

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Havlíček** Jméno: **Ladislav** Osobní číslo: **459535**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Vznik plastického kloubu u nosníku

Název bakalářské práce anglicky:

Formation of the Plastic Hinge on the Beam

Pokyny pro vypracování:

- 1) Rešerše analytického řešení plastického kloubu u ohybově namáhaného nosníku
- 2) Rešerše metody digitální korelace obrazu (DIC) pro určení pole posuvů
- 3) Experimentální určení plastické oblasti u ohybově namáhaného nosníku pomocí DIC
- 4) Porovnání experimentálních výsledků s analytickým řešením
- 5) Zhodnocení

Seznam doporučené literatury:

F. Valenta a kol.: Pružnost a pevnost III, 2003, ČVUT v Praze

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Karel Doubrava, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Karel Doubrava, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRO-
NIKY, ODBOR PRUŽNOSTI A PEVNOSTI



Bakalářská práce

Vznik plastického kloubu u nosníku

Ladislav Havlíček

Vedoucí práce: Ing. Karel Doubrava Ph.D.

14. srpna 2018

Poděkování

Rád bych upřímně poděkoval Ing. Karlu Doubravovi Ph.D. za vedení této práce, za jeho čas, vstřícný přístup, užitečné rady a doporučení. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Jiřímu Kuželkovi, Ph.D. za pomoc s přípravou měření digitální korelací obrazu. A nemohu opomenout mojí rodinu a přátele, kteří mi byli oporou v průběhu studia a psaní této práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 14. srpna 2018

.....

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

© 2018 Ladislav Havlíček. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě strojní. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí, je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci

Havlíček, Ladislav. *Vznik plastického kloubu u nosníku*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2018.

Anotační list

Jméno autora:	Ladislav Havlíček
Název BP:	Vznik plastického kloubu u nosníku
Anglický název:	Formation of the plastic hinge on the beam
Rok:	2018
Obor studia:	Teoretický základ strojího inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky, odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Karel Doubrava Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran: 41 počet obrázků: 43
Klíčová slova	plasticita, plastický kloub, digitální korelace obrazu, ohyb nosníku
Keywords	plasticity, plastic hinge, digital image correlation, bending of steel beam
Abstrakt:	Při třibodém ohybu nosníku dochází po překročení meze elasticity k šíření trvalých deformací a vzniku plastického kloubu. Tato práce se zabývá šířením těchto deformací. Byl proveden experiment, deformace na nosníku byly změřeny pomocí metody digitální korelace obrazu. Problém byl analyzován různými metodami výpočtu (ideálně plastický materiál, materiál se zpevněním, s posouzením vlivu smykových napětí i bez nich). Rovněž byly posouzeny rozdíly mezi výpočty a změřenou hodnotou kritické síly, a jejich možná příčina.
Abstract:	When bending stress on outer fiber of a beam exceeds yield stress during three point bending test, non-reversible plastic deformation starts to spread, and formation of plastic hinge begins. This thesis deals with spread of these non-reversible deformations. Strains were measured by digital image correlation during three point bending test. The issue was also analysed by different means of analytic calculation (ideally elastic-plastic material, material with strain hardening, influence of shear stress). Differences between calculation and measurement, and reason for them, are examined as well.

Obsah

Úvod	1
1 Plasticita	3
1.1 Pracovní diagram oceli a jeho aproximace	3
1.2 Víceosá napjatost	6
1.3 Popis plastických deformací z hlediska materiálu	7
1.4 Vliv smykového napětí od posouvající síly	8
1.5 Plastický kloub	8
2 Digitální korelace obrazu	13
2.1 Příprava materiálu a měření	13
2.2 Průběh měření, zpracování dat počítačem	14
3 Měření	17
3.1 Použité měřicí přístroje a stroje	17
3.2 Uspořádání měření, měřený vzorek	17
3.3 Tahová zkouška k určení mechanických vlastností neznámé oceli	19
3.4 Měření dvourozměrnou korelací obrazu	21
3.5 Měření 3D korelací obrazu	23
3.6 Porovnání dvourozměrné a trojrozměrné korelace obrazu	26
4 Výpočet	29
4.1 Ideálně plastický materiál	29
4.2 Model se zpevněním	33
4.3 Posouzení zvýšených lokálních deformací	35
4.4 Výsledné porovnání jednotlivých metod	38
Závěr	41
Literatura	43

Seznam obrázků

1.1	Pracovní diagram oceli [1]	3
1.2	Odlehčování a zbytkové deformace na diagramu tvrdé oceli [2] . . .	5
1.3	Metody aproximace [3]	5
1.4	Porovnání Trescovy a energetické metody [2]	7
1.5	Průběh napětí a smykových napětí [4]	9
1.6	Průběh napětí při ohybu u ideálně plastického materiálu: 1. na mezi pružnosti 2. v elasticko-plastickém stavu 0. v místě plastického kloubu [3]	10
1.7	Průběh napětí v průřezu zplastizovaného nosníku pro model ma- teriálu se zpevněním [2]	10
2.1	Princip měření digitální korelací obrazu [5]	14
2.2	Deformace podvýběru [6]	15
2.3	Grafické zobrazení výsledků měření	16
2.4	Průběh deformací	16
3.1	Umístění vzorku v přípravku	18
3.2	Povrchová úprava nosníku	19
3.3	Vzorek pro tahovou zkoušku	19
3.4	Změřená závislost síly a posuvu	20
3.5	Skutečný pracovní diagram a jeho aproximace	21
3.6	Uspořádání měření při dvourozměrné korelaci obrazu	22
3.7	Posuv ve směru x	23
3.8	Poměrná prodloužení	23
3.9	Uspořádání měření při 3D korelaci obrazu	24
3.10	Výchylka v ose z	24
3.11	ε_x	25
3.12	Posuv při odlehčení ve směru z	25
3.13	ε_x	26
3.14	γ	26

3.15	Ohyb	27
4.1	Postupné šíření plasticky deformované oblasti na nosníku	29
4.2	$F = 16,8$ kN	30
4.3	$F = 22,4$ kN	30
4.4	$F = 25,2$ kN	31
4.5	Rozložení složek napětí v nosníku v elasticko-plastickém stavu . . .	32
4.6	$F = 16,8$ kN	32
4.7	$F = 22,28$ kN	33
4.8	$F = 24,66$ kN	33
4.9	Diagram $M - h_p$	34
4.10	Plastický kloub u materiálu se zpevněním, se zanedbáním smyku .	35
4.11	Plastický kloub u materiálu se zpevněním, s uvažováním smyku . .	35
4.12	Redukovaná napětí v okamžiku prvních zaznamenaných plastic- kých deformací	36
4.13	Redukovaná napětí v okamžiku předpokládané mezi elasticity . . .	37
4.14	Růst hloubky důlku v závislosti na působící síle	37
4.15	Deformace v místě působení síly	38
4.16	Diagram $F-v$ s vyznačením výsledků měření a výpočtů	39
4.17	Procentuální vyjádření rozdílu mezi výpočtem momentu se zpev- něním a bez zpevnění	39

Úvod

Tato práce se zabývá vznikem a šířením plastických deformací při tříbodém ohybu jednoduchého nosníku o obdélníkovém průřezu až do stavu plastického kloubu. Plastické deformace jsou takové deformace, při kterých jsou změny v materiálu nevratné, a po odlehčení se zkoumaný objekt nevrací do původního stavu. Plastickým kloubem je nazýváno místo na nosníku, na kterém při ohybu dosáhne nebo překročí napětí v celém průřezu mez kluzu v tahu či tlaku.

V prvních částech práce je provedena rešerše zabývající se analytickým řešením problematiky plasticity při ohybu a vznikem plastických kloubů. Okrajově je zmíněno, jakým způsobem probíhají plastické deformace na úrovni krystalické mřížky.

Druhá část práce se zaměřuje na použitou metodu měření deformací - digitální korelaci obrazu. Obsahuje popis obou dvou použitých metod, dvourozměrné a trojrozměrné. Dále se zabývá principem, na kterém metoda funguje a předpoklady které je potřeba dodržet pro správnost výsledků měření.

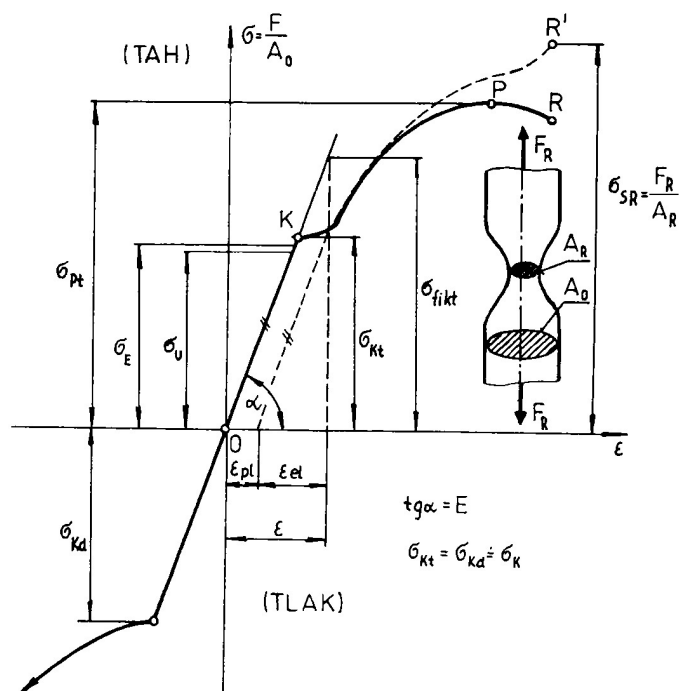
Samotné měření je obsaženo v třetí kapitole. Byla provedena celkem tři měření. Trojbodý ohyb, na kterém byl zkoumán vznik plastického kloubu, byl proveden dvakrát, nejprve metodou dvourozměrné digitální korelace obrazu, a následně za použití dvou kamer metodou trojrozměrnou. Třetím měřením byla tahová zkouška, jež byla provedena za účelem zjištění vlastností neznámého typu konstrukční oceli, která byla k experimentu použita.

Závěrečná kapitola shrnuje poznatky z předchozích částí. Věnuje se porovnání naměřených a různými postupy vypočtených hodnot a obsahuje diskuzi o příčině odlišností mezi nimi.

Plasticita

1.1 Pracovní diagram oceli a jeho aproximace

Chování materiálu při silovém působení je popsáno smluvním pracovním diagramem, který zobrazuje závislost napětí σ a odpovídající poměrné deformace ε . Jejich závislost je stanovena na základě jednoosé tahové zkoušky a výsledky jsou následně zobecněny pro použití při složené napjatosti.



Obrázek 1.1: Pracovní diagram oceli [1]

Úsek O-K smluvního diagramu (obr. 1.1) popisuje elastické deformace.

V oblasti elastických deformací je platný Hookův zákon (1.1), a veškeré deformace jsou vratné, po ukončení silového působení se materiál vrací po stejné křivce do původního stavu. Může se též vyskytnout případ nelineárních elastických deformací, kdy neplatí Hookův zákon, ale vzniklé deformace nejsou trvalé. Mezní stav pružnosti nastává při dosažení meze kluzu (σ_k , případně Re). S ohledem na materiál a bezpečnost je zvolena vhodná metoda výpočtu redukovaného napětí.

Mez kluzu může být v pracovním diagramu jasně patrná, jako je na obrázku 1.1. V případě tvrdé oceli (obr. 1.2), jež přímo přechází do plastického zpevnění, je normou definována smluvní mez kluzu R_p . Její velikost se určuje ze závislosti zatížení-prodloužení měřené extenzometrem. Je vynesena rovnoběžka s lineární částí této závislosti ve vzdálenosti odpovídající předepsanému plastickému prodloužení, například 0,2 %. Smluvní mez kluzu odpovídá průsečíku této rovnoběžky a tahového diagramu [7].

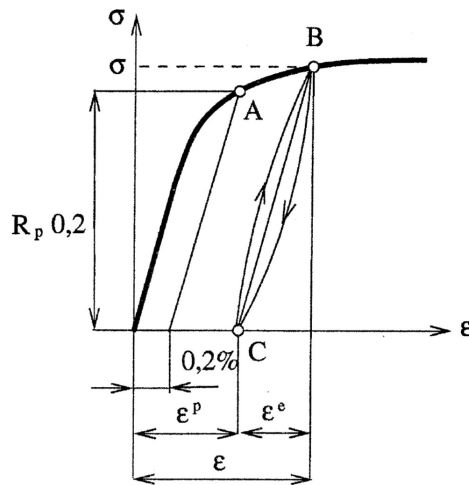
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))\end{aligned}\tag{1.1}$$

Po překročení hodnoty napětí meze kluzu σ_k dochází ke změně charakteru deformací. Po odlehčení se těleso nevrací do původního stavu. Deformace, které zůstávají i po odlehčení, se nazývají trvalé (plastické). Křivka B-C na obr. 1.2, po které probíhá odlehčování v oblasti plastických deformací, je u řady materiálů přímka probíhající rovnoběžně s lineární částí pracovního diagramu. Zbytková plastická deformace po úplném odlehčení z bodu B je rovna

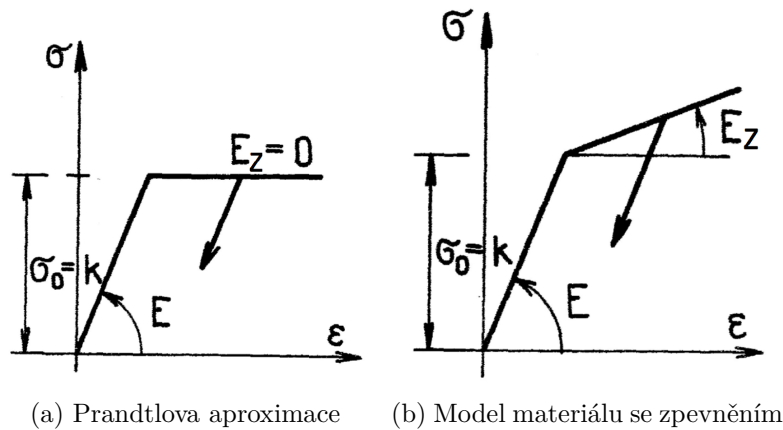
$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_b - \frac{\sigma_b}{E}\tag{1.2}$$

V materiálu při dalším namáhání (úsek K-P na smluvním pracovním diagramu (obr. 1.1)) dochází k zpevnění, a to až do dosažení meze pevnosti σ_{Pl} . Po jejím překročení probíhá změkčení, až nakonec dojde k destrukci (úsek P-R smluvního pracovního diagramu). Smluvní pracovní diagram je pro potřeby modelování aproximován pomocí různých modelů. Ideálně plastický materiál (Prandtlova aproximace) (obr. 1.3a) předpokládá rozvoj deformace při konstantním napětí. Pružný materiál se zpevněním (obr. 1.3b) je aproximován lomenou křivkou. Elastická část je popsána Hookovým zákonem, a plastickou popisuje vztah (1.3), kde E_z [MPa] je modul zpevnění [3], [8].

$$\sigma = E_z(\varepsilon - \varepsilon_k) + \sigma_k\tag{1.3}$$



Obrázek 1.2: Odlehčování a zbytkové deformace na diagramu tvrdé oceli [2]



Obrázek 1.3: Metody aproximace [3]

Kromě popisu lomenými čarami je možná parabolická aproximace, popsaná vztahem (1.4). K a n jsou konstanty, jsou zjištěny experimentálně [8].

$$\sigma = K\epsilon^n \quad (1.4)$$

Mezním stavem plasticity ideálně plastického materiálu je myšlen takový stav, kdy zatížení dosáhne velikosti, která umožní růst deformací bez omezení. Soustava po dosažení mezního stavu plasticity je označována jako plastický mechanismus. Při ohybu nosníků je vznik plastického mechanismu popisován pomocí plastických kloubů [8].

1.2 Víceosá napjatost

Doposud byl v textu uvažován pouze případ jednoosé napjatosti. Ta je zvláštním případem obecné prostorové napjatosti, kdy hlavní napětí $\sigma_1 = \sigma$ a hlavní napětí σ_2 a σ_3 jsou nulová. K zjištění podmínky plasticity při víceosé napjatosti lze využít více přístupů.

1.2.1 Trescova metoda

Trescova (Saint-Venantova, τ_{max}) podmínka plasticity vychází z předpokladu, že je možné popsat rozvoj plastického stavu pomocí maximálního smykového napětí.

$$\tau_{max} = \tau_k \quad (1.5)$$

τ_{max} je kritická hodnota smykového napětí, za předpokladu houževnatého materiálu platí:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_k}{2} \quad (1.6)$$

Pro známé velikosti hlavních napětí $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ lze podmínku plasticity formulovat vztahem [2]

$$\sigma_k = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.7)$$

1.2.2 Energetická metoda

Energetická (HMH - Huber, Mises, Hencky) metoda je založena na předpokladu, že počátku plastického stavu je dosaženo v okamžiku, kdy měrná deformační energie dosáhne kritické hodnoty.

$$\lambda_{tv} = \lambda_{tv_k} \quad (1.8)$$

Předpoklad je dosazen do obecné rovnice hustoty deformační energie (1.9). Kritická hodnota hustoty deformační energie lze snadno získat dosazením meze kluzu do tvaru rovnice pro jednoosou napjatost (1.10).

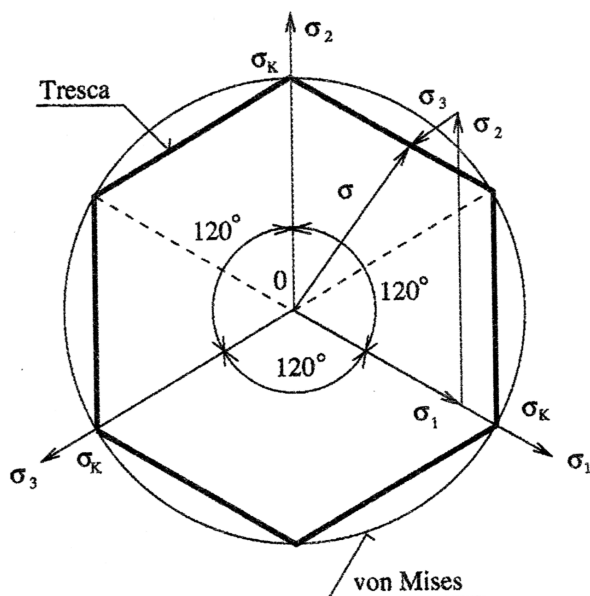
$$\lambda_{tv_k} = \frac{\mu + 1}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)] \quad (1.9)$$

$$\lambda_{tv_k} = \frac{\mu + 1}{3E} \sigma_i^2 = \frac{\mu + 1}{3E} \sigma_K^2 \quad (1.10)$$

Dosazením a následnou úpravou získáváme toto vyjádření podmínky plasticity pro obecnou napjatost [2].

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)} \quad (1.11)$$

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \quad (1.12)$$



Obrázek 1.4: Porovnání Trescovy a energetické metody [2]

1.3 Popis plastických deformací z hlediska materiálu

Chování materiálu po překročení meze kluzu a vznik plastických deformací je řízen mechanismy jako je skluz, dvojčatění, difúzní tečení a dislokační tečení. U těchto mechanismů se projevuje vliv teploty a rychlosti deformace. Skluz je pohyb čárových poruch (dislokací) v krystalické struktuře materiálu. Ke kluzu dochází v krystalografických rovinách, které jsou nejhustěji obsazeny atomy. Nejmenší napětí, při kterém ve skluzovém systému dochází k pohybu dislokací, je nazýváno kritické skluzové napětí τ_{kr} . Tato hodnota je závislá na teplotě a na čistotě materiálu. Většina v praxi používaných materiálů má charakter polykrystalu – jsou tvořeny zrna s různou prostorovou orientací krystalických mřížek. To má za následek, že musí být v činnosti zároveň nejméně pět skluzových systémů, aby nedošlo k porušení celistvosti materiálu na hranicích zrn. Při deformacích dochází k protahování, natáčení a vzájemnému přizpůsobování jednotlivých zrn. Pohyb dislokací je omezen hranicemi zrn, což má za důsledek hromadění dislokací na hranici zrn. Zpevnění materiálu při plastických deformacích je přímým důsledkem nahromadění dislokací na hranicích zrn, projevuje se výrazněji u materiálů s jemnými zrna, jelikož mají větší plo-

chu hranic zrn. Dalšími důsledky jsou růst tvrdosti, pokles tažnosti a vrubové houževnatosti.

Dvojčatění je zvláštní případ skluzu, ke kterému dochází při vyšších rychlostech deformace a nižších teplotách. Při dvojčatění je část mřížky posunuta takovým způsobem, že utvoří zrcadlový obraz neposunuté části. Kritické napětí pro dvojčatění je vyšší než kritické napětí skluzu, vyskytuje se jako doplňující mechanismus ke skluzu v případě nedostatku skluzových rovin [9].

1.4 Vliv smykového napětí od posouvající síly

U zkoumaného nosníku výška výrazně převyšuje šířku, lze tedy předpokládat nezanedbatelný vliv posouvající síly na napjatost, a tedy i na vznik a šíření plasticky deformované oblasti. Vzniklá smyková napětí jsou rovnoběžná s osou y a jsou uvažována jako neměnná po celé šířce obdélníku. Velikost smykového napětí vyjadřuje Žuravského vzorec (1.13) [1].

$$\tau_z = \frac{T \cdot S}{J_z \cdot b} \quad (1.13)$$

S je statický moment „odříznuté“ části průřezu k ose z , T je posouvající síla. Pro obdélníkový průřez lze Žuravského vztah upravit do tvaru (1.15). Deformační energii smykových napětí u nosníku o obdélníkovém průřezu popisuje rovnice (1.16) [1].

$$S = \frac{b}{2} \cdot \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad (1.14)$$

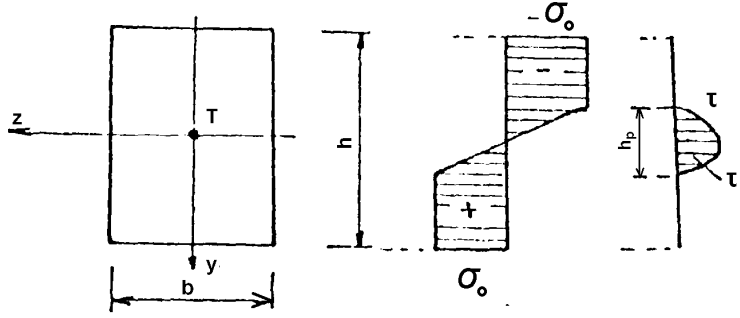
$$\tau_z(y) = \frac{3 T}{2 b h} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (1.15)$$

$$U = \frac{6}{5} \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx \quad (1.16)$$

Při řešení vlivu smykového napětí na plastické deformace při ohybu je předpokládáno, že smykové deformace jsou přenášeny pouze v elastickém jádru nosníku. Napětí v něm jsou rozložena podle stejných mechanismů jako v případě elastického ohybu, je tedy možné použít Žuravského rovnice (1.15) s rozdílem, že místo výšky nosníku h je dosazen rozměr elastického jádra h_p [4].

1.5 Plastický kloub

Jedním ze způsobů řešení ideálně pružně plastického ohybu je vyšetřování vzniku plastického kloubu. Tvorba plastických kloubů probíhá na nosníku v místech, kde je v krajních vláknech překročena hodnota mezního napětí σ_o , odpovídající mezi kluzu. Při dalším růstu ohybového momentu dochází k



Obrázek 1.5: Průběh napětí a smykových napětí [4]

zplastizování okrajových oblastí průřezu (plastický obal), vnitřní oblast (tzv. elastické jádro) průřezu zůstává deformovaná pružně. Plastický kloub je dovořen v okamžiku, kdy je zplastizován celý průřez nosníku [3], [4].

Pro plasticko-elastický stav zůstává zachována platnost Bernoulliho hypotézy o zachování rovinnosti průřezů. Poměrná prodloužení v závislosti na výšce mají lineární průběh. Pro ohybový moment v elasticko-plastickém stavu platí vztah (1.17).

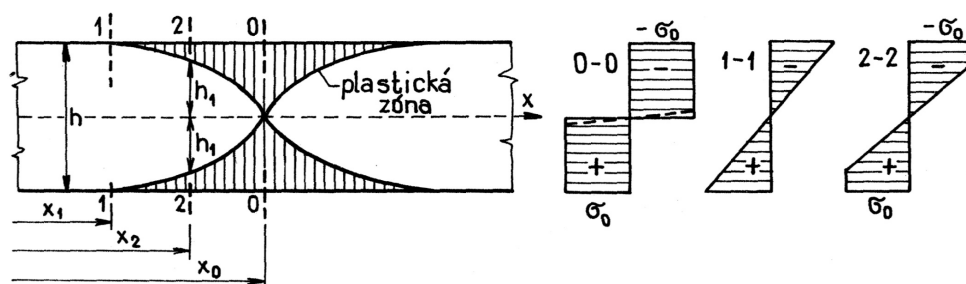
$$M_{oep} = 2 \int_A y \sigma(y) dA + 2 \int_A y \sigma_k dA \quad (1.17)$$

$$\sigma(y) = \sigma_k \frac{y}{\eta_k} \quad (1.18)$$

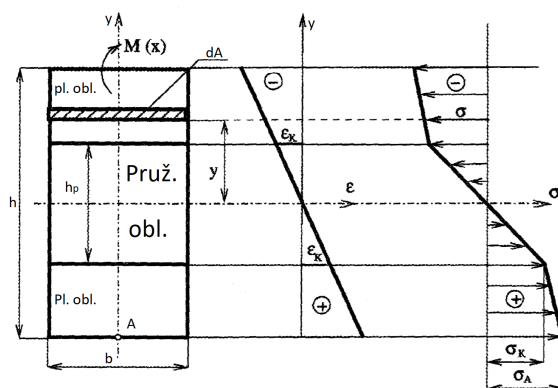
Napětí v elastickém jádru $\sigma(y)$ má lineární průběh dle vztahu (1.18). η_K je polovina výšky elastického jádra h_p . Pro obdélníkový profil platí $dA = b dy$. Po dosazení vztahu (1.18) do rovnice (1.17) popisující moment přenášený plastickým obalem a elastickým jádrem získáme

$$\begin{aligned} M_{oep} &= 2 \int_0^{\eta_K} \sigma_k \frac{y}{\eta_k} b dy + 2 \int_0^{\eta_K} y \sigma_k b dy \\ M_{oep} &= 2b \frac{\sigma_k}{\eta_k} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\eta_K} + 2b \sigma_k \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\eta_k}^{\eta_K} \\ M_{oep} &= \frac{2}{3} \sigma_k \eta_K^2 b + b \sigma_k \left(\frac{h^2}{4} - \eta_K^2 \right) \\ M_{oep} &= \frac{1}{6} \sigma_k h_p^2 b + b \sigma_k \left(\frac{h^2 - h_p^2}{4} \right) \\ M_{oep} &= \sigma_k \frac{h^2 b}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_p}{h} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

1. PLASTICITA



Obrázek 1.6: Průběh napětí při ohybu u ideálně plastického materiálu: 1. na mezi pružnosti 2. v elasticko-plastickém stavu 0. v místě plastického kloubu [3]



Obrázek 1.7: Průběh napětí v průřezu zplastizovaného nosníku pro model materiálu se zpevněním [2]

Vyšetřování plastických kloubů má význam při zjišťování mezního stavu plasticity. Mezní stav plasticity při ohybu nastává v takové situaci, kdy je vytvořen takový počet plastických kloubů, aby byl vytvořen plastický mechanismus. V případě tříbodého ohybu je plastického mechanismu dosaženo jedním plastickým kloubem. U staticky neurčitých nosníků je potřeba počet plastických kloubů o jedna větší, než kolikrát je nosník staticky neurčitý. Plastický kloub je součástí rozlehlejší plasticity ovlivněné oblasti, a z praktických důvodů může být nahrazen idealizovaným plastickým kloubem. U skutečného plastického kloubu není závislost křivosti na ohybovém momentu lineární (1.20). Naproti tomu idealizovaný model plastického kloubu je soustředěný do jediného průřezu a umožňuje počítat křivost jako lineární závislost (1.21), a následně zjednodušuje výpočet průhybu, úseky mezi plastickými klouby můžeme považovat za pružné. Ohyb popisuje diferenciální rovnice průhybové čáry nosníku

pro elasticko-plastický stav (1.22) [4], [8].

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{3}Eh\sqrt{1 - M/M_0}} \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_k}{E\eta_k} \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{\rho(x)} \doteq v''(x) = \pm \frac{\sigma_k}{E\eta_k(x)} \quad (1.22)$$

Tvar a rozměry plastické zóny na nosníku s obdélníkovým průřezem mohou být vypočteny z rovnic (1.19) vyjádřením výšky elastického jádra a jako funkce ohybového momentu. Rovnice (1.24) popisuje tvar plastické zóny při symetrickém tříbodém ohybu [2], [8].

$$a(x) = 2\eta_k(x) = \sqrt{3h^2 - \frac{12M_o(x)}{\sigma_k b}} \quad (1.23)$$

$$a(x) = \sqrt{3h^2 - \frac{6Fx}{\sigma_k b}} \quad (1.24)$$

V případě uvažování materiálu s lineárním zpevněním platí pro moment přenášený částí v průřezu v plastickém stavu (1.25).

$$M_p = \int_{A_p} \sigma y dA \quad (1.25)$$

Hodnota napětí σ lze vyjádřit podle obrázku 2.1 rovnicí (1.26). Při odvození bylo nezbytné použít Bernoulliho hypotézu o zachování rovinnosti průřezů. To je vyjádřeno rovnicí (1.27) [2]. Tato úprava způsobuje, že pro $h_p \rightarrow 0$ se ve výsledné rovnici (1.28) $M \rightarrow \infty$.

$$\sigma = \sigma_k + E_z(\varepsilon - \varepsilon_k) \quad (1.26)$$

$$\frac{\varepsilon}{y} = \frac{\varepsilon_k}{0.5h_p} \quad (1.27)$$

$$M_{o\ ep} = \sigma_k \frac{bh^2}{12} \left[3 - \frac{h_p^2}{h^2} \right] + 2E_z \varepsilon_k \left[\frac{1}{12} \frac{b}{h_p} (h^3 - h_p^3) - \frac{b}{8} (h^2 - h_p^2) \right] \quad (1.28)$$

Digitální korelace obrazu

Digitální korelace obrazu (Digital image correlation – DIC) je optická metoda měření posuvu na povrchu měřeného tělesa. Metoda DIC může být využívána pro dvourozměrné měření (2D) za použití jedné kamery umístěné kolmo k měřené ploše, případně pro měření posuvů v trojrozměrném prostoru (3D) s použitím více kamer. Laboratorní měření bylo provedeno oběma metodami, a v kapitole 3.6 jsou jejich výsledky porovnány.

Při měření jsou pořizovány snímky zkoumaného tělesa před a po zatížení, a následně jsou vyhodnoceny v počítači. Programem jsou na snímcích identifikovány jednotlivé body, a následně je z jejich posunutí vypočten posuv a poměrné prodloužení. Digitální korelaci obrazu je možné použít pro široké spektrum materiálů, kromě kovových například pro kompozitní materiály nebo dřevo. Mezi hlavní výhody metody DIC patří její nenáročnost na přípravu a přístrojové vybavení oproti ostatním metodám. Příprava povrchu spočívá v zajištění nepravidelného vzoru na povrchu. Z přístrojového vybavení stačí k měření digitální kamery, zdroj osvětlení a počítač vybavený potřebným softwarem. Tato vlastnost umožňuje provádět měření kromě laboratoří i v provozních podmínkách. V kombinaci s použitím specializovaných mikroskopů je možné provádět měření velmi malých deformací, až do řádu stovek nm [6].

2.1 Příprava materiálu a měření

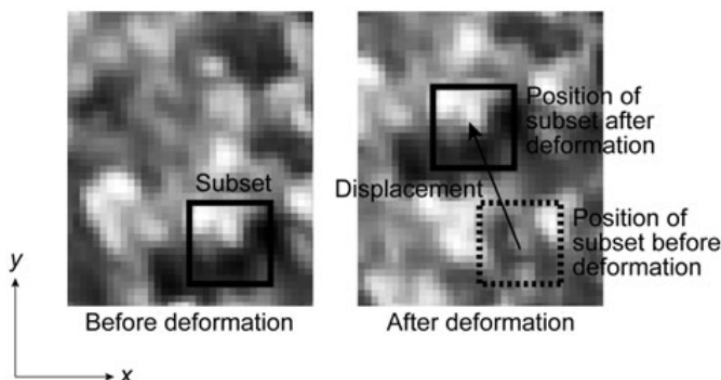
Pro správné měření je nezbytné, aby byla na povrchu měřeného tělesa vytvořena nepravidelná textura, nejčastěji v odstínech šedé, ale je možno pracovat i s barevnými snímky. Požadované textury povrchu lze dosáhnout nástřikem barvy, případně některé materiály mohou mít vzorek přirozený. Pravidelná textura povrchu může vést k chybě v měření, kdy program chybně identifikuje a zamění různé body. Vytvořený vzor skvrn se musí pohybovat společně s materiálem deformovaného tělesa. Vhodná velikost vytvořené skvrny nebo tvaru ve struktuře materiálu je závislá na použité kameře. Velikost skvrny by

měla být taková, aby byla zachycena větším množstvím pixelů. To zmenšuje riziko chyby při její identifikaci.

Správné měření vyžaduje rovnoměrné osvětlení měřeného povrchu. K dosažení co nejvýraznějšího kontrastu je možné použít umělý zdroj bílého světla, ovšem v některých případech je jas dostatečný i při použití bez dodatečného zdroje osvětlení [5], [6]. Pro získání snímků by měla být použita kamera s vysokým rozlišením. Kamera by měla mít pouze objektiv na ostření, její zkreslení je možné řešit softwarovými korekcemi. Použití objektivu na přiblížení je nežádoucí, jelikož zvyšuje zkreslení [5]. Kamera je umístěna tak, aby se její optická osa nacházela kolmo k měřenému rovinnému povrchu, s odchylkou do 5° od požadovaného stavu jsou získané výsledky s chybou posuvu do velikosti 0,01 pixelu [10].

2.2 Průběh měření, zpracování dat počítačem

Měření je zahájeno pořízením referenčního snímku, tj. snímku v nezatíženém stavu, na němž je vyznačena vyšetřovaná oblast (region of interest – ROI). Následně je oblast rozdělena na podvýběry (subsets), menší celky o tvaru čtverce, jejichž posuv je zkoumán [10]. Volba velikosti podvýběru je individuální, a měla by být volena s ohledem na texturu povrchu materiálu. Příliš velký podvýběr bude vyžadovat větší výpočetní čas a výsledky změřeného posuvu budou průměrem za celou oblast podvýběru, naopak volba příliš malého podvýběru způsobí, že program bude mít problémy s identifikací jednotlivých podvýběrů [6], [10].

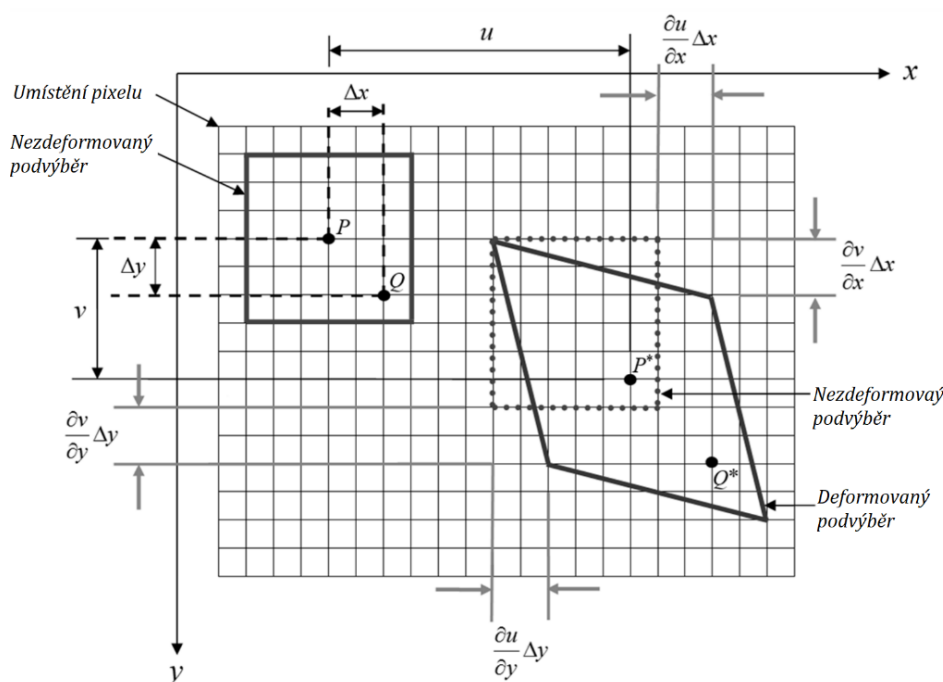


Obrázek 2.1: Princip měření digitální korelací obrazu [5]

Získané snímky program analyzuje, identifikuje jednotlivé podvýběry a vyhodnocuje jejich posuv. Kromě posuvu podvýběrů dochází rovněž k jejich deformaci a otočení. Při výpočtu program vychází z rovnic přetvoření (2.1).

Body P a Q jsou referenční body podvýběru, pomocí kterých jsou korelací zjištěny hodnoty pro výpočet [10].

$$\begin{aligned}\xi &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta x y \\ \eta &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\end{aligned}\quad (2.1)$$

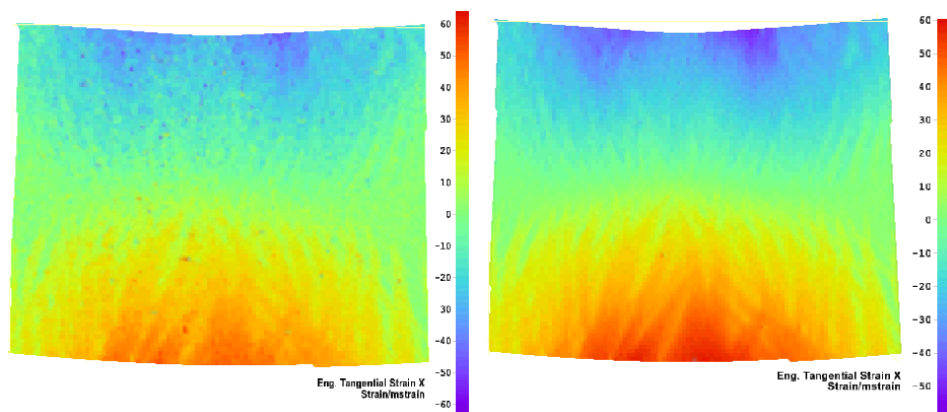


Obrázek 2.2: Deformace podvýběru [6]

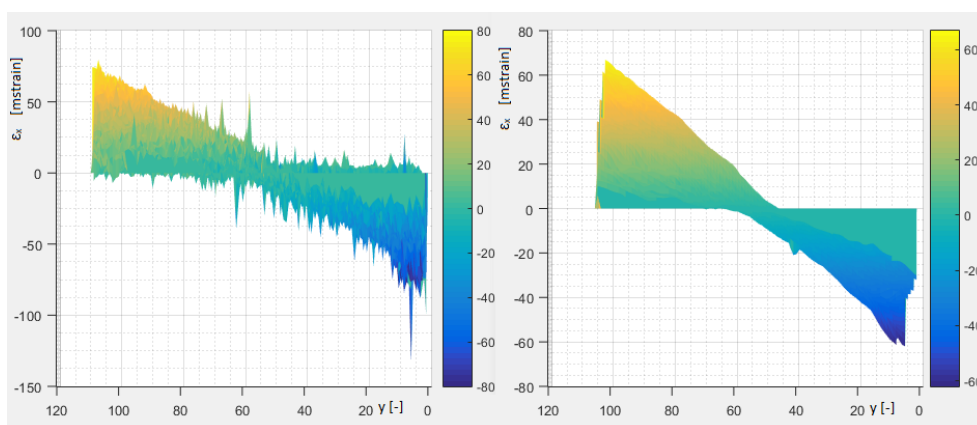
2.2.1 Výstupní data z měření digitální korelace obrazu

Výstupními daty z měření jsou hodnoty posuvů jednotlivých podvýběrů u_x a u_y , dále poměrná prodloužení $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ a zkos γ_{xy} . Výsledky těchto veličin jsou měřeny v celé zkoumané oblasti. Vliv náhodných chyb na výsledek je do určité míry možné omezit pomocí vyhlazovacích algoritmů. Obrázek 2.3 zobrazuje, jak se projeví použití vyhlazovací funkce na grafickém výstupu. Ještě lépe je tento rozdíl patrný na diagramech 2.4, kde je na vodorovné ose vyznačena souřadnice y a na svislé hodnota deformací. Běžně dostupný komerční software pro digitální korelaci obrazu umožňuje export dat v různých datových formátech jako je ASCII nebo HDF5. Pro snadnou orientaci ve výsledcích je možné data zobrazit graficky jako obrázky (obr. 2.3) [10] nebo ve formě videa zobrazujícího změnu deformace v čase [11].

2. DIGITÁLNÍ KORELACE OBRAZU



Obrázek 2.3: Grafické zobrazení výsledků měření



Obrázek 2.4: Průběh deformací

Měření

3.1 Použité měřicí přístroje a stroje

Měření popsané v této práci bylo provedeno pomocí kamerového systému Dantec Dynamic Q400. Jedná se o dvoukamerové DIC zařízení, které umožňuje měření tvaru součástí, posuvů a poměrných prodloužení. Systém je schopný měření a zpracování výsledků v reálném čase, včetně dynamických využití a měření přechodových jevů, a umožňuje dále exportovat data ve formě analogového napěťového signálu. Kalibrace je prováděna přímo před měřením uživatelem za pomoci dodávané kalibrační desky.

Zatěžování proběhlo na univerzálním zkušebním stroji Tira 2300. Kromě dat získaných z digitální korelace obrazu byly při každém měření souběžně zaznamenány údaje ze zkušebního stroje, a to čas, působící síla [kN] a posuv příčnicku [mm]. Díky propojení zkušebního stroje a měřicího zařízení na korelaci obrazu obsahují výstupní soubory z digitální korelace obrazu rovněž informaci o síle v okamžiku zaznamenání obrazu.

Při měření bylo nutné použít dodatečné osvětlení z důvodu proměnlivosti světelných podmínek okolí v průběhu měření. Použití osvětlení je patrné na obrázku 3.6. Použitý světelný zdroj umožňoval rovnoměrné osvětlení měření i plynulou regulaci intenzity pro minimalizaci odlesků na skvrnách.

3.2 Uspořádání měření, měřený vzorek

Vznik plastického kloubu na nosníku byl měřen na případě tříbodého ohybu. Měření bylo provedeno dvakrát na totožných vzorcích, jednou s použitím jediné kamery metodou 2D digitální korelace obrazu a podruhé za použití dvou kamer pro trojrozměrnou korelaci obrazu. Nosník je umístěn do přípravku (obr. 3.1) se vzdáleností podpěr 290 mm. Přípravek svojí konstrukcí brání nosníku ve větším pohybu v ose z, byť ne naprosto dokonale. Vliv vychýlení v ose z na přesnost výsledku bude posouzen v kapitole 3.6 z měření 3D korelací.

3. MĚŘENÍ



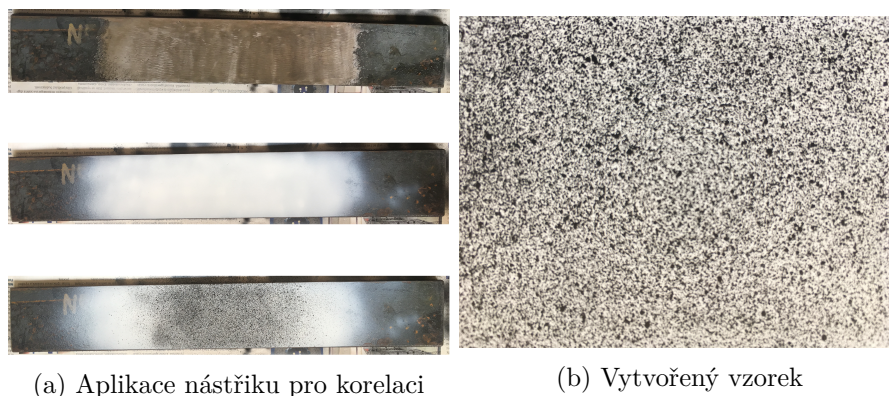
Obrázek 3.1: Umístění vzorku v přípravku

Jako zkoumaný nosník byl použit vzorek o obdélníkovém průřezu 8,14 x 59,77 mm a délce 385 mm. Tyto rozměry odpovídají normalizovanému polotovaru dle ČSN EN 100 58 (42 5522) - ocelová tyč plochá válcovaná za tepla pro všeobecné použití [12]. Není známý materiál nosníku, a z toho důvodu bylo nezbytné provést tahovou zkoušku pro určení charakteristik materiálu (mez kluzu, modul zpevnění). Více o provedené tahové zkoušce je uvedeno v kapitole 3.3.

Nosník musel být před nanesením nástřiku pro digitální korelaci obrazu mechanicky povrchově upraven (broušením) z důvodu přítomnosti okují, viz obr. 3.2a. Na hranách vzorku, kde nebyly okuje odstraněny, docházelo v průběhu měření k jejich oddělení a odpadávání. Následně byl zkoumaný povrch odmaštěn, a byla na něj aplikována vrstva akrylátové bílé barvy. Dále byl vytvořen vzor tvořený skvrnami černé akrylátové barvy. Nanesený lak a postřík pro digitální korelaci je zobrazen na obrázku 3.2b. Na nosníku jsou pro správné umístění vzorku do zkušebního stroje a pro orientaci při vyhodnocení vytvořeny značky. Je vyznačen střed nosníku a dále jsou značky umístěné po 10 mm.

Velikost síly, při které byl pokus ukončen, byla určena z předběžného odhadu velikosti meze kluzu neznámé oceli. Tento odhad byl proveden před provedením tahové zkoušky, která proběhla až po provedení ohybů.

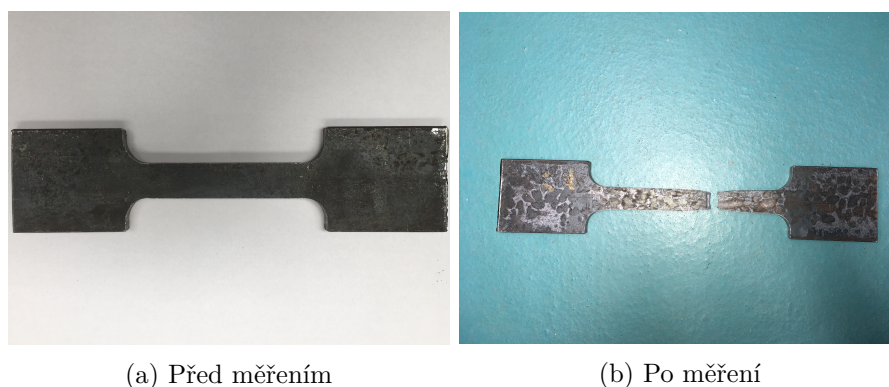
3.3. Tahová zkouška k určení mechanických vlastností neznámé oceli



Obrázek 3.2: Povrchová úprava nosníku

3.3 Tahová zkouška k určení mechanických vlastností neznámé oceli

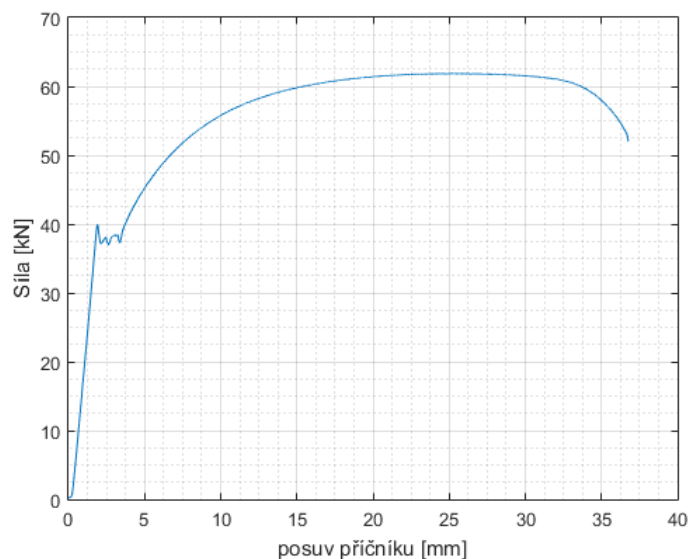
Měřené vzorky byly vyrobeny z neznámého druhu oceli, předpokládaný materiál je konstrukční ocel řady 11. Pro výpočtovou část práce bylo nutné znát vlastnosti materiálu, a za tímto účelem byla provedena tahová zkouška. Tahová zkouška probíhala na univerzálním zkušebním stroji Tira 2300. Vzorek pro tahovou zkoušku je zobrazen na obrázku 3.3. Jeho průřez má rozměry 7,91 x 14,93 mm. Na vzorku je vyznačen úsek o délce 80 mm. Při měření byly získány informace o síle a posuvu přímo ze softwaru ovládajícího univerzální zkušební stroj, a dále závislost poměrného prodloužení na působící síle z extenzometru.



Obrázek 3.3: Vzorek pro tahovou zkoušku

Z diagramu 3.4 je patrné, že po dosažení meze kluzu se až do poměrného prodloužení o hodnotě 0,0177 materiál chová jako ideálně plastický, a poté se začíná ve větší míře projevovat zpevnění materiálu a dochází k dalšímu růstu síly, napětí. Toto chování lze aproximovat pomocí lomené čáry, která

3. MĚŘENÍ



Obrázek 3.4: Změřená závislost síly a posuvu

má tři úseky. Výsledná aproximace je spolu se změřenými daty zobrazena na diagramu 3.5 .

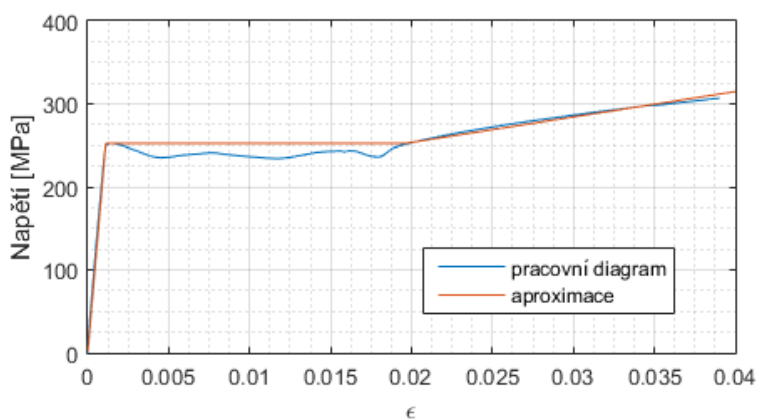
Rovnice popisující aproximace byly numericky získány z naměřených dat. Oblast elastických deformací a oblast s deformačním zpevněním byly aproximovány metodou nejmenších čtverců. Lomenou čáru aproximující pracovní diagram popisují tyto rovnice (3.1).

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon = 227000\varepsilon \\ \sigma(\varepsilon) &= \sigma_k = 252,6\text{MPa} \\ \sigma(\varepsilon) &= \sigma_0 + E_z\varepsilon = 192,4 + 3059\varepsilon\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ze změřených hodnot lze určit další vlastnosti zkoumaného materiálu (3.2).

$$\begin{aligned}R_m &= 392,3\text{MPa} \\ R_e &= \sigma_k = 252,6\text{MPa} \\ A_{80} &= \frac{L_u - L_0}{L_0} 100 = \frac{111,81 - 80}{80} 100 = 39,8[\%] \\ Z &= \frac{S_0 - S_u}{S_0} 100 = \frac{(14,93.7,91) - (14,65.5,48)}{14,93.9,91} 100 = 32,02[\%]\end{aligned}\tag{3.2}$$

A_{80} je zde tažnost oceli vyjádřená v procentech, L_0 a L_u jsou počáteční měřená délka a měřená délka po lomu. Z je kontrakce vyjádřená v procentech, S_0 je



Obrázek 3.5: Skutečný pracovní diagram a jeho aproximace

počáteční průřezová plocha zkoušené délky a S_u je minimální průřezová plocha po lomu [7].

Na základě těchto údajů lze předpokládat, že se jedná o ocel 11 373 s následujícími normalizovanými vlastnostmi. Jedná se o neušlechtilou konstrukční ocel vhodnou ke svařování. Obvyklé využití je na součásti strojů a konstrukcí menších tlouštěk, namáhané staticky nebo mírně dynamicky [13]. Modul zpevnění podle [8] je roven $E_z = 2700$ MPa. Ocel je v polotovaru dle ČSN 42 5522 dodávána s okujeným povrchem. Zaručená minimální mez kluzu podle normy je 235 MPa (při měření byla zjištěna hodnota $\sigma_k = 252$ MPa), mez pevnosti je v normě uváděna v rozmezí 340-470 MPa (při tahové zkoušce byla zjištěna hodnota $R_m = 392,3$ MPa) [13].

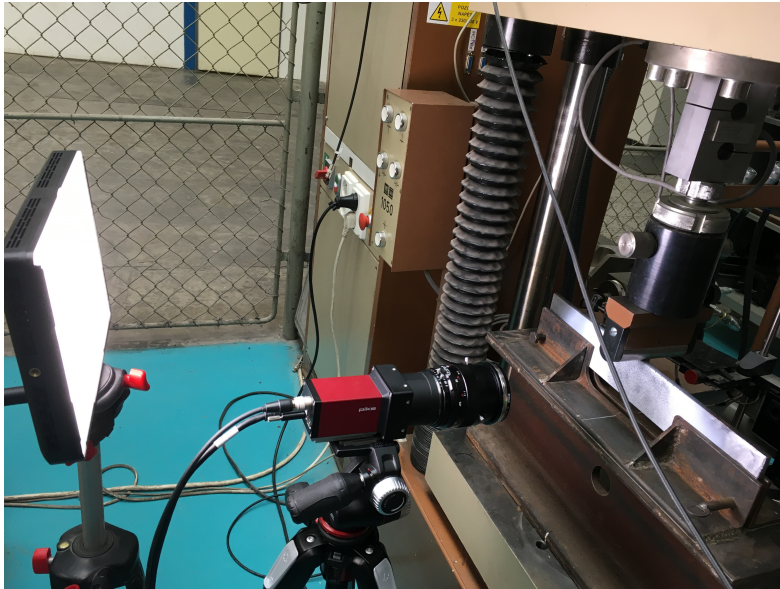
Tahová zkouška nebyla provedena podle všech zásad a exaktních postupů pro tahovou zkoušku, zkoumaný vzorek nebyl normalizovaný. Bylo provedeno pouze jediné měření, a to kvůli omezenému množství zkoumaného materiálu. Svůj účel, získání orientačních informací o vlastnostech materiálu a jeho identifikaci, splnila.

3.4 Měření dvourozměrnou korelací obrazu

Prvním z měření která byla v laboratoři provedena, bylo měření ohybu dvourozměrnou korelací obrazu. Na obrázku 3.6 je zobrazeno uspořádání experimentu, s umístěním kamery a osvětlení. Zatěžování probíhalo rychlostí 1mm za minutu, a pokus byl ukončen v okamžiku, kdy zkušební stroj působil silou 33,97 kN a posuv příčnicku byl 13,96 mm od okamžiku doteku příčnicku a vzorku. Měření celkem trvalo 16 minut 56 vteřin. Po ukončení zatěžování bylo korelací rovněž zaznamenáno odlehčení. Při tomto měření nebyla provedena kalibrace kamery, která by zjistila její vzdálenost od nosníku. Z tohoto důvodu lze použít pouze získané informace o poměrných prodlouženích. Po-

3. MĚŘENÍ

suvy jsou změřeny chybně, ale z grafického zobrazení lze získat představu o jejich rozložení a vzájemné velikosti.

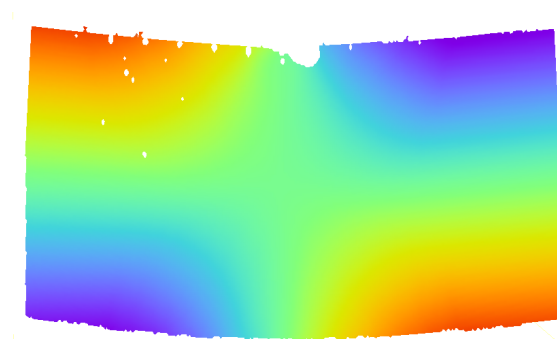


Obrázek 3.6: Uspořádání měření při dvourozměrné korelaci obrazu

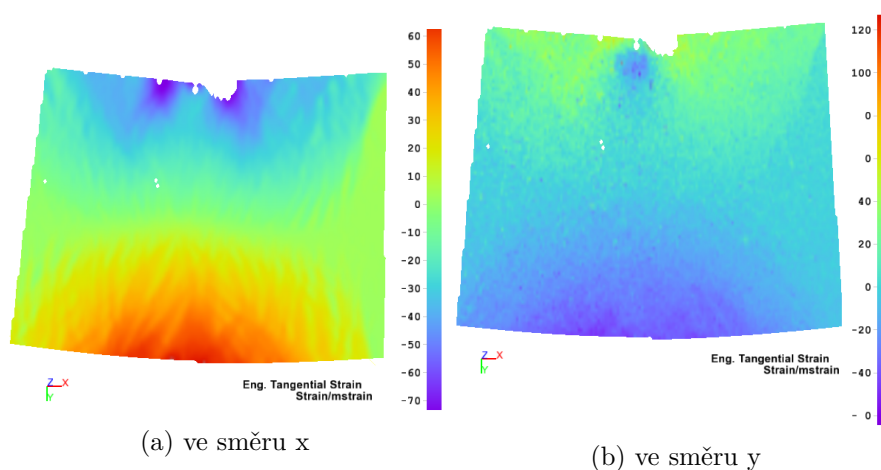
Při měření a vyhodnocení bylo možné pozorovat jevy způsobující chyby a nepřesnosti. V místech na okrajích vzorku, kde nebyly odstraněny okraje, docházelo v průběhu měření k jejich opadávání, tím pádem poškození nanesené barvy. Dalším nevhodným prvkem při měření se ukázaly rysky, které byly na vzorku vytvořeny fixem pro umístění do stroje a pro orientaci ve výsledcích. Na ploše rysek docházelo k výraznému odlesku světla, a při korelaci nebyl program schopný místa s ryskami vyhodnotit. Dalším problémem se ukázalo umístění světelného zdroje, při pohybu zkušebního stroje došlo ke stínění části vzorku. V místě stínu nebylo možné provést korelaci. Tato místa se stínem a odrazy světla jsou dobře patrná na obrázku 3.7. Na nosníku byla patrná deformace ve směru osy z , s měřením jednou kamerou tuto deformaci není možné změřit, její možný vliv na správnost výsledků měření je uveden v kapitole 3.6.

Deformace a posuvy na obrázcích 3.8 a 3.7 odpovídají silovému působení 33,97 kN. Jedná se o záběry z 2048. snímku, z okamžiku ukončení měření. Obrázky odpovídající jiným hodnotám budou uvedeny v kapitole 4 v porovnání s vypočtenými hodnotami pro příslušná zatížení.

Pomocí digitální korelace obrazu byl rovněž zaznamenán průběh odlehčování. Po odlehčení a vyjmutí nosníku z přípravku na něm byly okem patrné zvýšené deformace v místě působení síly od zkušebního stroje a v místech, kde byl nosník uložen na podporách.



Obrázek 3.7: Posuv ve směru x



(a) ve směru x

(b) ve směru y

Obrázek 3.8: Poměrná prodloužení

3.5 Měření 3D korelací obrazu

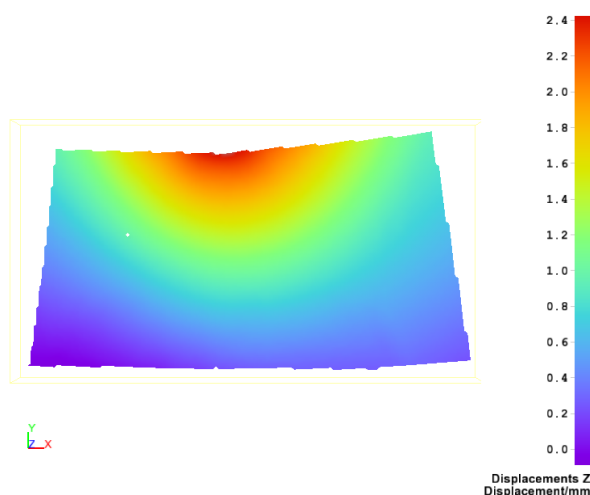
Na rozdíl od dvourozměrné korelace obrazu bylo nezbytné provést před měřením kalibraci a nastavení souřadnicového systému. Uspořádání měření a kalibrace kamer jsou zobrazeny na obrázku 3.9. Pokus trval 15 minut 40 vteřin, a v okamžiku ukončení působil zkušební stroj silou 33,79 kN. Při druhém měření bylo možné využít některých poznatků z předchozího pokusu, lépe nastavit některé parametry pokusu a vhodněji umístit vybavení. Díky tomu již nedocházelo ke stínění nosníku v okolí místa působení síly. Rovněž byla nastavena nižší snímkovací frekvence kamer, což zlepšilo časovou náročnost výpočtu.

Na rozdíl od dvourozměrné korelace bylo možné změřit rovněž vychýlení nosníku v ose z. Vychýlení je zobrazeno na obrázku 3.10, nejvyšší hodnota byla naměřena v místě působení síly od zkušebního stroje na nosník, a byla

3. MĚŘENÍ



Obrázek 3.9: Uspořádání měření při 3D korelaci obrazu

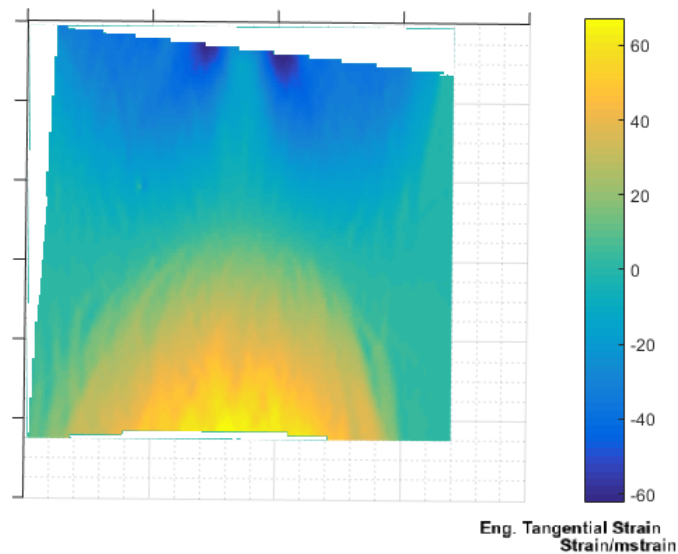
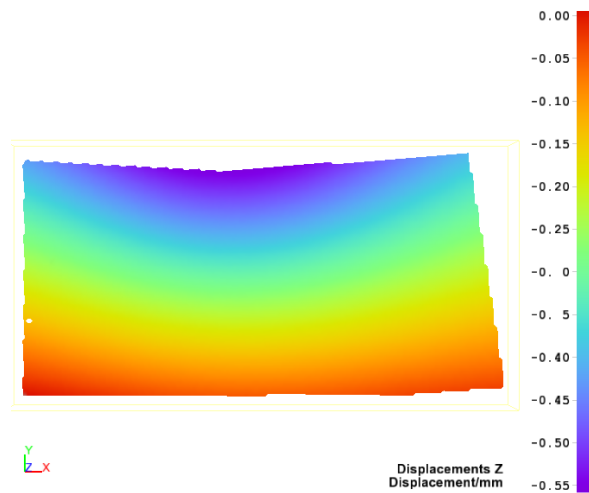


Obrázek 3.10: Výchylka v ose z

$u_z = 2,3794$ mm (kladný směr posuvu byl orientován od nosníku ke kamerám), nejmenší dosažená hodnota byla $u_z = -0,0762$ mm. I v případě deformací ve směru osy z se jednalo o plastické deformace, při odlehčení (obrázek 3.12) se nejvíce posunutá část vrátila pouze o $0,5581$ mm. Nejvyšší dosažený zbytkový posuv po odlehčení je tedy $1,8213$ mm, a tato deformace se projeví při porovnávání s vypočtenými hodnotami, které toto vychýlení nepředpokládají. Zbytková deformace byla též patrná při vyjmutí nosníku z přípravku, došlo ke vzpříčení a bylo třeba uvolnit šrouby a přípravek rozevřít.

Obdobným způsobem jako u dvourozměrné korelace je možné pozorovat, že deformace v okamžiku ukončení měření nejsou symetrické podle neutrální osy (viz obr. 3.11).

Porovnáním hodnot posuvu ve směru souřadnice x získaném z korelace

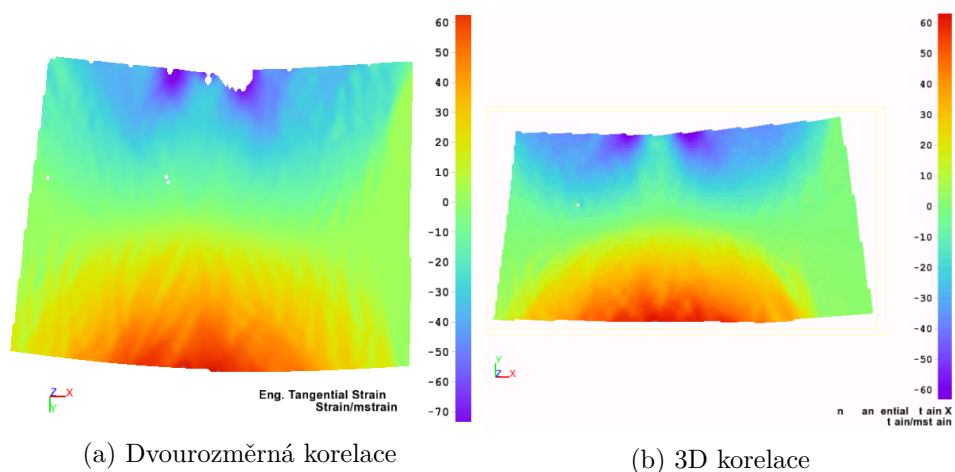
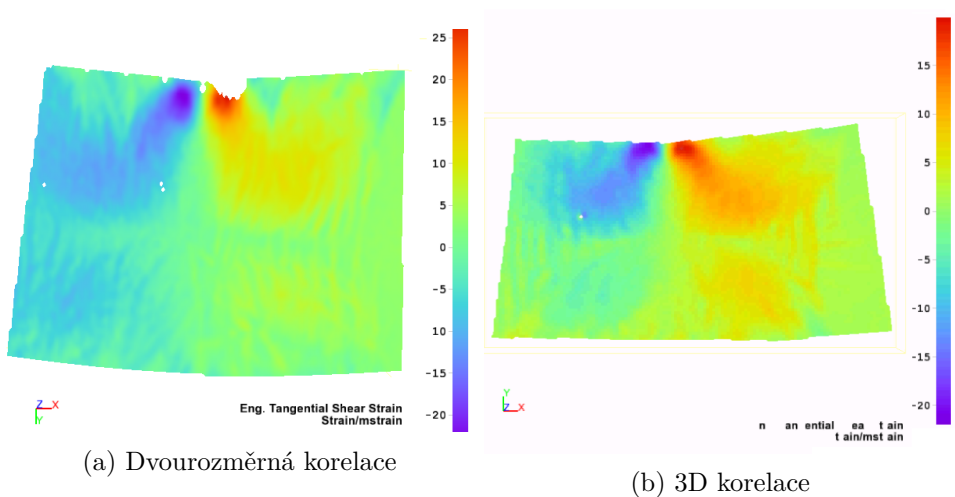
Obrázek 3.11: ε_x 

Obrázek 3.12: Posuv při odlehčení ve směru z

a z univerzálního zkušebního stroje je možné určit, do jaké hloubky zasahuje důlek, jenž vznikl v horní části v místě, kde zkušební stroj působil na nosník. Pomocí korelace byl v blízkosti místa působení síly naměřen posuv 11,6954 mm, zatímco zkušební stroj se posunul o 13,37 mm. Důlek je hluboký 1.6746 mm, a má výrazný vliv na přenášení silového působení na nosník. Vliv vysokého lokálního napětí bude posouzen dále v kapitole 4.3.

3.6 Porovnání dvourozměrné a trojrozměrné korelace obrazu

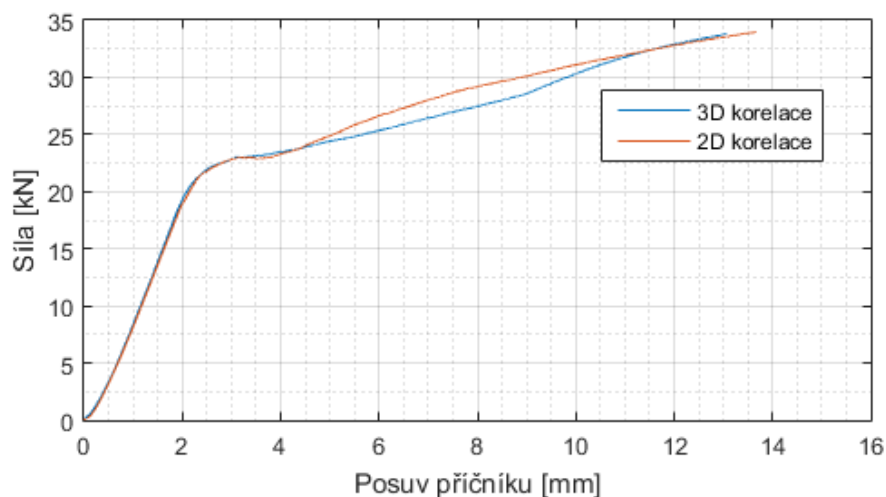
Na následujících snímcích jsou zobrazeny deformace a zkosity změřené při obou měřeních. Tyto grafické výstupy jsou získané přímo z programu Istra 4D, a bylo na nich provedeno vyhlazení. Porovnání je prováděno na snímcích získaných pro působící sílu o velikosti 33,7 kN.

Obrázek 3.13: ε_x Obrázek 3.14: γ

Obrázek 3.15 zobrazuje závislost působící síly a posuvu pro obě měření. V elastické oblasti jsou průběhy při obou měřeních téměř totožné, po vytvoření plastického kloubu se křivky mírně rozcházejí, ale rozdíl není nijak výrazný.

3.6. Porovnání dvourozměrné a trojrozměrné korelace obrazu

Tento rozdíl mohl být způsoben větším vychýlením v ose z u jednoho z měření, ale tuto domněnku nelze potvrdit, jelikož toto vychýlení bylo možné změřit pouze v případě 3D korelace.



Obrázek 3.15: Ohyb

Obě metody dosahují srovnatelných výsledků, a to i v místech v horní polovině nosníku, kde docházelo k největšímu vychýlení v ose z. V následující kapitole je uvedeno porovnání vypočtených hodnot s naměřenými. K tomuto porovnání jsou použity naměřené hodnoty z trojrozměrné digitální korelace obrazu.

Výpočet

V následující části práce jsou uvedeny jednotlivé varianty výpočtů, jejich výsledky a porovnání s naměřenými hodnotami.

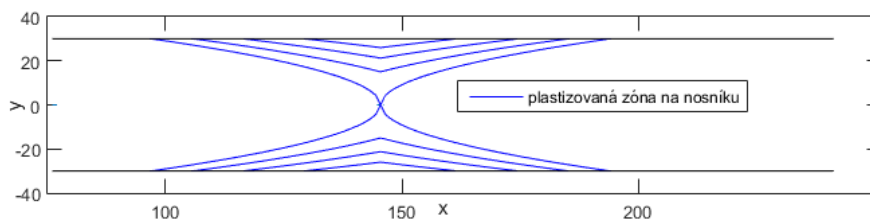
Aby bylo možné porovnat výsledky měření s vypočtenými hodnotami, musí být oba soubory hodnot ve stejných jednotkách. Za tímto účelem byly hodnoty deformací získané korelací převedeny pomocí Hookova zákona (1.1) na napětí. Jelikož Hookův zákon je platný pouze v oblasti vratných deformací, všechny hodnoty které vychází nad mez kluzu nejsou brány v potaz. Pro získání informací o tvaru a velikosti plasticky ovlivněné zóny je metoda postačující.

4.1 Ideálně plastický materiál

4.1.1 Se zanedbáním vlivu posouvající síly a smykového napětí

Tento přístup zanedbává většinu vlivů a komplikovanějších vlastností materiálu, ale její výhodou je snadný postup při výpočtu, a velká dostupnost literatury popisující tento přístup [2], [3], [8].

Obrázek 4.1 zobrazuje, jak se při růstu síly rozšiřuje plasticky ovlivněná oblast až do okamžiku dotvoření plastického kloubu.

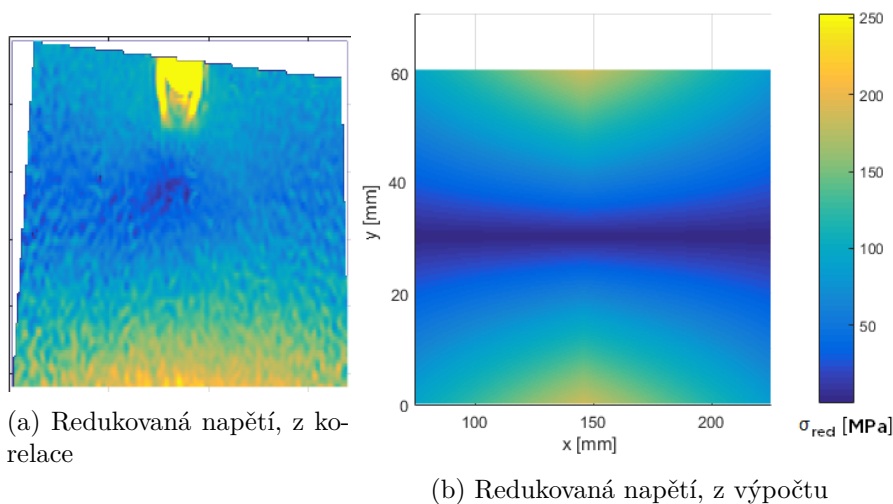


Obrázek 4.1: Postupné šíření plasticky deformované oblasti na nosníku

Na následující sérii obrázků je porovnání výpočtu a měření pro síly od meze kluzu po předpokládanou kritickou sílu. Na obrázcích 4.2 odpovídajících síle o

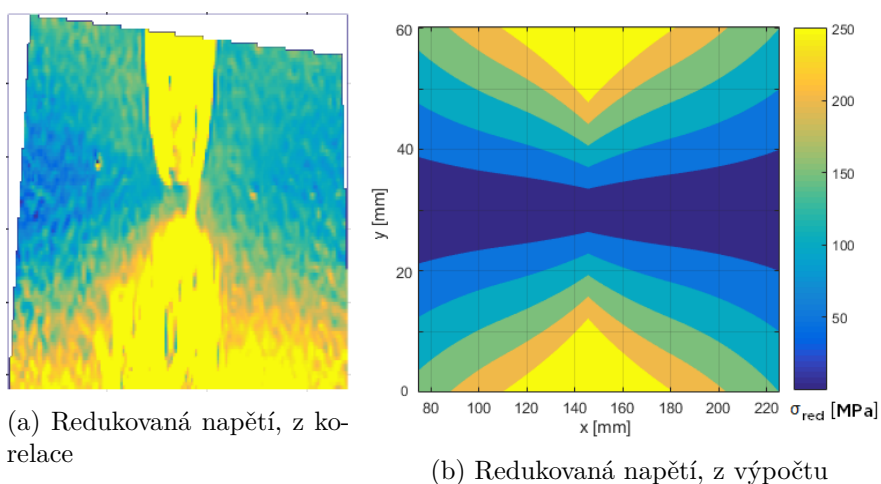
4. VÝPOČET

velikosti předpokládané meze elasticity je patrné, že k tvorbě plastických deformací dochází již při menším silovém působení v oblasti kolem působíště síly. Tyto lokální zvýšené deformace budou dále probrány v kapitole 4.3. Při tomto zatížení je rovněž možné pozorovat patrný rozdíl mezi výpočtem a naměřenými daty v hodnotě napětí v okolí neutrální osy vlivem zanedbání smykových napětí.

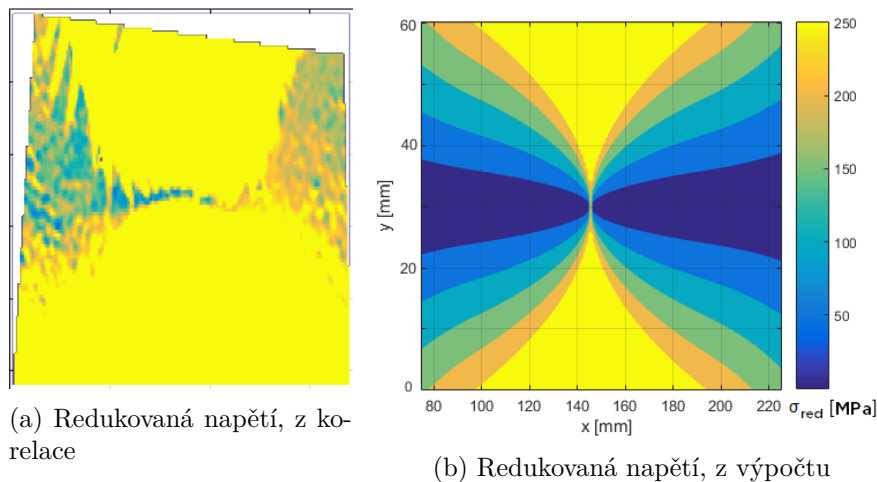


Obrázek 4.2: $F = 16,8 \text{ kN}$

Při síle o velikosti 22,4 kN je na obrázku 4.3a jasně patrné, že při této síle došlo ke zplastizování celého průřezu nosníku a plastický kloub je dotvořen. Oproti tomu vypočtená hodnota předpokládá, že zbývá elastické jádro o velikosti 36 mm.



Obrázek 4.3: $F = 22,4 \text{ kN}$

Obrázek 4.4: $F = 25,2 \text{ kN}$

Při síle $25,2 \text{ kN}$, při které má u ideálně plastického materiálu dojít k vytvoření plastického kloubu, je na obrázku 4.4a možné pozorovat, že při laboratorním měření byl pro danou sílu již zplastizovaný celý průřez, a plastické deformace se dále rozšiřovaly po délce nosníku.

Z těchto porovnání je patrné, že k vytvoření plastického kloubu a šíření plastických deformací obecně dochází v tomto případě dříve, než předpokládá výpočet. Rozdíl skutečné a předpokládané síly pro vytvoření kloubu je 3 kN - teoretická hodnota je $25,2 \text{ kN}$ a skutečná naměřená $22,18 \text{ kN}$.

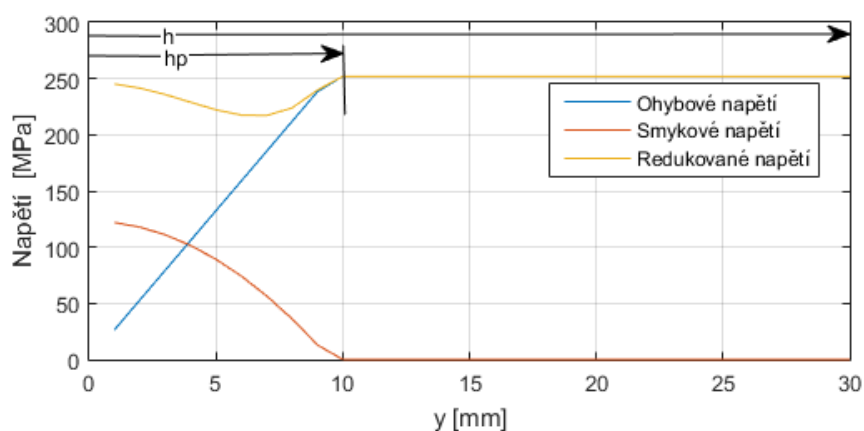
4.1.2 S posouzením vlivu smykové síly

Smyková napětí přenášená v elastickém jádru nosníku mají vliv na tvar a rozměr plasticky ovlivněné oblasti, a na výslednou sílu potřebnou ke zplastizování průřezu. Na rozdíl od prostého ohybu uvažovaného v předchozí kapitole se jedná o víceosou napjatost. Ke zplastizování průřezu dojde při menším zatížení, než jaké předpokládal výpočet se zanedbáním smyku. Nosník má vysoký poměr výšky k šířce ($60:8$) a lze tedy předpokládat výrazný vliv smykových napětí.

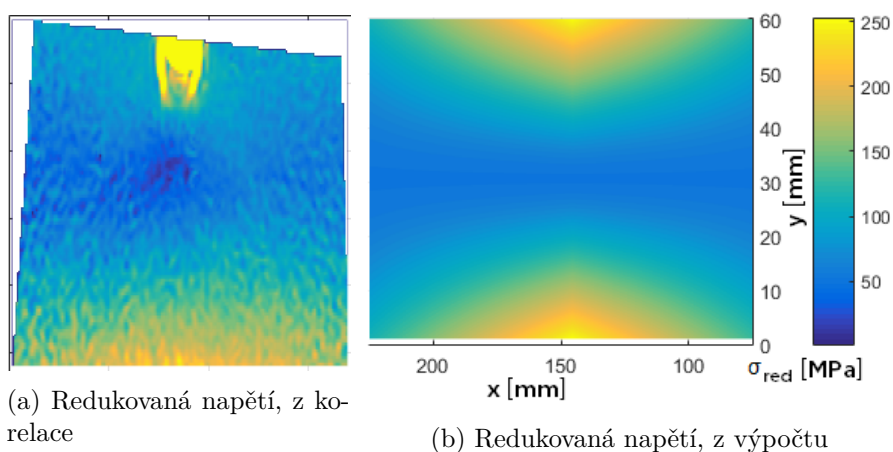
Na obrázku 4.5 je uvedeno rozložení smykových a ohybových napětí na nosníku. Diagram rovněž zobrazuje redukovaná napětí. Plastická deformace vlivem smyku se začne utvářet na neutrální ose, a následně se bude šířit dále, kde bude působit v kombinaci s ohybem.

Obrázek 4.6 zobrazuje porovnání naměřených hodnot v okamžiku dosažení předpokládané meze elasticity. Na rozdíl od metody zanedbávající vliv posouvající síly odpovídají redukovaná napětí v blízkosti neutrální osy na obrázku 4.6b naměřeným hodnotám.

4. VÝPOČET



Obrázek 4.5: Rozložení složek napětí v nosníku v elasticko-plastickém stavu

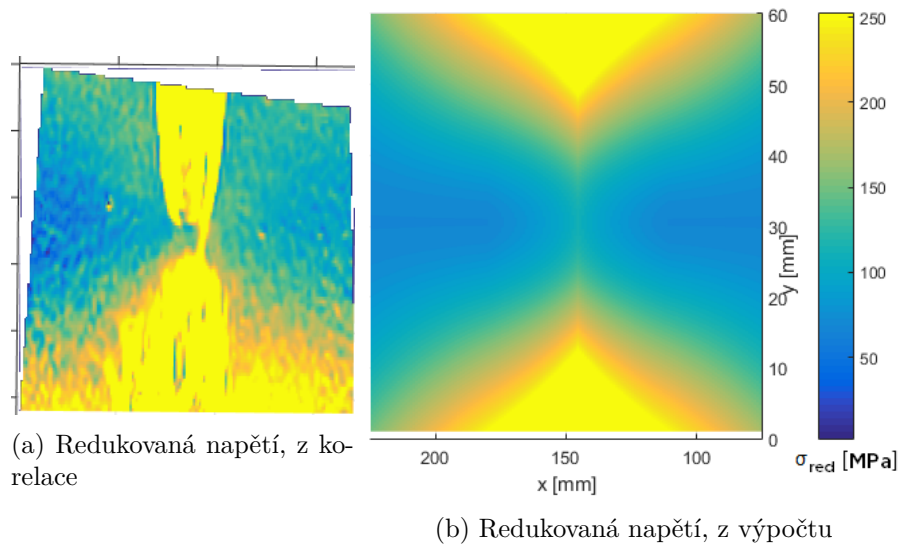
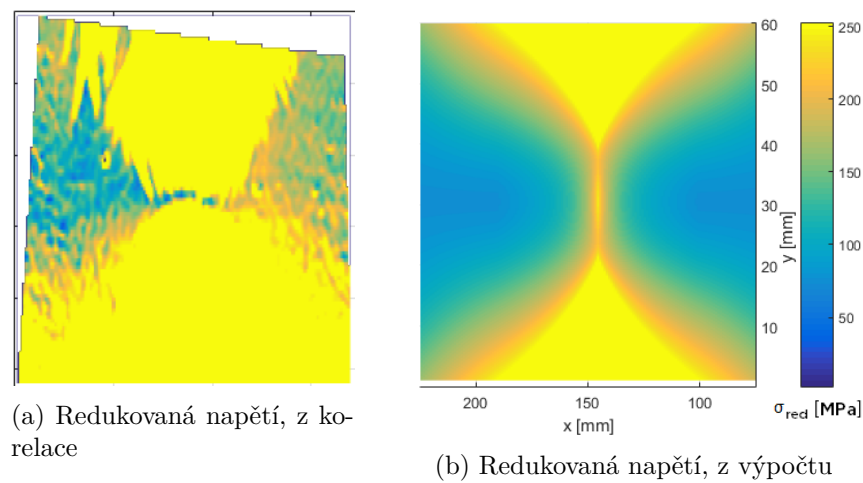


(a) Redukovaná napětí, z korelace

(b) Redukovaná napětí, z výpočtu

Obrázek 4.6: $F = 16,8 \text{ kN}$

Okamžik, ve kterém byl ve skutečnosti dosažen plastický kloub a stav, který podle výpočtů odpovídá téměř silovému působení, jsou zobrazeny na obrázku 4.7. Plastického kloubu bylo opět dosaženo při menším zatížení než předpokládá výpočet. Rozdíl velikosti vypočteného elastického jádra oproti výpočtu se zanedbáním smyku je 1,1 mm, elastické jádro má s uvažováním smyku velikost 34,9 mm.

Obrázek 4.7: $F = 22, 28$ kNObrázek 4.8: $F = 24, 66$ kN

K plnému zplastizování průřezu dochází podle výpočtu při dosažení síly $F = 24, 66$ kN. Tento výsledek je blíže skutečnému dosaženému stavu než v případě zanedbání smykových napětí (obrázky 4.4 a 4.9).

4.2 Model se zpevněním

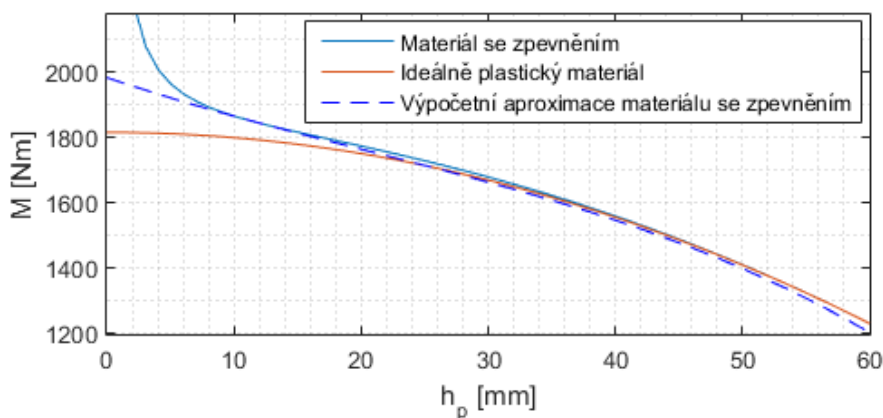
Popis vzniku plastického kloubu u materiálu s lineárním zpevněním podle rovnice (1.28) naráží na problém pro malé hodnoty velikosti elastického jádra

4. VÝPOČET

nosníku h_p , jelikož moment v takovém případě roste k nekonečnu. Aby bylo možné prakticky řešit ohyb nosníku se zpevněním, byla křivka popsaná rovnicí (1.28) proložena polynomem 3. stupně v rozsahu předtím, než začne docházet k prudkému růstu. Takto získanou závislost velikosti elastického jádra na momentu už je možné využít při výpočtu, a je zobrazena společně s původním průběhem a závislostí $M_o - h_p$ pro model bez zpevnění na obrázku 4.9.

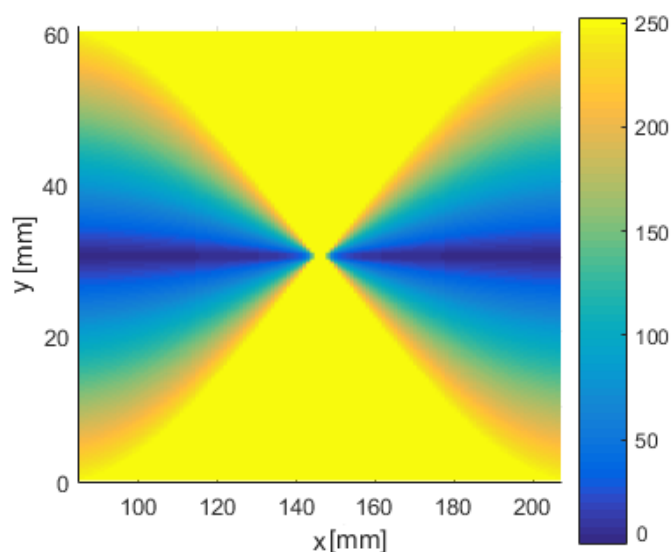
Pro výpočet byla použita rovnice (4.1). M_o je ohybový moment, který působí v daném průřezu, a h_p velikost elastického jádra v tomto místě. Podle tohoto vztahu je kritická síla pro vytvoření plastického kloubu 27,5 kN v případě zanedbání smykových napětí. V případě uvažování vlivu posouvající síly (vypočteno obdobným způsobem jako u výpočtu bez zpevnění) bude kritická hodnota 24,7 kN.

$$M_o = -0.0028h_p^3 + 0,1778h_p^2 - 13,76h_p + 1995,9 \quad (4.1)$$

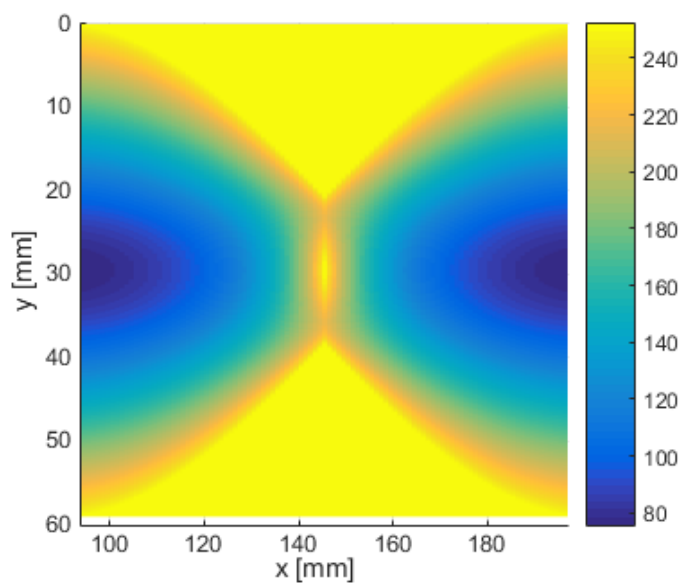


Obrázek 4.9: Diagram $M - h_p$

Na obrázcích 4.10 a 4.11 jsou zobrazeny předpokládané plastické klouby. Tyto obrázky jsou ilustrativní, zobrazují tvar a velikost plasticky ovlivněné oblasti a napětí v elastickém jádře, ovšem chybí na nich znázornění napětí vyšších než mez kluzu, kterých je dosaženo v plastické oblasti zpevněním. Tato napětí je možné spočítat za předpokladu existujícího elastického jádra a platnosti Bernoulliho hypotézy o zachování rovinnosti průřezů v případě zanedbání smykových napětí.



Obrázek 4.10: Plastický kloub u materiálu se zpevněním, se zanedbáním smyku



Obrázek 4.11: Plastický kloub u materiálu se zpevněním, s uvažováním smyku

4.3 Posouzení zvýšených lokálních deformací

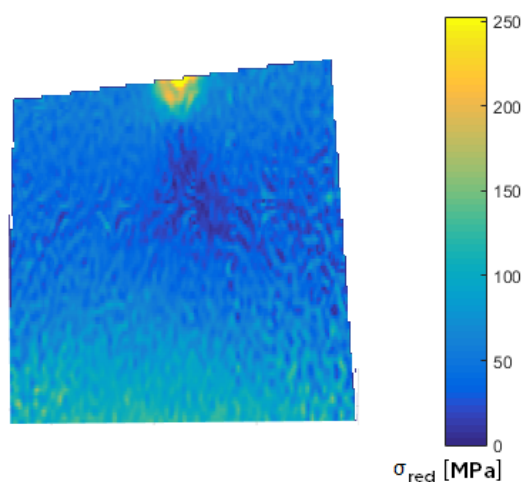
Všechny výpočtové modely uvedené v předchozích kapitolách předpokládají značně idealizované chování materiálu, úlohou se zabývají pouze jako dvou-rozměrnou (nepředpokládají výchylku ve směru z) a idealizují silová působení

4. VÝPOČET

představou, že veškeré síly působí na čáře.

Skutečný stav je ovšem takový, že v průběhu měření síla působila na velmi malé plošce, tím pádem na této plošce vznikala velmi vysoká napětí přesahující mez kluzu, a v místě působení síly a pod podpěrami vznikaly otláčené jamky. Tento jev je ještě zvýrazněn tím, že se jedná o nosník s velmi malou šířkou v poměru k výšce. U nosníku o větší šířce by byla plocha působení sil větší, a meze kluzu by na ní bylo dosaženo později.

Tyto plastické deformace se začínají tvořit už při výrazně nižších silách, než je mez elasticity materiálu. Prvním snímkem získaným z digitální korelace obrazu, na kterém je možné pozorovat plastické deformace je obrázek 4.12 zaznamenaný při působící síle $F = 8,44$ kN. K plastickým deformacím tedy dochází již při síle o velikosti 49,7 % meze elasticity.



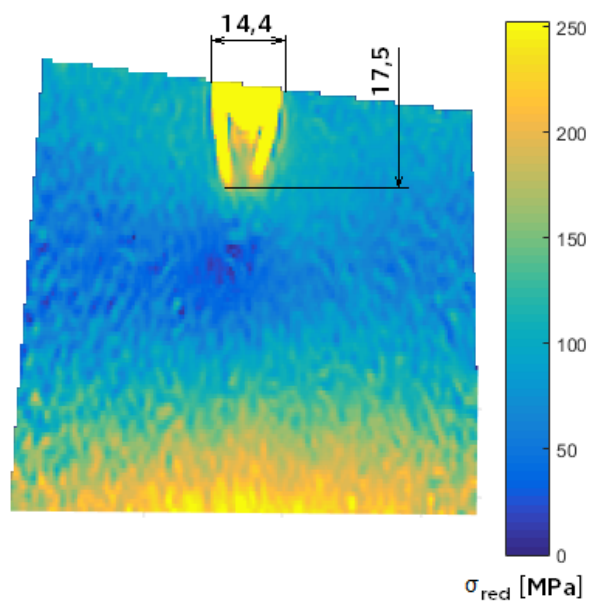
Obrázek 4.12: Redukovaná napětí v okamžiku prvních zaznamenaných plastických deformací

V okamžiku, kdy by teprve měla být dosažena mez kluzu, už je patrné značné rozšíření plastických deformací po nosníku. To je patrné na obrázku 4.13. Plasticky ovlivněná oblast měla v horní části nosníku rozměr 14,43 mm a zasahovala do vzdálenosti 17,5 mm od horního okraje.

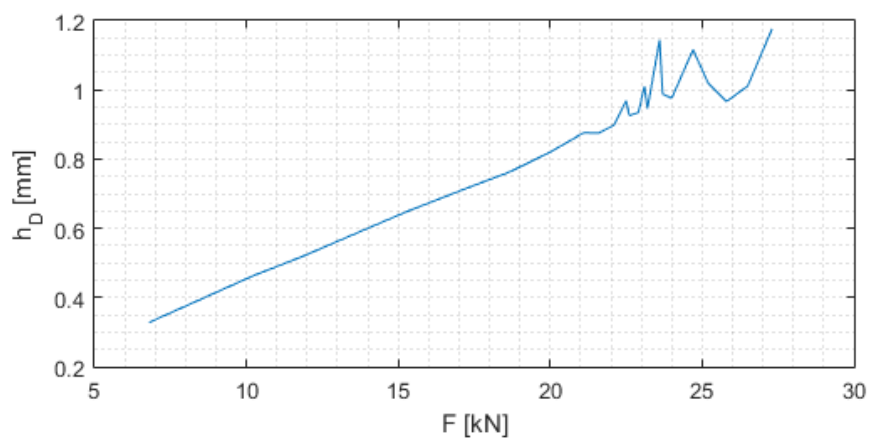
Na diagramu 4.14 je zobrazen růst velikosti promáčknutého důlku v závislosti na působící síle. Tato data byla získána porovnáním údajů z univerzálního zkušebního zdroje a z korelace. Výhodou metody je, že ji lze použít v celém rozsahu měření a je z ní získán ucelený přehled o růstu důlků. Nevýhodou je fakt, že nezahrnuje vznik důlků v místě uložení na podpěrách. Skutečná velikost promáčknutého důlku je tedy ve skutečnosti větší, než diagram ukazuje. F je velikost působící síly, h_D je hloubka promáčknutého důlku.

Rozsah sil, na kterém je růst důlku zkoumán, byl zvolen podle nejvyšší vypočtené síly pro vznik plastického kloubu (výpočet se zpevněním se zanedbáním smyku). Na tomto rozsahu je na obrázku 4.14 patrné, že s rostoucí

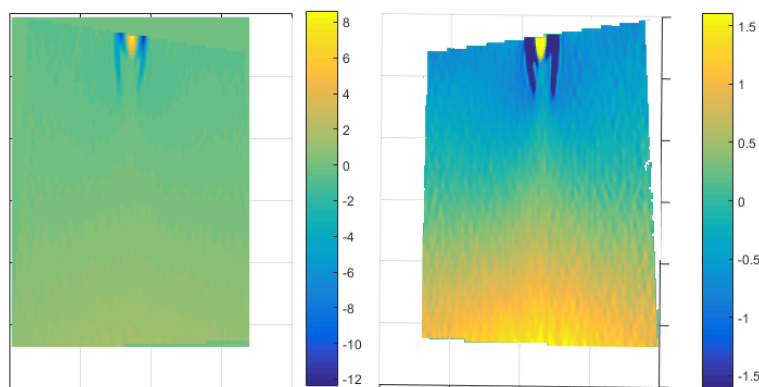
4.3. Posouzení zvýšených lokálních deformací



Obrázek 4.13: Redukovaná napětí v okamžiku předpokládané mezi elasticity



Obrázek 4.14: Růst hloubky dŕlku v závislosti na působící síle



Obrázek 4.15: Deformace v místě působení síly

silou se důlek zvětšuje lineárně a závislost lze vyjádřit funkcí vzniklou proložením přímky (4.2).

$$h_D = 3,915 \cdot 10^{-5} F \quad (4.2)$$

Deformace vzniklé v okolí důlku jsou velmi výrazné a svojí hodnotou výrazně převyšují všechny ostatní deformace na nosníku. To je ilustrováno na obrázku 4.15, kde jsou v levé části vyznačena poměrná prodloužení ve směru souřadnice x , a barevná škála odpovídá celkovému rozsahu hodnot. Pravá část zobrazuje stejný soubor dat, jediný rozdíl je v omezení rozsahu barevné stupnice na všechny hodnoty, které se vyskytují mimo tuto oblast poblíž důlku. Poměrné deformace jsou uvedeny v jednotkách mm/m .

Tyto lokální deformace jsou možným vysvětlením nižší skutečné únosnosti nosníku, než jaká byla vypočtena dostupnými způsoby výpočtu.

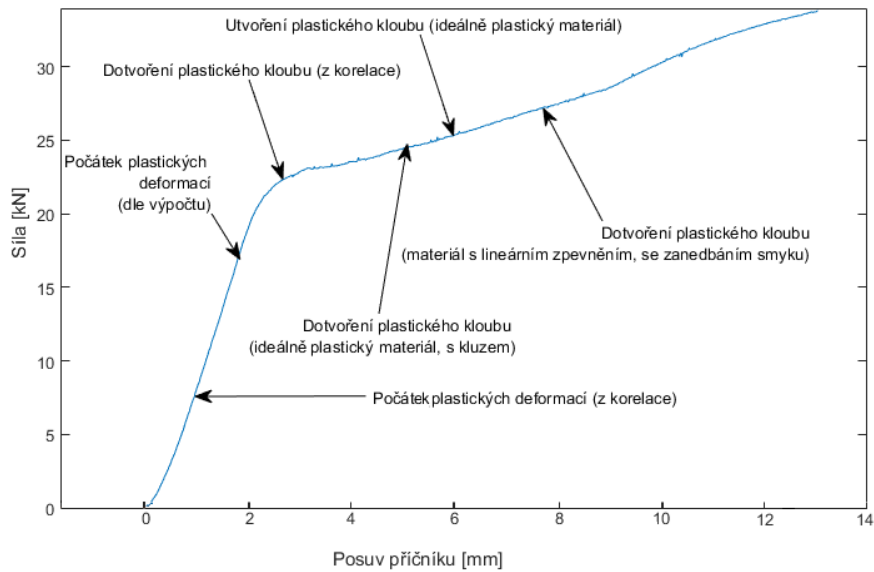
4.4 Výsledné porovnání jednotlivých metod

Jak bylo ukázáno a zdůvodněno v minulých podkapitolách, všechny použité analytické způsoby výpočtu se ve výsledku odlišují od naměřených hodnot, a předpokládají vznik plastického kloubu při větší síle, než jaká byla ve skutečnosti zapotřebí. Rozdíly mezi výslednými kritickými silami vypočtenými z jednotlivých metod jsou zobrazeny spolu se skutečnými hodnotami na diagramu 4.16.

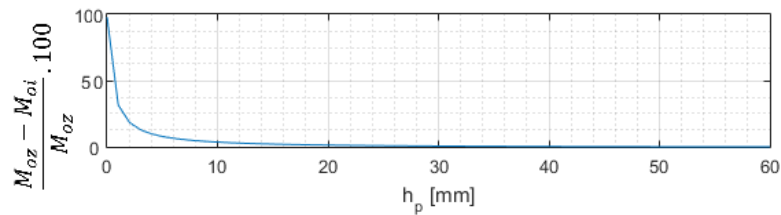
Pro výpočty, jenž zanedbávají vliv smykových napětí, má velikost modulu zpevnění vliv na velikost výsledné kritické síly pro vznik plastického kloubu. Rozdíl v této síle je 2,3 kN mezi výpočtem se zpevněním a bez něj.

Jiná situace oproti tomu nastává, když do výpočtu napětí jsou zahrnuta smyková napětí od posouvající síly. Rozdíl u výpočtu se zpevněním a bez zpev-

4.4. Výsledné porovnání jednotlivých metod



Obrázek 4.16: Diagram $F-v$ s vyznačením výsledků měření a výpočtů



Obrázek 4.17: Procentuální vyjádření rozdílu mezi výpočtem momentu se zpevněním a bez zpevnění

nění je minimální, kritické síly jsou 24,66 kN a 24,7 kN. Podobnost těchto výsledků lze vysvětlit na diagramu 4.9. Diagram zobrazuje závislost ohybového momentu a velikosti elastického jádra pro zkoumaný nosník. Pro nižší velikosti plastického obalu a momentu se ideálně plastický materiál a materiál se zpevněním téměř neliší, rozdíl nastává, když se elastické jádro svou velikostí začne blížit nule. V takové situaci je ke zplastizování potřeba větší moment u modelu se zpevněním. Na obrázku 4.17 je zobrazena závislost rozdílu momentu ideálně plastického materiálu a materiálu se zpevněním v procentech z velikosti momentu u materiálu se zpevněním na velikosti elastického jádra.

Dalším jevem, který mohl přispět k dřívějšímu zplastizování nosníku je ztráta příčné a torzní stability nosníku. Její projev bylo možné sledovat v podobě vybočení nosníku v průběhu zatěžování ve směru osy z . K této ztrátě stability došlo i přes konstrukci přípravku, která měla vybočení zabránit. Jak bylo popsáno v kapitole o měření 3D korelací, deformace vybočením a zkroucením byly trvalé a po odlehčení se nosník v ose z nevrátil do původní polohy.

Závěr

V této práci byl zkoumán vznik plastického kloubu při tříbodém ohybu nosníku. Výsledné hodnoty mezní síly potřebné k vytvoření plastického kloubu získané rozбором deformací získaných měřeními digitální korelací obrazu a vypočtené analyticky se značně rozcházel. K vytvoření plastického kloubu docházelo ve skutečnosti dříve, než výpočty předpokládaly. Nejblíže skutečné hodnotě se přiblížil výpočet s uvažováním smykových napětí vzniklých vlivem posouvající síly.

Možnou příčinou tohoto rozdílu jsou výrazné lokální deformace, které vznikají v blízkosti místa silového působení od zkušebního stroje a podpěr. Plastické deformace v těchto místech začínají vznikat již při poloviční síle, než jakou předpokládá výpočet pro vznik plastických deformací. Silové působení je v místě dotyku koncentrováno na velmi malou plochu, a to vede k těmto deformacím. Volba nosníku s větší plochou dotyku (širší nosník obdélníkového průřezu, případně profilu I nebo T) by vedla k nižšímu výskytu těchto deformací. Projevila se rovněž ztráta stability nosníku, a to vybočením nosníku ve směru osy z a zkroucením kolem osy x .

Uplatnění nalézá studium plastických kloubů a jejich vzniku v případě analýzy složitějších rámců, obzvláště ve stavebnictví. Kromě vlivu zpevnění probíhá výzkum například v oblasti velkých deformací, kde se materiál chová nelineárně, a dochází ke kombinovaným namáháním včetně krutu a vzpěru [14], [15].

Literatura

- [1] MICHALEC, J. *Pružnost a pevnost I*. České vysoké učení technické v Praze, 2010, ISBN 8001042243.
- [2] PLÁNIČKA, F.; KULIŠ, Z. *Základy teorie plasticity*. Praha: ČVUT, first edition, 2004, ISBN 9788001028766.
- [3] SERVÍT, R.; DOLEŽALOVÁ, E.; et al. *Teorie pružnosti a plasticity I*. Praha: SNTL, 1 edition, 1981.
- [4] CRHA, M.; ŠMIŘÁK, S.; et al. *Pružnost a plasticita I*. Brno: Ediční středisko Vysokého učení technického, first edition, 1993, ISBN 8090059031.
- [5] YONEYAMA, S. Basic principle of digital image correlation for in-plane displacements and strain measurement [online]. *Advanced Composite Materials*, volume 25, 2016: pp. 105–123.
- [6] KHOO, S.-W.; KARUPPANAN, S.; et al. A review of surface deformation and strain measurement using two-dimensional digital image correlation. *Metrology and measurement systems*, volume 23, 2016: pp. 461–480.
- [7] ČSN EN ISO 6892-1 42 0310. Úřad pro technickou normalizaci metrologii a státní zkušebnictví. *Kovové materiály - Zkoušení tahem - Část 1: Zkušební metoda za pokojové teploty*. 02 2010.
- [8] VALENTA, F. *Pružnost a pevnost III*. ČVUT, 2002, ISBN 80-01-01278-6.
- [9] PLUHAŘ, J. *Nauka o materiálech*. Praha; Bratislava: Nakladatelství technické literatury, first edition, 1989.
- [10] PAN, B. et al. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review. *Measurement Science and Technology*, volume 41, no. 6, 2009.

- [11] Dantec Dynamics GmbH. *ISTRA 4D Software Manual Q-400 System*. Second edition, 2012.
- [12] LEINVEBER, J.; VÁVRA, P. *Strojnické tabulky. Úvaly*: Albra, fifth edition, 2011, ISBN 978-80-7361-081-4.
- [13] ČSN 41 1373. Český normalizační institut. *Ocel 11 373*. 05 1994.
- [14] ALHASAWI, A.; HENG, P. et al. Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges. *Engineering Structures*, volume 151, 2017: pp. 188–205.
- [15] DAVIES, J. M. Strain hardening, local buckling and lateral-torsional buckling in plastic hinges. *Journal of Constructional Steel Research*, volume 62, no. 1, 2006: pp. 27–34.

Seznam použitých zkratk a symbolů

A průřez nosníku [mm^2]

A_{80} tažnost [%]

b šířka nosníku [mm]

E Youngův modul pružnosti [MPa]

E_z modul zpevnění [MPa]

F působící síla [N]

G modul pružnosti ve smyku [MPa]

h výška nosníku [mm]

h_D hloubka důlku vzniklého v místě působení síly [mm]

h_p výška elastického jádra [mm]

J_z kvadratický moment průřezu [mm^4]

n, k konstanty použité při aproximaci pracovního diagramu

L_0 počáteční měřená délka (zkouška tahem) [mm]

L_u konečná měřená délka po lomu (zkouška tahem) [mm]

M_o ohybový moment [Nmm]

$M_{o\ ep}$ ohybový moment v elasticko-plastickém stavu [Nmm]

A. SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

M_p ohybový moment přenášený plastickým obalem [Nmm]

R_e mez kluzu [MPa]

R_m mez pevnosti [MPa]

R_p smluvní mez kluzu [MPa]

S statický moment odříznuté části [mm³]

S_0 počáteční průřezová plocha zkoušené délky [mm²]

S_u minimální průřezová plocha po lomu [mm²]

T posouvající síla [N]

u posuv [mm]

v posuv [mm]

x souřadnice [mm]

y souřadnice [mm]

z souřadnice [mm]

Z kontrakce [%]

γ zkos [-]

ε deformace prodloužení [-]

ε_k deformace odpovídající mezi kluzu [-]

η posuv ve směru souřadnice y [mm]

η_k polovina výšky elastického jádra [mm]

λ_{tv} měrná deformační energie [MPa]

ν Poissonovo číslo [-]

ξ posuv ve směru souřadnice x [mm]

σ normálové napětí, MPa [MPa]

σ_0 konstanta, použitá při aproximaci pracovního diagramu [MPa]

$\sigma_{1,2,3}$ hlavní napětí [MPa]

σ_k mez kluzu [MPa]

σ_{Pt} mez pevnosti [MPa]

σ_{red} redukované napětí [MPa]

τ smykové napětí [MPa]

τ_k mez kluzu pro smyk [MPa]

τ_{kr} kritické skluzové napětí (na úrovni krystalové mřížky) [MPa]

τ_{max} kritická hodnota smykového napětí [MPa]