

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

FAKULTA STROJNÍ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza průhybu kompozitního nosníku v závislosti na
orientaci vláken



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Urban** Jméno: **Václav** Osobní číslo: **459653**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analýza průhybu kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken

Název bakalářské práce anglicky:

Analysis of Composite Beam Deflection Related to Fiber Orientation

Pokyny pro vypracování:

- na základě klasické laminátové teorie určete průhyb jednosměrného a vrstveného kompozitního nosníku
- porovnejte a diskutujte výsledky s vlivem a bez vlivu posouvající síly

Seznam doporučené literatury:

LAŠ, Vladislav. Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 9788070436899.

KAW, A., K. Mechanics of Composite Materials, 2nd Edition., CRC Press, Boca Raton, 2006. ISBN 0-8493-1343-0.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30/4/2018
Datum převzetí zadání

Urban
Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně s tím, že její výsledky mohou být dále použity podle uvážení vedoucího diplomové práce jako jejího spoluautora. Souhlasím také s případnou publikací výsledků bakalářské práce nebo její podstatné části, pokud budu uveden jako její spoluautor.

V Praze dne

Jméno a příjmení autora

.....

Poděkování

Rád bych poděkoval především vedoucímu této bakalářské práce Ing.Bc. Zdeňku Padovcovi, Ph.D., za trpělivý přístup a poskytnutí studijních materiálů a rad, kterými přispěl k pochopení problematiky.

Anotační list:

Jméno autora:	Václav Urban
Název bakalářské práce:	Analýza průhybu kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken
Anglický název:	Analysis of composite beam deflection related to fiber orientation
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 56 Počet obrázků: 30 Počet tabulek: 3
Klíčová slova:	kompozitní materiál, průhyb, nosník, orientace vláken
Keywords:	composite material, deflection, beam, fiber orientation

Abstrakt:

Práce se zabývá závislostí průhybu na orientaci vláken kompozitního nosníku. Závislost je uvedena pro dvě materiálové konfigurace a pro jednosměrný a vrstvený nosník. Je zkoumán vliv jednotlivých složek namáhání – ohybového momentu a posouvající síly.

Abstract:

This thesis deals with relation between deflection and orientation of fibers in composite beam. Relation is mentioned for two material configurations, for unidirectional and layered beam. The influence of individual components of loading is examined – bending moment and shear force.

1. Obsah

Seznam použitých veličin:	7
Seznam obrázků:	8
Seznam grafů:.....	9
Seznam tabulek:	9
Úvod:	10
1. Kompozitní materiály	11
1.1. Definice kompozitního materiálu	11
1.2. Historie kompozitních materiálů	11
1.3. Dělení kompozitních materiálů	11
1.4. Aplikace kompozitních materiálů	12
1.4.1. Letectví.....	12
1.4.2. Kosmonautika	13
1.4.3. Automobilový průmysl.....	13
1.4.4. Ostatní aplikace	14
2. Vláknové kompozitní materiály.....	15
2.1. Klasifikace vláknových kompozitních materiálů.....	15
2.2. Vláčna 16	
2.2.1. Mechanické vlastnosti vláken	16
2.2.2. Materiály vláken	17
2.2.3. Formy uspořádání vláken	19
2.3. Matrice	20
2.3.1. Materiály matic	20
2.4. Technologie výroby vláknových kompozitů	20
2.4.1. Lisování	21
2.4.2. Navíjení	22
2.4.3. Pultruze.....	22
3. Směšovací pravidlo.....	23
3.1. Materiálové charakteristiky.....	24
3.1.1. Modul pružnosti v podélném směru	24
3.1.2. Modul pružnosti v příčném směru	25
3.1.3. Poissonovo číslo.....	25
3.1.4. Smykový modul pružnosti.....	26
3.1.5. Koeficient podélné teplotní roztažnosti	27
3.1.6. Koeficient příčné teplotní roztažnosti	28
3.2. Mimoosové elastické konstanty	29

4.	Klasická laminátová teorie	31
4.1.	Základní rovnice laminátové desky	31
4.2.	Celková matice tuhosti	35
4.3.	Způsoby skládání vrstev laminátu	37
4.3.1.	Symetrické lamináty	37
5.	Určení průhybu jednosměrného a vrstveného kompozitního nosníku.....	38
5.1.	Zadání úlohy	38
5.2.	Výpočet dle klasické pružnosti a pevnosti.....	39
5.3.	Výpočet průhybu jednosměrného kompozitního nosníku	41
5.4.	Výpočet průhybu vrstveného kompozitního nosníku	43
6.	Závislost průhybu kompozitního nosníku na orientaci vláken.....	45
6.1.	Průhyb jednosměrného kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken	45
6.2.	Průhyb vrstveného kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken	49
6.3.	Shrnutí výsledků	53
	Závěr.....	54
	Literatura.....	55

Seznam použitých veličin:

symbol	jednotka	název veličiny
σ	$[Pa]$	napětí
E	$[Pa]$	modul pružnosti
ν	$[-]$	Poissonovo číslo
G	$[Pa]$	modul pružnosti ve smyku
α	$[-]$	koeficient teplotní roztažnosti
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
v	$[m^3]$	objem
M	$[kg]$	hmotnost
V	$[-]$	objemový podíl
ε	$[-]$	poměrné prodloužení
A	$[m^2]$	plocha
F	$[N]$	síla
h	$[m]$	tloušťka
u	$[m]$	posun
S	$[Pa^{-1}]$	matice poddajnosti
ψ	$[^\circ]$	sklon
γ	$[^\circ]$	zkosení
u, v, w	$[m]$	posuv ve směru osy x, y, z
k	$[m^{-1}]$	křivost
Q	$[Pa]$	matice mimoosové tuhosti
N	$[N \cdot m^{-1}]$	výslednice sil
M	$[N]$	moment na jednotku délky
A	$[N \cdot m^{-1}]$	matice tahové tuhosti
B	$[N]$	matice vazební tuhosti
D	$[N \cdot m]$	matice ohybové tuhosti
T	$[N]$	posouvající síla
b	$[m]$	šířka
l	$[m]$	délka
U	$[N \cdot m]$	deformační energie
J	$[m^4]$	kvadratický moment průřezu
θ	$[^\circ]$	úhel natočení vláken
C	$[Pa]$	matice tuhosti
d	$[m]$	průměr

Seznam obrázků:

Obr. 1 Fáze kompozitního materiálu [1]	11
Obr. 2 Částicový a skeletový kompozit [3]	12
Obr. 3 Materiálové zastoupení v Boeing 787 [5]	12
Obr. 4 Tepelný štít raketoplánu společnosti NASA [6]	13
Obr. 5 Karbonové šasi automobilu McLaren [14]	13
Obr. 6 Karbonový rám závodního kola [16]	14
Obr. 7 Protéza chodidla z karbonu [15]	14
Obr. 8 Klasifikace vláknových kompozitů z geometrického hlediska [3]	15
Obr. 9 Struktura uhlíkové nanotrubičky [8]	15
Obr. 10 Struktura krátkovláknových kompozitů (orientace v jednom směru a náhodně) [3]	15
Obr. 11 Struktura dlouhovláknových kompozitů (jednosměrné, dvousměrné a vícesměrné vyztužení) [3]	15
Obr. 12 Snímek skleněných vláken pořízený elektronovým mikroskopem [9]	17
Obr. 13 Porovnání lidského vlasu s uhlíkovým vláknem [10]	18
Obr. 14 Molekulární struktura Kevlaru 49 [11]	19
Obr. 15 Sestava pro lisování v autoklávu [1]	21
Obr. 16 Typický cyklus vytvrzování pro uhlíkové/epoxidové kompozity [1]	21
Obr. 17 Schéma navíjení [6]	22
Obr. 18 Schéma pultruze [13]	22
Obr. 19 Kompozit zatížený v podélném směru [4]	24
Obr. 20 Kompozit podrobený smykovému napětí [4]	26
Obr. 21 Laminát $[90 _{\pm 45} 0]_s$ [4]	31
Obr. 22 Deformace laminátu [4]	32
Obr. 23 Výsledné síly a momenty [4]	34
Obr. 24 Průběh napětí v laminátu [4]	35
Obr. 25 Příklad symetrického laminátu [4]	37
Obr. 26 Schéma zadání příkladu	38
Obr. 27 Uspořádání vrstev v kompozitu	39
Obr. 28 Zjednodušené zadání příkladu pro výpočet dle klasické PP	39
Obr. 29 Schéma metody řezu	40
Obr. 30 Průběhy $M_o(x)$ a $T(x)$	40

Seznam grafů:

Graf 1: Celkový průhyb T600+epoxy	45
Graf 2: Průhyb od posouvající síly T600+epoxy	46
Graf 3: Průhyb od momentu T600+epoxy.....	46
Graf 4: Porovnání průhybu od jednotlivých složek namáhání	47
Graf 5: Celkový průhyb skelná vlákna + epoxy.....	47
Graf 6: Průhyb od momentu skelná vlákna + epoxy	48
Graf 7: Průhyb od posouvající síly skelná vlákna + epoxy.....	48
Graf 8: Porovnání průhybu od jednotlivých složek namáhání, skelná vlákna + epoxy	49
Graf 9: Celkový průhyb vrstveného nosníku, t600+epoxy	49
Graf 10: Průhyb od ohybového momentu vrstveného nosníku, T600+epoxy.....	50
Graf 11: Průhyb od posouvající síly vrstveného nosníku, T600+epoxy.....	50
Graf 12: Porovnání průhybu od jednotlivých složek namáhání, T600+epoxy.....	51
Graf 13: Celkový průhyb skelná vlákna + epoxy.....	51
Graf 14: Průhyb vrstveného nosníku od ohybového momentu, skelná vlákna + epoxy.....	52
Graf 15: Průhyb vrstveného nosníku od posouvající síly, skelná vlákna + epoxy	52
Graf 16: Porovnání průhybů vrstveného nosníku od jednotlivých složek namáhání, skelná vlákna + epoxy	53

Seznam tabulek:

Tabulka 1: Mechanické vlastnosti vybraných vláken [3].....	16
Tabulka 2: Extrémy průhybu pro jednosměrný kompozitní nosník	53
Tabulka 3: Extrémy průhybu pro vrstvený kompozitní nosník.....	53

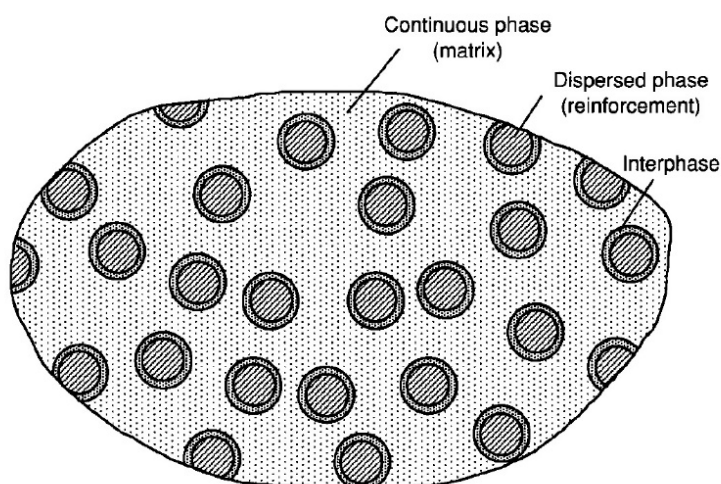
Úvod:

Tato bakalářská práce se zabývá závislostí mezi průhybem a orientací vláken kompozitního nosníku. První část této bakalářské práce se věnuje stručnému uvedení do problematiky kompozitních materiálů, které představují novou generací velice progresivních materiálů, jež nacházejí uplatnění v široké škále odvětví jako je letectví, automobilový průmysl nebo biomedicína. Kompozitní materiály jsou oblíbené zejména díky své nízké hmotnosti a svým dobrým mechanickým vlastnostem. Ještě většímu rozšíření kompozitních materiálů však brání vysoká cena a náročnost správného návrhu kompozitní konstrukce. Pro výrobu kompozitních materiálů se nabízí mnoho různých materiálů a způsobů výroby, které jsou v této části popsány. V druhé části práce jsou vysvětleny hlavní principy potřebné k výpočtu průhybu kompozitního nosníku. Pomocí směšovacího pravidla a klasické laminátové teorie můžeme určit materiálové charakteristiky daného kompozitního materiálu, potřebné k výpočtu průhybu nosníku. Třetí část této práce je ryze výpočetní. Nosník je uvažován pro dvě materiálové konfigurace jednosměrného a vrstveného kompozitu. Řešení zahrnuje nejprve výpočet pomocí klasické teorie pružnosti a pevnosti, dále je uveden příklad výpočtu podle směšovacího pravidla a klasické laminátové teorie. Pro jednotlivé úhly natočení jsou materiálové charakteristiky počítány v programu LamiEx V3.0. V závěru je zhodnocení vlivu orientace vláken na velikost průhybu kompozitního nosníku.

1. Kompozitní materiály

1.1. Definice kompozitního materiálu

Kompozitní materiál je materiálový systém, sestávající ze dvou nebo více fází v makroskopickém měřítku, jehož mechanické chování a vlastnosti jsou navrženy tak, aby byly lepší než vlastnosti jednotlivých fází samostatně. Jedna z fází je obvykle nesouvislá, tuhá a silnější, a nazývá se výztuží, zatímco méně tuhá a slabší fáze je spojitá a nazývá se matrice. Někdy je v důsledku chemických interakcí nebo jiných procesních efektů mezi jednotlivou výztuží a matricí další fáze, nazývaná mezifáze [1].



Obr. 1 Fáze kompozitního materiálu [1]

1.2. Historie kompozitních materiálů

Koncept kompozitních materiálů je velice starý, jelikož už ve starověkém Egyptě byly používány hlíněné cihly, vyztužené slaměnými stébly. Za první moderní kompozit však lze považovat fenolovou pryskyřici, vyztuženou azbestovými vlákny, z roku 1907. Následoval vyztužený plast, který byl použit pro součásti letadel v roce 1916. První sklolaminátová loď byla vyrobena v roce 1942 a aplikace laminátů z nenasycené polyesterové pryskyřice vyztužené skleněnými vlákny se rozšířila i ve výrobě automobilů a letadel. Bórová a vysoce pevnostní uhlíková vlákna byla představena na začátku 60. let. V roce 1970 začala firma Du Pont vyrábět aramidová vlákna, známá pod označením kevlar. Koncem 70. let se aplikace kompozitních materiálů rozšířila do mnoha odvětví průmyslu a kompozity postupně začaly nahrazovat tradiční materiály. V současnosti je velkým objevem nanokompozitní materiál [1,2].

1.3. Dělení kompozitních materiálů

Kompozitní materiály můžeme dělit dle několika různých kritérií:

a. Dle materiálu výztuže

- kovy – např.: Mo, W, Fe, Cr.
- nekovy – např.: keramické materiály (Al_2O_3 , ZrO_2 , SiC), skla, uhlík, polymery (Kevlar, Nylon).

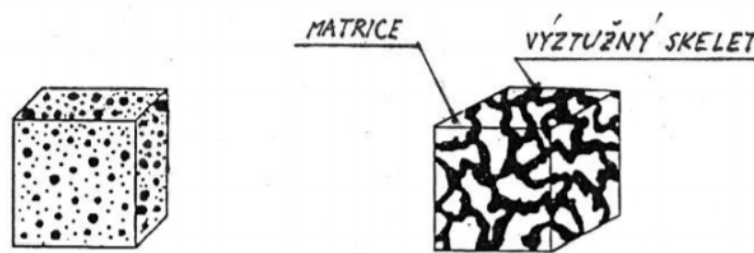
b. Dle materiálu matrice

- kovy – např.: Al, Ag, Fe, Mg.
- nekovy – např.: keramické materiály (Al_2O_3 , SiC, SiO_2), polymery (fenolické pryskyřice, epoxidy, polyestery)

c. Dle geometrického tvaru výztuže

- vláknové
- částicové
- skeletové

Částicové kompozitní materiály jsou vyztuženy rozptýlenými částicemi v matrici. Hlavní význam částic spočívá ve zlepšení mechanických vlastností (zvýšení odolnosti proti opotřebení, snížení koeficientu tření, úprava tepelné a elektrické vodivosti). **Vláknové** kompozitní materiály jsou vyztuženy vlákny (délkový rozměr mají podstatně větší než průřezový). O vláknových kompozitech bude podrobněji pojednáno v části 2. **Skeletové** kompozity jsou tvořeny pórovitou matricí, prostoupenou souvislým nosným skeletem [2, 3, 4].



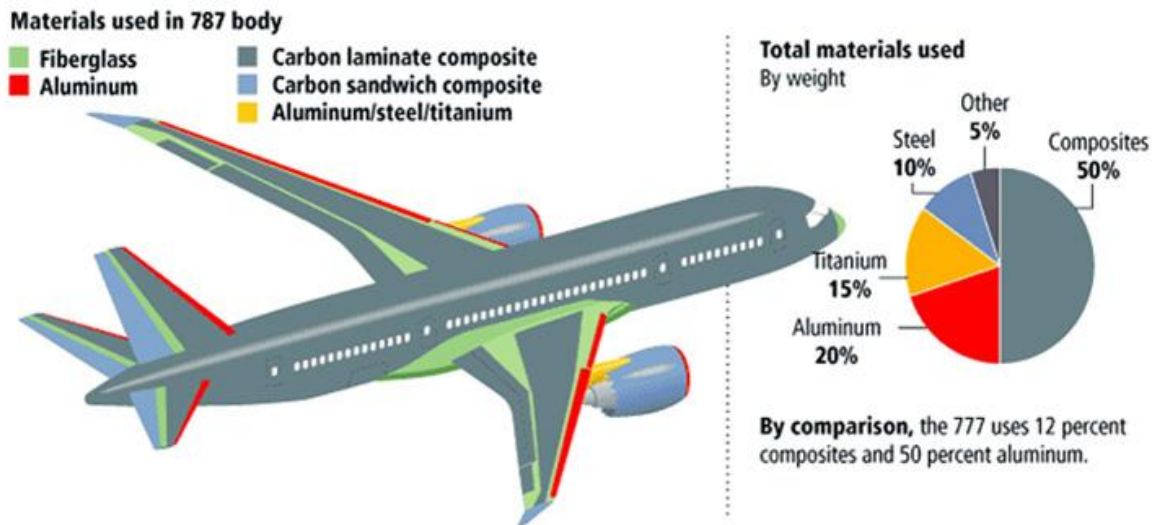
Obr. 2 Částicový a skeletový kompozit [3]

1.4. Aplikace kompozitních materiálů

Kompozitní materiály v současné době nacházejí uplatnění v mnoha odvětvích průmyslu a nahrazují tradiční materiály díky lepším mechanickým vlastnostem a nižší hmotnosti.

1.4.1. Letectví

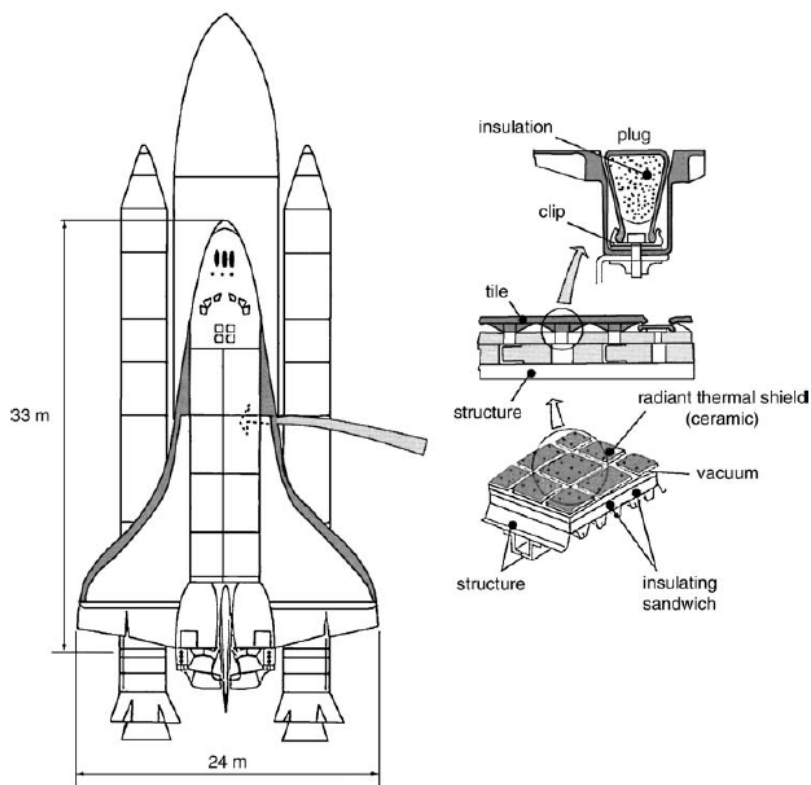
V leteckých konstrukcích nahrazují kompozitní materiály zejména hliníkové slitiny. Mezi nesporné výhody kompozitů použitých v leteckých aplikacích patří: nižší hmotnost, vlastnosti závislé na směru uložení vláken, odolnost proti korozi, jednoduchá výroba i složitých součástí, příznivé chování při nárazu. Bohužel výrobní náklady kompozitních konstrukcí jsou vyšší než u kovových konstrukcí [2].



Obr. 3 Materiálové zastoupení v Boeing 787 [5]

1.4.2. Kosmonautika

Kompozitní materiály se zde používají hlavně díky redukci hmotnosti, která je pro kosmonautiku zcela zásadní. Nicméně kompozitní materiály mají i jiné vlastnosti, díky kterým se zde uplatňují. Například některé grafitové kompozity disponují téměř nulovým součinitelem teplotní roztažnosti, což je výhodné u satelitů, které čelí vysokým teplotám od Slunce. Kompozity s keramickou maticí se také používají jako tepelný štít u raketoplánů díky své vysoké odolnosti proti teplotě.



Obr. 4 Tepelný štít raketoplánu společnosti NASA [6]

1.4.3. Automobilový průmysl

V automobilovém průmyslu nachází kompozitní materiály uplatnění zejména díky odlehčení konstrukce. Vzhledem ke své ceně se však používají zatím u automobilů ve vyšší cenové kategorii.



Obr. 5 Karbonové šasi automobilu McLaren [14]

1.4.4. Ostatní aplikace

Kompozitní materiály nacházejí uplatnění i v řadě dalších aplikací. V biomedicíně se používají pro kloubní náhrady a protézy. Kompozity se také používají pro výrobu sportovního vybavení jako jsou rámy jízdních kol, tenisové rakety, golfové hole nebo lyže a rybářské pruty. V poslední době se kompozitních materiálů využívá i ve stavebnictví.



Obr. 6 Protéza chodidla z karbonu [15]



Obr. 7 Karbonový rám závodního kola [16]

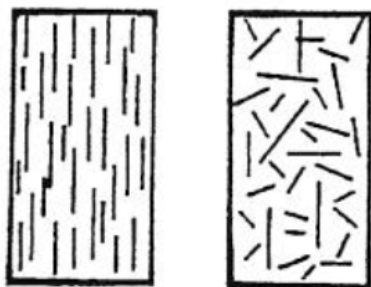
2. Vláknové kompozitní materiály

2.1. Klasifikace vláknových kompozitních materiálů

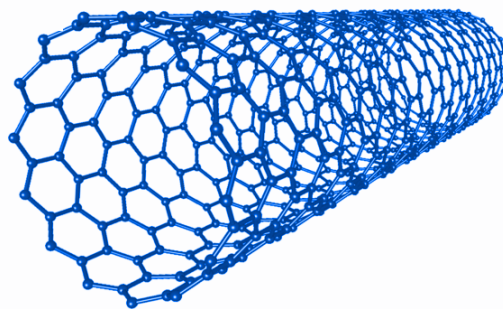


Obr. 8 Klasifikace vláknových kompozitů z geometrického hlediska [3]

Krátkovláknové kompozity obsahují jako výtzuž krátká vlákna, nanotrubicice nebo whiskery. Tato vlákna, která mohou být poměrně dlouhá vzhledem ke svému průměru, jsou orientována náhodně nebo v jednom směru. Pokud jsou vlákna orientována v jednom směru, materiál má tendenci být výrazně anizotropní. V druhém případě, kdy jsou vlákna orientována náhodně, materiál bude spíše kvaziizotropní. Příklad této skupiny jsou nanokompozity, vyztužené uhlíkovými nanotrubicemi [1].

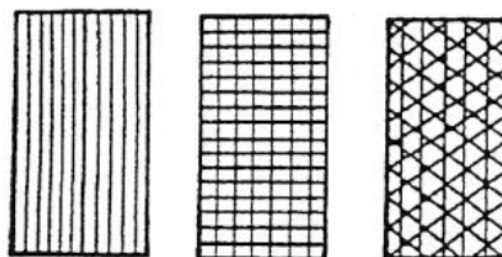


Obr. 9 Struktura krátkovláknových kompozitů (orientace v jednom směru a náhodně) [3]



Obr. 10 Struktura uhlíkové nanotrubicice [8]

Dlouhovláknové kompozity jsou vyztuženy dlouhými kontinuálními vlákny. Vlákna mohou být rovnoběžná (jednosměrné vyztužení), pod pravým úhlem (dvousměrné vyztužení) nebo mohou být orientována do více směrů (vícesměrné vyztužení). V případě vícesměrného vyztužení a pro určité směry a rozložení vláken, lze materiál považovat za kvaziizotropní [1].



Obr.11:Struktura dlouhovláknových kompozitů (jednosměrné, dvousměrné a vícesměrné vyztužení) [3]

2.2. Vlákna

Vlákna vytvářejí nosnou strukturu kompozitního materiálu. Existuje mnoho typů vláken s různými vlastnostmi. Obecně ale můžeme říci, že u vláken je požadována co nejvyšší pevnost a tuhost, a zároveň relativně nízká hustota.

2.2.1. Mechanické vlastnosti vláken

Materiálové pevnostní charakteristiky jsou určeny přítomností nadkritických poruch. V místě této poruchy vzniká a šíří se odtud trhlinka, která vede k lomu. Absolutní počet těchto poruch závisí na objemu materiálu. Tuto skutečnost vyjadřuje Griffithův vztah:

$$\sigma_{Pf} = A + \frac{B}{d}$$

A, B – materiálové konstanty, d – průměr vlákna

Tento vztah má ovšem omezenou platnost, pokud by $d \rightarrow 0$, pevnost by rostla nade všechny meze. Ve skutečnosti nelze překročit tzv. teoretickou pevnost $\sigma_{teor} \cong E/10$. Ze vztahu tedy vyplývá, že čím menší má vlákno průměr, tím má větší pevnost. U tenkých vláken se ale projevuje negativní vliv délky vlákna na mez pevnosti, jelikož u dlouhých vláken je větší pravděpodobnost poruch [3].

Tabulka 1: Mechanické vlastnosti vybraných vláken [3]

	E_t	σ_{Pt}	ρ	σ_{Pt}/ρ	$\varepsilon_{f\text{ krit.}}$
	GPa	MPa	$10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Mpa/kg.m ⁻³	%
Sklo – E	72,4	3500	2,54	1,38	2,5
Sklo – S	85,5	4600	2,48	1,85	2,5
Grafit – E	390	2100	1,9	1,1	0,7
Grafit – S	240	2500	1,9	1,3	0,7
Bor	385	2800	2,63	1,1	0,8
Wolfram	414	4200	19,3	0,22	
Aramid Kevlar 49	130	2800	1,5	1,87	2,5
Azbest	160	3100	2,56	1,21	1,9
SiC	250	2200	2,6	0,85	0,9
Ocel	210	340-2500	7,8	0,044-0,321	

E_t – modul pružnosti v tahu, σ_{Pt} – pevnost v tahu, ρ – hustota, σ_{Pt}/ρ – měrná pevnost, $\varepsilon_{f\text{ krit.}}$ – tažnost

Vlákna musí splňovat tyto podmínky:

- Vlákna musí být pevnější než matrice:

$$\sigma_{fP} > \sigma_{mP},$$

kde σ_{fP} , σ_{mP} – pevnost vlákna, matrice

- Materiál vláken musí mít vyšší tuhost než materiál matrice

$$E_f > E_m,$$

kde E_f , E_m – modul pružnosti vlákna, matrice

- Matrice se nesmí porušit dříve než vlákno:

$$\varepsilon_{mP} > \varepsilon_{fP},$$

kde ε_{fP} , ε_{mP} – mezní prodloužení (tažnost) vlákna, matrice [2].

2.2.2. Materiály vláken

2.2.2.1. Skleněná vlákna

Tenká vlákna o průměru 3,5 až 24 μm kruhového průřezu, tažená z roztavené skloviny. Typy sklovin:

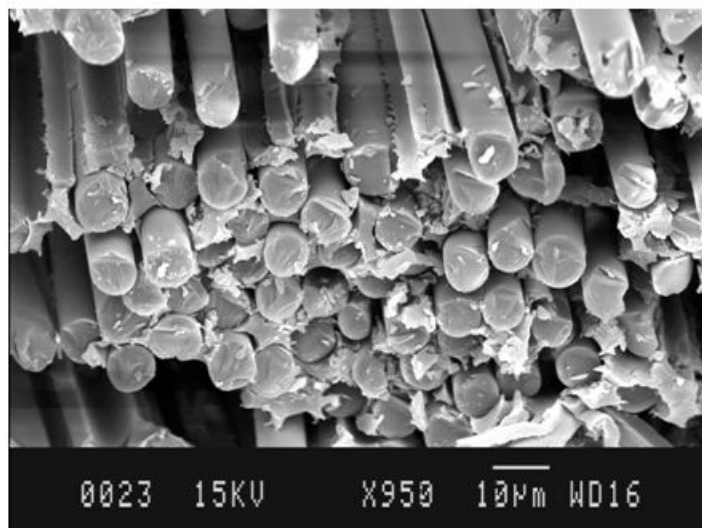
- **E – sklovina:** Nejčastěji používaná sklovina. Vlákná z této skloviny jsou výborným elektrickým izolantem s vysokou prostupností pro záření.
- **S – sklovina (R-sklovina):** Sklovina s vyšším obsahem SiO_2 , MgO a Al_2O_3 . Tato sklovina má až o 70 % vyšší pevnost než E-sklovina.
- **C – sklovina:** Vysoce odolná proti kyselinám a chemicky agresivním látkám.
- **ERC – sklovina**

Skleněná vlákna jsou na základě své amorfní struktury izotropní [2].

Výroba: Ve sklářské peci se při teplotě 1400°C roztaví křemičitý písek, vápenec, kaolin, dolomit, kyselina boritá a kazivec na E-sklovinu. Poté se tavenina několik dní číří. V tekutém stavu se sklovina vede do spřádacích trysek. Z těchto trysek sklovina pomalu vytéká a tuhne ve tvaru vláken. Tato vlákna jsou přibližně 2 mm tlustá. Následuje dloužení vláken, kde se vlákna velmi rychle rotujícím navíjecím zařízením kalibrují na zvolený průměr a současně prodlužují až na 40 000násobnou délku [2].

Vlastnosti:

- pevnost v tahu: $\sigma_{Pt\parallel f} = \sigma_{Pt\perp f} = 1500\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$
- $E_{\parallel f} = E_{\perp f} \approx 75\,000\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$
- Součinitel teplotní délkové roztažnosti $\alpha_{\parallel f} = \alpha_{\perp f} \approx 5 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$
- Elektrická vodivost $\approx 10^{-13}$
- Mez průtažnosti je kolem 3 %
- Bod měknutí je více než 625°C [2]



Obr. 12 Snímek skleněných vláken pořízený elektronovým mikroskopem [9]

2.2.2.2. Uhlíková vlákna

Téměř nepoužívanější vlákna pro moderní kompozity. Jsou to vlákna s extrémně vysokou pevností a tuhostí, ale nízkou tažností.

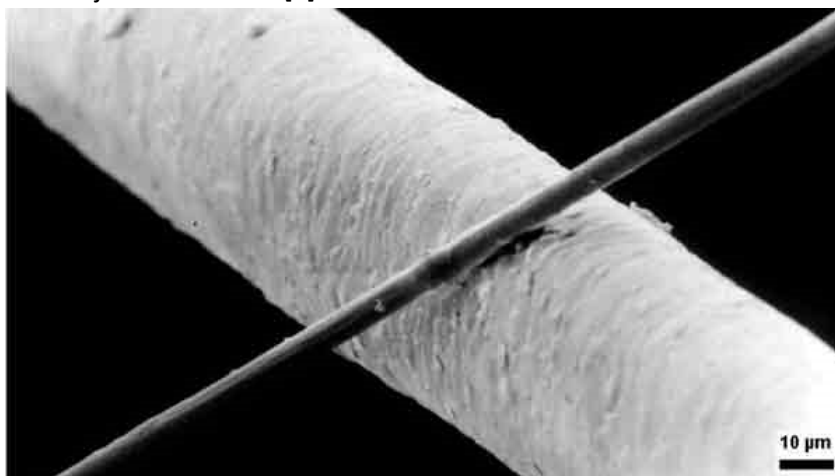
Pro výrobu uhlíkových vláken se používají zejména dva postupy. První je pyrolýza polyakrylonitrilových vláken PAN. Polyakrylonitril se nejprve zahřívá a protahuje, čímž se získá vhodná orientace molekul ve směru osy vlákna. Poté se vlákna stabilizují v oksyličovací peci při teplotách 200–300°C pod mechanickým napětím. Následuje grafitizace v inertní atmosféře při 1000 až 1500°C a další protahování. Tímto postupem lze dosáhnout pevnosti vláken až 5000 N · mm⁻². Následující grafitizací při teplotě až 3000°C lze dosáhnout vláken s vysokým modulem pružnosti v tahu E až 400 000 N · mm⁻². Tyto vlákna mají ovšem nižší pevnost.

Jako druhý postup se používá tepelné zpracování surovin bohatých na uhlík. Používají se smoly na bázi kamenouhelného dehtu nebo dehty vznikající při destilaci ropy. Tepelným zpracováním těchto surovin dostáváme tzv. mezofázi. Poté probíhá stabilizace a karbonizace při teplotách až 2000°C. Tímto způsobem se dají vyrobiť vlákna s ještě vyšším modulem než u první metody (až 700 000 N · mm⁻²), ale s nižší pevností. V posledním kroku se vlákna žíhají při teplotách okolo 3000 °C.

Jelikož jsou uhlíková vlákna za normálních podmínek velice křehká, povrchově se upravují apretací směsí na bázi epoxidové pryskyřice. Ta slouží jako ochrana při zpracování a zvyšuje adhesi vláken a matrice [2,3].

Vlastnosti uhlíkových vláken:

- silně anizotropní $\sigma_{Pt\parallel f} \gg \sigma_{Pt\perp f}$. Anizotropie se také projevuje u součinitele teplotní roztažnosti. V podélném směru jsou hodnoty nulové až záporné, zatímco v kolmém směru jsou kladné.
- vysoká pevnost a vysoké hodnoty E -modulu $\sigma_{Pt\parallel f} = 1500$ až 3000 N · mm⁻², $E_{\parallel f} = 180\ 000$ až $700\ 000$ N · mm⁻².
- nízká hustota $\rho = 1,6$ až 2 g · cm⁻³
- dobrá korozní odolnost
- dobrá tepelná a elektrická vodivost
- vysoká odolnost proti dlouhodobému dynamickému namáhání
- dobrá průchodnost zářeními
- bod měknutí je okolo 500°C [2]

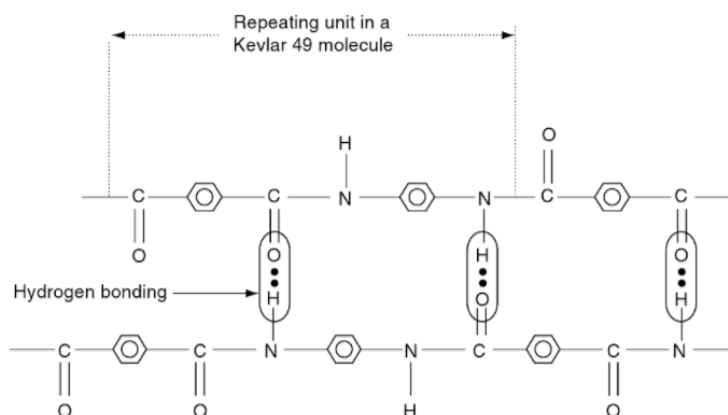


Obr. 13 Porovnání lidského vlasu s uhlíkovým vláknem [10]

2.2.2.3. Aramidová vlákna

Známa také pod obchodním názvem Kevlar firmy Du Pont. Jde o velice lehká a pevná organická vlákna. Po stránce chemické jsou to aromatické polyamidy. Vyrábí se rozpuštěním polymeru v kyselině sírové a poté vytlačováním tryskami do studené vody, kde se vlákna propírají. Následně se vlákna suší na cívkách. Aramidová vlákna se vyrábí v mnoha formách, asi nejznámější jsou Kevlar 49 a Kevlar 149 firmy Du Pont [3].

Aramidová vlákna mají nejnižší hustotu z dostupných vláken $\rho = 1,45 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Mají tedy nejvyšší podíl pevnosti vůči hmotnosti. Mezi hlavní nevýhody aramidových vláken patří jejich neodolnost vůči UV záření a hygroskopie [2].



Obr. 14 Molekulární struktura Kevlaru 49 [11]

2.2.3. Formy uspořádání vláken

Jednotlivá vlákna se ve výrobě víceméně nepoužívají. Vlákna se tedy upravují do různých uspořádání, která se pak používají pro výrobu kompozitních materiálů.

Příze – vzniká spředením vláken, dále se používá pro výrobu tkanin a pásů

Roving (pramenec) – skupina rovnoběžných přízí

Rohož – netkané plošné výrobky, vlákna se ukládají ve vrstvách a poté jsou spojena pojivem

Tkanina – plošné výrobky z vláken nebo pramenců uložených pravouhle v útku a osnově

Jednosměrné pásy – pásy z jedné nebo více rovnoběžně uložených netkaných přímých vláken

Úplety – plošné výrobky, které vznikají spletením vláken

Trojrozměrné tkaniny

Pleteniny

2.3. Matrice

Hlavní úlohou matrice je spojení jednotlivých vláken a vytvoření vnějšího tvaru kompozitního tělesa.

Další funkce matrice jsou:

- distribuce napětí mezi jednotlivými vlákny
- ochrana vláken před vnějšími vlivy
- zajištění interlaminární pevnosti [3, 12]

2.3.1. Materiály matric

2.3.1.1. *Polymerní matrice*

Jedná se o nejčastěji používané matrice. Mají dvě základní charakteristické skupiny, termoplasty a termosety (reaktoplasty).

Termosety jsou látky, které po zahřátí zůstávají v tuhé fázi, avšak při příliš vysokých teplotách se rozkládají. Nejčastěji používané termosety jsou nenasycené polyestery, vinylestery a epoxidy. Kompozity z polyesterové matrice mají dobré mechanické vlastnosti, jsou levné, ale jsou citlivé na zvýšené teploty. Při zpracování se výrazně smršťují (o 6 až 9 %). Vinylesterové matrice jsou odolnější vůči teplu, mají vysokou houževnatost, ale jsou křehké. Řiditelná vytvrzovací reakce společně s nižší viskozitou umožňuje snadnější zpracování. Díky chemické odolnosti se vinylesterové matrice používají v aplikacích s vysokým korozním namáháním. Epoxidové pryskyřice jsou v porovnání s vinylesterovými a polyesterovými tepelně odolnější, mají lepší mechanické vlastnosti, ale hůře se zpracovávají a jsou dražší [1, 2, 6].

Termoplasty jsou po vytvrzení tuhé látky, které měknou a tečou při zvýšení teploty nad teplotu kritickou. Po ochlazení opět ztuhnou.

Mezi termoplasty používané pro matrice patří: polypropylen, polyfenylsulfid, polysulfon, polyether-ether-keton (PEEK), a termoplastické polyimidy. Ve srovnání s epoxidy a termosetovými polyimidy mají vyšší provozní teplotu (až do 400 °C), vyšší lomovou houževnatost a jsou méně citlivé na absorpci vody. Jejich zpracování však není snadné. Chování termoplastu je vysoce závislé na jejich teplotě (viskoelastická) [1,6].

2.3.1.2. *Kovová matrice*

Doporučuje se pro vysokoteplotní aplikace až do přibližně 800 °C (1500 °C). Obvykle používané kovové matrice zahrnují hliník, hořčík a slitiny titanu. Jejich teplota použití je omezena bodem tání [1].

2.3.1.3. *Ostatní používané materiály*

Pro vysokoteplotní aplikace se používají matrice z uhlíku, keramiky a skla. Jako sklokeramická matrice se používá hlinitokřemičitan lithný nebo hlinitokřemičitan vápenatý. Pro keramické matrice se používá vázaný nitrid křemíku. Uhlíkové matrice se vyrábí parním ukládáním pyrolytického grafitu [1].

2.4. Technologie výroby vláknových kompozitů

Výrobní proces kompozitů je závislý zejména na typu použité matrice, která je v průběhu procesu vytvrzována. Po vytvrzení matrice již materiál nelze upravovat. Vysoká cena kompozitních materiálů je způsobena především neefektivními výrobními procesy, ale také nutností postprocesní kontroly. Hotový výrobek musí být bez vad (dutiny, praskliny), musí mít jednotné vlastnosti a musí být plně vytvrzený.

V současné době existuje mnoho výrobních technologií. Patří sem například lisování, navíjení, pultruze, vstřikování a mnoho dalších způsobů výroby. V této kapitole bude uvedeno několik vybraných výrobních procesů.

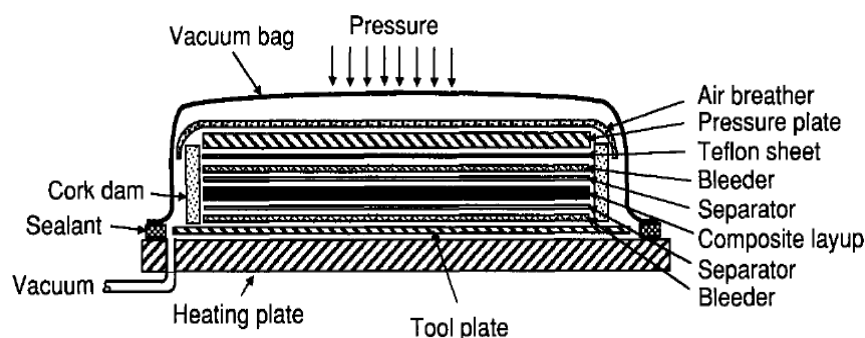
2.4.1. Lisování

Kontaktní lisování – proces výroby probíhá v otevřené formě, kam se ukládají vrstvy vláken a matrice společně s urychlovačem. Stlačení se provádí válečkem, který vytlačuje vzduchové bubliny z materiálu [6].

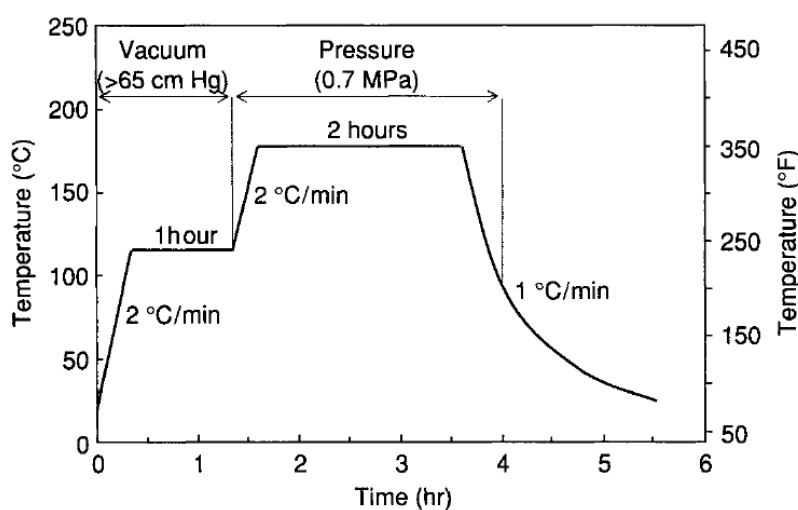
Lisování pomocí vakuového vaku – Materiál je uložen do jednodílné formy a přikryt separační fólií, hrubou odsávací tkaninou a těsnící fólií. Poté je z formy odsán vzduch a tlak způsobí zhutnění materiálu. Vakuum odsaje vzduchové bubliny a přebytečnou pryskyřici [2].

Lisování pomocí tlakového vaku – negativní forma je uzavřena krytem tak, aby se dalo dosáhnout potřebného rovnoměrného tlaku (až 8 barů). Tlakem dojde ke zhutnění materiálu, který je přikryt přítlačnou fólií [2].

Lisování v autoklávu – spojení lisování pomocí vakuového a tlakového vaku. Zpracování se provádí pomocí aplikace předepsaného cyklu teplota-tlak-vakuum v komoře autoklávu.



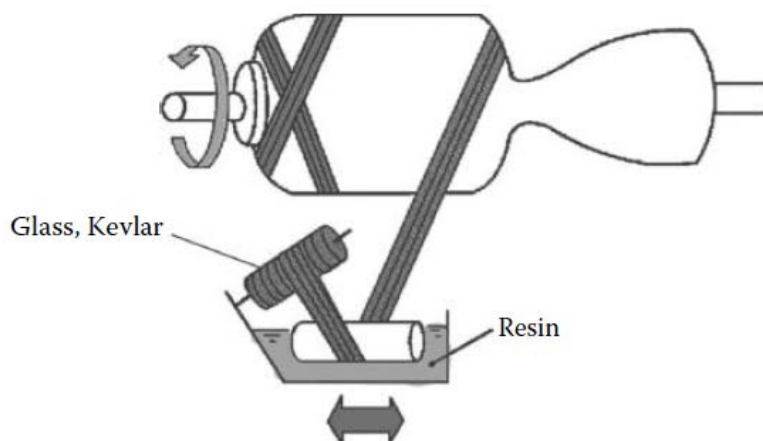
Obr. 15 Sestava pro lisování v autoklávu [1]



Obr. 16 Typický cyklus vytvrzování pro uhlíkové/epoxidové kompozity [1]

2.4.2. Navíjení

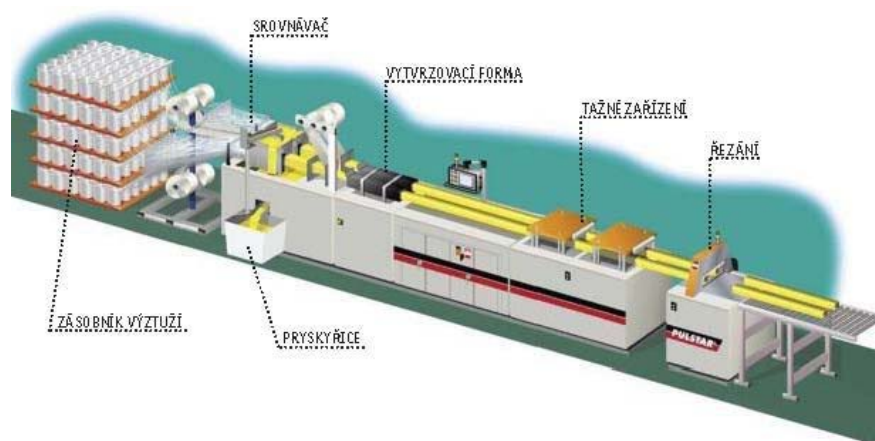
Předimpregnovaná vlákna se pod napětím navíjí na trn. Napětím vláken je dosaženo ztuhnutí materiálu. Vlákna mohou být impregnována částečně vytvrzenou pryskyřicí (suché navíjení), nebo navlhčena v pryskyřičné lázni (mokré navíjení). Tato metoda výroby je vhodná pro součásti, které mají rotační plochy například trubky, tlakové nádoby, kontejnery nebo rakety [6, 1].



Obr. 17 Schéma navíjení [6]

2.4.3. Pultruze

Jedná se o proces kontinuální výroby zavřených nebo otevřených profilů. Vlákna navinutá na cívkách vstupují do srovnávače, kde se rovnoměrně rozmístí. Poté se vlákna smáčí v pryskyřici a následně se profil vytvrzuje ve vyhřívané formě. Tato technologie umožňuje dosažení až 70% podílu vláken v objemu. Rychlost výroby se pohybuje mezi 0,5 až 3 m/min v závislosti na složitosti profilu [6,13].



Obr. 18 Schéma pultruze [13]

3. Směšovací pravidlo

U ortotropního materiálu jsou pro popsání vztahu mezi napětím a deformací nutné 4 elastické konstanty E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} .

E_L – modul pružnosti v podélném směru

E_T – modul pružnosti v příčném směru

ν_{LT} – Poissonovo číslo

G_{LT} – modul pružnosti ve smyku

Pokud v úloze zohledňujeme termoelasticitu, je třeba znát ještě koeficienty teplotní roztažnosti α_L , α_T .

Elastické konstanty daného jednosměrného kompozitu vyjadřujeme pomocí známých materiálových charakteristik:

M, M_f, M_m – hmotnost kompozitu, vlákna, matrice

ρ, ρ_f, ρ_m – hustota kompozitu, vlákna, matrice

v, v_f, v_m – objem kompozitu, vlákna, matrice

Pro celkovou hmotnost kompozitu platí vztah (3.1), který lze vyjádřit pomocí hustoty a Poissonova čísla, jako je tomu ve vztahu (3.2).

$$M = M_f + M_m \quad (3.1)$$

$$\rho \cdot v = \rho_f \cdot v_f + \rho_m \cdot v_m \quad (3.2)$$

Dále platí následující vztahy:

Součet objemových podílů:

$$V_f + V_m = 1, \quad (3.3)$$

kde objemový podíl matrice je $V_m = \frac{v_m}{v}$ a objemový podíl vláken $V_f = \frac{v_f}{v}$.

Hustota kompozitu:

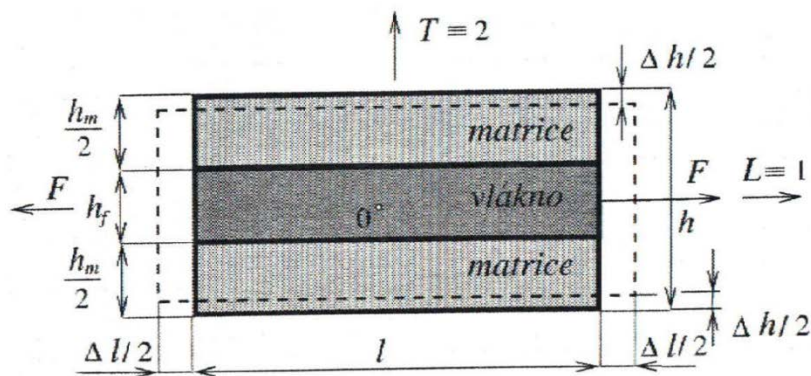
$$\rho = V_f \cdot \rho_f + V_m \cdot \rho_m = V_f \cdot \rho_f + (1 - V_f) \cdot \rho_m \quad (3.4)$$

3.1. Materiálové charakteristiky

Aby bylo možné k výpočtu využít směšovací pravidlo, je nutné znát výše uvedené materiálové charakteristiky, které podrobněji popisuje tato podkapitola.

3.1.1. Modul pružnosti v podélném směru

Kompozit na obrázku 19 v souřadnicovém systému O (L, T) je zatížen silou F ve směru L≡1. Předpokládáme, že se kompozit v podélném směru prodlouží stejně, matrice se prodlouží stejně jako vlákna.



Obr. 19 Kompozit zatížený v podélném směru [4]

Platí:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm}. \quad (3.5)$$

Pomocí délky l kompozitu vyjádříme vztah (3.5) jako:

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{A_f \cdot l}{A \cdot l} = \frac{A_f}{A} \quad \text{a} \quad V_m = \frac{A_m}{A}, \quad (3.6)$$

kde A, A_f, A_m – plocha kompozitu, vlákna, matrice kolmé k podélnému směru L

Pro napětí v tahu ve vláknech a matrici platí vztah (3.7), kde E_f je modul pružnosti vlákna a E_m je modul pružnosti matrice:

$$\sigma_{Lf} = E_f \cdot \varepsilon_{Lf} \quad \text{a} \quad \sigma_{Lm} = E_m \cdot \varepsilon_{Lm}. \quad (3.7)$$

Tahovou sílu poté vyjádříme jako:

$$F = A_f \cdot \sigma_{Lf} + A_m \cdot \sigma_{Lm}. \quad (3.8)$$

Tahové napětí v kompozitu pak bude:

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = V_f \cdot \sigma_{Lf} + V_m \cdot \sigma_{Lm} = (V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m) \cdot \varepsilon_L. \quad (3.9)$$

Z rovnice (3.9) vyjádříme tahový modul pružnosti:

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m. \quad (3.10)$$

Pro $E_f \gg E_m$ můžeme vztah (3.10) zjednodušit pomocí vztahu (3.11):

$$E_L = V_f \cdot E_f. \quad (3.11)$$

3.1.2. Modul pružnosti v příčném směru

Nyní předpokládáme, že je kompozit zatěžován silou F v příčném směru $T \equiv 2$. Jelikož v příčném směru je průřez vlákna a matrice stejný. Platí tedy vztah (3.12).

$$\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm}. \quad (3.12)$$

Deformace vlákna a matrice v příčném směru jsou dány vztahem (3.13).

$$\varepsilon_{Tf} = \frac{\sigma_T}{E_f} \quad a \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{\sigma_T}{E_m}. \quad (3.13)$$

Příčná deformace kompozitu je dána vztahem (3.14), kde Δh můžeme vyjádřit pomocí vztahu (3.15), ve kterém je h_f tloušťka vlákna a h_m je tloušťka matrice.

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \cdot \varepsilon_{Tf} + V_m \cdot \varepsilon_{Tm} = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \cdot \sigma_T, \quad (3.14)$$

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \cdot \varepsilon_{Tf} + h_m \cdot \varepsilon_{Tm}. \quad (3.15)$$

Příčný modul pružnosti kompozitu vyjádříme ze vztahu:

$$\sigma_T = E_T \cdot \varepsilon_T, \quad (3.16)$$

$$E_T = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} = \frac{E_f \cdot E_m}{V_m \cdot E_f + V_f \cdot E_m} = \frac{E_m}{V_m + V_f \cdot \frac{E_m}{E_f}} = \frac{E_m}{1 - V_f \cdot \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}. \quad (3.17)$$

Pokud je $E_f \gg E_m$ pak platí:

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f}. \quad (3.18)$$

3.1.3. Poissonovo číslo

Příčné deformace vlákna a matrice jsou dány vztahem:

$$\varepsilon_{Tf} = -\nu_f \cdot \varepsilon_L \quad a \quad \varepsilon_{Tm} = -\nu_m \cdot \varepsilon_L, \quad (3.19)$$

kde ν_f, ν_m je Poissonovo číslo vlákna, matrice.

Pomocí šířky kompozitu b lze vyjádřit objemový podíl vláken a matrice:

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{h_f \cdot b \cdot l}{h \cdot b \cdot l} = \frac{h_f}{h} \quad a \quad V_m = \frac{h_m}{h}. \quad (3.20)$$

Deformace kompozitu v příčném směru poté vyjádříme jako:

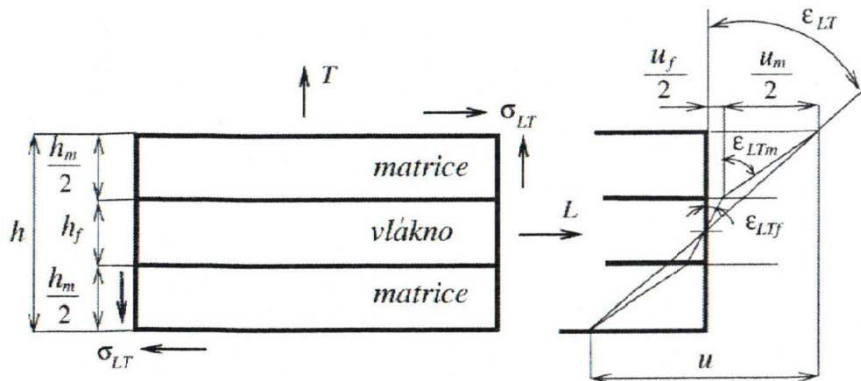
$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \cdot \varepsilon_{Tf} + V_m \cdot \varepsilon_{Tm} = -(V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m) \cdot \varepsilon_L, \quad (3.21)$$

kde Δh je podle vztahu (3.15).

Poissonovo číslo:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m = V_f \cdot \nu_f + (1 - V_f) \cdot \nu_m. \quad (3.22)$$

3.1.4. Smykový modul pružnosti



Obr. 20 Kompozit podrobený smykovému napětí [4]

Předpokládáme, že smyková napětí jsou stejná ve vlákně i matrici, platí tedy:

$$\sigma_{LT} = \sigma_{LTf} = \sigma_{LTm}. \quad (3.23)$$

Úhly natočení (zkosy) vlákna a matrice jsou dány vztahem:

$$\varepsilon_{LTf} = \frac{\sigma_{LTf}}{G_f} \quad \text{a} \quad \varepsilon_{LTm} = \frac{\sigma_{LTm}}{G_m}, \quad (3.24)$$

kde G_f, G_m – smykový modul pružnosti vlákna, matrice

Posun kompozitu v horní ploše ve směru L je dán vztahem:

$$u = u_f + u_m, \quad (3.25)$$

kde $u_f = h_f \cdot \varepsilon_{LTf}$ a $u_m = h_m \cdot \varepsilon_{LTm}$.

Poté platí:

$$u = h_f \cdot \varepsilon_{LTf} + h_m \cdot \varepsilon_{LTm} = \left(\frac{h_f}{G_f} + \frac{h_m}{G_m} \right) \cdot \sigma_{LT}. \quad (3.26)$$

Úhel natočení (zkos) kompozitu pak je:

$$\varepsilon_{LT} = \frac{u}{h} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right) \cdot \sigma_{LT}. \quad (3.27)$$

Smykový modul lze vyjádřit pomocí vztahu (3.28) a dále rozepsat, jako můžeme vidět ze vztahu (3.29):

$$G_{LT} = \frac{\sigma_{LT}}{\varepsilon_{LT}}, \quad (3.28)$$

$$G_{LT} = \frac{G_f \cdot G_m}{V_m \cdot G_f + V_f \cdot G_m} = \frac{G_m}{V_m + V_f \cdot \frac{G_m}{G_f}} = \frac{G_m}{1 - V_f \cdot \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}. \quad (3.29)$$

Pokud platí $G_f \gg G_m$, pak:

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f}. \quad (3.30)$$

Pro smykové moduly vlákna a matrice přibližně platí:

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)} \quad a \quad G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)}. \quad (3.31)$$

3.1.5. Koeficient podélné teplotní roztažnosti

Předpokládáme, že podélné prodloužení ve směru $L \equiv 1$ je ve vlákne i matrice stejné, tedy:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm}. \quad (3.32)$$

Pak platí vztah (3.33), kde ΔT je rozdíl okamžité a počáteční teploty.

$$\varepsilon_{Lf} = \frac{\sigma_{Lf}}{E_f} + \alpha_f \cdot \Delta T, \quad \varepsilon_{Lm} = \frac{\sigma_{Lm}}{E_m} + \alpha_m \cdot \Delta T. \quad (3.33)$$

Podélná napětí pak vyjádříme jako:

$$\sigma_{Lf} = E_f \cdot (\varepsilon_L - \alpha_f \cdot \Delta T), \quad \sigma_{Lm} = E_m \cdot (\varepsilon_L - \alpha_m \cdot \Delta T). \quad (3.34)$$

Síla tahového zatížení pak bude:

$$F = \sigma_{Lf} \cdot A_f + \sigma_{Lm} \cdot A_m. \quad (3.35)$$

Jelikož je lamina volná, musí být tahová síla rovna nule:

$$\begin{aligned} V_f \cdot \sigma_{Lf} + V_m \cdot \sigma_{Lm} &= 0, \\ V_f \cdot E_f \cdot (\varepsilon_L - \alpha_f \cdot \Delta T) + V_m \cdot E_m \cdot (\varepsilon_L - \alpha_m \cdot \Delta T) &= 0, \\ (V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m) \cdot \varepsilon_L &= (V_f \cdot \alpha_f \cdot E_f + V_m \cdot \alpha_m \cdot E_m) \cdot \Delta T. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Koeficient podélné teplotní roztažnosti je daný jako:

$$\alpha_L = \frac{\varepsilon_L}{\Delta T}. \quad (3.37)$$

Porovnáním vztahů (3.36) a (3.37) vyjádříme koeficient podélné teplotní roztažnosti:

$$\alpha_L = \frac{V_f \cdot \alpha_f \cdot E_f + V_m \cdot \alpha_m \cdot E_m}{V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m} = \frac{V_f \cdot \alpha_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot \alpha_m \cdot E_m}{V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m}. \quad (3.38)$$

3.1.6. Koeficient příčné teplotní roztažnosti

Příčné deformace vlákna a matrice:

$$\varepsilon_{Tf} = -\frac{\nu_f}{E_f} \cdot \sigma_{Lf} + \alpha_f \cdot \Delta T, \quad \varepsilon_{Tm} = -\frac{\nu_m}{E_m} \cdot \sigma_{Lm} + \alpha_m \cdot \Delta T. \quad (3.39)$$

Pomocí vztahu (3.34) upravíme (3.39) do tvaru:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Tf} &= -\nu_f \cdot (\varepsilon_L - \alpha_f \cdot \Delta T) + \alpha_f \cdot \Delta T, \\ \varepsilon_{Tm} &= -\nu_m \cdot (\varepsilon_L - \alpha_m \cdot \Delta T) + \alpha_m \cdot \Delta T. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Příčné zúžení kompozitu poté bude:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \cdot \varepsilon_{Tf} + h_m \cdot \varepsilon_{Tm}, \quad (3.41)$$

Δh je dána vztahem (3.15).

Dosažením (3.40) do (3.41) a vyjádřením ε_T dostaneme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= -(V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m) \cdot \varepsilon_L + (V_f \cdot \alpha_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \alpha_m \cdot \nu_m) \cdot \Delta T \\ &\quad + (V_f \cdot \alpha_f + V_m \cdot \alpha_m) \cdot \Delta T. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pro ε_L platí:

$$\varepsilon_L = \frac{V_f \cdot \alpha_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \alpha_m \cdot \nu_m}{V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m} \cdot \Delta T. \quad (3.43)$$

Dosažením (3.43) do (3.42) a následným upravením dostáváme:

$$\varepsilon_T = \left[\frac{V_f \cdot V_m \cdot (\nu_m \cdot E_f - \nu_f \cdot E_m) \cdot (\alpha_m - \alpha_f)}{V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m} + V_f \cdot \alpha_f + V_m \cdot \alpha_m \right] \cdot \Delta T. \quad (3.44)$$

Pro α_T kompozitu platí:

$$\alpha_T = \frac{\varepsilon_T}{\Delta T}. \quad (3.45)$$

Dosažením (3.44) do (3.45) a úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha_T &= V_f \cdot \alpha_f + V_m \cdot \alpha_m + \frac{\nu_m \cdot E_f - \nu_f \cdot E_m}{\frac{E_f}{V_m} + \frac{E_m}{V_f}} \cdot (\alpha_m - \alpha_f) = \\ &= V_f \cdot \alpha_f + (1 - V_f) \cdot \alpha_m + \frac{\nu_m \cdot E_f - \nu_f \cdot E_m}{1 - V_f + \frac{E_m}{V_f}} \cdot (\alpha_m - \alpha_f). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Vztahy uvedené v kapitole 3 jsou odvozeny za určitých předpokladů, které daný problém zjednodušují. Nejedná se tedy o přesný výpočet. Konstanty, které tímto výpočtem získáme, jsou tzv. efektivní konstanty, které nám udávají vlastnosti laminy v podélném a příčném směru.

3.2. Mimoosové elastické konstanty

V praxi často nestačí znalost elastických konstant v hlavních směrech, proto potřebujeme mimoosové elastické konstanty. Tyto konstanty můžeme určit pomocí materiálových zkoušek nebo vyjádřením za pomoci poddajností.

Uvažujeme jednosměrný kompozit zatížený ve směru osy a všechna napětí kromě σ_{xx} jsou nulová.

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3.47)$$

Podle matice mimoosové poddajnosti uvedené v [4] můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S'_{11} \cdot \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{21} \cdot \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{31} \cdot \sigma_{xx}, \\ \gamma_{xz} &= S'_{61} \cdot \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Z toho vyplývá vztah pro modul pružnosti ve směru x:

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{S'_{11}}, \quad (3.49)$$

kde

$$S'_{11} = S_{11} \cdot \cos^4 \theta + S_{22} \cdot \sin^4 \theta + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta. \quad (3.50)$$

Dosažením vztahu (3.50) do (3.49) dostaneme:

$$\frac{1}{E_x} = S_{11} \cdot \cos^4 \theta + S_{22} \cdot \sin^4 \theta + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta. \quad (3.51)$$

Platí:

$$S_{12} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}, \quad E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{S_{22}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{22}}{S_{11}}. \quad (3.52)$$

Dosažením (3.52) do (3.51) získáme:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cdot \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cdot \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \cdot \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta. \quad (3.53)$$

Nyní budeme uvažovat jednosměrný kompozit zatížený ve směru osy y:

$$\sigma_{yy} \neq 0 \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3.54)$$

Vzhledem k matici mimoosové poddajnosti můžeme psát:

$$\varepsilon_{yy} = S'_{22} \cdot \sigma_{yy}, \quad S'_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad (3.55)$$

kde:

$$S'_{22} = S_{11} \cdot \sin^4 \theta + S_{22} \cdot \cos^4 \theta + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta. \quad (3.56)$$

Dosažením (3.56) do (3.55) získáme:

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_L} \cdot \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cdot \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \cdot \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta. \quad (3.57)$$

Pro určení modulu pružnosti ve smyku G_{xy} uvažujeme:

$$\sigma_{xy} \neq 0 \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3.58)$$

Podle matice mimoosové poddajnosti uvedené v [4] můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S'_{16} \cdot \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{26} \cdot \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{36} \cdot \sigma_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= S'_{66} \cdot \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Modul pružnosti ve smyku pak můžeme definovat jako:

$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S'_{66}}, \quad (3.60)$$

kde:

$$S'_{66} = 2 \cdot [2 \cdot (S_{11} + S_{22} - 2 \cdot S_{12}) - S_{66}] \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + S_{66} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \quad (3.61)$$

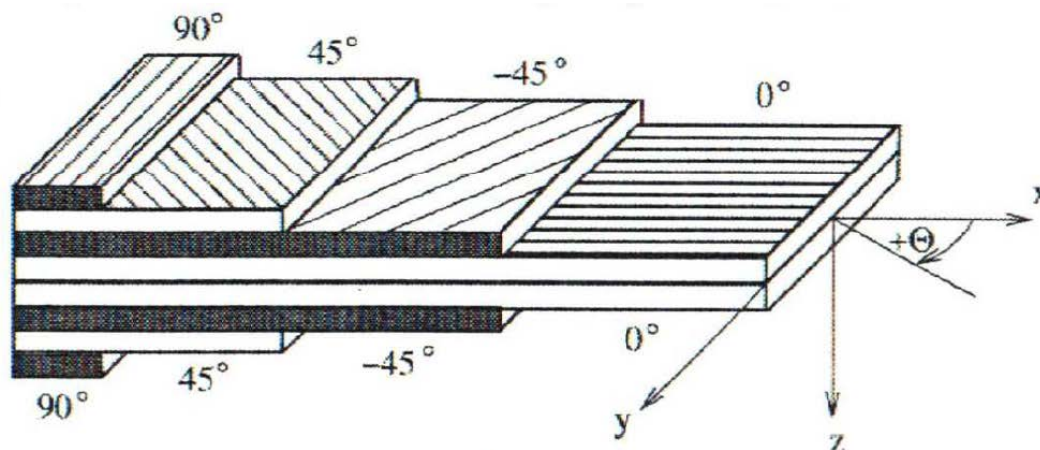
Dosadíme-li (3.52) do (3.61) a následně do (3.60) získáme:

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4 \cdot \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \quad (3.62)$$

Celá kapitola 3 byla převzata ze zdroje [4].

4. Klasická laminátová teorie

Nespornou výhodou kompozitních materiálů je možnost měnit materiálové vlastnosti dle potřeby. U jednosměrného kompozitu budou vlastnosti v podélném směru mnohem lepší než ve směru příčném, proto se jednosměrný kompozit v praxi téměř nepoužívá. Používají se tedy lamináty, které se skládají dvěma nebo více navzájem spojenými vrstvami. Směry jednotlivých vrstev jsou orientovány tak, aby bylo dosaženo požadovaných vlastností materiálu.



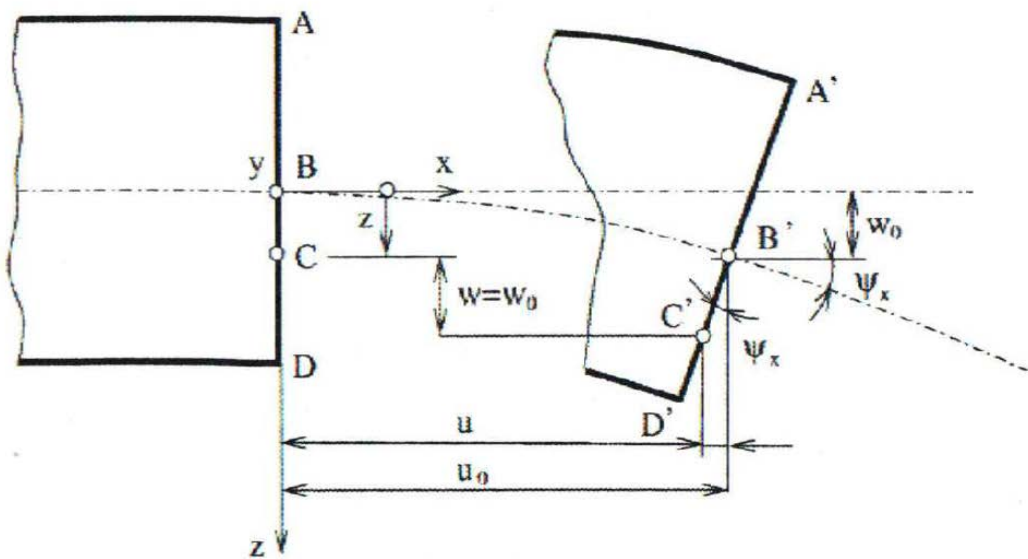
Obr. 21 Laminát $[90|\pm 45|0]_s$ [4]

Na Obr. 21 je symetrický laminát s označením $[90|\pm 45|0]_s$, kde 90, ± 45 a 0 značí úhel natočení jednotlivých lamin. Index s označuje symetrický laminát. Jestliže se některé laminy opakují, označí se počet lamin se stejným natočením indexem, např. $[(90)_4|\pm 45|0]$.

4.1. Základní rovnice laminátové desky

Pro výpočet laminátu, který budeme brát jako tenkou desku, uvažujeme následující předpoklady:

- Jednotlivé laminy jsou ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je v porovnání s délkou a šířkou velice malá
- posunutí jednotlivých bodů jsou velmi malá ve všech třech směrech
- posunutí jsou spojitá, jelikož spoj mezi laminami je dokonalý, nekonečně tenký
- v příčném směru se posunutí mění lineárně
- tloušťka laminátu je vzhledem k ostatním rozměrům malá tudíž lze uvažovat rovinný stav napjatosti a platí: $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$
- příčná zkosení $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, kolmice ke středové ploše zůstanou kolmé i po deformaci a budou přímkové
- normálová vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní, lze tedy zanedbat přetvoření v příčném směru $\varepsilon_{zz} = 0$
- mezi deformací a napětím bude lineární závislost



Obr. 22 Deformace laminátu [4]

Obr. 22 znázorňuje část laminátu v rovině xz . Strana AD je kolmá ke střední ploše laminátu v nezdeformovaném stavu, a zůstane tak i po deformaci. Vlivem deformace vznikají posuvy u_0, v_0, w_0 , odpovídající směrům os x, y, z .

Posuv bodu C ve směru osy x :

$$u = u_0 - z \cdot \psi_x, \quad (4.1)$$

kde ψ_x je sklon střední roviny laminátu.

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Pro složku posuvu ve směru y lze psát:

$$v = v_0 - z \cdot \psi_y, \quad (4.3)$$

kde

$$\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (4.4)$$

Deformace ve směru osy z se zanedbává a platí:

$$w = w_0. \quad (4.5)$$

Rovnice (4.1) až (4.5) lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} = u_0 - z \cdot \psi_x, \\ v &= v_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} = v_0 - z \cdot \psi_y, \\ w &= w_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Po derivaci posuvů dostáváme deformace:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \cdot \partial y}, \quad (4.9)$$

Rovnice (4.7) až (4.9) zapišeme do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

kde deformace střední plochy jsou:

$$\varepsilon_m^\circ = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

a křivosti desky jsou:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

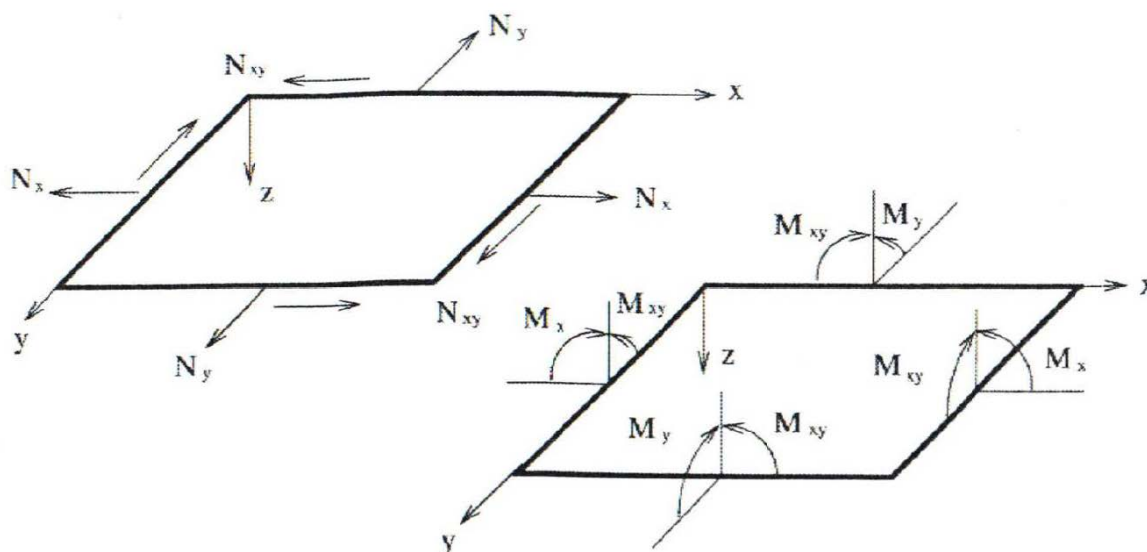
Napětí v libovolné (k-té) vrstvě vyjádříme vztahem (4.13), který platí pro mimoosově namáhanou laminu. Q je matice mimoosové tuhosti.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (4.13)$$

Dosažením vztahu (4.10) do (4.13) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Pokud odvozujeme závislost mezi vnějším zatížením laminátu a jeho deformací, pracujeme s ekvivalentním systémem sil a momentů. Zavedeme výsledné síly a momenty, které působí na příčný průřez k-té vrstvy tloušťky $h_k - h_{k-1}$ (viz obr. 23)



Obr. 23 Výsledné síly a momenty [4]

Pro výsledné síly platí:

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} \cdot dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} \cdot dz, \quad N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} \cdot dz. \quad (4.15)$$

Pro výsledné momenty platí:

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz, \quad M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz, \quad (4.16)$$

$$M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} \cdot z \cdot dz.$$

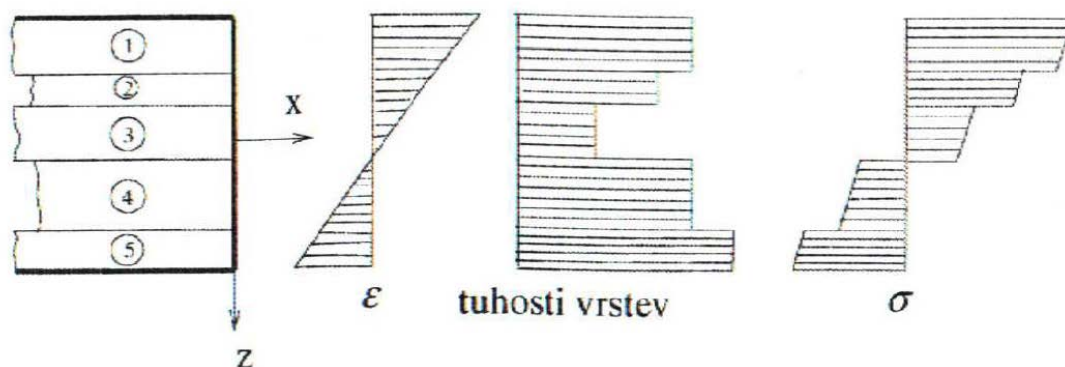
Výslednice sil N_x, N_y, N_{xy} mají rozměr $[N \cdot m^{-1}]$, tj. síla na jednotku délky pásu a M_x, M_y, M_{xy} mají rozměr $[N]$, tj. moment na jednotku délky.

Napětí se po tloušťce laminátu mění nespojitě (viz. obr. 24), proto je třeba výsledné síly a momenty působící v průřezu laminátu vyšetřit jako součet účinku od všech n vrstev. Pro síly je poté možno psát:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \cdot dz. \quad (4.17)$$

Pro momenty platí:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz. \quad (4.18)$$



Obr. 24 Průběh napětí v laminátu [4]

4.2. Celková matice tuhosti

Pomocí vztahů z kapitoly 4.1 odvodíme závislost sil a momentů na deformacích a křivostech. Abychom mohli sestavit celkovou matici tuhosti, dosadíme do rovnic (4.17) a (4.18) rovnici (4.14) a zároveň použijeme vztahy (4.11) a (4.12).

Dostáváme:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} \cdot dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz \right\}, \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \cdot z^2 \cdot dz \right\}.$$

Matice mimoosových tuhostí Q je pro všechny vrstvy konstantní, výraz tedy můžeme psát jako:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \cdot dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \cdot dz \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \cdot dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \cdot dz \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \cdot dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \cdot dz \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^3 \cdot dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

Po násobení integrálů s prvky matice Q_k jednotlivých vrstev a sečtení po celé tloušťce laminátu dostáváme:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Prvky jednotlivých matic se určí:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k - h_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sloučením obou výrazů (4.21) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Vztah (4.21) můžeme zjednodušeně zapsat jako:

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m^\circ \\ \dots \\ k \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

kde:

- A – matice tahové tuhosti
- B – matice vazební tuhosti
- D – matice ohybové tuhosti

Celková (globální) matice tuhosti (4.24) vyjadřuje závislost sil a momentů na deformacích ve střední rovině a na křivosti. Matice tahové tuhosti A váže složky sil s deformacemi ve střední rovině. Matice ohybové tuhosti D udává závislost mezi složkami momentů a složkami křivosti plochy. Matice vazební tuhosti B vyjadřuje závislost momentů na deformacích ve střední rovině a také závislost vektoru vnitřních sil na křivosti plochy. Z toho vyplývá, že normálové a smykové síly, které působí ve střední rovině, způsobí přetvoření ve střední rovině a také ohýbání a zkroucení střední plochy. Složky ohybového momentu vyvolají přetvoření ve střední rovině laminátu.

4.3. Způsoby skládání vrstev laminátu

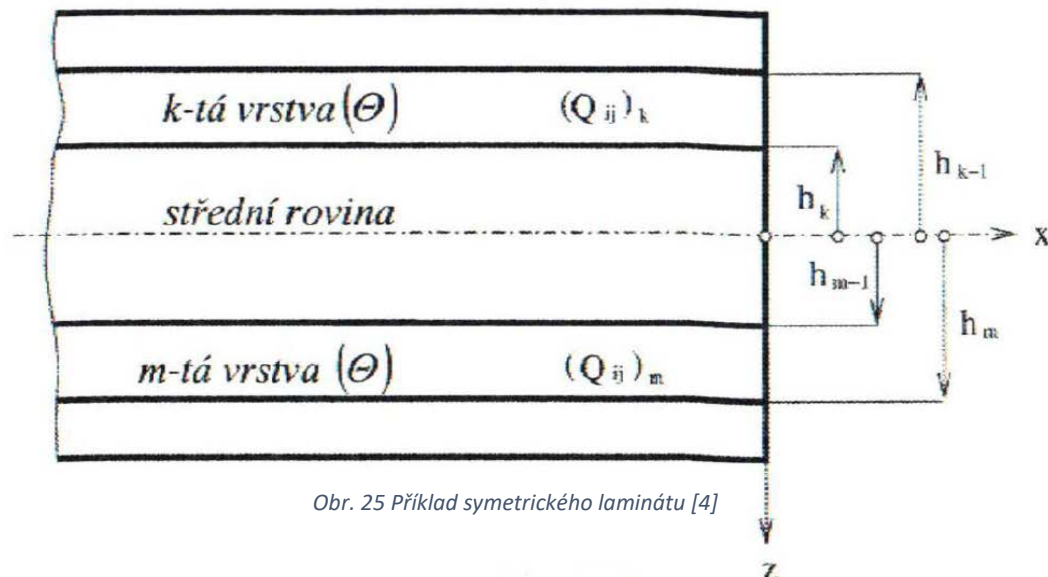
Vhodným skládáním jednotlivých vrstev laminátu lze dosáhnout požadovaných vlastností kompozitního materiálu. Chceme docílit toho, aby prvky v celkové matici tuhosti, které způsobují přídatná namáhání materiálu, byly nulové. Vhodným kladením jednotlivých vrstev pod různými úhly a v daném pořadí tohoto dosáhneme.

4.3.1. Symetrické lamináty

Odstranění vazby mezi tahem a ohybem a mezi tahem a krutem je výhodné z hlediska namáhání kompozitního materiálu. Docílíme toho, jestliže matice vazbové tuhost B je rovna nule:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) = 0. \quad (4.25)$$

Prvky matice B budou rovny nule za předpokladu symetrického laminátu, tzn. laminy budou řazeny symetricky podle střední roviny viz obr. 25.



Obr. 25 Příklad symetrického laminátu [4]

Platí:

$$(Q_{ij})_k = (Q_{ij})_m, \quad |-h_{k-1}| = h_m, \quad |-h_k| = h_{m-1}. \quad (4.26)$$

Celková matice tuhosti má poté tvar:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Příčina vazby mezi tahem a ohybem, kterou představuje matice B, není anizotropie nebo ortotropní vrstvy, ale je to důsledek posloupnosti vrstev. Pokud bychom měli kompozit ze dvou vrstev různých izotropních materiálů, tato vazba by zde byla také. K ohybu kompozitu dochází vlivem změny teploty.

Celá kapitola 4 byla převzata ze zdroje [4].

5. Určení průhybu jednosměrného a vrstveného kompozitního nosníku

V této kapitole se budu zabývat problémem určení průhybu kompozitního nosníku v závislosti na úhlu natočení vláken.

5.1. Zadání úlohy

Je dán na jedné straně vetknutý kompozitní nosník o délce 1000 mm, šířce 50 mm a výšce 100 mm. Na jeho konci působí bodová síla 1000 N.

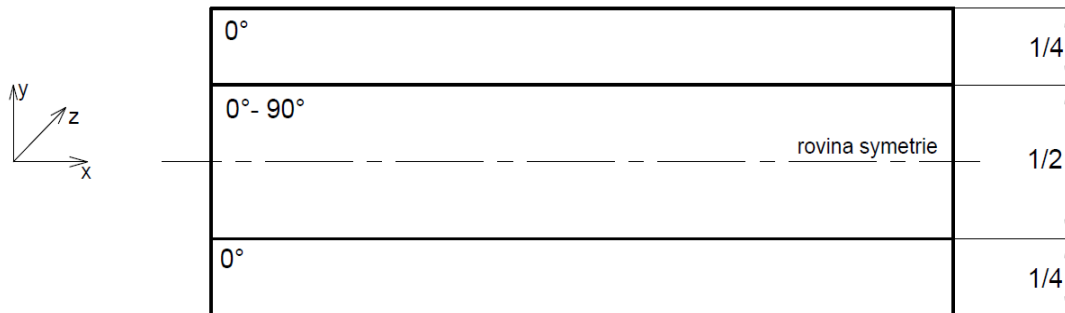
Matrice je epoxidová s vlastnostmi: Hustota $\rho_m = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, modul pružnosti v tahu $E_m = 4500 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_m = 1600 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\nu_m = 0,4$, součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_m = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.



Obr. 26 Schéma zadání příkladu

- 1) Jednosměrný kompozit o objemovém podílu vláken $V_f = 55\%$.
 - a) Vlákná T600. Uhlíková vysokopevnostní vlákna s vlastnostmi: Hustota $\rho_f = 1750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\nu_f = 0,3$, součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_f = -3,8 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$.
 - b) Skleněná vlákna s vlastnostmi: Hustota $\rho_f = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\nu_f = 0,25$, součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_f = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

2) Symetrický kompozit složený ze 3 vrstev. Objemový podíl vláken $V_f = 55\%$.



Obr. 27 Uspořádání vrstev v kompozitu

- a) Vlákná T600. Uhlíková vysokopevnostní vlákna s vlastnostmi: Hustota $\rho_f = 1750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\nu_f = 0,3$, součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_f = -3,8 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$.
- b) Skleněná vlákna s vlastnostmi: Hustota $\rho_f = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\nu_f = 0,25$, součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_f = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.)

5.2. Výpočet dle klasické pružnosti a pevnosti

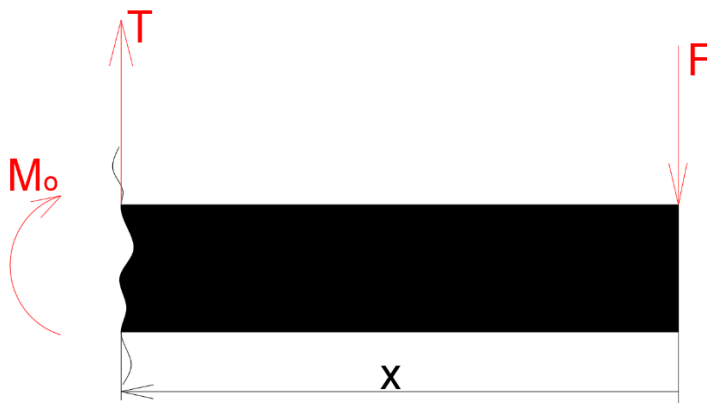
Zadané parametry: F, l, b, h

Chceme určit průhyb v místě působení síly s uvažováním posouvající síly.



Obr. 28 Zjednodušené zadání příkladu pro výpočet dle klasické PP

Průběh momentu a posouvající síly určíme pomocí metody řezu:



Obr. 29 Schéma metody řezu

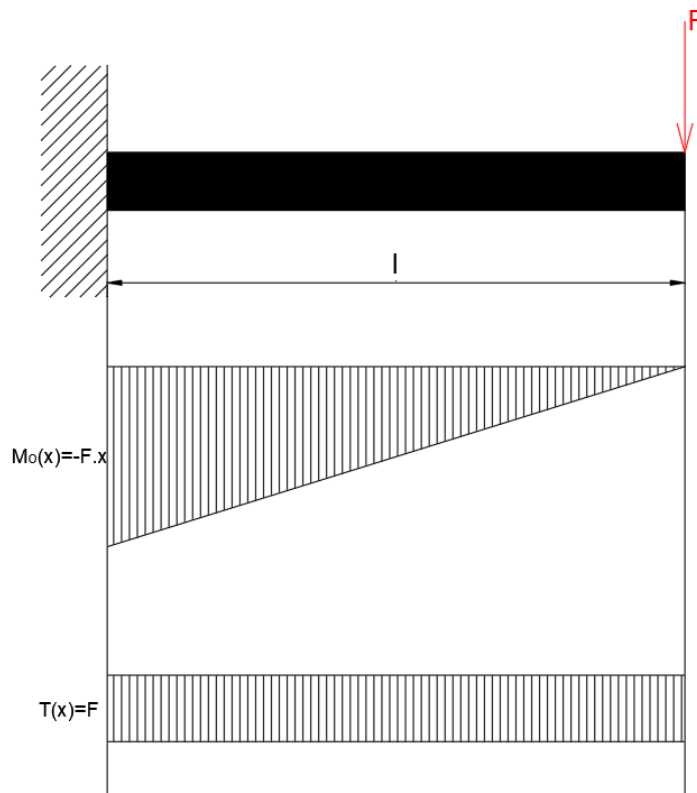
Rovnice rovnováhy:

$$y: \sum_{j=1}^n F_j = 0$$

$$y: T - F = 0 \rightarrow T = F$$

$$M: \sum_{k=1}^n M_k = 0$$

$$M: M_0 + F \cdot x = 0 \rightarrow M_0 = -F \cdot x$$



Obr. 30 Průběhy $M_0(x)$ a $T(x)$

Pro určení průhybu použijeme Castiglianovu větu,

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (5.1)$$

kde u_i je posuv působitě vnější síly F_i (v jejím směru a smyslu), U je celková deformační energie [17].

Deformační energii od ohybového momentu určíme jako:

$$\begin{aligned}
 U_F &= \frac{1}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot \int_{(l)} (M_o(x))^2 \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot \int_0^l (F \cdot x)^2 \cdot dx = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot \left[F^2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J_z je kvadratický moment průřezu a pro obdélník platí:

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3.$$

Deformační energii od posouvající síly určíme jako:

$$\begin{aligned}
 U_T &= \frac{\beta}{2 \cdot G \cdot A} \cdot \int_{(l)} T^2 \cdot dx = \frac{\beta}{2 \cdot G \cdot A} \cdot \int_0^l F^2 \cdot dx = \frac{\beta}{2 \cdot G \cdot A} \cdot [F^2 \cdot x]_0^l = \\
 &= \frac{\beta \cdot F^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot A},
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde β je pro obdélník 1,2, G je modul pružnosti ve smyku, A je obsah obdélníku.

Celkovou deformační energii získáme sečtením deformační energie od ohybového momentu (5.2) a deformační energie od posouvající síly (5.3):

$$U = U_F + U_T = \frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} + \frac{\beta \cdot F^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot A}. \tag{5.4}$$

Pro získání průhybu v místě působení síly F použijeme Castigianovu větu (5.1):

$$v = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} + \frac{\beta \cdot F \cdot l}{G \cdot A}. \tag{5.5}$$

Tento vztah platí pouze pro izotropní materiál. Pro výpočet průhybu kompozitního materiálu musíme vztah upravit dosazením mimoosových elastických konstant E_x, G_{xy} .

5.3. Výpočet průhybu jednosměrného kompozitního nosníku

Zde je uveden příklad výpočtu průhybu jednosměrného kompozitního nosníku například pro orientaci vláken pod úhlem $\theta = 45^\circ$. Materiál vláken budeme uvažovat vysokopevnostní uhlíková vlákna T600 a materiál matrice bude epoxid.

Pro výpočet potřebujeme znát materiálové charakteristiky vláken a matrice:

Vlákna T600: $\rho_f = 1750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$, $\nu_f = 0,3$

- objemový podíl vláken $V_f = 55\%$.

Epoxidová matrice: $\rho_m = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $E_m = 4500 \text{ MPa}$, $G_m = 1600 \text{ MPa}$, $\nu_m = 0,4$

Dle směšovacího pravidla vypočteme elastické konstanty pro příčný a podélný směr E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} . Pro výpočet modulu pružnosti v podélném směru podle vztahu (3.10) platí:

$$E_L = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m.$$

Po dosazení získáme:

$$E_L = 0,55 \cdot 230\,000 + (1 - 0,55) \cdot 4500 = 128\,525 \text{ MPa}.$$

Pro výpočet modulu pružnosti v příčném směru podle vztahu (3.17) platí:

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \cdot \left(1 - \frac{E_m}{E_{fT}}\right)}.$$

Po dosazení získáme:

$$E_T = \frac{4500}{1 - 0,55 \cdot \left(1 - \frac{4500}{15\,000}\right)} = 7\,317,01 \text{ MPa}.$$

Pro výpočet Poissonova čísla podle vztahu (3.22) platí:

$$\nu_{LT} = V_f \cdot \nu_f + (1 - V_f) \cdot \nu_m.$$

Po dosazení získáme:

$$\nu_{LT} = 0,55 \cdot 0,3 + (1 - 0,55) \cdot 0,4 = 0,345.$$

Pro výpočet smykového modulu podle vztahu (3.29) platí:

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \cdot \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}.$$

Po dosazení získáme:

$$G_{LT} = \frac{1600}{1 - 0,55 \cdot \left(1 - \frac{1600}{50\,000}\right)} = 3\,421,73 \text{ MPa}.$$

Jelikož vlákna nejsou orientována v podélném ani příčném směru potřebujeme vypočítat mimoosové elastické konstanty E_x , G_{xy} .

Pro výpočet E_x podle vztahu (3.53) platí:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cdot \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cdot \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \cdot \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta.$$

Po dosazení získáme:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{128\,525} \cdot \cos^4(45^\circ) + \frac{1}{7\,317} \cdot \sin^4(45^\circ) + \left(\frac{1}{3\,421,73} - 2 \cdot \frac{0,345}{128\,525} \right) \cdot \sin^2(45^\circ) \cdot \cos^2(45^\circ),$$

$$E_x = 9273,7 \text{ MPa}.$$

Pro výpočet G_{xy} podle vztahu (3.62) platí:

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4 \cdot \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

Po dosazení získáme:

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{128\,525} + \frac{2}{7317} + 4 \cdot \frac{0,345}{128\,525} - \frac{1}{3421,73} \right) \cdot \sin^2(45^\circ) \cdot \cos^2(45^\circ) + \frac{1}{3421,73} \cdot (\sin^4(45) + \cos^4(45)),$$

$$G_{xy} = 6674,9 \text{ MPa}.$$

Dosazením E_x, G_{xy} do vztahu (5.5) dostaneme celkový průhyb kompozitního nosníku v působení síly F :

$$v = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E_x \cdot J_z} + \frac{\beta \cdot F \cdot l}{G_{xy} \cdot A} = \frac{1000 \cdot 1000^3}{3 \cdot 9273,7 \cdot \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 100^3} + \frac{1,2 \cdot 1000 \cdot 1000}{6674,9 \cdot 50 \cdot 100} = 8,66 \text{ mm}.$$

K výpočtu byl použit program LamiEx V3.0 [18].

5.4. Výpočet průhybu vrstveného kompozitního nosníku

V této kapitole bude uveden příklad výpočtu vrstveného kompozitního nosníku dle zadání uvedeného v kapitole 5.1. Pro ilustraci zde bude uveden výpočet pro materiál vláken T600 a epoxidovou matici. Střední vrstva bude mít orientaci vláken $\theta = 45^\circ$.

Nejprve vypočteme dle směšovacího pravidla elastické konstanty pro příčný a podélný směr $E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$ stejně jako je uvedeno v kapitole 5.3.

Poté je třeba určit jednotlivé členy matice tuhosti C :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \cdot \nu_{LT}^2},$$

$$C_{22} = \frac{E_T}{E_L} \cdot C_{11},$$

$$C_{12} = C_{21} = \nu_{LT} \cdot C_{22},$$

$$C_{66} = G_{LT}.$$

Podrobně jsou tyto členy popsány v [4].

Dále určíme matici mimoosové tuhosti Q :

$$Q = T^{-1} \cdot C \cdot T,$$

kde:

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Poté můžeme vypočítat jednotlivé členy matice D podle vztahu (4.22):

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Matici D musíme vypočítat pro každou vrstvu zvlášť, a poté tyto dílčí matice sečíst, aby nám vyšla matice D pro zadaný laminát:

$$D = \sum_{h=1}^n D_h.$$

Po dosazení nám pro laminát se střední vrstvou o orientaci vláken $\theta = 45^\circ$ vyjde matice D:

$$D = \begin{bmatrix} 9,84 \cdot 10^9 & 5,19 \cdot 10^8 & 3,18 \cdot 10^8 \\ 5,19 \cdot 10^8 & 9,42 \cdot 10^8 & 3,18 \cdot 10^8 \\ 3,18 \cdot 10^8 & 3,18 \cdot 10^8 & 5,92 \cdot 10^8 \end{bmatrix}.$$

Pro matici D poté vytvoříme inverzní matici D^{-1} :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1,05 \cdot 10^{-10} & -4,75 \cdot 10^{-11} & -3,09 \cdot 10^{-11} \\ -4,75 \cdot 10^{-11} & 1,32 \cdot 10^{-9} & -6,81 \cdot 10^{-10} \\ -3,09 \cdot 10^{-11} & -6,81 \cdot 10^{-10} & 2,07 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}.$$

Mimoosové elastické konstanty E_x, G_{xy} poté získáme podle vztahů:

$$E_x = \frac{12}{h^3 \cdot D_{11}^{-1}},$$

$$G_{xy} = \frac{12}{h^3 \cdot D_{66}^{-1}}.$$

Po dosazení nám vyjde hodnota mimoosových elastických konstant pro zadaný laminát:

$$E_x = \frac{12}{100^3 \cdot 1,0512 \cdot 10^{-10}} = 114\,151,8 \text{ MPa},$$

$$G_{xy} = \frac{12}{100^3 \cdot 2,07 \cdot 10^{-9}} = 5797,3 \text{ MPa}.$$

Poté již můžeme dosadit mimoosové elastické konstanty do vztahu (5.5):

$$v = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E_x \cdot J_z} + \frac{\beta \cdot F \cdot l}{G_{xy} \cdot A}.$$

Po dosazení hodnot nám vyjde průhyb vrstveného kompozitního nosníku:

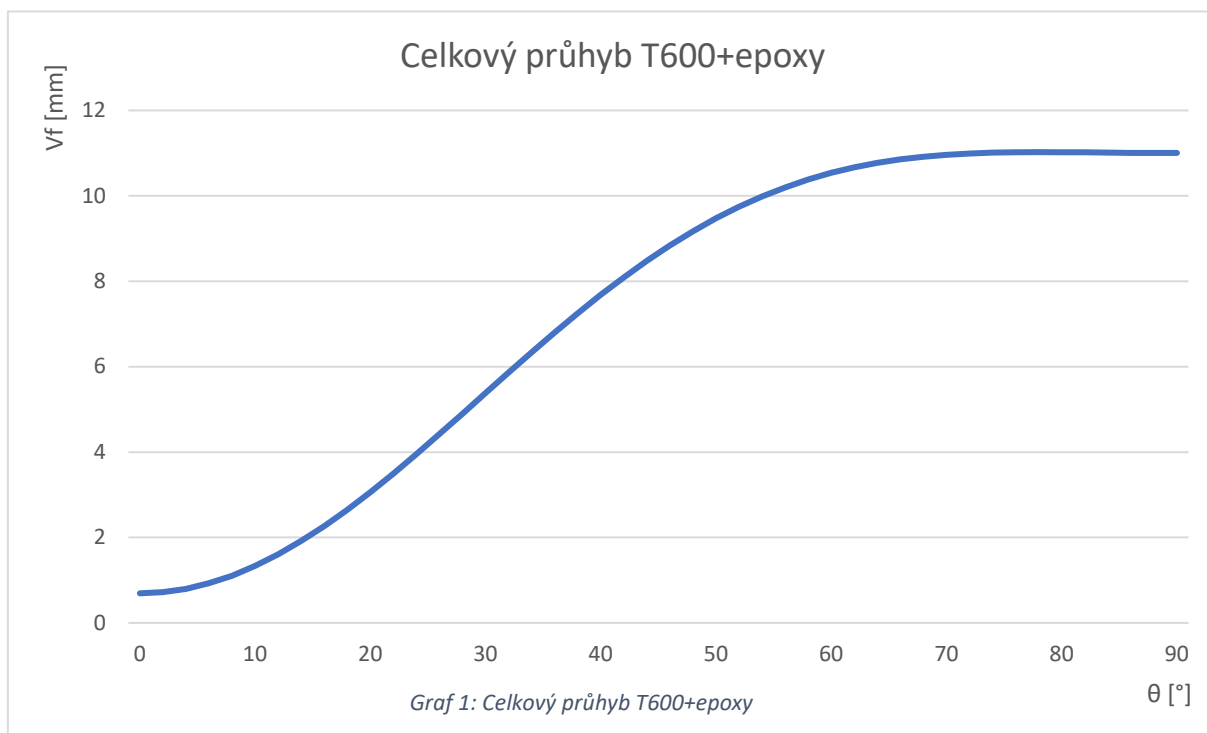
$$v = \frac{1000 \cdot 1000^3}{3 \cdot 114\,151,8 \cdot \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 100^3} + \frac{1,2 \cdot 1000 \cdot 1000}{5797,3 \cdot 50 \cdot 100} = 0,742 \text{ mm}.$$

Výpočet byl proveden v programu LamiEx V3.0 [18].

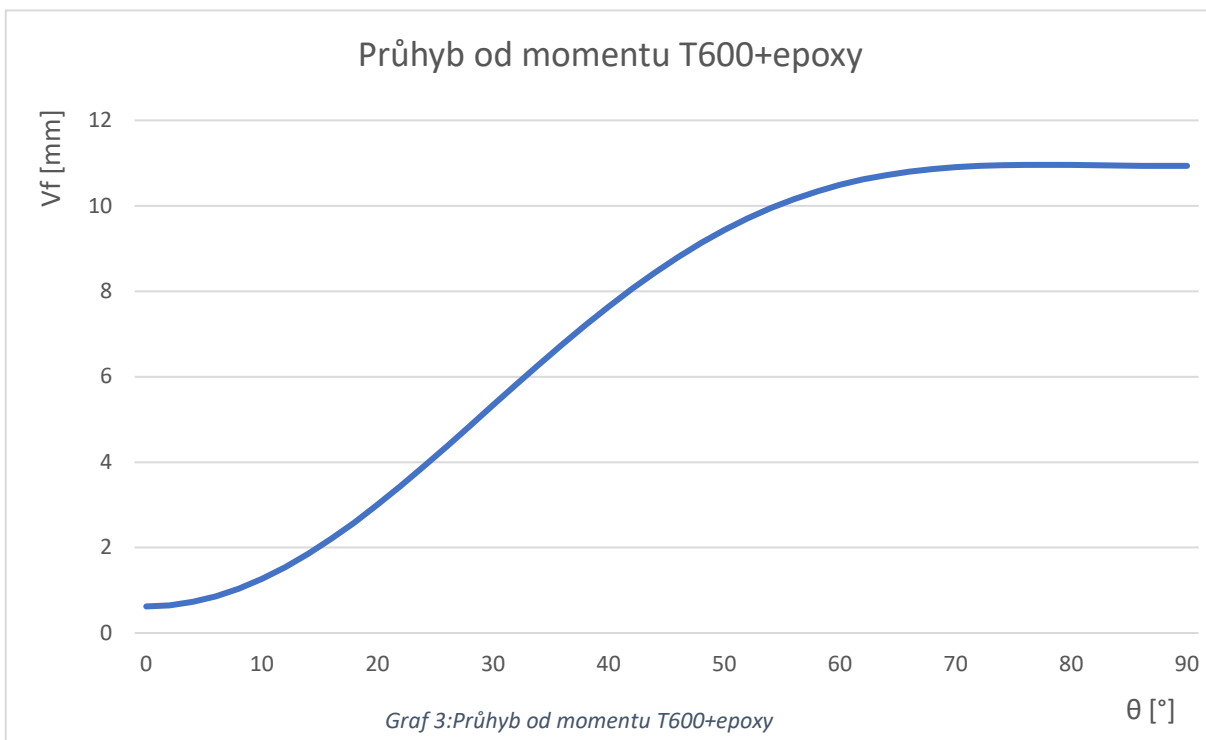
6. Závislost průhybu kompozitního nosníku na orientaci vláken

V této kapitole bude uvedena závislost průhybu kompozitního nosníku na orientaci vláken. Bude zde uveden vliv momentu a posouvající síly na celkový průhyb. Vše bude pro dvě materiálové konfigurace nosníku uvedené v kapitole 5.1 a zvláště pro jednosměrný a vrstvený kompozit. K výpočtu byl použit program LamiEx V3.0 [18] a ke grafickému zpracování program Microsoft Excel®.

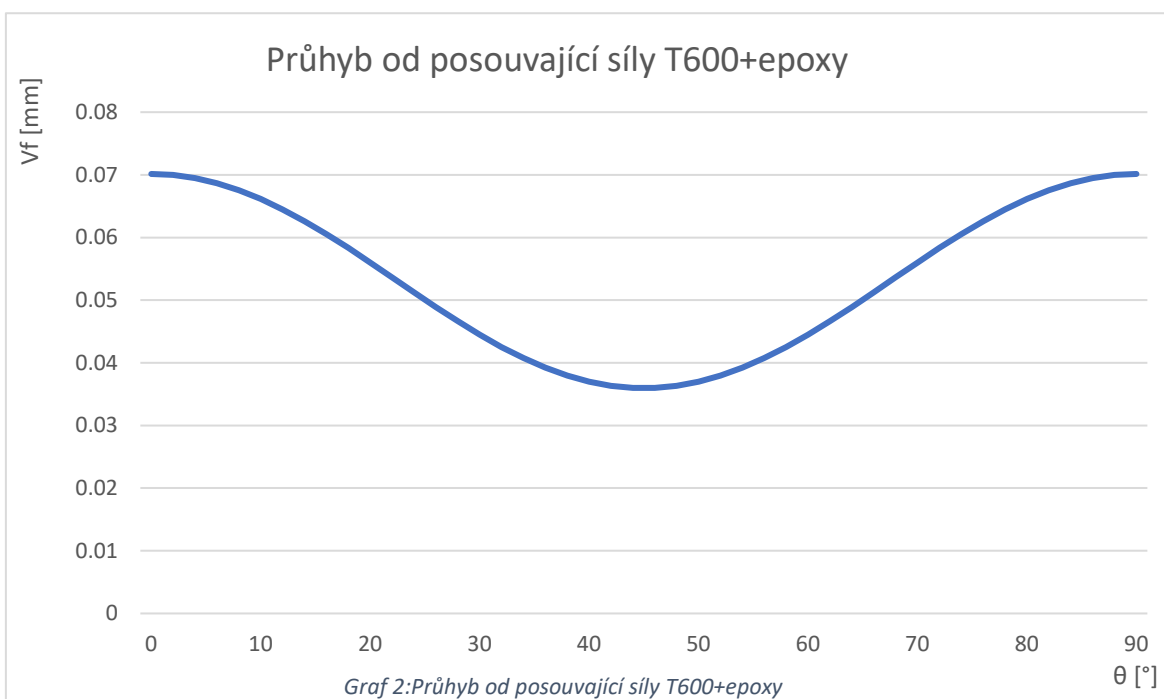
6.1. Průhyb jednosměrného kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken



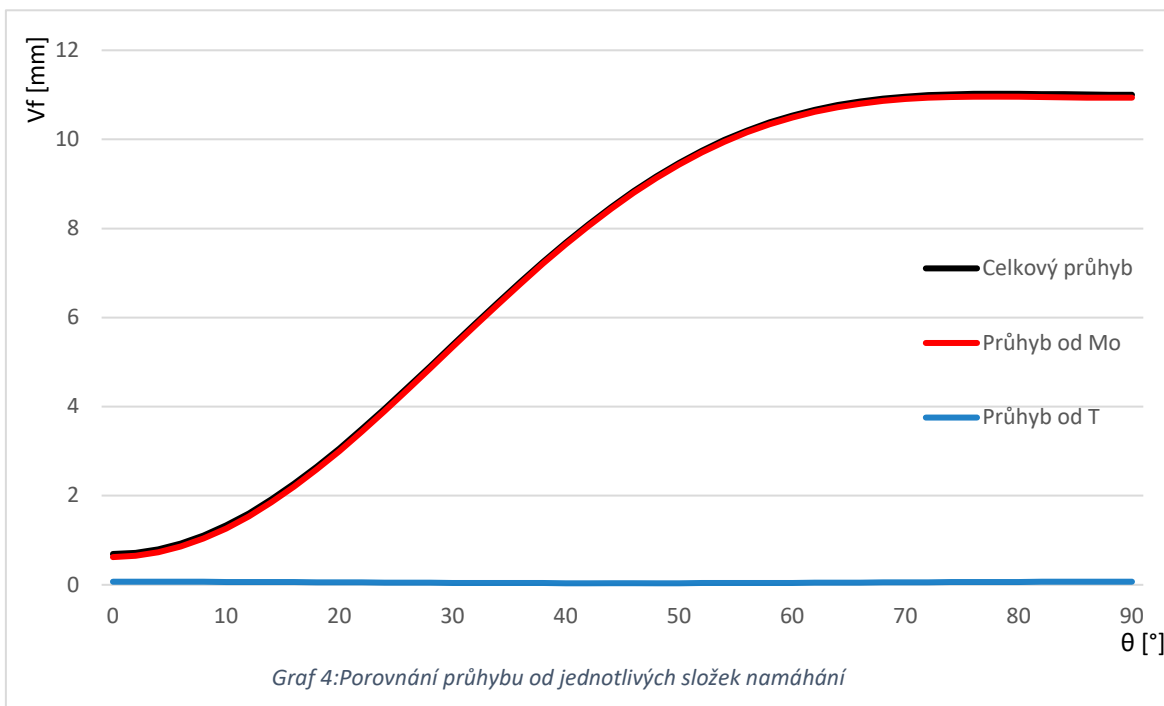
Na grafu 1 vidíme průběh celkového průhybu jednosměrného kompozitního nosníku, ve kterém byla použita vysokopevnostní uhlíková vlákna a epoxidová matrice. Na svislé ose je vidět celkový průhyb v milimetrech, na vodorovné pak úhel vláken ve stupních v rozmezí 0° až 90°. Z grafu je patrné, že celkový průhyb s rostoucím úhlem natočení vláken roste. Nejmenšího průhybu je tedy dosaženo při úhlu natočení 0°, největšího pak při úhlu 90°. Největší nárůst průhybu lze vidět v rozmezí 20° až 60°.



Průběh průhybu způsobeného ohybovým momentem v závislosti na úhlu natočení vláken je zaznamenán na grafu 2. Je zde vidět, že průběh průhybu je velmi podobný jako na grafu 1. Z grafu je tedy zřejmé, že celkový průhyb je způsoben hlavně ohybovým momentem.



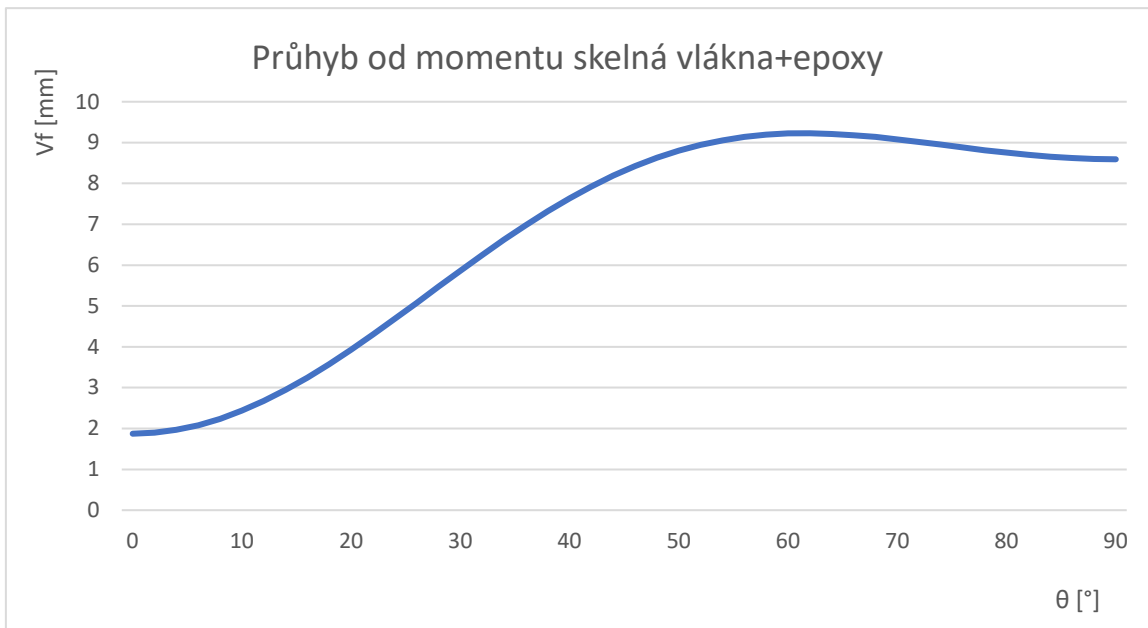
Graf 3 znázorňuje průběh průhybu způsobeného posouvající silou. Z grafu je patrné, že posouvající síla se podílí na celkovém průhybu jen velmi málo. Nejmenšího průhybu způsobeného posouvající silou je dosaženo při úhlu vláken 45°, největšího pak v 0° a 90°. Průběh je symetrický podle svislé osy procházející úhlem 45°.



Graf 4 znázorňuje podíly jednotlivých složek na celkovém průhybu. Jak již bylo zmíněno výše hlavní podíl na celkovém průhybu je způsoben ohybovým momentem, zatímco průhyb od posouvající síly je téměř zanedbatelný. Červená křivka značí průběh průhybu od ohybového momentu téměř zakrývá křivku černou, která značí celkový průhyb kompozitního nosníku. Křivka modrá značí průběh průhybu způsobeného posouvající silou.



Graf 5 znázorňuje průběh celkového průhybu kompozitního nosníku složeného ze skelných vláken a epoxidové matrice. Z grafu je zřejmé, že nejmenší průhyb je pro orientaci vláken pod úhlem 0°, největší průhyb je pak zaznamenán při orientaci vláken pod úhlem 62°. Největší nárůst průhybu je v oblasti 15° až 50°. Od úhlu 62° průhyb mírně klesá.



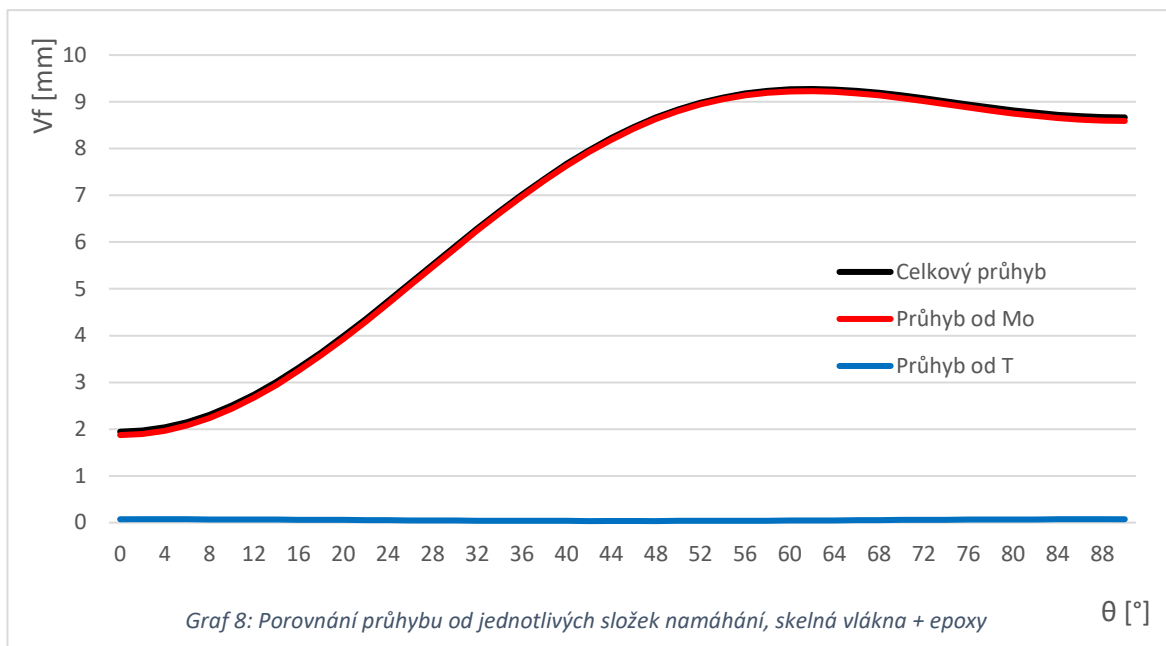
Graf 6: Průhyb od momentu skelná vlákna + epoxy

Na grafu 6 je vidět průběh průhybu způsobeného ohybovým momentem. Situace je stejná jako u materiálové konfigurace T600+epoxy. Celkový průhyb je tedy způsoben převážně ohybovým momentem.



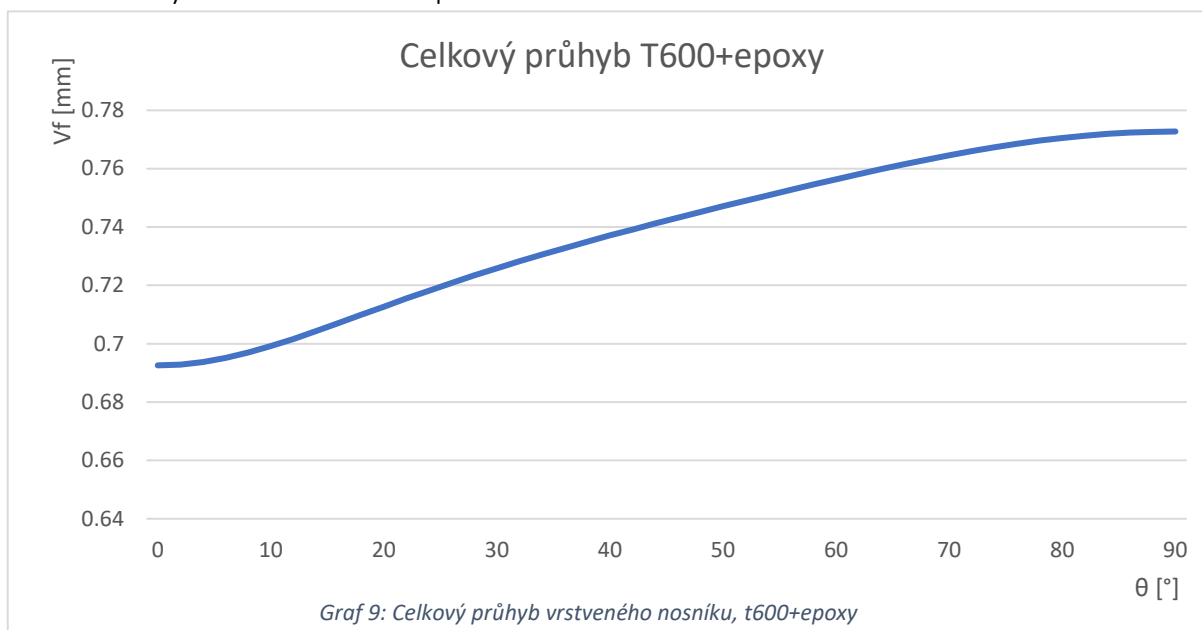
Graf 7: Průhyb od posouvající síly skelná vlákna + epoxy

Závislost průhybu způsobeného posouvající silou na úhlu natočení vláken je znázorněna na grafu 7. Největší průhyb je zaznamenán pro úhly 0° a 90°, nejmenší pak pro úhel 45°. Na svislé ose je vidět, že průhyb od posouvající síly je téměř zanedbatelný vzhledem k celkovému průhybu.

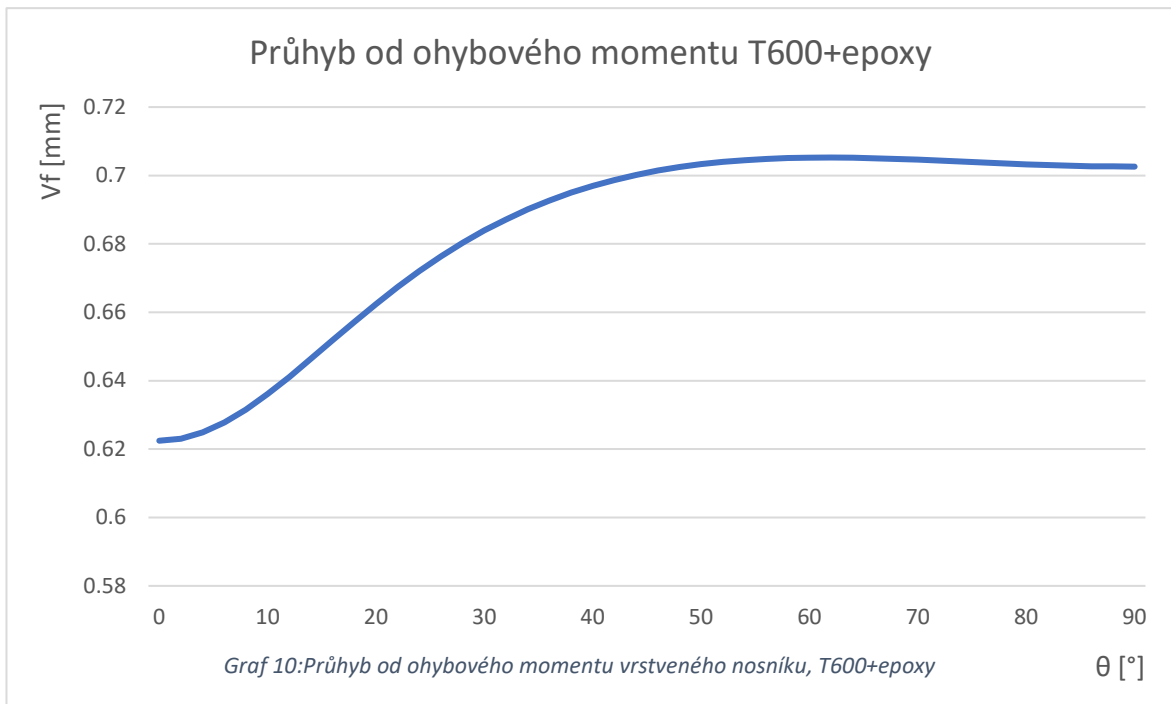


Graf 8 znázorňuje podíly jednotlivých složek namáhání na celkovém průhybu. Z grafu je patrné, že na celkovém průhybu se nejvíce podílí ohybový moment, zatímco průhyb od posouvající síly lze zanedbat.

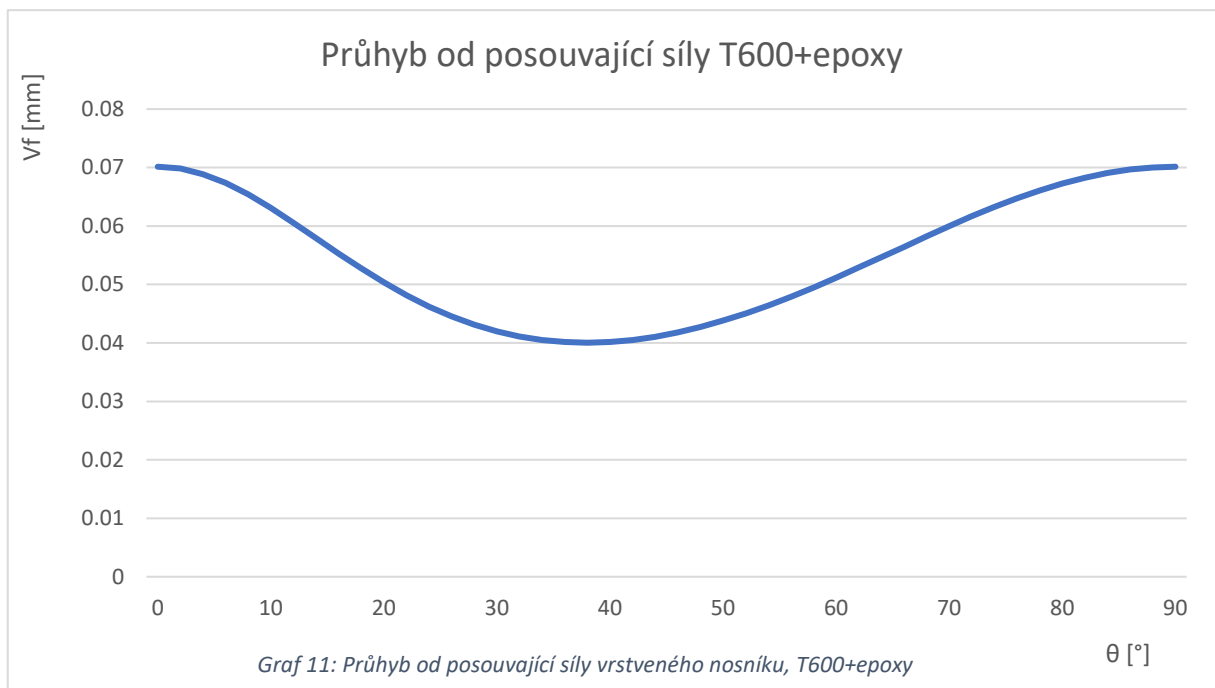
6.2. Průhyb vrstveného kompozitního nosníku v závislosti na orientaci vláken



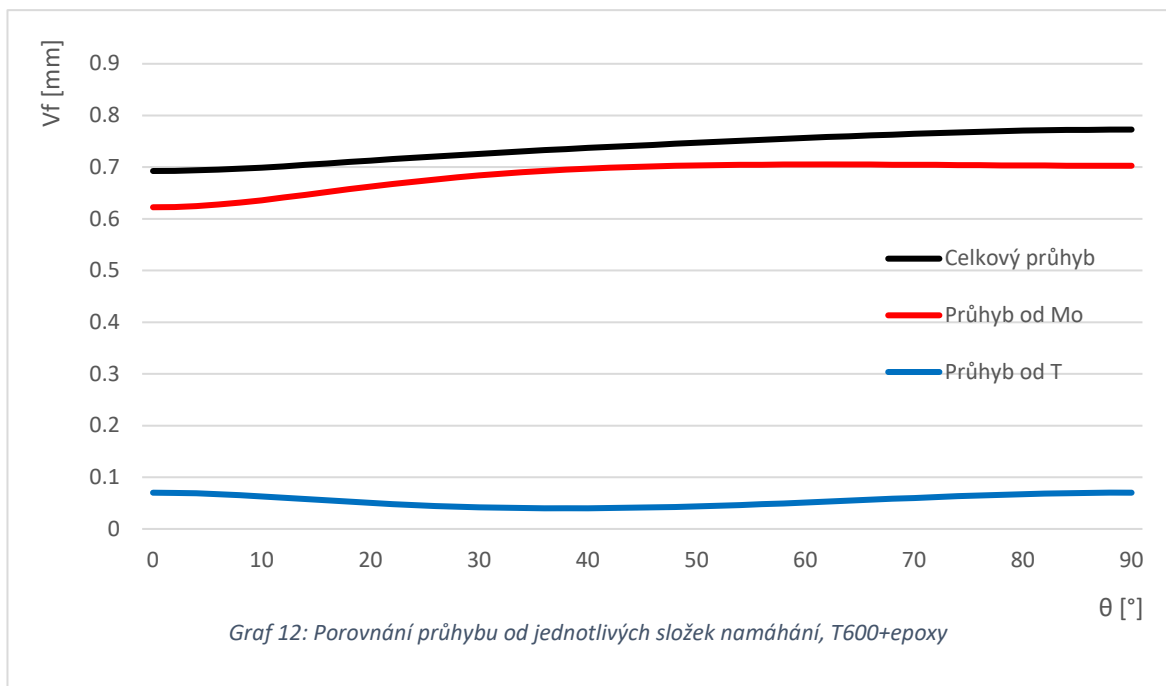
Závislost celkového průhybu na orientaci vláken vrstveného kompozitního nosníku z uhlíkových vláken T600 a epoxidové matrice znázorňuje graf 9. Je zde vidět, že s rostoucím úhlem natočení vláken ve střední vrstvě roste i celkový průhyb.



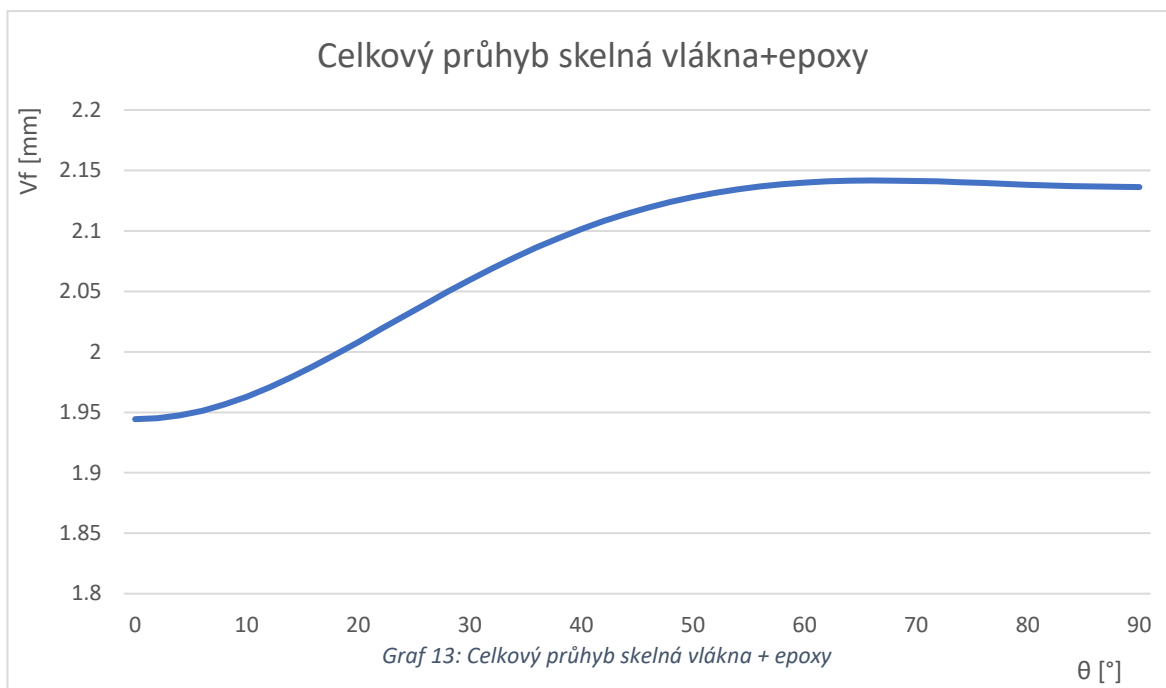
Graf 10 zachycuje průběh průhybu, způsobeného ohybovým momentem, vrstveného nosníku. Je vidět, že největší nárůst průhybu od M_0 je při orientaci vláken střední vrstvy 10° až 40°. Od úhlu 60° průhyb od M_0 mírně klesá.



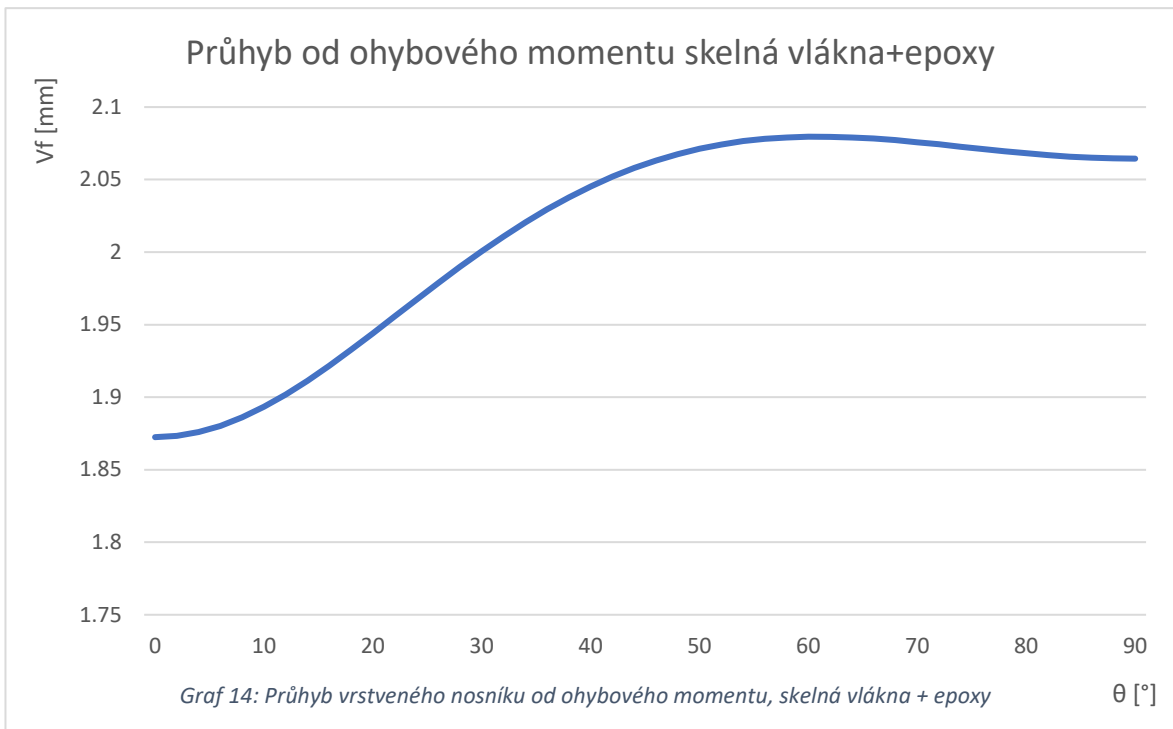
Na grafu 11 je vidět průběh průhybu vrstveného kompozitního nosníku od posouvající síly. Nejmenší průhyb nastává při orientaci vláken ve střední vrstvě 38°, největší pak při orientaci 0° a 90°. Zde již průhyb od posouvající síly vzhledem k celkovému průhybu zanedbatelný není. Při úhlu natočení 0° a 90° tvoří průhyb od posouvající síly až 10 % celkového průhybu.



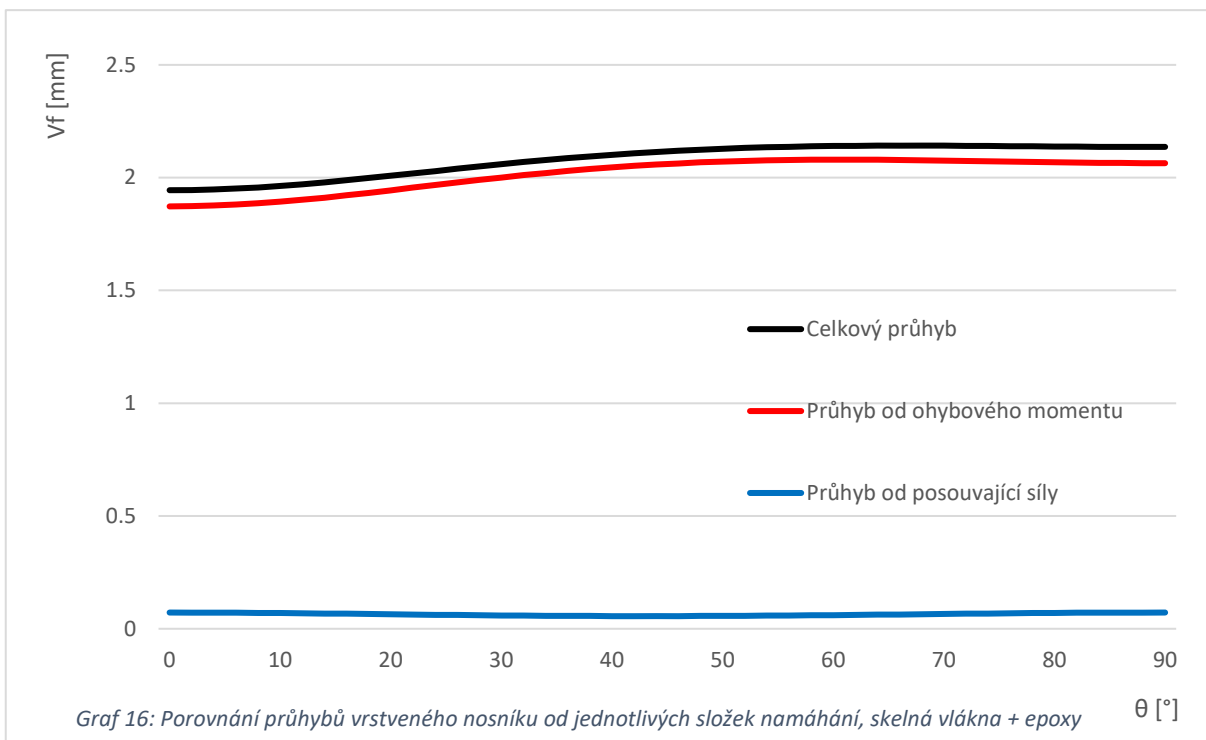
Graf 12 znázorňuje porovnání jednotlivých složek namáhání a celkového průhybu. Z grafu je vidět, že hlavní podíl na průhybu způsobuje ohybový moment. Posouvající síla však již není zanedbatelná jak bylo zmíněno výše. Porovnáním grafu 4 a grafu 12 zjistíme, že při použití vrstveného kompozitu je nárůst průhybu výrazně menší, díky krajním vrstvám s orientací vláken 0°.



Na grafu 13 je vidět průběh celkového průhybu kompozitního nosníku složeného ze skelných vláken a epoxidové matrice. Se vzrůstajícím úhlem natočení vláken ve střední vrstvě roste i průhyb nosníku. Největší růst průhybu je v oblasti 15° až 50°. Přibližně od 60° se průhyb již moc nemění.



Křivka na grafu 14 znázorňuje průběh průhybu způsobeného ohybovým momentem. Na grafu 15 je vidět průběh průhybu způsobeného posouvající silou.



Graf 16 zobrazuje porovnání jednotlivých složek namáhání. Stejně jako u případu výše je vidět, že většina průhybu je způsobena ohybovým momentem zatímco průhyb způsobený posouvající silou tvoří maximálně 10 % průhybu celkového.

6.3. Shrnutí výsledků

V následujících tabulkách budou uvedeny minimální a maximální průhyby pro jednotlivé varianty nosníků.

Tabulka 2: Extrémy průhybu pro jednosměrný kompozitní nosník

Jednosměrný kompozitní nosník				
	Skleněná vlákna + epoxidová matrice		Uhlíková vlákna + epoxidová matrice	
	Úhel natočení θ [°]	Průhyb v_f [mm]	Úhel natočení θ [°]	Průhyb v_f [mm]
Maximum	62	9,27	78	11,023
Minimum	0	1,94	0	0,69

Tabulka 3: Extrémy průhybu pro vrstvený kompozitní nosník

Vrstvený kompozitní nosník				
	Skleněná vlákna + epoxidová matrice		Uhlíková vlákna + epoxidová matrice	
	Úhel natočení θ [°]	Průhyb v_f [mm]	Úhel natočení θ [°]	Průhyb v_f [mm]
Maximum	66	2,14	90	0,77
Minimum	0	1,94	0	0,69

Závěr

V rešeršní části této práce byl definován kompozitní materiál, jeho rozdělení, využití, výhody a nevýhody. Největší využití nacházejí kompozitní materiály v letectví díky své nízké hmotnosti a díky svým dobrým mechanickým vlastnostem, které lze ovlivnit skladbou kompozitu (*kapitola 1*). Byly zde vyjmenovány nejpoužívanější materiály vláken a matric a také nejvyužívanější způsoby výroby kompozitních materiálů. Nejčastější materiálovou konfigurací kompozitního materiálu jsou uhlíková vlákna s polymerní matricí (*kapitola 2*). V další části práce bylo vysvětleno směřovací pravidlo a klasická laminátová teorie v rozsahu potřebném pro zvládnutí výpočtové části práce (*kapitola 3 a 4*).

V kapitole 5 je uveden výpočet dle klasické pružnosti a pevnosti a poté příklad výpočtu průhybu jednosměrného a vrstveného kompozitního nosníku pro orientaci vláken $\theta = 45^\circ$. V následující části práce jsou zobrazeny závislosti průhybu na orientaci vláken pro jednotlivé materiálové konfigurace jednosměrného a vrstveného kompozitního nosníku. K výpočtu materiálových charakteristik E_x a G_{xy} pro jednotlivé úhly natočení vláken byl využit program LamiEx V3.0, poté byl dopočítán průhyb a vynesena závislost v programu Microsoft Excel. Nejmenší průhyby vycházejí obecně pro úhel natočení $\theta = 0^\circ$, jelikož v tomto směru je hodnota E_x nejvyšší. Dá se říci, že s narůstajícím úhlem natočení vláken roste i celkový průhyb, jelikož E_x klesá. U nosníku se skelnými vlákny však zaznamenáváme mírný pokles průhybu, zhruba od $\theta = 62^\circ$. Vliv posouvající síly je u jednosměrného kompozitního nosníku zanedbatelný vzhledem k celkovému průhybu, avšak u vrstveného nosníku s uhlíkovými vlákny již tvoří téměř 10 % celkového průhybu. Jednosměrný kompozitní nosník vykazuje strmý růst průhybu s rostoucím úhlem kvůli klesajícímu E_x , zatímco u vrstveného nosníku je tento růst výrazně menší díky krajním vrstvám o orientaci vláken $\theta = 0^\circ$, které způsobují malý pokles E_x .

Výše uvedené výsledky by bylo vhodné ověřit experimentálním měřením a metodou konečných prvků v některém z moderních výpočetních programů. To by však přesahovalo rámec bakalářské práce.

Literatura

- [1] DANIEL, Isaac M. a Ori ISHAI. Engineering mechanics of composite materials. New York: Oxford University Press, 1994. ISBN 0-19-509738-6.
- [2] EHRENSTEIN, Gottfried W. *Polymerní kompozitní materiály*. V ČR 1. vyd. Praha: Scientia, 2009. ISBN 978-80-86960-29-6.
- [3] VRBKA, Jan.: Mechanika kompozitů [online]. 2008. Brno. [cit. 2018-2-17]. Dostupný z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340
- [4] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [5] *Boeing 787* [online]. [cit. 2018-02-18]. Dostupný z WWW: <https://www.ipitaka.com/blogs/news/what-s-composite-material>
- [6] GAY, Daniel, Suong V. HOA a Stephen W. TSAI. *Composite materials: design and applications*. 4th. Boca Raton: CRC Press, 2003. ISBN 9781587160844;1587160846;.
- [7] JONES, Robert M. Mechanics of composite materials. Washington: Scripta Book Co, 1975. ISBN 0070327904.
- [8] *Nanotrubice* [online] [cit. 2018-02-22] Dostupné z WWW: <http://large.stanford.edu/courses/2015/ph240/kumar1/>
- [9] *Snímek skleněného vlákna* [online] [cit. 2018-02-23] Dostupné z WWW: <https://www.fose1.plymouth.ac.uk/sme/mats347/characterisation.htm>
- [10] *Porovnání uhlíkového vlákna a lidského vlasu* [online]. [cit. 2018-02-18]. Dostupný z WWW: <http://www.carbonfiberdesigns.com/carbon-fiber-facts.html>
- [11] MALLICK, P. K. *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design*. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2007. ISBN 0-8493-4205-8.
- [12] Vláknové kompozitní materiály, jejich vlastnosti a výroba [online]. [cit. 2018-03-30]. Dostupný z WWW: http://www.kompozity.info/seminar/2_seminar/1_materialy_technologie.pdf
- [13] *Pultruze* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupný z WWW: <http://www.prefa-kompozity.cz/technologie-vyroby/pultruze-tazeni/>
- [14] *Karbonové šasi automobilu McLaren* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupný z WWW: <https://www.sheffield.ac.uk/news/nr/mclaren-sheffield-facility-amrc-innovation-district-100m-uk-economy-1.679675>
- [15] *Protéza chodidla* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupný z WWW: <http://www.proklinik.com.tr/en/prosthetics/lower-extremity/carbon-fiber-feet/>
- [16] *Rám závodního kola* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupný z WWW: <http://www.miraclebikes.com/products/path099/path0151/2017besttriathlonbikesnewtimetrialbikesIronmanbicy26195528/>
- [17] MICHALEC, Jiří. Pružnost a pevnost I. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3
- [18] LamiEX v. 3.0: Program pro výpočet zatížení a pevnosti laminátů podle klasické laminační teorie. [online]. [cit. 2018-07-22]. Dostupné z: <http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/laminator.xls>