ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta stavební
Katedra matematiky

Matematické modely proudění nestlačitelné tekutiny s různými typy okrajových podmínek

Mathematical models of flow of incompressible fluid with various types of boundary conditions

DISERTAČNÍ PRÁCE

Ing. arch. Jitka Píšová

Doktorský studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Matematika ve stavebním inženýrství

Školitel: doc. RNDr. Petr Kučera, CSc.

Praha, 2018

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych touto cestou poděkovala doc. RNDr. Petru Kučerovi, CSc., za odborné vedení práce, trpělivost a za čas věnovaný našim společným konzultacím. Poděkování patří také kolegům z katedry, zejména Ing. Stanislavu Olivíkovi, Ph.D., za pomoc s formálními náležitostmi práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině a svým přátelům za podporu a toleranci během mého studia.

Tato práce byla podpořena granty Studentské grantové soutěže: SGS12/100/OHK1/2T/11, SGS14/005/OHK1/1T/11, SGS15/124/OHK1/2T/11 a SGS17/116/OHK1/2T/11.

PROHLÁŠENÍ

Ing. arch. Jitka Píšová

Matematické modely proudění nestlačitelné tekutiny s různými typy okrajových podmínek

Prohlašuji, že jsem uvedenou disertační práci vypracovala samostatně pod vedením školitele doc. RNDr. Petra Kučery, CSc.
Použitou literaturu a další materiály uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze dne 30.8.2018 ……………………………….

podpis

ABSTRAKT

Předložená disertační práce se zabývá nejznámějšími matematickými modely proudění vazké nestačitelné tekutiny s různými typy okrajových podmínek. Úvodní část popisuje vývoj studované problematiky a shrnuje její současný stav.

Práce se dále zabývá systémem stacionárních Boussinesqových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami. Definuje Banachův prostor X možných řešení úlohy a Banachův prostor Y možných dat úlohy. Dále zavádí operátor $\mathcal{N}: X \to Y$ a pomocí operátorové rovnice formuluje problém. Jedním z výsledků této části je, že množina M_R všech funkcí, ve kterých je Frechetova derivace prostá a na, je hustá a otevřená a doplňková množina M_C je slabě uzavřená.

Poslední část je zaměřena na systém nestacionárních Navierových-Stokesových rovnic s okrajovými podmínkami Navierova typu na omezené hladké konvexní oblasti a na nestacionární Navierovu-Stokesovu úlohu s Navierovými okrajovými podmínkami na omezené oblasti s dostatečně hladkou hranicí. V textu je dokázána podmínka pro lokální existenci silných řešení daných systémů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Navierovy-Stokesovy rovnice, Boussinesqovy rovnice, smíšené okrajové podmínky, okrajové podmínky Navierova typu, Navierovy okrajové podmínky, kvalitativní vlastnosti, silné řešení

ABSTRACT

The presented dissertation thesis deals with the most well-known mathematical models of flow of viscous incompressible fluid complemented by various types of boundary conditions. The introductory part describes the development of the studied problem and summarizes its current state.

The thesis proceeds with the system of steady Boussinesq equations with mixed boundary conditions. The text defines Banach space X of „possible“ solutions of this problem and the Banach space Y of its data. The problem is formulated in the terms of operator equations by the means of operator $\mathcal{N}: X \to Y$. One of the results of this section is that the set $M_R \subseteq X$ where the Frechet derivate of operator $\mathcal{N}$ is one-to-one and onto, is dense and open and the complementary set M_C is weakly closed.

In the last part of the thesis, we focus on the system of non-steady Navier-Stokes equations with boundary conditions of Navier´s type on a bounded smooth convex domain and on the system of non-steady Navier-Stokes equations with Navier´s boundary conditions on a bounded domain with a sufficiently smooth boundary. As an original contribution, we prove a condition for the local in time existence of strong solutions of the given systems.

KEYWORDS

Navier-Stokes equations, Boussinesq equations, mixed boundary conditions, Navier´s type boundary conditions, Navier´s boundary conditions, regularity, strong solutions

OBSAH

KAPITOLA 1

ÚVOD

Předložená disertační práce se skládá ze dvou hlavních částí. Z první části, která nás seznamuje s danou problematikou, z části obsahující texty připravené k prezentaci a příspěvku publikovaného ve sborníku konference Aplimat 2018 (indexovaný v databázi Scopus).

Úvodní část odpovídá první kapitole práce, shrnuje základní poznatky o Navierových-Stokesových rovnicích a jim příbuzných Boussinesqových rovnicích, jejich stručný vývoj a vybrané výsledky této teorie a závěrečné shrnutí. Je rozdělena na tři části - podkapitoly.

V první části kapitoly je popsán matematický model proudění vazké nestlačitelné tekutiny pomocí systému Navierových-Stokesových rovnic včetně počátečních a okrajových podmínek. Jsou zde vysvětleny základní pojmy a jednotlivé veličiny uvedených rovnic. V druhé části této podkapitoly jsou definovány vybrané prostory a pojmy jako slabé řešení rovnic, silné řešení rovnic a řešení splňující energetickou rovnost.

Druhá podkapitola je věnována historickému vývoji a představuje hlavní výsledky studované matematické teorie Navierových-Stokesových rovnic. Tato podkapitola je rozdělena na tři části. První část je zaměřena na nestacionární Navierovu-Stokesovu úlohu s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou. Navíc jsou v ní vysvětleny také pojmy regulární bod, singulární bod a "suitable weak solution". Druhá část obsahuje shrnutí základních kvalitativních vlastností řešení Navierových-Stokesových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami na pevně daném časovém intervalu. Zabýváme se zde počátečně-okrajovou i periodickou úlohou. Opět vycházíme z již publikovaných poznatků. Definujeme zde pojmy prostor řešení úlohy, prostor dat úlohy a operátor, který oba prostory spojuje. Poslední část se týká existence řešení Navierových-Stokesových rovnic a Boussinesquových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami pro libovolná data na nějakém nespecifikovaném časovém intervalu $(0, \delta)$.

Třetí část první kapitoly shrnuje průběžně uvedené otevřené otázky ze studované teorie a uvádí tzv. problémy milénia.

Druhá část práce je složena z již publikovaného příspěvku na konferenci Aplimat 2018 a prací připravených k pozdější publikaci. Jedná se o texty z teorie Navierových-Stokesových rovnic a Boussinesquových rovnic. Každý článek je samostatně uveden a označen jako samostatná kapitola.

Jednotlivé kapitoly předložené práce tvoří relativně samostatné celky, proto má každá část vlastní značení a seznam citované literatury.

1.1

MATEMATICKÉ MODELY PROUDĚNÍ VAZKÉ NESTLAČITELNÉ TEKUTINY

1.1.1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC

Základním uvažovaným modelem předložené práce je systém Navierových-Stokesových rovnic. Jedná se o nejznámější matematický model proudění vazké nestlačitelné tekutiny. Zadaný systém rovnic řešíme na množině Q_T. Množina Q_T je časoprostorový válec

$$Q_T = \Omega \times (0, T),$$

kde Ω je otevřená oblast vyplněná proudící tekutinou, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nejčastěji volíme $n = 2$ nebo $n = 3$. Hranice vybrané oblasti musí být dostatečně hladká, například lipschitzovská. $(0, T)$ označuje časový interval.

Soustava Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu (zkráceně nestlačitelné Navierovy-Stokesovy rovnice) je odvozena ze zákona zachování hybnosti proudící tekutiny. Předpokládáme-li pro jednoduchost, že $\rho \equiv 1$ můžeme Navierovy-Stokesovy rovnice vyjádřit buď ve vektorovém tvaru následující rovnicí

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla \mathcal{P} = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

nebo ve tvaru

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \,(\frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla \mathcal{P} \,=\, \boldsymbol{f}, \tag{2}$$

kde v rovnici (1) a (2) symbolem $\boldsymbol{u}$ označujeme vektor rychlosti proudící tekutiny a platí $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)$. Jednotlivé složky $u_i = u_i(\boldsymbol{x}, t)$ jsou funkcemi prostorových proměnných $\boldsymbol{x} = [x_1, ...x_n]$ a časové proměnné t. Pro jednoduchost můžeme prostorovou proměnnou vynechávat a psát jen $\boldsymbol{u}(t)$ místo $\boldsymbol{u}(\cdot\ , t)$. Symbol $\mathcal{P}$ reprezentuje tlak, $\boldsymbol{f}$ představuje zadanou objemovou sílu (vztaženou k jednotce objemu a hmoty). Ve velkém množství úloh často předepisujeme $\boldsymbol{f} \equiv 0$. Symbolem ν značíme kinematický koeficient vazkosti tekutiny. Jedná se o kladnou konstantu, kterou vyjádříme vztahem $\nu = \mu/\rho$ (μ je dynamický koeficient vazkosti, ρ je hustota). Ve zde uvedeném matematickém modelu předpokládáme, že hustota proudící tekutiny je konstantní, $\rho \equiv 1$ a viskozita ν nezávisí na teplotě. V rámci zjednodušení budeme v celé úvodní kapitole předpokládat, že $\nu = 1$.

Vektorová Navierova-Stokesova rovnice je soustava tří rovnic. Neznámými funkcemi v této soustavě jsou tři složky rychlosti $\boldsymbol{u}$ a tlak $\mathcal{P}$. Neznámých je více než rovnic, z tohoto důvodu je nutné soustavu (1), resp. soustavu (2) doplnit o další rovnici. Navierovy-Stokesovy rovnice doplníme o rovnici kontinuity.

Rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmoty v diferenciálním tvaru pro proudící tekutinu. Proudění modelujeme pro nestlačitelné tekutiny, tj. pro tekutiny, jejichž jakákoliv libovolná část zachovává v čase svůj objem a hustota tekutiny je kladná konstanta. V matematických modelech nestlačitelného proudění rovnici kontinuity někdy nazýváme podmínkou nestlačitelnosti, píšeme ji ve tvaru

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} \,=\, 0. \tag{3}$$

Zadanou soustavu rovnic (1) a (3), resp. (2) a (3) musíme doplnit o vhodné počáteční a okrajové podmínky. Ve většině případů předepisujeme obě podmínky a řešíme tak počátečně-okrajovou úlohu.

Součástí počátečně-okrajových úloh je počáteční podmínka pro rychlost, která má tvar

$$\boldsymbol{u}(.\,,0) = \boldsymbol{\gamma}, \tag{4}$$

kde γ je funkce předepsaná na oblasti Ω.

Okrajové podmínky můžeme na hranici oblasti Ω předepsat různé, lze předepsat i na různých částech oblasti Ω různé typy okrajových podmínek. V textu zmíníme jen vybrané nejznámější a nejvýznamnější příklady speciálních případů okrajových podmínek. Některé využijeme v dalších částech práce.

Nejčastější podmínkou, která se předepisuje v příspěvcích zabývajících se teorií nestlačitelných Navierových-Stokesových rovnic je homogenní Dirichletova okrajová podmínka pro rychlost

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), \tag{5}$$

případně odpovídající nehomogenní varianta. Tato okrajová podmínka z fyzikálního hlediska vyjadřuje ulpívání nestlačitelné tekutiny na stěně.

Mezi další okrajové podmínky, které na hranici nebo její části předepisujeme, patří okrajové podmínky

$$\nu \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{n} - \mathcal{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

nebo

$$\frac{1}{2}\nu \left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right] \cdot \boldsymbol{n} - \mathcal{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{7}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je vnější jednotková normála k hranici oblasti a $\boldsymbol{\sigma}$ je předepsaná hodnota.

Okrajovou podmínku (6) dostaneme formální integrací per partes vektorové rovnice (1), zatímco okrajovou podmínku (7) dostaneme zintegrováním per partes vektorové rovnice (2).

Z fyzikálního hlediska nám výraz na levé straně podmínky (7) říká, jaká je normálová složka tenzoru deformace. Podmínky (6) a (7) se předepisují na části hranice $\partial\Omega$, která odpovídá vstupu a výstupu kanálu.

Mezi významné a často používané okrajové podmínky, které předepisujeme na hranici oblasti, patří Navierova okrajová podmínka

$$\boldsymbol{u} \cdot n = 0, \tag{8}$$

$$\left[\mathbb{T}(\boldsymbol{u}) \cdot n\right]_\tau + \gamma\, \boldsymbol{u} = 0, \tag{9}$$

kde z rovnice $\boldsymbol{u} \cdot n = 0$ vyplývá, že tekutina klouže po povrchu. $\mathbb{T}(\boldsymbol{u})$ označuje tenzor deformace, resp. $\left[\mathbb{T}(\boldsymbol{u}) \cdot n\right]_\tau$ popisuje tečnou složku tenzoru deformace. Tenzor deformace má tvar

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{u})_{i,j} = \frac{1}{2}\nu\, \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x_i}\right),$$

kde $i, j = 1, ..., n$ a kde γ označuje koeficient tření mezi tekutinou a stěnou.

Poslední okrajovou podmínkou, kterou zde uvedeme a kterou budeme potřebovat v další části práce spolu s předchozí Navierovou okrajovou podmínkou, je okrajová podmínka Navierova typu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot n &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), & (10) \\ rot\ \boldsymbol{u} \times n &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), & (11) \end{aligned}$$

kde z rovnice (10) opět vyplývá, že tekutina klouže po povrchu.

Pokud předpokládáme, že koefient γ označující tření mezi tekutinou a stěnou je nula a zakřivení hranice oblasti je zanedbatelné, potom je okrajová podmínka Navierova typu (11) ekvivalentní s Navierovou okrajovou podmínkou (9).

Kromě počátečně-okrajové úlohy se můžeme zabývat časově periodickou úlohou s periodou T_{per}. V tomto případě je počáteční podmínka (4) nahrazena podmínkou

$$\boldsymbol{u}(.\ ,0) = \boldsymbol{u}(.\ ,T_{per}). \tag{12}$$

Klasickým řešením úlohy (1), (3), (4) a (5), resp. (2), (3), (4) a (5) je dvojice funkcí $(\boldsymbol{u}, p)$, kde $\boldsymbol{u}$ je vektorová funkce spojitá na $\overline{\Omega} \times (0,T)$ a má na $\Omega \times (0,T)$ spojité druhé parciální derivace podle prostorových proměnných a první parciální derivaci podle času a kde p má na $\Omega \times (0,T)$ spojité první parciální derivace podle prostorových proměnných.

1.1.2 SLABÉ A SILNÉ ŘEŠENÍ NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC

V této části práce se budeme věnovat hlavně slabému a silnému řešení Navierovy-Stokesovy úlohy (1), (3), (4) a (5). Také zde uvedeme některé známé výsledky a věty týkající se řešení úloh (1), (3), (4) a (5), případně (1), (3) a (4). Další vybrané známé výsledky budou připomenuty a shrnuty v následujících částech textu.

Nejprve budeme definovat oblast Ω. Předpokládejme, že Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^3$ s hranicí třídy C^2 nebo $\Omega = \mathbb{R}^3$. Výrazy slabé nebo silné řešení budeme chápat jako slabé nebo silné řešení úloh (1), (3), (4) a (5), případně (1), (3) a (4). Pokud $\Omega = \mathbb{R}^n$, homogenní Dirichletova okrajová podmínka (5) přirozeně odpadá. Definice uvedené v této části se budou vztahovat na obě zmíněné situace.

Nyní zavedeme prostory funkcí, se kterými budeme pracovat a které budeme v následujícím textu potřebovat.

Označení 1 *Nechť $\mathcal{E}$ je lineární prostor, pro který platí*

$$\mathcal{E} = \Big\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^3;\ \text{supp}\ \boldsymbol{v} \subset \Omega,\ \text{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \text{ v } \Omega \Big\},$$

$$\mathcal{E}_T = \Big\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(Q_T)^3;\ \text{supp}\ \boldsymbol{v} \subset \Omega \times (0,T),\ \text{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \text{ v } Q_T \Big\}.$$

Symboly H, V, D a V^* označují tyto Banachovy prostory (H, V a D jsou navíc Hilbertovy prostory):

- prostor H je zúplnění prostoru $\mathcal{E}$ v prostoru $L^2(\Omega)^3$,
- prostor V je zúplnění prostoru $\mathcal{E}$ v prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)^3$,
- $D = V \cap W^{2,2}(\Omega)^3$,
- V^* je duální prostor k prostoru V.

Připomeňme ještě další prostory, které patří mezi Banachovy:

- Lebesgueovy prostory $L^p(\Omega)$ pro $1 \leq p \leq \infty$ s normou $||\cdot||_p$,
- Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ s normou $||\cdot||_{k,p}$,
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ prostor funkcí z uzávěru hladkých funkcí s kompaktním nosičem v Ω v normě $||\cdot||_{k,p}$.

V první definici textu vysvětlíme, co přesně budeme rozumět pod pojmem slabé řešení uvažované úlohy.

Definice 2 *Předpokládejme, že* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\, V^*)$ *a* $\boldsymbol{\gamma} \in H$. *Řekneme, že měřitelná funkce* $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\, V) \cap L^\infty(0,T;\, H)$ *je slabým řešením úlohy (1)–(5), jestliže pro všechna* $\boldsymbol{v} \in \mathcal{E}_T, \boldsymbol{v}(T) = 0$ *platí*

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nu \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \Big)\ d(\Omega)\ dt = \int_\Omega \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{v}(\,.\,,0)\ d(\Omega) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle\ dt. \tag{13}$$

Rovnici (13) nazýváme slabá formulace a získáme ji vynásobením klasické formulace (rovnice (1)) hladkou tzv. "testovací" funcí $\boldsymbol{v}$ s kompaktním nosičem a vlastnostmi shodnými jako řešení úlohy $\boldsymbol{u}$ a zintegrováním (1) pomocí per partes.

Můžeme ukázat, že slabé řešení úlohy neposkytuje o sobě automaticky informaci, zda splňuje zákon zachování energie. Proto se slabým řešením souvisí dvě energetické nerovnosti a jedna energetická rovnost. Rozlišujeme:

- slabá řešení úlohy,
- slabá řešení úlohy splňující energetickou nerovnost,

- slabá řešení úlohy splňující silnou energetickou nerovnost,
- slabá řešení úlohy splňující energetickou rovnost.

Výše uvedená slabá řešení budeme přesněji definovat v několika následujících větách.

Definice 3 *Řekneme, že slabé řešení* $\boldsymbol{u}$ *úlohy s pravou stranou* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\, H)$ *splňuje energetickou nerovnost, platí-li pro každé* $t \in (0,T)$ *nerovnost*

$$\int_{\Omega\times\{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) \ dt \leq \int_\Omega |\boldsymbol{\gamma}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} \ d(\Omega) \ dt. \tag{14}$$

Z nerovnosti je zřejmé, že energie proudící tekutiny je pouze kontrolována členy na pravé straně nerovnosti.

Slabé řešení splňující energetickou nerovnost nazýváme Leray-Hopfovo slabé řešení.

Jemnější podmínku pro slabá řešení představuje tzv. silná energetická nerovnost.

Definice 4 *Řekneme, že slabé řešení* $\boldsymbol{u}$ *úlohy s pravou stranou* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\, H)$ *splňuje silnou energetickou nerovnost, jestliže pro všechna* $t_2 \in (0,T)$*, pro skoro všechna* $t_1 \in (0,t_2)$ *a pro* $t_1 = 0$ *platí*

$$\int_{\Omega\times\{t_2\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) \ dt \leq \int_{\Omega\times\{t_1\}} |\boldsymbol{u}|^2 \ d(\Omega) + 2\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} \ d(\Omega) \ dt. \tag{15}$$

Z definice vyplývá, že slabé řešení, které splňuje silnou energetickou nerovnost, splňuje také energetickou nerovnost.

Splnění energetické rovnosti, a tím i splnění zákona zachování energie, je ještě silnějším požadavkem kladeným na slabé řešení. Tento problém patří mezi dosud otevřené otázky, a to za jakých podmínek pro slabé řešení $\boldsymbol{u}$ lze energetickou nerovnost nahradit energetickou rovností.

Definice 5 *Řekneme, že slabé řešení $\boldsymbol{u}$ úlohy s pravou stranou $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\,H)$ splňuje silnou energetickou rovnost, jestliže pro všechna $t_2 \in (0,T)$ a pro skoro všechna $t_1 \in (0,t_2)$ platí*

$$\int_{\Omega\times\{t_2\}} |\boldsymbol{u}|^2 \; d(\Omega) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \; d(\Omega) \; dt = \int_{\Omega} |\boldsymbol{\gamma}|^2 \; d(\Omega) + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} \; d(\Omega) \; dt. \quad (16)$$

Z definice opět vyplývá, že řešení, které splňuje rovnici (16), splňuje zároveň nerovnice (15) a (14).

V poslední definici této kapitoly vymezíme pojem silné řešení. Lze ukázat, že každé silné řešení splňuje silnou energetickou rovnost (rovnici (16)).

Definice 6 *Nechť $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\,H)$, $\boldsymbol{\gamma} \in V$ a $\boldsymbol{u}$ je slabým řešením úlohy (1), (3), (4) a (5). Řekneme, že $\boldsymbol{u}$ je silným řešením, je-li navíc $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\,D) \cap L^\infty(0,T;\,V)$ a $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \in L^2(0,T;\,H)$.*

Nyní zmíníme ještě jednu vlastnost slabého řešení. Budeme ji potřebovat v dalším textu.

Poznámka 7 *Předpokládejme, že $G \subset Q_T$ je libovolná množina. Dále označme $G_T = \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega;\; (\boldsymbol{x},t) \in G\right\}$ pro $t \in (0,T)$. Také předpokládejme, že $p,q \in \mathbb{R}$ a platí $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$. Symbolem $L^{p,q}(G)^3$ označujeme množinu všech měřitelných funkcí $\phi : \mathcal{D}(\phi) \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{D}(\phi)$ je definiční obor ϕ, $G \subset \mathcal{D}(\phi)$ a ϕ jako libovolná měřitelná funkce splňuje podmínku*

$$\left(\int_0^T \left(\int_{G_t} |\phi(.,t)|^q \;\; d(\Omega)\right)^{p/q} \;\; dt\right)^{1/p} < \infty,$$

je-li $p,\ q < \infty$ *a*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \left(\int_{G_t} |\phi(.,t)|^q \;\; d(\Omega)\right)^{1/q} < \infty,$$

je-li $p = \infty$.

Symbolem $L^{p,q}(G)$ *značíme množinu všech takových funkcí* ϕ *a symbolem* $L^{p,q}(G)^3$ *množinu všech funkcí* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, *kde* $u_1, u_2, u_3 \in L^{p,q}(G)$. *Je-li* $p = q$, *píšeme* $L^p(G)$, *resp.* $L^p(G)^3$ *místo* $L^{p,p}(G)$, *resp.* $L^{p,p}(G)^3$.

Na závěr této části uvedeme ještě důležitou vlastnost silných řešení.

Věta 8 *Nechť* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\,H)$, $\boldsymbol{\gamma} \in V$ *a* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (3), (4) a (5), případně (1), (3) a (4). Nechť* p *a* q *jsou reálná čísla, taková, že* $p \geq 2$, $3 < q \leq \infty$ *a* $2/p + 3/q \leq 1$. *Nechť dále* $\boldsymbol{u} \subset L^{p,q}(Q_T)$. *Potom* $\boldsymbol{u}$ *je silným řešením úlohy (1), (3), (4) a (5), případně (1), (3) a (4).*

1.2

HLAVNÍ VÝSLEDKY A NEJZNÁMĚJŠÍ OTEVŘENÉ PROBLÉMY MATEMATICKÉ TEORIE NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC

1.2.1 VYBRANÉ VÝSLEDKY NESTACIONÁRNÍ ÚLOHY V $\mathbb{R}^3$ S HOMOGENNÍ DIRICHLETOVOU OKRAJOVOU PODMÍNKOU

Základní pojmy matematické teorie Navierových-Stokesových rovnic máme definovány v předchozí části. V této kapitole shrneme hlavní dosažené výsledky a nejznámější otevřené problémy studované teorie.

První zmínka o soustavě rovnic (1) byla v roce 1822 od francouzského inženýra C.-L. Naviera. Jednalo se o zobecnění Eulerových rovnic pro případ proudění viskózní tekutiny. Tento model nebyl ve své době přijat kvůli způsobu odvození. Další způsob odvození ukázal po roce 1845 britský matematik a fyzik G. G. Stokes. Systém rovnic odvodil na základě představ mechaniky kontinua, navíc také odvodil i rovnice pro nestlačitelné proudění.

J. Leray formuloval několik problémů. Některé sám vyřešil (např. řešitelnost Cauchyovy úlohy pro $\Omega = \mathbb{R}^2$ a $\Omega = \mathbb{R}^3$), jiné na vyřešení čekají dodnes. Roku 1934 publikoval tento francouzský matematik první zásadní výsledek týkající se teorie Navierových-Stokesových rovnic. Ve své práci [28] zkonstruoval důkaz, že existuje slabé řešení úlohy (1), (3) a (4) pro $\Omega = \mathbb{R}^3$ a pro počáteční podmínku $\boldsymbol{\gamma} \in H$. Toto slabé řešení navíc splňuje energetickou nerovnost. On sám toto řešení nazval "solution tourbulante".

E. Hopf v roce 1950 (viz [11]) dokázal existenci slabého řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) pro omezenou oblast Ω s dostatečně hladkou hranicí. Toto slabé řešení splňuje rovněž energetickou nerovnost.

Existence slabého řešení, které splňuje energetickou nerovnost pro libovolnou oblast, pro počáteční rozložení rychlosti $\boldsymbol{\gamma} \in H$ a pro hladkou pravou stranu $\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\, H)$), byla již také dokázána např. v pracích J. Heywooda (viz [10]), K. Masudy (viz [31]) nebo R. Temama (viz [43]).

Pro hladká data je existence slabého řešení úlohy dokázána. Naopak existence slabého řešení splňujícího energetickou rovnost dosud není známa. V tomto směru jsou dokázány výsledky pouze za určitých dodatečných předpokladů. Uvedeme zde některé tyto výsledky.

J. L. Lions ukázal ve své práci [29] výsledek pro vztah mezi slabým řešením a energetickou rovností.

Věta 9 *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) nebo (1), (3) a (4), které navíc náleží do třídy $L^{4,4}(Q)^3$. Potom $\boldsymbol{u}$ splňuje energetickou rovnost (16).*

J. Serrin (viz [39]) výsledek ještě rozšířil a dokázal následující.

Věta 10 *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) nebo (1), (3) a (4), které navíc náleží do třídy $L^{p,q}(Q)^3$, kde $2/p + 3/q \leq 1$, $p \in [2,\infty)$ a $q \in (3,\infty]$. Potom $\boldsymbol{u}$ splňuje energetickou rovnost (16).*

Dalším problémem, kterým se matematikové zabývají, je otázka jednoznačnosti slabého řešení. I přes jednotlivé věty a částečné výsledky zůstává tato otázka jednoznačnosti stále nevyřešena. Jedná se o další otevřený problém, kde známe pouze některé dílčí výsledky. Nejvýznamnější dosud známé výsledky publikovali ve svých pracích J. Serrin (viz [39]), K. Masuda (viz [31]) a H. Kozono a H. Sohr (viz [20]). Vybrané dílčí výsledky uvedeme v další části textu.

G. Prodi (viz [35]) a J. L. Lions (viz [30]) prezentovali následující výsledek.

Věta 11 *a) Existuje nejvýše jedno slabé řešení* $\boldsymbol{u}$ *úlohy (1), (3), (4) a (5) v omezené oblasti* Ω*, které navíc náleží do třídy* $L^{p,q}(Q)^3$*, kde* $2/p + 3/q \leq 1$*,* $p \in [2, \infty)$ *a* $q \in (3, \infty]$*.*

b) Existuje nejvýše jedno slabé řešení $\boldsymbol{u}$ *úlohy (1), (3) a (4) pro* $\Omega = \mathbb{R}^3$*, které navíc náleží do třídy* $L^{p,q}(Q)^3$*, kde* $2/p + 3/q = 1$*,* $p \in [2, \infty)$ *a* $q \in (3, \infty]$*.*

Všimněme si, že slabá řešení uvedená ve větě (11) jsou vlastně silnými řešeními. Věta (11) tedy říká, že pro daná data existuje nejvýše jedno silné řešení. J. Serrin dokázal v [39] následující větu.

Věta 12 *Předpokládejme, že* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{w}$ *jsou řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{\gamma}$ *a pravou stranou* $\boldsymbol{f}$*. Dále předpokládejme, že* $\boldsymbol{u}$ *splňuje energetickou nerovnost a* $\boldsymbol{w} \in L^{p,q}(Q)^3$*, kde* $2/p+3/q \leq 1$*,* $p \in [2, \infty)$*,* $q \in (3, \infty]$*. Potom* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$*.*

Na tento výsledek navázali H. Kozono a H. Sohr. Ještě více ho rozšířili a dokázali za předpokladu, že $\boldsymbol{w} \in L^{\infty,3}(Q)^3$ (viz [20]).

Věta 13 *Předpokládejme, že* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{w}$ *jsou řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{\gamma}$ *a pravou stranou* $\boldsymbol{f}$*. Dále předpokládejme, že* $\boldsymbol{u}$ *splňuje energetickou nerovnost a* $\boldsymbol{w} \in L^{\infty,3}(Q)^3$*. Potom* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$*.*

Vlastnostmi slabého řešení na omezené oblasti se zabývali i C. Foias a R. Teman, kteří společně dokázali velmi důležitý výsledek.

Věta 14 *Předpokládejme, že* Ω *je omezená oblast a* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (3), (4) a (5) s počátečním rozložení rychlosti* $\boldsymbol{\gamma} \in V$*, které navíc splňuje podmínku* $\boldsymbol{u} \in C([0,T]; H)$*. Potom existuje uzavřená množina* $E \subset (0,T)$*, jejíž Hausdorffova dimenze je* $\leq 1/2$ *taková, že* $\boldsymbol{u} : (0,T) \to D$ *je analytická funkce.*

Další významnou větou je tzv. Věta o struktuře (viz např. [8]).

Věta 15 *Nechť* Ω *je omezená oblast taková, že* $\partial\Omega \in C^\infty$*,* $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{0}$ *a* $\boldsymbol{u}$ *je slabé řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) na časovém intervalu* $(0,\infty)$ *splňující silnou energetickou nerovnost,* $\boldsymbol{\gamma} \in H$*. Potom existuje množina* E *tvaru* $\bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$*, kde* $l_k (k \in N)$ *jsou otevřené, navzájem disjunktní intervaly v* $(0,+\infty)$ *takové, že platí:*

a) Množina $(0,\infty)$ *-* E *má Lebesgueovu míru nula.*

b) $\boldsymbol{u}$ *je třídy* C^∞ *na* $\overline{\Omega} \times E$*.*

c) Existuje $T^* > 0$ *tak, že* $(T^*, \infty) \subset E$*.*

d) Je-li navíc $\boldsymbol{\gamma} \in V$*, potom existuje* T_1 *tak, že* $(0, T_1) \subset E$*.*

Nejznámějším otevřeným problémem teorie Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné tekutiny je otázka, zda existuje silné řešení úlohy na časovém intervalu dané délky za předpokladu, že data úlohy jsou hladká. Obecná odpověď na tuto otázku je známa zatím jen pro "dostatečně malá" vstupní data úlohy a pro některé velmi speciální tvary funkce $\boldsymbol{\gamma}$ (například tzv. Beltramiho proudění).

Již několik desetiletí se celá řada matematiků věnuje hledání silného řešení a zabývá se problémem jeho existence. Bohužel i přesto existují jen dílčí výsledky.

Příkladem uvedeného dílčího výsledku je tzv. lokální existence silného řešení. Jedná se o velmi známý výsledek, který byl popsán a dokázán např. v pracích J. Heywooda (viz [10]), O. A. Ladyženskayi (viz [27]) nebo A. A. Kiseleva a O. A. Ladyženskayi (viz [13]). Lokální existence silného řešení nám říká, že pro hladkou počáteční podmínku existuje alespoň na nějakém malém časovém intervalu silné řešení úlohy.

Zmíněný výsledek prezentujeme následující větou od A. A. Kiseleva a O. A. Ladyženskayi (viz [13]).

Věta 16 *Nechť* $\partial\Omega \in C^2$, $\boldsymbol{\gamma} \in V$ *a* $\boldsymbol{f} \in L^\infty(0,T;\, H)$. *Potom existuje* $T^* > 0$ *a právě jedno silné řešení úlohy na časovém intervalu* $(0, T^*)$.

Důkaz této věty uvedl i R. Temam v [43].

Existuje i řada výsledků o tzv. částečné regularitě. Než se budeme věnovat podrobněji otázce hladkosti řešení úlohy pro zadaná hladká data, musíme definovat následující pojmy - regulární a singulární bod.

Věta 17 *Řekneme, že bod* $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ *je vnitřní regulární bod řešení* $\boldsymbol{u}$, *jestliže existuje otevřené časoprostorové okolí* Q' *bodu* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *takové, že* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(Q')^3$.

Bod, který není vnitřní regulární, nazveme vnitřním singulárním.

Věta 18 *Pokud* $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q_T$ *není vnitřní regulární bod, řekneme, že* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *je vnitřním singulárním bodem řešení* $\boldsymbol{u}$.

Množinu vnitřních singulárních bodů $\boldsymbol{u}$ budeme nadále značit S. Lze ukázat, že řešení je regulární právě tehdy, když nemá žádný singulární bod.

Pro omezenou oblast Ω definujeme ještě pojmy regulární hraniční bod a singulární hraniční bod řešení $\boldsymbol{u}$.

Definice 19 *Nechť* $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$, $t_0 \in (0,T)$. *Řekneme, že bod* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *je regulární hraniční bod* $\boldsymbol{u}$, *jestliže existuje otevřená časoprostorová množina* $Q' \subset \mathbb{R}^4$, $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q'$ *a* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(Q_T \cap Q')$.

Definice 20 *Nechť* $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$, $t_0 \in (0,T)$. *Pokud* $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ *není regulární hraniční bod, řekneme, že* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *je singulárním hraničním bodem.*

Vlastnosti řešení na okolí vnitřních regulárních bodů obsahuje následující věta. Tento velmi důležitý výsledek dokázal J. Serrin v [38]. Jedná se o podobný výsledek jako ve Větě o regularitě řešení. V tomto případě ale platí i "lokálně".

Věta 21 *Nechť* $\boldsymbol{u}$ *je slabým řešením úlohy (1), (3), (4) a (5) nebo úlohy (1), (3) a (4). Nechť* $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q$ *a existuje otevřené časoprostorové okolí* Q' *bodu* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *tak, že* $\overline{Q'} \subset Q$ *a* $\boldsymbol{u} \in L^{p,q}(Q')$*, kde* $2/p + 3/q \leq 1$, $p \in (2, \infty)$, $q \in (3, \infty)$*. Potom* $\boldsymbol{u}$ *spolu se všemi svými derivacemi jakéhokoliv řádu vzhledem k prostorovým proměnným je třídy* $\mathcal{C}(Q')$*.*

Předpokládáme-li navíc, že $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \in \mathbf{L}^{2,p}(Q')^3$, $p > 1$*, potom všechny prostorové derivace jsou (jako funkce času) absolutně spojité a existuje funkce* $\mathcal{P}$ *tak, že (1) platí skoro všude na* Q'*.*

Pojem tzv. zobecněné řešení označuje řešení splňující některé další vlastnosti. V tomto směru jsou známy některé zajímavé výsledky. Např. J. Neustupa dokázal ve své práci [32], že zobecněné řešení $\boldsymbol{u}$, pro které platí, že $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T;\, L^3(\Omega)^3)$, pak má toto $\boldsymbol{u}$ v každém čase konečný počet singulárních bodů.

I přesto, že otázka regularity slabého řešení úlohy (1), (3), (4) a (5) nebo úlohy (1), (3) a (4) je otevřená, existují různé částečné výsledky, které jsou známy za předpokladu, že řešení náleží do určité třídy funkcí.

Další pojem, který zavedeme, je tzv. "suitable weak solution". Český překlad (vhodné slabé řešení) tohoto pojmu není obvyklý, z toho důvodu budeme pro tento pojem používat anglický název. Pojem "suitable weak solution" zavedli L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg ve svém článku [42], aby mohli studovat lokální regularitu řešení Navierových-Stokesových rovnic. Slabé řešení nemusí být "suitable weak solution".

Definice 22 *Nechť*

$$\begin{aligned} f \in L^p(Q_T), p &> \frac{5}{2}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{f} &= 0, \\ \gamma &\in H. \end{aligned}$$

Řekneme, že dvojice $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$ je "suitable weak solution" úlohy (1), (3), (4) a (5), případně úlohy (1), (3) a (4) pro $\Omega = \mathbb{R}^3$, jestliže:

1) $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\,V) \cap L^\infty(0,T;\,H), \mathcal{P} \in L^{5/4}(Q_T)$.

2) $\boldsymbol{u}, \mathcal{P}$ *jsou měřitelné funkce na* Q_T*, které řeší (1) ve smyslu distribucí.*

3) Řešení $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$ *splňuje tzv. zobecněnou energetickou nerovnost. To znamená, že pro každou nezápornou funkci* $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$ *a pro všechna* $s \in (0,T)$ *platí*

$$2\int_0^s \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \varphi \; d(\Omega) \; dt \leq \int_0^s \int_\Omega (|\boldsymbol{u}|^2 (\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\varphi) + (|\boldsymbol{u}|^2 + 2\mathcal{P})\boldsymbol{u}, \nabla\varphi) \; d(\Omega) \; dt.$$

4) $\boldsymbol{u}(t) \to \boldsymbol{u}_0$ *pro* $t \to 0_+$ *ve slabé topologii prostoru* H.

Nyní si zde uvedeme několik známých výsledků tzv. "suitable weak solution", které platí pouze za jistých podmínek.

Existenci "suitable weak solution" úlohy (1), (3), (4) a (5) dokázali L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg (viz [42]) za předpokladu určitých požadavků na počáteční rozložení rychlosti $\boldsymbol{\gamma}$. Ukázali i to, že pro celou množinu všech vnitřních singulárních bodů S tohoto řešení platí

$$\mathcal{H}^1(S) = \mathbf{0},$$

kde $\mathcal{H}^1$ je jednodimenzionální Haussdorffova míra.

Díky existenci "suitable weak solution" máme celou řadu dalších výsledků z oblasti vnitřní regularity $\boldsymbol{u}$.

Následující tři práce o "suitable weak solution" $(\boldsymbol{u}, \mathcal{P})$, které zde budou uvedeny, splňují navíc podmínku

$$\boldsymbol{u} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3.$$

H. Kozono prezentoval ve své práci [19] následující výsledek.

Věta 23 *Nechť* $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ *je singulárním bodem slabého řešení, které navíc splňuje* $\boldsymbol{u} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3$. *Potom existuje* $\varepsilon > 0$ *takové, že pro každé* $\delta > 0$ *je*

$$\lim_{t \to t_0-} \sup \int_{B_\delta(x_0)} |\boldsymbol{u}(.,t)|^3 \; d(\Omega) > \varepsilon.$$

J. Neustupa tento výsledek zesílil a ukázal ve své práci [32], že platí

$$\lim_{t \to t_0-} \inf \int_{B_\delta(x_0)} |\boldsymbol{u}(.,t)|^3 \; d(\Omega) > \varepsilon.$$

Z této poslední nerovnosti vyplývá, že pro řešení splňující $\boldsymbol{u} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3$ a pro jakékoliv pevné t je $S \cap (\Omega \times \{t\})$ konečná množina.

Na práce J. Neustupy navázali L. Escauriaza, G. Seregin a V. Šverák. Ti dokázali (viz [7] a [37]), že řešení, které splňuje $\boldsymbol{u} \in L^{\infty,3}(Q_T)^3$, nemá vnitřní singulární body.

Přestože známe spoustu dílčích výsledků, existuje zde opět několik otevřených otázek. Neumíme ani odhadnout množinu časových okamžiků, ve kterých vznikají vnitřní singulární body, ani jak tato množina vypadá (zda se jedná o množinu navzájem izolovaných bodů či ne, nebo zda je dokonce tato množina prázdná).

Postupně autoři publikovali další a další výsledky týkající se regularity řešení za dodatečných předpokladů o jedné nebo dvou složkách řešení.

J. Neustupa a P. Penel dokázali v [34] následující větu.

Věta 24 *Jestliže má "suitable weak solution" jednu rychlostní složku esenciálně omezenou na libovolné otevřené podoblasti* Q' *množiny* Q_T, *potom je* $S \cap Q' = \emptyset$.

Spolu s A. Novotným autoři uvedený výsledek ještě rozšířili. V [33] dokázali.

Věta 25 *Pokud na libovolné otevřené podoblasti* Q' *množiny* Q_T *alespoň jedna složka rychlosti náleží do třídy funkcí* $L^{p,q}(Q')$, *kde* $2/p+3/q \leq 1/2$, $p \in [4,\infty)$ *a* $q \in (6,\infty]$, *potom* $S \cap Q' = \emptyset$.

Také Z. Skalák a P. Kučera ukázali podobný výsledek (viz [24]).

Věta 26 *Pokud gradient alespoň jedné složky rychlosti náleží do* $L^{4,3}(Q')$, *potom* $S \cap Q' = \emptyset$.

Pro dvě složky rychlosti známe například výsledky od H. Chae a L. H. Choe (viz [12]), kteří ukázali následující výsledek.

Věta 27 *Pokud dvě komponenty rychlosti náleží do třídy* $L^{p,q}(Q')$, *kde* $2/p+3/q \leq 1$, $p \in [2,\infty)$ *a* $q \in (3,\infty]$, *potom* $S \cap Q' = \emptyset$.

Podobný výsledek dokázali i P. Kučera a Z. Skalák (viz [23]) a je obsažen v následující větě.

Věta 28 *Pokud gradienty rychlostí dvou složek náleží do třídy* $L^{p,q}$ *a zároveň platí* $2/p + 3/q \leq 1$, $p \in [2,\infty)$ *a* $q \in (3,\infty)$, *potom* $S \cap Q' = \emptyset$.

Ale i přes tyto a další výsledky existuje v dané oblasti spousta otevřených otázek, hlavně v souvislosti s gradienty rychlosti.

Je potřeba dodat, že všechny získané výsledky se týkají vnitřní regularity řešení. Dosud není známo, zda by řešení obsahovalo hraniční singulární body, nebo ne, za předpokladu, že tyto podmínky platí na celé oblasti Ω.

Je zde potřeba uvést ještě několik prací, které se týkají tzv. "self similar solution". Tento konkrétní tvar řešení úlohy (1), (3) a (4) navrhl J. Leray. Předpokládal, že tímto způsobem půjde dokázat existence vnitřního singulárního bodu. J. Nečas, M. Růžička a V. Šverák ale toto tvrzení vyvrátili tím, že neexistují žádná netriviální "self similar solution", která by splňovala globální energetické odhady.

1.2.2 POČÁTEČNĚ-OKRAJOVÁ A PERIODICKÁ ÚLOHA SE SMÍŠENÝMI OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

V této části se budeme zabývat základními kvalitativními vlastnostmi řešení Navierových-Stokesových rovnic, které splňují tzv. smíšené okrajové podmínky místo okrajových podmínek (5), resp. (6)/ (7)/ (8)–(9) nebo (10)–(11) předepsaných na hranici $\partial\Omega$. Opět si vysvětlíme některé důležité pojmy a budeme vycházet z významných publikací.

Nejprve znovu zavedeme oblast Ω.

Označení 29 *Oblast* Ω*:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ *je omezená oblast s hranicí* $\partial\Omega$.
- $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, *kde* Γ_1 *a* Γ_2 *jsou otevřené disjunktní podmnožiny* $\partial\Omega$.
- $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ *má nulovou* 1*-dimensionální Haussdorffovu míru, je-li* $n = 3$ *a je množinou konečně mnoha bodů, je-li* $n = 2$.

V této části textu nahradíme Dirichletovu okrajovou podmínku (5) okrajovými podmínkami (19) a (20) (viz níže) a budeme se zabývat úlohou

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla\mathcal{P} &= \boldsymbol{g} && \text{na } Q, && (17)\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 && \text{na } Q, && (18)\\
\boldsymbol{u} &= 0 && \text{na } \Gamma_1 \times (0,T), && (19)\\
-\mathcal{P}\boldsymbol{n} + \nu\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{\sigma} && \text{na } \Gamma_2 \times (0,T), && (20)\\
\boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{\gamma}, && && (21)
\end{aligned}
$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je předepsaná funkce a $\boldsymbol{n}$ označuje vnější jednotkový normálový vektor.

Podmínku (20), která je předepsaná na části hranice Γ_2, získáme odvozením pomocí integrace per-partes přímo z Navierových-Stokesových rovnic. Je to tzv. přirozená podmínka. Velké množství prací se zabývá numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic s touto podmínkou na části hranice. Takto můžeme modelovat např. výstup z kanálu.

Víme, že pokud na celé hranici předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku, existuje slabé řešení Navierovy-Stokesovy úlohy (tzn. $\Gamma_1 = \partial\Omega, \Gamma_2 = \emptyset$), které navíc splňuje energetickou nerovnost. Ne vždy je ale tato okrajová podmínka z fyzikálního hlediska vhodná. Pokud např. popisujeme proudění tekutiny v kanálu, je fyzikálně mnohem přirozenější předepsat Dirichletovu okrajovou podmínku (5) na části hranice, která odpovídá stěně kanálu. Na část hranice odpovídající vstupu a výstupu kanálu je ideální zvolit okrajové podmínky (6) nebo (7). Někdy je fyzikálně přirozenější řešit úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami. Tuto úlohu lze najít nejen v mnoha matematických publikacích, ale i v textech zabývajících se numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic a v textech, které modelují proudění tekutiny v kanálu. Jako příklad uvedeme publikace R. Glowinského (viz [9]) a R. Rannachera (viz [36]).

Uvedené smíšené okrajové podmínky (19) a (20) nám nezaručují, že nebude docházet ke zpětným tokům. To znamená, že pokud Γ_2 není prázdná množina, nedokážeme kontrolovat energetický tok přes tuto část hranice. Nelze proto ani vyloučit nekontrolovaný nárůst kinetické energie v kanálu. Pro úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami nelze použít žádné důkazové techniky jako používáme pro úlohy, kde máme na celé hranici předepsanou Dirichletovu okrajovou podmínku (viz předešlý odstavec). Neznáme tak dosud žádný energetický odhad a neumíme ho ani odvodit. Globální existenci slabého řešení pro smíšené okrajové podmínky tak zatím nejsme schopni dokázat.

V rovnici (17) je na rozdíl od rovnice (1) pravá strana označena symbolem $\boldsymbol{g}$. Důvodem je skutečnost, že symbolem $\boldsymbol{f}$ značíme celkovou pravou stranu ve formulaci slabého řešení, která má tvar

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \; d(\Omega) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \; d(\partial\Omega).$$

Naskytuje se zde další otevřená otázka, zda existuje slabé řešení pro počátečně-okrajovou nebo časově periodickou úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami pro libovolně velká data a na předepsaném časovém intervalu.

Mnoho matematiků si ve svých textech často volí okrajovou podmínku (20). Jde opět o práce, které modelují proudění tekutiny v kanálu a o publikace věnované numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic.

S. Kračmar a J. Neustupa společně publikovali příspěvky (viz např. [14], [15], [16], [17], [18]), ve kterých úlohu řešili jako variační nerovnost za předpokladu, že zpětné toky z kanálu jsou omezené. Oproti ostatním, kteří úlohu řešili jako diferenciální rovnici, hledali řešení na konvexní podmnožině vhodného Banachova prostoru.

Předpokládejme, že řešení úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami pro vybraná předepsaná data existuje.

Navierovo-Stokesovou úlohou se smíšenými okrajovými podmínkami se zabývají i M. Beneš, P. Kučera a Z. Skalák. P. Kučera a Z. Skalák společně dokázali existenci úlohy (17)–(21) na nějakém dostatečně malém časovém intervalu, výsledek publikovali v článku [25]. Z uvedeného příspěvku vyplývá, že autoři úlohu dokázali pro řešení, které je "velmi regulární v čase", ale není "regulární v prostoru". V publikaci [41] předchozí výsledek rozšířili i na systém Boussinesqových rovnic. Lokální existenci řešení "hladkého v prostoru" pro dvoudimenzionální úlohy dokázali M. Beneš a P. Kučera v [4].

Podobný výsledek popsal i M. Beneš v [1]. Úlohu (17)–(21) doplnil o další okrajovou podmínku. Na části hranice předepsal navíc Navierovu okrajovou podmínku ((8)–(9)) a dokázal, že za určitých podmínek existuje řešení. V příspěvku [2] a [3] M. Beneš publikoval další výsledky zmíněné úlohy.

P. Kučera ve své práci [21] prezentoval výsledek, že existuje řešení úlohy pro data, která jsou dostatečně malou perturbací dat původní úlohy. Předpokládal, že pro nějaká data existuje řešení úlohy. Toto řešení je opět "velmi regulární v čase", ale už ne "regulární v prostoru". V článku [22] tento výsledek rozšířil na časově periodickou úlohu.

Protože v problému, který bude řešen v disertační práci, navážeme na článek [21], popíšeme nyní výsledky tohoto článku detailněji. Nejprve definujeme funkční prostory, ve kterých autor článku pracuje.

Označení 30 *Nechť*

$$\mathcal{E}(\overline{\Omega}) = \Big\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^3;\ supp\ \boldsymbol{v} \cap \Gamma_1 = \emptyset,\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \Big\}.$$

Symbolem H_k budeme značit zúplnění prostoru $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ v prostoru $L^2(\Omega)^3$, V_κ bude označovat zúplnění prostoru $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ v prostoru V. Symbolem V^* se značí duální prostor k prostoru V_κ.

Připomeňme, že platí kompaktní vnoření

$$V_\kappa \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow\hookrightarrow V_\kappa^*. \tag{22}$$

Počátečně-okrajová úloha je formulována ve tvaru operátorové rovnice mezi dvěma Banachovými prostory. První z nich bude prostor X, ve kterém se hledají řešení této úlohy. Druhým bude prostor dat dané úlohy Y. Dále budeme definovat operátor $\mathcal{N} : X \to Y$.

Věta 31 *Nechť $2r_0 > n$, kde n je dimenze prostoru. Prostor X je prostorem řešení úlohy a je definován následovně*

$$X = \Big\{ \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;\ V_\kappa),\ \boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;\ V_\kappa),\ \boldsymbol{u}'' \in L^2(0,T;\ V_\kappa^*),\ \boldsymbol{u}(0) \in V^{r_0,2} \Big\},$$

norma na tomto prostoru má tvar

$$\|\boldsymbol{u}\|_X = \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;\,V_\kappa)} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;\,V_\kappa)} + \|\boldsymbol{u}''\|_{L^2(0,T;\;V_\kappa^*)} + \|\boldsymbol{u}(0)\|_{V^{r_0,2}}\,,$$

kde $\boldsymbol{u}'$ *značí derivaci funkce* $\mathbf{u}$ *(jakožto funkce definované skoro všude v časovém intervalu* $(0,T)$ *s hodnotami ve* V_k *ve smyslu distribucí a* $\boldsymbol{u}''$ *je Schwarzovou derivací funkce* $\boldsymbol{u}'$ *ve smyslu vnoření (22).*

Prostor Y je prostorem dat úlohy. Jeho prvky jsou uspořádané dvojice. První složkou je pravá strana, která se vyskytuje ve slabé formulaci úlohy. Druhou složkou je počáteční podmínka.

Věta 32 *Nechť* $2r_0 > n$*, kde* n *je dimenze prostoru. Prostor* Y *je definován následovně*

$$Y = \Big\{[\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}];\ \boldsymbol{f} \in \mathcal{C}([0,T],V_\kappa^*),\ \boldsymbol{f}' \in L^2(0,T;\,V_\kappa^*),\ \boldsymbol{\gamma} \in V^{r_0,2},\ \boldsymbol{f}(0) - (\!(\boldsymbol{\gamma},\,.)\!)_{1,2} \in H_\kappa\Big\}$$

s normou ve tvaru

$$\|[\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}]\|_Y = \|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(0,T;\,V_\kappa^*)} + \|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;\;V_\kappa^*)} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{V^{r_0,2}} + \|\boldsymbol{f}(0) - (\!(\boldsymbol{\gamma},\,.)\!)_{1,2}\|_{H_\kappa},$$

kde $\boldsymbol{f}'$ *je derivace funkce* $\boldsymbol{f}$ *ve smyslu distribucí.*

Podmínka $\boldsymbol{f}(0) - (\!(\boldsymbol{\gamma},\,.)\!)_{1,2} \in H_\kappa$ je vlastně podmínkou kompatibility a znamená

$$\|\boldsymbol{f}(0) - ((\boldsymbol{\gamma},\ .))_{1,2}\|_{H_\kappa} = \sup_{\boldsymbol{v}\in V_\kappa, v\neq 0} \frac{|\langle \boldsymbol{f}(0), v\rangle - ((\boldsymbol{\gamma}, v))_{1,2}|}{\|v\|_{H_\kappa}} < \infty.$$

Pravou stranou $\boldsymbol{f}$ úlohy rozumíme zobrazení $\langle 0,\ T\rangle \to V_\kappa^*$, odvozené z objemové síly $\boldsymbol{g}$ a okrajové podmínky σ. Je-li $\boldsymbol{g} \in L^2(\Omega)^3$ a $\sigma \in L^2(\partial\Omega)^3$, platí pro skoro všechna $t \in (0, T)$ a pro všechna $\boldsymbol{v} \in V_\kappa^*$

$$\langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}\ d(\Omega) + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \boldsymbol{v}\ d(\partial\Omega).$$

Symbolem $\langle .\,,\,.\rangle$ rozumíme dualitu mezi prostory V_κ a V_κ^*.

Klíčovou roli v článku hraje operátor $\mathcal{N} : X \to Y$. Platí že $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\gamma}]$, jestliže

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\ d(\Omega) + \nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{v}\ d(\Omega) + \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\ d(\Omega) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle,$$

pro všechna $\boldsymbol{v} \in V_\kappa$ a pro skoro všechna $t \in (0, T)$ a platí-li počáteční podmínka

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\gamma}.$$

Slabé řešení úlohy je definováno následujícím způsobem. Funkce $\boldsymbol{u} \in X$ je slabým řešením úlohy s pravou stranou $\boldsymbol{f}$ a počáteční rychlostí $\boldsymbol{\gamma}$ právě tehdy, když $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\gamma}]$. V [21] jsou dokázány následující vlastnosti operátoru $\mathcal{N}$:

- Operátor $\mathcal{N}$ je spojitě diferencovatelný operátor na prostoru X.
- Operátor $\mathcal{N}$ je prostý.

- Frechetovou derivací operátoru $\mathcal{N}$ v bodě $\boldsymbol{u}$ je operátor $\mathcal{G}_u = \mathcal{S} + \mathcal{K}_{\boldsymbol{u}}$, kde $\mathcal{S} : X \to Y$ je vzájemně jednoznačný omezený lineární operátor z X na Y (nezávisí na bodu $\boldsymbol{u}$). Pro $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ je $\mathcal{G}_u = \mathcal{S}$.

- Operátor $\mathcal{G}_u$ je prostý.

- Je-li $T < \infty$ je $\mathcal{K}_{\boldsymbol{u}} : X \to Y$ lineární kompaktní operátor a $\mathcal{G}_u$ je tedy Fredholmův operátor. Odtud (viz předchozí bod) operátor $\mathcal{G}_u$ je vzájemně jednoznačný operátor a zobrazuje prostor X na prostor Y.

Z toho dále vyplývá, že $\mathcal{N}$ splňuje Větu o lokálním difeomorfismu v libovolném bodě $\boldsymbol{u}$. Autor dále ukázal, že pro $T < \infty$ a díky výše uvedeným vlastnostem operátoru $\mathcal{N}$ a jeho Frechetově derivaci v libovolném bodě, platí následující věta.

Věta 33 *Nechť $\boldsymbol{u} \in X$ je řešením úlohy (1), (3), (4), (19), (20) s pravou stranou $\boldsymbol{f}$ a počátečním rozložením rychlosti $\boldsymbol{\gamma}$. Potom existuje právě jedno otevřené okolí U bodu $\boldsymbol{u}$ v prostoru X a otevřené okolí V bodu $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\gamma}]$ v prostoru Y tak, že pro libovolné $[\overline{\boldsymbol{f}}, \overline{\boldsymbol{\gamma}}] \in V$ existuje $\overline{\boldsymbol{u}} \in U$, které je řešením úlohy (1), (3), (4), (19), (20) s pravou stranou $\overline{\boldsymbol{f}}$ a počátečním rozložením rychlosti $\overline{\boldsymbol{\gamma}}$.*

Pro $T = \infty$ platí, že $\mathcal{N}$ splňuje tvrzení Věty o lokálním difeomorfismu pouze na okolí nulového prvku prostoru X a jemu odpovídajícímu nulovému prvku prostoru Y.

Abychom mohli formulovat časově periodické úlohy musíme definovat dva Banachovy prostory - prostor řešení úlohy X_P a prostor dat úlohy Y_P a navíc také operátor $\mathcal{N}_P : X_P \to Y_P$. Označme

$$X_P = \Big\{ \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;\, V_\kappa),\ \boldsymbol{u}'' \in L^2(0,T;\, V_\kappa^*),$$
$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T) \in V_k,\quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}'(T) \in H \Big\}$$

s normou

$$\|\boldsymbol{u}\|_{X_P} = \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;\,V_\kappa)} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;\,V_\kappa)} + \|\boldsymbol{u}''\|_{L^2(0,T;\ V_\kappa^*)}$$

a

$$Y_P = \Big\{ \boldsymbol{f} : \boldsymbol{f} \in \mathcal{C}([0,T], V_\kappa^*),\ \boldsymbol{f}' \in L^2(0,T;\, V_\kappa^*),\ \boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{f}(T) \in V_\kappa^* \Big\}$$

s normou

$$\|\boldsymbol{f}\|_{Y_P} = \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;\ V_\kappa^*)} + \|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;\ V_\kappa^*)},$$

kde $\boldsymbol{u}'$ je derivace funkce $\boldsymbol{u}$ ve smyslu distribucí, $\boldsymbol{u}''$ je Schwartzovou derivací $\boldsymbol{u}'$ ve smyslu vnoření (22) a $\boldsymbol{f}'$ je derivace funkce $\boldsymbol{f}$ ve smyslu distribucí.

Operátor $\mathcal{N}_P : X_P \to Y_P$ je definovaný následujícím způsobem.

Řekneme, že $\mathcal{N}_P(u) = \boldsymbol{f}$, je-li rovnice

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\ d(\Omega) + \nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{v}\ d(\Omega) + \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\ d(\Omega)\ =\ \langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v} \rangle$$

splněna pro všechna $\boldsymbol{v} \in V_\kappa$ a pro skoro všechna $t \in (0,T)$.

Řekneme, že $\boldsymbol{u}$ je slabým řešením úlohy (1), (3), (12), (19), (20) s pravou stranou $\boldsymbol{f}$ právě tehdy, když $\mathcal{N}_P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$. Operátor $\mathcal{N}_P$ má následující vlastnosti:

- Operátor $\mathcal{N}_P$ je spojitě diferencovatelný operátor na prostoru X_P.
- Podobně jako při řešení počátečně-okrajové úlohy je jeho Frechetovou derivací v libovolném bodě $\boldsymbol{u}$ lineární operátor $\mathcal{G}_{Pu} = \mathcal{S}_P + \mathcal{K}_{Pu}$, kde $\mathcal{S}_P : X_P \to Y_P$ je vzájemně jednoznačný omezený lineární operátor z X_P na Y_P a zároveň $\mathcal{K}_{Pu} : X_P \to Y_P$ je lineární kompaktní operátor.
- Tedy operátor $\mathcal{G}_{Pu}$ je operátor Fredholmova typu.

Na rozdíl od operátoru $\mathcal{G}_u$ pro operátor $\mathcal{G}_{Pu}$ nebylo dosud obecně dokázáno, že je prostý operátor. Potřebujeme zjistit množinu bodů $\boldsymbol{u}$ prostoru X_P, kde operátor $\mathcal{G}_{Pu}$ není prostý. K tomuto vymezení jsou zde použity množiny M_R a M_C, kde

$$M_R = \left\{ \boldsymbol{u} \in X_P;\ \mathcal{G}_{Pu}\ \textit{je prostý a na}\ Y_P \right\}$$

a

$$M_C = X_P - M_R.$$

Množina M_C je řídká a slabě uzavřená.

Na závěr této části je vhodné ještě definovat funkci: $m : X_P \to \mathbb{N}_0$ takovou, že

$$m(\boldsymbol{u}) = \dim\ \mathit{ker}\ \mathcal{G}_{Pu}.$$

Lze dokázat, že m je omezená na libovolné omezené množině prostoru X_P. A také, že množina $\mathcal{N}_P(M_C)$ je první kategorie v prostoru Y_P.

1.2.3 LOKÁLNÍ EXISTENCE ŘEŠENÍ NAVIEROVY-STOKESOVY A BOUSSINESQOVY ÚLOHY SE SMÍŠENÝMI OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

Další část tohoto textu vychází z článků od P. Kučery a Z. Skaláka (viz např. [25], [41]). V [25] je řešena úloha (17)–(21) a dále úloha, kde rovnice (17) je nahrazena rovnicí

$$\frac{d\boldsymbol{u}_i}{dt} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} e_{i,j}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_i + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_j} = \boldsymbol{g}_i \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{na } Q_T \tag{23}$$

a okrajová podmínka (20) je nahrazena okrajovou podmínkou

$$-\mathcal{P}\boldsymbol{n} + \nu\, e_{i,j}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma} \qquad \text{na } \Gamma_2 \times (0, T). \tag{24}$$

Výsledek pro obě formulované úlohy je dokázán stejný a je obsažený v následující větě.

Věta 34 *Nechť* $[\boldsymbol{f}; \gamma] \in Y$, $\boldsymbol{\zeta} \in X$. *Potom existuje* $T^* \in (0, T)$ *a právě jedno řešení* $\boldsymbol{u}$ *úlohy (17)–(21) (stejně jako úlohy (23), (18), (19), (24) a (21)) na* $\Omega \times (0, T^*)$ *takové, že* $\boldsymbol{u} \in C(0, T^*; V_k), \boldsymbol{u}' \in L^2(0, T^*; V_k) \cap L^\infty(0, T^*; H), \boldsymbol{u}'' \in L^2(0, T^*; V_k)$.

Při dokazování existence řešení pro obě úlohy využíváme slabý Schauderův princip, tedy skutečnost, že totálně spojité zobrazení omezené množiny reflexivního Banachova prostoru do sebe má pevný bod. Banachovým prostorem v tomto případě rozumíme vhodně zvolený prostor funkcí. K důkazu jednoznačnosti řešení využíváme vlastnosti třídy funkcí, do které řešení náleží.

V druhém článku se autoři zabývají podobnou úlohou pro systém nestacionárních Boussinesqových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami. Tyto rovnice popisují chování rychlostního a tepelného pole nestacionární newtonovské tekutiny, kde vliv teplotního pole na pole rychlostní nelze zanedbat. Při klasické formulaci této úlohy byly zadány na různých částech $\partial\Omega$ různé typy okrajových podmínek. Je potřeba tomu přizpůsobit použité značení z Γ_1 a Γ_2 na $\Gamma_A, \cdots, \Gamma_E$.

Nechť $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ a Γ_E jsou otevřené disjunktní podmnožiny $\partial\Omega$ takové, že $\partial\Omega = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_B} = \overline{\Gamma_C} \cup \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_E}, \Gamma_A \neq \emptyset, \Gamma_C \neq \emptyset$ a dvoudimenzionální míra $\partial\Omega \mid (\Gamma_A \cup \Gamma_B)$ a $\partial\Omega \mid (\Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_E)$ je rovna nule.

Hledáme řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\mathcal{P} &= c_\beta(\vartheta - \vartheta_{ref}) \quad \text{na } Q_T, \\
\operatorname{div}\boldsymbol{u} &\equiv 0 \qquad\qquad\qquad \text{na } Q_T, \\
\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - c_k\Delta\vartheta + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\vartheta &= h,
\end{aligned}
$$

kde neznámé funkce jsou rychlostní pole $\boldsymbol{u}$, teplotní pole ϑ a tlak $\mathcal{P}$. A kde symbol ν označuje viskozitu ($\nu > 0$), funkce h značí tepelný zdroj, g je vektor gravitace, ϑ_{ref} označuje referenční teplotu, c_k je tepelná vodivost kapaliny, c_β označuje sdílení tepla. Dále je potřeba zadat okrajové a počáteční podmínky

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\zeta} && \text{na } \Gamma_A \times (0,T), \\
-\mathcal{P}n_i + \nu\,\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial y_j}n_j &= \sigma_i && \text{na } \Gamma_B \times (0,T), \\
\vartheta &= \varrho && \text{na } \Gamma_C \times (0,T), \\
\frac{\partial \vartheta}{\partial n} &= \chi && \text{na } \Gamma_D \times (0,T), \\
\frac{\partial \vartheta}{\partial n} + c_\eta(\vartheta - \vartheta_\delta) &= 0 && \text{na } \Gamma_E \times (0,T), \\
\boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{\gamma}, \\
\vartheta(0) &= \vartheta_0,
\end{aligned}
$$

kde symbol c_η označuje koeficient přestupu tepla, funkce $\boldsymbol{\zeta}$, σ, ϱ, χ jsou zadané funkce.

Ve výše zmiňovaných textech je dokázáno, že pro dostatečně hladká data úlohy (17)–(21) existuje $T^*, 0 < T^* < T$ takové, že na intervalu $(0, T^*)$ existuje právě jedno slabé řešení dané úlohy.

1.3

SHRNUTÍ SOUČASNÉHO STAVU

1.3.1 OTEVŘENÉ OTÁZKY

Nejprve se budeme zabývat úlohou (1), (3), (4) a (5), resp. (1), (3) a (4). Otevřené otázky pro tuto úlohu jsou následující:

- Globální existence silného řešení pro libovolná hladká data (tzv. blow-up problém).
- I pokud předchozí otázka zůstane nezodpovězena, zůstává otevřeným problémem, zda pro libovolná hladká data existuje silné řešení splňující energetickou rovnost. Vyřešení předchozího problému by automaticky znamenalo zodpovězení této otázky.
- Otevřenou otázkou zůstává i jednoznačnost slabého řešení.

První zmíněný problém je tak významný, že byl v roce 2000 spolu s dalšími šesti problémy zařazen Clayovým matematickým institutem v USA mezi tzv. "Problémy tisíciletí" (anglicky Millenium Prize Problems). Jak se nyní jeví, patří i mezi nejtěžší problémy aplikované matematiky pro nové milénium. Za vyřešení každého z problémů milénia vypsal institut odměnu jeden milion amerických dolarů.

Pro úlohu (17)–(21) zůstávají následující otevřené otázky:

- Existence slabého řešení pro počátečně-okrajovou úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami pro libolně velká data na daném časovém intervalu.
- Existence slabého řešení pro časově-periodickou úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami pro libolně velká data na daném časovém intervalu .

1.3.2 Poděkování

Práce byla během mého studia podpořena granty Studentské grantové soutěže, které vypisuje ČVUT na podporu výzkumné práce studentů a doktorandů. Konkrétně se jedná o tyto granty: SGS12/100/OHK1/2T/11, SGS14/005/OHK1/1T/11, SGS15/124/OHK1/2T/11 a SGS17/116/OHK1/2T/11.

Spoluřešitelem udělených grantů byl doc. RNDr. Petr Kučera, CSc.

1.3.3 LITERATURA A OSTATNÍ ZDROJE

Reference

[1] Beneš M.: Mixed Initial-Boundary Value Problem for the Three-dimensional Navier–Stokes Equations in Polyhedral Domains. DCDS suppl. **1** (2011) 135–144.

[2] Beneš M.: The qualitative properties of the Stokes and Navier-Stokes system for the mixed problem in a nonsmooth domain. *Mathematics and Computers in Simulation*, **76**, 2007, 8–12.

[3] Beneš M.: Solutions to the Mixed Problem of Viscous Incompressible Flows in a Channel. *Archiv der Mathematik*, **93**, 2009, 287–297.

[4] Beneš M., Kučera P.: Non-steady Navier-Stokes equations with homogeneous mixed boundary conditions and arbitrarily large initial condition. Carpathian J. Math. 23 (2007), no. 1–2, 32-40.

[5] Beneš M., Kučera P.: Solutions of the Navier-Stokes equations with various types of boundary conditions. Arch. Math. (Basel) 98 (2012), no. 5, 487-497.

[6] Beneš M., Kučera P.: On the Navier-Stokes flows for heat-conducting fluids with mixed boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), no. 2, 769-780.

[7] Escauriaza L., Seregin G, Šverák V.: Backward uniqueness for the heat operator in half-space. Algebra i Analiz 15 (2003), no. 1, 201–214; translation in St. Petersburg Math. J. 15 (2004), no. 1, 139–148.

[8] Galdi G. P.: An Introduction to the Navier-Stokes Initial Boundary Value Problem. Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, editors G.P. Galdi, J. Heywood and R. Rannacher, series "Advances in Mathematical Fluid Mechanics", Birkhauser-Verlag, Basel, (2000), 1-98.

[9] Glowinski R.: Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokio-New York, 1984.

[10] Heywood J. G.: The Navier-Stokes Equations"On the Existence, Uniqueness and Decay of Solutions, Indiana Univ. Math. J. 29, 1980, 639-681.

[11] Hopf E.: Über die Anfangwertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundglauchungen. Math. Nachr. 4, 1950, 213-231.

[12] Chae D., Choe H.: Regularity of Solutions to the Navier-Stokes Equation. Electronic Journal of Differential Equations, No. 5, pp. 1.-7, 1999.

[13] Kiselev A. A., Ladyženskaya O. A.: On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous, incompressible fluid. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 21 1957 655–680.

[14] Kračmar S., Neustupa J.: Global existence of weak solutions of a nonsteady variational inequalities of the Navier-Stokes type with mixed boundary conditions, Proc. of the conference ISNA'92, (1992), Part III, 156-157.

[15] Kračmar S., Neustupa J.: Modelling of flows of a viscous incompressible fluid through a channel by means of variational inequalities, ZAMM 74, **6**, (1994), 637-639.

[16] Kračmar S., Neustupa J.: Some Initial Boundary Value Problems of the Navier-Stokes Type with Mixed Boundary Conditions, Proc. of the seminar Numerical Mathematics in Theory and Practise, Pilsen, (1993), 114-120.

[17] Kračmar S., Neustupa J.: Simulation of Steady Flows through Channels by Variational Inequalities, Proc. of the conference Numerical Modelling in Continuum Mechanics, Prague 1994, (1995), 171-174.

[18] Kračmar S., Neustupa J.: A weak solvability of a steady variational inequality of the Navier-Stokes type with mixed boundary conditions. Pro-

ceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 6 (Catania, 2000). Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 6, 4169–4180.

[19] Kozono H.: Removable Singularities of Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations. Commun. in partial differential equations, 23, (1998), 949-966.

[20] Kozono H., Sohr H.: Remark on Uniqueness of Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations. Annalysis 16., 1996, 255-271.

[21] Kučera P. Basic properties of solution of the non-steady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions in a bounded domain. Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 55 (2009), no. 2, 289-308.

[22] Kučera P. The time-periodic solutions of the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. Discrete Contin. Dyn.Syst. Ser. S 3 (2010), no. 2, 325-337.

[23] Skalák Z., Kučera P.: A note on coupling of velocity components in the Navier-Stokes equations. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 84 (2004), no. 2, 124–127.

[24] Kučera P., Skalák Z.: Regularity of Suitable Weak Solution of the Navier-Stokes Equations as Consequence of Regularity of Two Velocity Components. Seminar "Topical Problems of Fluid Mechanics", organised by Institute of Thermomechanics AS CR, 2001, 53-56.

[25] Kučera P., Skalák Z.: Solutions to the Navier-Stokes Equations with Mixed Boundary Conditions. Acta Applicandae Mathematicae, 275-288, Kluver Academic Publishers, 1998, vol. 54, no. 3.

[26] Kučera P., Skalák Z.: Smoothness of the Velocity Time Derivative in the Vicinity of Regular Points of the Navier-Stokes Equations. 4. Seminar "Euler and Navier-Stokes Equations", organised by Institute of Thermomechanics AS CR, 2001, 83-86.

[27] Ladyzhenskaja O. A.: Uniqueness and Smoothness of Generalised Solutions of the Navier-Stokes Equations. Zap. Nauch. Sem. LOMI 5, 1967, 169-185 (in Russian).

[28] Leray J.: Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l;espace. Acta Math. 63, 1934, 193-248.

[29] Lions J. L.: Sur la Regularité et l'Unicité des Solutions Turbulentes des equations de Navier-Stokes. Rend. Sem. Mat. Universitá di Padova, 30, 1, 1960.

[30] Lions J. L.: Quelques methodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris: Gauthier-Villars, 1960.

[31] Masuda K.: weak solutions of Navier-Stokes Equations. Tohoku Math. J., 36 (1984), 623-646.

[32] Neustupa J.: Partial regularity of weak solution to the Navier-Stokes Equations in the Class $L^\infty(0,T;L(\Omega)^3)$. J. Math. Fluid Mech. 1 (1999), 1-17.

[33] Neustupa J.,Novotny A., Penel P.: An interior regularity of a weak solution to the Navier-Stokes equations in dependence on one component of velocity. Topics in mathematical fluid mechanics, 163–183, Quad. Mat., 10, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2002.

[34] Neustupa J., Penel P.: Regularity of a suitable weak solution to the Navier-Stokes equations as a consequence of regularity of one velocity component. Applied nonlinear analysis, 391–402, Kluwer/Plenum, New York, 1999.

[35] Prodi G.: Un Teorema di Unicita per el Equazioni di Navier-Stokes. Ann. Mat. Pura Appl. 48, 1959, 173-182.

[36] Rannacher R.: Numerical analysis of the Navier-Stokes equations, Proceedings of conference ISNA'92, part I., 1992, 361-380.

[37] SEREGIN G., ŠVERÁK V.: The Navier-Stokes equations and backward uniqueness. Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II, 353-366, Int. Math. Ser. (N. Y.), 2, Kluwer/ Plenum, New York, 2002.

[38] SERRIN J.: On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Arch. Rational Mech. 9, 1962, 187-195.

[39] SERRIN J.: The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations. A University of Viscontin Press editor R. E. Langer, (1963), 69-98.

[40] SHINBROT M.: The energy equation for the Navier-Stokes system. SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 948–954.p

[41] SKALÁK Z., KUČERA P.: An Existence Theorem for the Boussinesq Equations with Non-Dirichlet Boundary Conditions. Applications of Mathematics, str. 81-98, 2000, vol. 45, no. 2.

[42] CAFFARELLI L., KOHN R., NIRENBERG L: Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Commun. Pure Appl. Math. 35, (1982), 771-831.

[43] TEMAM R.: Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis, North-Holland Publishinged edition, Company, Amsterodam, New York, Oxford. Revis (1979).

[44] POKORNÝ M.: Navier-Stokesovy rovnice: Slabé řešení, jeho jednoznačnost a regularita. Kvaterion 2/2013, str. 83-101.

[45] *http://www.claymath.org/millenium/Navier-Stokes_Equations/*

[46] *https://cs.wikipedia.org/wiki/Problemy_tisicileti*

KAPITOLA 2

NĚKTERÉ VLASTNOSTI STACIONÁRNÍCH ŘEŠENÍ BOUSSINESQOVÝCH ROVNIC

Tato kapitola obsahuje příspěvek nazvaný "Some Qualitative Properties of Solutions of Steady Boussinesq Equations with Mixed Boundary Conditions". Jedná se o text připravený k publikaci, který je zde proto vložen v angličtině. Autory připravované publikace budou Petr Kučera a Jitka Píšová, oba budou mít 50% podíl na autorství. Článek má vlastní značení, vlastní číslování rovnic, definic, vět a poznámek, má i vlastní seznam použité literatury. Doplněna jsou pouze čísla stránek, aby navazovala na dosavadní text.

Příspěvek se zabývá systémem stacionárních Boussinesqových rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami. Definujeme v něm Banachův prostor X možných řešení úlohy a Banachův prostor Y, který je prostorem dat úlohy. Zavedeme operátor $\mathcal{N} : X \to Y$ a formulujeme náš problém z hlediska rovnic operátorů. Dále formulujeme operátor $\mathcal{G}_{[u,\theta]} : X \to Y$, který je Frechetovou derivací operátoru $\varnothing$ v bodě $[u, \theta]$. Označíme M_R jako množinu všech funkcí $[u, \theta]$, ve kterých je zobrazení $\mathcal{G}_{[u,\theta]}$ vzájemně jednoznačné a zobrazuje prostor na Y (tj. $\mathcal{G}_{[u,\theta]}$ je prostý a na).

V příspěvku dokážeme, že M_R je hustá a otevřená množina a její doplněk, množina M_C je slabě uzavřená.

Some Qualitative Properties of Solutions of Steady Boussinesq Equations with Mixed Boundary Conditions

Petr KUČERA and Jitka PÍŠOVÁ

Czech Technical University, Faculty of Civil Engineering
Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

Keywords: Boussinesq equations, mixed boundary conditions, Fredholm operators.
Mathematics subject classification: Primary 35Q30, 35B35; Secondary 76D05, 76E09.

Abstract

In this paper we solve system of steady Boussinesq equations with mixed boundary conditions. We define Banach spaces $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{Y}$. The first is the space of "possible" solutions of this problem and the second one is space of its data. We define operator $\mathcal{N} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ and formulate our problem in terms of operator equations. Further we define operator $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ which is Frechet derivative of operator at the point $[\boldsymbol{u}, \theta]$.Denote by $\mathbf{M}_R$ the set of all functions $[\boldsymbol{u}, \theta]$ in which $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is one-to-one and onto $\boldsymbol{Y}$. We prove that $\mathbf{M}_R$ is weakly dense and weakly open.

1 Introduction

The problem solved in this part is influenced by two papers, [9] and [10]. In [9] we are dealing with the steady Boussinesq equations with mixed boundary conditions for velocity and the Dirichlet boundary condition for temperature. In this article we deal also with the steady Boussinesq problem. We prescribe the same boundary conditions for velocity and mixed boundary conditions for temperature. In this contributions we obtain similar results of solvability of this problem as in [9]. In addition, some other results for time-periodic Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions are proved in [10], similar results are also proved in this chapter.

The Navier-Stokes or Boussinesq equations are usually studied with Dirichlet boundary conditions which are prescribed on the whole boundary. However, the problem formulated by this way is not always a natural model of flow. Some authors prescribe

$$\nu \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - \mathcal{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}$$

or

$$\frac{\nu}{2} \left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \right] \cdot \boldsymbol{n} - \mathcal{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}$$

on the input and on the output of the channel (see e.g.[5], [13]).

Thesee boundary conditions (1), (2) prescribed on the input and on the output of a channel don't exclude the possibility of backward flows that could eventually bring back to the channel an uncontrollable amount of kinetic energy. Consequently, if we prescribe these boundary conditions we are not able to derive any a posteriori estimates of solutions. By this fact, the question of the global in time existence of a weak solution of the Navier–Stokes equations in a channel with one of these boundary conditions on the input and on the on the output is still open.

In [6] and [7], Kračmar and Neustupa formulated steady and evolutionary Navier–Stokes problems by means of appropriate variational inequalities. They prescribed an additional condition on the output and by this way they bounds the kinetic energy of an eventual backward flow. In [11], Kučera and Skalák proved the local–in–time existence of a strong solution of the non–steady Navier–Stokes problem with boundary condition (1.1) on the part of the boundary. Existence of solutions of problems with related boundary conditions are also studied e.g. in [2], [3], [4] and [14]. In this paper, we solve the steady Boussinesq problem with mixed boundary conditions for velocity and temperature. We define two Banach spaces, $\boldsymbol{X}$ which is space of possible solutions and $\boldsymbol{Y}$ which is space of data of the problem. We define operator $\mathcal{N} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ and formulate our problem in terms of operator equations. This means that $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$ is a solution of our problem with a right hand side $[\boldsymbol{f}, h] \in \boldsymbol{Y}$ if and only if $\mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta]) = [\boldsymbol{f}, h]$. Further we define operator $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ which is Frechet derivative of operator at the point $[\boldsymbol{u}, \theta]$.Denote by $\mathbf{M}_R$ the set of all functions $[\boldsymbol{u}, \theta]$ in which $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is one-to-one and onto $\boldsymbol{Y}$. We prove that $\mathbf{M}_R$ is weakly dense and weakly open.

We solve the system of steady Boussinesq equations with mixed boundary conditions for velocity and temperature on a bounded domain Ω. We suppose that $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $\partial\,\Omega \in \mathbb{C}^{0,1}$. Further, there exists $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, $i = 1, 2$ such that $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Γ_1 and Γ_2 are closed (not necessarily connected) sets such that $\mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$ and $\mathrm{meas}_2(\Gamma_1) > 0$. The domain Ω is a channel filled up with a fluid, Γ_1 represents a fixed wall of the channel and Γ_2 is both the input and the output of the channel.

The classical formulation of our problem is as follows:

$$
\begin{aligned}
-\nu \cdot \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla \mathcal{P} &= \beta \cdot \boldsymbol{g} \cdot (\theta - \theta_{ref}) + q && \text{in } \Omega, && (1.1)\\
\mathrm{div}\boldsymbol{u} &= 0 && \text{in } \Omega, && (1.2)\\
-\lambda \cdot \Delta\theta + \mathrm{div}(\theta \cdot \boldsymbol{u}) &= \tilde{h} && \text{in } \Omega, && (1.3)\\
\boldsymbol{u} &= 0 && \text{on } \Gamma_1, && (1.4)\\
-\mathcal{P} \cdot \boldsymbol{n} + \nu \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{\varsigma} && \text{on } \Gamma_2, && (1.5)\\
\lambda \partial\theta/\partial \boldsymbol{n} + \alpha(\theta - \theta_{ref}) &= 0, && \text{on } \Gamma_1, && (1.6)\\
\lambda \partial\theta/\partial \boldsymbol{n} &= \upsilon && \text{on } \Gamma_2. && (1.7)
\end{aligned}
$$

All functions in (1.1)–(1.6) are "smooth enough". The unknown functions $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{P}$ and θ represent velocity, pressure and temperature, respectively. By symbols ν and λ we denote the viscosity and the thermal diffusion coefficient, respectively. Both of them are positive constants. ς is a prescribed vector function on Γ_2, $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_3)$ is an outer normal vector, θ_{ref} is reference temperature, β is thermal expansion coefficient, $\mathbf{g}$ is the acceleration due to gravity, q is volume force and $\boldsymbol{\varsigma}$ and υ are prescribed function. For simplicity we suppose that reference density $\rho_{ref} = 1$, $\nu = 1$ and $\lambda = 1$.

The used Dirichlet boundary condition (1.4) expresses a non–slip behaviour of the fluid on the fixed walls of the channel. The condition (1.5) means that we prescribe the normal component of the stress tensor on Γ_2. The similar problems for Navier-Stokes equations with conditions (1.4) have already been treated in the papers [1]–[4].

We shall denote by c a generic constant, i.e. a constant whose value may change from one line to the next. Numbered constants whole paper.

2 Notation and auxiliary results

We denote vector–valued functions and spaces of such functions by boldface letters.

We shall denote by c a generic constant, i.e. a constant whose value may change from one line to the next. Numbered constants $c_1, c_2, \dots$ will have fixed values throughout the whole paper.

We use these function spaces and operators:

- By the symbol $((.,.))_2$ we denote scalar product on $L^2(\Omega)$.
- By the symbol $\mathcal{E}(\Omega)$ we denote the function space
$$\{\varphi \in [\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})]^n;\ \text{div}\,\varphi \equiv 0,\ \text{supp}\,\varphi \cap \Gamma_1 \equiv \emptyset\}$$
- Let $k \in \mathbf{R}^+$, $p \geq 1$. The Banach space $\mathbf{V}_\kappa^{k,p}$ is the closure of $\mathcal{E}(\Omega)$ in the norm of the space $[W^{k,p}(\Omega)]^3$.
- $\mathbf{V}_\kappa^{1,2}$ and $W^{1,2}(\Omega)$ are Hilbert spaces. Let $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_\kappa^{1,2}$, $\vartheta, \psi \in W^{1,2}(\Omega)$. Define bilinear forms
$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))_{\mathbf{V}_\kappa^{1,2}} &:= \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{w}, \\ ((\vartheta, \psi))_{W^{1,2}(\Omega)} &:= \int_\Omega \nabla\vartheta \cdot \nabla\psi + \int_{\Gamma_1} \alpha\, \vartheta\psi \end{aligned}$$
- Let $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_\kappa^{1,2}$, $\vartheta, \psi \in W^{1,2}(\Omega)$. Define trilinear forms
$$\begin{aligned} b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}, \\ b_2(\vartheta, \boldsymbol{u}, \psi) &:= \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla\vartheta)\psi, \end{aligned}$$
where b_1 and b_2 are continuous trilinear forms on $\mathbf{V}_\kappa^{1,2} \otimes \mathbf{V}_\kappa^{1,2} \otimes \mathbf{V}_\kappa^{1,2}$ and $W^{1,2}(\Omega) \otimes \mathbf{V}_\kappa^{1,2} \otimes W^{1,2}(\Omega)$, respectively.
- $\boldsymbol{X} := \mathbf{V}_\kappa^{1,2} \otimes W^{1,2}(\Omega)$. Let $[\boldsymbol{v}, \vartheta], [\boldsymbol{w}, \psi] \in \boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{X}$ is the Hilbert space with scalar product
$$(([\boldsymbol{v}, \vartheta], [\boldsymbol{w}, \psi]))_{\boldsymbol{X}} := ((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))_{\mathbf{V}_\kappa^{1,2}} + ((\vartheta, \psi))_{W^{1,2}(\Omega)}.$$
- $\boldsymbol{Y} = (V^{1,2})^* \otimes ([W^{1,2}(\Omega)])^*$. Let $[\boldsymbol{f}, h] \in \boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{Y}$ is the Banach space with norm
$$\|[\boldsymbol{f}, h]\|_{\boldsymbol{Y}} = \|\boldsymbol{f}\|_{(V^{1,2})^*} + \|h\|_{([W^{1,2}(\Omega)])^*}.$$

- Let $[\boldsymbol{v}, \vartheta] \in \boldsymbol{X}$. Define operators $\mathcal{S}_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ and $\mathcal{S}_2 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ such that
$$\mathcal{S}_1([\boldsymbol{v}, \vartheta]) = [(\!(\boldsymbol{v}, .)\!)_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa};\ (\!(\vartheta, .)\!)_{W^{1,2}(\Omega)}]$$
and
$$\mathcal{S}_2(([\boldsymbol{v}, \vartheta]) = [(\!(\beta\, \boldsymbol{g}\, \vartheta, .)\!)_2;\ 0].$$
Then $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ are continuous linear operators from $\boldsymbol{X}$ to $\boldsymbol{Y}$.

- Define operator $\mathcal{S} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ such that $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$, which is also continuous linear operator from $\boldsymbol{X}$ to $\boldsymbol{Y}$.

- Let $[\boldsymbol{u}, \theta], [\boldsymbol{w}, \vartheta] \in \boldsymbol{X}$. Define operator $\mathcal{B} : \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ such that
$$\mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta], [\boldsymbol{w}, \vartheta]) = [b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, .) + b_1(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, .);\ b_2(\theta, \boldsymbol{w}, .) + b_2(\vartheta, \boldsymbol{u}, .)].$$
Then $\mathcal{B}$ is a continuous bilinear operator.

- Let $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$. Define operator $\mathcal{N} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ such that
$$\mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta]) := \mathcal{S}([\boldsymbol{u}, \theta]) + \frac{1}{2}\,\mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta],\ [\boldsymbol{u}, \theta]).$$
It is obvious that operator $\mathcal{N}$ belongs to $\mathcal{C}^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

- Let $[\boldsymbol{u}, \theta], [\boldsymbol{w}, \vartheta] \in \boldsymbol{X}$. Define operator $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ such that
$$\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w}, \vartheta]) := \mathcal{S}([\boldsymbol{w}, \vartheta]) + \mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta],\ [\boldsymbol{w}, \vartheta]).$$
Then $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is a continuous operator. Later we prove that $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is the Frechet derivative of the operator $\mathcal{N}$ at a point $\boldsymbol{u}$.

3 Weak solutions of steady Boussinesq problem

Definition 1. *Let $q \in (V^{1,2})^*$, $\tilde{h} \in ([W^{1,2}(\Omega)])^*$, $\varsigma \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$, $\upsilon \in L^2(\partial\Omega)$, α, β and θ_{ref} are given constants, $\boldsymbol{g}$ is constant vector, $\boldsymbol{f} \in (V^{1,2})^*$ and $h \in ([W^{1,2}(\Omega)])^*$ are continuous linear forms such that*
$$\begin{aligned} < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} > &= < q, \boldsymbol{v} > + \int_{\Gamma_2} \varsigma \boldsymbol{v} - \int_\Omega \beta\, \boldsymbol{g}\, \theta_{ref} \boldsymbol{v}, \\ < h, \psi > &= < \tilde{h}, \psi > + \int_{\Gamma_1} \alpha\, \theta_{ref}\, \psi + \int_{\Gamma_2} \upsilon\, \psi. \end{aligned}$$
We say that couple $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$ is a weak solution of problem (1.1)–(1.7) iff
$$(\!(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\!)_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa} + b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\!(\beta\, \boldsymbol{g}\, \theta, \boldsymbol{v})\!)_2 = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >$$
and
$$(\!(\theta, \psi)\!)_{W^{1,2}(\Omega)} + b_2(\theta, \boldsymbol{u}, \psi) = < h, \psi >$$
hold for every $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}^{1,2}_\kappa$ and for every $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Remark 1. *Let $[\boldsymbol{u},\, \theta] \in \boldsymbol{X}$ and $[\boldsymbol{f},\, h] \in \boldsymbol{Y}$. It is easy to see that $[\boldsymbol{u},\, \theta]$ is a weak solution of problem (1.1)–(1.7) with the right hand side $[\boldsymbol{f},\, h]$ iff*

$$\mathcal{N}([\boldsymbol{u},\, \theta]) = [\boldsymbol{f},\, h].$$

In the following lemmas we prove one important properties of operators $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ and $\mathcal{B}$.

Lemma 1. *Let $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}$ and $\theta \in W^{1,2}(\Omega)$. Then $b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, .) \in (V^{1,2})^*$, $b_2(\boldsymbol{u}, \theta, .) \in ([W^{1,2}(\Omega)])^*$,*

$$\|b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, .)\|_{(V^{1,2})^*} \le c_1\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \le c_2 \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \tag{3.1}$$

and

$$\|b_2(\boldsymbol{u}, \theta, .)\|_{([W^{1,2}(\Omega)])^*} \le c_3\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\theta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le c_4\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\theta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \tag{3.2}$$

Proof. Let $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}$ and $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$. Since

$$\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbf{L}^3(\Omega), \qquad \mathbf{V}^{1,2}_{\kappa} \hookrightarrow \mathbf{L}^6(\Omega) \qquad \text{and} \qquad W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$$

we obtain

$$\begin{aligned} |b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| &\le c\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \le c_1\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \\ &\le c_2\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b_2(\boldsymbol{u}, \theta, \psi)| &\le c\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\theta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\psi\|_{L^6(\Omega)} \le c_3\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\theta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\psi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\le c_4\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\theta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\psi\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Therefore $b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, .) \in (V^{1,2})^*$, $b_2(\boldsymbol{u}, \theta, .) \in ([W^{1,2}(\Omega)])^*$ and (3.1) and(3.2) hold. The proof is complete. $\square$

Remark 2. *Let $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}$, $\theta, \vartheta, \psi \in W^{1,2}(\Omega)$. Then*

$$b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}) - b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{3.3}$$

$$b_2(\boldsymbol{u}, \theta, \psi) = \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\, \theta\, \psi - b_2(\boldsymbol{u}, \psi, \theta) \tag{3.4}$$

Therefore we get the following estimates

$$\begin{aligned} |b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| &\le c\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\le c_5 \left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \right) \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned} |b_1(\boldsymbol{u}, \theta, \psi)| &\le c\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} \|\theta\|_{L^3(\partial\Omega)} \|\psi\|_{L^3(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\psi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\theta\|_{L^4(\Omega)} \\ &\le c_6 \left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^3(\partial\Omega)} \|\theta\|_{L^3(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\theta\|_{L^4(\Omega)} \right) \|\psi\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lemma 2. *Let $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}$. Then operator $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is the Frechet derivative of the operator $\mathcal{N}$ at a point $\boldsymbol{u}$.*

Proof: Let$[\boldsymbol{u},\theta], [\boldsymbol{w},\vartheta] \in \boldsymbol{X}$. Then

$$\mathcal{N}([\boldsymbol{u},\theta]+[\boldsymbol{w},\vartheta]) - \mathcal{N}([\boldsymbol{u},\theta]) - \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w},\vartheta]) = \frac{1}{2}\,\mathcal{B}([\boldsymbol{w},\vartheta];\,[\boldsymbol{w},\vartheta]).$$

Since

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2}\,\mathcal{B}([\boldsymbol{w},\vartheta];\,[\boldsymbol{w},\vartheta])\|_{\boldsymbol{Y}} &= \|[b_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w},.);\, b_2(\vartheta,\boldsymbol{w},.)\|_{\boldsymbol{Y}} \\
&= \|b_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w},.)\|_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa} + \|b_2(\vartheta,\boldsymbol{w},.)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\le c_2\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa} + c_4\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa}\|\vartheta\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\le (c_2+c_4)\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa} + c_4\|\vartheta\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\le (c_2+c_4)\|[\boldsymbol{w},\vartheta]\|^2_{\boldsymbol{X}}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\|\mathcal{N}([\boldsymbol{u},\theta]+[\boldsymbol{w},\vartheta]) - \mathcal{N}([\boldsymbol{u},\theta]) - \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w},\vartheta])\|_{\boldsymbol{Y}} \to 0 \quad \text{for} \quad \|[\boldsymbol{w},\vartheta]\|_{\boldsymbol{X}} \to 0$$

The proof is complete.

Lemma 3. *Operator $\mathcal{S}$ is a linear continuous one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ onto $\boldsymbol{Y}$.*

Proof. Remind that $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$. The linearity and continuity of $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ and $\mathcal{S}$ are obvious. Since $(\!(.,.)\!)_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa}$ and $(\!(.,.)\!)_{W^{1,2}(\Omega)}$ are elliptic we get that $\mathcal{S}_1$ is a linear continuous one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ onto $\boldsymbol{Y}$.

Since $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ we obtain that operator $\mathcal{S}_2$ is compact. Consequently, $\mathcal{S}$ is operator of Fredholm type.

Suppose that there exists $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}$ such that $\mathcal{S}([\boldsymbol{u},\theta]) = 0$. Ellipticity of bilinear form $(\!(.,.)\!)_{W^{1,2}(\Omega)}$ implies that $\theta \equiv 0$. Then $\mathcal{S}([\boldsymbol{u},\theta]) = [(\!(\boldsymbol{u},.)\!)_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa};\,0] = [0,\,0]$ and ellipticity of bilinear form $(\!(.,.)\!)_{\mathbf{V}^{1,2}_\kappa}$ implies that $\boldsymbol{u} \equiv 0$ also. Consequently $\mathcal{S}$ is one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ and by [1, Theorem 6.6] $\mathcal{S}$ is onto $\boldsymbol{Y}$. The lemma is proved. □

Lemma 4. *Let $C > 0$ and $\mathcal{K} = \{[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X};\, \|[\boldsymbol{u},\theta]\|_{\boldsymbol{X}} \le C\} \otimes \{[\boldsymbol{w},\vartheta] \in \boldsymbol{X};\, \|[\boldsymbol{w},\vartheta]\|_{\boldsymbol{X}} \le C\} \subset \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}$. Then $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ is relatively compact set in $\boldsymbol{Y}$.*

Proof. Let $\{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\}, \{[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\} \subset \boldsymbol{X}$ such that $\|[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\|_{\boldsymbol{X}} \le C$ and $\|[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\|_{\boldsymbol{X}} \le C$. Since $\mathbf{V}^{1,2}_\kappa$ is a closed subspace of $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$, $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)$ and $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^3(\partial\Omega)$ there exist $[\boldsymbol{u},\theta], [\boldsymbol{w},\vartheta] \in \boldsymbol{X}$ and subsequences $\{[\boldsymbol{u}_{nk},\theta_{nk}]\} \subset \{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\}$ and $\{[\boldsymbol{w}_{nk},\vartheta_{nk}]\} \subset \{[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\}$ such that

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{nk} &\to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^4(\Omega), \\
\boldsymbol{u}_{nk} &\to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^3(\partial\Omega), \\
\theta_{nk} &\to \theta \quad \text{in} \quad L^4(\Omega),
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcll} \theta_{nk} & \to & \theta & \text{in} \quad L^3(\partial\Omega), \\ \boldsymbol{w}_{nk} & \to & \boldsymbol{w} & \text{in} \quad \mathbf{L}^4(\Omega), \\ \boldsymbol{w}_{nk} & \to & \boldsymbol{w} & \text{in} \quad \mathbf{L}^3(\partial\Omega), \\ \vartheta_{nk} & \to & \vartheta & \text{in} \quad L^4(\Omega), \\ \vartheta_{nk} & \to & \vartheta & \text{in} \quad L^3(\partial\Omega). \end{array}$$

Using (3.3), (3.4) and (3.3)–(3.6) we obtain

$$\mathcal{B}([\boldsymbol{u}_{nk}, \theta_{nk}], [\boldsymbol{w}_{nk}, \vartheta_{nk}]) \to \mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta], [\boldsymbol{w}, \vartheta]) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{Y}$$

The proof is complete. $\square$

Lemma 5. *Let $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$. Then $\mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta], .)$ is a linear compact operator from X into Y.*

Proof. The linearity of $B([\boldsymbol{u}, \theta], .)$ is obvious. Compactness of $\mathcal{B}$ follows immediately from the previous lemma. The proof is complete. $\square$

Remark 3. *Let $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$. By Lemmas 3 and 5 operator $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is the sum of one-to-one operator from X to Y (operator $\mathcal{S}$) and compact operator from $\boldsymbol{X}$ to $\boldsymbol{Y}$ (operator $\mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta], .)$). So, $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is an operator of Fredholm type). By [1, Theorem 6.6] $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ to Y iff $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is onto $\boldsymbol{Y}$.*

Using the Local Dipheomorphism Theorem we get immediately the following theorem.

Theorem 1. *Let $[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X}$ and $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ to Y and onto $\boldsymbol{Y}$. Then there exist an open neighbourhoods $\mathcal{U} \subset \boldsymbol{X}$ and $\mathcal{W} \subset \boldsymbol{Y}$ of points $[\boldsymbol{u}, \theta]$ and $\mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta])$, respectively, and $\mathcal{N}$ is a one-to-one operator from $\mathcal{U}$ onto $\mathcal{W}$.*

Remark 4. *Let $[\boldsymbol{u}, \theta], [\boldsymbol{w}, \vartheta] \in \boldsymbol{X}$, $[\boldsymbol{w}, \vartheta] \neq 0$ such that $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w}, \vartheta]) = 0$ and $t \in \mathbf{R}$. Then*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta] + t\,[\boldsymbol{w}, \vartheta]) &= \mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta]) + t\,\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w}, \vartheta]) + \frac{1}{2}\,t^2 \mathcal{B}([\boldsymbol{w}, \vartheta], [\boldsymbol{w}, \vartheta]) \\ &= \mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta]) + \frac{1}{2}\,t^2 \mathcal{B}([\boldsymbol{w}, \vartheta], [\boldsymbol{w}, \vartheta]). \end{aligned}$$

Conseqently $\mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta] + t\,[\boldsymbol{w}, \vartheta]) = \mathcal{N}([\boldsymbol{u}, \theta] - t\,[\boldsymbol{w}, \vartheta])$ for every $t \in \mathbf{R}$. It is easy to see that $\mathcal{N}$ is not one-to-one operator on any neighbourhood $\mathcal{U}$ of $[\boldsymbol{u}, \theta]$.

4 Regular and critical functions of operator $\mathcal{N}$

Definition 2. *Let $\mathbf{M}_R := \{[\boldsymbol{u}, \theta] \in \boldsymbol{X};\ \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is one-to-one operator from $\boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{Y}$ and onto$\boldsymbol{Y}\}$ and $\mathbf{M}_C := \boldsymbol{X} - \mathbf{M}_R$. We say that $\mathbf{M}_R$ and $\mathbf{M}_C$, respectively, are sets of regular and critical functions of operator $\mathcal{N}$.*

Lemma 6. $\mathbf{M}_R$ *is open and dense.*

Proof. It is easy to see that $\mathbf{M}_R$ is open in $\boldsymbol{X}$. Let $t \in \mathbf{R}$, $[\boldsymbol{u}, \theta], .) \in X$. Denote $\mathcal{A}_{[\boldsymbol{u},\theta]} = \{[\boldsymbol{w}, \vartheta];\ [\boldsymbol{w}, \vartheta] = t\,[\boldsymbol{u}, \theta],\ t \in \mathbf{R}\}$. Note that

$$\mathcal{G}(t\,[\boldsymbol{u}, \theta], .) = \mathcal{S} + t\,\mathcal{B}([\boldsymbol{u}, \theta], .).$$

Lemmas 3, 5 and [1, Theorem 6.8] imply that $t\,[\boldsymbol{u},\theta] \in \mathbf{M}_C$ only for isolated (consequently at most countable) set of values t, $t > 0$. Consequently, $\mathbf{M}_R$ is open and dense. The proof is complete. $\square$

Now we prove a stronger result, namely that $\mathbf{M}_R$ is weakly open.

Let $L > 0$,

$K_L := \{[\boldsymbol{w},\vartheta] \in X;\ \|[\boldsymbol{w},\vartheta]\|_{\boldsymbol{X}} = 1$ and $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w},\vartheta]) = 0$ for some $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}, \|[\boldsymbol{u},\theta]\|_{\boldsymbol{X}} \leq L\}$.

Lemma 7. *Let $L > 0$. Them K_L is a relatively compact set in $\boldsymbol{X}$.*

Proof. Let

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \{[\boldsymbol{v},\psi] \subset \boldsymbol{X};\ \|[\boldsymbol{v},\psi]\|_{\boldsymbol{X}} \leq L\}, \\ \mathcal{M}_2 &:= \{[\boldsymbol{v},\psi] \subset \boldsymbol{X};\ \|[\boldsymbol{v},\psi]\|_{\boldsymbol{X}} \leq 1\} \end{aligned}$$

and $[\boldsymbol{w},\vartheta] \in K_L$. Then there exists $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}$ such that

$$\mathcal{S}([\boldsymbol{w},\vartheta]) + \mathcal{B}([\boldsymbol{u},\theta],[\boldsymbol{w},\vartheta]) = 0,$$

so

$$[\boldsymbol{w},\vartheta] \in \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{B}(-[\boldsymbol{u},\theta],[\boldsymbol{w},\vartheta])) \subset \mathcal{S}^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2).$$

Consequently,

$$K_L \subset \mathcal{S}^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2).$$

Since $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ are bounded, Lemmas 3 and 5 imply that K_L is relatively compact in $\boldsymbol{X}$. The proof is complete. $\square$

Theorem 2. *$\mathbf{M}_R$ is weakly open.*

Proof. It is sufficient to prove that $\mathbf{M}_C = \boldsymbol{X} - \mathbf{M}_R$ is weakly closed. Let $\{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\} \subset \mathbf{M}_C$,

$$[\boldsymbol{u}_n,\theta_n] \to [\boldsymbol{u},\theta] \text{ weakly in } X. \tag{4.1}$$

We prove that $[\boldsymbol{u},\theta] \in \mathbf{M}_C$. There exists $\{[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\} \subset \boldsymbol{X}$, $\|[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\|_{\boldsymbol{X}} = 1$ such that

$$\mathcal{S}([\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]) + \mathcal{B}([\boldsymbol{u}_n,\theta_n],[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]) = 0. \tag{4.2}$$

Moreover, there exists $L > 0$ such that $\|[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\|_X \leq L$. Consequently, $\{[\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\} \subset K_L$. By (4.1) and Lemma 7, there exists $\{[u_{nk},\theta_{nk}]\} \subset [\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\} \subset \boldsymbol{X}$, $\{[\boldsymbol{w}_{nk},\vartheta_{nk}]\} \subset [\boldsymbol{w}_n,\vartheta_n]\} \subset \boldsymbol{X}$ and $[\boldsymbol{w},\vartheta] \in \boldsymbol{X}$ such that

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{nk} &\to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^4(\Omega), && (4.3)\\ \boldsymbol{u}_{nk} &\to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^3(\partial\Omega), && (4.4)\\ \theta_{nk} &\to \theta \quad \text{in} \quad L^4(\Omega), && (4.5)\\ \theta_{nk} &\to \theta \quad \text{in} \quad L^3(\partial\Omega), && (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{w}_{nk} & \to & \boldsymbol{w} & \text{in} \quad \mathbf{V}^{1,2}_{\kappa}(\Omega), \qquad (4.7) \\ \vartheta_{nk} & \to & \vartheta & \text{in} \quad W^{1,2}(\Omega). \qquad (4.8) \end{array}$$

Using(4.2)–(4.8) we get that

$$\mathcal{S}([\boldsymbol{w},\vartheta]) + \mathcal{B}([\boldsymbol{u},\theta],[\boldsymbol{w},\vartheta]) = 0.$$

We obtain that $[\boldsymbol{u},\theta] \in \mathbf{M}_C$. The theorem is proved. □

Remark 5. *Let $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}$. We have mentioned that $\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$ is a an operator of Fredholm type (see Remark 3). It is well known that*

$$\dim \ker \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]} < \infty.$$

Definition 3. *Let Λ is a function defined on $\boldsymbol{X}$ by*

$$\Lambda([\boldsymbol{u},\theta]) = \dim \ker \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}.$$

Lemma 8. *Let $[\boldsymbol{u},\theta] \in \boldsymbol{X}$ and $\{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\} \subset \boldsymbol{X}$ such that*

$$[\boldsymbol{u}_n,\theta_n] \to [\boldsymbol{u},\theta] \quad \textit{weakly in} \quad \boldsymbol{X}, \tag{4.9}$$

$j \in \mathbf{N}$ and $\Lambda([\boldsymbol{u}_n,\theta_n]) \geq j$. Then $\Lambda([\boldsymbol{u},\theta]) \geq j$.

Proof. Let $n \in \mathbf{N}$. By assumption there exist $[\boldsymbol{w}_{n,1},\vartheta_{n,1}], [\boldsymbol{w}_{n,2},\vartheta_{n,2}], \ldots, [\boldsymbol{w}_{n,j},\vartheta_{n,j}] \subset \ker \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]}$ such that

$$(([\boldsymbol{w}_{n,i},\vartheta_{n,i}],[\boldsymbol{w}_{n,k},\vartheta_{n,k}]))_{\boldsymbol{X}} = \delta_{i,k} \tag{4.10}$$

for every $i,k = 1,\ldots,j$, ($\delta_{i,k}$ denotes Kronecker delta). By (4.9) there exists $L > 0$ such that

$$\|[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\|_{\boldsymbol{X}} \leq L.$$

Then $[\boldsymbol{w}_{n,i},\vartheta_{n,i}] \in K_L$ for every $i = 1,\ldots,j$ and $n = 1,2,\ldots$. Consequently, there exist $\{[u_{nk},\theta_{nk}]\} \subset \{[\boldsymbol{u}_n,\theta_n]\}$, $\{[\boldsymbol{w}_{n_k,i},\vartheta_{n,i}]\} \subset [\boldsymbol{w}_{n,i},\vartheta_{n,i}]\}$ for every $i = 1,\ldots,j$ such that

$$\begin{array}{rcll} [\boldsymbol{w}_{n_k,i},\vartheta_{n_k,i}] & \to & [\boldsymbol{w}^*_i,\vartheta^*_i] & \text{strongly in } \boldsymbol{X}, \qquad (4.11) \\ {[u_{nk},\theta_{nk}]} & \to & [\boldsymbol{u},\theta] & \text{strongly in } \boldsymbol{L}^4(\Omega)\otimes L^4(\Omega) \text{ and } \mathbf{L}^3(\partial\Omega)\otimes L^3(\partial\Omega). \qquad (4.12) \end{array}$$

Using(4.11) and (4.12) we obtain

$$\mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}([\boldsymbol{w}^*_i,\vartheta^*_i]) = 0 \quad \text{for every } i = 1,\ldots,j.$$

Consequently, $\{[\boldsymbol{w}^*_1,\vartheta^*_1],\ldots,[\boldsymbol{w}^*_j,\vartheta^*_j]\} \subset \ker \mathcal{G}_{[\boldsymbol{u},\theta]}$. Moreover, (4.10) and (4.11) imply

$$(([\boldsymbol{w}^*_i,\vartheta^*_i],[\boldsymbol{w}^*_k,\vartheta^*_k]))_{\boldsymbol{X}} = \delta_{i,k}$$

for every $i,k = 1,\ldots,j$ and $\Lambda([\boldsymbol{u},\theta]) \geq j$. The proof is complete. □n

Theorem 3. *Let $L > 0$, Let $B_L = \{[\boldsymbol{w},\vartheta] \in \boldsymbol{X};\ \|[\boldsymbol{w},\vartheta]\|_{\boldsymbol{X}} \leq L\}$. Then function Λ is bounded on B_L.*

Proof. Since $\boldsymbol{X}$ is a Hilbert space, B_L is a weakly compact set. By the previous lemma, Λ is a weakly upper-semicontinuous function. Therefore Λ is bounded on B_L. □

References

[1] H. BREZIS: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer New York Dordrecht Heidelberg London. (2011).

[2] M. FEISTAUER, T. NEUSTUPA: On non–stationary viscous incompressible flow through a cascade of profiles. Math. Meth. Appl. Sci. 29 (2006) 1907–1941.

[3] M. FEISTAUER, T. NEUSTUPA: On some aspects of analysis of incompressible flow through cascades of profiles. Oper. Theory Adv. Appl, vol. 147, Birkhauser, Basel, (2004), pp. 257–276.

[4] M. FEISTAUER, T. NEUSTUPA: On the existence of a weak solution of viscous incompressible flow past a cascade of profiles with an arbitrarily large inflow. J. Math. Fluid Mech. 15 (2013), no. 4, 701–715.

[5] R. GLOWINSKI: Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokio-New York, (1984).

[6] S. KRAČMAR, J. NEUSTUPA: Modeling of the unsteady flow through a channel with an artificial outflow condition by the Navier-Stokes variational inequality. Mathematische Nachrichten 291 (2018), 1801-1814.

[7] S. KRAČMAR, J. NEUSTUPA: Modelling of flows of a viscous incompressible fluid through a channel by means of variational inequalities. ZAMM 74, 637-639, (1994).

[8] S. KRAČMAR, J. NEUSTUPA: A weak solvability of a steady variational inequality of the Navier-Stokes type with mixed boundary conditions. Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysis, Nonlinear Anal. 47, 4169–4180, (2001).

[9] P. KUČERA: Remark on Critical Solutions of Steady Boussinesq Equations with Mixed Boundary Conditions. Proceedings of seminar Topical Problems of Fluid Mechanics 2000 (Praha 2000), Institute of Thermomechanics AS CR, Czech Technical University, (2000), 49-52. Editors: K. Kozel, J.Příhoda.

[10] P. KUČERA: The time-periodic solutions of the Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3 (2010), no. 2, 325–337.

[11] P. KUČERA, Z. SKALÁK: Local Solutions to the Navier-Stokes Equations with Mixed Boundary Conditions. Acta Applicandae Mathematicae, 54, Kluwer Academic Publishers, 275-288, (1998).

[12] A. KUFNER, O. JOHN O., S. FUČÍK: Function spaces. Academia, Prague, (1977).

[13] R. RANNACHER: Numerical analysis of the Navier-Stokes equations. Proceedings of conference ISNA'92, part I., 361-380, (1992).

[14] T. NEUSTUPA:: A steady flow through a plane cascade of profiles with an arbitrarily large inflow - the mathematical model, existence of a weak solution. Appl. Math. Comput. 272 (2016), 687–691.

[15] A.E. TAYLOR: Introduction to Functional Analysis. John Wiley, New York (1958).

KAPITOLA 3

LOKÁLNÍ EXISTENCE SILNÝCH ŘEŠENÍ NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC S NAVIEROVÝMI OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

Součástí této kapitoly je text nazvaný ”Regularity Criterion for Local in Time Existence of Strong Solutions to the Navier-Stokes Equations with Navier's Boundary Conditions and with Initial Velocities in $L^3_\sigma(\Omega)$”. Jde o napsaný příspěvek připravený k publikaci. Text je zde vložen v plném originálním znění, tj. v angličtině. Autory připravované publikace budou Petr Kučera, Zdeněk Skalák a Jitka Píšová, každý z autorů bude mít třetinový podíl na autorství. Příspěvek obsahuje vlastní značení, vlastní číslování rovnic, definic, vět a poznámek, má i vlastní seznam použité literatury. I zde jsou doplněna čísla stránek tak, aby navazovala na dosavadní text.

Hlavní výsledek článku je rozšíření výsledků Robinsona a kol. (viz úvod a použitá literatura článku), kteří řešili systém Navierových-Stokesových rovnic na celém prostoru a na prostorově periodické oblasti.

V přiloženém textu se zaměřujeme na nestacionární Navierovu-Stokesovu úlohu s Navierovými okrajovými podmínkami na omezené oblasti s dostatečně hladkou hranicí. Navazujeme na příspěvky uvedené v úvodu textu a pomocí změny okrajových podmínek rozšiřujeme oblast, pro kterou existuje silné řešení.

Hlavní věta příspěvku nám poskytuje podmínku pro lokální existenci silných řešení daného systému.

Regularity criterion for local in time existence of strong solutions to the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions and with initial velocities in $\boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$.

Abstract

In this contribution we study the system of the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions on the bounded smooth domain. The main theorems give conditions for local in time existence of strong solutions to this system if initial velocity $\mathbf{u}_0 \in L^3(\Omega)^3$. We report on an extension of results of Robinson *et al* for solutions of the Navier-Stokes system on the whole space or on the space-periodic domains.

Mathematics Subject Classification (2000). Primary: 35 Q 30, 35 B 35; secondary: 76 D 05, 76 E 09.

Keywords. Navier–Stokes equations, strong solution, local in time existence of strong solution

1 Introduction

The problem of local in time existence of strong solutions of the Navier-Stokes equations has been studied by several authors. There exist a series of papers about solution of the Navier-Stokes equations in which problem of existence of local in time strong solutions has been studied. Most of these papers consider the problem with homogeneous Dirichlet boundary conditions. The existence of a strong solution of this problem is proved only on some sufficiently small time interval and under additional conditions on the initial velocity. In [10], Kiselev and Ladzyhenskaja have proved this result for initial velocity $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. In [6], Farwig, Sohr and Varnhorn have shown a complete analysis of relation between initial velocities and local in time existence of corresponding strong solutions.

In [21, Chapter 11], Robinson, Rodrigo and Sadowski have studied solutions of the Navier-Stokes equations on the whole space with initial velocity in $\boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$. They have shown a sufficient condition for existence of strong solutions of the Navier-Stokes equations on a given time interval $(0, T')$. They have proved also the same result for solution of the Navier-Stokes equations with space periodic boundary conditions. In[16], Kučera, Píšová and Vacková have proved similar result for solutions of the Navier-Stokes equations with boundary conditions of Navier type on bounded smooth convex domain. In [13], Kučera and Neustupa have studied the problem of the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions and with initial velocity in $\boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$. They have proved that there exists solution of the Navier-Stokes equations for given initial velocity $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$ which is strong on some interval $(0, T')$.

In this paper we study solutions of the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions with initial velocity in $\boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$. We prove a sufficient condition for existence of strong solutions of the Navier-Stokes equations on a given time interval $(0, T')$.

Let $0 < T \leq \infty$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded smooth domain with the boundary $\partial\Omega$ of the class $C^{2+\beta}$. We denote $Q_T = \Omega \times (0, T)$. We study the following initial–boundary value Navier–Stokes problem

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu\, \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P \;=\; \mathbf{0} \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \;=\; 0 \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.2}$$

$$\text{a) } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,=\, 0, \qquad \text{b) } [\mathbb{T}_d(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_\tau + \gamma\, \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}(\,.\,, 0) \;=\; \mathbf{u}_0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

By $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ and $\mathcal{P}$ we denote the velocity of motion and the associated pressure. Symbols $\mathbf{n}$ and ν denotes the outer normal vector field on $\partial\Omega$ and the kinematic coefficient of viscosity, respectively. For simplicity we suppose $\nu = 1$. Equations (1.1), (1.2) describe the motion of a viscous incompressible fluid in domain Ω. Boundary conditions (1.3) which are called Navier's boundary conditions have been formulated in 1824. Symbol $\mathbb{T}_d(\mathbf{u})$ denotes the dynamic stress tensor associated with the velocity field $\mathbf{u}$. By $[\mathbb{T}_d(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_\tau$ we denote the tangential component of the vector $\mathbb{T}_d(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$. We suppose that the considered fluid is Newtonian, consequently $\mathbb{T}_d(\mathbf{u}) = 2\nu\, (\nabla \mathbf{u})_s$, where $(\nabla \mathbf{u})_s$ is the symmetric part of $\nabla \mathbf{u}$. Recall that the "whole" stress tensor is $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbf{u}, \mathcal{P}) = -\mathcal{P}\mathbb{I} + \mathbb{T}_d(\mathbf{u})$. Factor γ is the coefficient of friction between the fluid and the boundary. γ is supposed to be constant, $\gamma > 0$.

If we suppose that coefficient γ of friction between the fluid and the boundary is zero (the case of the so called perfect slip) and the curvature of the wall is neglected then (1.3) is equivalent to boundary conditions

$$\text{a) } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,=\, 0, \quad \text{b) } \mathbf{curl}\, \mathbf{u} \times \mathbf{n} \,=\, \mathbf{0} \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.5}$$

Boundary conditions (1.5) are so called boundary condition of Navier type. Navier–Stokes equations with boundary conditions (1.5) are studied, e.g., in papers [1], [2], [3], [5], [18], [24].

Notation of function spaces and operators.

- We denote vector–valued functions and spaces of such functions by boldface letters.
- Symbol c denotes a generic constant, i.e. a constant whose value may vary from term to term. On the other hand, numbered constants have fixed values throughout the whole paper.
- $\mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3) = \{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^3;\, \operatorname{supp} \phi \subset \Omega,\, \operatorname{div} \phi \equiv 0\}$.
- $\boldsymbol{L}^s_\sigma(\Omega)$ is a closure of $\mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ in $\boldsymbol{L}^s(\Omega)$.
- $\mathbf{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega$ is a closure of $\mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ in $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$.
- The Hemholtz projection of $\boldsymbol{L}^s(\Omega)$ onto $\boldsymbol{L}^s_\sigma(\Omega)$ is denoted by P_σ. The following holds

$$\boldsymbol{L}^s(\Omega) = \boldsymbol{L}^s_\sigma(\Omega) \oplus G(\Omega) \tag{1.6}$$

where $G(\Omega) = \{\nabla p;\, p \in \mathbf{W}^{1,s}(\Omega)\}$, see, e.g., [7] for the proof.

- $\mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega) := \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^2_{\sigma}(\Omega)$. (Functions in this space are divergence–free in Ω and have the normal component on $\partial\Omega$ equal to zero in the sense of traces.)
- $\| \,.\, \|_k$ and $\| \,.\, \|_{l,k}$, respectively, denote the L^k–norm and the $W^{l,k}$–norm of a scalar–valued or vector–valued or tensor–valued function in Ω.
- The scalar product in $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ is denoted by $(\,.\,,\,.\,)_2$.
- The dual space to $\mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ is denoted by $\mathbf{W}^{-1,2}_{\sigma}(\Omega)$. The duality between the elements of $\mathbf{W}^{-1,2}_{\sigma}(\Omega)$ and $\mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ is denoted by $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\Omega}$ and the norm in $\mathbf{W}^{-1,2}_{\sigma}(\Omega)$ is denoted by $\| \,.\, \|_{-1,2}$.

Definition 1. *Let $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^2_{\sigma}(\Omega)$. We call $\mathbf{u} \in L^{\infty}(0,T;\, \boldsymbol{L}^2_{\sigma}(\Omega)) \cap L^2(0,T;\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega))$ a weak solution to the problem (1.1)–(1.4) if*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \big[-\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\phi} + 2\nu(\nabla\mathbf{u})_s : \nabla\boldsymbol{\phi}\big] + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \gamma\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\phi}|_{t=0}$$

for all infinitely differentiable divergence–free test functions $\boldsymbol{\phi}$ in $\Omega\times[0,T]$ such that $\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega\times(0,T)$ and $\boldsymbol{\phi}|_{t=T} = \mathbf{0}$.

The boundary condition (1.3b) does not explicitly appear in the weak formulation of the problem (1.1)–(1.4). However, it can be shown by standard methods that if the weak solution is smooth then it satisfies (1.3b).

Definition 2. *A weak solution $\mathbf{u}$ of the problem (1.1)–(1.4) is called a strong solution if there exist real numbers q; s such that $3 < q < \infty,\ 2 < s < \infty,\ \frac{3}{q} + \frac{2}{s} = 1$ and*

$$\mathbf{u} \in L^s_{loc}((0,T'];\, \boldsymbol{L}^q(\Omega))$$

for every T', $0 < T' \le T$, $T' < \infty$.

It is well known that if $\mathbf{u}$ is a strong solution of the problem (1.1)–(1.4) then

$$\mathbf{u} \in L^2_{loc}((0,T'];\, \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma}(\Omega)) \cap L^{\infty}_{loc}((0,T'];\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)), \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u}' \in L^2_{loc}((0,T'];\, \boldsymbol{L}^2_{\sigma}(\Omega)) \tag{1.8}$$

and

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}((0,T'];\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)) \tag{1.9}$$

for every T', $0 < T' \le T$, $T' < \infty$ (see. e.g. [13, Remark 2.]). Moreover, if $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ then

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T';\, \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma}(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,T';\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)), \tag{1.10}$$

$$\mathbf{u}' \in L^2(0,T';\, \boldsymbol{L}^2_{\sigma}(\Omega)) \tag{1.11}$$

and

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T'];\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)), \tag{1.12}$$

for every T', $0 < T' \le T$, $T' < \infty$.

Results (1.7)–(1.12) are well known if we solve the Navier-Stokes system with the homogeneous Dirichlet boundary condition

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \tag{1.13}$$

(see e.g. [9, Theorem 6.1]) and [9, Lemma 5.4]). These results can be proved with minor technical differences also in the case when solutions satisfy the boundary conditions (1.3) (see [13, Remark 2]).

Definition 3. *Let $\mathbf{u}$ be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4). We say that $\mathbf{u}$ satisfies the energy inequality if*

$$\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + 4\int_0^t \|(\nabla\mathbf{u}(\tau))_s\|_2^2 + 2\gamma\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{2;\,\partial\Omega}^2 \;\leq\; \|\mathbf{u}_0\|_2^2 \tag{1.14}$$

for all $t \in (0,T)$.

Definition 4. *Let $\mathbf{u}$ be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4). We say that $\mathbf{u}$ satisfies the energy equality if*

$$\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + 4\int_0^t \|(\nabla\mathbf{u}(\tau))_s\|_2^2 + 2\gamma\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{2;\,\partial\Omega}^2 \;=\; \|\mathbf{u}_0\|_2^2 \tag{1.15}$$

for all $t \in (0,T)$.

Remark 1. *Let $\mathbf{u}$ be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4) with an initial velocity $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$ satisfying the energy inequality. Since $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ for almost every $s \in (0,T)$*

$$\|\nabla\mathbf{u}(s)\|_2^2 \;\leq\; c\,\|(\nabla\mathbf{u})_s\|_2^2 \tag{1.16}$$

(see e.g. [23, Lemma 4.]). Then there exist c_1 and c_2 such that

$$\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|_2^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{2;\,\partial\Omega}^2 \;\leq\; c_1\,\|\mathbf{u}_0\|_2^2 \;\leq\; c_2\,\|\mathbf{u}_0\|_3^2 \tag{1.17}$$

Results mentioned in the following three remarks are well known if we solve the Navier-Stokes equation with boundary condition (1.13). For our problem, see [13, Lemma 1 and Lemma 2].

Remark 2. *Let $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$. Then there exists a weak solution $\mathbf{u}$ to the problem (1.1)–(1.4), satisfying (1.14).*

Remark 3. *Let $\mathbf{u}$ be a weak solution to the problem (1.1)–(1.4). Suppose that $\mathbf{u} \in L^r(0,T;\,\boldsymbol{L}^s(\Omega))$ for some $r,\ s \in \mathbb{R}$ such that $s > 3$ and $2/r + 3/s = 1$. Then $\mathbf{u}$ satisfies (1.15).*

Remark 4. *Let $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ be two weak solutions to the problem (1.1)–(1.4). Suppose that $\mathbf{u}_1$ satisfies the energy inequality (1.14) (for all $t \in (0,T)$) and $\mathbf{u}_2 \in L^r(0,T;\,\boldsymbol{L}^s(\Omega))$ for some $r,\ s \in \mathbb{R}$ such that $s > 3$ and $2/r + 3/s = 1$. Then $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.*

Now we define the non-steady Stokes system.

$$\partial_t\boldsymbol{\varphi} - \Delta\boldsymbol{\varphi} + \nabla\mathcal{Q} = \mathbf{0} \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} \;=\; 0 \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.19}$$

$$\text{a) } \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} \;=\; 0, \qquad \text{b) } [\mathbb{T}_d(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{n}]_\tau + \gamma\,\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \qquad \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\,.\,,0) \;=\; \boldsymbol{\varphi}_0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.21}$$

Definition 5. Let $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$. A function $\boldsymbol{\varphi} \in L^\infty\big(0,T;\, \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T;\, \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)\big)$ is said to be a weak solution of the problem (1.18)–(1.21) if

$$\int_0^T \int_\Omega \big[-\boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} + 2\nu (\nabla \boldsymbol{\varphi})_s : \nabla \boldsymbol{\phi}\big] \ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\phi} = \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{\phi}|_{t=0}$$

for all infinitely differentiable functions $\boldsymbol{\phi}$ in $\overline{Q_T}$ such that $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,t) \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ for all $0 \le t \le T$ and $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,T) = \mathbf{0}$.

In the following theorem we formulate our main result.

Theorem 1. *There exist absolute constants $\epsilon > 0$, c_3 and c_4 with the following property: Let $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \tau \le T$ and $\boldsymbol{\varphi}$ be a solution of (1.18)–(1.21) with initial velocity $\mathbf{u}_0$ such that*

$$\|\mathbf{u}_0\| \int_0^\tau \big\|\nabla \boldsymbol{\varphi}\, |\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2 + c_3 \|\mathbf{u}_0\|_3^3\, \tau^{1/4} + c_4 \|\mathbf{u}_0\|_3^3\, \tau^{1/12} < \epsilon. \tag{1.22}$$

Then there exists a strong solution $\mathbf{u}$ of the problem (1.1)–(1.4) on the time interval $(0,\tau)$.

2 Auxiliary results

Now we mention some estimates and lemmas which will be applied later. The following estimate is proved in [13, Estimate (2.1)]. Suppose that $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$. Then

$$\|\mathbf{v}\|_9^3 \le c_5 \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 |\mathbf{v}|. \tag{2.1}$$

Lemma 1. *Let $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$. Then there exists $q \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ such that*

$$\mathbf{v}|\mathbf{v}| = P_\sigma(\mathbf{v}|\mathbf{v}|) + \nabla q. \tag{2.2}$$

Moreover, the following estimates hold.

$$\big\|D^2 q\big\|_{3/2} \le \|\, \nabla \mathbf{v} |\mathbf{v}|\, \|_{3/2} \le \big\|\nabla \mathbf{v} |\mathbf{v}|^{1/2}\big\|_2 \big\|\mathbf{v}\big\|_3^{1/2} \tag{2.3}$$

$$\|\nabla q\|_2 \ \le\ \big\|D^2 q\big\|_{3/2} \le \big\|\nabla \mathbf{v} |\mathbf{v}|^{1/2}\big\|_2 \big\|\mathbf{v}\big\|_3^{1/2}. \tag{2.4}$$

Proof. Identity (2.2) is well known (see e.g. [8]). Applying operator div to 2.2 and using the fact that $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ on $\partial\Omega$ we obtain

$$\Delta q = \operatorname{div}(\mathbf{v}|\mathbf{v}|) \quad \text{in } \Omega \qquad \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega.$$

Applying very famous result of the theory of singular integral (see e.g. [4, Theorems 4.12 and 4.13]) we obtain (2.3). $\square$

The following lemma is very similar to lemma, which is proved at [13, Lemma 3]. Because we will need some other estimates, we do it here. During the proof we will refer to the parts of the proof of cited lemma.

Remark 5. *Let $\boldsymbol{\varphi}$ be a solution of (1.18)–(1.21) with $\varphi_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$ and $t \in (0,T]$.*

Multiplying formally equation (1.18) by $2\boldsymbol{\varphi}$, using the simple identity $\Delta\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{div}(\nabla\boldsymbol{\varphi})_s$, integrating over Ω, applying the boundary conditions (1.20) and integrating over time interval $(0,t)$ one can obtain the identity

$$\|\varphi(t)\|_2^2 + 4\int_0^t \|(\nabla\boldsymbol{\varphi})_s\|_2^2 + 2\gamma\int_0^t\int_{\partial\Omega}|\boldsymbol{\varphi}|^2 \;=\; \|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_2^2.$$

Since $\boldsymbol{\varphi}(s) \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$

$$\|\nabla\boldsymbol{\varphi}(s)\|_2^2 \;\le\; c\,\|(\nabla\boldsymbol{\varphi})_s\|_2^2 \tag{2.5}$$

for almost every $s \in (0,T)$ (see e.g. [23, Lemma 4.]). Therefore there exist c_8 and c_9 such that

$$\|\varphi(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 + \int_0^t\int_{\partial\Omega}|\boldsymbol{\varphi}|^2 \;=\; c_8\,\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_2^2 \;\le\; c_9\,\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_3^2. \tag{2.6}$$

Lemma 2. *Let $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega)\cap\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ and $\nabla q = (I-P_\sigma)(\mathbf{v}|\mathbf{v}|)$. Then*

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot P_\sigma(\mathbf{v}|\mathbf{v}|) = {}& \int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{v}| + \frac{4}{9}\int_\Omega \big|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big|^2 \\ & - \int_{\partial\Omega}\big[(\nabla\mathbf{v})^T\cdot\mathbf{n}\big]\cdot\mathbf{v}|\mathbf{v}| + \int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot\nabla q.\end{aligned} \tag{2.7}$$

The last two integrals on the right hand side can be estimated as follows:

$$\Big|\int_{\partial\Omega}\big[(\nabla\mathbf{v})^T\cdot\mathbf{n}\big]\cdot\mathbf{v}|\mathbf{v}|\;\Big| \;\le\; \xi\,\big\|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2 + c_6(\xi)\;\|\mathbf{v}\|_2^{3/2}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{3/2}, \tag{2.8}$$

$$\Big|\int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot\nabla q\Big| \;\le\; \xi\int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{v}| + c_7(\xi)\,\|\mathbf{v}\|_2^{7/6}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{11/6} \tag{2.9}$$

where ξ is an arbitrary positive number.

Proof. The identity (2.7) is proved in [13, Lemma 6]. The following identities and estimates are also verified in the proof of the cited lemma.

$$\int_{\partial\Omega}\big[(\nabla\mathbf{v})^T\cdot\mathbf{n}\big]\cdot\mathbf{v}\,|\mathbf{v}|\;\mathrm{d}S \;=\; -\int_{\partial\Omega}|\mathbf{v}|^3\;\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega}\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|\mathbf{v}|\;\mathrm{d}S \;\le c\,\|\mathbf{v}\|_{3;\,\partial\Omega}^3.$$

Using the continuity of the operator of traces from $\mathbf{W}^{2/3,2}(\Omega)$ to $\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)$ and interpolating the norm $\|\,.\,\|_{2/3,2}$ between $\|\,.\,\|_{1,2}$ and $\|\,.\,\|_2$, and applying Young's inequality, we get

$$\|\mathbf{v}\|_{3;\,\partial\Omega}^3 = \big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_{2;\,\partial\Omega}^2 \le c\,\big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_{2/3,2}^2 \;\le c\,\big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_{1,2}^{4/3}\,\big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^{2/3} \;=$$

$$c\left(\big\|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2 + \big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2\right)^{2/3}\big\||\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^{2/3} =\; c\left(\big\|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_3^3\right)^{2/3}\|\mathbf{v}\|_3$$

$$\le\; c\left(\big\|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_3^3\right)^{2/3}\|\mathbf{v}\|_2^{1/2}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{1/2} \le\; \xi\,\big\|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big\|_2^2 + c(\xi)\,\|\mathbf{v}\|_2^{3/2}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{3/2}.$$

The proof of (2.8) is complete.

By [13, (2.19)]

$$\Big|\int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot\nabla q\Big| \;=\; \Big|-\int_{\partial\Omega}\mathbf{v}\cdot\nabla q + 2\int_{\partial\Omega}\nabla q\cdot\nabla\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\Big|.$$

Using (2.4) and the continuity of the operator of traces from $\mathbf{W}^{2/3,2}(\Omega)$ to $\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)$ (see e.g. [17, p. 387]) we obtain

$$\Big|\int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot\nabla q\,\Big| \;\le\; c\,\|\nabla q\|_{2,\,\partial\Omega}\|\mathbf{v}\|_{2,\,\partial\Omega} \le\; \|\nabla\mathbf{v}|\mathbf{v}|^{1/2}\|_2\|\mathbf{v}\|_3^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{2/3,2} \le$$

$$\|\nabla\mathbf{v}|\mathbf{v}|^{1/2}\|_2\|\mathbf{v}\|_2^{1/4}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{1/4}\|\mathbf{v}\|_2^{1/3}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{2/3} \le$$

$$\xi\|\nabla\mathbf{v}|\mathbf{v}|^{1/2}\|_2^2 + c(\xi)\|\mathbf{v}\|_2^{7/6}\|\nabla\mathbf{v}\|_2^{11/6}$$

The proof of (2.9) is complete. □

Remark 6. *Let Let* $\mathbf{v}\in\mathbf{W}^{1,3}(\Omega)\cap\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$. *The estimate*

$$\|\mathbf{v}\|_2 \le c\,\|\nabla\mathbf{v}\|_2$$

and estimates (2.8) and (2.9) imply

$$\Big|\int_{\partial\Omega}\big[(\nabla\mathbf{v})^T\cdot\mathbf{n}\big]\cdot\mathbf{v}|\mathbf{v}|\,\Big| \;\le\; \xi\int_\Omega\big|\nabla|\mathbf{v}|^{3/2}\big|^2 \;+ c_{10}(\xi)\,\|\mathbf{v}\|_2\|\nabla\mathbf{v}\|_2^2, \tag{2.10}$$

$$\Big|\int_\Omega \Delta\mathbf{v}\cdot\nabla q\,\Big| \;\le\; \xi\int_\Omega|\nabla\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{v}|\;\mathrm{d}\mathbf{x} + c_{11}(\xi)\,\|\mathbf{v}\|_2\|\nabla\mathbf{v}\|_2^2 \tag{2.11}$$

The following lemma is proved in [21].

Lemma 3. *Let* $c_{12}>0$, η,ϑ *and* ς *are real-valued, non-negative functions which are continuous on* $[0,\tau)$, $\eta\in\mathcal{C}(0,\tau)$, $\eta(0)=0$ *and the inequality*

$$\eta'(t)+\vartheta(t) \;\le\; c_{12}\,\eta(t)\,\vartheta(t)+\varsigma(t) \tag{2.12}$$

holds on $(0,\tau)$. *Put* $D=\int_0^\tau\varsigma(t)\,dt$. *If*

$$D<\frac{1}{4c_{12}} \tag{2.13}$$

then

$$\sup_{t\in(0,\tau)}\eta(t)\le 2D<\frac{1}{2c_{12}} \tag{2.14}$$

and

$$\int_0^\tau\vartheta(t)\;dt\le 2D<\frac{1}{2c_{12}}. \tag{2.15}$$

Remark 7. *Let $\boldsymbol{\varphi}$ be a solution of (1.18)–(1.21) with $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$. Multiplying (1.18) by $P_\sigma(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|)$, we obtain*

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\varphi}\|_3^3 + \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2|\boldsymbol{\varphi}| + \frac{4}{9}\int_\Omega \big|\nabla|\boldsymbol{\varphi}|^{3/2}\big|^2 = \int_{\partial\Omega}\big[(\nabla\boldsymbol{\varphi})^T\cdot\mathbf{n}\big]\cdot\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}| - \int_\Omega \Delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla q,$$

where $\nabla q = \boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}| - P_\sigma(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|)$. Integrating the last equality over $(0,t)$, $0 < t \le T$, and using (2.7), (2.10) and (2.11) we get

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_3^3 + 3\int_0^t\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2|\boldsymbol{\varphi}| + \int_0^t\int_\Omega \big|\nabla|\boldsymbol{\varphi}|^{3/2}\big|^2 \le \|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_3^3 + c_{13}\int_0^t \|\boldsymbol{\varphi}\|_2\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2^2,$$

where $c_{13} = 3\,(c_6(1/18) + c_7(1/18))$. Put $c_{14} = 1 + c_{13}\,c_9$. Using (2.6) we obtain

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_3^3 + 3\int_0^t\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2|\boldsymbol{\varphi}| + \int_0^t\int_\Omega \big|\nabla|\boldsymbol{\varphi}|^{3/2}\big|^2 \le c_{14}\,\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_3^3. \tag{2.16}$$

Remark 8. *Let $\mathbf{u}$ be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4) with an initial velocity $\mathbf{u}_0$ and $\boldsymbol{\varphi}$ be a weak solution of the problem (1.18)–(1.21) with the same initial velocity $\mathbf{u}_0$. Let*

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}. \tag{2.17}$$

Note that $\boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}$ and $\boldsymbol{\psi}$ satisfies Navier's boundary conditions for the same constant γ. Put $c_{15} = 2\,(c_8 + c_1)$ and $c_{16} = 2\,(c_9 + c_2)$. Then

$$\|\boldsymbol{\psi}(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^2 + \int_0^t\int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\psi}|^2 \le c_{15}\,\|\mathbf{u}_0)\|_2^2 \le c_{16}\,\|\mathbf{u}_0\|_3^2. \tag{2.18}$$

3 Proof of Theorem 1.

By assumption, $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)$. Then there exist a weak solution $\mathbf{u}$ of the problem (1.1)–(1.4) which satisfies (1.14) and T', $0 < T' \le T$, such that $\mathbf{u}$ is strong on $(0, T')$ (see [13, Lemma 3.]. Put

$$\varsigma = \sup\{\varsigma';\ \varsigma',\ \text{such that } \mathbf{u} \text{ is the strong solution on } (0,\varsigma')\}. \tag{3.1}$$

Then $\varsigma \ge T' > 0$.

We prove that $\varsigma \ge \tau$. Suppose by contradiction that $\varsigma < \tau$. It is sufficient to prove that

$$\mathbf{u} \in C([0,\varsigma];\ \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega)). \tag{3.2}$$

By (3.2), $\mathbf{u}(\varsigma) \in \boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega))$. Consequently, there exists $\varsigma^* > \varsigma$ such that $\mathbf{u}$ is a strong solution on $(0,\varsigma^*)$ and we obtain the contradiction with (3.1).

Let $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}$ such that $\boldsymbol{\psi}$ is solution of the system

$$\boldsymbol{\psi}' - \Delta\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + \nabla P = 0, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\psi}(0) = 0 \tag{3.4}$$

and $\boldsymbol{\varphi}$ is the solution of the problem (1.18)–(1.21) with the initial velocity $\mathbf{u}_0$. By Lemma 1, there exists $q \in \mathbf{W}^{1,3/2}(\Omega)$ such that

$$\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}| = \mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|) + \nabla q. \tag{3.5}$$

Put $c_{17} = c_6(1/3)$ and $c_{18} = c_7(1/3)$. Multiplying (3.3) by $\mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|)$ on the time interval $(0,\varsigma)$, integrating it over Ω and using (2.7)–(2.9), (3.5) and a well-known identity

$$\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big) = \big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big) = 0$$

(see, e.g., [22, Lemma 3.2.1]) we obtain

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\psi}\|_3 + \|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^2 + \frac{4}{9}\|\nabla|\boldsymbol{\psi}|^{3/2}\|_2^2 \le \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| \le \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad \frac{1}{3}\,\|\nabla|\boldsymbol{\psi}|^{3/2}\|_2^2 + c_{17}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2} + \frac{1}{3}\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^2 + c_{18}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{7/6}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{11/6}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\psi}\|_3 + \frac{2}{3}\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^2 + \frac{1}{9}\|\nabla|\boldsymbol{\psi}|^{3/2}\|_2^2 \le \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| \le \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \big|\big(\!\big((\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\,,\,\nabla q\big)\!\big)\big| + \\
&\qquad c_{17}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2} + c_{18}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{7/6}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{11/6} = \\
&\qquad I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + c_{17}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2} + c_{18}\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{7/6}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{11/6} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Integrating by parts and applying (2.1), (2.4) and (2.16) we infer

$$\begin{aligned}
I_1 &\le c\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_{3/2}\|\boldsymbol{\psi}\|_6\|\boldsymbol{\varphi}\|_6 \le c\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2\|\boldsymbol{\psi}\|_3^{1/2}\|\boldsymbol{\psi}\|_9^{3/4}\|\boldsymbol{\psi}\|_3^{1/4}\|\boldsymbol{\varphi}\|_9^{3/4}\|\boldsymbol{\varphi}\|_3^{1/4} \le \\
&\quad c\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^{3/2}\|\boldsymbol{\psi}\|_3^{3/4}\|\boldsymbol{\varphi}\|_9^{3/4}\|\boldsymbol{\varphi}\|_3^{1/4} \le \qquad (3.7)\\
&\quad \frac{1}{15}\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^2 + c_{19}\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2^2\|\boldsymbol{\psi}\|_3^3 + \frac{1}{4}\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\|_2^2\|\mathbf{u}_0\|_3 \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$I_2 \le c\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_{3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_6^2 \le c\,\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\|_2\|\boldsymbol{\psi}\|_3^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_9^{3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_3^{1/2} \le$$

$$\frac{1}{15}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{20}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3+\frac{1}{4}\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\mathbf{u}_0\big\|_3 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\le c\,\big\|D^2 q\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_6^2 \le\ c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_9^{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{1/2} \le \\ &c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3 \le\ \frac{1}{15}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{21}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} I_4 &\le c\,\big\|D^2 q\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_6^2 \le\ c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_9^{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_3^{1/2} \le \\ &\frac{1}{15}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{22}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3+\frac{1}{4}\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\mathbf{u}_0\big\|_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$I_5+I_6 \le c\,\big(I_3+I_4\big)\ \le\ \frac{1}{15}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{23}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3+\frac{1}{4}\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2\big\|\mathbf{u}_0\big\|_3 \tag{3.12}$$

Set $c_{24}=3\,(c_{19}+c_{20}+c_{21}+c_{22}+c_{23})$. Using estimates (3.6)–(3.12) we obtain

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3+\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2 \le\ c_{24}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\,\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3+ \\ &\qquad 3\,\big\|\mathbf{u}_0\big\|_3\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{17}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}+c_{18}\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{7/6}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{11/6}. \end{aligned}$$

Put

$$\begin{aligned} &\theta(t)=\big\|\boldsymbol{\psi}(.,t)\big\|_3, \\ &\vartheta(t)=\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}(.,t)|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2, \\ &\varsigma(t)=3\,\big\|\mathbf{u}_0\big\|_3\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_{17}\,\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{3/2}+c_{18}\|\boldsymbol{\psi}\|_2^{7/6}\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_2^{11/6}. \end{aligned}$$

Put $c_3=\frac{1}{3}\,c_{17}\,c_9^{3/2}$ and $c_4=\frac{1}{3}\,c_{18}\,c_9^{3/2}$. Let $0<\tau<T$. One can verify that

$$\int_0^\tau \varsigma\ \le\ 3\,\|\mathbf{u}_0\|_3\,\int_0^\tau \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2+3\,c_3\|\mathbf{u}_0\|_3^3\,\tau^{1/4}+3\,\|\mathbf{u}_0\|_3^3\tau^{1/12}.$$

Put $\epsilon=\frac{1}{12\,c_{24}}$.If $\tau\le\varsigma$ the theorem is proved. Suppose by contradiction $\varsigma<\tau$. Since

$$\|\mathbf{u}_0\|\,\int_0^\tau \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2+c_3\|\mathbf{u}_0\|_3^3\,\tau^{1/4}+c_4\|\mathbf{u}_0\|_3^3\,\tau^{1/12}<\epsilon.$$

(2.13) is satisfied and we get by Lemma 3 and by (2.1)

$$\int_0^\varsigma \big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_9^3 \le\ c_5\,\int_0^\varsigma \big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2<\frac{1}{2\,c_{24}}<\infty.$$

The last inequalities, (2.1) and (2.16) imply that $\mathbf{u}\in L^3(0,\varsigma;\,\boldsymbol{L}^9(\Omega))$. Then, $\mathbf{u}\in C([0,\varsigma];\,\boldsymbol{L}^3_\sigma(\Omega))$. Since (3.2) holds we obtain the contradiction with (3.1). Consequently, $\tau\le\varsigma$ and theorem is proved.

References

[1] H. Beirão da Veiga, F. Crispo: Sharp inviscid limit results under Navier type boundary condition. An L^p theory. *J. Math. Fluid Mech.* **12**, 2010, 397–411.

[2] H. Bellout, J. Neustupa, P. Penel: On viscosity–continuous solutions of the Euler and Navier–Stokes equations with a Navier–type boundary condition. *Comptes Rendus Math.* **347**, 2009, 1141–1146.

[3] H. Bellout, J. Neustupa, P. Penel: On a ν–continuous family of strong solutions to the Euler or Navier–Stokes equations with the Navier–type boundary condition. *Discr. and Cont. Dyn. Systems–A* **27**, 4, 2010, 1353–1373.

[4] J. Duoandikoetxea J.: Fourier Analysis. *Graduate Studies in Mathematics,* 29. AMS, Providence, RI, 2001.

[5] G. Q. Chen, D. Osborne, Z. Qian: The Navier–Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non–flat boundaries. *Acta Mathematica Scientia* **29** B(4), 2009, 919–948.

[6] R. Farwig, H. Sohr, W. Varnhorn: On optimal initial value conditions for local strong solutions of the Navier-Stokes equations. *Ann. Univ. Ferrara* **55**, 2009, 89–110.

[7] D. Fujiwara, H. Morimoto: An L^r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24**, 1977, 685–700.

[8] G. P. Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Vol. I: Linearized Steady Problems.* Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 1994.

[9] G. P. Galdi: An Introduction to the Navier–Stokes initial–boundary value problem. In *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics,* editors G. P. Galdi, J. Heywood, R. Rannacher, series "Advances in Mathematical Fluid Mechanics", Birkhauser–Verlag, Basel 2000, 1–98.

[10] K. K. Kiselev, O. A. Ladyzhenskaya: On existence and uniqueness of the solutions of the non–stationary problem for a viscous incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk SSSR* **21**, 1957, 655–680 (in Russian).

[11] P. Kučera, J. Neustupa: On perturbations of solutions to the Navier–Stokes equations with large initial data and their dynamics. *Nonlinear Analysis* **71**, 12, 2009, e2690–e2695.

[12] P. Kučera, J. Neustupa: On L^3-stability of strong solutions of the Navier-Stokes equations with the Navier-type boundary conditions. *Journal of Mathematical analysis and applications* **405**, 2013, 731–737.

[13] P. Kučera, J. Neustupa: On robustness of a strong solution to the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions in the L 3 -norm. *Nonlinearity* **30**, no. 4, 2017, 1564–1583.

[14] P. Kučera: Small perturbation of initial conditions of solutions of the Navier–Stokes equations in the L^2–norm and applications. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics,* ed. R. Rannacher, A. Sequeira, Springer, Berlin, 2010, 319–328.

[15] P. Kučera, J. Neustupa, P. Penel: Navier–Stokes' equation with the generalized impermeability boundary conditions and initial data in domains of powers of the Stokes operator. Proc. of the "Int. Conf. on the Navier–Stokes Equations and Related Problems" held in Kyoto in January 2006. *Kokyuroku Bessatsu*, Publ. RIMS Kyoto Univ., 2006, 237–250.

[16] P. Kučera, J. Píšová, P. Vacková: Regularity criterion for local in time existence of strong solutions to the navier-stokes equations with navier's type boundary conditions. Proc. of the 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018, 2018, 638–646.

[17] A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function Spaces.* Academia, Prague 1977.

[18] A. Mahalov, B. Nicolaenko: Global solvability of three-dimensional Navier–Stokes equations with uniformly high initial vorticity. *Russian Math. Surveys* **58**, 2, 2003, 287–318.

[19] J. Neustupa, P. Penel: On regularity of a weak solution to the Navier–Stokes equation with generalized impermeability boundary conditions. *Nonlinear Analysis* **66**, 2007, 1753–1769.

[20] G. Ponce, R. Racke, T. C. Sideris, E. S. Titi: Global stability of large solutions to the 3D Navier–Stokes equations. *Comm. Math. Phys.* **159**, 1994, 329–341.

[21] J.C. Robinson, J.L. Rodrigo, W. Sadowski: The three-dimensional Navier-Stokes equations. Classical theory. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **157**. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[22] H. Sohr: *The Navier–Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach.* Birkhäuser Advanced Texts, Basel–Boston–Berlin 2001.

[23] V. A. Solonnikov, V. E. Ščadilov: A certain boundary value problem for the stationary system of Navier-Stokes equations. In *Boundary Value Problems of Mathematical Physics 8, Trudy Math. Inst. Steklov* **125** (1973), 196–210 (Russian), English translation in: *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics* **125** (1973), 186–199.

[24] Y. L. Xiao, Z. P. Xin: On the vanishing viscosity limit for the 3D Navier–Stokes equations with a slip boundary condition. *Comm. on Pure and Appl. Math.* **60**, 2007, 1027–1055.

KAPITOLA 4

LOKÁLNÍ EXISTENCE SILNÝCH ŘEŠENÍ NAVIEROVÝCH-STOKESOVÝCH ROVNIC S OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI NAVIEROVA TYPU

Tato kapitola obsahuje příspěvek publikovaný pod názvem "Regularity Criterion for Local in Time Existence of Strong Solutions to the Navier-Stokes Equations with Navier's Type Boundary Conditions". Tento text vyšel jako stať ve sborníku v rámci konference 17th International Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2018 konané v Bratislavě a je indexovaný v databázi Scopus. Příspěvek je do této práce vložen v plném originálním znění, tj. v angličtině. Autory článku jsou Petr Kučera a Petra Vacková, kteří mají podíl 20% a Jitka Píšová s podílem 60% na autorství. Stejně jako předchozí texty má vlastní značení, vlastní číslování rovnic, definic, vět a poznámek, má i tento vlastní seznam použité literatury. U tohoto textu nejsou upravena čísla stránek, zůstávají označena jako ve sborníku (tj. strany 638–647).

Hlavní výsledek tohoto článku je stejně jako u předchozího textu rozšíření výsledků Robinsona a kol. (viz úvod a použitá literatura článku), kteří řešili systém Navierových-Stokesových rovnic na celém prostoru a na prostorově periodické oblasti. V našem případě jsme u tohoto textu oproti předchozímu změnili okrajové podmínky z Navierových okrajových podmínek na okrajové podmínky Navierova typu. Změnili jsme také oblast z omezené množiny s dostatečně hladkou hranicí na omezenou hladkou konvexní oblast.

V přiloženém příspěvku se věnujeme systému nestacionárních Navierových-Stokesových rovnic s okrajovými podmínkami Navierova typu na omezené hladké konvexní množině. Navazujeme na články uvedené v příspěvku, změnou okrajové podmínky rozšiřujeme oblast, pro kterou existuje silné řešení.

Hlavní věta příspěvku nám poskytuje podmínku pro lokální existenci silných řešení daného systému.

Slovak University of Technology in Bratislava
Faculty of Mechanical Engineering
17th Conference on Applied Mathematics **APLIMAT 2018**

Proceedings

REGULARITY CRITERION FOR LOCAL IN TIME EXISTENCE OF STRONG SOLUTIONS TO THE NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH NAVIER'S TYPE BOUNDARY CONDITIONS

KUČERA Petr (CZ), PÍŠOVÁ Jitka (CZ), VACKOVÁ Petra (CZ)

Abstract. In this contribution we deal with the system of the Navier-Stokes equations with boundary conditions of the Navier's type on the bounded smooth convex domain. The main theorem gives condition for local in time existence of strong solutions to this system. This result is modification of results of Robinson et al. for solutions of the Navier-Stokes system on the whole space or on the space-periodic domains.

Keywords: Navier-Stokes equations, Navier's type boundary conditions, regularity

Mathematics subject classification: Primary 35Q30, 35B35; Secondary 76D05, 76E09.

1 Introduction

Let $\beta > 0$, $0 < T \leq \infty$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a convex bounded domain with the boundary $\partial\Omega$ of the class $C^{2+\beta}$. We denote $Q_T = \Omega \times (0,T)$. We study the following initial–boundary value Navier–Stokes problem

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \nu\, \mathbf{curl}^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla P = \mathbf{0} \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.2}$$

$$\text{a) } \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{b) } \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{u}(\,.\,,0) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

Here, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ and P denote the velocity of motion and the associated pressure. By $\boldsymbol{n}$ and ν we denote the outer normal vector field on $\partial\Omega$ and the kinematic coefficient of viscosity, respectively. For simplicity we suppose $\nu = 1$. Equations (1.1), (1.2) describe the motion of a viscous incompressible fluid in domain Ω.

H. Navier formulated so called Navier's boundary conditions in 1824. They takes the form

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad [\mathbb{T} \cdot \boldsymbol{n}]_\tau + \gamma\, \boldsymbol{u} = 0. \tag{1.5}$$

The symbols $\mathbb{T}$ and the subscript τ denote the stress tensor and the tangential component, respectively. The first Navier's condition is the condition of impermeability of the wall. The second condition expresses the requirement that the tangential component of the stress, with which the fluid acts on the boundary, is proportional to the velocity. The stress tensor has the form $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \nu\,[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T]$. Consequently, the second Navier condition (1.5b) can be written in the form

$$\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} - 2\nu\,\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{n} + \gamma\,\boldsymbol{u} \;=\; 0.$$

If we suppose that coefficient γ of friction between the fluid and the boundary is zero (the case of the so called perfect slip) and the curvature of the wall is neglected then (1.5) is equivalent to our boundary condition (1.3b). The Navier–Stokes equations with the boundary conditions (1.3) are studied, e.g., in papers [1], [2], [3], [4], [13], [16].

1.1 Notation of function spaces and operators.

We denote vector–valued functions and spaces of such functions by boldface letters. We use these function spaces and operators:

- c is a generic constant, i.e. a constant whose value may vary from line to line. On the other hand, numbered constants have fixed values throughout the whole paper.
- $\mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3) = \{\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega);\; supp\,\phi \subset \Omega,\; \mathbf{div}\,\phi \equiv 0\}$.
- $\mathbf{L}^s_\sigma(\Omega)$ is a closure of $\mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ in $\mathbf{L}^s(\Omega)$.
- The Hemholtz projection of $\mathbf{L}^s_\sigma(\Omega)$ onto $\mathbf{L}^s(\Omega)$ is denoted by $\mathbf{P}_\sigma$. The following holds
$$\mathbf{L}^s(\Omega) = \mathbf{L}^s_\sigma(\Omega) \oplus G(\Omega) \tag{1.6}$$
where $G(\Omega) = \{\nabla p;\; p \in \mathbf{W}^{1,s}(\Omega)\}$, see, e.g., [6] for the proof.
- $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = \{\nabla\varphi;\; \varphi \in W^{1,2}(\Omega)\}$ (The symbol $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$ denotes the orthogonal complement to $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ in $\mathbf{L}^2(\Omega)$).
- $\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega) := \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. (Functions in this space are divergence–free in Ω and have the normal component on $\partial\Omega$ equal to zero in the sense of traces.)
- $\|\,.\,\|_k$ (respectively $\|\,.\,\|_{l,k}$) denotes the L^k–norm (respectively the $W^{l,k}$–norm) of a scalar–valued or vector–valued or tensor–valued function in Ω. The scalar product in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ is denoted by $(\,.\,,\,.\,)_2$.
- The dual space to $\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ is denoted by $\mathbf{W}^{-1,2}_\sigma(\Omega)$. The duality between the elements of $\mathbf{W}^{-1,2}_\sigma(\Omega)$ and $\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ is denoted by $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_\Omega$ and the norm in $\mathbf{W}^{-1,2}_\sigma(\Omega)$ is denoted by $\|\cdot\|_{-1,2}$.
- $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega) := \big\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{2,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega);\; \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\big\}$. (The subscript „nc" indicates the Navier–type boundary conditions.)
- $\mathbf{H}(\Omega)$ is the space of all divergence–free functions $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ such that $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{0}$ on $\partial\Omega$.
- $\mathbf{T}_1 := \mathbf{curl}$ is the operator with the domain $D(\mathbf{T}_1) = \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$.
- $\mathbf{T}_2 := \mathbf{curl}$ is the operator with the domain $D(\mathbf{T}_2) = \mathbf{H}(\Omega)$. The kernel of both the operators $\mathbf{T}_1$ and $\mathbf{T}_2$ is trivial because domain Ω is simply connected.

- $\mathbf{S} := \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$ is an operator in in $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. $\mathbf{S}$ is one of the concrete realizations of the so called Stokes operator. The domain of $\mathbf{S}$ is $D(\mathbf{S}) = D(\mathbf{T}_1) = \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$.

Below we list some properties of operators $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ and $\mathbf{S}$, see [13] and [16].

- $\mathbf{T}_1$ is a linear bijective operator from $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$ onto $\mathbf{H}(\Omega)$. The inverse operator is bounded as an operator from $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ into $\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)$.
- $\mathbf{T}_2$ is a linear bijective operator from $\mathbf{H}(\Omega)$ onto $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. The inverse operator is bounded as an operator from $\mathbf{L}^2(\Omega)$ into $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$.
- Operator $\mathbf{S}$ is a linear bijective operator from $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$ onto $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. The inverse operator $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1^{-1} \circ \mathbf{T}_2^{-1}$ is a bounded operator from $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ onto $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$ and $\mathbf{S} = -\Delta$.
- Operator $\mathbf{S}$ commutes with the projection $\mathbf{P}_\sigma$, i.e.

  $$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{u}$$

  for $\boldsymbol{u} \in D(\mathbf{S})$. Consequently

  $$-\mathbf{P}_\sigma \Delta = -\Delta. \tag{1.7}$$

- Operator $\mathbf{S}$ is positive and selfadjoint in $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. The eigenvalues of $\mathbf{S}$ form a non–decreasing sequence $\{\lambda_i\}$ of positive real numbers and they have the same algebraic and geometric multiplicity. Corresponding eigenfunctions $\{\mathbf{e}^i\}$ can be chosen so that they form a complete orthonormal system in $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$.
- Although the operator $\mathbf{S}^{1/2}$ is different from $\mathbf{T}_1$, one can easily check the identities: $\|\mathbf{S}^{1/2}\boldsymbol{u}\|_2^2 = (\mathbf{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_2 = \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_2^2 = \|\mathbf{T}_1\boldsymbol{u}\|_2^2$ for $\boldsymbol{u} \in D(\mathbf{S})$. Consequently, there exist positive constants c_1 and c_2 so that for $\boldsymbol{u} \in D(\mathbf{S})$, we have

  $$c_1\, \|\mathbf{S}^{1/2}\boldsymbol{u}\|_2 \;\leq\; \|\boldsymbol{u}\|_{1,2} \;\leq\; c_2\, \|\mathbf{S}^{1/2}\boldsymbol{u}\|_2. \tag{1.8}$$

  Inequalities (1.8) show that the norms $\|\mathbf{S}^{1/2}.\,\|_2$ and $\|\,.\,\|_{1,2}$ are equivalent in $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$. Using the Friedrichs–type inequality

  $$\|\boldsymbol{u}\|_2 \;\leq\; C\, \|\nabla\boldsymbol{u}\|_2 \tag{1.9}$$

  (where $C = C(\Omega)$), satisfied by vector functions whose normal component is zero on $\partial\Omega$ (see [7, Exercise II.5.15]), we deduce that the norm $\|\mathbf{S}^{1/2}.\,\|_2$ is also equivalent to $\|\nabla.\,\|_2$ in $\mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$.
- If $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ and $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\Omega)$ then $(\boldsymbol{u}, \mathbf{T}_2\boldsymbol{v})_2 = (\boldsymbol{u}, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v})_2 = (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_2$.
- If $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ and $\boldsymbol{v} \in D(\mathbf{S})$ then $(\boldsymbol{u}, \mathbf{S}\boldsymbol{v})_2 = (\boldsymbol{u}, \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1\boldsymbol{v})_2 = (\boldsymbol{u}, \mathbf{curl}^2\boldsymbol{v})_2 = (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v})_2$.

Definition 1 *Let $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$. A function $\boldsymbol{u} \in L^\infty\big(0, T;\, \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)\big) \cap L^2\big(0, T;\, \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)\big)$ is said to be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4) if*

$$\int_0^T \int_\Omega \big[-\boldsymbol{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\phi}\big] \;=\; \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\phi}(\,.\,,0)$$

for all infinitely differentiable functions $\boldsymbol{\phi}$ in $\overline{Q_T}$ such that $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,t) \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ for all $0 \leq t \leq T$ and $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,T) = \mathbf{0}$.

The boundary condition (1.3b) does not explicitly appear in the weak formulation of the problem (1.1)–(1.4). However, it can be shown by standard methods that if the weak solution is smooth then it satisfies (1.3b).

Definition 2 *Let $\boldsymbol{u}$ be a weak solution of the problem (1.1)–(1.4). We say that $\boldsymbol{u}$ is a strong solution if $\boldsymbol{u}(0) \in \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ and $\boldsymbol{u} \in L^r\big(0,T';\, \mathbf{L}^s(\Omega)\big)$ for all $0 < T' \leq T$, $T' < \infty$ and for some $r,\ s \in \mathbb{R}$, satisfying $2 < r < \infty,\ 3 < s < \infty$ and $2/r + 3/s = 1$.*

The following lemma is proved in [10].

Lemma 1 *If $\boldsymbol{u}$ is a strong solution of the problem (1.1)–(1.4) then $\boldsymbol{u} \in L^2\big(0,T';\, \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)\big)$, $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2\big(0,T';\, \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega)\big)$ for every $0 < T' \leq T$, $T' < \infty$. Moreover, $\boldsymbol{u}$ is a continuous function from $[0,T']$ into $\mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ (after an eventual change on a set of measure zero).*

2 Local in time existence of strong solutions

In this section we prove the main result of the paper, providing sufficient condition for existence of strong solutions which satisfy the boundary conditions (1.3) on given time interval. Similar results for solutions which satisfy the boundary condition (1.9) were published, e.g., in [5]. J.C. Robinson et al. proved similar results in [14], in which they studied local in time existence of strong solutions with initial data in L^3. They proved sufficient conditions for local in time existence of strong solutions of the Navier-Stokes on the whole space and for local in time existence of strong solutions which satisfy the space-periodic boundary conditions. Our result which is formulated in Theorem 1 is a modification of their result for problem with boundary conditions 1.3 on some smooth bounded convex domain.

Very similar problems were solved in [9], [10], [11] and [12]. In these papers authors studied problems of robustness and stability of strong solutions with respect to perturbations of initial velocities.

In this section we deal with the non-steady Stokes system.

$$\partial_t \boldsymbol{\varphi} + \nu\, \mathbf{curl}^2 \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \qquad \text{in } Q_T, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{\varphi} = 0 \qquad \text{in } Q_T, \tag{2.2}$$

$$\text{a) } \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \text{b) } \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{n} = \mathbf{0} \qquad \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\,.\,,0) = \boldsymbol{\varphi}_0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{2.4}$$

Weak solutions of the problem (2.1)–(2.4) are defined the following way:

Definition 3 *Let $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega)$. A function $\boldsymbol{\varphi} \in L^\infty\big(0,T;\, \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T;\, \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)\big)$ is said to be a weak solution of the problem (2.1)–(2.4) if*

$$\int_0^T \int_\Omega \big[-\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}\big] = \int_\Omega \boldsymbol{\phi}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(\,.\,,0)$$

for all infinitely differentiable functions $\boldsymbol{\phi}$ in $\overline{Q_T}$ such that $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,t) \in \mathbf{W}^{1,2}_{\sigma}(\Omega)$ for all $0 \leq t \leq T$ and $\boldsymbol{\phi}(\,.\,,T) = \mathbf{0}$.

2.1 The main result

Theorem 1 *There exists an absolute contant* $\epsilon > 0$ *with the following property: Let* $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$*,* $\tau \in \mathbb{R}$*,* $0 < \tau \leq T$ *and* $\boldsymbol{\varphi}$ *be a solution of (2.1)–(2.4) with initial velocity* $\boldsymbol{u}_0$ *such that*

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_3 \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 |\boldsymbol{\varphi}| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Then there exists a strong solution $\boldsymbol{u}$ *of the problem (1.1)–(1.4) on the time interval* $(0, \tau)$*.*

2.2 The mathematical model of behaviour of fluid

We study qualitative properties of solutions of the Navier-Stokes equations with the boundary conditions of the Navier's type in this contribution. We derive a criterion for local in time existence of strong solution. Although this result looks to be a theoretical one, it has a very specific relationship to fluid dynamics. The system of the Navier-Stokes equations which is solved in this contribution is a model of behaviour of incompressible fluid in bounded domains. Equations (1.1) which are called the Navier-Stokes equations are derived from the momentum conservation law. Equation (2.2) which is called the continuity equation expresses the fact that liquid is incompressible. Conditions (1.3) describe interaction between fluid and fixed wall. We are supposing density and viscosity of fluid are constant, in this model.

We can say that the system (1.1), (1.2), (1.4) with various types of boundary conditions (we are studying this system with boundary conditions (1.3) here) is the most commonly used model of behaviour of incompressible fluid. This model is studied in at least two areas of mathematics. Many mathematicians dealing with the theory of partial differential equations publish papers in which the qualitative properties of solutions of this model are studied. At the same time, many mathematicians working in the field of numerical mathematics publish papers that deal with the approximate numerical solutions of this model. These approximate solutions are then applied to solve various technical problems in different areas, mechanical engineering, civil engineering, hydrodynamics. It should be said that the results dealing with the qualitative properties of this system often help to optimize work of numerical mathematicians.

Unfortunately, mathematicians and physicists are not yet sure if this mathematical model corresponds to the real fluid behavior. In the qualitative theory of the Navier-Stokes equations there are still some open problems that are of crucial importance. Suppose we have a weak solution to the problem with a smooth enough initial velocity. It is well known that there is a weak solution of this problem, satisfying the energy inequality in addition. This means that its kinetic energy is uniformly bounded over the entire time interval. We do not know whether this solution satisfies energy identity (energy identity is a special case of energy inequality). This means we do not know whether or not the fluid behavior corresponds with the energy conservation law. The next open question remains whether or not the dissipative energy is uniformly limited over the entire time interval. If we knew that there exists a weak solution of the problem which is also a strong solution, all of the above mentioned questions would be positively answered. Such a solution would satisfy energy identity and its dissipative energy would be uniformly bounded over the time interval. We also know that if there exists a strong solution, then this solution is the unique strong solution. In addition, it is the only solution that satisfies energy equality. It is even known that such a solution would be then the only solution that satisfies the energy inequality. It is therefore reasonable to think that such a solution would be a mathematical model that actually describes the behavior of the fluid.

The open problem mentioned here is one of the most well-known open problems of applied mathematics, included in the so-called millennium problems, and the Clay Institute has issued a financial reward for solution of this problem.

The main result of this paper (Theorem 1) provides a partial contribution to the solution of this problem. We know that there is a time interval on which the solution is strong, and we know how to determine the length of this interval. This means that we know that at this time interval the solution of the Navier-Stokes problem describes the behavior of a fluid that complies with the law of conservation of energy.The question of whether or not this solution is strong outside this time interval remains open.

2.3 Proof of the main result

At first we mention some estimates and lemmas which we apply in order to prove Theorem 1. The following estimate is proved in [11, Estimate (2.1)]. If $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ on $\partial(\Omega)$, then

$$\|\boldsymbol{v}\|_9^3 \leq c_3 \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 |\boldsymbol{v}|. \tag{2.6}$$

Let $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$. Then there exists $q \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ such that

$$\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}| = \mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|) + \nabla q. \tag{2.7}$$

Applying operator $\mathbf{div}$ to 2.7 and using the fact that $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \equiv 0$ on $\partial\Omega$ we obtain

$$\Delta q = \mathbf{div}\,(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|) \quad \text{in } \Omega \qquad \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \tag{2.8}$$

Therefore ,

$$\left\|D^2 q\right\|_{3/2} \leq c_4 \left\| \nabla \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}| \right\|_{3/2} \leq c_5 \left\|\nabla \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|\right\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_3^{1/2}. \tag{2.9}$$

The following inequalities are proved in [10, Lemma 2.] where assumption of convexity of Ω has been applied. Let $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma,nc}(\Omega)$. Then

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|) \equiv -\int_\Omega \Delta \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|) \geq \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 |\boldsymbol{v}| + \frac{4}{9}\int_\Omega \left|\nabla |\boldsymbol{v}|^{3/2}\right|^2. \tag{2.10}$$

The following lemma is proved in [14].

Lemma 2 *Let $c_6 > 0$, θ,ϑ and ς are real-valued, non-negative functions which are continuous on $[0,\tau)$, $\theta \in C(0,\tau)$, $\theta(0) = 0$ and the inequality*

$$\theta'(t) + \vartheta(t) \leq c_6 \theta(t)\vartheta(t) + \varsigma(t) \tag{2.11}$$

holds on $(0,\tau)$. Put $D = \int_0^\tau \varsigma(t)\, dt$. If $D < \frac{1}{4c_6}$ then

$$\sup_{t\in(0,\tau)} \theta(t) \leq 2D < \frac{1}{2c_6} \tag{2.12}$$

and

$$\int_0^\tau \vartheta(t)\, dt \leq 2D < \frac{1}{2c_6}. \tag{2.13}$$

Integrating (2.1) and using (2.10) and embedding $\mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^3(\Omega)$ we prove the following lemma.

Lemma 3 *Let $\varphi_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{\varphi}$ be a solution of (2.1)–(2.4). Then the inequality*

$$\|\boldsymbol{\varphi}(T')\|_3^3 + \int_0^{T'} \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 |\boldsymbol{\varphi}| \le \|\boldsymbol{\varphi}_0\|_3^3 \tag{2.14}$$

holds for every T', $0 < T' \le T$.

Now we prove Theorem 1:

It is well known that if $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ then $\boldsymbol{\varphi} \in L^2\big(0, T'; \mathbf{W}^{2,2}_{\sigma, nc}(\Omega)\big)$. Multiplying (2.1) by $\mathbf{P}_\sigma(\varphi|\varphi|)$, integrating it over Ω and $(0, T')$ and using (2.10) we obtain (2.14) with $\boldsymbol{u}_0$ instead of $\boldsymbol{\varphi}_0$. Let

$$\varsigma = \sup\{\varsigma';\ \varsigma',\ \text{such that } \boldsymbol{u} \text{ is a strong solution on } (0, \varsigma')\}. \tag{2.15}$$

Since $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$ then $\varsigma > 0$. This statement can be proven by analogy with [8, Theorem 6.1]. We prove that $\varsigma \ge \tau$. Suppose by contradiction that $\varsigma < \tau$. It is sufficient to prove that

$$\boldsymbol{u} \in C([0, \varsigma];\ \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)). \tag{2.16}$$

By (2.16) $\boldsymbol{u}(\varsigma) \in \mathbf{W}^{1,2}_\sigma(\Omega)$. Consequently, there exists $\varsigma^* > \varsigma$ such that $\boldsymbol{u}$ is a strong solution on $(0, \varsigma^*)$ and we obtain the contradiction with (2.15).

Let $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}$ such that $\boldsymbol{\psi}$ is solution of the system

$$\boldsymbol{\psi}' - \Delta \boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi} + \nabla P = 0, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\psi}(0) = 0 \tag{2.18}$$

and $\boldsymbol{\varphi}$ is solution of the problem (2.1)–(2.4) with initial velocity $\boldsymbol{u}_0$. By (1.6) there exists $q \in \mathbf{W}^{1,3/2}(\Omega)$ such that

$$\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}| = \mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|) + \nabla q. \tag{2.19}$$

Multiplying (2.17) by $\mathbf{P}_\sigma(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|)$ on the time interval $(0, \varsigma)$, integrating it over Ω and using (2.7), (2.10), (2.19) and a well-known identity (see, e.g., [15, Lemma 3.2.1])

$$\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi},\ \boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\Big)\!\Big) = \Big(\!\Big((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi},\ \boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\Big)\!\Big) = 0$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\psi}\|_3 + \big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2 + \frac{4}{9}\big\|\nabla|\boldsymbol{\psi}|^{3/2}\big\|_2^2 \le \\
&\Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\Big)\!\Big)\Big| + \\
&\Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \nabla q\Big)\!\Big)\Big| \le \\
&\Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\Big)\!\Big)\Big| + \Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\Big)\!\Big)\Big| + \Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi},\ \nabla q\Big)\!\Big)\Big| + \\
&\Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \nabla q\Big)\!\Big)\Big| + \Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi},\ \nabla q\Big)\!\Big)\Big| + \Big|\Big(\!\Big((\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi},\ \nabla q\Big)\!\Big)\Big| = \\
&I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Integrating by parts and applying (2.6) and (2.9) we infer

$$I_1 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_6\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_6 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{1/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_9^{3/4}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{1/4}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_9^{3/4}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_3^{1/4} \le$$
$$c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{3/4}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_9^{3/4}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_3^{1/4} \le c_7\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + \frac{1}{2}\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3 \tag{2.21}$$

$$I_2 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_6^2 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{1/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_9^{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_3^{1/2} \le$$
$$\frac{1}{8}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2 + c_8\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + \frac{1}{2}\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3 \tag{2.22}$$

$$I_3 \le c\,\big\|D^2 q\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_6^2 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_9^{3/2}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^{1/2} \le$$
$$c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3 \le \frac{1}{8}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2 + c_9\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 \tag{2.23}$$

$$I_4 \le c\,\big\|D^2 q\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_6^2 \le c\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_9^{3/2}\big\|\boldsymbol{\varphi}\big\|_3^{1/2} \le$$
$$\frac{1}{8}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2 + c_{10}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3 \tag{2.24}$$

$$I_5 + I_6 \le c\,\big(I_3 + I_4\big) \le \frac{1}{8}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2 + c_{11}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}|\big\|_2^2\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3 \tag{2.25}$$

Set $c_{12} = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11}$. Using estimates (2.20)–(2.25) we obtain

$$\frac{d}{dt}\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + \big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2 \le 3\,c_{12}\,\big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2\,\big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_3^3 + 3\,\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2.$$

Put $\theta(t) = \big\|\boldsymbol{\psi}(.,t)\big\|_3^3$, $\vartheta(t) = \big\|\nabla\boldsymbol{\psi}(.,t)|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2$, $\varsigma(t) = 3\,\big\|\boldsymbol{u}_0\big\|_3\big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2$ and $\epsilon = \frac{1}{12c_{12}}$. Let $0 < \tau < T$ such that

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_3 \int_0^\tau \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2 < \frac{1}{12c_{12}}.$$

If $\tau \le \varsigma$ the theorem is proved. Suppose by contradiction $\varsigma < \tau$. Since

$$3\,\|\boldsymbol{u}_0\|_3 \int_0^\varsigma \big\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\,|\boldsymbol{\varphi}|^{1/2}\big\|_2^2 < \frac{1}{4c_{12}}.$$

we get by Lemma 2 and by (2.6)

$$\int_0^\varsigma \big\|\boldsymbol{\psi}\big\|_9^3 \le c_3 \int_0^\varsigma \big\|\nabla\boldsymbol{\psi}\,|\boldsymbol{\psi}|^{1/2}\big\|_2^2 < \frac{1}{2c_{12}} < \infty.$$

The last inequalities, (2.6) and (2.14) imply that $\boldsymbol{u} \in L^3(0,\varsigma;\,\mathbf{L}^9(\Omega))$. Then, $\boldsymbol{u} \in C([0,\varsigma];\,\mathbf{W}^{1;2}_\sigma(\Omega))$. Since (2.16) holds we obtain the contradiction with (2.15). Consequently, $\tau \le \varsigma$ and theorem is proved.

ACKNOWLEDGEMENTS: The research was supported by the project SGS17/116/OHK1/2T/11.

References

[1] BEIRAO DA VEIGA, H., CRISPO, F.: *Sharp inviscid limit results under Navier type boundary condition. An L^p theory.* J. Math. Fluid Mech., 12, 2010, 397–411.

[2] BELLOUT, H., NEUSTUPA, J., PENEL, P.: *On viscosity–continuous solutions of the Euler and Navier–Stokes equations with a Navier–type boundary condition.* Comptes Rendus Math., 347, 2009, 1141–1146.

[3] BELLOUT, H., NEUSTUPA, J., PENEL, P.: *On a ν–continuous family of strong solutions to the Euler or Navier–Stokes equations with the Navier–type boundary condition.* Discr. and Cont. Dyn. Systems–A, 27, no. 4, 2010, 1353–1373.

[4] CHEN, G.Q., OSBORNE, D., QIAN, Z.: *The Navier–Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non–flat boundaries.* Acta Mathematica Scientia, 29, no. B(4), 2009, 919—948.

[5] FARWIG, R., SOHR, H., VARNHORN, V.: *On optimal initial value conditions for local strong solutions of the Navier–Stokes equations.* Ann. Univ. Ferrara, 55, 2009, 89–110.

[6] FUJIWARA, D., MORIMOTO, H.: An L^r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24, 1977, 685–700.

[7] GALDI, G.P.: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations. Vol. I: Linearized Steady Problems.* Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1994.

[8] GALDI, G.P.: *An Introduction to the Navier–Stokes initial–boundary value problem.Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics,* editors G. P. Galdi, J. Heywood, R. Rannacher, series “Advances in Mathematical Fluid Mechanics”, Birkhauser–Verlag, Basel 2000, 1–98.

[9] KUČERA, P., NEUSTUPA, J.: *On perturbations of solutions to the Navier–Stokes equations with large initial data and their dynamics.* Nonlinear Analysis, 71, no. 12, 2009, e2690—e2695.

[10] KUČERA, P., NEUSTUPA, J.: *On L^3-stability of strong solutions of the Navier-Stokes equations with the Navier-type boundary conditions.* Journal of Mathematical analysis and applications, 405, 2013, 731–737.

[11] KUČERA, P., NEUSTUPA, J.: *On robustness of a strong solution to the Navier-Stokes equations with Navier's boundary conditions in the L 3 -norm.* Nonlinearity, 30, no. 4, 2017, 1564—1583.

[12] KUČERA, P.: *Small perturbation of initial conditions of solutions of the Navier–Stokes equations in the L^2–norm and applications.* Advances in Mathematical Fluid Mechanics, ed. R. Rannacher, A. Sequeira, Springer, Berlin, 2010, 319—328.

[13] MAHALOV, A., NICOLAENKO, B.: *Global solvability of three-dimensional Navier–Stokes equations with uniformly high initial vorticity.* Russian Math. Surveys, 58, No.2, 2003, 287–318.

[14] ROBINSON, J.C., RODRIGO, J.L., SADOWSKI, W.: *The three-dimensional Navier-Stokes equations. Classical theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No.157. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[15] SOHR, H.: *The Navier–Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach.* Birkhäuser Advanced Texts, Basel–Boston–Berlin 2001.

[16] XIAO, Y.L., XIN, Z.P.: *On the vanishing viscosity limit for the 3D Navier–Stokes equations with a slip boundary condition.* Comm. on Pure and Appl. Math., 60, 2007, 1027—1055.

Current address

Kučera Petr, doc. RNDr., CSc.
Department of Mathematics
Faculty of Civil Engineering
Czech Technical University in Prague
Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic
E-mail: petr.kucera@cvut.cz

Píšová Jitka, Ing. Arch.
Department of Mathematics
Faculty of Civil Engineering
Czech Technical University in Prague
Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic
E-mail: marguete@seznam.cz

Vacková Petra, Mgr.
Department of Mathematics
Faculty of Civil Engineering
Czech Technical University in Prague
Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic
E-mail: petra.vackova@fsv.cvut.cz