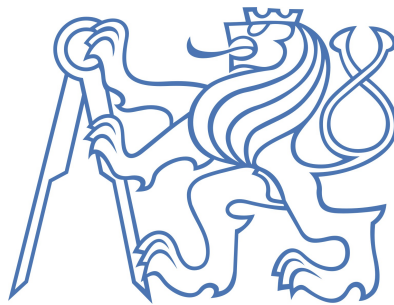


**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ**

KATEDRA MECHANIKY



**VARIAČNÍ PŘÍSTUP K POPISU OBECNĚ ZATÍŽENÉHO
PRUŽNÉHO PRUTU**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:

Evžen Korec

Vedoucí práce:

prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

2017/2018



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Korec Jméno: Evžen Osobní číslo: 439012

Zadávací katedra: Katedra mechaniky

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Variační přístup k popisu obecně zatíženého pružného prutu

Název bakalářské práce anglicky: Variationally Based Description of an Elastic Beam Under General Loading

Pokyny pro vypracování:

Vyjděte ze základních rovnic popisujících lineárně pružné těleso a po zavedení vhodných předpokladů pro aproximaci pole posunů (případně i pole napětí) odvoďte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, které představují zjednodušený model prutu. Využijte přitom variační principy, zejména Lagrangeův, ale při vylepšování modelu případně také Castiglianův nebo Hellingerův-Reissnerův. Proveďte analýzu několika případů namáhání prutu, které vedou ke kombinaci tahu či tlaku, ohybu, smyku a kroucení. Porovnejte výsledky získané na základě jednotlivých variant odvozeného modelu prutu a výsledky simulací metodou konečných prvků.

Seznam doporučené literatury:

Z. Bittnar a J. Šejnoha: Numerické metody mechaniky I a II

Jméno vedoucího bakalářské práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Datum zadání bakalářské práce: 21.2.2018

Termín odevzdání bakalářské práce: 27.5.2018

Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

23.2.2018

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V dne podpis:

Poděkování

Na prvním místě bych chtěl poděkovat svému školiteli prof. Ing. Milan Jiráskovi, DrSc. za veškerou pomoc, cenné rady a motivaci, kterou mi během vzniku této práci práce neúnavně poskytoval. Dále bych chtěl velice poděkovat Doc. RNDr. Aleši Nekvindovi, CSc. za jeho nesmírnou pomoc při mé úporné snaze pochopit základy matematické analýzy a variačního počtu a také Ing. Martinu Horákovi, Ph.D. za jeho ochotu mi vždy poradit při výpočtech v programu OOFEM. Chtěl bych také nesmírně poděkovat svým rodičům, bez jejichž obětavé podpory a trpělivosti bych tuto práci nikdy vytvořit nemohl.

Anotace

Hlavním cílem této práce je odvození prutového modelu pro obecně zatížený prut pomocí variačních principů. Za tímto účelem vyjádříme pole posunů pomocí sedmi neznámých funkcí závislých pouze na souřadnici měřené podél osy prutu. Přitom využijeme danou deplanační funkci závislou na zbylých dvou kartézských souřadnicích. Míra deplanace (ve smyslu proměnného součinitele násobícího hodnoty deplanační funkce podél střednice prutu) je považována za jednu z neznámých funkcí, spolu s třemi posuny střednice prutu a třemi rotacemi průřezu. S uvážením tohoto tvaru pole posunů odvodíme za použití Lagrangeova principu minima potenciální energie sedm řídicích rovnic prutového modelu (včetně odpovídajících okrajových podmínek) a identifikujeme vnitřní síly působící na prutu. Ukazuje se, že tento přímočarý postup vede k nesprávnému rozložení smykových napětí na prutu a tím ke zkreslení tuhostí ve smyku a kroucení. Lepší výsledky lze očekávat, pokud odvodíme řídicí rovnice modelu pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu, který pracuje s nezávislými aproximacemi pole posunutí a pole napětí. Při volbě aproximace pro smyková napětí se berou v úvahu Cauchyho rovnice rovnováhy trojrozměrného kontinua.

Klíčová slova

prutový model, Lagrangeův princip minima potenciální energie, Hellingerův-Reissnerův variační princip, tenkostěnný prut

Annotation

The main goal of this study is to derive a beam model of a generally loaded bar using variational principles. To achieve this goal, we describe the displacement field using seven unknown functions that depend only on the axial coordinate, and we incorporate a given warping function that depends on the remaining two Cartesian coordinates. The amount of warping (in the sense of a variable coefficient multiplying the values of the warping function along the centerline of the bar) is considered as one of the unknown functions, along with three centerline displacements and three sectional rotations. Considering this form of the displacement field we derive seven governing equations of the beam model (as well as the corresponding boundary conditions) using the Lagrange principle of minimum potential energy and we identify the internal forces arising in the beam. It turns out that this straightforward procedure leads to an inappropriate distribution of shear stresses in the beam and thus to inaccurate stiffnesses in shear and torsion. Better results can be expected if we derive the governing equations using the Hellinger-Reissner variational principle, which deals with independent approximations of the displacement and stress fields. The assumed distribution of shear stresses is based on the Cauchy equilibrium equations of a three-dimensional continuum.

Keywords

beam model, Lagrange principle of minimum potential energy, Hellinger-Reissner variational principle, thin-walled beam

Obsah

1	Úvod	7
2	Odvození modelu pomocí Lagrangeova principu minima potenciální energie	8
3	Vnitřní síly na prutu	16
4	Diferenciální rovnice popisující model	21
5	Redukce rovnic modelu pro různé typy průřezů	25
5.1	Kruhový průřez	25
5.2	Obdélníkový průřez	25
5.3	Průřez tvaru rovnostranného trojúhelníka	26
5.4	Tenkostěnný průřez	26
6	Odvození modelu pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu	27
7	Úprava modelu odvozeného pomocí H.-R. principu pro tenkostěnný otevřený průřez	33
8	Závěr	41
	Literatura	42

1 Úvod

Cílem této práce je variační odvození modelu pružného, obecně zatíženého prutu na základě níže uvedeného přibližného popisu pole posunů, ve kterém je deplanační funkce $\psi(y, z)$ násobena neznámou funkcí χ . Uvažujeme, že prut popisujeme kartézským pravotočivým souřadnicovým systémem x, y, z , přičemž osa x prochází střednicí prutu. Aproximaci pole posunů volíme ve tvaru

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_c(x) + z\varphi_y(x) - y\varphi_z(x) + \chi(x)\psi(y, z), \\v(x, y, z) &= v_c(x) - z\varphi_x(x), \\w(x, y, z) &= w_c(x) + y\varphi_x(x),\end{aligned}\tag{1}$$

kde u, v a w jsou kartézské složky posunu obecného bodu, u_c, v_c a w_c jsou kartézské složky posunu střednice, φ_x, φ_y a φ_z jsou pootočení průřezu kolem jednotlivých os, ψ je deplanační funkce a χ je míra deplanace.

Zavedení neznámé funkce χ umožňuje, aby míra deplanace byla po délce libovolná. To představuje rozdíl oproti klasickým modelům (např. Vlasovově modelu), které zavádějí předpoklad, že míra deplanace je úměrná $\varphi'_x(x)$, kde čárkou je označena derivace podle proměnné x . Kromě této odlišnosti je formulace pole posunů volena standardně v souladu s klasickou učebnicí pružnosti [1, str. 127]. Předpokládáme tedy, že ve směru osy x se prut může protahovat nebo zkracovat, dále se může deformovat ohybem okolo osy y i z , který je doprovázen smykem, a vlivem kroucení se průřez pootočí kolem osy x a může také deplanovat. Posuny $v(x, y, z)$ a $w(x, y, z)$ ve směru os y a z předpokládáme takové, že průřez prutu se v průmětu do roviny yz pootočí jako tuhý celek. Dále uvažujeme standardní předpoklady prutové teorie ve smyslu [1, str. 93-94], tedy "malé" deformace, dostatečnou délku prutu, která je výrazně větší než rozměry průřezu atd. Složky napětí σ_y a σ_z zanedbáváme. Dále uvažujeme, že prut má přímou střednici a jeho koncové průřezy jsou na ni kolmé. V této práci budeme uvažovat pruty s konstantní tuhostí po délce prutu (tedy nezávislé na souřadnici x). Za účelem odvození výše popsání prutového modelu, tedy sestavení diferenciálních rovnic popisujících model, využijeme variační principy, a to nejdříve Lagrangeův princip minima potenciální energie a poté Hellingerův-Reissnerův variační princip.

2 Odvození modelu pomocí Lagrangeova principu minima potenciální energie

Aproximaci pole posunů, uvažovanou ve tvaru (1), můžeme zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi(y, z) \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

případně jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x), \quad (3)$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Na základě geometrických rovnic pro trojrozměrné kontinuum vyjádříme deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Předchozí výraz je vhodné rozdělit na součet dvou členů, kde v jednom se objeví pouze derivace podle proměnné x a ve druhém pouze derivace podle proměnných y a z , což s výhodou využijeme při dimenzionální redukci problému:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

neboli

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Po dosazení výrazu (3) do (6) dostáváme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{d}(x) + \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(x) \\ &= \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}'(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

kde

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{N}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\partial}{\partial y}\psi(y, z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\psi(y, z) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Celková potenciální energie zatíženého prutu

$$E_{pot} = E_{int} + E_{ext} \quad (9)$$

je součtem potenciální energie pružné deformace

$$E_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV \quad (10)$$

a potenciální energie vnějších sil

$$E_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = - \int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dV - \int_{S_t} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS. \quad (11)$$

Přitom

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_x(\mathbf{x}) \\ b_y(\mathbf{x}) \\ b_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_x(\mathbf{x}) \\ t_y(\mathbf{x}) \\ t_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (12)$$

jsou objemové síly, povrchové síly a matice tuhosti materiálu (pro daný případ, kdy složky napětí σ_y , σ_z a τ_{yz} jsou nulové).

Nyní vyjádříme E_{int} jako funkcionál závislý na sedmi uvažovaných neznámých funkcích. Za tímto účelem dosadíme (7) do (10) a dostáváme

$$\begin{aligned} E_{int}(\mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))^T \mathbf{D} (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y}) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{B}^T(\mathbf{y})) \mathbf{D} (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) dV + \int_V \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{d}^T(x)\mathbf{B}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x) dV. \end{aligned} \quad (13)$$

Po rozdělení integrace přes objem na integraci po délce (souřadnice x se mění od 0 do L) a integraci přes průřez prutu (souřadnice y a z se mění v rámci rovinné oblasti A) dostáváme

$$\begin{aligned} E_{int}(\mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}'^T(x) \left(\int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{y}) dA \right) \mathbf{d}'(x) dx + \\ &\quad + \int_0^L \mathbf{d}'^T(x) \left(\int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y}) dA \right) \mathbf{d}(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T(x) \left(\int_A \mathbf{B}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y}) dA \right) \mathbf{d}(x) dx, \end{aligned} \quad (14)$$

což můžeme zapsat jako

$$E_{int}(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{II} \mathbf{d}'(x) dx + \int_0^L \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I \mathbf{d}(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 \mathbf{d}(x) dx, \quad (15)$$

kde

$$\mathbf{A}_0 = \int_A \mathbf{B}^T(\mathbf{y}) \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{y}) dA, \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_I = \int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{y}) dA, \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_{II} = \int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{D} \mathbf{N}(\mathbf{y}) dA. \quad (18)$$

V podobném duchu vyjádříme i E_{ext} jako funkcionál závislý na sedmi uvažovaných neznámých funkcích. Po dosažení (3) do (11) dostáváme

$$\begin{aligned} E_{ext}(\mathbf{d}) &= - \int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(x) dV - \int_{S_t} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(x) dS \\ &= - \int_0^L \left(\int_A \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) dA \right) \mathbf{d}(x) dx - \int_0^L \left(\int_{\Gamma} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) ds \right) \mathbf{d}(x) dx \\ &\quad - \int_{S_0} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(0) dS - \int_{S_L} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(L) dS \\ &= - \int_0^L \mathbf{f}^T(x) \mathbf{d}(x) dx \\ &\quad - \int_{S_0} \mathbf{t}^T(0, \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) dS \mathbf{d}(0) - \int_{S_L} \mathbf{t}^T(L, \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) dS \mathbf{d}(L), \end{aligned} \quad (19)$$

kde

$$\mathbf{f}(x) = \int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dA + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds. \quad (20)$$

Přitom Γ označuje obvod průřezu a S_0 a S_L je levý a pravý koncový průřez.

Z Lagrangeova principu minima vyplývá podmínka nulové první variace potenciální energie. Pro větší přehlednost odvodíme nejprve první variaci E_{int} a následně první variaci E_{ext} . Kompaktně můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \delta E_{int}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{II} \delta \mathbf{d}'(x) + \delta \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{II} \mathbf{d}'(x)) dx \\ &\quad + \int_0^L (\mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I \delta \mathbf{d}(x) + \delta \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I \mathbf{d}(x)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 \delta \mathbf{d}(x) + \delta \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 \mathbf{d}(x)) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Vzhledem k symetrii matic \mathbf{A}_{II} a \mathbf{A}_0 můžeme výsledek upravit do tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_{int}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= \int_0^L \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{II} \delta \mathbf{d}'(x) dx \\ &+ \int_0^L (\mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I \delta \mathbf{d}(x) + \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_I^T \delta \mathbf{d}'(x)) dx \\ &+ \int_0^L \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 \delta \mathbf{d}(x) dx.\end{aligned}\quad (22)$$

Po úpravě integrálů metodou per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\delta E_{int}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= - \int_0^L \mathbf{d}''^T(x) \mathbf{A}_{II} \delta \mathbf{d}(x) dx + \\ &+ [\mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{II} \delta \mathbf{d}(x)]_0^L + [\mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_I^T \delta \mathbf{d}(x)]_0^L + \\ &+ \int_0^L (\mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I \delta \mathbf{d}(x) - \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I^T \delta \mathbf{d}(x)) dx \\ &+ \int_0^L \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 \delta \mathbf{d}(x) dx.\end{aligned}\quad (23)$$

Variaci potenciální energie vnějších sil vyjádříme snadno jako

$$\begin{aligned}\delta E_{ext}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= - \int_0^L \mathbf{f}^T(x) \delta \mathbf{d}(x) dx \\ &- \int_{S_0} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) dS \delta \mathbf{d}(0) - \int_{S_L} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) dS \delta \mathbf{d}(L).\end{aligned}\quad (24)$$

Z podmínky stacionarity Lagrangeova funkcionálu potenciální energie, $\delta E_{int} + \delta E_{ext} = 0$, pak vyplývá diferenciální rovnice

$$-\mathbf{d}''^T(x) \mathbf{A}_{II} + \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I - \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_I^T + \mathbf{d}^T(x) \mathbf{A}_0 = \mathbf{f}^T(x), \quad (25)$$

kterou lze přepsat jako

$$-\mathbf{A}_{II} \mathbf{d}''(x) - (\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_I^T) \mathbf{d}'(x) + \mathbf{A}_0 \mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x), \quad (26)$$

nebo v kompaktním zápisu jako

$$\mathbf{K}_x \mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x), \quad (27)$$

kde \mathbf{K}_x je maticový diferenciální operátor daný předpisem

$$\mathbf{K}_x = -\mathbf{A}_{II} \frac{d^2}{dx^2} - (\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_I^T) \frac{d}{dx} + \mathbf{A}_0. \quad (28)$$

Na následujících dvou stranách jsou uvedeny prvky matic \mathbf{A}_{II} a $\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_I^T$ a \mathbf{A}_0 . Prvky operátorové matice \mathbf{K}_x jsou pro obecný případ rozepsány ve vztahu (32). Abychom výslednou soustavu rovnic zjednodušili, je výhodné pracovat s centrální a navíc hlavní soustavou souřadnic y a z , pro kterou jsou nulové statické momenty průřezu a jeho deviační moment, tj. platí $S_y = \int_A z dA = 0$, $S_z = \int_A y dA = 0$ a $D_{yz} = \int_A yz dA = 0$. Při této volbě soustavy souřadnic se matice \mathbf{K}_x zjednoduší na tvar uvedený ve (103).

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & E \int_A z \, dA & -E \int_A y \, dA & E \int_A \psi \, dA \\ 0 & GA & 0 & -G \int_A z \, dA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA & G \int_A y \, dA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G \int_A z \, dA & G \int_A y \, dA & G \int_A y^2 + z^2 \, dA & 0 & 0 & 0 \\ E \int_A z \, dA & 0 & 0 & 0 & E \int_A z^2 \, dA & -E \int_A yz \, dA & E \int_A \psi z \, dA \\ -E \int_A y \, dA & 0 & 0 & 0 & -E \int_A yz \, dA & E \int_A y^2 \, dA & -E \int_A \psi y \, dA \\ E \int_A \psi \, dA & 0 & 0 & 0 & E \int_A \psi z \, dA & -E \int_A \psi y \, dA & E \int_A \psi^2 \, dA \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_I^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GA & G \int_A \psi, y \, dA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GA & 0 & G \int_A \psi, z \, dA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A y \, dA & G \int_A z \, dA & G \int_A \psi, zy - \psi, yz \, dA \\ 0 & 0 & -GA & -G \int_A y \, dA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 & -G \int_A z \, dA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G \int_A \psi, y \, dA & -G \int_A \psi, z \, dA & G \int_A -\psi, zy + \psi, yz \, dA & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GA & 0 & G \int_A \psi_{,z} dA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GA & -G \int_A \psi_{,y} dA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A \psi_{,z} dA & -G \int_A \psi_{,y} dA & G \int_A \psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2 dA \end{pmatrix} \quad (31)$$

Dále ze stacionarity Lagrangeova funkcionálu plynou statické okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{II}^T \mathbf{d}'(0) + \mathbf{A}_I \mathbf{d}(0) &= - \left(\int_{S_0} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, dS \right)^T, \\ \mathbf{A}_{II}^T \mathbf{d}'(L) + \mathbf{A}_I \mathbf{d}(L) &= \left(\int_{S_L} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, dS \right)^T,\end{aligned}\tag{34}$$

které lze přepsat jako

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{II} \mathbf{d}'(0) + \mathbf{A}_I \mathbf{d}(0) &= - \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) \, dS, \\ \mathbf{A}_{II} \mathbf{d}'(L) + \mathbf{A}_I \mathbf{d}(L) &= \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) \, dS.\end{aligned}\tag{35}$$

Tyto podmínky platí pouze pro nepodepřené koncové průřezy a obecně je třeba je kombinovat s geometrickými okrajovými podmínkami, předepisujícími v krajních průřezích hodnoty jednotlivých neznámých funkcí, tedy prvků sloupcových matic $\mathbf{d}(0)$ nebo $\mathbf{d}(L)$.

3 Vnitřní síly na prutu

V této kapitole identifikujeme vnitřní síly, které na prutu působí v souladu s modelem, který jsme pomocí Lagrangeova principu odvodili v předchozí kapitole. Za tímto účelem nejdříve zapišme pole přetvoření našeho modelu, které dostaneme tak, že dosadíme naše předpoklady o poli posunutí (2) do vztahu pro výpočet pole deformace z pole posunutí dle (5). Poté zapišme pole přetvoření reprezentované sloupcovou maticí $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ jako součin matice \mathbf{N}_ε a vektoru $\mathbf{e}(x)$, kde v \mathbf{N}_ε se vyskytují pouze konstanty a funkce závislé na souřadnicích y a z a sloupcová matice $\mathbf{e}(x)$ obsahuje funkce závislé na proměnné x a derivace podle proměnné x .

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{e}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \psi_{,y} \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \psi_{,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_c \\ v'_c - \varphi_z \\ w'_c + \varphi_y \\ \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \\ \chi' \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Složky $\mathbf{e}(x)$ budeme chápat jako jisté deformační veličiny na úrovni průřezu, se kterými jsou sdruženy jisté vnitřní síly, které jsou reprezentovány prvky sloupcové matice $\mathbf{s}(x)$, které hledáme. Za sdruženou deformační veličinou a vnitřní silou považujeme odpovídající prvky každého ze součinnů ve výrazu $\mathbf{s}^T(x)\mathbf{e}(x)$. $\mathbf{s}(x)$ definujeme jako takovou sloupcovou matici, že výraz pro "energií vnitřních sil" v Lagrangeově funkcionálu potenciální energie (viz (10) v kapitole 2) můžeme zapsat jako

$$E_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{s}^T(x) \mathbf{e}(x) dx. \quad (37)$$

Za účelem zjednodušení dalšího odvození dále vyjádříme $\mathbf{e}(x) = \mathbf{O} \mathbf{d}(x)$, kde \mathbf{O} je operátorová matice obsahující konstanty a derivace podle proměnné x a $\mathbf{d}(x)$ je již dříve zavedená sloupcová matice aproximačních funkcí závislých na proměnné x , které jsou prvky pole posunutí (2).

$$\mathbf{e}(x) = \begin{pmatrix} u'_c \\ v'_c - \varphi_z \\ w'_c + \varphi_y \\ \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \\ \chi' \\ \chi \end{pmatrix} = \mathbf{O} \mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Nyní dosadíme výraz $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{O}d(x)$ do výrazu (10) pro "energii vnitřních sil"

$$\begin{aligned}
 E_{int}(\mathbf{d}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{2} \int_V ((\mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{O}d(x))^T \mathbf{D} (\mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{O}d(x))) \, dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V ((\mathbf{O}d(x))^T \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{O}d(x)) \, dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left((\mathbf{O}d(x))^T \left(\int_A \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \, dA \right) \mathbf{O}d(x) \right) \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{s}^T(x) \mathbf{e}(x) \, dx, \tag{39}
 \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{s}^T(x) = (\mathbf{O}d(x))^T \left(\int_A \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \, dA \right), \tag{40}$$

cože jsme požadovali. Na následující straně je v (41) uvedena podoba matice $\int_A \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \, dA$. Samotná $s(x)$ je zapsána v (42) (upozorňujeme, že matice není pro přehlednější zápis transponována).

$$\begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & E \int_A z \, dA & -E \int_A y \, dA & E \int_A \psi \, dA & 0 \\ 0 & GA & 0 & -G \int_A z \, dA & 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A \psi_{,y} \, dA \\ 0 & 0 & GA & G \int_A y \, dA & 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A \psi_{,z} \, dA \\ 0 & -G \int_A z \, dA & G \int_A y \, dA & G \int_A (y^2 + z^2) \, dA & 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \\ E \int_A z \, dA & 0 & 0 & 0 & E \int_A z^2 \, dA & -E \int_A yz \, dA & E \int_A \psi z \, dA & E \int_A \psi z \, dA & 0 \\ -E \int_A y \, dA & 0 & 0 & 0 & -E \int_A yz \, dA & E \int_A y^2 \, dA & -E \int_A \psi y \, dA & -E \int_A \psi y \, dA & 0 \\ E \int_A \psi \, dA & 0 & 0 & 0 & E \int_A \psi z \, dA & -E \int_A \psi y \, dA & E \int_A \psi i^2 \, dA & E \int_A \psi i^2 \, dA & 0 \\ 0 & G \int_A \psi_{,y} \, dA & G \int_A \psi_{,z} \, dA & G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA & 0 & 0 & 0 & 0 & G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) \, dA \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} -E \int_A y \, dA \varphi'_z + EAu'_c + E \int_A \psi \, dA \chi' + E \int_A z \, dA \varphi'_y \\ -G \int_A z \, dA \varphi'_x + GAu'_c + G \int_A \psi_{,y} \, dA \chi - GA\varphi_z \\ GAu'_c + G \int_A \psi_{,z} \, dA \chi + GA\varphi_y + G \int_A y \, dA \varphi'_x \\ G \int_A y \, dA u'_c + G \int_A y \, dA \varphi_y - G \int_A z \, dA u'_c + G \int_A z \, dA \varphi_z + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \chi + G \int_A (y^2 + z^2) \, dA \varphi'_x \\ E \int_A z^2 \, dA \varphi'_y - E \int_A yz \, dA \varphi'_z + E \int_A z \, dA u'_c + E \int_A \psi z \, dA \chi' \\ E \int_A y^2 \, dA \varphi'_z - E \int_A \psi y \, dA \chi' - E \int_A yz \, dA \varphi'_y - E \int_A y \, dA u'_c \\ E \int_A \psi^2 \, dA \chi' - E \int_A \psi y \, dA \varphi'_z + E \int_A z \, dA u'_c + E \int_A z \, dA \varphi'_y \\ G \int_A \psi_{,y} \, dA u'_c + G \int_A \psi_{,z} \, dA u'_c + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) \, dA \chi + G \int_A \psi_{,z} \, dA \varphi_y - G \int_A \psi_{,y} \, dA \varphi_z + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \varphi'_x \end{pmatrix} \quad (42)$$

Protože uvažujeme použití centrálního a hlavního souřadného systému, jak jsme již dříve uvedli, uvažujeme statické momenty $S_y = \int_A z \, dA = 0$, $S_z = \int_A y \, dA = 0$ a deviační moment $D_{yz} = \int_A yz \, dA = 0$. Výrazy pro vnitřní síly můžeme tedy zjednodušit do podoby uvedené v (43). Vidíme, že v uvedených výrazech se vyskytují známé výrazy pro vnitřní síly jako například $E Au'_c$, který například v Mindlinově modelu [4, str.28-32] vyjadřuje normálovou sílu. Podobně můžeme ve výrazech níže vidět části známých vztahů pro posouvající síly či ohybové momenty.

$$\begin{aligned}
N &= EAu'_c + E \int_A \psi \, dA\chi' \\
V_y &= GA v'_c + G \int_A \psi_{,y} \, dA\chi - GA\varphi_z \\
V_z &= GA w'_c + G \int_A \psi_{,z} \, dA\chi + GA\varphi_y \\
M_x &= G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA\chi + G \int_A (y^2 + z^2) \, dA\varphi'_x \\
M_y &= E \int_A z^2 \, dA\varphi'_y + E \int_A \psi z \, dA\chi' \\
M_z &= E \int_A y^2 \, dA\varphi'_z - E \int_A \psi y \, dA\chi' \\
B &= E \int_A \psi^2 \, dA\chi' - E \int_A \psi y \, dA\varphi'_z + E \int_A \psi \, dAu'_c + E \int_A z\psi \, dA\varphi'_y \\
M^2 &= G \int_A \psi_{,y} \, dAv'_c + G \int_A \psi_{,z} \, dAw'_c + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) \, dA\chi + \\
&\quad + G \int_A \psi_{,z} \, dA\varphi_y - G \int_A \psi_{,y} \, dA\varphi_z + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA\varphi'_x \tag{43}
\end{aligned}$$

Upozorněme ještě, že s použitím zavedeného formalismu bychom snadno mohli odvodit matici \mathbf{K}_x (viz 103), kterou jsme již dříve odvodili jiným postupem v kapitole 1. Stačí, abychom zavedli adjugovaný operátor \mathbf{O}^* k operátoru \mathbf{O} , tak, že pro libovolnou reálnou sloupcovou matici $s(x)$ platí

$$\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{s}^T(x) (\mathbf{O} \mathbf{d}(x)) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{O}^* \mathbf{s}(x))^T \mathbf{d}(x) \, dx. \tag{44}$$

Nyní bychom již mohli provést variaci tohoto funkcionálu podle prvků sloupcové matice $\mathbf{d}(x)$

a zapsat matici K_x . Adjugovaný operátor \mathbf{O}^* můžeme přitom zapsat jako

$$\mathbf{O}^* = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

4 Diferenciální rovnice popisující model

V této kapitole rozepíšeme diferenciální rovnice popisující odvozený model v souladu s odvozenými podmínkami stacionarity Lagrangeova funkcionálu potenciální energie v kapitole 2 (soustava rovnic (26)). Soustavu rovnic zapíšeme pro případ, kdy tuhost prutu je po průřezu proměnná a je tedy funkcí proměnné x . V kapitole 2 je sice odvození pro jednoduchost uvedeno pro případ konstantní tuhosti po délce prutu, ale kdybychom při odvození uvažovali proměnnou tuhost, mohli bychom podobným způsobem odvodit rovnice

$$\begin{aligned}
& - (EAu'_c)' - \left(E \int_A \psi \, dA\chi' \right)' = f_x \\
& - (GA(v'_c - \varphi_z))' - \left(G \int_A \psi_{,y} \, dA\chi \right)' = f_y \\
& - (GA(w'_c + \varphi_y))' - \left(G \int_A \psi_{,z} \, dA\chi \right)' = f_z \\
& - \left(G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA\chi \right)' - \left(G \int_A (y^2 + z^2) \, dA\varphi'_x \right)' = m_x \\
& - \left(E \int_A z^2 \, dA\varphi'_y \right)' - \left(E \int_A \psi z \, dA\chi' \right)' + GA(w'_c + \varphi_y) + G \int_A \psi_{,z} \, dA\chi = m_y \\
& - \left(E \int_A y^2 \, dA\varphi'_z \right)' + \left(E \int_A \psi y \, dA\chi' \right)' - GA(v'_c - \varphi_z) - G \int_A \psi_{,y} \, dA\chi = m_z \\
& - \left(E \int_A \psi \, dA \, u'_c \right)' - \left(E \int_A z\psi \, dA \, \varphi'_y \right)' + \left(E \int_A \psi y \, dA \, \varphi'_z \right)' - \left(E \int_A \psi^2 \, dA \, \chi' \right)' \\
& + G \int_A \psi_{,y} \, dA \, v'_c + G \int_A \psi_{,z} \, dA \, w'_c + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \, \varphi'_x + G \int_A \psi_{,z} \, dA \, \varphi_y \\
& - G \int_A \psi_{,y} \, dA \, \varphi_z + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) \, dA \, \chi = b
\end{aligned} \tag{46}$$

Funkce na pravé straně těchto rovnic představují odpovídající měrné spojité zatížení prutu vztažené k jeho střednici a jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_A b_x(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} t_x(x, y, z) \, dA \\
f_y(x) &= \int_A b_y(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} t_y(x, y, z) \, dA \\
f_z(x) &= \int_A b_z(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} t_z(x, y, z) \, dA \\
m_x(x) &= - \int_A z b_y(x, y, z) \, dA + \int_A y b_z(x, y, z) \, dA - \int_{\Gamma} z t_y(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} y t_z(x, y, z) \, dA \\
m_y(x) &= \int_A z b_x(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} z t_x(x, y, z) \, dA \\
m_z(x) &= - \int_A y b_x(x, y, z) \, dA - \int_{\Gamma} y t_x(x, y, z) \, dA \\
b(x) &= \int_A \psi(y, z) b_x(x, y, z) \, dA + \int_{\Gamma} \psi(y, z) t_x(x, y, z) \, dA
\end{aligned} \tag{47}$$

Pro lepší pochopení označíme obvyklými symboly průřezové charakteristiky $I_y = \int_A z^2 \, dA$, $I_z = \int_A y^2 \, dA$ a $I_p = \int_A (y^2 + z^2) \, dA$. Dále budeme předpokládat, že prut má po délce konstantní tuhost, která tedy není funkcí proměnné x . Zároveň požadujeme, aby pro deplanační funkci ψ platilo $\int_A \psi(y, z) \, dA = 0$. To můžeme, neboť uvažujeme, že deplanační funkci $\psi(y, z)$ je odvozena ze známé Laplaceovy rovnice [1, str.107-108]

$$\Delta \psi(y, z) \equiv \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} = 0 \tag{48}$$

s okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial \psi(y, z)}{\partial n} = n_y z - n_z y. \tag{49}$$

Tato okrajová úloha ale nemá jednoznačné řešení. Pokud navíc požadujeme, aby $\int_A \psi(y, z) \, dA = 0$, existuje právě jedno řešení ψ , které splňuje rovnici (48) a okrajovou podmínku (49). Rovnice

soustavy (46) pak můžeme přepsat v jednodušším tvaru jako

$$\begin{aligned}
& -EAu_c'' = f_x(x) \\
& -GA(v_c' - \varphi_z)' - G \int_A \psi_{,y} dA\chi' = f_y(x) \\
& -GA(w_c' + \varphi_y)' - G \int_A \psi_{,z} dA\chi' = f_z(x) \\
& -G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\chi' - GI_p\varphi_x'' = m_x(x) \\
& -EI_y\varphi_y'' - E \int_A \psi z dA\chi'' + GA(w_c' + \varphi_y) + G \int_A \psi_{,z} dA\chi = m_y(x) \\
& -EI_z\varphi_z'' + E \int_A \psi y dA\chi'' - GA(v_c' - \varphi_z) - G \int_A \psi_{,y} dA\chi = m_z(x) \\
& \quad -E \int_A z\psi dA\varphi_y'' + E \int_A \psi y dA\varphi_z'' - E \int_A \psi^2 dA\chi'' + \\
& +G \int_A \psi_{,y} dAv_c' + G \int_A \psi_{,z} dAw_c' + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\varphi_x' + G \int_A \psi_{,z} dA\varphi_y + \\
& \quad -G \int_A \psi_{,y} dA\varphi_z + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) dA\chi = b(x)
\end{aligned} \tag{50}$$

Z Lagrangeova principu minima potenciální energie také v kapitole 2 vyplynuly statické okrajové podmínky (35), které musí být splněny na části hranice S_t , na které nejsou předepsány posuny. Můžeme tedy zapsat statickou okrajovou podmínku pro $x = 0$ a pro $x = L$. Protože obě podmínky jsou až na znaménko na pravé straně rovnic identické, uveďme pouze podmínku pro $x = 0$. Statické okrajové podmínky jsou pak doplněny geometrickými okrajovými podmínkami na S_u , tedy té části hranice, na které jsou předepsány posuny. Geometrické okrajové podmínky při odvození našeho modelu pomocí Lagrangeova principu zavádíme jakožto předpoklady.

Statické okrajové podmínky odpovídají předepsaným hodnotám vnitřních sil. Jednotlivé prvky sloupcové matice $\mathbf{A}_{II}\mathbf{d}' + \mathbf{A}_I\mathbf{d}$ tedy můžeme identifikovat jako vnitřní síly, konkrétně normálovou sílu N , dvě posouvající síly V_y a V_z , krouticí moment M_x , dva ohybové momenty M_y a M_z , bimoment B a ohybově krouticí moment $M_x^{(2)}$. Stejný význam jako v krajních průřezích budou mít prvky matice $\mathbf{A}_{II}\mathbf{d}' + \mathbf{A}_I\mathbf{d}$ i uvnitř prutu. Na základě (35) tedy můžeme také zapsat obecné vztahy mezi vnitřními silami a funkcemi popisujícími přemístění prutu (jak už jsme učinili v kapitole 3, ve výrazech níže ale oproti obecné formulaci v kapitole 3

některé výrazy zanedbáváme v souladu s předpoklady v kapitole 4):

$$N = EAu'_c \quad (51)$$

$$V_y = G \int_A \frac{\partial \psi(y, z)}{\partial y} dA \chi + GA v'_c - GA \varphi_z \quad (52)$$

$$V_z = G \int_A \frac{\partial \psi(y, z)}{\partial z} dA \chi + GA w'_c + GA \varphi_y \quad (53)$$

$$M_x = G \left(\int_A y \frac{\partial \psi(y, z)}{\partial z} - z \frac{\partial \psi(y, z)}{\partial y} dA \right) \chi + G(I_y + I_z) \varphi'_x \quad (54)$$

$$M_y = E \int_A z \psi(y, z) dA \chi' + EI_y \varphi'_y \quad (55)$$

$$M_z = -E \int_A y \psi(y, z) dA \chi' + EI_z \varphi'_z \quad (56)$$

$$B = -E \int_A y \psi(y, z) dA \varphi'_z + E \int_A z \psi(y, z) dA \varphi'_y + E \int_A \psi^2(y, z) \chi' \quad (57)$$

$$\begin{aligned} M_x^{(2)} = & G \int_A \psi_{,y} dA v'_c + G \int_A \psi_{,z} dA w'_c + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) dA \chi + \\ & + G \int_A \psi_{,z} dA \varphi_y - G \int_A \psi_{,y} dA \varphi_z + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA \varphi'_x. \end{aligned} \quad (58)$$

Se znalostí tvaru vnitřních sil můžeme rovnice soustavy (50) zapsat jako

$$\begin{aligned} -N' &= f_x(x) \\ -V'_y &= f_y(x) \\ -V'_z &= f_z(x) \\ -M'_x &= m_x(x) \\ -M'_y + V_z &= m_y(x) \\ -M'_z - V_y &= m_z(x) \\ -B' + M_x^{(2)} &= b(x). \end{aligned} \quad (59)$$

což jsou obvyklé podmínky rovnováhy diferenciálního segmentu prutu zapsané pomocí vnitřních sil.

5 Redukce rovnic modelu pro různé typy průřezů

Soustava diferenciálních rovnic (50) popisující náš model obsahuje sedm diferenciálních rovnic a sedm neznámých funkcí. Oproti obdobným soustavám klasických modelů je ale nevýhodná v tom smyslu, že všechny rovnice až na první jsou propojeny prostřednictvím neznámé funkce χ , přičemž jejich okrajové podmínky jsou prostřednictvím funkce χ také propojeny. Rovnice tedy nemůžeme v obecném případě řešit samostatně, ale musíme použít metody pro řešení soustav diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. V jistých specifických případech, například pro průřezy vykazující symetrii či tenkostěnné průřezy, se soustava (50) zjednoduší, jak se pokusíme demonstrovat na příkladech níže. Připomeňme, že uvažujeme tvar deplanační funkce $\psi(y, z)$ jakožto řešení známé Laplaceovy rovnice [1, str.107-108], jak bylo rozebráno v minulé kapitole.

5.1 Kruhový průřez

V tomto případě průřez nedeplanuje, viz [1, kap 2.1.2] Platí tedy, že $\psi(y, z) = 0$. Soustavu (50) tedy můžeme redukovat na soustavu (60) uvedenou níže. Protože musí zároveň platit

$$b(x) = \int_A \psi(y, z) b_x \, dA + \int_{\Gamma} \psi(y, z) t_x \, dA = 0, \text{ je poslední rovnice v (60) identicky splněna.}$$

$$\begin{aligned} -EAu_c'' &= f_x(x) \\ -GA(v_c' - \varphi_z)' &= f_y(x) \\ -GA(w_c' + \varphi_y)' &= f_z(x) \\ -GI_p\varphi_x'' &= m_x(x) \\ -EI_y\varphi_y'' + GA(w_c' + \varphi_y) &= m_y(x) \\ -EI_z\varphi_z'' - GA(v_c' - \varphi_z) &= m_z(x) \\ 0 &= b(x) \end{aligned} \tag{60}$$

5.2 Obdélníkový průřez

V tomto případě můžeme deplanační funkci vyjádřit řadou podle [1, str.116]

$$\begin{aligned} -EAu_c'' &= f_x(x) \\ -GA(v_c' - \varphi_z)' &= f_y(x) \\ -GA(w_c' + \varphi_y)' &= f_z(x) \\ -G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \chi' - GI_p\varphi_x'' &= m_x(x) \\ -EI_y\varphi_y'' + GA(w_c' + \varphi_y) &= m_y(x) \\ -EI_z\varphi_z'' - GA(v_c' - \varphi_z) &= m_z(x) \\ -E \int_A \psi^2 \, dA \chi'' + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) \, dA \varphi_x' + \\ + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) \, dA \chi &= b(x) \end{aligned} \tag{61}$$

5.3 Průřez tvaru rovnostranného trojúhelníka

V tomto případě můžeme deplanační funkci vyjádřit vzorcem podle [3, str.224]

$$\begin{aligned}
& -EAu_c'' = f_x(x) \\
& -GA(v_c' - \varphi_z)' = f_y(x) \\
& -GA(w_c' + \varphi_y)' = f_z(x) \\
& -G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\chi' - GI_p\varphi_x'' = m_x(x) \\
& \quad -EI_y\varphi_y'' + GA(w_c' + \varphi_y) = m_y(x) \\
& \quad -EI_z\varphi_z'' - GA(v_c' - \varphi_z) = m_z(x) \\
& -E \int_A \psi^2 dA\chi'' + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\varphi_x' + \\
& \quad + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) dA\chi = b(x)
\end{aligned} \tag{62}$$

5.4 Tenkostěnný průřez

Pro případ tenkostěnného průřezu je deplanační funkce dle [1, str.117] přibližně rovna $-\omega(s)$, kde $\omega(s)$ je takzvané výsečové souřadnice. Pro výpočet $\omega(s)$ můžeme zvolit takový pól (tzv. hlavní pól), že $I_{\omega z} = \int_A \omega y dA = 0$ a $I_{\omega y} = \int_A \omega z dA = 0$, což zjednoduší soustavu 50 na tvar níže.

$$\begin{aligned}
& -EAu_c'' = f_x(x) \\
& -GA(v_c' - \varphi_z)' - G \int_A \psi_{,y} dA\chi' = f_y(x) \\
& -GA(w_c' + \varphi_y)' - G \int_A \psi_{,z} dA\chi' = f_z(x) \\
& -G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\chi' - GI_p\varphi_x'' = m_x(x) \\
& -EI_y\varphi_y'' + GA(w_c' + \varphi_y) + G \int_A \psi_{,z} dA\chi = m_y(x) \\
& -EI_z\varphi_z'' - GA(v_c' - \varphi_z) - G \int_A \psi_{,y} dA\chi = m_z(x) \\
& -E \int_A \psi^2 dA\chi'' + G \int_A \psi_{,y} dAv_c' + G \int_A \psi_{,z} dAw_c' + G \int_A (\psi_{,zy} - \psi_{,yz}) dA\varphi_x' + G \int_A \psi_{,z} dA\varphi_y + \\
& \quad -G \int_A \psi_{,y} dA\varphi_z + G \int_A (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) dA\chi = b(x)
\end{aligned} \tag{63}$$

6 Odvození modelu pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu

Model, který jsme v předchozích kapitolách odvodili za použití Lagrangeova principu minima potenciální energie, naneštěstí nerespektuje skutečné rozložení smykového napětí při ohybu a kroucení prutu, o čemž se můžeme snadno přesvědčit, pokud vyjádříme například smykové napětí

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \right) = G \left(\varphi_y(x) + \chi(x) \frac{\partial \psi(y, z)}{\partial z} + w'_c(x) + y\varphi'_x(x) \right).$$

Při prostém ohybu by pro nedeplanující průřez platilo $\varphi'_x(x) = 0$ a $\psi(y, z) = 0$, takže bychom dostali $\tau_{xz} = G(\varphi_y(x) + w'_c(x))$. V daném průřezu (tedy pro danou hodnotu x) dostáváme konstantní rozložení smykového napětí po výšce průřezu, což je ve sporu s Cauchyho rovnicemi, ze kterých bychom získali nekonstantní průběh smykového napětí [1, str.118-126]. Tento rozpor je způsoben naší volbou pole posunů ve tvaru (1), která je zde pro připomenutí zopakována:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_c(x) + z\varphi_y(x) - y\varphi_z(x) + \chi(x)\psi(y, z), \\ v(x, y, z) &= v_c(x) - z\varphi_x(x), \\ w(x, y, z) &= w_c(x) + y\varphi_x(x). \end{aligned}$$

Model odvozený z Lagrangeova principu minima potenciální energie má navíc tu nešťastnou vlastnost, že pro dané zatížení přísluší modelu vyšší potenciální energie než skutečné konstrukci [2, str. 276] a model tak vykazuje větší tuhost. Abychom získali model s takovým rozložením smykových napětí, které by respektovalo Cauchyho rovnice rovnováhy, provedme alternativní odvození, tentokrát pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu. Cílem bude najít odpovídající korekce průřezových tuhostí, podobně jako v případě smykové plochy v Mindlinově modelu [4, str. 30-33].

Hellingerův-Reissnerův funkcionál je ve své základní podobě definován předpisem [1, str. 309]

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) &= \int_V \left(\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\partial} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) \right) dV \\ &\quad - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) dS - \int_{S_u} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \mathbf{n}^T (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) dS, \end{aligned} \quad (64)$$

kde stejně jako v dříve uvažovaném Lagrangeově funkcionálu jsou $\bar{\mathbf{b}}$ a $\bar{\mathbf{t}}$ sloupcové matice složek objemového a povrchového zatížení (viz (12) a navíc

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_x(\mathbf{x}) \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) \\ \tau_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (65)$$

je sloupcová matice (nenulových) složek napětí,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \bar{u}(\mathbf{x}) \\ \bar{v}(\mathbf{x}) \\ \bar{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (66)$$

je sloupcová matice předepsaných posunů na podepřené části hranice, označené S_u ,

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ 0 & n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_x \end{pmatrix} \quad (67)$$

je matice obsahující kartézské složky normálového vektoru k povrchu tělesa a umožňující přepočít složek napětí na složky povrchových sil. Dále pak

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (68)$$

je matice poddajnosti materiálu a

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (69)$$

je operátorová matice sloužící pro výpočet deformací z posunů.

Předpokládejme, že aproximace pole posunů $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ je volena tak, aby splňovala geometrické okrajové podmínky $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ na S_u . Poslední integrál ve (64) tedy můžeme vypustit. V prvním integrálu rozepíšeme zvlášť členy odpovídající normálovým a smykovým napětím. Funkcionál tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \sigma_x, \boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\sigma_x(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\partial}_\gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2E} \sigma_x^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2G} \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) dV + \\ - \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) dS, \end{aligned} \quad (70)$$

kde

$$\boldsymbol{\partial}_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \tau_{xy}(\mathbf{x}) \\ \tau_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Smyková napětí budeme aproximovat vhodně zvolenými funkcemi, nezávisle na aproximaci posunů a z ní vyplývající aproximaci smykových deformací. Naproti tomu pro normálové napětí zachováme aproximaci sestavenou tak, že na normálovou deformaci odvozenou z aproximace posunů uplatníme Hookeův zákon. Dosadíme tedy $\sigma_x(\mathbf{x}) = E \partial u(\mathbf{x}) / \partial x$ a funkcionál přepíšeme jako

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\partial}_\gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2G} \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) dV + \\ - \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) dS. \end{aligned} \quad (72)$$

Kdybychom v podobném duchu dosadili $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = G\boldsymbol{\partial}_\gamma \mathbf{u}(\mathbf{x})$, dostali bychom Lagrangeův funkcionál potenciální energie. To však neuděláme, protože aproximace smykového napětí přímo odvozená ze smykové deformace je příliš hrubá a chceme ji vylepšit.

Pro další úpravy je výhodné zapsat aproximaci pole posunů zvlášť pro příčné posuny

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{N}_v(\mathbf{y})\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (73)$$

a pro podélný posun

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_u(\mathbf{y})\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi(y, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (74)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_u(\mathbf{y})\mathbf{d}(x) \quad (75)$$

Dále zavedeme aproximaci pole smykového napětí v obecném tvaru

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\tau(\mathbf{y})\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} f_1(y, z) & \dots & f_c(y, z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_{s+1}(y, z) & \dots & f_{2s}(y, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \dots \\ C_c(x) \\ C_{s+1}(x) \\ \dots \\ C_{2s}(x) \end{pmatrix}, \quad (76)$$

kde f_1 až f_{2s} jsou vhodně zvolené funkce aproximující rozložení smykového napětí po průřezu a C_1 až C_{2s} jsou zatím neznámé funkce podélné souřadnice x . Vztah pro výpočet smykových deformací rozepíšeme jako

$$\boldsymbol{\partial}_\gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} u(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x}. \quad (77)$$

Po těchto přípravných úvahách můžeme funkcionál (72) zapsat jako

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_V \left(\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x} \right) dV \\ &\quad - \int_V \frac{1}{2G} \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) dV - \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) dS. \end{aligned} \quad (78)$$

Po dosazení výrazů (73)–(76) dostaneme funkcionál závislý pouze na funkcích proměnné x ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{d}, \mathbf{c}) = & \int_V \left(\frac{1}{2} E \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{n}_u^T(\mathbf{y}) \mathbf{n}_u(\mathbf{y}) \mathbf{d}'(x) + \mathbf{c}^T(x) \mathbf{N}_\tau^T(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial \mathbf{n}_u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{d}(x) + \mathbf{N}_v(\mathbf{y}) \mathbf{d}'(x) \right) \right) dV \\ & - \int_V \left(\frac{1}{2G} \mathbf{c}^T(x) \mathbf{N}_\tau^T(\mathbf{y}) \mathbf{N}_\tau(\mathbf{y}) \mathbf{c}(x) \right) dV - \int_V \mathbf{d}^T(x) \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV - \int_{S_t} \mathbf{d}^T(x) \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) dS, \end{aligned} \quad (79)$$

který lze po rozdělení integrace přes objem na integraci po délce a integraci přes průřez prutu přepsat jako

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{d}, \mathbf{c}) = & \int_0^L \left(\frac{1}{2} E \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{nn} \mathbf{d}'(x) \right) dx + \int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x) \mathbf{A}_{\sigma B} \mathbf{d}(x) \right) dx \\ & + \int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x) \mathbf{A}_{\sigma u} \mathbf{d}'(x) \right) dx - \int_0^L \left(\frac{1}{2G} \mathbf{c}^T(x) \mathbf{A}_{\sigma\sigma} \mathbf{c}(x) \right) dV \\ & - \int_0^L \mathbf{d}^T(x) \mathbf{f}(x) dx \\ & - \mathbf{d}^T(0) \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(0, \mathbf{y}) dS - \mathbf{d}^T(L) \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(L, \mathbf{y}) dS, \end{aligned} \quad (80)$$

kde

$$\mathbf{A}_{nn} = \int_A \mathbf{n}_u^T(\mathbf{y}) \mathbf{n}_u(\mathbf{y}) dA \quad (81)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma B} = \int_A \mathbf{N}_\tau^T(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{n}_u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} dA \quad (82)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma u} = \int_A \mathbf{N}_\tau^T(\mathbf{y}) \mathbf{N}_v(\mathbf{y}) dA \quad (83)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma\sigma} = \int_A \mathbf{N}_\tau^T(\mathbf{y}) \mathbf{N}_\tau(\mathbf{y}) dA \quad (84)$$

$$\mathbf{f}(x) = \int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{b}}(x, \mathbf{y}) dA + \int_\Gamma \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(x, \mathbf{y}) ds. \quad (85)$$

Nyní vyhodnotíme variaci funkcionálu (80), zatím pouze s uvažováním změny $\mathbf{d}(x)$ při konstantním $\mathbf{c}(x)$. Vzhledem k symetrii matice \mathbf{A}_{nn} můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{d}} \Pi_{HR}(\mathbf{d}, \mathbf{c}, \delta \mathbf{d}) = & \int_0^L E \mathbf{d}'^T(x) \mathbf{A}_{nn} \delta \mathbf{d}'(x) dx + \int_0^L \mathbf{c}^T(x) \mathbf{A}_{\sigma B} \delta \mathbf{d}(x) dx \\ & + \int_0^L \mathbf{c}^T(x) \mathbf{A}_{\sigma u} \delta \mathbf{d}'(x) dx - \int_0^L \delta \mathbf{d}^T(x) \mathbf{f}(x) dx \\ & - \delta \mathbf{d}^T(0) \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(0, \mathbf{y}) dS - \delta \mathbf{d}^T(L) \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(L, \mathbf{y}) dS. \end{aligned} \quad (86)$$

Po integraci metodou per partes dostáváme

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{d}}\Pi_{HR}(\mathbf{d}, \mathbf{c}, \delta\mathbf{d}) = & - \int_0^L E\mathbf{d}''^T(x)\mathbf{A}_{nn}\delta\mathbf{d}(x) dx + [E\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_{nn}\delta\mathbf{d}(x)]_0^L \\
& + \int_0^L \mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma B}\delta\mathbf{d}(x) dx - \int_0^L \mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma u}\delta\mathbf{d}(x) dx \\
& + [\mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma u}\delta\mathbf{d}(x)]_0^L - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T(x)\mathbf{f}(x) dx \\
& - \delta\mathbf{d}^T(0) \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\mathbf{t}}(0, \mathbf{y}) dS - \delta\mathbf{d}^T(L) \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\mathbf{t}}(L, \mathbf{y}) dS. \tag{87}
\end{aligned}$$

Z podmínky nulové variace získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$-E\mathbf{A}_{nn}\mathbf{d}''(x) + \mathbf{A}_{\sigma B}^T\mathbf{c}(x) - \mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x), \tag{88}$$

a okrajové podmínky

$$\begin{aligned}
E\mathbf{A}_{nn}\mathbf{d}'(0) + \mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{c}(0) &= - \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\mathbf{t}}(0, \mathbf{y}) dS, \\
E\mathbf{A}_{nn}\mathbf{d}'(L) + \mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{c}(L) &= \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\mathbf{t}}(L, \mathbf{y}) dS. \tag{89}
\end{aligned}$$

Nyní vyhodnotíme variaci funkcionálu (79) pro pevně zvolené $\mathbf{d}(x)$ a proměnné $\mathbf{c}(x)$:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{c}}\Pi_{HR}(\mathbf{d}, \mathbf{c}, \delta\mathbf{c}) = & \int_0^L \delta\mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x) dx + \int_{S_0} \mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0, \mathbf{y}) dS \\
& + \int_0^L \delta\mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x) dx - \int_0^L \frac{1}{G}\delta\mathbf{c}^T(x)\mathbf{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x) dV \tag{90}
\end{aligned}$$

Z podmínky nulové variace dostáváme

$$\mathbf{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x) + \mathbf{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x) - \frac{1}{G}\mathbf{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x) = 0 \tag{91}$$

Rovnice (88) a (91) můžeme řešit jako soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $\mathbf{d}(x)$ a $\mathbf{c}(x)$. Je však také možné ze (91) vyjádřit

$$\mathbf{c}(x) = G\mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1}(\mathbf{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x) + \mathbf{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x)) \tag{92}$$

a dosadit do (88), čímž získáme upravenou soustavu rovnic pouze pro neznámé $\mathbf{d}(x)$:

$$\begin{aligned}
- (E\mathbf{A}_{nn} + G\mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma u}) \mathbf{d}''(x) + G(\mathbf{A}_{\sigma B}^T\mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma u} - \mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma B}) \mathbf{d}'(x) + \\
+ G\mathbf{A}_{\sigma B}^T\mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x). \tag{93}
\end{aligned}$$

Matice $\mathbf{A}_{\sigma\sigma}$ definovaná vztahem (84) je při správné volbě bázových funkcí pro aproximaci smykového napětí pozitivně definitní. Je výhodné volit bázové funkce tak, aby funkce odpovídající stejné složce napětí byly navzájem ortogonální. Pak je matice $\mathbf{A}_{\sigma\sigma}$ diagonální a její inverzi lze provést velmi snadno.

Pro tuto soustavu diferenciálních rovnic navíc platí získané okrajové podmínky (89), které můžeme upravit dosazením (92) za $c(0)$ a $c(L)$. Dostáváme tak následující tvar okrajových podmínek, ve kterém se jako neznámé funkce objevují pouze hodnoty hledané sloupcové matice $d(x)$

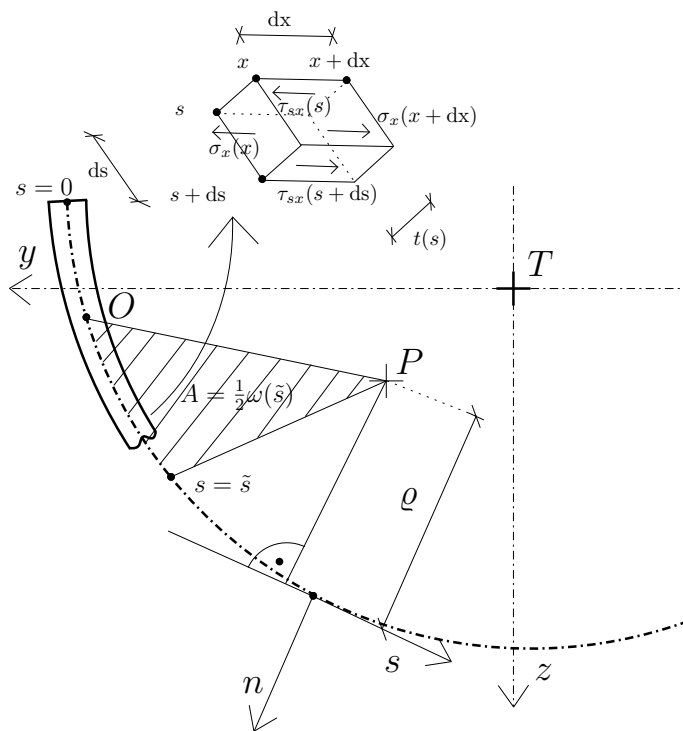
$$\begin{aligned}
(E\mathbf{A}_{nn} + G\mathbf{A}_{\sigma u}^T \mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{A}_{\sigma u}) \mathbf{d}'(0) + G\mathbf{A}_{\sigma u}^T \mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{A}_{\sigma B} \mathbf{d}(0) &= - \int_{S_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(0, \mathbf{y}) \, dS, \\
(E\mathbf{A}_{nn} + G\mathbf{A}_{\sigma u}^T \mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{A}_{\sigma u}) \mathbf{d}'(L) + G\mathbf{A}_{\sigma u}^T \mathbf{A}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{A}_{\sigma B} \mathbf{d}(L) &= \int_{S_L} \mathbf{N}^T(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{t}}(L, \mathbf{y}) \, dS. \quad (94)
\end{aligned}$$

7 Úprava modelu odvozeného pomocí H.-R. principu pro tenkostěnný otevřený průřez

V této části upravíme model odvozený v předchozí kapitole pomocí Hellingerova-Reissnerova principu pro případ, kdy průřez je tenkostěnný. Za tenkostěnný považujeme v souladu s [1, str. 213] takový prut, jehož poměr tloušťky k rozměrům obrysu průřezu je menší než přibližně 1:10. Průřez považujeme opět podle [1, str. 213] za otevřený, pokud je jeho střednice neuzavřenou čarou. V rámci průřezu budeme kromě globálních kartézských souřadnic y a z používat také lokální souřadnice s a n , přičemž souřadnice s narůstá ve směru střednice průřezu a souřadnice n ve směru kolmém na střednici. Kromě podélného posunu u ve směru globální osy x budeme pracovat se složkou posunu v_s v tečném směru ke střednici průřezu, ze které pak můžeme odvodit složku deformace γ_{xs} v rovině určené osami x a s . Pro otevřený tenkostěnný průřez jako deplanační funkci použijeme dle [1, str. 117] známou hlavní výsečovou souřadnici ω , která je funkcí s a získá se integrací veličiny $\varrho(s)$, představující kolmou vzdálenost tečny ke střednici průřezu v bodě o souřadnici s od středu smyku (opatřenou znaménkem), viz obr. 1. Platí tedy

$$\frac{d\omega(s)}{ds} = \varrho(s). \quad (95)$$

Na obrázku 1 si rovněž povšimněme souvislosti mezi plochou výseče A a výsečovou souřadnicí.



Obrázek 1: Grafické znázornění veličin využívaných při popisu tenkostěnného průřezu

Přijímáme konvenci, že výsečová souřadnice roste, pokud směr integrace $\varrho(s)$ postupuje proti směru hodinových ručiček. Předpokládáme, že integraci $\varrho(s)$ provádíme od tzv. hlavního

počátku, který v obrázku 1 značíme jako O , takže platí

$$\int_A \omega(s) dA = 0. \quad (96)$$

To je v souladu s podmínkou pro volbu deplanační funkce zmíněnou na str. 16 v kapitole 4. Uvažujeme také, že bod P , od kterého měříme $\varrho(s)$, je zvolen jako tzv. hlavní pól, takže platí

$$I_{\omega z} = \int_A y(s)\omega(s) dA = 0, \quad I_{\omega y} = \int_A z(s)\omega(s) dA = 0. \quad (97)$$

Integraci po tenkostěnném průřezu A můžeme rozložit na integraci po tloušťce průřezu a integraci po střednici. Většina uvažovaných veličin je po tloušťce průřezu konstantní a integrace po tloušťce je pak nahrazena násobením integrandu tloušťkou průřezu $t(s)$, která obecně může být proměnná. Můžeme tedy například napsat

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2(s) dA = \int_S \omega^2(s)t(s) ds, \quad (98)$$

kde \int_S označuje křivkový integrál přes celou střednici průřezu. Obecně budeme uvažovat, že vzhledem k využití hlavního pólu a hlavního počátku při definici výsečové souřadnice platí

$$S_{\omega} = \int_A \omega(s) dA = 0, \quad I_{\omega z} = \int_A y(s)\omega(s) dA = 0, \quad I_{\omega y} = \int_A z(s)\omega(s) dA = 0. \quad (99)$$

Dále vzhledem k volbě centrálního hlavního souřadnicového systému platí

$$D_{yz} = \int_A y(s)z(s) dA = 0, \quad S_z = \int_A y(s) dA = 0, \quad S_y = \int_A z(s) dA = 0. \quad (100)$$

Pro tenkostěnný průřez považujeme za významné smykové napětí τ_{xs} , zatímco smykové napětí τ_{xn} je zanedbatelné. Proto stačí místo smykových deformací γ_{xy} a γ_{xz} pracovat pouze s jedinou složkou γ_{xs} a obecné rovnice se poněkud upraví.

Pokud se omezíme na body ležící na střednici průřezu, můžeme uvažované aproximace pole posunů zapsat jako funkce souřadnic x a s ve tvaru

$$u(x, s) = u_c(x) + \varphi_y(x)z(s) - \varphi_z(x)y(s) + \chi(x)\omega(s), \quad (101)$$

$$v_s(x, s) = v_c(x) \frac{dy(s)}{ds} + w_c(x) \frac{dz(s)}{ds} + \varphi_x(x)\varrho(s), \quad (102)$$

kde kartézské souřadnice y a z chápeme jako funkce souřadnice s měřené podél střednice průřezu. Derivace dy/ds a dz/ds odpovídají kosinům úhlů, které tečna ke střednici průřezu

svírá s osami y a z . V maticové podobě můžeme aproximace posunutí zapsat jako

$$u(x, s) = \mathbf{n}_u(s)\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z(s) & -y(s) & \omega(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$v_s(x, s) = \mathbf{n}_v(s)\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dy(s)}{ds} & \frac{dz(s)}{ds} & \varrho(s) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(x) \\ v_c(x) \\ w_c(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (104)$$

a odpovídající deformace vyjádříme jako

$$\varepsilon_x(x, s) = \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} = \mathbf{n}_u(s)\mathbf{d}'(x) \quad (105)$$

$$\gamma_{xs}(x, s) = \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial v_s(x, s)}{\partial x} = \frac{d\mathbf{n}_u(s)}{ds}\mathbf{d}(x) + \mathbf{n}_v(s)\mathbf{d}'(x) \quad (106)$$

Zajímavé je, že derivováním matice \mathbf{n}_u podle s dostaneme matici

$$\frac{d\mathbf{n}_u(s)}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dz(s)}{ds} & -\frac{dy(s)}{ds} & \varrho(s) \end{pmatrix}, \quad (107)$$

která obsahuje stejné prvky jako matice \mathbf{n}_v , jen jinak uspořádané a se záporným znaménkem u jednoho z nich.

Poté, co jsme sestavili aproximaci pole posunutí, zbývá zvolit aproximaci pole napětí. Vydeme z podmínky rovnováhy diferenciálního elementu tenkostěnného průřezu, který je zobrazen na obrázku 1. Při následujícím odvození budeme nejdříve předpokládat, že tloušťka větve průřezu t se mění jak po střednici, tak i po délce prutu. Objemové síly a povrchové síly pokládáme zatím za nulové. Aby byl element v rovnováze, musí pro napětí ve směru osy x platit

$$\tau_{sx}(x + \frac{dx}{2}, s + ds)t(x + \frac{dx}{2}, s + ds) dx - \tau_{sx}(x + \frac{dx}{2}, s)t(x + \frac{dx}{2}, s) dx + \quad (108)$$

$$+ \sigma_x(x + dx, s + \frac{ds}{2})t(x + dx, s + \frac{ds}{2}) dx - \sigma_{sx}(x, s + \frac{ds}{2})t(x, s + \frac{ds}{2}) dx = 0. \quad (109)$$

Vydělme získanou rovnici součinem $dx ds$ a poté provedme limitní přechod $ds \rightarrow 0$ a $dx \rightarrow 0$. Dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial s} (t(x, s)\tau_{sx}(x, s)) + \frac{\partial}{\partial x} (t(x, s)\sigma_x(x, s)) = 0. \quad (110)$$

Součin $t\tau_{sx}$ představuje tzv. smykový tok. Pokud známe rozložení normálového napětí, můžeme smykový tok získat integrací vztahu (110) se vhodnou počáteční podmínkou. Momentálně nás

nezajímá přesný vzorec pro smykové napětí, ale snažíme se zjistit, jaký typ rozložení smykového napětí podél střednice průřezu můžeme očekávat a jakými funkcemi s je tedy vhodné toto napětí aproximovat.

Normálové napětí $\sigma_x(x, s)$ můžeme vyjádřit podle Hookeova zákona pro jednoosou napjatost, do kterého dosadíme normálovou deformaci vypočtenou ze zvolené aproximace podélných posunů (74), tedy podle vztahu (75). Dostáváme tak

$$\sigma_x(x, s) = E \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} = Eu'_c(x) + E\varphi'_y(x)z(s) - E\varphi'_z(x)y(s) + E\chi'(x)\omega(s) \quad (111)$$

Po dosazení výrazu (111) do (110) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial s} (t(x, s)\tau_{sx}(x, s)) = -Et(x, s) (u''_c(x) + \varphi''_y(x)z(s) - \varphi''_z(x)y(s) + \chi''(x)\omega(s)). \quad (112)$$

Při integraci tohoto vztahu uvážíme, že na “začátku” střednice, tedy v bodě $s = 0$, je smykové napětí nulové. Smykový tok tedy můžeme vyjádřit jako

$$t(x, s)\tau_{sx}(x, s) = - \int_0^s Et(x, \tilde{s}) (u''_c(x) + \varphi''_y(x)z(\tilde{s}) - \varphi''_z(x)y(\tilde{s}) + \chi''(x)\omega(\tilde{s})) d\tilde{s}. \quad (113)$$

Pokud budeme nyní pro jednoduchost předpokládat, že tloušťka průřezu se po délce prutu nemění a nezávisí tedy na proměnné x , můžeme rovnici (113) přepsat jako

$$\begin{aligned} t(s)\tau_{sx}(x, s) = & -Eu''_c(x) \int_0^s t(\tilde{s}) d\tilde{s} - E\varphi''_y(x) \int_0^s z(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \\ & + E\varphi''_z(x) \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - E\chi''(x) \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (114)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme veličiny závislé na s , které budou využity při aproximaci průběhu napětí po průřezu a jsou definované jako

$$\bar{S}_A(s) = \int_0^s t(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (115)$$

$$\bar{S}_y(s) = \int_0^s z(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (116)$$

$$\bar{S}_z(s) = \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (117)$$

$$\bar{S}_\omega(s) = \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (118)$$

což umožňuje přepsat (114) do tvaru

$$t(s)\tau_{sx}(x, s) = -Eu''_c(x)\bar{S}_A(s) - E\varphi''_y(x)\bar{S}_y(s) + E\varphi''_z(x)\bar{S}_z(s) - E\chi''(x)\bar{S}_\omega(s). \quad (119)$$

Pokud by na prut skutečně nepůsobily objemové ani povrchové síly (s výjimkou krajních průřezů), byl by možno smykový tok vypočtený podle (119) v rámci daných předpokladů považovat za přesný. K jeho výpočtu bychom ale potřebovali znát funkce u_c , φ_y , φ_z a χ , závislé na souřadnici x . Nás však zajímá rozložení smykového napětí τ_{xs} po průřezu, které je lineární kombinací funkcí $\bar{S}_A(s)/t(s)$, $\bar{S}_y(s)/t(s)$, $\bar{S}_z(s)/t(s)$ a $\bar{S}_\omega(s)/t(s)$. Tyto funkce můžeme využít v obecném případě (tedy případně i pro nenulové objemové a povrchové síly) při aproximaci

smykového napětí. Funkci $\bar{S}_A(s)/t(s)$ však nepoužijeme, protože na “konci” střednice nenabývá nulové hodnoty, což je v rozporu s obvyklou okrajovou podmínkou. Pokud použijeme centrální souřadnice a výsečovou souřadnici s hlavním počátkem, funkce $\bar{S}_y(s)$, $\bar{S}_z(s)$ a $\bar{S}_\omega(s)$ jsou na “konci” střednice nulové, protože jejich hodnoty odpovídají statickým momentům a integrálu na levé straně (96). Aproximaci smykového napětí τ_{xs} můžeme kompaktně v maticové podobě zapsat jako

$$\tau_{xs}(x, s) = \mathbf{n}_\tau(s)\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{S}_y(s)}{t(s)} & \frac{\bar{S}_z(s)}{t(s)} & \frac{\bar{S}_\omega(s)}{t(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ C_3(x) \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Dělení tloušťkou průřezu $t(s)$ provádíme proto, že samotné funkce $\bar{S}_y(s)$ atd. jsou vhodné k aproximaci smykového toku, jak bylo rozebráno výše, a teprve po jeho vydělení tloušťkou průřezu získáme napětí.

Porovnáním výrazů pro posuny, deformace a napětí se vztahy platnými pro obecný průřez zjistíme, že matice \mathbf{N}_v a \mathbf{N}_τ jsou nahrazeny řádkovými maticemi \mathbf{n}_v a \mathbf{n}_τ a místo matice $\partial\mathbf{N}_v/\partial\mathbf{y}$ se při výpočtu smykové deformace používá řádková matice $d\mathbf{n}_v/ds$. Definice matic $\mathbf{A}_.$ uvedené v (81)–(84) tedy pro tenkostěnný průřez přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{A}_{nn} = \int_S \mathbf{n}_u^T(s)\mathbf{n}_u(s)t(s) ds, \quad (121)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma B} = \int_S \mathbf{n}_\tau^T(s) \frac{d\mathbf{n}_u(s)}{ds} t(s) ds, \quad (122)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma u} = \int_S \mathbf{n}_\tau^T(s)\mathbf{n}_v(s)t(s) ds, \quad (123)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma\sigma} = \int_S \mathbf{n}_\tau^T(s)\mathbf{n}_\tau(s)t(s) ds. \quad (124)$$

Po dosažení konkrétní podoby matic \mathbf{n}_u , \mathbf{n}_v a \mathbf{n}_τ patrně z rovnic (103)–(104) a (120) dostaneme

$$\mathbf{A}_{nn} = \begin{pmatrix} \int_S t(s) ds & 0 & 0 & 0 & \int_S z(s)t(s) ds & -\int_S y(s)t(s) ds & \int_S \omega(s)t(s) ds \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_S z(s)t(s) ds & 0 & 0 & 0 & \int_S z^2(s)t(s) ds & -\int_S y(s)z(s)t(s) ds & \int_S \omega(s)z(s)t(s) ds \\ -\int_S y(s)t(s) ds & 0 & 0 & 0 & -\int_S y(s)z(s)t(s) ds & \int_S y^2(s)t(s) ds & -\int_S \omega(s)y(s)t(s) ds \\ \int_S \omega(s)t(s) ds & 0 & 0 & 0 & \int_S \omega(s)z(s)t(s) ds & -\int_S \omega(s)y(s)t(s) ds & \int_S \omega^2(s)t(s) ds \end{pmatrix} \quad (125)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & - \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_y(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \int_S \bar{S}_z(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & - \int_S \bar{S}_z(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_z(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & - \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds \end{pmatrix} \quad (126)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma u} = \begin{pmatrix} 0 & \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_y(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_S \bar{S}_z(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_z(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_z(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{dy(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{dz(s)}{ds} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma\sigma} = \begin{pmatrix} \int_S \bar{S}_y^2(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_y(s) \bar{S}_z(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \bar{S}_y(s) \frac{1}{t(s)} ds \\ \int_S \bar{S}_y(s) \bar{S}_z(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_z^2(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \bar{S}_z(s) \frac{1}{t(s)} ds \\ \int_S \bar{S}_\omega(s) \bar{S}_y(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_\omega(s) \bar{S}_z(s) \frac{1}{t(s)} ds & \int_S \bar{S}_\omega^2(s) \frac{1}{t(s)} ds \end{pmatrix} \quad (128)$$

Při výpočtu některých integrálů lze provést úpravy vedoucí ke zjednodušení:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dy(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) \frac{dy(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\ &= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dy(s)}{ds} ds z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (y(s_{\max}) - y(\tilde{s})) z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= y(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} y(\tilde{s}) z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= y(s_{\max}) S_y - D_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \int_S \bar{S}_y(s) \frac{dz(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dz(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) \frac{dz(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\ &= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dz(s)}{ds} ds z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (z(s_{\max}) - z(\tilde{s})) z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= z(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} z^2(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= z(s_{\max}) S_y - I_y = -I_y \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \int_S \bar{S}_y(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{d\omega(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) \frac{d\omega(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\ &= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{d\omega(s)}{ds} ds z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (\omega(s)(s_{\max}) - \omega(s)(\tilde{s})) z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= \omega(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} \omega(\tilde{s}) z(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= \omega(s_{\max}) S_y - I_{\omega y} = 0 \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \bar{S}_z(s) \frac{dy(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) \frac{dy(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dy(s)}{ds} ds y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (y(s_{\max}) - y(\tilde{s}))y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} y^2(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) S_z - I_z = -I_z
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \bar{S}_z(s) \frac{dz(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dz(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) \frac{dz(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dz(s)}{ds} ds y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (z(s_{\max}) - z(\tilde{s}))y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= z(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} z(\tilde{s})y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= z(s_{\max}) S_z - D_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \bar{S}_z(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{d\omega(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s y(\tilde{s})t(\tilde{s}) \frac{d\omega(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{d\omega(s)}{ds} ds y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (\omega(s)(s_{\max}) - \omega(s)(\tilde{s}))y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= \omega(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} \omega(\tilde{s})y(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) S_z - I_{\omega z} = 0
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \bar{S}_{\omega}(s) \frac{dy(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) \frac{dy(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dy(s)}{ds} ds \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (y(s_{\max}) - y(\tilde{s}))\omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} y(\tilde{s})\omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) S_{\omega} - I_{\omega z} = 0
\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \bar{S}_{\omega}(s) \frac{dz(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{dz(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) \frac{dz(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{dz(s)}{ds} ds \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (z(s_{\max}) - z(\tilde{s}))\omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= z(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} \omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} z(\tilde{s})\omega(\tilde{s})t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= z(s_{\max}) S_{\omega} - I_{\omega y} = 0
\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
\int_S \bar{S}_\omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} ds &= \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{d\omega(s)}{ds} ds = \int_0^{s_{\max}} \int_0^s \omega(\tilde{s}) t(\tilde{s}) \frac{d\omega(s)}{ds} d\tilde{s} ds = \\
&= \int_0^{s_{\max}} \int_{\tilde{s}}^{s_{\max}} \frac{d\omega(s)}{ds} ds \omega(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{s_{\max}} (\omega(s)(s_{\max}) - \omega(s)(\tilde{s})) \omega(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= \omega(s_{\max}) \int_0^{s_{\max}} \omega(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} - \int_0^{s_{\max}} \omega^2(\tilde{s}) t(\tilde{s}) d\tilde{s} = \\
&= y(s_{\max}) S_\omega - I_\omega = -I_\omega
\end{aligned} \tag{137}$$

Pro další zjednodušení zápisu dosadíme získané zjednodušující výrazy zpět do matic (125)–(128). Stále uvažujeme, že vzhledem k využití hlavního centrálního souřadnicového systému platí podmínky (100). Pokud navíc standardním způsobem označíme

$$A = \int_A dA, \quad I_z = \int_A y^2(s) dA, \quad I_y = \int_A z^2(s) dA, \tag{138}$$

můžeme matice (125)–(128) zjednodušit na tvar uvedený v (139)–(141) níže.

$$\mathbf{A}_{nn} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\omega \end{pmatrix} \tag{139}$$

$$\mathbf{A}_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\omega \end{pmatrix} \tag{140}$$

$$\mathbf{A}_{\sigma u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_\omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{141}$$

8 Závěr

V této práci jsme na základě zvoleného tvaru pole posunů (1) pomocí Lagrangeova principu minima potenciální energie odvodili v kapitole 2 sedm diferenciálních rovnic popisujících model obecně zatíženého prutu a jim příslušné okrajové podmínky, a to za použití kompaktního maticového zápisu. Výsledné rovnice (50) byly podrobně rozepsány v kapitole 3, kde jsme soustavu rovnic zjednodušili volbou hlavní centrální kartézské soustavy souřadnic pro popis prutu a vhodnou volbou deplanační funkce. Na začátku kapitoly 4 jsme ale ukázali, že zvolený tvar pole posunutí vede k nevhodnému rozložení smykového napětí v modelu a prut se v důsledku toho při zatěžování chová jako příliš tuhý ve smyku a kroucení. Za účelem vylepšení jsme odvodili diferenciální rovnice popisující model ještě jednou, ale tentokrát pomocí Hellingerova-Reissnerova principu, který umožňuje aproximovat samostatně pole posunů a pole napětí (viz (76)). Pro otevřené tenkostěnné průřezy je konkrétní tvar aproximace pole smykového napětí uvažován tak, aby mohly být splněny Cauchyho rovnice rovnováhy trojrozměrného kontinua, pokud do nich dosadíme normálové napětí vypočtené z aproximace podélných posunů pomocí geometrických rovnic a Hookeova zákona.

Na základě navrženého teoretického základu bude dalším krokem výpočet konkrétních příkladů pomocí odvozeného modelu a porovnání získaných výsledků (napětí, posunů atd.) s řešením stejné úlohy pomocí metody konečných prvků pro trojrozměrné kontinuum. Vhodným příkladem by mohl být například prut s průřezem tvaru C, který je podepřen jako konzola a je zatěžován vlastní tíhou. Takový prut je zároveň namáhán jak ohybem a smykem, tak i kroucením, neboť při obecném natočení průřezu vůči zatížení neprochází zatížení středem smyku.

Reference

- [1] Servít, Radim, Eva Doležalová a Miloslav Crha. Teorie pružnosti a plasticity / Díl 1. 1. vyd. Praha: SNTL, 1981. 455 s.
- [2] Servít, Radim a Jiří Šejnoha. Teorie pružnosti a plasticity II. 1. vyd. Praha: SNTL, 1984. 421 s.
- [3] Sadd, Martin H., 2009. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics: Academic Press. ISBN 978-0-12-374446-3.
- [4] Bittnar, Zdeněk, Milan Jirásek a Petr Konvalinka, 1992. Statika stavebních konstrukcí II: Příklady. 1. vyd. Praha: ČVUT. ISBN 978-80-01-00772-3.