ

Rychloměry s hustotní korekcí obsahují korekční člen [8], který upravuje převod mechanismu v závislosti na okolním tlaku. Jako korekční člen funguje tlakoměrná krabice, ze které je odčerpán vzduch.

Tyto rychloměry jsou cejchovány podle rovnice

$$q = p_c - p_H = p_H \cdot \left\{ \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \cdot \frac{\rho_0 \cdot T_0}{p_0} \cdot \frac{v^2}{T_H} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - 1 \right\}, \quad (3.5)$$

kde  $q$  [Pa] dynamický tlak vzduchu,

$p_c$  [Pa] celkový tlak vzduchu,

$p_H$  [Pa] statický tlak vzduchu ve výšce  $H$ ,

$\kappa$  [-] Poissonova konstanta,

$\rho_0$  [kg · m<sup>-3</sup>] hustota vzduchu při mořské hladině,

$T_0$  [K] teplota vzduchu při mořské hladině,

$p_0$  [Pa] tlak vzduchu při mořské hladině,

$T_H$  [K] teplota vzduchu ve výšce  $H$ ,

$v$  [m · s<sup>-1</sup>] rychlost.

### 3.1.2. TLAKOMĚRNÁ KRABICE

Tlakoměrná krabice (Obr. 4) je deformační člen rychloměru, který zpracovává tlaky do něj přivedené [8]. Skládá se ze dvou plechových membrán, které jsou k sobě svařeny nebo spájeny. Povrch plechové diafragmy může být z důvodu lepších deformačních vlastností vlnitý. Na vnější stranu membrány je přiveden statický tlak a na vnitřní tlak celkový. Na základě rozdílných tlaků se membrána zdeformuje a její zdvih je převeden na rotační pohyb ručičky rychloměru. Závislost zdvihu diafragmy na rozdílu tlaku je nazývána charakteristikou membrány. Jelikož má tloušťka velký podíl na změně tlaku, musí být vyráběna s přesností na tisíce milimetru. Dalšími nežádoucími ději jsou hystereze a dopružování, při kterém dochází k deformaci membrány ještě krátkou dobu poté, co na ni přestane tlak působit. Těmto nežádoucím vlivům se dá zamezit výrobou této součásti ze silnějšího plechu, výběrem jiného materiálu, navržením tvaru vln a vhodnou technologií výroby.

---

### 3.2. PIEZOMETRICKÁ TRUBICE

Piezometrická trubice je jednoduché zařízení, které se používá k měření statického tlaku proudění. Trubice je instalována kolmo ke stěně měřicího kanálu a na směr pohybu proudění [8]. V letectví na tomto principu funguje statická sonda (statický port), která představuje malý otvor na plášti letadla. Odtud je tlak veden pomocí trubičky do rychloměru. Nachází se symetricky v páru po stranách letadla a mohou sloužit jako primární zdroj vstupu tlaku, nebo jen jako kontrolní zdroj pro případ špatného počasí.

### 3.3. PITOTOVA TRUBICE

Pitotova trubice je zařízení válcového průřezu určené k měření celkového tlaku. Svým tvarem připomíná písmeno L nebo I. Při měření je instalována rovnoběžně proti proudu měřeného média a připojena k tlakoměrné krabici nebo manometru. Úhel náběhu Pitotovy trubice může být až 1,5x vyšší než úhel náběhu křídla [8]. Náleží tedy intervalu od  $-7^\circ$  do  $+25^\circ$ . Měření celkového tlaku probíhá otvorem na špičce sondy. Těmito zařízeními je možno měřit tlaky plynů či velmi čistých kapalin.

### 3.4. PITOTOVA A STATICKÁ SONDA

Soustava Pitotovy a piezometrické trubice (statické sondy) měří rychlost proudění na základě rozdílu statického a celkového tlaku, naměřených na jednotlivých zařízeních. Měřící soustava se skládá ze statické sondy, která je umístěna kolmo na směr proudění a z Pitotovy trubice, jejíž otvor míří proti tomuto proudění. První z těchto sond, statická, měří statický tlak a druhá, Pitotova, tlak celkový.

Tyto trubice jsou dále vedeny do tlakoměrné krabice, která s pomocí mechanismu převede rozdíl tlaků na rotační pohyb ručičky rychloměru a zobrazí jej pilotovi na palubní desce v kokpitu letadla [6]. Tato dvě měřící zařízení nemusí být nutně poblíž sebe, Pitotova sonda může být v přední části letadla a statické porty se mohou nacházet po stranách.

Na základě znalosti Bernoulliho rovnice pro zachování energie proudění, která nám říká, že tlak proudící tekutiny klesá se zvyšující se rychlostí

proudění, můžeme dopočítat tlakový rozdíl, který je roven dynamickému tlaku [8].

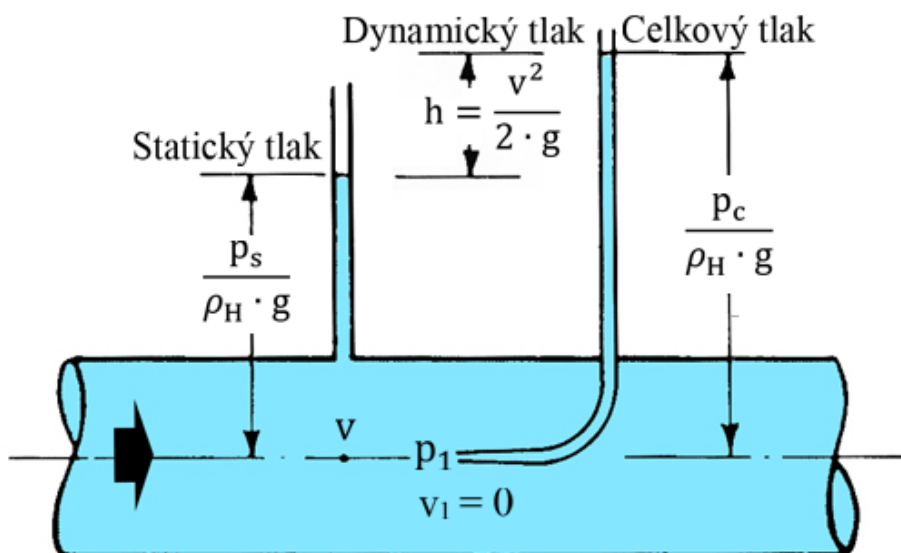
Pro nestlačitelné prostředí platí

$$p + \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} = konst, \quad (3.6)$$

kde  $p$  [Pa] tlak,

$\rho_H$  [kg · m<sup>-3</sup>] hustota proudící látky ve výšce  $H$ ,

$v$  [m · s<sup>-1</sup>] rychlost.



Obr. 6 - Princip měření rychlosti proudění Pitotovou sondou

Sestavení rovnice pro tento případ na Obr. 6 [13]

$$p_s + \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} = p_1 + 0 = p_c. \quad (3.7)$$

Tlak  $p_1$  naměřený v Pitotově trubici je roven celkovému tlaku, neboť rychlost je zde nulová

$$p_s + \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} = p_c. \quad (3.8)$$

Rozdíl tlaků působících na tlakoměrnou krabici se nazývá dynamický tlak a značí se  $q$

$$p_c - p_s = \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} = q. \quad (3.9)$$

Odsud vyjádříme rychlost  $v$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_c - p_s)}{\rho_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{\rho_H}}. \quad (3.10)$$

Pokud za hustotu dosadíme  $\rho_0$  (na základě MSA), indikovaná rychlost bude platit pro hladinu moře. Abychom zjistili, jakou relativní rychlostí se letadlo pohybuje v určité výšce  $H$ , kde se hustota rovná  $\rho_H$ , využijeme rovnost dynamických tlaků

$$\frac{\rho_0 \cdot v_i^2}{2} = \frac{\rho_H \cdot v^2}{2}. \quad (3.11)$$

Poté, po úpravě relativní rychlost  $v$  ve výšce  $H$

$$v = v_i \cdot \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}}. \quad (3.12)$$

Pro stlačitelné prostředí vzduchu a podzvukovou oblast ( $M < 1$ ) platí

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_s}{\rho_H} \cdot \left[ \left( \frac{p_c}{p_s} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}, \quad (3.13)$$

kde  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  [-] Poissonova konstanta,

$c_p$  [ $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ] měrná tepelná kapacita při stálém tlaku,

$c_v$  [ $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ] měrná tepelná kapacita při stálém objemu.

Pro stlačitelné prostředí vzduchu a nadzvukovou oblast ( $M \geq 1$ ) platí [14]

$$\frac{p_c}{p_s} = \frac{\kappa + 1}{2} \cdot M^2 \cdot \left[ \frac{(\kappa + 1)^2 \cdot M^2}{4 \cdot \kappa \cdot M^2 - 2 \cdot (\kappa - 1)} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (3.14)$$

### 3.5. PRANDTLOVA SONDA (PITOT-STATICKÁ)

Na rozdíl od předchozí soustavy měřicích prvků umístěných na letounu odděleně, měření pomocí této sondy probíhá na jednom místě ve dvou blízkých bodech. Stejně jako soustava Pitotovy a statické sondy měří tato sonda rychlost proudění na základě rozdílu statického a celkového tlaku. Tvarově se Prandtlova sonda podobá Pitotově trubici, avšak má po stranách malé kruhové štěrby (statické otvory), pomocí nichž je možno měřit statický tlak proudění. Tyto otvory jsou v místě, kde je měřený tlak roven statickému tlaku v klidné atmosféře (Obr. 9) [12]. Vzdálenost tohoto místa se měří experimentálně.

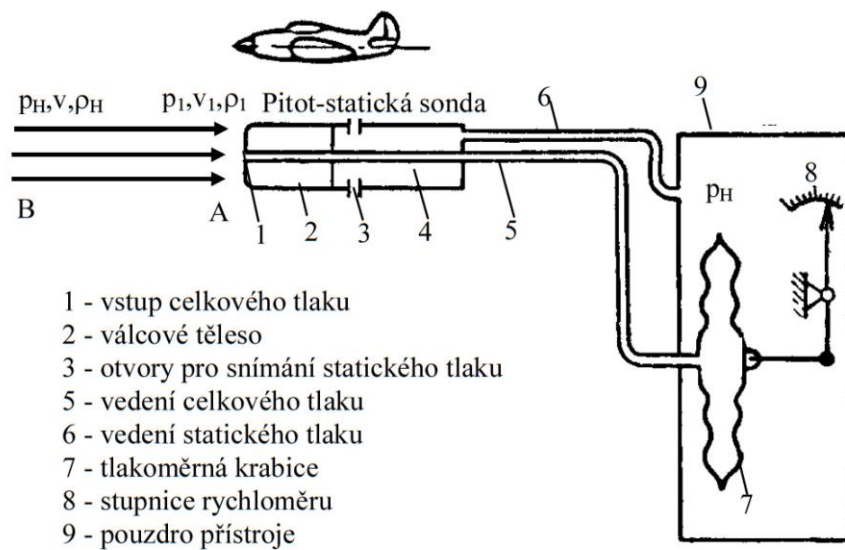
Délka trubice je přibližně 25 cm a její průměr 1 cm [15]. Statický i celkový tlak jsou uvnitř sondy vedeny pomocí izolovaných trubiček a vně sondy odděleně do tlakoměrné krabice (Obr. 7) [12].

Na základě odvození rychlosti v předchozím případě použijeme vzorec (3.10)

$$v = \sqrt{\frac{2 * (p_c - p_s)}{\rho_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{\rho_H}} \quad (3.10')$$

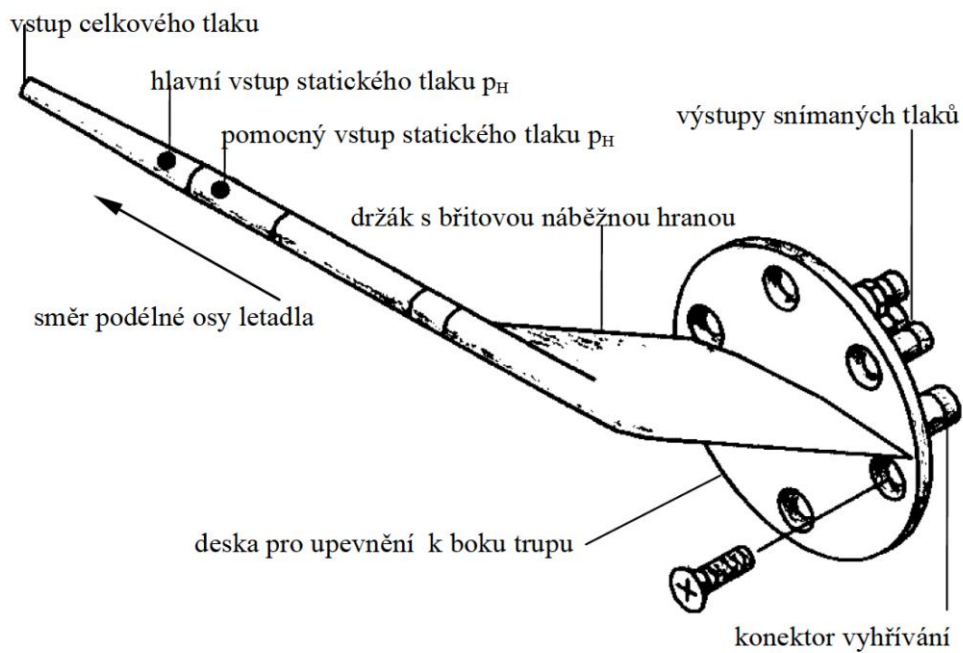


MĚŘENÍ VZDUŠNÉ RYCHLOSTI - PRINCIP

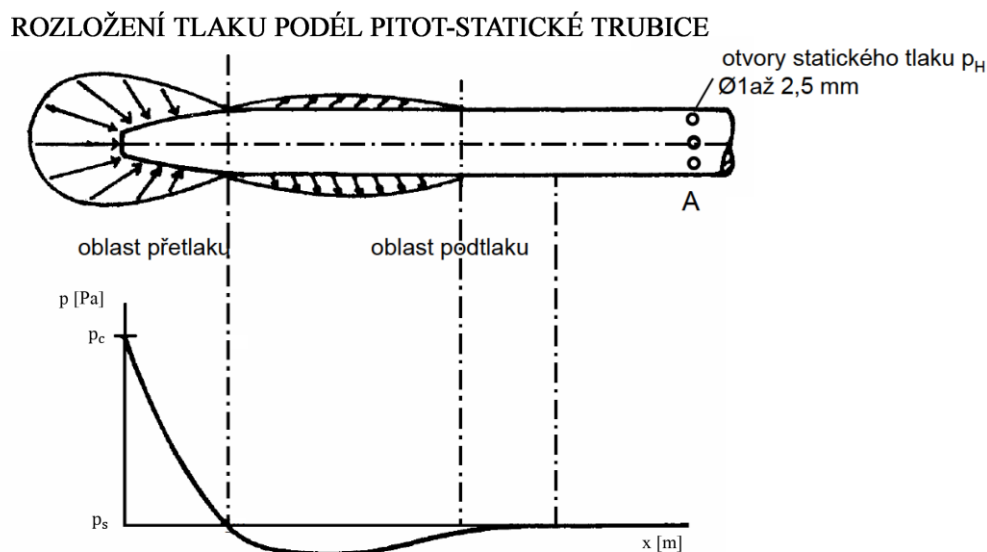


Obr. 7 - Princip měření vzdušné rychlosti

KONSTRUKCE PITOT-STATICKÉ TRUBICE



Obr. 8 - Konstrukce Pitot-statické trubice

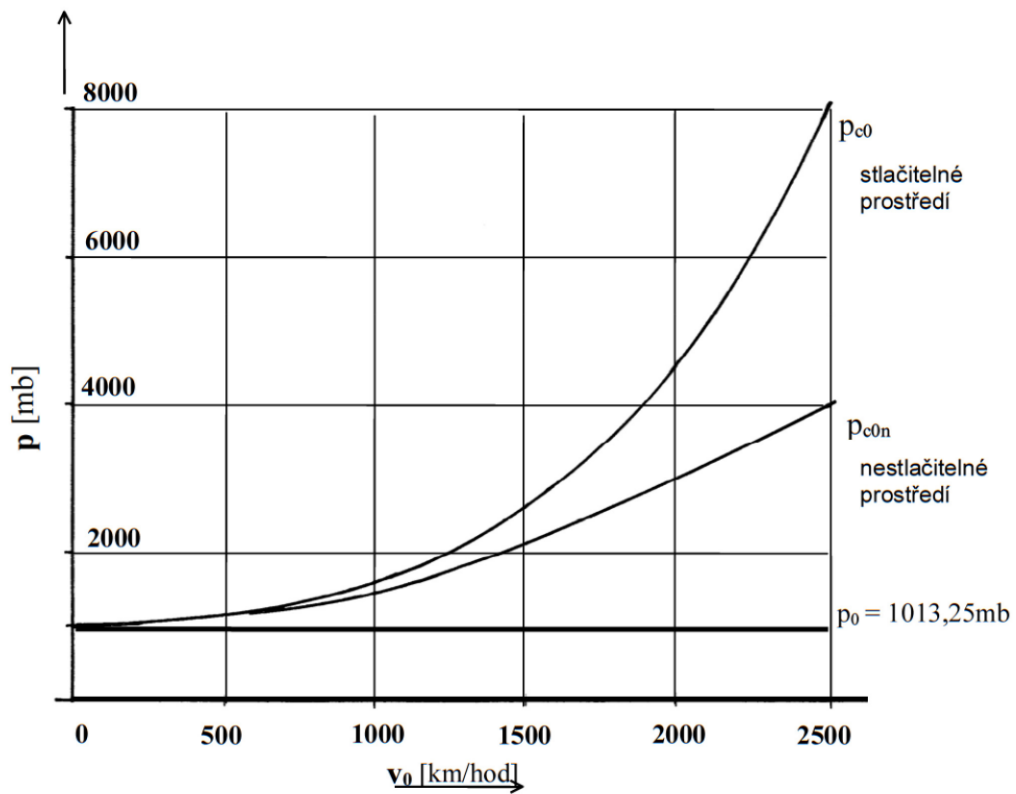


Obr. 9 - Rozložení tlaků podél Pitot-statické trubice

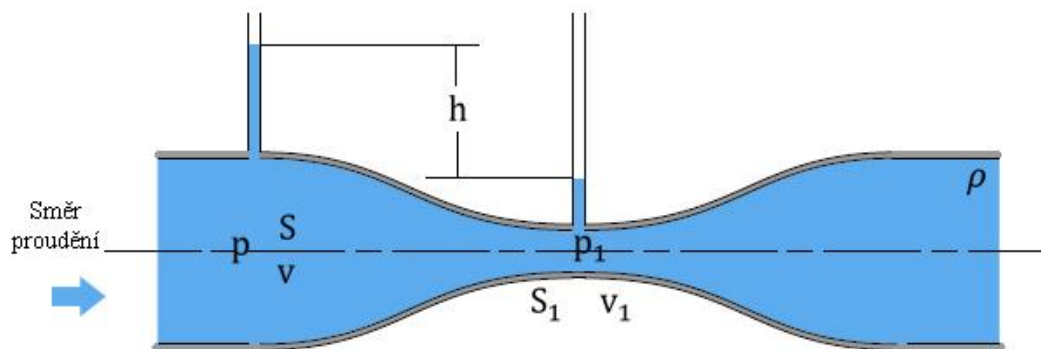
### 3.6. VENTURIHO TRUBICE

Venturiho trubice je stejně jako trubice Prandtlova založena na měření diferencí jednotlivých tlaků pomocí tlakoměru. Tento tlakoměr se zásadně neliší od tlakoměrů používaných v předchozím případě. Jedinou odlišností je to, že musí být označen specifickým součinitelem  $K$  pro Venturiho trubici. Zařízení se skládá ze dvou komolých souosých kuželů, které jsou k sobě spojeny svými užšími základnami. Trubice je orientována tak, aby menší z kuželů směřoval proti proudění. Základní princip měření rychlosti proudění pomocí tohoto aparátu spočívá v zúžené části trubice, kde se na základě rovnice kontinuity u proudění se snižujícím průřezem zvyšuje rychlost, čímž klesá tlak ve zúžení. Zde je změřen vzniklý podtlak, který je následně veden do tlakoměrné krabice. Dále se na obvodu trubice nacházejí statické otvory, které slouží k měření statického tlaku. Tento tlak je poté veden do tlakoměru na vnější stranu tlakoměrné krabice, která se podobně jako v předchozích případech zdeformuje, čímž generuje posuvný pohyb, který je pomocí vnitřního mechanismu tlakoměru převeden na rotační pohyb ručičky, jež se nachází na budíku rychloměru. Při měření Venturiho trubicí se pracuje s nízkorychlostním prouděním, a tak může být stlačitelnost, podle grafu závislosti celkového tlaku (Obr. 10) [12] na rychlosti, média zanedbána.

ZÁVISLOST CELKOVÉHO TLAKU NA VZDUŠNÉ RYCHLOSTI



Obr. 10 – Závislost celkového tlaku na vzdušné rychlosti



Obr. 11 - Princip měření rychlosti proudění Venturiho trubici

Ze znalosti Bernoulliho rovnice (3.6) pro nestlačitelné proudění

$$p + \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} = konst. \quad (3.6')$$

Sestavíme rovnici pro vstup a zúžení (Obr. 11) [16]

$$\frac{\rho_H \cdot v^2}{2} + p = \frac{\rho_H \cdot v_1^2}{2} + p_1, \quad (3.15)$$

kde  $\rho_H [kg \cdot m^{-3}]$  hustota ve výšce  $H$ ,  
 $v [m \cdot s^{-1}]$  rychlost proudění v místě vstupu,  
 $p [Pa]$  tlak v místě vstupu,  
 $v_1 [m \cdot s^{-1}]$  rychlost ve zúžení,  
 $p_1 [Pa]$  tlak ve zúžení.

Rovnice kontinuity

$$v \cdot S = v_1 \cdot S_1, \quad (3.16)$$

kde  $S [m^2]$  průřez na vstupu trubice,  
 $S_1 [m^2]$  průřez v místě zúžení.

Rozdíl tlaků je roven rozdílu hladin manometru  $h$  [8]

$$h = \Delta p = p - p_1 = \frac{\rho_H \cdot v^2}{2} \cdot \left( \frac{S^2}{S_1^2} - 1 \right), \quad (3.17)$$

kde

$$K = \left( \frac{S^2}{S_1^2} - 1 \right). \quad (3.18)$$

Po vyjádření

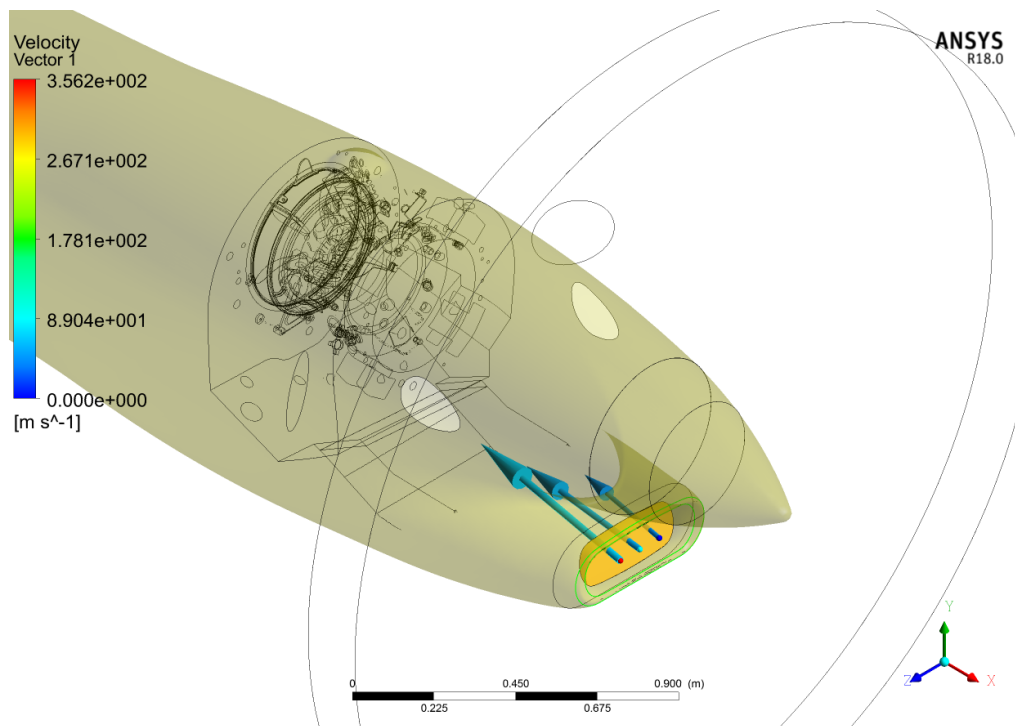
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{K \cdot \rho_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{K \cdot \rho_H}}. \quad (3.19)$$

## 4. VÝPOČTOVÁ ČÁST

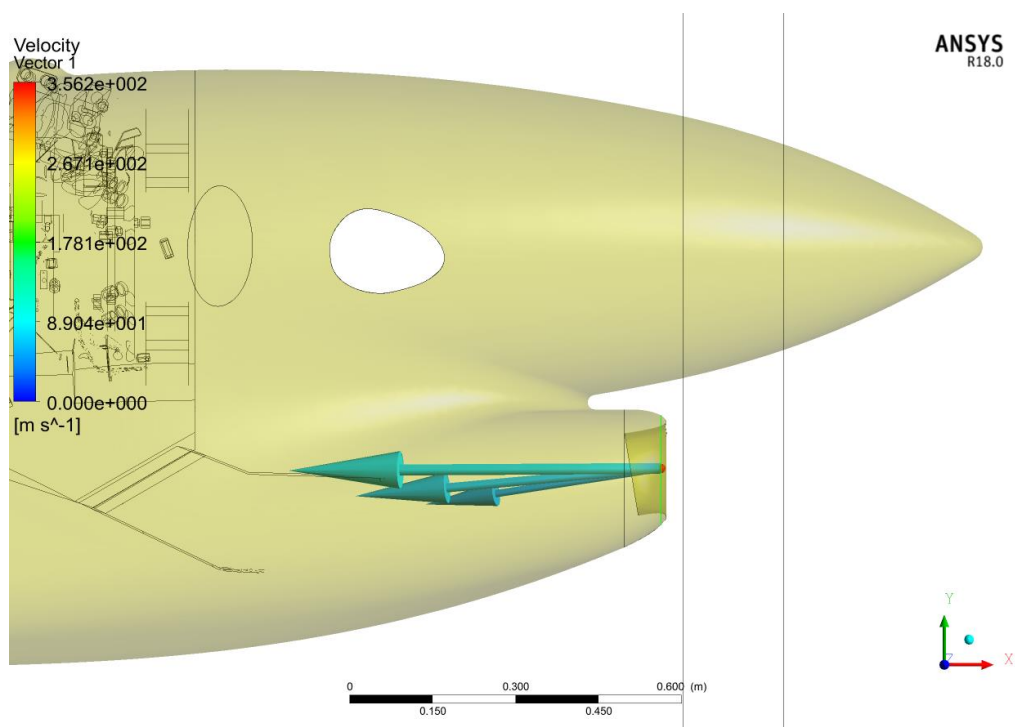
Ve výpočtové části byla provedena pevnostní analýza Pitotovy sondy ve vstupním kanálu motoru letadla v závislosti na postupném zdokonalování jednotlivých modelů a jejich zatížení. Nejprve byla sonda kontrolována na statické zatížení, následně byl model upraven a provedena jeho dynamická kontrola. Dynamická kontrola byla rozdělena na dvě části, z nichž v první bylo zanedbáno tlumení a ve druhém případě již bylo s tlumením počítáno. Každá z kontrol byla dále rozdělena do dvou hlavních částí. Nejprve byla uvažována sonda bez dodatečné hmoty a poté byl na její volný konec umístěn hmotný bod nahrazující vlastní hmotnost kratší části sondy. Výpočty byly provedeny na základě měrných hodnot testovacích režimů motoru (Tabulka 1) [30]. Z nichž byl vybrán režim s nejvyšší měrnou rychlostí, a tedy nejvyšším zatížením. Jedná se o režim HSCR – High Speed Cruise Rating. Jednotlivé rychlosti byly vektorově sečteny a z tří měřicích míst bylo vybráno místo s nejvyšší rychlostí, tedy místo č. 1 s rychlostí  $79,213 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Výsledná hodnota byla zaokrouhlena na nejbližší vyšší celé číslo, následně  $v = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Dále byla tato rychlost zvolena jako referenční pro všechny následující analýzy. Vzniklo tedy zjednodušené symetrické rychlostní pole s maximální rychlostí v ose kanálu. Vektory měrných rychlostí (Obr. 12, Obr. 13 Obr. 14) [29] byly uvažovány za rovnoběžné s osou kanálu.

Tabulka 1 - Měrné rychlosti při režimu HSCR [29]

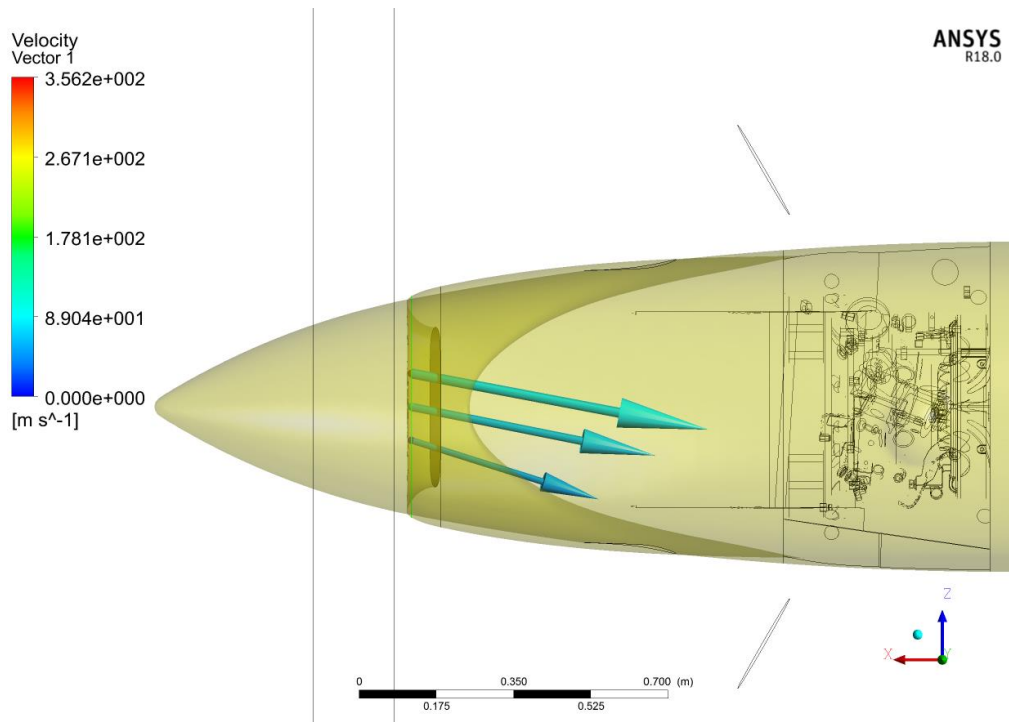
Stowed HSCR				Velocity Components			
Point	X [ m ]	Y [ m ]	Z [ m ]	U [ m/s ]	V [ m/s ]	W [ m/s ]	$v_{Uvw}$ [m/s]
1	1,23	-0,400 66	0,075 9	-76,764 93	-19,148 25	-3,903 46	79,213
2	1,23	-0,400 66	0,000 0	-75,150 46	-18,685 7	-7,863 46	77,837
3	1,23	-0,400 66	-0,075 9	-70,840 55	-15,374 59	-13,405 26	73,719



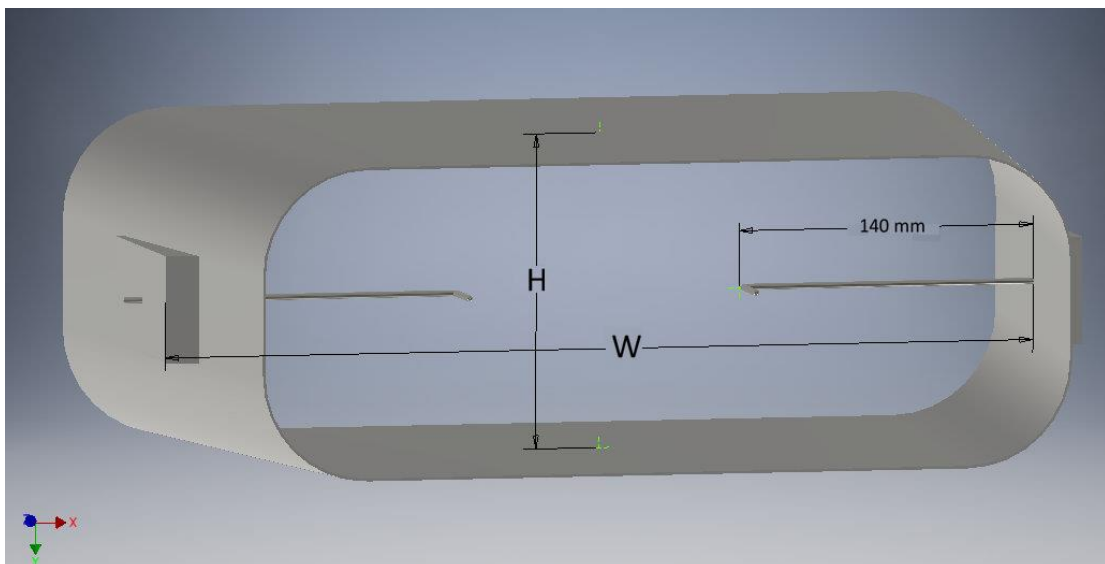
Obr. 12 - Isometrický pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla



Obr. 13 - Boční pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla



Obr. 14 - Půdorysný pohled na měrné rychlostní pole motoru letadla  
 Šířka kanálu (Obr. 15) v místě instalace sondy byla uvažována  $W = 416 \text{ mm}$   
 a vzdálenost osy od stěny kanálu  $\frac{W}{2} = 208 \text{ mm}$ . Na základě přílohy  
 č.1 (*Airframe Instrumentation Specification – Air Inlet*) má zvolená sonda  
 splňovat podmínku  $L' = \frac{W}{3} = 138, \bar{6} \text{ mm}$ , což je po zaokrouhlení na desítky  
 milimetrů  $L = 140 \text{ mm}$ .



Obr. 15 - Dimenze a sestava části vstupního kanálu

Dle přílohy č.1 byl odečten poměr na sebe kolmých částí sondy. Z tohoto poměru jsme vypočítali délku kratší části sondy, která činí 30 mm. Druhým rozměrem kanálu v místě uchycení sondy byla výška  $H = 149 \text{ mm}$ . Ve výpočtové části bylo zanedbáno zaoblení hran kanálu, jeho průřez byl považován obdelníkového tvaru.

Všechny numerické výpočty byly provedeny za pomoci programu MATLAB, 3D model rozvržení soustavy vstupního kanálu a Pitotovy sondy v programu Autodesk Inventor Professional 2018 a tuhostní analýza 3D modelu byla vytvořena metodou konečných prvků v programu ANSYS MECHANICAL s licencí ACADEMIC.

Testovací mód HSCR byl definován pro výšku 9 144 m n.m. V této výšce má vzduch odlišné vlastnosti než při zemském povrchu. Tento fakt byl brán v potaz a veškeré veličiny použité v následujících výpočtech jsou platné pro vzduch ve výšce  $H = 9\,144 \text{ m}$ . Všechny vstupní, výstupní hodnoty a mezihodnoty byly v této práci zaokrouhleny pro účel přehlednosti na dvě platná desetinná místa. Hodnoty použité k výpočtům v programu MATLAB byly použity bez našeho dodatečného zaokrouhlování.

Použité vlastnosti vzduchu ve výšce  $H = 9\,144 \text{ m}$  [17]:

$c = 303,174 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$  Rychlost zvuku ve vzduchu

$\eta = 1,499 \cdot 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$  Dynamická viskozita vzduchu

$t = -44,44 \text{ [}^\circ\text{C]}$  Teplota vzduchu

$p_a = 30\,089,6 \text{ [Pa]}$  Atmosférický tlak

$\rho = 0,4583 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$  Hustota vzduchu

K posouzení vlivu stlačitelnosti byl použit vztah pro výpočet Machova podobnostního čísla (2.4)

$$M = \frac{v}{c} = \frac{80}{303,174} = 0,26. \quad (2,4')$$

Vzhledem k rychlosti proudění,  $v = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , bylo během výpočtů proudění považováno za nestlačitelné, neboť Machovo podobnostní číslo nepřekročilo hranici 0,38 [6].



K určení typu obtékání sondy bylo použito Reynoldsovo podobnostní číslo (2.1)

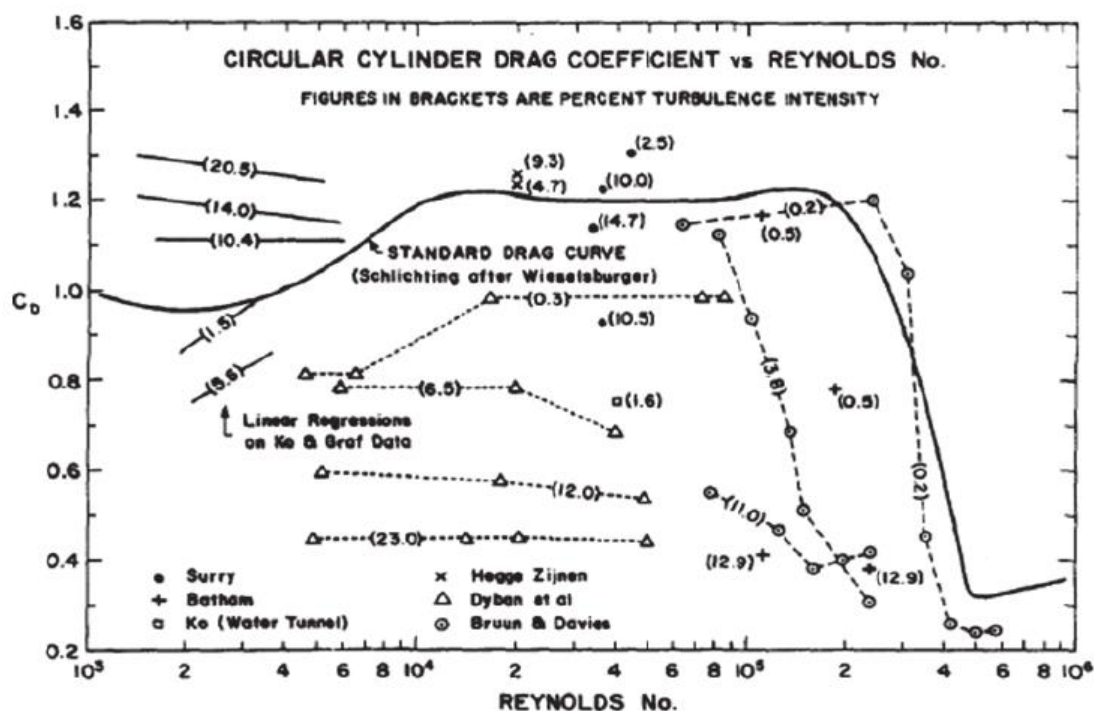
$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{v \cdot D \cdot \rho}{\eta} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,46}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 7\,334, \quad (2,1')$$

kde  $D [m]$  charakteristický rozměr,  
 $\nu [m^2 \cdot s^{-1}]$  kinematická viskozita.

Z výsledku jsme získali Reynoldsovo číslo, pomocí kterého byl přiřazen součinitel odporu sondy. Z dostupných dat však nebylo možno rekonstruovat funkci popisující přesný rychlostní profil proudění. Profil jsme tak idealizovali a nahradili ho profilem obdelníkovým tak, že z něj vzniklé lineární a plošné zatížení bylo rovnoměrné a jeho hodnota odpovídala maximální hodnotě ve středu kanálu. Tímto způsobem byl vytvořen model, jehož nároky jsou na pevnostní vlastnosti součásti vyšší než u reálné sondy. Pro výpočet síly působící na sondu byl použit vzorec pro výpočet odporové síly [5]

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,14 \cdot 0,46 \cdot 80^2 \quad (4.1)$$
$$= 0,68N,$$

kde  $F_D [N]$  odporová síla,  
 $C_D [-]$  bezrozměrný součinitel odporu,  
 $S [m^2]$  příčný průřez tělesa.



Obr. 16 - Závislost odporového koeficientu na Reynoldsově čísle

Vzhledem k nedostupnosti přesných hodnot součinitele odporu  $C_D$  pro válcová tělesa v závislosti na Reynoldsových číslech, jsme byli nuceni odčítat hodnotu z empiricky vytvořeného grafu (Obr. 16) [18]. Oblasti, ve které se nachází toto obtékání náleží odečtená hodnota  $C_D = 1,1$ .

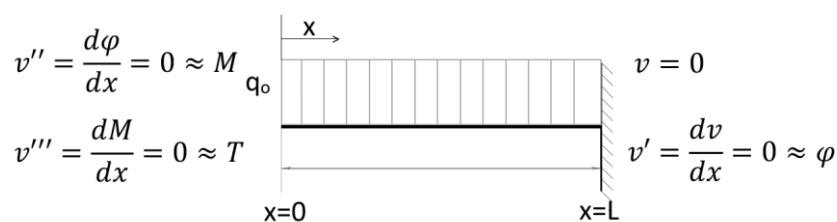
Pro výpočet tlaku byl následně použit vzorec

$$p_D = \frac{F_D}{S} = \frac{0,68}{0,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 1\,613,26 \text{ Pa.} \quad (4.2)$$

#### 4.1. ZJEDNODUŠENÝ STATICKÝ MODEL

Výpočet zjednodušeného statického modelu provedeme pomocí úplné diferenciální rovnice průhybové čáry. Model Pitotovy sondy zjednodušíme na případ dokonale vetknutého ocelového nosníku mezikruhového průřezu o vnějším průměru  $D = 3 \text{ mm}$ , vnitřním průměru  $d = 0,5 \text{ mm}$  a délce  $L = 140 \text{ mm}$  (Obr. 17). Zatížení sondy budeme předpokládat rovnoměrné, lineární spojitě s konstantní hodnotou  $q_0$  po celé délce sondy. Kmitání nosníku probíhá jen v jedné rovině, takže jediným zatížením, které na něj působí je ohyb. Při řešení bude souřadný systém umístěn na volném

konci nosníku. Souřadnice roste směrem od volného konce tak, že volný konec nosníku  $x = 0$  a místo vetknutí nosníku  $x = L$ .



Obr. 17 - Náčrt vetknutého nosníku zatíženého spojitým zatížením

Průběh spojitého zatížení

$$q(x) = q_0, \quad (4.3)$$

kde  $q_0 [N \cdot m^{-1}]$  maximální hodnota spojitého zatížení.

Pro výpočet spojitého liniového zatížení v jednotkách  $N \cdot m^{-1}$  z odporového tlaku v jednotkách  $N \cdot m^{-2}$  budeme muset hodnotu tlaku vynásobit příčným rozměrem  $D$ .

Platí

$$q_0 = p_D \cdot D = 1\,613,26 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 4,84 \, N \cdot m^{-1}. \quad (4.4)$$

Postupnou integrací úplné diferenciální rovnice průhybové čáry  $v^{IV}(x)$  získáme  $v(x)$  <sup>[19]</sup>

$$v^{IV}(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J} = \frac{q_0}{E \cdot J} \quad (4.5)$$

$$v^{III}(x) = \frac{q_0}{E \cdot J} \cdot x + C_1, \quad (4.6)$$

$$v^{II}(x) = \frac{q_0}{E \cdot J} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2, \quad (4.7)$$

$$v^I(x) = \frac{q_0}{E \cdot J} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3, \quad (4.8)$$

$$v(x) = \frac{q_0}{E \cdot J} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4, \quad (4.9)$$

kde  $E [N \cdot m^{-2}]$  Youngův modul pružnosti v tahu

$J [m^4]$  kvadratický moment průřezu.

Vztah pro kvadratický moment průřezu trubky

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} \cdot (3 \cdot 10^{-34} - 5 \cdot 10^{-44}) \quad (4.10)$$

$$= 3,97 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4.$$

Okrajové podmínky

$$v'''(x = 0) = 0 \approx T(x = 0), \quad (4.11)$$

$$v''(x = 0) = 0 \approx M_o(x = 0), \quad (4.12)$$

$$v'(x = L) = 0 \approx \varphi(x = L), \quad (4.13)$$

$$v(x = L) = 0. \quad (4.14)$$

Dosazením okrajových podmínek (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) do úplné diferenciální rovnice průhybové čáry získáme integrační konstanty

$$C_1 = 0, \quad (4.15)$$

$$C_2 = 0, \quad (4.16)$$

$$C_3 = -\frac{q_0 \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot J}, \quad (4.17)$$

$$C_4 = \frac{3 \cdot q_0 \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J}. \quad (4.18)$$

Dosazením vypočtených konstant do rovnice průhybu (4.9)

$$v(x)_{MAX} = \frac{q_0}{24 \cdot E \cdot J} \cdot (x^4 + 3 \cdot L^4 - 4 \cdot L^3 \cdot x). \quad (4.19)$$

Maximální hodnota průhybu  $v(x)$  je dosažena ve vzdálenosti  $x = 0$ , odtud

$$v(x)_{MAX} = \frac{4,84}{24 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,97 \cdot 10^{-12}} \quad (4.20)$$

$$\cdot (0^4 + 3 \cdot 0,14^4 - 4 \cdot 0,14^3 \cdot 0)$$

$$= 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

Pro získání průběhu ohybového momentu využijeme vztah

$$v''(x) = \pm \frac{M_o(x)}{E \cdot J}, \quad (4.21)$$

kde  $M_o$  [N · m] ohybový moment.

Pro moment

$$M_o(x) = -v''(x) \cdot E \cdot J = -E \cdot J \cdot \frac{q_o \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} M_{oMAX} = M_o(x=L) &= -\frac{q_o \cdot L^2}{2} = -\frac{4,84 \cdot 0,14^2}{2} \quad (4.23) \\ &= -47,4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Výpočet napětí

$$\sigma_o = \frac{|M_o|}{W_o}, \quad (4.24)$$

kde  $\sigma_o$  [Pa] ohybové napětí,  
 $W_o$  [m<sup>3</sup>] modul průřezu v ohybu.

Pro výpočet průřezového modulu v ohybu

$$W_o = \frac{J}{e} = \frac{J}{\frac{D}{2}} = J = \frac{\pi}{32} \cdot \left( D^3 - \frac{d^4}{D} \right) \quad (4.25)$$

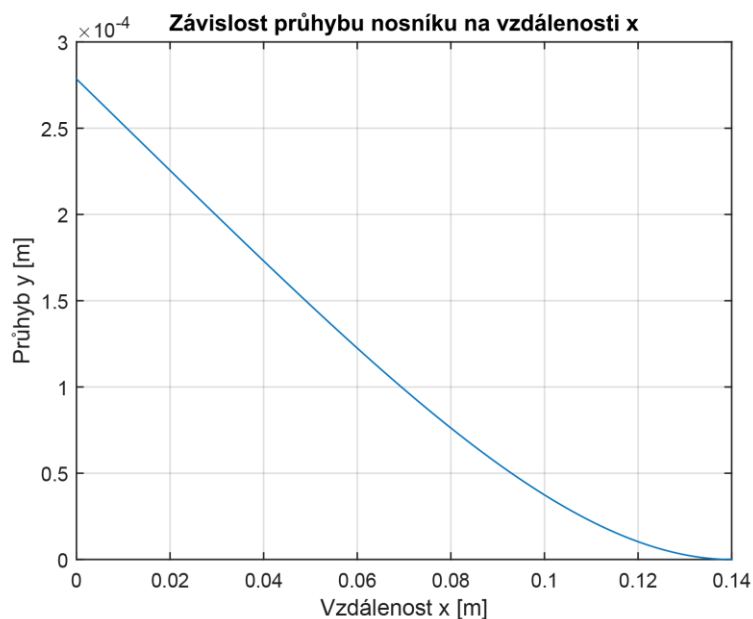
Pro výpočet maximálního napětí v ohybu

$$\sigma_{oMAX} = \frac{|M_{oMAX}|}{W_o}. \quad (4.26)$$

Dosazením (4.23) a (4.25) do (4.26) získáme maximální ohybové napětí

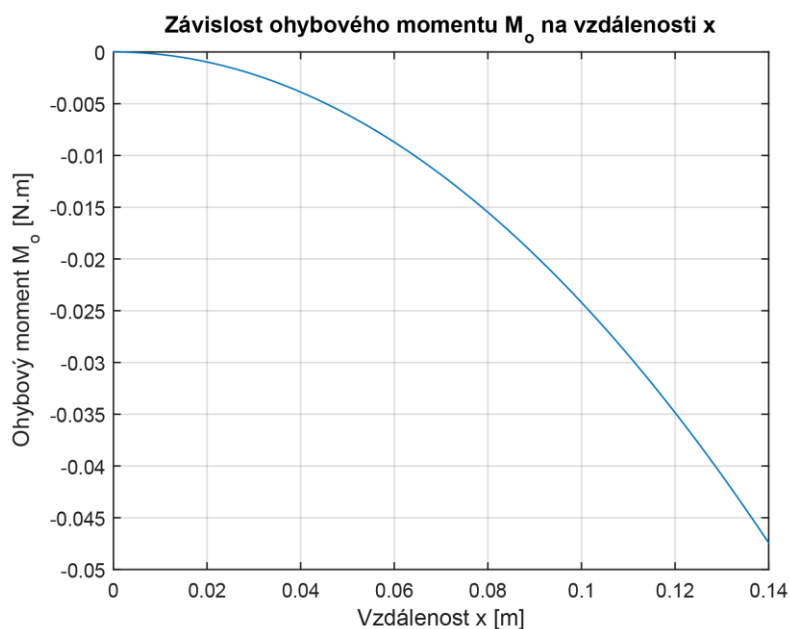
$$\sigma_{oMAX} = \frac{|M_{oMAX}|}{W_o} = \frac{|-47,4 \cdot 10^{-3}|}{2,65 \cdot 10^{-9}} = 17,91 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \quad (4.27)$$

Pomocí programu MATLAB byl sestaven výpočtový kód, na jehož základě vznikly výstupy pro průhyb sondy, moment působící na sondu  $M_o$  a ohybové napětí  $\sigma_o$ . V prvním grafu (Obr. 18). je znázorněná závislost průhybu sondy na souřadnici  $x$ . V bodě  $x = 0$  má sonda maximální výchylku  $v_{MAX} = 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , zatímco v bodě  $X = L$  je výchylka podle očekávání nulová, neboť je zde nosník vetknut.



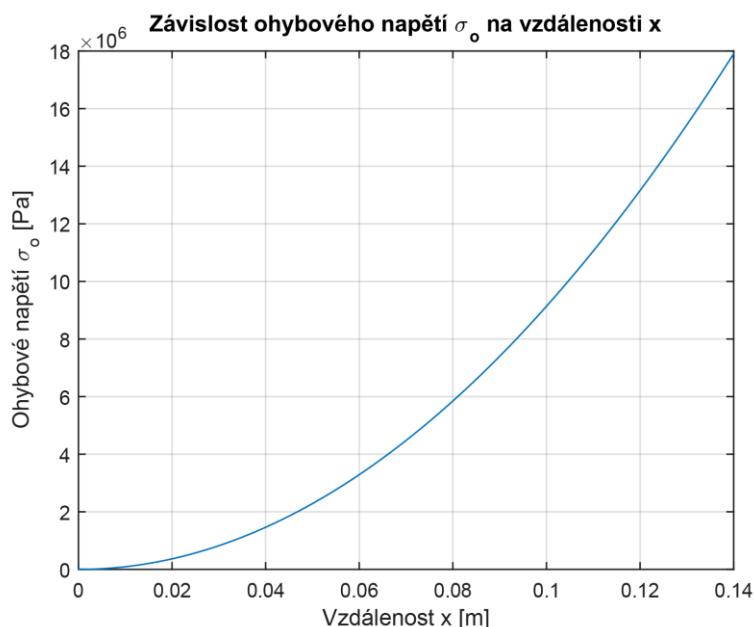
Obr. 18 - Závislost průhybu nosníku na vzdálenosti x

Na dalším obrázku (Obr. 19) můžeme vidět závislost ohybového momentu na souřadnici  $x$ . Stejně tak jako v prvním případě, i tento graf vyšel podle očekávání, neboť na volném konci  $x = 0$  je hodnota ohybového momentu rovna nule, zatímco v místě vetknutí nosníku je ohybový moment maximální s hodnotou  $M_{oMAX} = -47,4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ .



Obr. 19 - Závislost ohybového momentu nosníku na vzdálenosti x

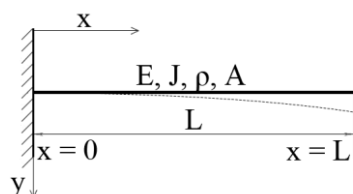
Poslední sledovanou veličinou je napětí v ohybu (Obr. 20). Z předpisu je zřejmé, že je napětí závislé na ohybovém momentu. Pro nosník s neměnným průřezem se u napětí očekává podobný tvar křivky jako u ohybového momentu. I zde vše vyšlo podle předpokladů a nejvyšší hodnota napětí v ohybu je v místě  $x = L$ , a to hodnota  $\sigma_{oMAX} = 17,91 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .



Obr. 20 - Závislost ohybového napětí na vzdálenosti  $x$

#### 4.2. PODROBNĚJŠÍ MODEL (2D)

Při výpočtech podrobnějšího modelu bude bráno v potaz dynamické zatížení sondy a její dodatečná hmota. Nejprve bude sestavena pohybová rovnice, poté budou vypočteny vlastní frekvence jednotlivých modifikací (bez hmoty  $M$  a s hmotou  $M$ ), dále vlastní tvary kmitů a jako poslední bude vypočtena deformace, ohybový moment a ohybové napětí.



Obr. 21 - Průhyb nosníku

### 4.2.1. OHYBOVÉ KMITY

Předpoklady:

- 1) Vycházíme z lineární teorie pružnosti, při které dochází k malým průhybům.
- 2) Nosník kmitá v jedné rovině.
- 3) Řezy vedené kolmo k neutrální ose nosníku zůstávají při průhybu rovinné a kolmé k ohybové křivce.
- 4) Změna polohy nosníku ve směru kolmém na osu  $x$  je malá ve srovnání s jeho rozměry.
- 5) Během aplikace této metody jsou zanedbány posuny ve směru osy  $x$ .

Pro případ daného kmitání byla použita Newtonova pohybová rovnice, která dává vzniku Bernoulliho-Eulerově rovnici pohybu elementu.

Newtonova pohybová rovnice (II. Newtonův zákon)

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}, \quad (4.28)$$

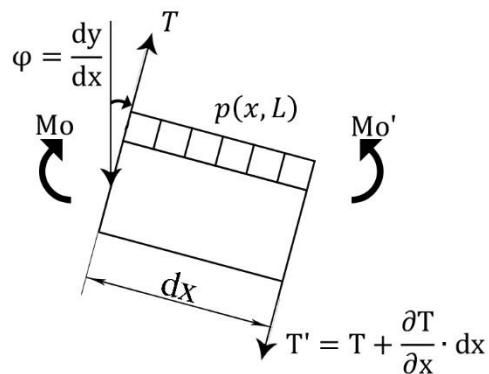
kde  $m$  [kg] hmotnost,

$\vec{a}$  [ $m \cdot s^{-1}$ ] zrychlení,

$\vec{F}$  [N] síla.



Platí:



Obr. 22 – Diferenciální element nosníku

Z Obr. 22 dosadíme do rovnice (4.28)

$$A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T + T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx + p(x, t) \cdot dx, \quad (4.29)$$

kde  $A [m^2]$  plocha průřezu nosníku,  
 $\rho [kg \cdot m^{-3}]$  hustota materiálu nosníku,  
 $T [N]$  posouvající síla,  
 $p [Pa]$  vnější zatížení.

Formální úpravou rovnice (4.29) získáme

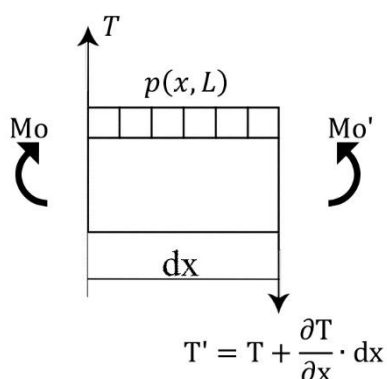
$$A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T + T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx + p(x, t) \cdot dx, \quad (4.30)$$

$$A \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = + \frac{\partial T}{\partial x} + p(x, t). \quad (4.31)$$

Vydělíme rovnici (4.31) součinem  $A \cdot \rho$ , čímž ji upravíme do tvaru [20]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial x} + p(x, t) \right]. \quad (4.32)$$

Dalším krokem bude upravena rovnice (4.32) za použití Schwedlerovy věty:



Obr. 23 – Diferenciální element nosníku

Z podmínky statické silové rovnováhy příčně zatíženého nosníku (Obr. 23)

$$-T + T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx + p \cdot dx = 0. \quad (4.33)$$

Ze statické momentové rovnováhy příčně zatíženého nosníku

$$-M_o + M_o + \frac{\partial M_o}{\partial x} \cdot dx - T \cdot dx - p \cdot \frac{dx^2}{2} = 0, \quad (4.34)$$

kde  $M_o [N \cdot m]$  ohybový moment.

Z rovnice (4.33) vyjádříme závislost zatížení

$$p(x) = -\frac{\partial T}{\partial x}. \quad (4.35)$$

Z rovnice (4.34) vyjádříme závislost posouvající síly, která je označována jako Schwedlerova věta

$$T(x) = \frac{\partial M_o}{\partial x}. \quad (4.36)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry popisující závislost průhybu  $y(x)$  na ohybovém momentu  $M_o$

$$y''(x) = -\frac{M_o}{E \cdot J}. \quad (4.37)$$

Po dosazení (4.37) do (4.36)

$$T = \frac{\partial M_o}{\partial x} = \frac{\partial(-y'' \cdot E \cdot J)}{\partial x} = -E \cdot J \cdot y'''. \quad (4.38)$$

Po dosazení (4.38) do (4.32) vzniká pohybová rovnice [20]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{p(x, t)}{\rho \cdot A}. \quad (4.39)$$

Rovnice bude řešena pomocí Fourierovy metody separace proměnných. Tato metoda bude použita k nalezení řešení ve tvaru součinu dvou různých funkcí, které budou během výpočtu separovány [21]. Při dalším hledání řešení bude rovnice námi řešená (4.39) převedena na homogenní a jednotlivé proměnné budou separovány. Dále budou z rovnice vytvořeny separované funkce, z nichž každá bude na jedné straně rovnice a bude závislá jen na jedné proměnné. Obě funkce si musí být rovny pro všechna  $x$  a  $t$ , což bude zajištěno, pokud obě funkce budou rovny téže libovolné separační konstantě  $\lambda$ , kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . V této práci jsou však řeckým písmenem  $\lambda$  označena vlastní čísla charakteristické rovnice, proto označíme separační konstantu jiným písmenem. Obě z těchto funkcí položíme rovno vhodně zvolené separační konstantě.

Řešení rovnice budeme předpokládat ve tvaru [22]

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (4.40)$$

Po dosazení (4.40) do (4.39) vytvoříme homogenní rovnici pro soustavu bez vnějšího zatížení

$$X \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} \cdot T = X \cdot \ddot{T} + \frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot X^{IV} \cdot T = 0. \quad (4.41)$$

Dosazením separovaného tvaru řešení do pohybové rovnice (4.39) dostaneme rovnici (4.41), kde tečka představuje derivaci podle proměnné  $t$  a čárka podle proměnné  $x$ .

Po vydělení (4.41) výrazem  $X \cdot T$  a separací proměnných, kde levou stranu rovnice označíme  $f(t)$  a stranu pravou  $f(x)$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot \frac{X^{IV}}{X}. \quad (4.42)$$

Z rovnice (4.42) vznikají separované funkce  $f(t)$  a  $f(x)$

$$f(t) = \frac{\ddot{T}}{T}, \quad (4.43)$$

$$f(x) = -\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot \frac{X^{IV}}{X}. \quad (4.44)$$

Obě funkce položíme rovny separační konstantě  $-\Omega_0^2$ , vzniklé funkce položíme rovny 0, zavedeme substituci pro člen  $\Omega_0^2 \cdot \frac{\rho \cdot A}{E \cdot J}$  rovnice (4.46), který označíme  $\alpha^4$  a poté jednotlivé rovnice vyřešíme

$$\ddot{T} + \Omega_0^2 T = 0, \quad (4.45)$$

$$X^{IV} - \Omega_0^2 \cdot \frac{\rho \cdot A}{E \cdot J} \cdot X = X^{IV} - \alpha^4 \cdot X = 0. \quad (4.46)$$

Pro (4.46) vznikne charakteristická rovnice (4.47), jejímž řešením jsou dva reálné a dva imaginární kořeny (4.48)

$$\lambda^4 - \alpha^4 = (\lambda^2 - \alpha^2) \cdot (\lambda^2 + \alpha^2) = 0, \quad (4.47)$$

$$\lambda_1 = +i\alpha \quad \lambda_2 = -i\alpha \quad \lambda_3 = +\alpha \quad \lambda_4 = -\alpha. \quad (4.48)$$

Řešením homogenní rovnice (4.47) je

$$X(x) = C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x). \quad (4.49)$$

Pro (4.45) vznikne charakteristická rovnice (4.50), jejímž řešením jsou dva imaginární kořeny

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = 0, \quad (4.50)$$

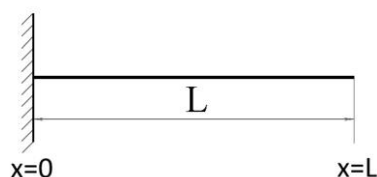
$$\lambda_A = +i\Omega_0 \quad \lambda_B = -i\Omega_0. \quad (4.51)$$

Řešením homogenní rovnice (4.50) je

$$T(t) = C_A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t) + C_B \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t). \quad (4.52)$$

Výsledné řešení rovnice  $y(x, t)$  je součinem funkce  $T(t)$  a  $X(x)$ .

#### 4.2.1.1. URČENÍ VLASTNÍCH FREKVENCÍ



Obr. 24 - Vetknutý nosník bez vnějšího zatížení

Na základě okrajových podmínek určíme řešení rovnice (4.40)

$$y(x=0, t) = 0, \quad (4.53)$$

$$y'(x=0, t) = 0, \quad (4.54)$$

$$-E \cdot J \cdot y''(x=L, t) = 0, \quad (4.55)$$

$$-E \cdot J \cdot y'''(x=L, t) = 0. \quad (4.56)$$

Dosazením (4.49) a okrajových podmínek (4.53), (4.54), (4.55), (4.56)

do řešení (4.40) získáme soustavu 4 rovnic

$$y(x=0, t) = 0, \quad (4.57)$$

$$X(x=0) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot 0) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot 0)) = 0,$$

$$y'(x=0, t) = 0, \quad (4.58)$$

$$X'(x=0) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) - C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot 0) - C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot 0)) = 0,$$

$$-E \cdot J \cdot y''(x = L, t) = 0, \quad (4.59)$$

$$E \cdot J \cdot X''(x = L) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) - C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) - C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)) = 0,$$

$$-E \cdot J \cdot y'''(x = L, t) = 0, \quad (4.60)$$

$$E \cdot J \cdot X'''(x = L) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot L)) = 0.$$

Po dosazení

$$T \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0) = 0, \quad (4.61)$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 1) = 0, \quad (4.62)$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) - C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)) = 0, \quad (4.63)$$

$$T \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot L)) = 0. \quad (4.64)$$

Na základě soustavy rovnic (4.61), (4.62), (4.63), (4.64) sestavíme maticový zápis, kde matici soustavy označíme  $A_1$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\alpha \cdot L) & \sinh(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) & -\sin(\alpha \cdot L) \\ \sinh(\alpha \cdot L) & \cosh(\alpha \cdot L) & \sin(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$[A_1] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

K získání netriviálního řešení položíme frekvenční determinant roven nule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\alpha \cdot L) & \sinh(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) & -\sin(\alpha \cdot L) \\ \sinh(\alpha \cdot L) & \cosh(\alpha \cdot L) & \sin(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.66)$$

V programu MATLAB byl napsán kód, pomocí kterého byla rovnice vyřešena.

Řešením rovnice (4.66) je frekvenční rovnice ve tvaru

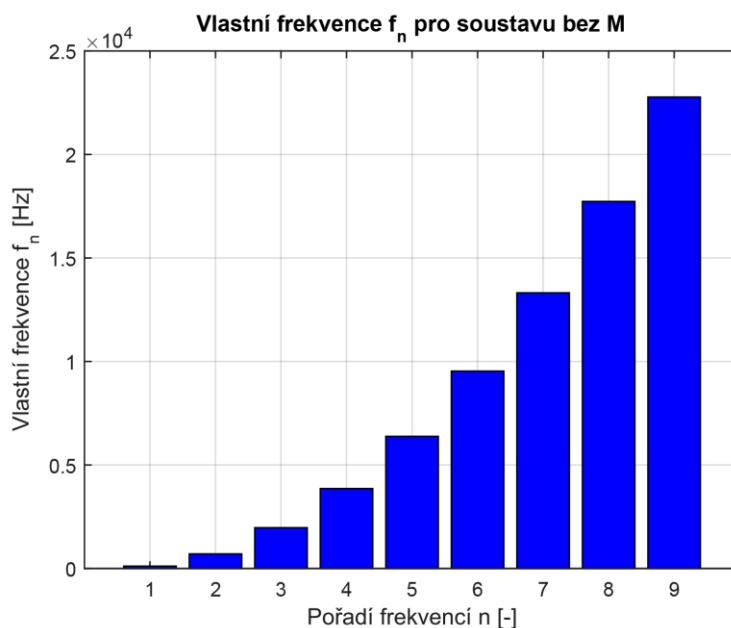
$$1 + \cosh(\alpha \cdot L) \cdot \cos(\alpha \cdot L) = 0. \quad (4.67)$$

Pomocí programu MATLAB najdeme řešení rovnice (4.67) pro  $\alpha$ . Vyjádřením ze substituce využitě v rovnici (4.46) získáme výsledné vlastní kruhové frekvence, které za použití vztahu pro závislost vlastní úhlové frekvence  $\Omega_{on}$  a vlastní frekvence  $f$  převedeme na vlastní frekvence  $f$  (Tabulka 2), (Obr. 25)

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f. \quad (4.68)$$

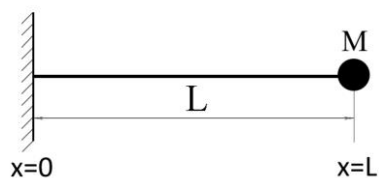
Tabulka 2 - Vlastní frekvence systému bez dodatečné hmoty

$f_1$	112,3 Hz
$f_2$	703,6 Hz
$f_3$	1 970,2 Hz
$f_4$	3 860,9 Hz
$f_5$	6 382,3 Hz
$f_6$	9 534 Hz
$f_7$	1 3316,1 Hz
$f_8$	17 728,5 Hz
$f_9$	22 771,3 Hz



Obr. 25 - Vlastní frekvence pro soustavu bez dodatečné hmoty M

#### 4.2.1.2. VÝPOČTOVÝ MODEL S DODATEČNOU HMOTOU M



Obr. 26 - Vetknutý nosník bez vnějšího zatížení s dodatečnou hmotou M

V tomto výpočtu bude uvažována dodatečná tuhá hmota, která bude umístěna na volný konec sondy ve formě hmotného bodu (Obr. 26). Pro účely výpočtu byla zvolena hmotnost  $M = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ , což přibližně odpovídá hmotnosti kratší části sondy na jejím volném konci.



Postup výpočtu bude analogický, okrajové podmínky budou pro první tři případy stejné, avšak změni se 4. okrajová podmínka, která vychází z D'Alambertova principu [20]

$$y(x=0, t) = 0, \quad (4.69)$$

$$y'(x=0, t) = 0, \quad (4.70)$$

$$-E \cdot J \cdot y''(x=L, t) = 0, \quad (4.71)$$

$$-E \cdot J \cdot y'''(x=L, t) = -M \cdot \ddot{y}, \quad (4.72)$$

kde  $M$  [kg] bodová tuhá hmota.

Z rovnice (4.45) dosadíme za  $\ddot{T}(t)$

$$\ddot{y} = \ddot{T}(t) \cdot X(x) = -\Omega_0^2 \cdot T(t) \cdot X(x). \quad (4.73)$$

Dosazením (4.49) a okrajových podmínek (4.69), (4.70), (4.71), (4.72) do řešení (4.40) získáme soustavu 4 rovnic

$$y(x=0, t) = 0, \quad (4.74)$$

$$X(x=0) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot 0) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot 0)) = 0,$$

$$y'(x=0, t) = 0, \quad (4.75)$$

$$X'(x=0) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) - C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot 0) - C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot 0)) = 0,$$

$$-E \cdot J \cdot y''(x=L, t) = 0, \quad (4.76)$$

$$X''(x=L) \cdot T(t) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) - C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) = 0,$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) - C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -E \cdot J \cdot y'''(x=L, t) &= -M \cdot \ddot{y}, & (4.77) \\
 E \cdot J \cdot X'''(x=L) \cdot T(t) &= -M \cdot \Omega_0^2 \cdot T \cdot X, \\
 E \cdot J \cdot T \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) \\
 &+ C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) \\
 &= -M \cdot \Omega_0^2 \cdot T \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) \\
 &+ C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \\
 &+ C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)), \\
 E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) \\
 &+ C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot L)) \\
 &= -M \cdot \Omega_0^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) \\
 &+ C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) \\
 &+ C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)).
 \end{aligned}$$

Po dosazení

$$T \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0) = 0, \quad (4.78)$$

$$T \cdot \alpha \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 1) = 0, \quad (4.79)$$

$$T \cdot \alpha^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) \quad (4.80)$$

$$- C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)) = 0,$$

$$E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) \quad (4.81)$$

$$+ C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot L) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot L))$$

$$= -M \cdot \Omega_0^2 \cdot (C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot L)$$

$$+ C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot L)$$

$$+ C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot L)),$$

$$E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot (C_1 \cdot [\sinh(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega_0^2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L)]$$

$$+ C_2 \cdot [\cosh(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega_0^2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L)]$$

$$+ C_3 \cdot [\sin(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega_0^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)]$$

$$- C_4 \cdot [-\cos(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega_0^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L)])$$

$$= 0.$$

Na základě soustavy rovnic (4.78), (4.79), (4.80), (4.81) sestavíme maticový zápis, kde matici soustavy označíme  $A_2$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\alpha \cdot L) & \sinh(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) & -\sin(\alpha \cdot L) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$a_{41} = E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot \sinh(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega^2 \cdot \cosh,$$

$$a_{42} = E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega^2 \cdot \sinh(\alpha \cdot L),$$

$$a_{43} = E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L),$$

$$a_{44} = -E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) + M \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L),$$

$$[A_2] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro získání netriviálního řešení položíme frekvenční determinant roven nule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(\alpha \cdot L) & \sinh(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) & -\sin(\alpha \cdot L) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.83)$$

V programu MATLAB byl napsán kód, pomocí kterého byla rovnice vyřešena.

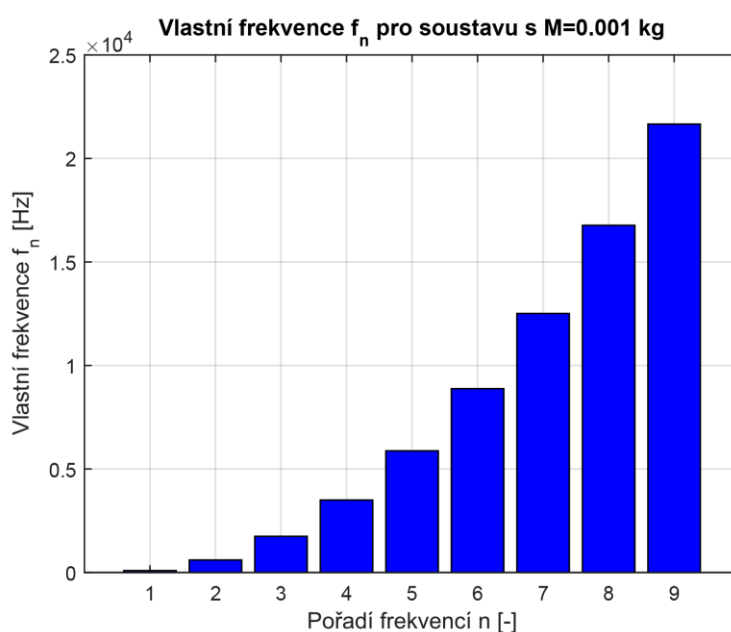
Řešením rovnice (4.83) je frekvenční rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} & 2 \cdot E \cdot J \cdot \alpha^3 + 2 \cdot E \cdot J \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha \cdot L) \cdot \cosh(\alpha \cdot L) \\ & + 2 \cdot M \cdot \Omega_0^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) \cdot \sinh(\alpha \cdot L) \\ & - 2 \cdot M \cdot \Omega_0^2 \cdot \cosh(\alpha \cdot L) \cdot \sin(\alpha \cdot L) = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Pomocí programu MATLAB bylo nalezeno řešení rovnice (4.84) pro  $\alpha$ . Vyjádřením ze substituce využitě v rovnici (4.46) jsme získali výslednou vlastní kruhovou frekvenci  $\Omega_{on}$ , kterou jsme převedli na vlastní frekvenci  $f_n$ :

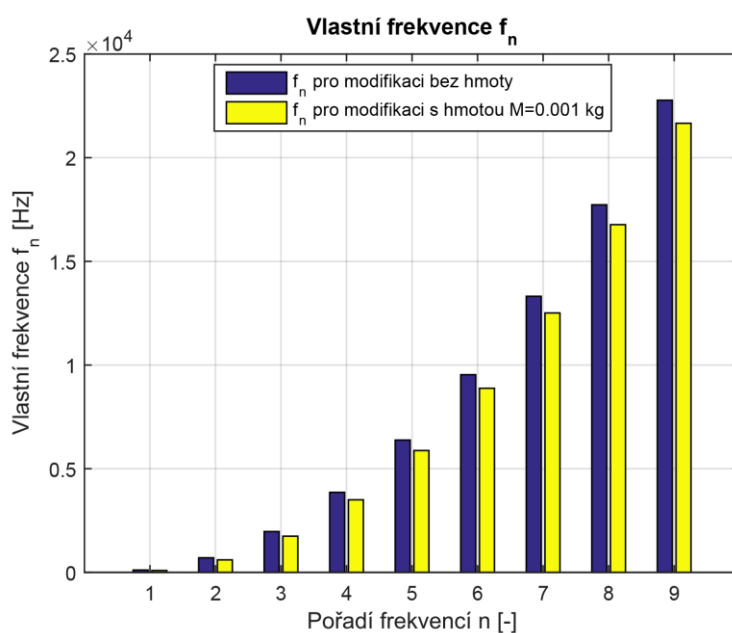
Tabulka 3 - Vlastní frekvence systému s dodatečnou hmotou M

$f_1$	90,6 Hz
$f_2$	603,3 Hz
$f_3$	1 746,4 Hz
$f_4$	3 500,1 Hz
$f_5$	5 877,1 Hz
$f_6$	8 880,4 Hz
$f_7$	12 511,5 Hz
$f_8$	16 771,4 Hz
$f_9$	21 660,5 Hz



Obr. 27 - Vlastní frekvence pro soustavu s dodatečnou hmotou M

V následujícím grafu (Obr. 28) jsou hodnoty obou modifikací pro účel porovnávání zobrazeny vedle sebe. Modré sloupce znázorňují vlastní frekvence pro modifikaci bez hmoty  $M$ , naopak žluté sloupce znázorňují vlastní frekvence pro modifikaci s hmotou  $M$ . Z grafu je zřejmé, že s rostoucí hodnotou  $M$ , klesají vlastní frekvence soustavy. K dalším numerickým výpočtům v této práci bude používána výhradně vlastní frekvence určená pro soustavu s hmotou  $M$ , protože se nejvíce blíží vlastní frekvenci reálné soustavy.



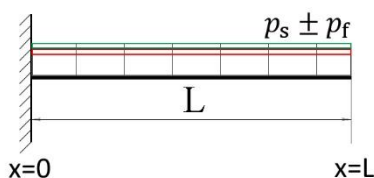
Obr. 28 - Porovnání vlastních frekvencí

#### 4.2.2. VÝPOČET VYNUCENÝCH KMITŮ

Za předpokladu idealizace rychlostního a tlakového pole (nahradíme rychlostní profil obdelníkem), tlak proudění působící na sondu je po celé šířce kanálu konstantní a roven hodnotě  $p_D$ . Rychlost  $v = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  bude rozdělena na dvě složky, první z nich představuje hodnotu rychlosti, která se s časem nemění, značíme ji  $v_s$  a v našem případě je její hodnota  $v_s = 0,95 \cdot v$ . Druhou složkou rychlosti je flukтуаční člen, v našem případě  $v_f = 0,05 \cdot v \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , který nabývá své kladné a záporné hodnoty v závislosti na čase. V závislosti na rychlosti se mění i tlak působící na sondu. Pro účel výpočtu budeme uvažovat lineární závislost tlaku

na rychlosti proudění. Jeho funkce je  $p_D(x, t) = p_s + p_f \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0,95 \cdot p_D + 0,05 \cdot p_D \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

Budící frekvence  $\omega$  byla zvolena na doporučení zadavatele práce v rozmezí 20-30  $s^{-1}$ . Na základě tohoto zadání byla vybrána frekvence  $\omega = 25 s^{-1}$ . Tato frekvence nám určuje, jak se mění flukтуаční složka rychlosti a tlaku. První vlastní frekvence, jejíž hodnota  $f_1 = 92,6 Hz$  byla určena na základě numerického výpočtu, byla pro účely porovnání převedena na vlastní kruhovou frekvenci  $\Omega_{01} = 2 \cdot \pi \cdot f_n = 581,95 s^{-1}$ . Je zřejmé, že budící frekvence harmonického zatížení je mnohem nižší v porovnání s první vlastní kruhovou frekvencí soustavy, tudíž můžeme říct, že nastavení sondy se nachází v podrezonančním režimu. V grafu rezonanční křivky se toto kmitání nachází na levé straně od vlastní frekvence, při které dochází k jevu (v našem případě k nechtěnému), který se nazývá rezonance. Během tohoto děje dochází ke zvyšování amplitudy výchylky nucených kmitů při vnějším buzení, jehož frekvence se blíží vlastní frekvenci buzené soustavy. V případě ideálního oscilátoru (netlumeného), by amplituda nuceného kmitání dosahovala nekonečně velkých výchylek. Tento děj je pro většinu případů destruktivní.



Obr. 29 - Vetknutý nosník zatížený budícím harmonickým zatížením

Funkce budícího harmonického zatížení

$$p_D(x, t) = p_s + p_f \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (4.85)$$

kde  $\omega [s^{-1}]$  budící frekvence,  
 $t [s]$  čas.

Pro tento případ výpočtu je však zapotřebí prostorové zatížení tlakem  $p_D(x, t)$  převést na zatížení liniové  $p(x, t)$ . To bylo provedeno stejným způsobem jako ve statické části, kdy byla funkce tlaku vynásobena příčným rozměrem  $D$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= D \cdot p_s + D \cdot p_f \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ &= 4,6 + 0,24 \cdot \sin(\omega \cdot t) [N \cdot m]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

#### 4.2.2.1. URČENÍ VLASTNÍCH TVARŮ KMITŮ

Konstanty  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  vyjádříme v závislosti na konstantě  $C_4$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha \cdot L) & \sinh(\alpha \cdot L) & -\cos(\alpha \cdot L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin(\alpha \cdot L) \end{bmatrix} \cdot C_4, \\ B \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin(\alpha \cdot L) \end{bmatrix} \cdot C_4. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Vyjádříme matici konstant, kde  $C_4 = 1$  a vyřešíme

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin(\alpha \cdot L) \end{bmatrix} \cdot C_4. \quad (4.88)$$

#### 4.2.2.2. VLASTNÍ TVAR KMITU

Vlastní tvar kmitu vyjádříme v závislosti na  $C_4$

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= C_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) \\ &\quad + C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Po dosazení z rovnice (4.88) do (4.89) získáme  $n$ -tý tvar vlastního kmitu, kde  $\Omega_{on}$  je  $n$ -tá vlastní kruhová frekvence nosníku, která je charakterizována typem uložení (v tomto případě na jedné straně s vetknutím a na druhé s volným koncem)

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) = & \frac{\sin(\alpha \cdot L) + \sinh(\alpha \cdot L)}{\cos(\alpha \cdot L) + \cosh(\alpha \cdot L)} \cdot \cosh(\alpha \cdot x) & (4.90) \\ & - \sinh(\alpha \cdot x) \\ & - \frac{\sin(\alpha \cdot L) + \sinh(\alpha \cdot L)}{\cos(\alpha \cdot L) + \cosh(\alpha \cdot L)} \cdot \cos(\alpha \cdot x) \\ & + \sin(\alpha \cdot x). \end{aligned}$$

Za použití vzorce pro získání normovaného tvaru (normování na jedničku)

$$\int_0^L m_n^2 \cdot \Phi_n^2(x) \cdot dx = 1. \quad (4.91)$$

Vyjádřením  $m_n$  z rovnice (4.91)

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{\int_0^L \Phi_n^2(x) \cdot dx}} \quad (4.92)$$

Za použití vzorce pro výpočet  $n$ -tého normovaného vlastního tvaru kmitu

$$\Phi_n^*(x) = m_n \cdot \Phi_n(x). \quad (4.93)$$

Řešení

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t). \quad (4.94)$$

Dosazením řešení (4.94) do rovnice (4.39)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot \ddot{q}_n(t) & (4.95) \\ & + \frac{E \cdot J}{\rho \cdot A} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot A}{E \cdot J} \cdot \Omega_n^2 \cdot \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t) = \frac{p(x, t)}{\rho \cdot A}. \end{aligned}$$



Z podmínky ortogonality vlastních tvarů platí

$$\int_0^1 \Phi_n^* \cdot \Phi_m^* dx = 0, \text{ pro } n \neq m, \quad (4.96)$$

$$\int_0^1 \Phi_n^* \cdot \Phi_m^* dx = \frac{L}{2}, \text{ pro } n = m.$$

Po vynásobení řešení diferenciální rovnice druhého řádu (4.95) rovnicí (4.93) získáme

$$\ddot{q}_n(t) + \Omega_n^2 \cdot q_n(t) = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \int_0^L p(x, t) \cdot \Phi_n^*(x) \cdot dx. \quad (4.97)$$

Funkce kinematického buzení  $q_n$  je definována jako

$$q_n = \sin(\omega \cdot t), \quad (4.98)$$

$$\dot{q}_n = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (4.99)$$

$$\ddot{q}_n = -\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot q_n. \quad (4.100)$$

Dosazením (4.98), (4.99), (4.100) do (4.97)

$$q_n \cdot (\Omega_n^2 - \omega^2) = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \int_0^L p(x, t) \cdot \Phi_n^* dx. \quad (4.101)$$

Po dosazení (4.85) do (4.101)

$$q_n = \frac{1}{(\Omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \frac{D}{\rho \cdot A} \cdot (p_s + p_f \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \int_0^L \Phi_n^* dx. \quad (4.102)$$

Řešením pohybové rovnice (4.39) je (4.94)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t). \quad (4.94')$$

Rozvojem řešení do vlastních tvarů kmitů vyjádříme řešení pro ustálený pohyb po vymizení vlastního kmitání

$$y(x, t) \quad (4.103)$$

$$= \frac{D \cdot (p_s + p_f \cdot \sin(\omega \cdot t))}{\rho \cdot A}$$

$$\cdot \left[ \frac{\Phi_1^*(x) \cdot \int_0^L \Phi_1^*(x) dx}{\Omega_n^2 - \omega^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi_2^*(x) \cdot \int_0^L \Phi_1^*(x) dx}{\Omega_n^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\Phi_n^*(x) \cdot \int_0^L \Phi_1^*(x) dx}{\Omega_n^2 - \omega^2} \right].$$

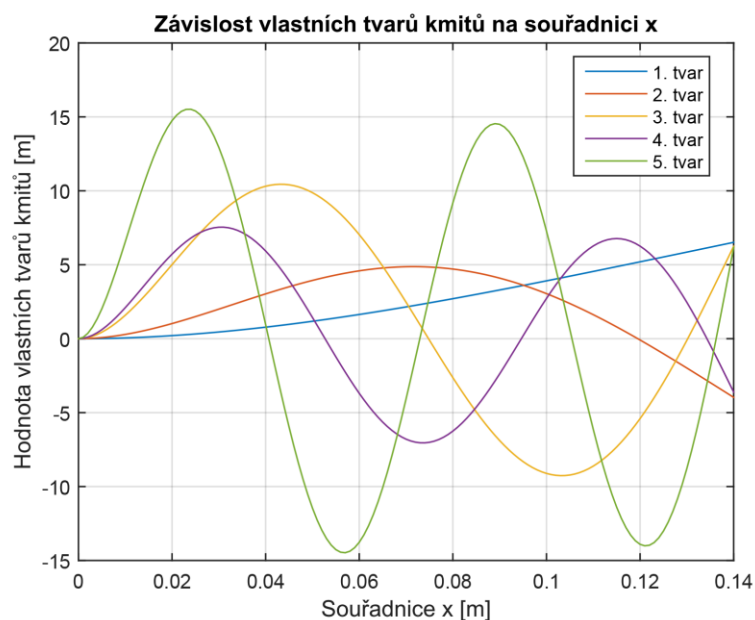
Pro získání průběhu ohybového momentu využijeme vztah (4.21)

$$v''(x) = \pm \frac{M_o(x)}{E \cdot J}. \quad (4.21')$$

Pro výpočet ohybového napětí (4.24)

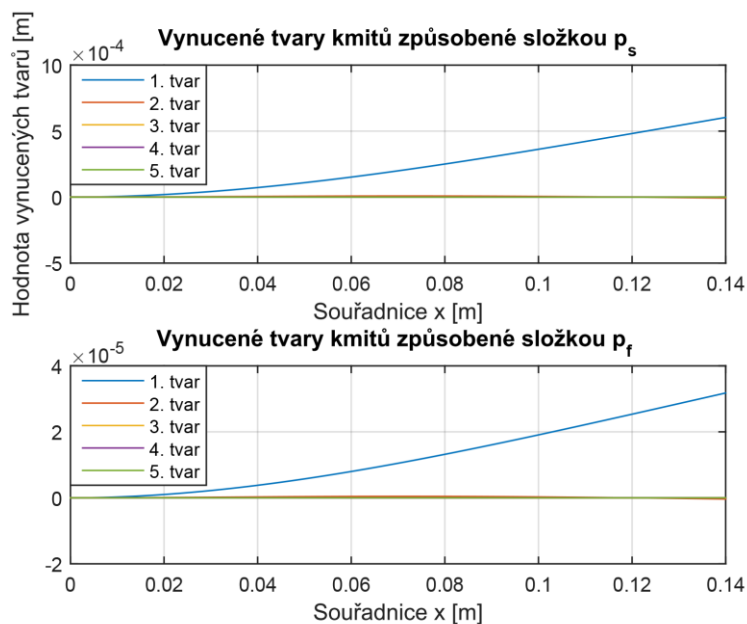
$$\sigma_o = \frac{|M_o|}{W_o}. \quad (4.24')$$

Ve výpočetním programu MATLAB byl napsán výpočtový kód, který postupně řeší jednotlivé úlohy. Prvním z nich jsou normované vlastní tvary kmitů  $\Phi_n^*(x)$  (dále jen „Vlastní tvary kmitů“). V grafu je znázorněn průběh vlastních tvarů kmitů  $\Phi_n^*(x)$  v závislosti na souřadnici  $x$  pro jednotlivé vlastní frekvence (Obr. 30).



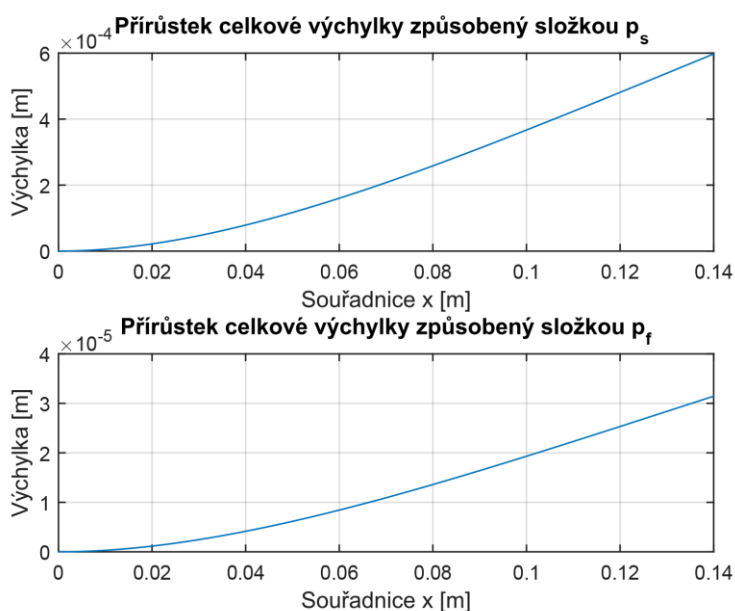
Obr. 30 - Závislost vlastních tvarů kmitů na souřadnici  $x$

Průběh kmitání byl řešen pro případ, kdy hodnota budícího zatížení dosahuje extrému, což nastává v případě, kdy jednotlivé složky zatížení nabývají svých maximálních hodnot. Na (Obr. 31) je zřejmé, že největší váhu na výchylku způsobenou konkrétní složkou tlaku má první člen rozvoje do vlastních tvarů kmitů pro první vlastní frekvenci. Další členy rozvoje jsou ve srovnání mnohem menší. V tomto řešení se budeme zabývat prvními 5 tvary kmitů, neboť další z nich jsou v rámci řešené úlohy zanedbatelné.



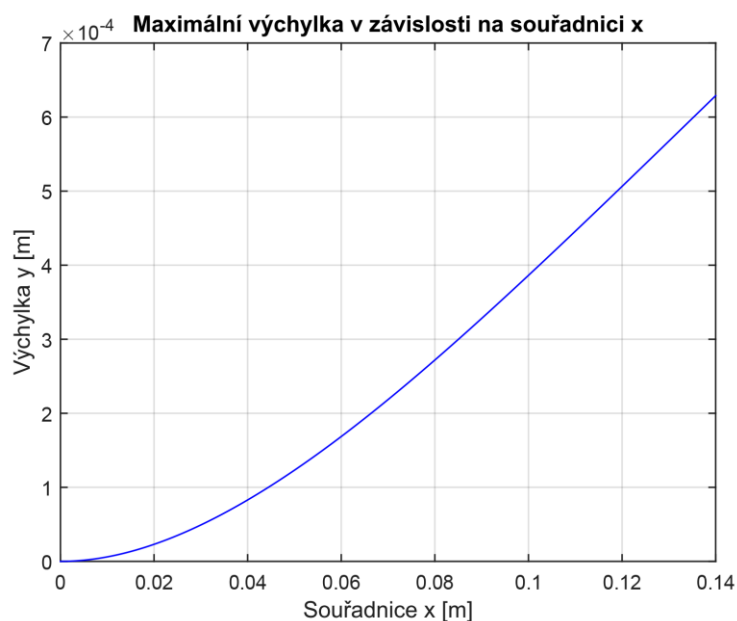
Obr. 31 - Vynucené tvary kmitů

Dále je v grafu možno vidět, jaké jsou váhy složek  $p_s$  a  $p_f$  na celkovou výchylku (Obr. 32). Vynucené tvary kmitu pro jednotlivé složky superponovány. Jelikož je diferenciální pohybová rovnice lineární, smí být k určení výsledné výchylky použit princip superpozice. Poté, co byly jednotlivé tvary kmitu sečteny, vznikla výsledná výchylka, jejíž okamžitá hodnota je v každém bodě rovna součtu dílčích výchylek způsobených jednotlivými tvary. Z grafu je zřejmé, že větší váhu v celkovém průběhu výchylky má složka  $p_s$ , která ve vzdálenosti  $x = L$  způsobuje výchylku  $y = 5,97 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , oproti tomu složka  $p_f$  dosahuje výchylky  $y = 3,15 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .



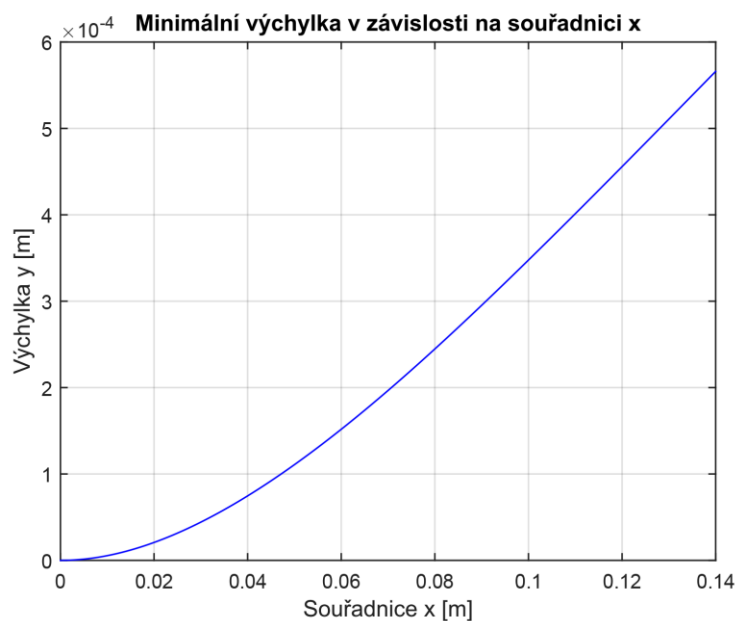
Obr. 32 - Přírůstky celkové výchylky nosníku

V grafu (Obr. 33) jsou účinky na výchylku obou složek superponovány, tudíž je okamžitá výchylka v určitém bodě součtem výchylek způsobených složkou  $p_s$  a  $p_f$ . Tento fakt je jednoduše ověřitelný, neboť v bodě  $x = 0$   $y = 0$  a v bodě  $x = L$   $y = 6,29 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Hodnota  $y = 6,29 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  je maximální možnou výchylkou nosníku pro buzené kmitání bez tlumení soustavy pro budící frekvenci  $\omega = 25 \text{ s}^{-1}$ .



Obr. 33 - Maximální výchylka v závislosti na souřadnici x

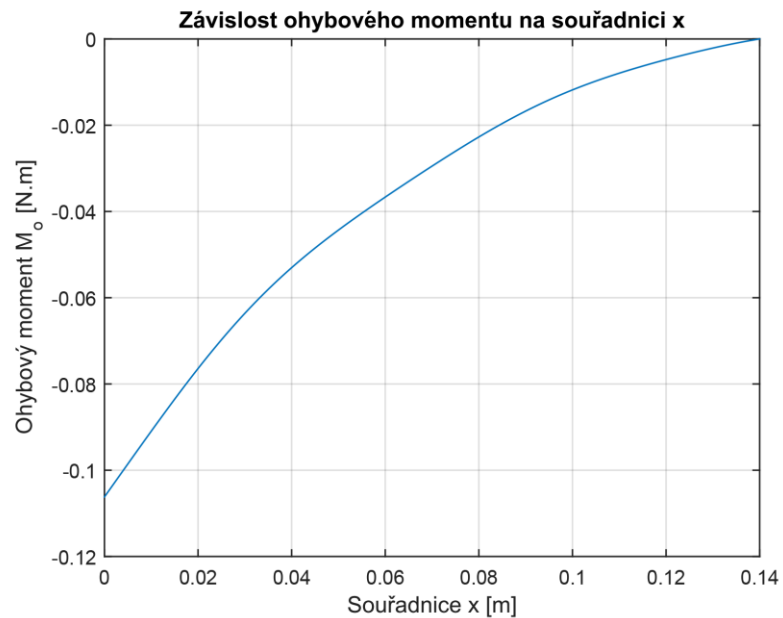
Dále můžeme pro zajímavost doplnit graf (Obr. 34) pro případ, kdyby od sebe byly silové účinky jednotlivých složek odečteny, tedy pro případ, kdy dochází k nejmenší výchylce systému, a to  $y = 5,66 \cdot 10^{-4}$  m.



Obr. 34 - Minimální výchylka v závislosti na souřadnici x

V předchozích dvou grafech byla znázorněna horní a dolní obálka kmitavého pohybu. Jde o krajní výchylky, mezi kterými nosník periodicky kmitá a nabývá střídavě jedné a druhé meze.

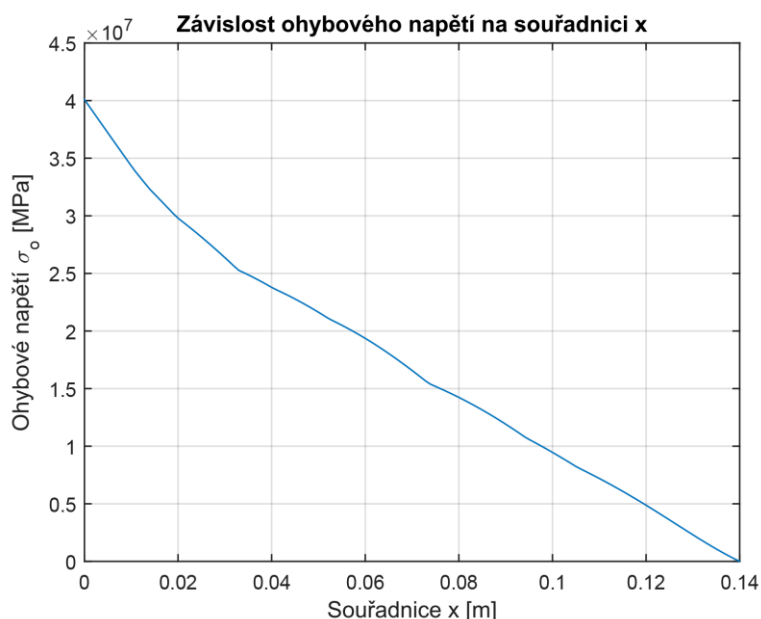
Dalším krokem byl výpočet ohybového momentu, jehož průběh je zachycen v grafu (Obr. 35). V místě vetknutí  $x = 0$  je podle očekávání ohybový moment maximální a rovný hodnotě  $M_o = -106,2 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$ . Naopak v místě volného konce  $x = L$  je ohybový moment roven nule.



Obr. 35- Závislost ohybového momentu na souřadnici x



Dále graf (Obr. 36), který zobrazuje závislost ohybového napětí na souřadnici  $x$ . Maximální hodnota ohybového napětí, které vzniká uvnitř nosníku, je ve vzdálenosti  $x = 0$  rovna  $\sigma_o = 40 \text{ MPa}$ .



Obr. 36 - Závislost ohybového napětí na souřadnici x

### 4.3. VÝPOČTOVÝ MODEL S VLASTNÍM TLUMENÍM

#### SOUSTAVY

Tato část práce se bude zabývat výpočtem soustavy zahrnující tlumící člen. Za použití Bernoulliho-Eulerovy teorie ustáleného kmitání a přidání tlumícího členu. Tlumící člen neboli konstantu úměrnosti tlumení značíme  $b$  a platí [20]

$$b = 2 \cdot b_r \cdot \Omega, \quad (4.104)$$

kde  $b_r [-]$  poměrný útlum,

$\Omega [s^{-1}]$  vlastní kruhová frekvence systému.

Velikost  $b_r$  byla pro účel výpočtu zvolena  $b_r = 0,05$  a bude nahrazovat vnitřní i vnější tlumení

$$A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T + T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx + p(x, t) \cdot dx - b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dx. \quad (4.105)$$

Po úpravě vznikne pohybová rovnice zahrnující tlumící člen

$$A \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x, t). \quad (4.106)$$

Pro řešení pohybové rovnice byly použity vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu z předchozího výpočtového modelu bez tlumení soustavy.

Řešení soustavy určíme ve tvaru

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t). \quad (4.94')$$

Po dosazení řešení (4.94) do pohybové rovnice (4.106) získáme

$$\begin{aligned} \rho \cdot A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot \ddot{q}_n(t) + b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot \dot{q}_n(t) \\ + E \cdot J \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot A}{E \cdot J} \cdot \Omega_n^2 \cdot \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t) = p(x, t). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Po aplikaci podmínky o ortogonalitě vlastních tvarů

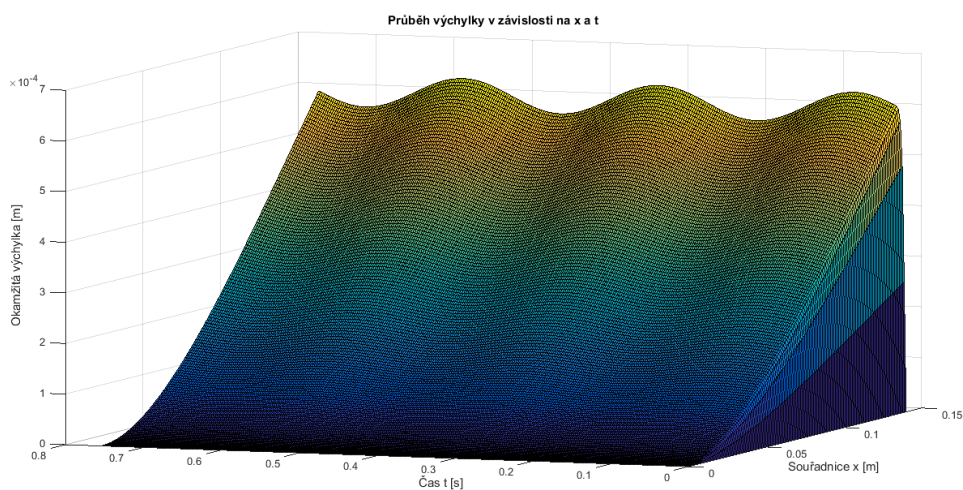
$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \frac{b}{\rho \cdot A} \cdot \dot{q}_n(t) + \Omega_n^2 \cdot q_n(t) \\ = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \int_0^L p(x, t) \cdot \Phi_n^*(x) \cdot dx, \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \frac{b}{\rho \cdot A} \cdot \dot{q}_n(t) + \Omega_n^2 \cdot q_n(t) \\ = \frac{D \cdot (p_s + p_f \cdot \sin(\omega \cdot t))}{\rho \cdot A} \cdot \int_0^L \Phi_n^*(x) \cdot dx. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Převodem diferenciální rovnice druhého řádu na soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a dosazením do (4.94) vznikne řešení okamžité výchylky tlumeného systému

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^*(x) \cdot q_n(t). \quad (4.94')$$

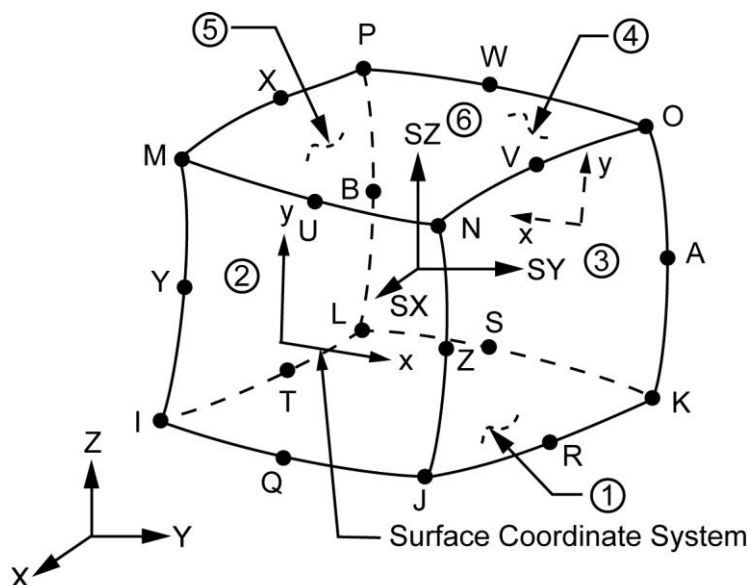
Průběh výchylky se v případě tlumeného systému oproti systému netlumenému nepatrně změnil. Na (Obr. 37) můžeme vidět průběh prvních 3 period. Po ustálení systému dosahuje kmitání amplitudy  $y_{MAX} = 6,276 \cdot 10^{-4}$  m a minimální výchylka činí  $y_{MIN} = 5,65 \cdot 10^{-4}$  m. Ustálení kmitání ihned při první periodě, je pravděpodobně způsobeno vysokým tlumením systému.



Obr. 37 - Průběh výchylky tlumeného kmitání

## 5. MKP ANALÝZA MĚŘÍCÍ SONDY

MKP (FEM) metoda konečných prvků (finite element method) je numerická metoda určená k přibližnému řešení inženýrských problémů [23]. Tato metoda funguje na základě diskreditace kontinua do konečného počtu prvků [24]. Jednotlivé elementy jsou dále definovány pomocí uzlů. Námí zvolený element, SOLID 186 (typ BRICK), je definován celkem 20 uzly (Obr. 38) [25].



Obr. 38 - SOLID 186 (BRICK)

Diskretizací kontinua lze odvodit soustavu algebraických rovnic. Tuto soustavu rovnic je možné pro statický typ analýzy vyjádřit [26]

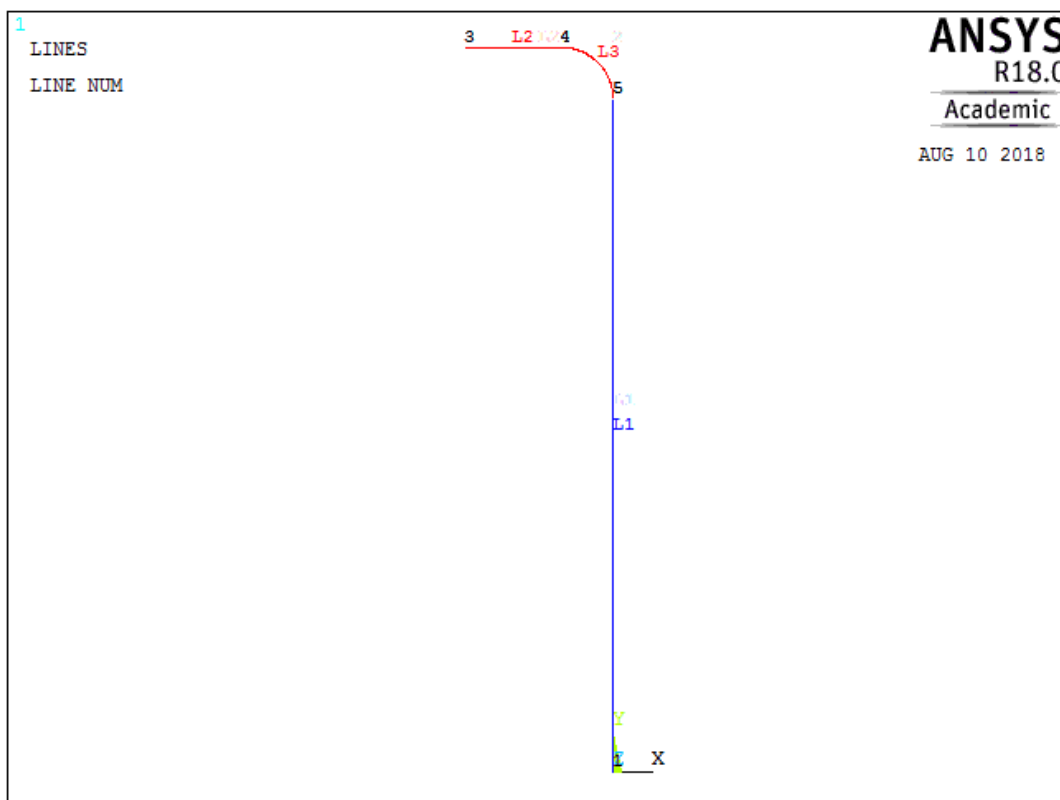
$$\bar{K} \cdot \vec{u} = \vec{F}, \quad (5.1)$$

kde  $\bar{K}$  Matice tuhosti soustavy,  
 $\vec{u}$  Vektor posuvů v uzlech,  
 $\vec{F}$  Vektor vnějších sil.

## 5.1. MODEL MĚŘÍCÍ SONDY

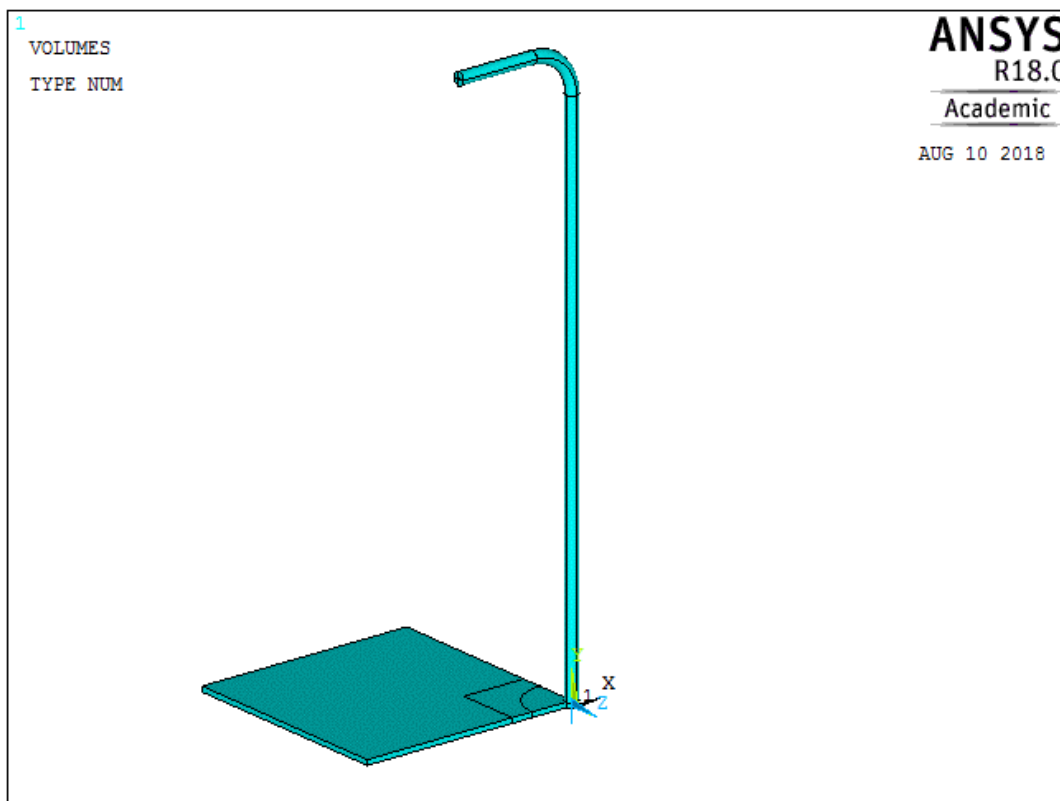
### 5.1.1. PREPROCESSOR

3D model měřicí sondy byl vytvořen za pomoci mezikružové výseče (rozsah  $0^\circ - 90^\circ$ ) o vnějším průměru  $D = 3\text{ mm}$  a vnitřním průměru  $d = 0,5\text{ mm}$ , jež byla tažena po vodící křivce (Obr. 39). Tato křivka vznikla složením dvou na sebe kolmých úseček o délce  $138,5\text{ mm}$  a  $28,5\text{ mm}$  a následným zaoblením rohu za použití funkce LFILLT s  $R10\text{ mm}$ . Vzniklý objem byl následně zrcadlen, čímž vznikla polovina a poté celá sonda.



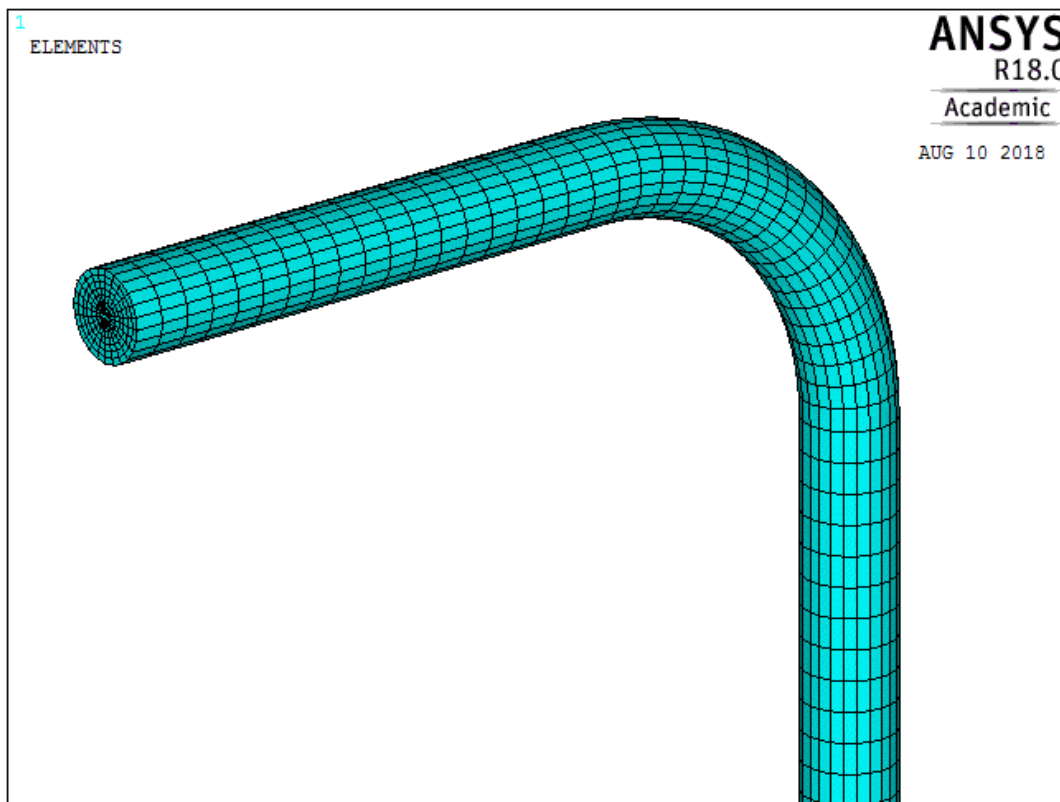
Obr. 39 - Vodící křivka

Dalším krokem byla tvorba stěny kanálu a vnější výztuhy sondy. Stěna byla vytvořena pomocí vysunutí plochy do prostoru a následně, pro účel vytvoření sítě, upravena (Obr. 40). Šířka i délka stěny mají  $100\text{ mm}$  a tloušťka plechu kanálu  $1,2\text{ mm}$ . Na obrázku je znázorněna jen čtvrtina objemu stěny (Obr. 40), neboť zbytek byl později vytvořen pomocí symetrie. Dále byla doplněna spodní výztuha uchycení sondy, jejíž šířka i délka jsou  $30\text{ mm}$  a tloušťka  $3\text{ mm}$ .



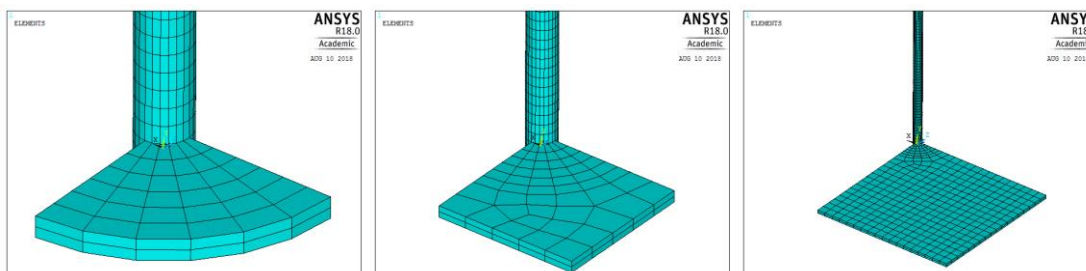
Obr. 40 – Objem tělesa

Posledním krokem při úpravě modelu bylo vytvoření sítě prvků 3D modelu byl přiřazen typ elementu SOLID186. Youngův modul pružnosti byl zvolen pro ocel  $2,1 \cdot 10^{11}$  Pa, Poissonovo číslo 0,3 a hustota  $7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Tělo sondy bylo síťováno s velikostí elementu  $0,001 \text{ m}$  (Obr. 41).



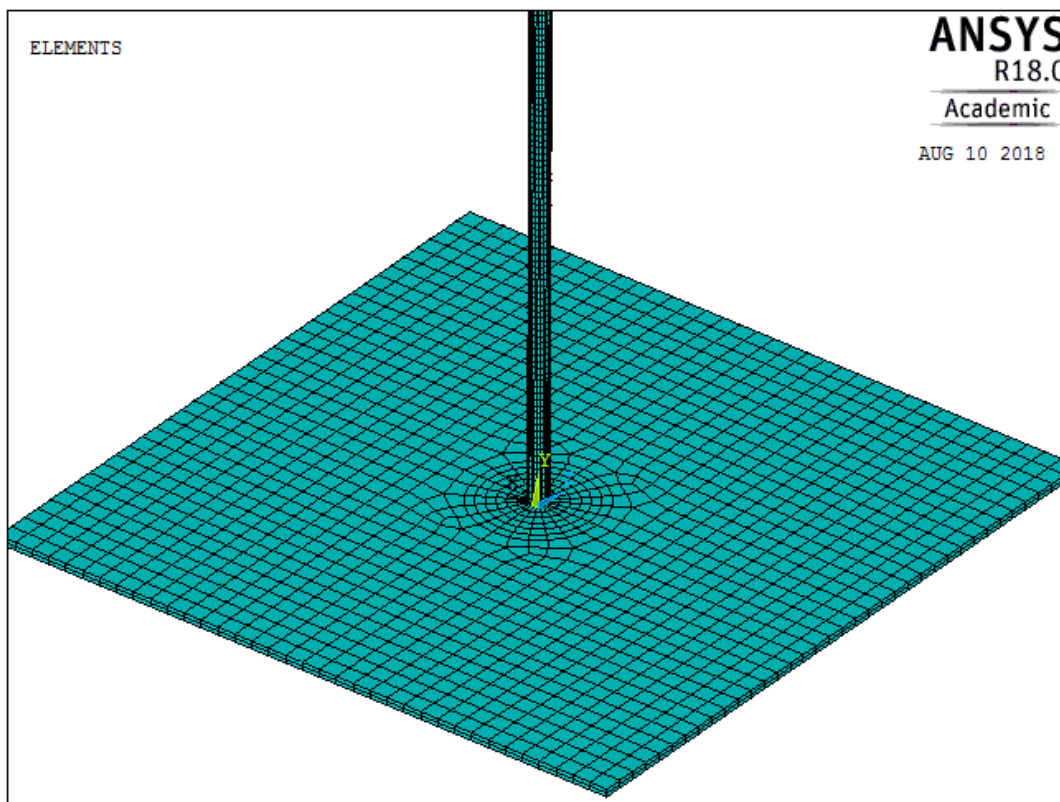
Obr. 41 - Síť sondy

K vytvoření sítě stěny kanálu bylo použito funkce VSWEEP, která postupně naváže na síťování sousedního objemu (tělo sondy) (Obr. 42).



Obr. 42 - Vytváření sítě stěny kanálu

Konečný tvar se doplní, jak již bylo zmíněno, na základě symetrie (Obr. 43).

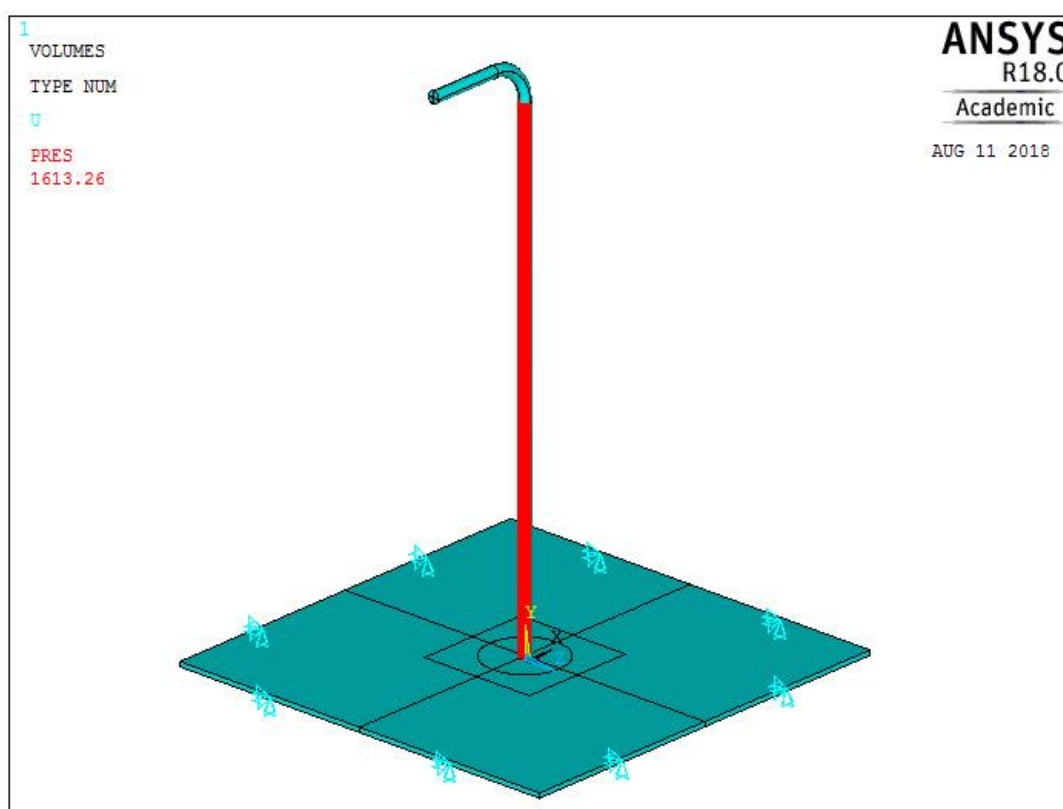


Obr. 43 - Síť stěny kanálu



### 5.1.2. SOLVER

Následně bylo definováno zatížení a okrajové podmínky. V tomto případě budeme uvažovat, že stěna kanálu je deformačně a napěťově ovlivněna jen v oblasti  $100 \times 100 \text{ mm}$ . Na hranici řešeného problému byla definována okrajová podmínka tuhého uložení. Na přední plochy (ve směru proudění) bylo aplikováno zatížení typu  $\text{PRES} = 1613,26 \text{ Pa}$  (Obr. 44). Soustavu jsme řešili ve dvou typech analýzy. Pomocí modální analýzy bylo vypočítáno prvních 10 vlastních frekvencí soustavy a pomocí statické analýzy byla vyřešena deformace soustavy.



Obr. 44 - Definice okrajových podmínek

## 5.1.3. POSTPROCESOR

## 5.1.3.1. MODÁLNÍ ANALÝZA-VÝPOČET VLASTNÍ

## FREKVENCE SOUSTAVY

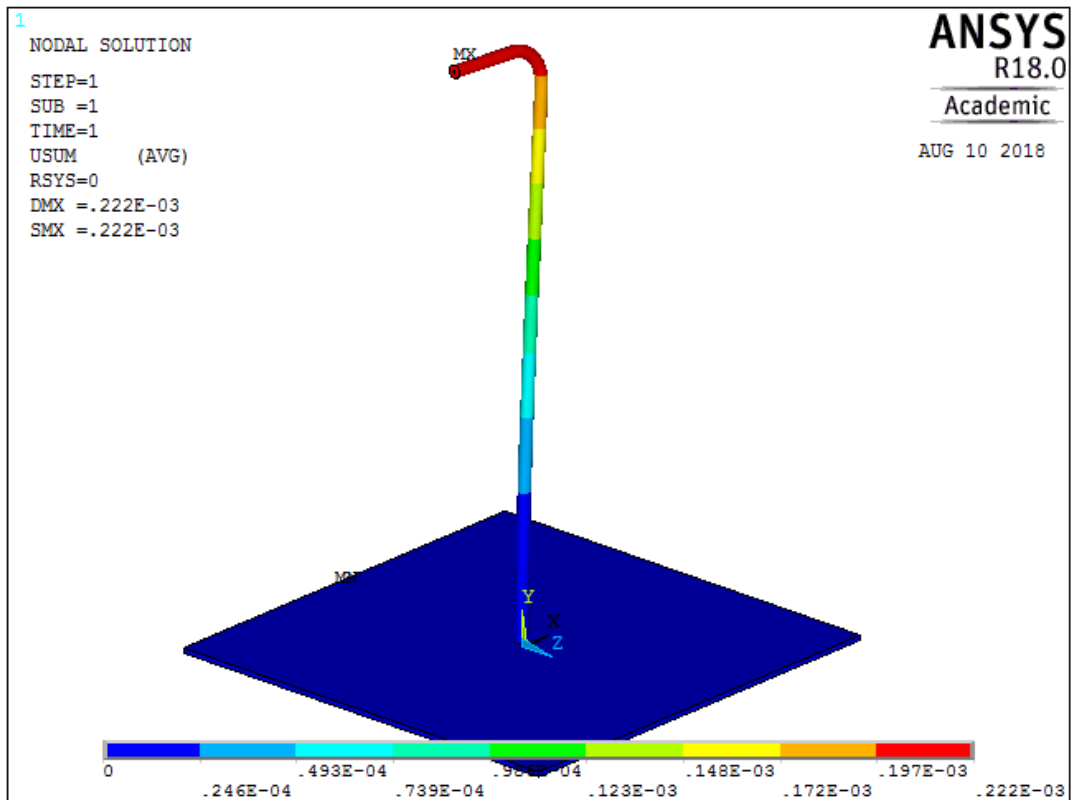
Pomocí této analýzy bylo získáno prvních 10 vlastních frekvencí soustavy. Z tabulky je zřejmé, že první vlastní frekvence vyšla podobně jako v modelu, kde byla uvažována dodatečná hmota  $M$ .

Tabulka 4 – Vlastní frekvence soustavy

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****	
SET	TIME/FREQ
1	89,1 Hz
2	89,3 Hz
3	519,4 Hz
4	559,7 Hz
5	889,9 Hz
6	1274,1 Hz
7	1423,7 Hz
8	2015,8 Hz
9	2482,8 Hz
10	3077,2 Hz

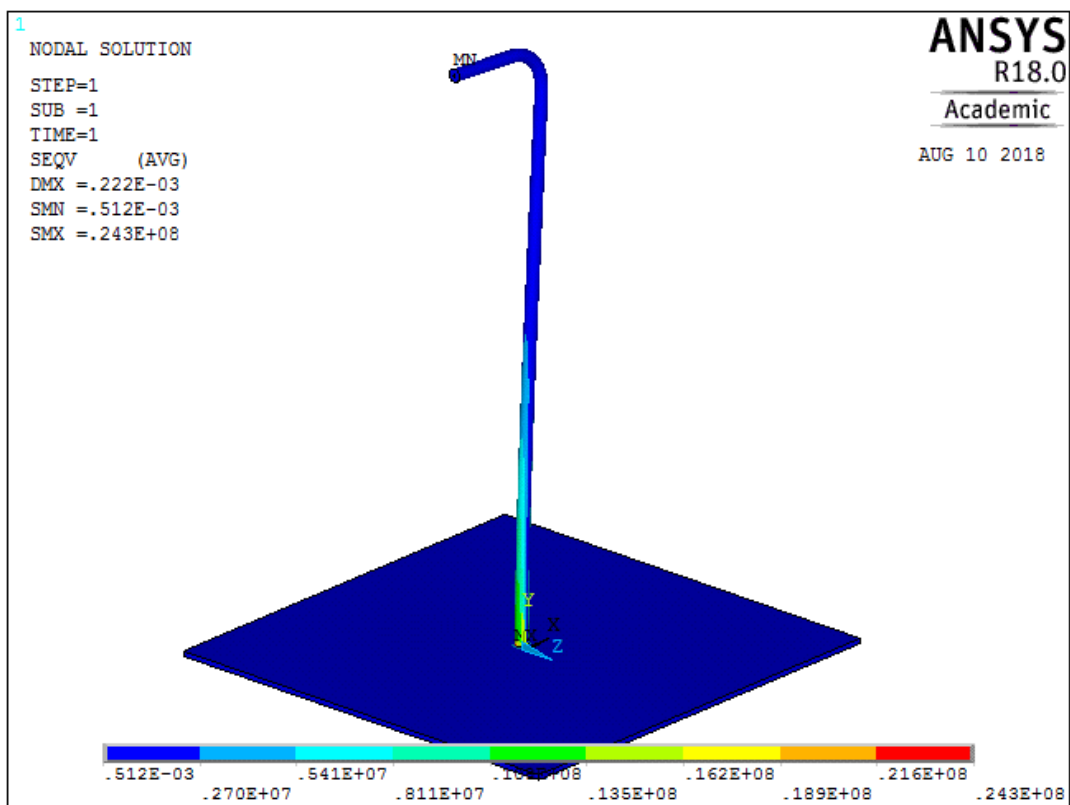
### 5.1.3.2. STATICKÁ ANALÝZA-TUHOSTNÍ ANALÝZA

Pomocí statické analýzy byly řešeny deformace a napjatost systému. Na Obr. 45 je barevně vykreslena deformace sondy. Modrá barva znázorňuje nulové posunutí, naopak červená posunutí maximální. K největšímu posunu dochází dle očekávání na volném konci sondy. Zde se sonda vychýlí o 0,22 mm.

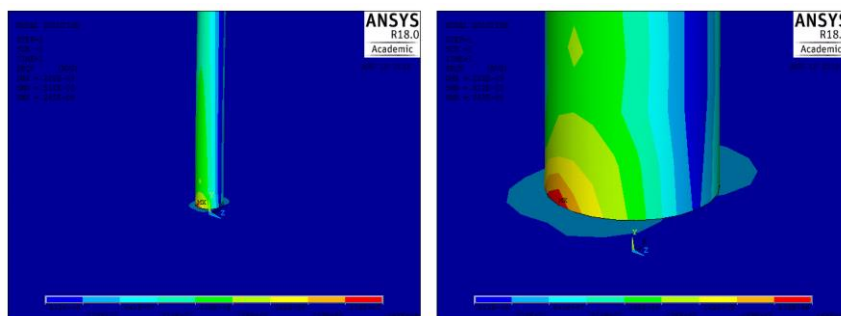


Obr. 45 - Deformace sondy při zatížení tlakem

Posledním výstupem bylo znázornění ohybového napětí v sondě (Obr. 46). Největší napětí,  $\sigma_o = 24,3 \text{ MPa}$ , vzniká v kořeni sondy. Při pohledu na detail uchycení sondy vidíme (Obr. 47), že toto místo je v místě spojení sondy s kanálem.

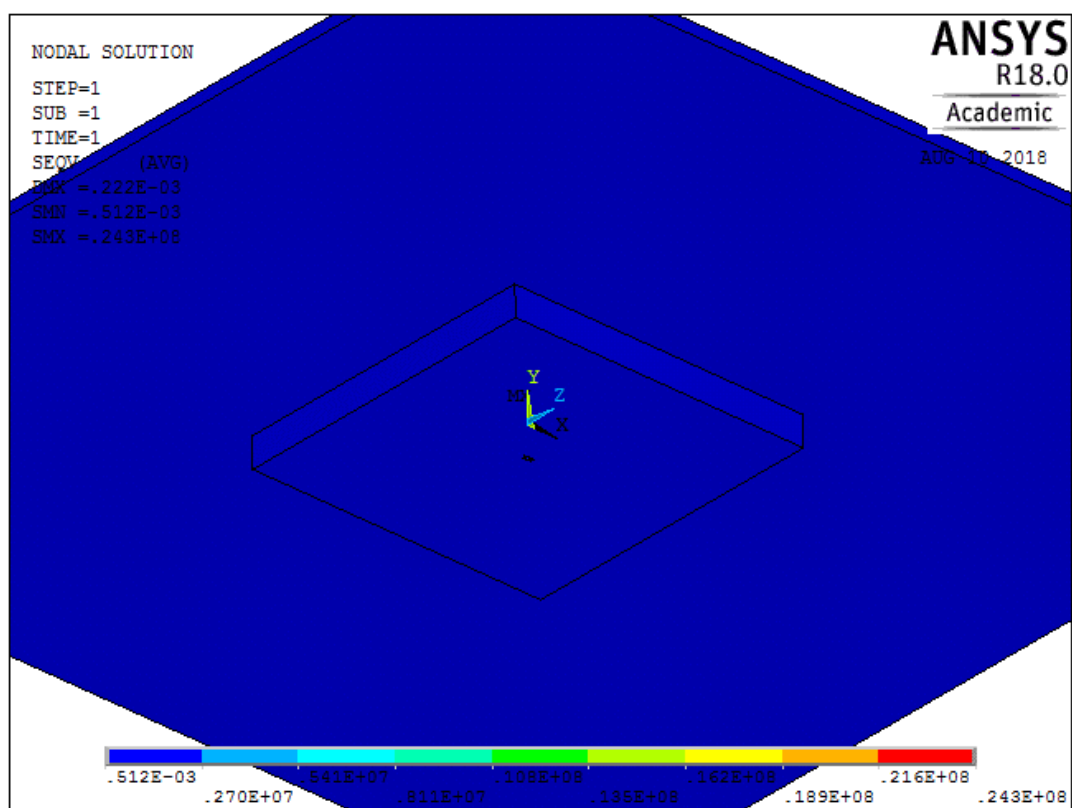


Obr. 46 - Distribuce ohybového napětí v sondě při zatížení tlakem



Obr. 47 - Distribuce ohybového napětí v sondě při zatížení tlakem

Při pohledu na obrázek (Obr. 48) můžeme vidět, že do výztuhy instalované na vnější straně kanálu, která má za účel zpevnit okolí uchycení sondy, se podle barevnosti škály přenáší jen minimální napětí.



Obr. 48 - Napětí ve spojení kanál-výztuha

## 6. POROVNÁNÍ METOD

V předchozí části byly na výpočet soustavy aplikovány 4 hlavní metody:

- I. Statický výpočet sondy
- II. Výpočet dynamicky zatížené soustavy bez tlumení
- III. Výpočet dynamicky zatížené soustavy s tlumením
- IV. Statický výpočet metodou konečných prvků

Tabulka 5 - Výsledné hodnoty jednotlivých metod

	I. Metoda	II. Metoda	III. Metoda	IV. Metoda
$y_{MAX}$	$2,79 \cdot 10^{-4} m$	$6,29 \cdot 10^{-4} m$	$6,276 \cdot 10^{-4} m$	$2,22 \cdot 10^{-4} m$
$\sigma_{MAX}$	17,91 MPa	40 MPa	< 40 MPa	24,3 MPa

Odlíšné výsledky obou statických metod mohou být způsobeny zejména různým zatížením sondy. V prvním případě byla sonda zatížena po její celé délce, avšak v případě druhém jsme pro zjednodušení sondu zatížili jen v části, jejíž osa je kolmá na stěnu kanálu. Větší napětí bychom pak přisoudili odlišnostem použitých metod a výchozích modelů.

Výsledky zbylých dvou dynamicky zatížených soustav jsou obdobné, jediným rozdílem je jejich maximální výchylka. U tlumeného systému dosahuje díky tlumení nižších hodnot.

Dle výsledků měření je sonda nejvíce namáhána v případě II., tedy při dynamickém zatížení bez tlumení soustavy. Při tomto režimu sonda kmitá neustále s maximální amplitudou v pulsujícím cyklu. Maximální ohybové napětí při tomto kmitání bylo spočítáno na  $\sigma_{MAX} = 40 MPa$ .

Ze vzorce pro časovanou mez únavy v ohybu pro nekonečný počet cyklů  $(1 \cdot 10^{7-8} + \text{cyklů})$  [27]

$$\sigma_{oc} = 0,43 \cdot \sigma_{pt}, \quad (6.1)$$

kde  $\sigma_{oc}$  [MPa] Časovaná mez únavy v ohybu pro nekonečný počet cyklů,  
 $\sigma_{pt}$  [MPa] Mez pevnosti v tahu.

Součinitel bezpečnosti  $k$  se pro součásti vyráběné v leteckém průmyslu volí v rozmezí 1,5-2,5 v závislosti na druhu součásti, míry idealizace výpočtu a materiálu [24]. Z vypočítaných hodnot vychází, že při výběru materiálu pro zhotovení sondy je s ohledem na součinitel bezpečnosti ( $k=2,5$ ) a časovanou mez únavy v ohybu nutno vybírat materiál (ocel) s minimální mezí pevnosti v tahu  $\sigma_{pt} = 233 \text{ MPa}$ .

### **6.1.DOBA ŽIVOTNOSTI SONDY**

Posledním krokem této práce bude jednoduchá úvaha nad životností námi navržené sondy.

Perioda kmitu  $T = 0,25 \text{ s}$

Doba provozu sondy pro  $n = 1 \cdot 10^7$  cyklů:

$$t = n \cdot T = 2\,513\,274 \text{ s} = 698 \text{ h}$$

Po uplynutí 698 h provozu je teoreticky nutné sondu vyměnit za novou.

## 7. ZÁVĚR

Tato bakalářská práce měla ve své teoretické části za cíl seznámit čtenáře s problematikou měření rychlostních polí pomocí metody měření tlakových diferencí. K pochopení obsahu práce však bylo nejprve představeno shrnutí vědního oboru proudění tekutin (tj. plynů nebo kapalin), kterým se zabývá převážně aerodynamika a hydrodynamika. Následně byla provedena rešerše měření rychlosti proudění pomocí tlakoměrných sond, princip funkce leteckého rychloměru a jeho vnitřních komponent.

Druhá část práce se věnovala návrhu a pevnostní analýze Pitotovy sondy uchycené ve vstupním kanálu motoru letadla. Prvním krokem bylo zpracování naměřených dat a jejich následný převod na okrajové podmínky potřebné k dalším výpočtům. Samotná pevnostní analýza byla realizována dvěma způsoby. A to nejprve analyticky a později numerickou metodou za využití programu pracujícího na bázi metody konečných prvků. V první části řešení bylo k výpočtu statického zatížení sondy použito diferenciální rovnice průhybové čáry. Postupně byl model upraven, kdy bylo aplikováno dynamické zatížení a později i tlumení soustavy. Všechny tyto úlohy byly řešeny v prostředí Matlab a jejich výstupy vyexportovány ve formě grafů a obrázků.

Poslední část se věnovala tvorbě výpočtového modelu sondy a jejího uchycení metodou konečných prvků v programu Ansys Mechanical. I odtud byly stejně jako v předchozím případě vyexportovány naměřené hodnoty.

Výsledkem mé práce je fakt, že navržená sonda odolá silovému působení uvnitř kanálu i za předpokladu fluktuace vzduchu. V tomto režimu by měla být sonda schopna spolehlivě pracovat po dobu 698 h, kdy by mělo dojít k její výměně.

Tato práce neřeší návrh konkrétní reálné sondy, jedná se spíše o návod nebo metodiku, jakým způsobem by bylo danou problematiku možno řešit, a jakým směrem by se měl případný zájemce ubírat. Je jen na něm, zdali se bude ubírat stejnou, podobnou nebo úplně odlišnou cestou. Na tuto práci je možné navázat a postupně její výpočtové modely, které musely být idealizovány, přibližovat podmínkám reálného použití.



## 8. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. JEŽEK, Jan, Blanka VÁRADIOVÁ a Josef ADAMEC. Mechanika tekutin. 3. přeprac. vyd. Praha: ČVUT, 1997. 150 s. ISBN 80-01-01615-3.
2. BERNARD MASSEY. REV. BY JOHN WARD-SMITH. Mechanics of fluids. 7. ed., [3. print]. Cheltenham: Thornes, 1999. ISBN 9780748740437.
3. Representation of the laminar and turbulent flow in the pipe. In: USDidactic: ENGINEERED FOR EDUCATION [online]. Florida: US Didactic, 2006 [cit. 2018-07-17]. Dostupné z: <http://www.usdidactic.com/teaching-lab-equipment/p4320.htm#>
4. BROŽ, Václav. Aerodynamika nízkých rychlostí. Vyd. 5. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02347-8
5. Fox and McDonald's INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS. Eighth Edition. Manhattan College: John Wiley, 2011. ISBN 9780470547557.
6. Přístrojové systémy letadel. materiály k předmětu (pdf formát) <http://measure.feld.cvut.cz/groups/lis/download/prednasky/EPS1/V%C3%BD%C5%A1ka%20rychlost%20vario.pdf>
7. The velocity of the plane. In: HyperPhysics [online]. Canada: Nave, 2006 [cit. 2018-07-17]. Dostupné z: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/imgmec/Planewind.gif>
8. DUDA, Theodor. Letecké přístroje I.díl - Přístroje letové. Praha: SNTL, 1956
9. JEŽEK, Jan, Blanka VÁRADIOVÁ a Josef ADAMEC. Mechanika tekutin. 3. přeprac. vyd. Praha: ČVUT, 1997. 150 s. ISBN 80-01-01615-3.
10. MOKOŠ, M. Měření rychlosti letadel. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 37 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Pavel Zikmund.

11. Airspeed indicator. In: Free Online Private pilot ground[online]. 2006 [cit. 2018-07-18]. Dostupné z: <http://www.free-online-private-pilot-ground-school.com/flight-instruments.html>
  
12. Výška rychlost vario. In: Czech Technical University in Prague: Department of Measurement [online]. Praha: ČVUT Praha [cit. 2018-07-18]. Dostupné z <http://measure.feld.cvut.cz/groups/lis/download/prednasky/EPS1/V%C3%BD%C5%A1ka%20rychlost%20vario.pdf>
  
13. Pitot-static tube. In: LEARN easy: Manufacturing, design, mechanical engineering [online]. 2018 [cit. 2018-07-28]. Dostupné z: [http://www.learneasy.info/MDME/MEMmods/MEM23006A/fluid\\_mech/fluid\\_flow\\_files/velocity-head-500.png](http://www.learneasy.info/MDME/MEMmods/MEM23006A/fluid_mech/fluid_flow_files/velocity-head-500.png)
  
14. URUBA, Václav. Měření rychlosti Prandtlou sondou. In: Personal web - Václav Uruba [online]. Praha [cit. 2018-08-09]. Dostupné z: [http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/ZIE/rychl\\_tlak.pdf](http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/ZIE/rychl_tlak.pdf)
  
15. HALL, Nancy. Pitot-static tube: Prandtl tube. In: National Aeronautics and space administration: NASA [online]. 2015 [cit. 2018-08-10]. Dostupné z: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/pitot.html>
  
16. Venturi tube. In: Vakratoond: Bit Of Engineering [online]. 2018 [cit. 2018-07-28]. Dostupné z: <https://i1.wp.com/vakratoond.com/wp-content/uploads/2015/12/281.png>
  
17. Digital Dutch: 1976 Standard Atmosphere Calculator[online]. Amsterdam, 1999 [cit. 2018-07-31]. Dostupné z: <https://www.digitaldutch.com/atmoscalc/>
  
18. The Importance of Turbulence Reduction in Assessment of Wind Tunnel Flow Quality. In: ResearchGate [online]. Isfahan, 2011, July 2011 [cit. 2018-07-31]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/221913856\\_The\\_Importance\\_of\\_Turbulence\\_Reduction\\_in\\_Assessment\\_of\\_Wind\\_Tunnel\\_Flow\\_Quality?\\_sg=IFyMcC7uolrR3rrCm7cIcMFT0nzkooiQTGbbmnPBZarUwM3fqJYOAvrOMoAFjsktDiBldsindg](https://www.researchgate.net/publication/221913856_The_Importance_of_Turbulence_Reduction_in_Assessment_of_Wind_Tunnel_Flow_Quality?_sg=IFyMcC7uolrR3rrCm7cIcMFT0nzkooiQTGbbmnPBZarUwM3fqJYOAvrOMoAFjsktDiBldsindg)

19. MICHALEC, Jiří. Pružnost a pevnost I. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.
20. BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. Mechanické kmitání. Praha: Sobotales, 1994. ISBN 80-901684-8-5.
21. Fourierova metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic. Brno, 2016. Diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně. Vedoucí práce RNDr. Štěpán Mikoláš.
22. LANGER, Jiří a Jiří PODOLSKÝ. Teoretická mechanika: Studijní text k přednášce NOFY003 "Teoretická mechanika". Praha, 2013. Dostupné také z: <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/TEXTY/kontinuum.pdf>
23. L. LOGAN, Daryl. A First Course In The Finite Element Method. Fifth edition. Platteville: Cengage Learning, 2012. ISBN 9780495668251.
24. BATHE, Klaus/Jürhen. Finite Element Procedures. II. Title. New Jersey: Prentice Hall, 1996. ISBN 0133014584.
25. SOLID186: 3-D 20-Node Structural Solid. In: Sharcnet[online]. London, 2016 [cit. 2018-08-14]. Dostupné z: [https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_SOLID186.html](https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID186.html)
26. REDDY, J.N. An Introduction To The Finite Element Method. Second edition. Texas: McGraw-Hill, 1993. ISBN 0070513554.
27. RŮŽIČKA, Milan. Únavové křivky a faktory, které je ovlivňují. Praha. Dostupné také z: [http://www.kmp.tul.cz/system/files/duz\\_2017\\_2\\_ru.pdf](http://www.kmp.tul.cz/system/files/duz_2017_2_ru.pdf)
28. Factors of Safety. The Engineering ToolBox [online]. [cit. 2018-08-12]. Dostupné z: [https://www.engineeringtoolbox.com/factors-safety-fos-d\\_1624.html](https://www.engineeringtoolbox.com/factors-safety-fos-d_1624.html)
29. [Veselka, R., Klesa, j.:P/T Distortion for ATP Engine Inlet in FTB Installation – CFD Analysis, FTB PDR Summary, 28.11.2017]
30. Schmirler, M.: FTB Nacelle inlet channel instrumentation. Doc ID: FTB\_ICD-071-A01-INLET, 03/2018

31. ANSYS Mechanical APDL Introductory Tutorials. Release 14.5. Canonsburg, 2012. Dostupné také z: [https://www.researchgate.net/profile/Lahlou\\_Dahmani/post/anyone\\_has\\_ansys\\_apdl\\_tutorials\\_and\\_notes/attachment/59d629b579197b8077988394/AS%3A336743451643904%401457297303194/download/ANSYS+Mechanical+APDL+Introductory+Tutorials\\_2.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Lahlou_Dahmani/post/anyone_has_ansys_apdl_tutorials_and_notes/attachment/59d629b579197b8077988394/AS%3A336743451643904%401457297303194/download/ANSYS+Mechanical+APDL+Introductory+Tutorials_2.pdf)
32. Ansys Mechanical APDL Basic Analysis Guide. Release 15.0. Canonsburg, 2013. Dostupné také z: <http://allaboutmetallurgy.com/wp/wp-content/uploads/2016/12/ANSYS-Mechanical-APDL-Basic-Analysis-Guide.pdf>
33. TICHÁ, Ludmila, Zdeňka CIVÍNOVÁ, Michaela MORYSKOVÁ, Ilona TRTÍKOVÁ a Lenka NĚMEČKOVÁ. Jak psát vysokoškolské závěrečné práce. 6. vydání. Praha, 2016. Dostupné také z: <http://knihovna.cvut.cz/files/VSKP/VSKP.pdf>
34. ČSN 01 6910 (2014) – Úprava dokumentů zpracovaných textovými procesory [online]. Ústav pro jazyk český AV ČR [cit. 2018-8-10]