

ČVUT FS

Bakalárska práca

# **Analýza napjatosti násobně nalisovaného spoje realizovaného s lisovací vložkou**

**2018**

Matúš Minár



Vedúci práce : Ing. Karel Vítek CSc.

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Minár** Jméno: **Matuš** Osobní číslo: **438598**  
 Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
 Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
 Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
 Studijní obor: **bez oboru**

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Analyza napjatosti násobně nalisovaného spoje realizovaného s lisovací vložkou**

Název bakalářské práce anglicky:

**Stress of state analysis of the multiple compound pressed cylinders realized with a press insert**

Pokyny pro vypracování:

Analýzujte vlastnosti nalisovaného spoje. Bakalářská práce bude obsahovat části:

- 1) Rešerše teorie nalisovaných spojů a jejich uplatnění v praxi
- 2) Analytické numerické experimenty
- 3) Řešení nalisovaného spoje v MKP - Abaqus
- 4) Analýza stavu napjatosti nalisovaného spoje s ohledem na konstrukční úpravy vlisované vložky mezi objímkou a hřídelem
- 5) Závěry

Seznam doporučené literatury:

- [1] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost I. Praha: ČVUT, 2006.
- [2] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost II. Praha: ČVUT, 2006.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Karel Vítek, CSc., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **24.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

Ing. Karel Vítek, CSc.  
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

9.5.2018  
Datum převzetí zadání

Minár  
Podpis studenta

## **Podakovanie**

Moja vďaka patrí môjmu školiteľovi Ing. Karolovi Vítkovi CSc. za odbornú a metodickú pomoc pri koncipovaní tejto bakalárskej práce, za jeho rady a pripomienky, ktoré boli pre mňa cenným prínosom.

Na tomto mieste by som chcel ďalej poďakovať aj Ing. Jiřímu Černému za jeho pomoc s programom ABAQUS.

**Prehlásenie**

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne. Ďalej prehlasujem, že som všetky použité zdroje správne a úplne citoval a uvádzam ich v priloženom zozname literatúry.

Nemám závažný dôvod proti sprístupneniu tejto bakalárskej práce v súlade so zákonom č. 121/2000 Sb. o autorskom práve, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorských zákonov) v platnom znení.

V Prahe dňa 10. Júna 2018

.....

## **Abstrakt**

Cieľom tejto práce je preskúmanie vlastností nalisovaného spoja, ktorý sa skladá z hriadeľa, vložky a objímky pri zaťažení osovým napätím.

Vychodzí model bol najprv navrhnutý analyticky, kde sa vychádzalo zo zadaného materiálu a hľadal sa optimálny presah. Následne bol vytvorený model v MKP programe ABAQUS a výsledky boli navzájom porovnané. Následne prebehli konštrukčné a materiálové úpravy v ABAQUSE, pri ktorých sa skúmalo ovládanie osového napätia a tlak na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou.

## **Kľúčové slová**

Nalisovaná nádoba, nalisovaný spoj, MKP, ABAQUS, silnostenná nádoba, osové napätie, numerické výpočty, analytický návrh, konštrukčné úpravy.

## **Abstract**

The aim of this work is to examine the properties of a pressed joint, which consists of shaft, insert and sleeve under axial load.

The initial model was initially designed analytically, based on the input material and looking for optimal overhauls. Subsequently, the ABAQUS MKP model was created and the results compared to each other. Subsequently, the ABAQUSE structural and material modifications were carried out, examining the axial load control and the pressure on the contact surface between the shaft and the insert.

## **Keywords**

Pressed vessel, pressed joint, MKP, ABAQUS, force vessel, axial loading, numerical calculations, anatal design, structural modifications

## Zoznam obrázkov

---

Obrázok 1 Nalisovanie vložky a objímky (Ozubeného kolesa) na hriadeľ.....	9
Obrázok 2 Namáhanie plášťa nádoby .....	10
Obrázok 3 Otvorená silnostenná nádoba (Hydraulický válec) .....	11
Obrázok 4 Vyňatý element pre zostavenie radiálnej rovnice rovnováhy .....	12
Obrázok 5 Vyňatý element pre znázornenie deformácií .....	13
Obrázok 6 Prípado vnútorného pretlaku v silnostennej nádobe .....	17
Obrázok 7 Prípado vonkajšieho pretlaku v silnostennej nádobe .....	17
Obrázok 8 Znázornenie deformácie silnostennej nádoby .....	19
Obrázok 9 Znázornenie priebehov napätí v stene silnostennej nádoby pre prípad vnútorného pretlaku .....	21
Obrázok 10 Znázornenie priebehov napätí v stene silnostennej nádoby pre prípad vonkajšieho pretlaku .....	22
Obrázok 11 Znázornenie nalisovaných silnostenných nádob .....	23
Obrázok 12 Zobrazenie presahu dvoch nalisovaných silnostenných nádob .....	25
Obrázok 13 Grafické zobrazenie priebehov napätia pri odľahčenom stave .....	27
Obrázok 14 Zobrazenie nalisovania objímky na dutý hriadeľ .....	29
Obrázok 15 Zobrazenie nalisovania objímky na plný hriadeľ .....	30
Obrázok 16 Znázornenie konfigurácie modelu a napetí na konštrukcii s násobným nalisovaním .....	31
Obrázok 17 Znázornenie problematiky prenesenia krútiaceho momentu $M_k$ .....	32
Obrázok 18 Grafické znázornenie napätí vzorového príkladu .....	33
Obrázok 19 Zobrazenie východzej konfigurácie modelu .....	34
Obrázok 20 Grafické znázornenie priebehov napätí z programu ABAQUS a analytického riešenia .....	35
Obrázok 21 Zobrazenie priebehu osového napätia na východzom modeli.....	36
Obrázok 22 Znázornenie priebehu veľkosti tlaku na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou .....	37
Obrázok 23 Znázornenie osí 1 a 2 na nalisovanej konštrukcii zaťaženej ohybom.....	38
Obrázok 24 Priebeh ohybu, osového napätia a ich súčtu v osi symetrie.....	38
Obrázok 25 Analýza celkového napätia na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou na povrchu hriadeľa .....	39
Obrázok 26 Znázornenie ohybu konštrukcie.....	40
Obrázok 27 Zobrazenie ohybu jednotlivých častí nalisovania jednotkovým momentom.....	40
Obrázok 28 Zobrazenie nesúmerne striedavého zaťažovacieho cyklu .....	42
Obrázok 29 Zobrazenie typov priebehu cyklického zaťaženia .....	42
Obrázok 30 Konfigurácia nalisovania so základnými rozmerami.....	43
Obrázok 31 Porovnanie priebehov tlakov po hriadeľi .....	43

Obrázok 32 Porovnanie veľkostí osového napätia na východnom modeli a na modeli so zväčšenou vložkou.....	44
Obrázok 33 Konfigurácia úlohy .....	45
Obrázok 34 Zobrazenie jedného prevedenia skosenia na jednej strane vložky, kedy menený parameter je dĺžka skosenia.....	45
Obrázok 35 Znázornenie modelu z ABAQUSU a odpovedajúceho priebehu napätia po hriadelí .....	46
Obrázok 36 Znázornenie priebehu tlaku .....	47
Obrázok 37 Zobrazenie jedného z viacerých skosení na jednej strane vložky, kedy parameter ktorý meníme je uhol skosenia. ....	47
Obrázok 38 Zobrazenie priebehu osového napätia na modeli so skosením 0,5x45.....	48
Obrázok 39 Zobrazenie priebehu tlaku .....	49
Obrázok 40 Zobrazenie priebehu osového napätia po hriadelí na modeli, ktorý je z legovaného materiálu Kobalt-Chrom.....	50
Obrázok 41 Grafické zobrazenie priebehov tlaku, pri použití rôznych materiálov.....	51
Obrázok 42 Grafické zobrazenie priebehu osového napätia po hriadelí pri použití východzieho modelu. Obrázky z ABAQUSU k ostatným priebehom osového napätia sú analogické k tomuto. ....	52
Obrázok 43 Zobrazenie priebehu tlaku pri predĺžení vložky.....	53
Obrázok 44 Znázornenie konfigurácie modelu so zväčšenou vložkou .....	53
Obrázok 45 Grafické zobrazenie priebehu porovnania tlakov.....	55
Obrázok 46 Grafické zobrazenie priebehu osového napätia po hriadelí.....	55

Obsah:

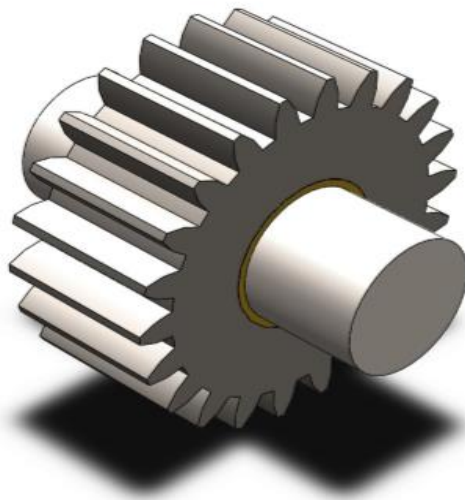
1	Úvod .....	9
2	Silnostenné rotačno symetrické nádoby .....	10
2.1	Definícia silnostenných nádob .....	10
2.2	Rozdelenie silnostenných nádob .....	10
2.3	Samotné odvedenie napätia v silnostennej nádobe .....	11
2.4	Riešenie Eulerovej diferenciálnej rovnice .....	15
2.5	Znázornenie priebehov na napätí .....	17
2.6	Deformácia plášťa silnostennej nádoby .....	18
2.7	Pevnostné podmienky .....	19
2.8	Nalisované silnostenné nádoby .....	23
2.9	Optimalizácia rozmerov nádoby .....	24
2.10	Presah nalisovania .....	25
2.11	Odľahčený stav .....	27
2.12	Nalisované spoje .....	29
2.13	Prenesenie krútiaceho momentu .....	32
2.14	Spracovanie vzorového príkladu .....	33
2.15	Voľba optimálneho presahu .....	33
2.16	Kombinované namáhanie osového napätia + ohybu .....	38
2.17	Namáhanie nalisovanej súčasti ohybom .....	40
2.18	Namáhanie pri premenlivom zaťažení .....	42
2.19	Konštrukčné úpravy .....	43
2.19.1	Väčšia vložka .....	43
2.20	Skosenie .....	45
2.21	Vplyv materiálu na priebeh osového napätia a tlaku .....	50
2.22	Vplyv konštantného nulového presahu medzi hriadeľom a vložkou na nalisovaný spoj	52



## 1 Úvod

Cieľom tejto bakalárskej práce je skúmanie rôznych možností, ako vieme ovplyvniť osovú napätie, ktoré vzniká v nalisovanej konštrukcii. Analýzy jednotlivých konštrukčných úprav modelov boli vykonané v numerickom programe ABAQUS. Okrem nich bol preskúmaný aj vplyv rôznych materiálov na túto problematiku.

Použitie nalisovaného spoja je dnes v praxi veľmi rozšírené. Hlavne ich používame pre spojenie častí, ktoré prenášajú krútiaci moment. Jedná sa napríklad o nalisovanie ozubeného kolesa, remenice, reťazového kolesa, alebo valivých ložísk na hriadeľ. Takáto konštrukcia je následne nerozoberateľná, nepohyblivá a spoľahlivá.



Obrázok 1 Nalisovanie vložky a objímky (Ozubeného kolesa) na hriadeľ

## 2 Silnostenné rotačno symetrické nádoby

### 2.1 Definícia silnostenných nádob

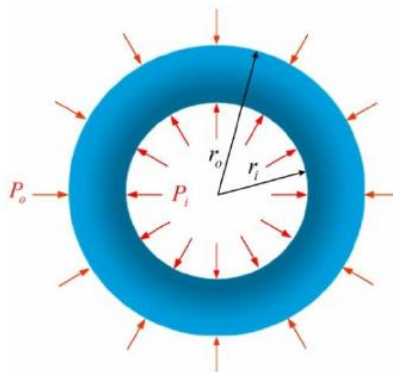
Pojmom nádoba sa obvykle označujú súčasti strojov, ktoré sú svojim tvarom a charakterom namáhania zhodné s namáhaním dutých telies zaťažených vonkajším, alebo vnútorným tlakom.

Jednoduché silnostenné nádoby sú konštrukčné prvky s tvarom dutého kruhového valca, ktorý je zaťažený tlakmi, ktoré sú rovnomerne rozložené po jeho vonkajšej a vnútornej strane, viď obr.2. To, čím sa líšia od tenkostenných nádob je, že hrúbku valca nie je možné zanedbať k jeho polomeru.

### 2.2 Rozdelenie silnostenných nádob

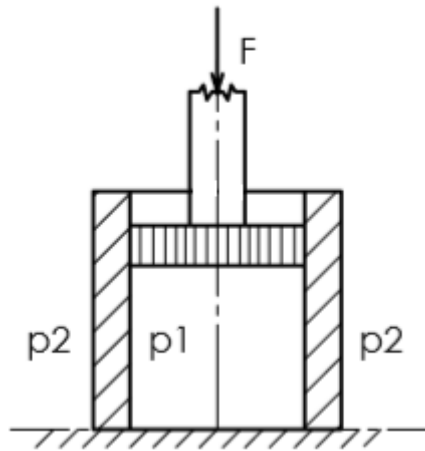
Vo všeobecnosti rozlišujeme dva typy nádob, silnostenné a tenkostenné. Ako už vyplýva z názvu, rozdiel medzi nimi je v hrúbke steny.

- Prvým typom sú nádoby uzatvorené, ktoré majú dno a tlak, ktorý pôsobí na dno a vyvoláva ťahové alebo tlakové namáhanie plášťa nádoby.



Obrázok 2 Namáhanie plášťa nádoby [3]

- Druhým typom sú nádoby otvorené, ktoré neprenášajú žiadnu osovú silu a preto u nich uvažujeme osové napätie  $\sigma_o$  rovné nule.



Obrázok 3 Otvorená silnostenná nádoba (Hydraulický válec)

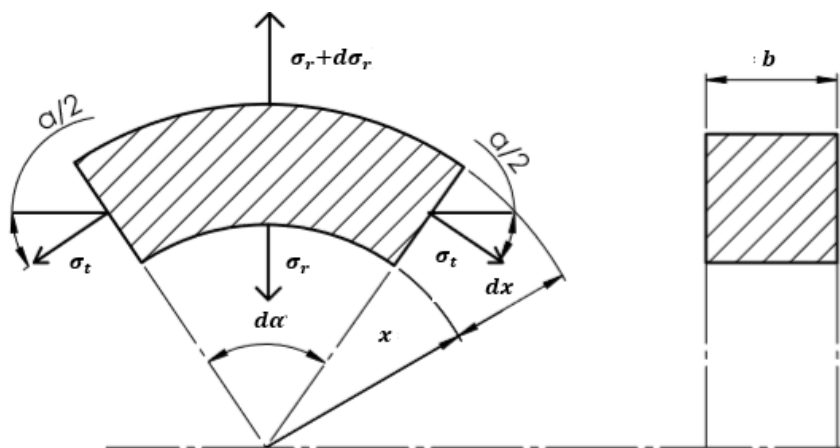
Predpoklady pri odvodzovaní napätia v silnostenných nádobách:

- Zaťažovanie nádoby prebieha v oblasti platnosti Hookovho zákona, čo znamená, že napätie neprekročí medzu úmernosti  $\sigma_u$ .
- Nádoba, zaťaženie a aj deformácie sú rotačne symetrické, čiže napätia a deformácie závisia iba na vzdialenosti od osi nádoby.
- Napätie a deformáciu je nutné vyšetrovať v takej vzdialenosti od stien alebo okrajov nádoby, že napätosť a ani deformácia nebudú ovplyvnené okrajovými účinkami.

### 2.3 Samotné odvodenie napätia v silnostennej nádobe

Pri odvodzovaní vychádzame z jednoduchkej otvorenej silnostennej nádoby podľa [1]. Vyberieme element nádoby, ktorý má dĺžku  $b$ , hrúbku  $dx$  a je obmedzený stredovým uhlom  $\alpha$  vid' obr.4.

Z obr. 4 je zrejmé, že na vyznačený element pôsobí napätie v jeho stenách v smere polomeru. Je to napätie radiálne  $\sigma_r$  a v smere dotýčnice k obvodovým kružniciam je to dotýčnicové napätie  $\sigma_t$ .



Obrázok 4 Vyňatý element pre zostavenie radiálnej rovnice rovnováhy

Zostavenie rovnice rovnováhy pre nami vybraný element má tvar

$$(\sigma_r + d\sigma_r) * (x + dx) * d\alpha * b - \sigma_r * x * d\alpha * b - 2 * \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) * \sigma_t * b * dx = 0. \quad (1)$$

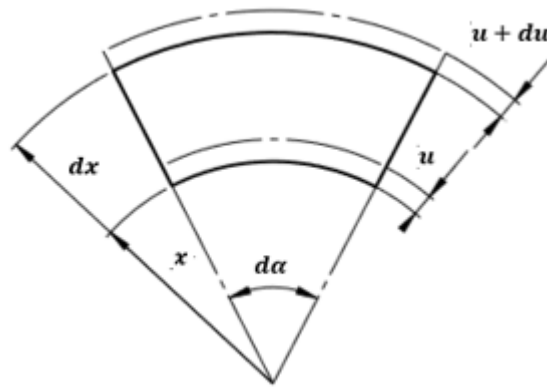
Z dôvodu malého uhla  $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$  môžeme linearizovať a uvažovať  $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}$  a keďže dĺžka elementu b a ani uhol  $d\alpha$  nie sú rovné nule, môžeme ich skrátiť. Potom dostaneme výraz

$$\sigma_r * x + \sigma_r * dx + d\sigma_r * x + d\sigma_r * dx - \sigma_r * x - \sigma_t * dx = 0$$

Po úprave a zanedbaní nekonečne malých veličín dostaneme výraz

$$\frac{1}{x}(\sigma_t - \sigma_r) - \frac{d\sigma_r}{dx} = 0 \quad (2)$$

Z tejto rovnice je zrejmé, že sa v nej vyskytujú dve neznáme, je to napätie radiálne  $\sigma_r$  a tečné  $\sigma_t$ . Úloha je preto vnútorne staticky neurčitá a je potrebné doplniť rovnicu rovnováhy deformačnou podmienkou a teda za tieto dve napätia dosadiť pomerné predĺženia, ktoré budú závisle na zmene iba jednej premennej t.j. posuv  $u(x)$  a prevedieme rovnicu rovnováhy elementu na rovnicu pre jednu neznámu deformáciu  $u(x)$ .



Obrázok 5 Vyňatý element pre znázornenie deformácií

Deformačné rovnice vyjadrujúce pomerné predĺženia v smere radiálom a tečnom

$$\varepsilon_t = \frac{(x + u)d\alpha - x d\alpha}{x d\alpha} = \frac{u}{x'} \quad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{dx + (u + du) - u - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \quad (4)$$

Pomerné predĺženie v smere osi nádoby je konštantné. Plynie to z predpokladu, že osovú napätie je rovnomerne rozložené po celej hrúbke steny nádoby.

$$\varepsilon_0 = \text{konšt.} = B \quad (5)$$

K vyjadreniu napätí pomocou pomerných predĺžení použijeme rozšírený Hookov zákon

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} * [\sigma_t - \nu * (\sigma_r + \sigma_0)] \quad (6)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} * [\sigma_r - \nu * (\sigma_t + \sigma_0)] \quad (7)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E} * [\sigma_0 - \nu * (\sigma_r + \sigma_t)]. \quad (8)$$

Z tejto sústavy vyjadríme postupne vzťahy pre jednotlivé napätia

$$\sigma_t = \frac{E}{1 + \nu} * \left[ \varepsilon_t + \frac{\nu}{1 - 2\nu} * \theta \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \nu} * \left[ \varepsilon_r + \frac{\nu}{1 - 2\nu} * \theta \right]$$

$$\sigma_0 = \frac{E}{1 + \nu} * \left[ \varepsilon_0 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} * \theta \right].$$

Po dosadení pomerných predĺžení z rovníc (6),(7) a (8) dostávame

$$\sigma_t = \frac{E}{1 + \mu} * \left[ \frac{u}{x} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} * \theta \right] \quad (9)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \mu} * \left[ u' + \frac{\mu}{1 - 2\mu} * \theta \right] \quad (10)$$

$$\sigma_o = \frac{E}{1 + \mu} * \left[ B + \frac{\mu}{1 - 2\mu} * \theta \right]. \quad (11)$$

kde  $\theta$  je pomerná zmena objemu

$$\theta = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_o = \frac{u}{x} + u' + B \quad (12)$$

Po vyjadrení napätí pomocou rozšíreného Hookovho zákona pokračujeme dosadením do rovnice rovnováhy uvažovaného elementu. Dostávame diferenciálnu rovnicu Eulerovej funkcie. Pred tým, ako dosadíme do rovnice rovnováhy elementu, je ešte nutné previesť

$\frac{d\sigma_r}{dx}$ , aby sme boli schopní dosadiť za všetky členy.

$$\frac{d\sigma_r}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{E}{1 + \mu} * \left[ u' + \frac{\mu}{1 - 2\mu} + \theta \right] \right) \frac{E}{1 + \mu} * \left[ u'' + \frac{\mu}{1 - 2\mu} + \theta' \right]$$

Za  $\theta'$  dosadíme výraz

$$\theta' = \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{x} + u' + B \right) = \frac{u'}{x} + u'' - \frac{u}{x^2}.$$

Po následných úpravach dostávame výraz

$$\left[ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \right] * \left[ 1 + \frac{\mu}{1 - 2 * \mu} \right] = 0.$$

Keďže je zrejmé, že výraz v druhej zátvorke nebude nikdy rovný nule, z dôvodu že  $\mu < 0,5$  a ak má byť táto rovnica splnená, musí sa výraz v druhej zátvorke rovnať nule, preto

$$u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0.$$

Po prevedení dostávame diferenciálnu rovnicu Eulerovho typu pre radiálny posuv  $u(x)$ .

$$u''(x) * x^2 + u'(x) * x - u(x) = 0. \quad (13)$$

## 2.4 Riešenie Eulerovej diferenciálnej rovnice

Odhad riešenia homogénnej rovnice má tvar posuvu

$$u(x) = x^n.$$

Aby sme mohli dosadiť do diferenciálnej rovnice musíme previesť derivácie

$$\begin{aligned} u' &= n * x^{n-1} \\ u'' &= n * (n - 1) * x^{n-2}. \end{aligned}$$

Po dosadení do východzej rovnice (13)

$$n * (n - 1) * x^{n-2} * x^2 + n * x^{n-1} * x - x^n = 0$$

a vytknutí členu  $x^n$  dostávame

$$x^n [n * (n - 1) * x^{-2} * x^2 + n * x^{-1} * x - x^n] = 0.$$

Člen  $x^n$  je nenulový, preto je možné ho skrátiť a dostávame výraz

$$\begin{aligned} n * (n - 1) + n - 1 &= 0 \\ n^2 - 1 &= 0 \\ n_1 = 1, \quad n_2 &= -1. \end{aligned}$$

Riešenie posuvu  $u(x)$  má potom tvar

$$u(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}. \tag{14}$$

Potom, keď spätne dosadíme do Hookovho zákona dostávame tvar rovníc pre napätia

$$\sigma_t = K + \frac{c}{x^2} \tag{15}$$

$$\sigma_r = K - \frac{c}{x^2}. \tag{16}$$

Integračné konštanty  $K$  a  $C$  získame z okrajových podmienok pre radiálne napätie, ktoré poznáme na vnútornom aj vonkajšom povrchu nádoby. Na povrchu je toto napätie číselne rovné tlaku, ktorý tam pôsobí a má záporné znamienko, okrajové podmienky teda vyzerajú následovne

- $x = r_1$

$$\sigma_{r1} = -p_1 \tag{17}$$

- $x = r_2$

$$\sigma_{r2} = -p_2.$$

Po dosadení tlakov za jednotlivé napätia, dostávame po úprave konkrétne tvary integračných konštant K a C

$$\begin{aligned} -p_1 &= K + \frac{C}{x^2} \rightarrow K = -p_1 - \frac{C}{x^2} \\ -p_2 &= K - \frac{C}{x^2} \rightarrow K = -p_2 - \frac{C}{x^2} \\ -p_1 - \frac{C}{x^2} &= -p_2 - \frac{C}{x^2} \rightarrow C = (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$K = -p_1 - \frac{(p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{x^2} \rightarrow K = \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (19)$$

$$K = (\sigma_o). \quad (20)$$

Výraz (20) vyjadruje, že v prípade ak sa jedná o jednoduché silnostenné nádoby uzavrené, konštantu K je rovná osovému napätiu  $\sigma_o$ , ktoré v nej pôsobí. V prípade, že by išlo o nádobu, ktorá je otvorená, osovú napätie  $\sigma_o$  a teda aj konštantu K by sa rovnali nule.

Zo vzťahov (15) a (16) je výpočet tečného napätia potom nasledovný

$$\sigma_t(x) + \sigma_r(x) = 2 * \sigma_o \rightarrow \sigma_t(x) = 2 * \sigma_o - \sigma_r(x).$$

Po dosadení tlakov, ktoré pôsobia na vonkajšom a vnútornom povrchu dostávame

$$\sigma_{1t}(x) = 2 * \sigma_o - (-p_1) = 2 * K + p_1 \quad (21)$$

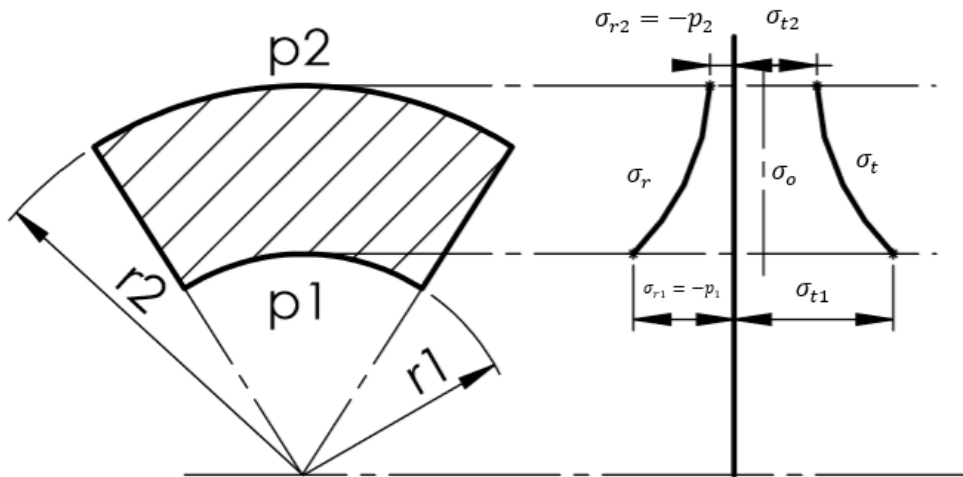
$$\sigma_{2t}(x) = 2 * \sigma_o - (-p_2) = 2 * K + p_2.$$



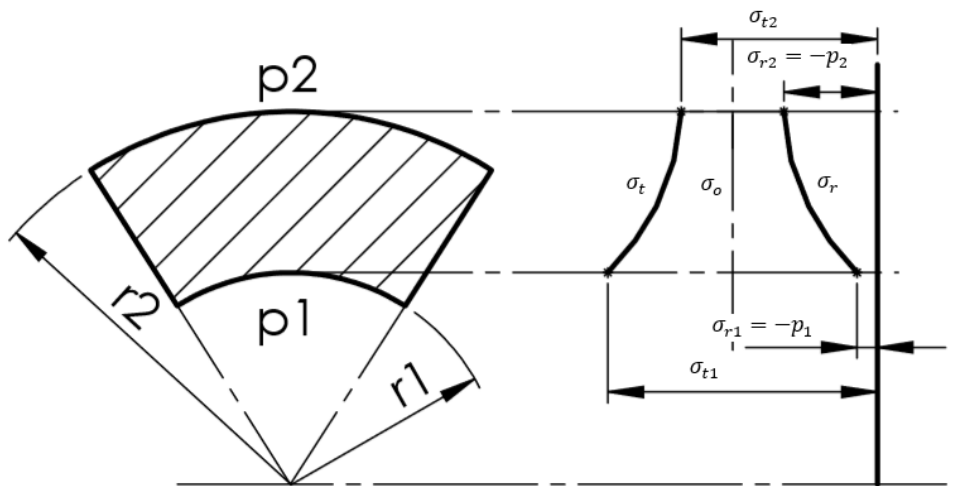
## 2.5 Zázornenie priebehov na napätí

V oboch prípadoch na obr.6 a 7 ide o znázornenie napätí v jednoduchých silnostenných uzatvorených nádobách. Môžeme tak usudzovať vďaka tomu, že osové napätie  $\sigma_o$  je rôzne od nuly. Tečné aj radiálne napätia sú dané hyperbolami vyššieho stupňa, polytropami.

V prvom prípade na obr.6 sa jedná o vnútorný pretlak, t.j. prípad kedy  $p_1 > p_2$ .



Obrázok 6 Prípado vnútorného pretlaku v silnostennej nádobe



Obrázok 7 Prípado vonkajšieho pretlaku v silnostennej nádobe

V druhom prípade na obr č. 7 sa jedná o vonkajší pretlak, t.j.. prípad kedy  $p_1 < p_2$ .

## 2.6 Deformácia pláštá silnostennej nádoby

Deformácia nádoby vzniká v dôsledku pôsobenia vnútorného tlaku  $p_1$  a vonkajšieho tlaku  $p_2$ , a prejaví sa ako zmena rozmerov nádoby.

Pokiaľ chceme určiť veľkosti deformácií nádoby, je nutné vychádzať zo vzťahu (3) pre určenie pomerného predĺženia v tečnom smere

$$\varepsilon_t = \frac{(x+u)d\alpha - x d\alpha}{x d\alpha} = \frac{u}{x}$$

Keď dosadíme za hodnotu  $x = r_1$  a  $u_{(r_1)} = \Delta r_1$ , následne použitím rozšíreného Hookovho zákona dostávame

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{u}{x} = \frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{1}{E} * [\sigma_t - \nu * (\sigma_r + \sigma_0)] \\ u(x) &= \frac{x}{E} * [\sigma_t(x) - \nu * (\sigma_r(x) + \sigma_0)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Po dosadení za tečné a radiálne napätie z rovníc (15) a (16) dostávame

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x}{E} * \left[ K + \frac{C}{x^2} - \nu * \left( K - \frac{C}{x^2} + K \right) \right] = \frac{x}{E} \left[ K + \frac{C}{x^2} - K * \nu + \nu * \frac{C}{x^2} - \nu * K \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[ K * x * (1 - 2\nu) + \frac{C}{x} * (1 + \nu) \right]. \end{aligned}$$

Po dosadení za integračné konštanty C a K z rovníc (18) a (19) dostávame

$$u(x) = \frac{1}{E} * \left[ \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * x * (1 - 2\nu) + \frac{1}{x} * (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * (1 + \nu) \right] \quad (23)$$

Z rovnice (22) pre posuv získame konkrétne výrazy pre deformáciu (zmenu polomeru) našej uzavretej nádoby, či už je to o hodnotu  $\Delta r_1$  na vnútornom polomere, alebo  $\Delta r_2$  na vonkajšom polomere.

Zmena vnútorného polomeru  $\Delta r_1$  má tvar

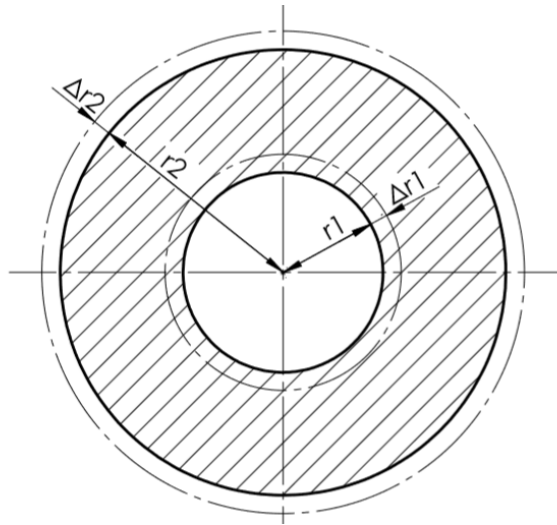
$$\Delta r_1 = \frac{1}{E} * \left[ \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * r_1 * (1 - 2\nu) + \frac{1}{x} * (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * (1 + \nu) \right]. \quad (24)$$

Zmena vnútorného polomeru  $\Delta r_2$  má tvar

$$\Delta r_2 = \frac{1}{E} * \left[ \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * r_2 * (1 - 2\nu) + \frac{1}{x} * (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * (1 + \nu) \right]. \quad (25)$$

Tento vzťah je aplikovateľný pre uzatvorené nádoby a aj pre otvorené, rozdiel sa prejaví iba pri dosadzovaní za osovú napätie  $\sigma_0$ , kde pri otvorenej nádobe uvažujeme dosadiť nulu.

V prípade, že výsledný posuv vychádza s kladným znamienkom, ide o zväčšenie polomeru, ak je znamienko záporné, ide o zmenšenie polomeru.



Obrázok 8 Znáznornenie deformácie silnostennej nádoby

## 2.7 Pevnostné podmienky

V prvkoch silnostennej nádoby sa vyskytuje dvoj alebo trojosá napätosť, z tohto dôvodu je potrebné pri zostavovaní pevnostných podmienok toto rešpektovať. Ak predpokladáme húževnatý materiál, pri zostavovaní pevnostných podmienok pre našu nádobu si môžeme vybrať z viacerých pevnostných hypotéz. Menovite sa jedná o teóriu HMH a maximálneho smykového napätia  $\tau_{max}$  (Tresca).

- **Hypotéza  $\tau_{max}$  (Tresca)**

Pevnostná podmienka

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_k}{k} \quad (26)$$

$\sigma_{max}$  → maximálne napätie

$\sigma_{min}$  → minimálne napätie

$\sigma_D$  → dovolené napätie

- **Hypotéza HMM (Energetická)**

Pevnostná podmienka

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_k}{k_k}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \rightarrow \text{označujú hlavné napätia}$$

Okrem toho, že máme hypotézy pre húževnaté materiály, existujú aj pre krehké. Jedná sa o hypotézy  $\sigma_{max}$  a Mohrovu hypotézu.

- **Hypotéza  $\sigma_{max}$**

Pevnostná podmienka pre túto hypotézu má dva tvary, jeden platí pre ťah a druhý platí pre tlak, obdržime ju zo vzťahu  $\sigma_{max} = \sigma_{Pt}$  (ťah) alebo  $|\sigma|_{max} = \sigma_{Pd}$  (tlak), pri použití dovolených napätí.

1. Ťah

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} \leq \sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Pt}}{k_{pmin}}$$

$\sigma_{Dt} \rightarrow$  dovolené napätie v ťahu

$\sigma_{Pt} \rightarrow$  hodnota krehkej pevnosti materiálu v ťahu

2. Tlak

$$\sigma_{red} = |\sigma|_{max} \leq \sigma_{Dd} = \frac{\sigma_{Pd}}{k_{pmin}}$$

$\sigma_{Dd} \rightarrow$  dovolené napätie v tlaku

$\sigma_{Pd} \rightarrow$  hodnota krehkej pevnosti materiálu v tlaku

- **Mohrova hypotéza**

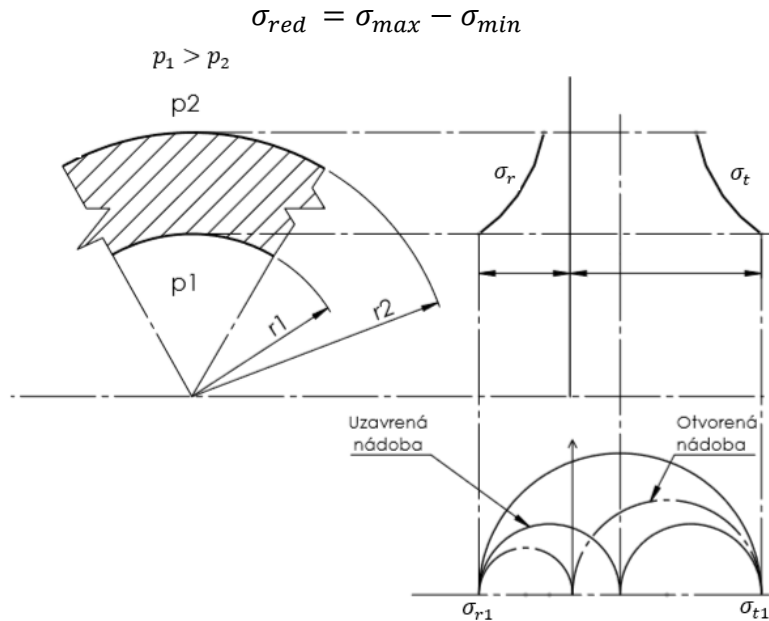
Používaná pri materiáloch, u ktorých je  $\sigma_{Pt} < \sigma_{Pd}$

Pevnostná podmienka

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \rho * \sigma_{min} \leq \sigma_{Dt}$$

Pre húževnaté materiály platí, že  $\rho = 1$ , pevnostná podmienka v tomto prípade prejde formálne na pevnostnú podmienku  $\tau_{max}$ .

Na obr.9 máme znázornený prípad vnútorného pretlaku ( $p_1 > p_2$ ). Pri určovaní redukovaného napätia ( $\sigma_{red}$ ) budeme vychádzať z Trescovej hypotézy  $\tau_{max}$  (26).



Obrázok 9 Znáozornenie priebehov napätí v stene silnostennej nádoby pre prípad vnútorného pretlaku

Napätia dosahujú najvyššie hodnoty na vnútornom povrchu nádoby, preto je vhodné uvažovať pevnostnú podmienku pre tento povrch. Na obr.9 sú znázornené Mohrové kružnice. Plne je označená uzavrená nádoba a čiarkovane je znázornená nádoba otvorená. Keďže vychádzame z Trescovej hypotézy  $\tau_{max}$ , zaujímajú nás iba extrémny hlavných napätí, pretože rozdiel medzi otvorenou a uzavrenou nádobou vymizne. Je to spôsobené tým, že najväčšie Mohrové kružnice na obr. 9 sa prekrývajú. Výsledný vzorec pre redukované napätie má tvar

$$\sigma_{red} = \sigma_{t1} - \sigma_{r1} \leq \sigma_D.$$

Po dosadení za  $\sigma_{t1}$  a  $\sigma_{r1}$  zo vzorcov (17) a (21), dostávame vzťah

$$\sigma_{red} = 2 * \sigma_o - (-p_1) - (-p_1) = 2 * \sigma_o + 2 * p_1 \leq \sigma_D.$$

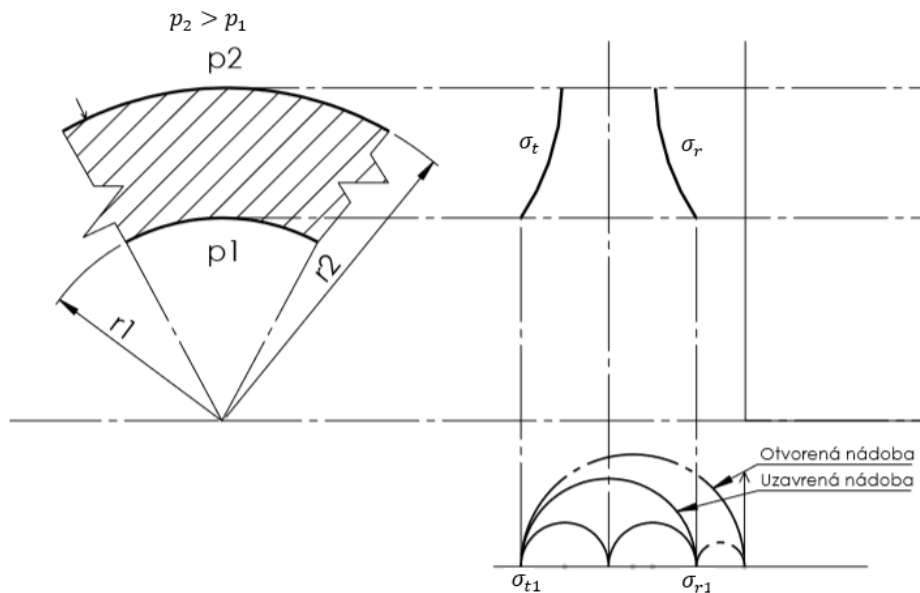
Keďže vieme zo vzťahu (20), že  $\sigma_o = K$ , dosadíme to do našej rovnice a dostávame

$$2 * \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + 2 * p_1 \leq \sigma_D.$$

Z tohto po úprave vyplýva

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Ak by sme sa rozhodli postupovať podľa hypotézy HMH (Energetickej), rozdiel medzi uzatvorenou a otvorenou nádobou by už nezmizol, pretože táto hypotéza zohľadňuje všetky hlavné napätia.



Obrázok 10 Znáznornenie priebehov napätí v stene silnostennej nádoby pre prípad vonkajšieho pretlaku

Na obr.10 je znázornený prípad, kedy nastáva vonkajší pretlak ( $p_1 < p_2$ ). Najväčšie Mohrové kružnice na rozdiel od vnútorného pretlaku nesplývajú, ale sú rozdielne, preto sa budú pevnostné podmienky líšiť.

Redukované napätie  $\sigma_{red}$  má podľa Trescovej hypotézy  $\tau_{max}$  (26) tvar

$$\sigma_{red} = \sigma_{r1} - \sigma_{t1} \leq \sigma_D.$$

Po dosadení vzťahov (17) a (21) do tejto rovnice dostávame

$$\sigma_{red} = -p_1 - 2 * \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_D.$$

Po následných úpravách dostávame

$$p_2 - p_1 \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Pokiaľ sa jedná o nádobu otvorenú, vzťah pre redukované napätie  $\sigma_{red}$  má tvar

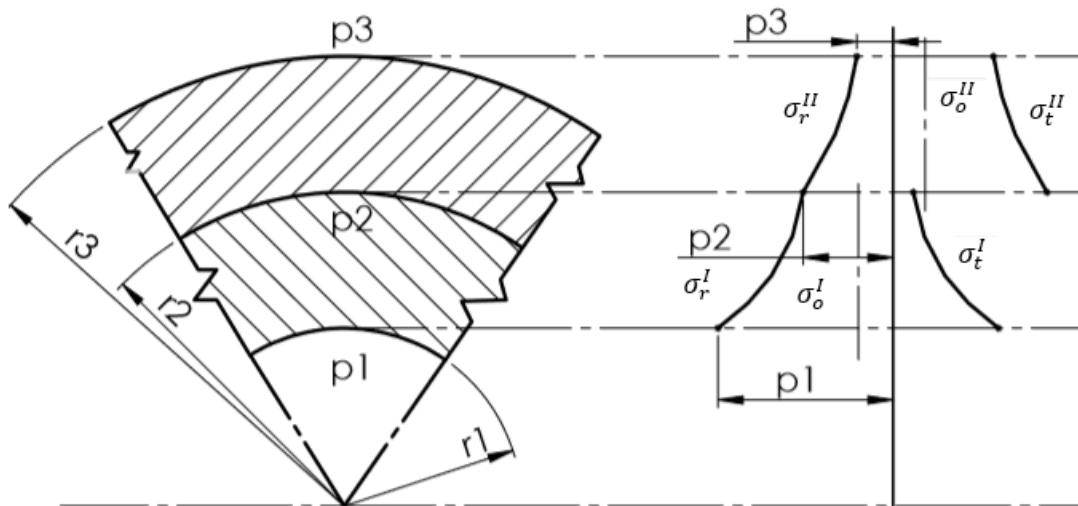
$$\sigma_{red} = 0 - \sigma_{t1} \leq \sigma_D.$$

Po dosadení z (21) dostávame

$$\sigma_{red} = 0 - [2 * K - (-p_1)] = -2 * \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_1 \leq \sigma_D. \quad (29)$$

## 2.8 Nalisované silnostenné nádoby

Silnostenné nalisované nádoby sa skladajú z dvoch, alebo viacerých na sebe nalisovaných nádob. Dôvod prečo sa používajú je, že celková únosnosť takejto nádoby je podstatne vyššia, ako keby sme sa rozhodli použiť iba jednoduchú silnostennú nádobu. Ako dôsledok tohto nalisovania a vzniknutého presahu medzi nádobami je tlak vzájomný  $p_2$ , takže vnútorná nádoba zachytáva pretlak  $p_1 - p_2$  a vonkajšia nádoba zase  $p_2 - p_3$ .



Obrázok 11 Znáozornenie nalisovaných silnostenných nádob

Na obr.11 môžeme pozorovať, že ako dôsledok nalisovania dochádza k skoku v priebehu polytrop pri tečnom napätí v mieste dotyku. Vďaka tomu sa znižuje tečné napätie, ktoré pôsobí v nádobe 1, preto je schopná táto nádoba uniesť väčšie zaťaženie t.j. pretlak, ako keby išlo iba o jednoduchú nádobu.

Ak chceme stanoviť pevnosť nádoby, musíme uvažovať každé nalisovanie ako samostatnú jednoduchú silnostennú nádobu. Podmienka pevnosti má tvar :

- nádoba číslo 1 (Vnútorná nádoba)

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right], \quad (30)$$

- nádoba číslo 2 (Vonkajšia nádoba)

$$p_2 - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

## 2.9 Optimalizácia rozmerov nádoby

Určiť optimálnu polohu rozhrania medzi obidvomi nádobami znamená, že chceme určiť polomer  $r_2$  zo známych hodnôt  $r_3$  a  $r_1$ . Pri vyjadrovaní polomeru  $r_2$  vychádzame z rovníc (30) a (31). V prvom kroku vyjadríme veľkosť tlaku  $p_2$  na vnútornej nádobe a ten potom dosadíme do rovnice (31), z ktorej po úpravách dostávame nami požadovaný rozmer  $r_2$

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &\leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \rightarrow p_2 \leq p_1 - \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \\ p_2 - p_3 &\leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \rightarrow p_1 - \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \\ p_1 - p_3 &\leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 2 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Rozmery  $r_3$  a  $r_1$  pokladáme za známe hodnoty a preto si môžeme dovoliť vyjadriť vzťah (32) ako funkciu polomeru  $r_2$ . Pri tomto polomere dosiahneme maximálny prípustný pretlak. Polomer získame deriváciou funkcie (32) podľa polomeru  $r_2$ , ktorú potom položíme rovnú nule

$$\frac{d(p_1 - p_3)}{dr_2} \leq \frac{\sigma_D}{2} * \left[ 2 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_D}{2} * \left( 0 + 2 * \frac{r_1^2}{r_2^3} - 2 * \frac{r_2}{r_3^2} \right) = 0.$$

Po úprave dostávame

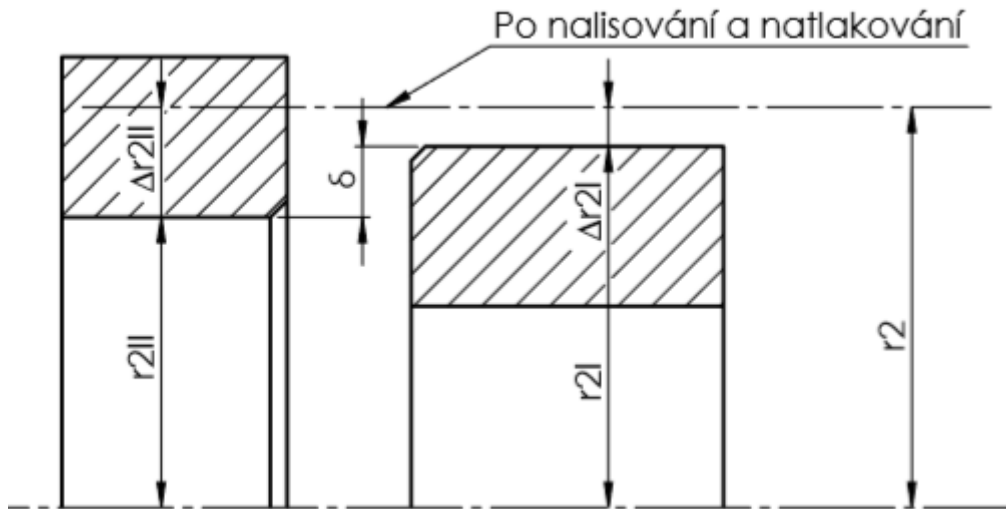
$$r_2 = \sqrt{r_1 * r_3}. \quad (33)$$

Po prevedení druhej derivácie vidíme, že ide o maximum, čo znamená, že je konkávna

$$\frac{d^2(p_1 - p_3)}{d^2r_2} = \frac{\sigma_D}{2} * \left( -6 * \frac{r_2^2 * r_1^2}{r_2^4} - 2 * \frac{r_3^2}{r_3^4} \right) < 0. \quad (34)$$



2.10 Presah nalisovania



Obrázok 12 Zobrazenie presahu dvoch nalisovaných silnostenných nádob

V predchádzajúcich vzťahoch sme sa zaoberali hľadaním optimálneho polomeru  $r_2$ . Počítali sme s tlakom  $p_2$ , ktorý vznikne medzi dvoma nalisovanými nádobami ako dôsledok presahu. Na obr.12 je tento presah označený znakom  $\rho$ . Čiarkovanou čiarou je znázornená poloha rozhrania obidvoch nádob po nalisovaní a zaťažení vnútorným pretlakom.

V dôsledku zaťaženia vnútorným pretlakom sa polomery  $r_2^I$  a  $r_2^{II}$  zmenia o hodnoty  $\Delta r_2^I$  a  $\Delta r_2^{II}$ . Ich rozdielom je teda presah  $\rho$ .

$$\rho = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I.$$

Po doplnení na bezrozmerný tvar dostávame

$$\frac{\rho}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2}. \quad (35)$$

Keďže zmena polomeru o  $\Delta$  je veľmi malá oproti hodnote  $r_2$  platí, že

$$r_2^{II} \approx \Delta r_2^I \approx r_2.$$

Ďalej pokračujeme podľa vzťahu o pomernom predĺžení (3), pomerné predĺženie  $\varepsilon$  vyjadríme cez rozšírený Hookov zákon a dostávame

$$\varepsilon_{t2}^I = \frac{\Delta r_2^I}{r_2} = \frac{1}{E} * [\sigma_{t2}^I - \mu * (\sigma_o^I + \sigma_{r2}^I)], \quad (36)$$

$$\varepsilon_{t2}^{II} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} = \frac{1}{E} * [\sigma_{t2}^{II} - \mu * (\sigma_o^{II} + \sigma_{r2}^{II})]. \quad (37)$$

Po dosadení vzťahov pre pomerné predĺženie do rovnice pre presah (35) dostávame

$$\begin{aligned} \varrho &= r_2 * (\varepsilon_{t2}^{II} - \varepsilon_{t2}^I) \\ &= r_2 * \left\{ \frac{1}{E} * [\sigma_{t2}^{II} - \mu * (\sigma_o^{II} + \sigma_{r2}^{II})] - \frac{1}{E} * [\sigma_{t2}^I - \mu * (\sigma_o^I + \sigma_{r2}^I)] \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

Výsledný vzťah pre presah pri nalisovaní bude rôzny pre prípad otvorenej a pre prípad uzavretej nádoby. Za jednotlivé napätia, t.j. tečné, radiálne a osovú budú dosadené hodnoty zo strán 15 a 16.

- Otvorená nádoba

$$\begin{aligned} \sigma_o^{II}(r_2) &= \sigma_o^I(r_2) = 0 \\ \sigma_{r2}^{II}(r_2) &= \sigma_{r2}^I(r_2) = -p_2 \\ \sigma_{t2}^{II}(r_2) &= 2K^{II} + p_2 \\ \sigma_{t2}^I(r_2) &= 2K^I + p_2. \end{aligned}$$

Po dosadení do vzťahov (36), (37) dostávame

$$\varepsilon_{t2}^I = \frac{1}{E} * [2K^I + p_2 - \mu * (0 - p_2)] \quad (39)$$

$$\varepsilon_{t2}^{II} = \frac{1}{E} * [2K^{II} + p_2 - \mu * (0 - p_2)]. \quad (40)$$

Následné dosadenie vzťahov (39) a (40) pre pomerné predĺženia do rovnice pre presah (38), dostávame

$$\varrho = r_2 * \left\{ \frac{1}{E} * [2K^{II} + p_2 - \mu * (-p_2)] - \frac{1}{E} * [2K^I + p_2 - \mu * (-p_2)] \right\} = \frac{2 * r_2}{E} * (K^{II} - K^I)$$

$$\varrho = \frac{2 * r_2}{E} * (K^{II} - K^I) \quad (41)$$

$$\varrho = \frac{2 * r_2}{E} * \left( \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right). \quad (42)$$

- Uzavretá nádoba

$$\begin{aligned} \sigma_o^{II}(r_2) &= K^{II} \\ \sigma_o^I(r_2) &= K^I \\ \sigma_{r2}^{II}(r_2) &= \sigma_{r2}^I(r_2) = -p_2 \\ \sigma_{t2}^{II}(r_2) &= 2K^{II} + p_2 \\ \sigma_{t2}^I(r_2) &= 2K^I + p_2 \end{aligned}$$

Po dosadení do vzorcov (36) a (37) dostávame

$$\varepsilon_{t2}^I = \frac{1}{E} * [2K^I + p_2 - \mu * (K^I - p_2)] \quad (43)$$

$$\varepsilon_{t2}^{II} = \frac{1}{E} * [2K^{II} + p_2 - \mu * (K^{II} - p_2)] \quad (44)$$

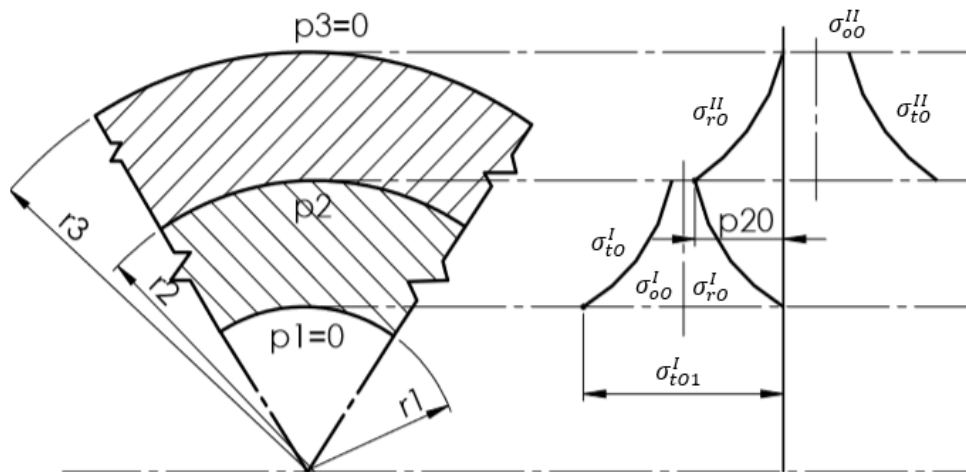
Následne dosadíme vzťahy pre pomerné predĺženia (43) a (44) do rovnice (38) a dostávame vzťah pre presah

$$\varrho = r_2 * \left\{ \frac{1}{E} * [2K^{II} + p_2 - \mu * (K^{II} - p_2)] - \frac{1}{E} * [2K^I + p_2 - \mu * (K^I - p_2)] \right\},$$

$$\varrho = \frac{(2 - \mu) * r_2}{E} * (K^{II} - K^I), \quad (45)$$

$$\varrho = \frac{(2 - \mu) * r_2}{E} * \left( \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right).$$

### 2.11 Odľahčený stav



Obrázok 13 Grafické zobrazenie priebehov napätia pri odľahčenom stave

Odľahčeným stavom sa vo všeobecnosti rozumie stav nalisovanej nádoby, kedy je vnútorný pretlak  $p_1$  a vonkajší pretlak  $p_3$  rovný nule, alebo je zanedbateľne malý. Jediný tlak, ktorý pôsobí v tomto prípade je tlak  $p_2$ , čo je tlak, ktorý pôsobí medzi nalisovaním dvoch nádob a ktorý vznikol ako dôsledok vytvorenia presahu.

Dôvod prečo nás odľahčený stav tak zaujíma je, že obvykle slúži ako kontrola, či nehrozí porucha pri nalisovaní kvôli tomu, že bol zvolený príliš veľký presah.

Celá táto problematika je znázornená na obr.13, kde nádoba 1 je namáhaná vonkajším pretlakom  $p_{21}$  a nádoba 2 je namáhaná vnútorným pretlakom  $p_{22}$ . Ako bolo už spomenuté,

v odľahčenom stave neuvažujeme vonkajší pretlak  $p_3 = 0$  a ani vnútorný pretlak  $p_1 = 0$ , preto polytropy začínajú a taktiež končia v nule.

Tento stav je nutné kontrolovať pevnostnou podmienkou v odľahčenom stave. Vychádzame zo známeho materiálu a presahu  $\Delta r_2$ , podľa ktorého sa navrhne tlak  $p_2$  a celú konštrukciu skontrolujeme hypotézou  $\tau_{max}$  t.j.  $\sigma_{red} \leq \frac{\sigma_D}{k}$ .

Vychádzame zo vzťahu (42), z ktorého vyjadríme tlak  $p_2$

$$p_2 = \frac{E * \Delta r_2}{2 * r_2^2} * \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2}\right)}$$

Zo vzťahu (26) pevnostnej podmienky  $\tau_{max}$  následne kontrolujeme únosnosti podľa obr. 13

$$\sigma_{red}^{II} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t^{II} - \sigma_r^{II} \leq \frac{\sigma_D}{k},$$

$$\sigma_{red}^I = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_r^I - \sigma_t^I \leq \frac{\sigma_D}{k}.$$

kde

$$\sigma_t^I = K^I + \frac{C^I}{x^2} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * \frac{1}{x^2},$$

$$\sigma_r^I = K^I - \frac{C^I}{x^2} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

a

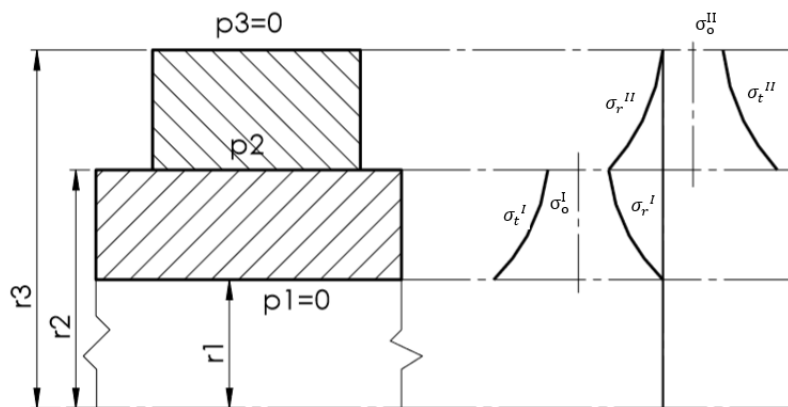
$$\sigma_t^{II} = K^{II} + \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2},$$

$$\sigma_r^{II} = K^{II} - \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

## 2.12 Nalisované spoje

Nalisovaný spoj vzniká pri nalisovaní objímky na hriadeľ s určitým presahom. Táto problematika sa zaoberá dvoma rôznymi prípadmi. Prvý sa týka nalisovania objímky na dutý hriadeľ a druhý zase nalisovania na plný hriadeľ.

- Nalisovanie objímky na dutý hriadeľ (trubku)



Obrázok 14 Zobrazenie nalisovania objímky na dutý hriadeľ

Keďže sa jedná o dutý hriadeľ, vnútorný pretlak  $p_1$  a vonkajší pretlak  $p_3$  a osovú napätia  $\sigma_o^I$  a  $\sigma_o^{II}$  uvažujeme nulové. Pred tým, ako sa dostaneme k vyjadrenia presahu nalisovania podľa vzorca (38), vyjadríme najprv radiálne a tečné napätia pomocou konštant K a C

$$\begin{aligned} C^I &= (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (0 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \\ C^{II} &= (p_2 - p_3) * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = (p_2 - 0) * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = p_2 * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}, \\ K^I &= \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

$$K^{II} = \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * 0}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (47)$$

### Hriadeľ

$$\begin{aligned} \sigma_t^I &= K^I + \frac{C^I}{x^2} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} * \frac{1}{x^2}, \\ \sigma_r^I &= K^I - \frac{C^I}{x^2} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned}$$

**Nalisovanie**

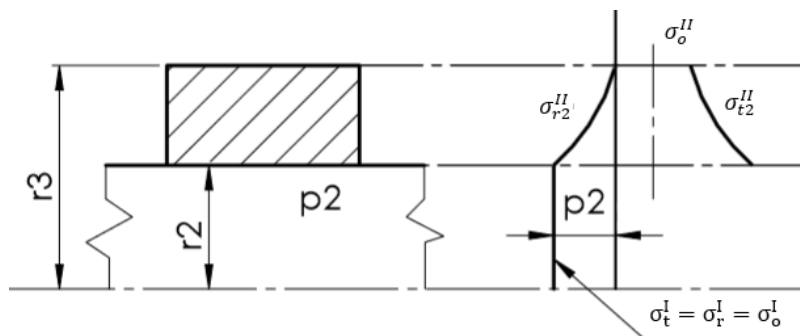
$$\sigma_t^{II} = K^{II} + \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

$$\sigma_r^{II} = K^{II} - \frac{C^{II}}{x^2} = \frac{p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{1}{x^2} * p_2 * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

Po dosadení rovníc (46) a (47) do odvodeného vzorca (38) pre presah dostávame

$$q = \frac{2 * r_2^2}{E} * \left[ \frac{r_2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} \right] * p_2. \tag{48}$$

- Nalisovanie objímky na plný hriadeľ (trubku)



Obrázok 15 Zobrazenie nalisovania objímky na plný hriadeľ

Pri nalisovaní objímky na plný hriadeľ vychádzame z toho, že do odvodených vzťahoch (18) a (19) pre integračné konštanty K a C dosadíme za hodnoty  $r_1$  a  $p_1$  nulu, potom dostávame

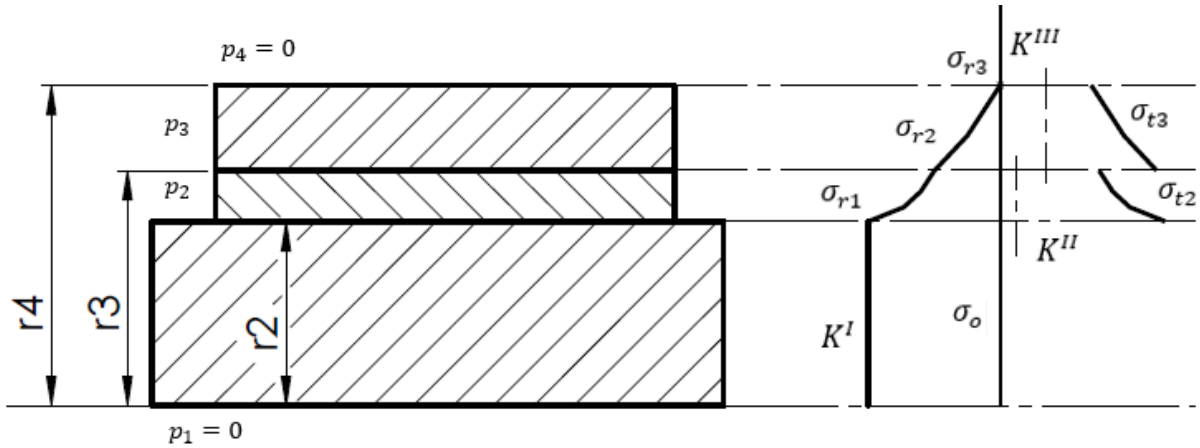
$$\sigma_t^I = \sigma_r^I = K^I = konst. = -p_2, \tag{49}$$

$$\sigma_o^{II} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \tag{50}$$

Výsledný presah dostaneme, ak dosadíme do rovnice (41) vzťahy (49) a (50)

$$q = \frac{2 * r_2}{E} * \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} * p_2. \tag{51}$$

- Nalisovaný spoj zložený z dvoch nalisovaní (vložka a objímka)



Obrázok 16. Znárodnenie konfigurácie modelu a napätí na konštrukcii s násobným nalisovaním

Pri odvodzovaní presahu v prípade nalisovania na plný hriadeľ výjdeme z poznatku, že hodnoty tlakov  $p_1, p_4$  a hodnota polomeru  $r_1$  sa rovnajú nule.

Hodnoty integračných konštant K a C majú následovný tvar

$$C^I = (p_1 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (0 - p_2) * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 * \frac{r_1^2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$C^{II} = (p_2 - p_3) * \frac{r_2^2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

$$C^{III} = (p_3 - p_4) * \frac{r_3^2 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} = (p_3 - 0) * \frac{r_3^2 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} = p_3 * \frac{r_3^2 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2}$$

$$K^I = \frac{p_1 * r_1^2 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0 - p_2 * r_2^2}{r_2^2 - 0} = \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2}$$

$$K^{II} = \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

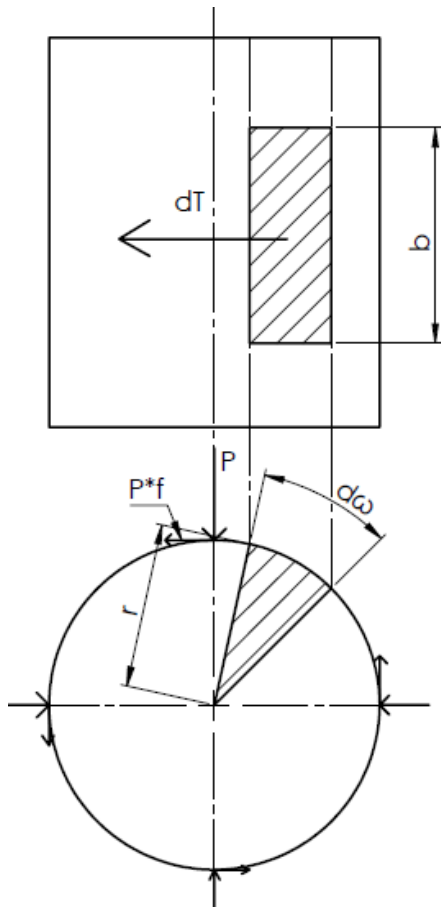
$$K^{III} = \frac{p_3 * r_3^2 - p_4 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} = \frac{p_3 * r_3^2 - 0 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} = \frac{p_3 * r_3^2}{r_4^2 - r_3^2}$$

Výsledné hľadané presahy  $\Delta r_2$  a  $\Delta r_3$  potom dostaneme dosadením integračných konštant do vzorca pre dve nalisovania (41) a dostávame

$$\Delta r_2 = \frac{2r_2}{E} * (K^{II} - K^I) = \frac{2r_2}{E} * \left( \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{-p_2 * r_2^2}{r_2^2} \right), \quad (52)$$

$$\Delta r_3 = \frac{2r_3}{E} * (K^{III} - K^{II}) = \frac{2r_3}{E} * \left( \frac{p_3 * r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} - \frac{p_2 * r_2^2 - p_3 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right). \quad (53)$$

### 2.13 Prenesenie krútiaceho momentu



Pri určovaní veľkosti krútiaceho momentu, ktorý pôsobí na vybraný element z obr. 17 vychádzame z poznatku o rovnomernej rozloženej tlaku na stykovej ploche medzi nalisovaním a hriadeľom.

Začneme vzťahom pre krútiaci moment, ktorým je zaťažovaný element z obr. 17

$$dM_k = r * dT \quad (54)$$

Kde  $dT$  je sila pôsobiaca na element. Jej hodnotu vyjadríme vďaka tlaku  $p$ , ktorý pôsobí na element v tečnom smere a plocha elementu je  $dA$ .

Z obr. 17 je zrejmé, že veľkosť plochy  $dA$  sa rovná

$$dA = b * r * d\omega$$

Hodnota  $dT$  sa po dosadení plochy elementu rovná

$$dT = p * f * dA = p * f * b * r * d\omega$$

Obrázok 17 Znáročenie problematiky prenesenia krútiaceho momentu  $M_k$

Tento vzťah následne dosadíme späť do rovnice (54) a dostávame

$$dM_k = r * p * f * b * r * d\omega$$

Posledný krok je integrácia podľa  $d\omega$  v medziach  $< 0 ; 2\pi >$ , potom dostávame výsledný vzťah pre krútiaci moment  $M_k$

$$M_k = \int_{\omega=0}^{2\pi} dM_k = \int_{\omega=0}^{2\pi} r * p * f * b * r * d\omega$$

$$M_k = 2 * \pi * r^2 * p * f * b \quad (55)$$



Praktická časť

2.14 Spracovanie vzorového príkladu

Pri spracovaní príkladu vychádzame z poznatku medze kluzu ( $R_e$ ) u zadaného materiálu. Z tohto potom pomocou bezpečnosti  $k$  určíme dovolené napätie  $\sigma_D$ . Následne dopočítame z odvodených vzťahov  $\Delta r$  pre presah jeho optimálne hodnoty, s ktorými potom pracujeme v numerickom programe ABAQUS a výsledky porovnáme.

2.15 Voľba optimálneho presahu

Zadané parametre nalisovanej konštrukcie, ktorú navrhujeme z hriadeľa, vložky a objímky (náboja)

$Materiál = 12\ 040$

$r_1 = 0\ mm$

$R_e = 550$

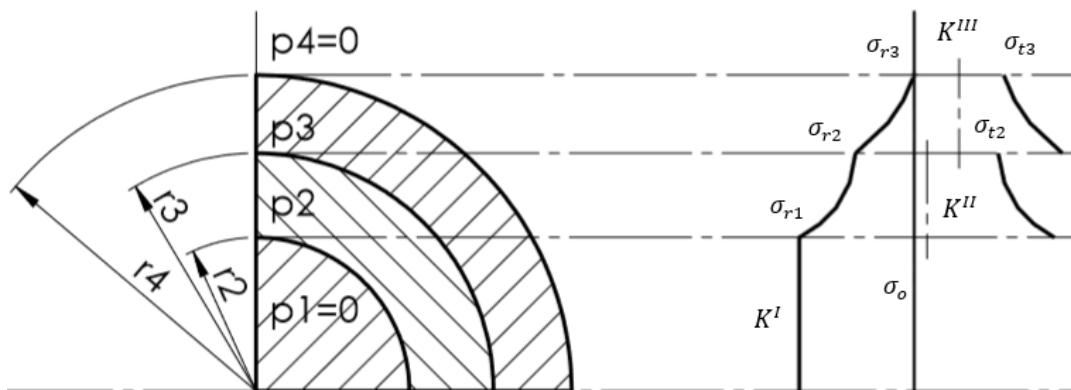
$r_2 = 10\ mm$

$k = 2$

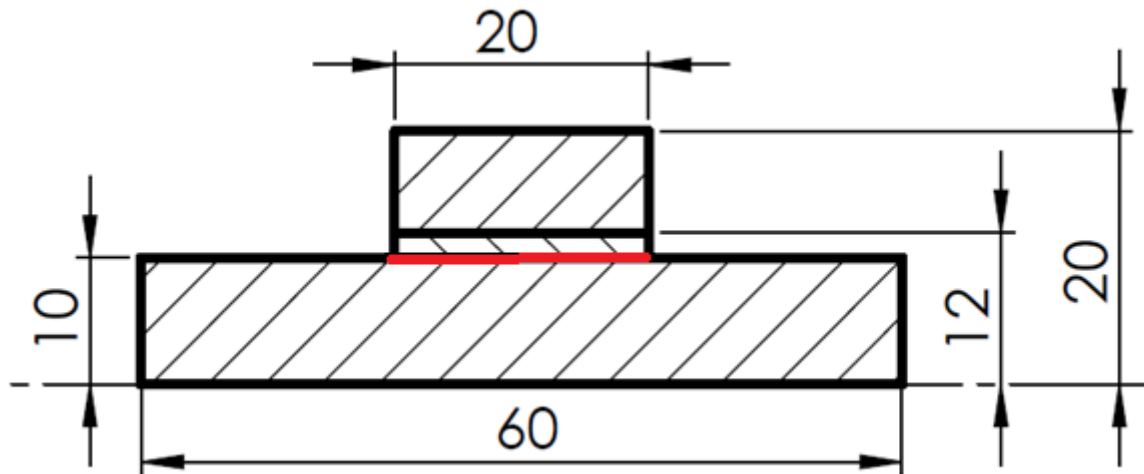
$r_3 = 12\ mm$

$\sigma_D = 275$

$r_4 = 20\ mm$



Obrázok 18 Grafické znázornenie napätí vzorového príkladu



Obrázok 19. Zobrazenie východzej konfigurácie modelu

Tlaky  $p_1$  a  $p_4$  vyplývajú z okrajových podmienok pre nalisovanie na plný hriadeľ a tlaky  $p_3$  a  $p_4$  dostaneme dosadením jednotlivých polomerov do vzorcov

$$p_1 = 0$$

$$p_4 = 0$$

$$(p_3 - p_4) * \frac{2 * r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \leq \sigma_D \rightarrow p_3 = \frac{275}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{12}{20} \right)^2 \right] + 0 = 88 \text{ MPa}$$

$$(p_2 - p_3) * \frac{2 * r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \leq \sigma_D \rightarrow p_2 = \frac{275}{2} * \left[ 1 - \left( \frac{10}{12} \right)^2 \right] + 88 = 130,01 \text{ MPa.}$$

Po dosadení tlakov do rovníc na strane 31, dostávame hodnoty pre integračné konštanty K a C

$$K^I = -130,01$$

$$C^{II} = 13748,73$$

$$K^{II} = 7,477$$

$$C^{III} = 19800.$$

$$K^{III} = 49,5$$

$$C^I = 0$$

Z rovníc (52) a (53) potom dopočítame hodnotu optimálnych presahov medzi hriadeľom a vložkou a následne medzi vložkou a objímkou.

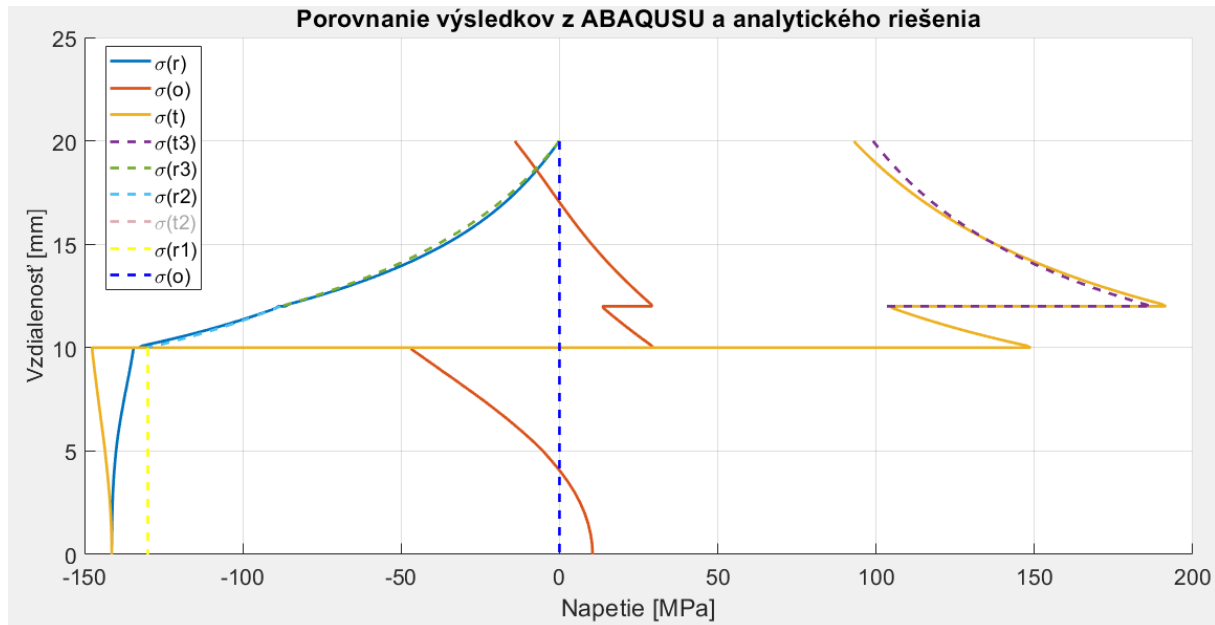
$$\Delta r_2 = 0,013094 \text{ mm}$$

$$\Delta r_3 = 0,004826 \text{ mm.}$$

Potom určíme hodnoty radiálnych a tečných napätí podľa už odvodených vzťahov (15) a (16)

$$\begin{aligned}\sigma_{t2} &= 102,95 \text{ MPa} \\ \sigma_{t3} &= 99 \text{ MPa} \\ \sigma_{r1} &= -130,01 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

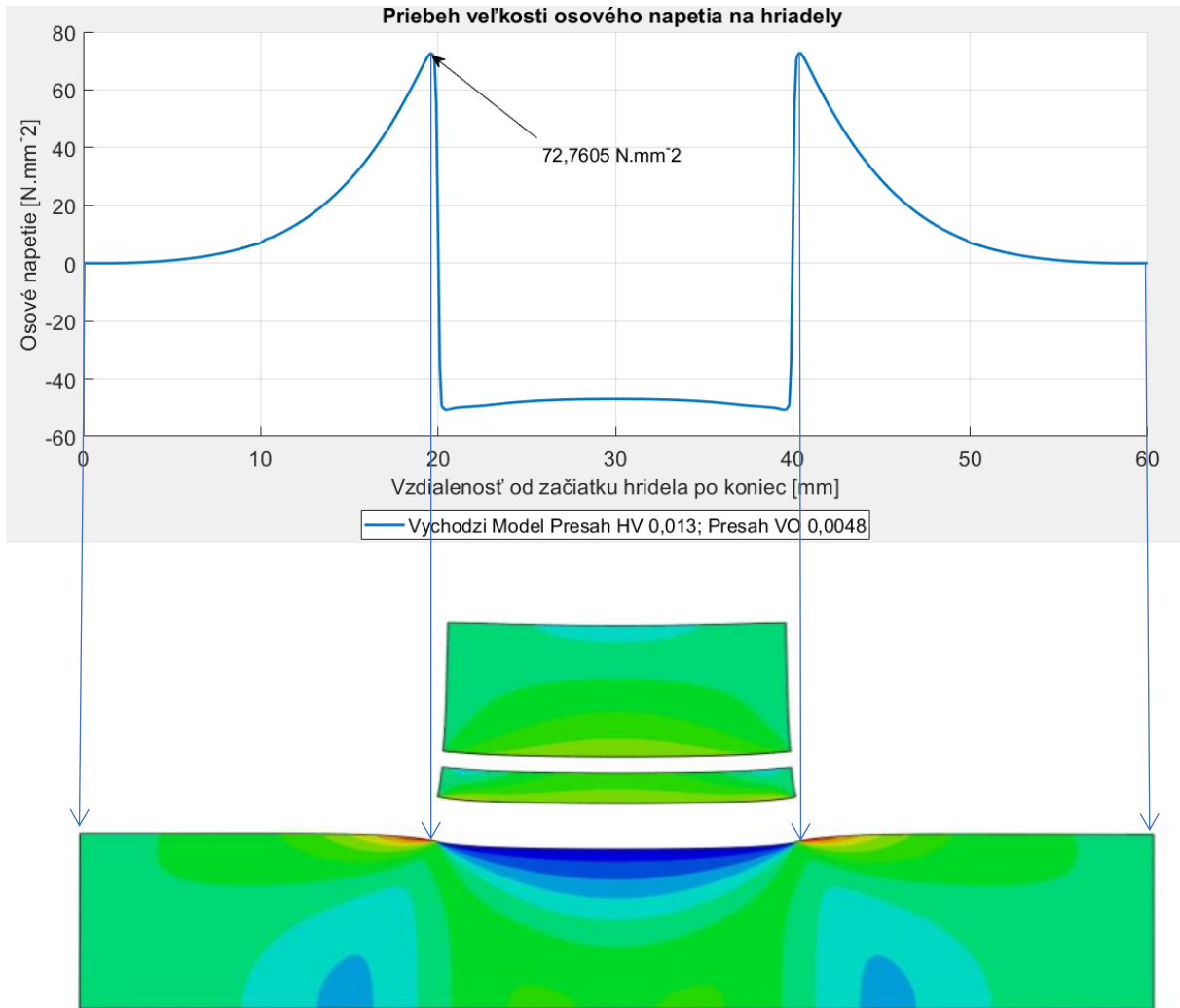
$$\begin{aligned}\sigma_{r2} &= -88,003 \text{ MPa} \\ \sigma_{r3} &= 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Obrázok 20 Grafické znázornenie priebehov napätí z programu ABAQUS a analytického riešenia

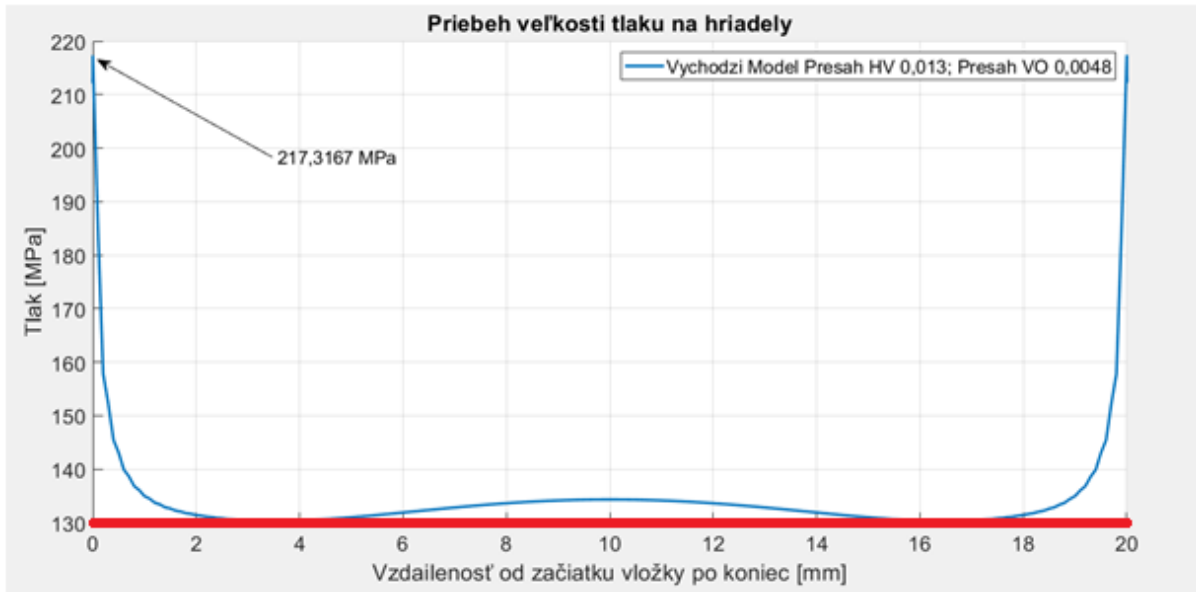
Na obr.20 sú zobrazené výsledky analýzy analytického riešenia (čiarkovane) a taktiež aj výsledky z programu ABAQUS (plná čiara). V programe ABAQUS bola vytvorená kópia modelu, na ktorom sa previedli numerické výpočty. Pri porovnaní grafov je zrejmé, že tečné a radiálne napätia sú zhruba rovnaké, väčšia presnosť by sa dala doceliť ešte jemnejším vysieťovaním modelu. K zásadnému rozdielu dochádza pri porovnaní osových napätí. Zatiaľ čo v analytickom riešení je osovú napätie zanedbávané, vďaka simuláciám z programu ABAQUS je zrejmé, že tam vzniká

## ČVUT FS



Obrázok 21 Zobrazenie priebehu osového napätia na východnom modeli

Z priebehu osového napätia na obr.21 je zrejmé, že priebeh veľkosti osového napätia po hriadelí je symetrický k stredu nalisovania. Na okrajoch nalisovania môžeme pozorovať ťahovú špičku až  $76,7605 \text{ N.mm}^{-2}$ , ktorá vzniká v dôsledku vytlačovania materiálu pri radiálnom nalisovaní vložky a objímky na hriadel. Ťahová špička je problematická z dôvodu, že v mieste kde vzniká trhlinka, dopomáha k jej väčšiemu roztváraniu, čo urýchľuje deštrukciu spoja. Ideálne hľadáme takú konštrukčnú úpravu, alebo konfiguráciu spoja, ktorá by zaručovala plynulejší priebeh osového napätia po hriadelí pred nalisovaním.



Obrázok 22 Znáznornenie priebehu veľkosti tlaku na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou (červná farba predstavuje stykovú plochu medzi hriadeľom a vložkou a odkazuje sa na obr.19)



Pri analyzovaní grafu na obr.22 je vidieť, ako sa na začiatku a konci nalisovania vytvára ostrá tlaková špička, ktorá dosahuje hodnotu až 217,3167 MPa . Taktiež sa to javí ako problematické kvôli tomu, že je tam lokálny extrém a hriadeľ je v tomto bode namáhaný až tak, že to má za následok jeho porušenie.

Výpočet krútiaceho momentu, ktorý je náš nalisovaný spoj schopný preniesť prevedieme podľa vzorca (55) následovne

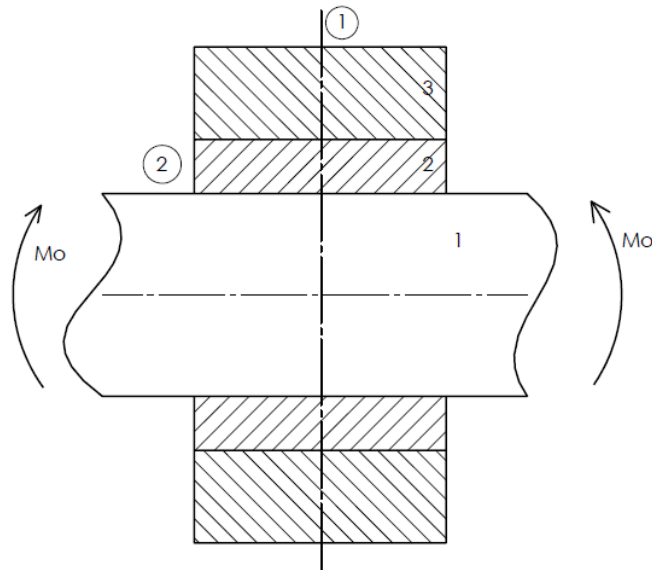
$$M_k = p_2 * A * f * r = p_2 * \pi * d * b * f * \frac{d}{2} = 130,01 * 10 * 20 * 0,15 * 5 = 61327,03 \text{ Nmm}$$

$p_2$  – tlak  
 $f$  – trenie  
 $r$  – polomer nalisovania  
 $A$  – styční plocha

Pre porovnanie a overenie nášho výpočtu použijeme lichobežníkovú metódu. Výpočet tlaku na styčnej ploche medzi hriadeľom a vložkou pomocou numerickej integrácie

$$M_k = \int_0^l p_{2(y)} * \pi * d * f * \frac{d}{2} dy = \pi * 10 * 0,15 * \frac{10}{2} * \int_0^{20} p_{2(y)} = 63709,14 \text{ Nmm}$$

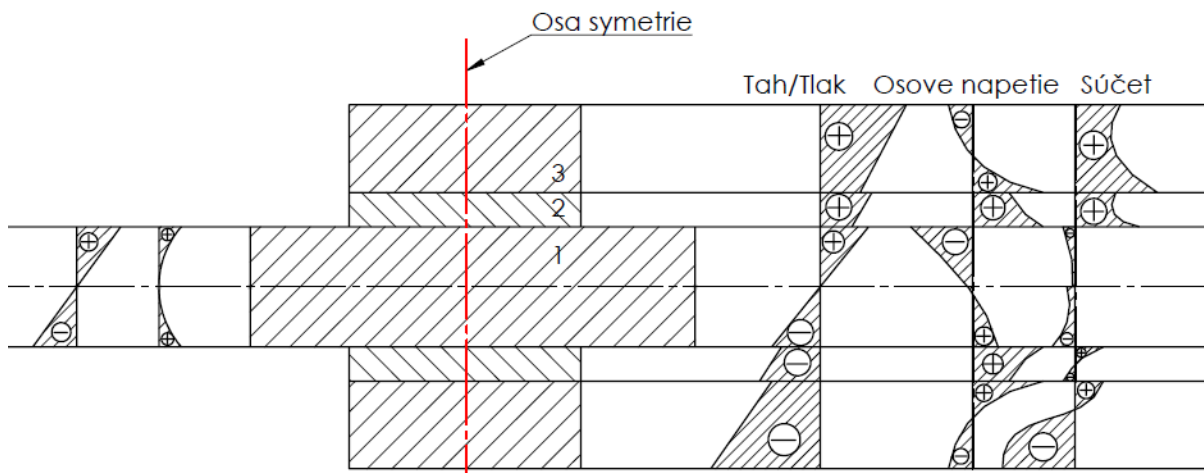
2.16 Kombinované namáhanie osového napätia + ohybu



Obrázok 23 Znáozornenie osi 1 a 2 na nalisovanej konštrukcii zaťaženej ohybom

Podľa obr.23 analyzujeme výsledné napätie v osi symetrie a na okraji nalisovanej konštrukcie. Obidva body riešime nezávisle od seba a zaujíma nás osovú napätie vzniknuté nalisovaním a rozloženie ohybového napätia. Súčtom oboch napätí je výsledné osovú napätie v jednotlivých častiach nalisovaného spoja 1 a 2.

Ako prvú analyzujeme os symetrie. 1



Obrázok 24 Analýza celkového napätia medzi jednotlivými časťami konštrukcie na ose symetrie

Kontrolujeme stykovú plochu medzi hriadeľom a vložkou. Na strane vložky podľa obr.24 vzniká ťahová špička osovú napätia, ktorú riešime následovne

$$\sigma_{V\text{Celkove}} = \sigma_{V\text{Ohybove}} + \sigma_{V\text{Osove}}$$

$$\sigma_{VCelkove} = \frac{M_{VOhybove}}{J_H} * r_H + 29,51 = \frac{M_{VOhybove}}{\frac{\pi * d_H^4}{64}} * 10 + 29,51 = + .$$

Výpočet celkového napätia na strane hriadeľa má tvar

$$\sigma_{H Celkove} = \sigma_{HOhybove} + \sigma_{Hosove}$$

$$\sigma_{H Celkove} = \frac{M_{HOhybove}}{J_H} * r_H - 46,99 = \frac{M_{HOhybove}}{\frac{\pi * d_H^4}{64}} * 10 - 46,99 = - .$$

Ďalej kontrolujeme napätosť v stykovej ploche objímky a vložky

Celkové napätie na strane vložky

$$\sigma_{VCelkove} = \sigma_{VOhybove} + \sigma_{Vosove}$$

$$\sigma_{VCelkove} = \frac{M_{VOhybové}}{J_V} * r_V + 29,51 = \frac{M_{VOhybové}}{\frac{\pi * d_V^4}{64}} * 12 + 13,61 = + .$$

Celkové napätie na strane objímky

$$\sigma_{OCelkove} = \sigma_{OOhybove} + \sigma_{Oosove}$$

$$\sigma_{OCelkove} = \frac{M_{OOhybové}}{J_O} * r_O + 29,51 = \frac{M_{OOhybové}}{\frac{\pi * d_O^4}{64}} * 12 + 25,97 = + .$$

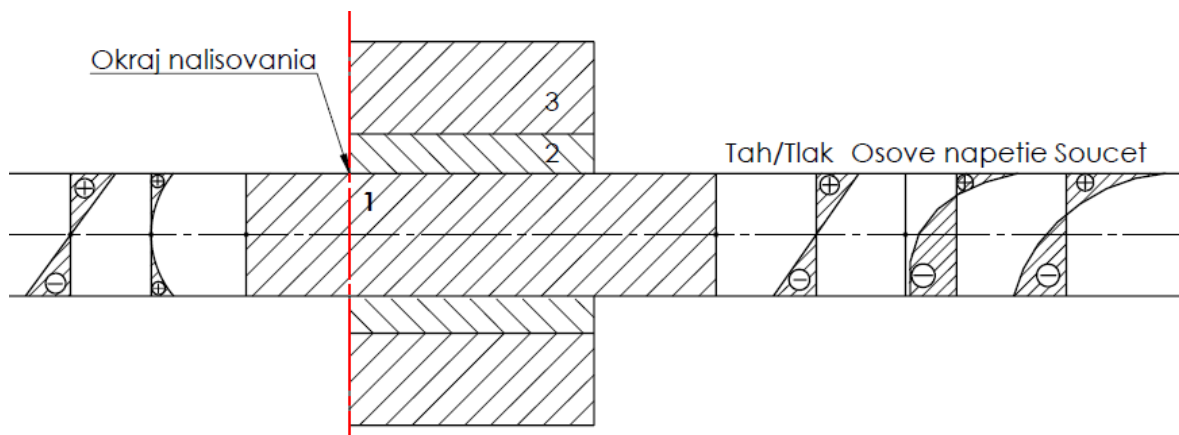
Posledné miesto na kontrolu je vonkajšia plocha objímky podľa obrázku (16),

tam vzniká tlakové napätie

$$\sigma_{OCelkove} = \sigma_{OOhybove} + \sigma_{Oosove}$$

$$\sigma_{OCelkove} = \frac{M_{OOhybové}}{J_O} * r_O + 29,51 = \frac{M_{OOhybové}}{\frac{\pi * d_O^4}{64}} * 20 - 13,98 = + .$$

Ako druhé, analyzujeme okraj nalisovania (2)



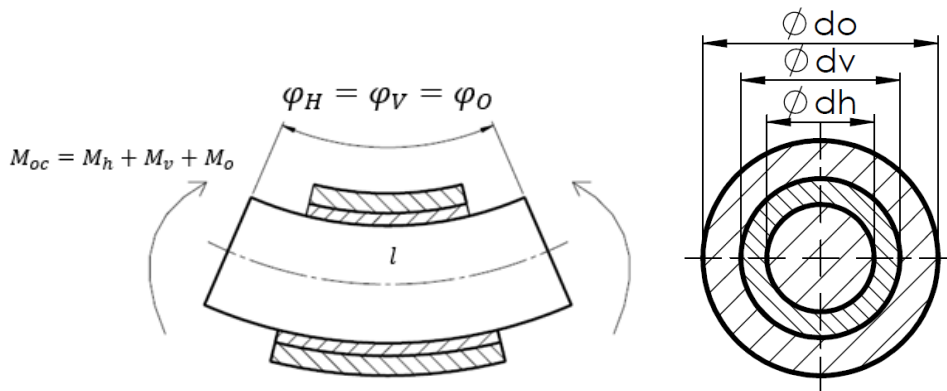
Obrázok 25 Analýza celkového napätia na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou na povrchu hriadeľa

$$\sigma_{H\text{Celkove}} = \sigma_{H\text{Ohybove}} + \sigma_{H\text{Osove}}$$

$$\sigma_{H\text{Celkove}} = \frac{M_{H\text{Ohybove}}}{\frac{\pi * d_H^4}{64}} * 10 + 9,84 = +.$$

### 2.17 Namáhanie nalisovanej súčasti ohybom

Pri vyjadrovaní celkového ohybového momentu  $M_{OC}$ , ktorý pôsobí na celú nalisovanú konštrukciu vychádzame z poznatku, že každá časť nalisovanej konštrukcie sa ohne pod rovnakým uhlom vid. obr.26. Preto celkový moment  $M_{OC}$  bude vyjadrený ako súčet dielčích momentov, ktoré pôsobia na jednotlivé časti nalisovania.



Obrázok 26 Znáznorenie ohybu konštrukcie

$M_h ; M_v ; M_o =$  ohybové momenty hriadeľa, vložky a objímky

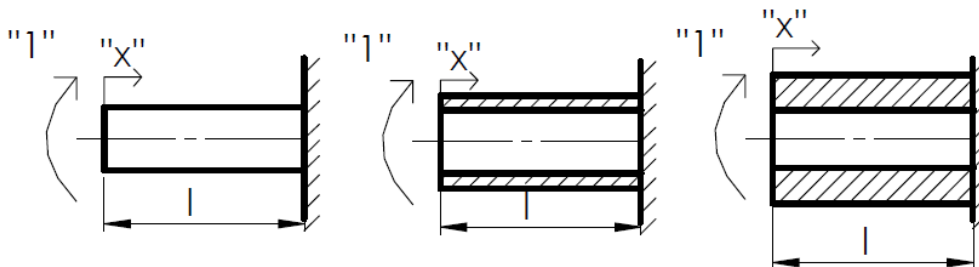
$E \rightarrow$  Yangov modul pružnosti

$J_h ; J_v ; J_o \rightarrow$  Kvadratický moment pre hriadeľ, vložku a objímku

$$\varphi_H = \varphi_V = \varphi_O$$

Pre výpočet jednotlivých uhlov súčasti spoja použijeme Mohrov integrál pre ohybovú deformáciu podľa obr.27

$$\int \frac{M * m}{E * J} dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{M_H * 1}{E * J_H} dx = \int_0^1 \frac{M_V * 1}{E * J_V} dx = \int_0^1 \frac{M_O * 1}{E * J_O} dx$$



Obrázok 27 Zobrazenie ohybu jednotlivých častí nalisovania jednotkovým momentom



Po úprave jednotlivých Mohrových integrálov dostávame vyjadrenie deformačnej podmienky

$$\frac{M_H * l}{E * J_H} = \frac{M_V * l}{E * J_V} = \frac{M_O * l}{E * J_O}.$$

Sústavu rovníc pre momenty, ktoré namáhajú jednotlivé časti doplníme momentovou rovnicou spoja

$$\begin{aligned} M_H + M_V + M_O &= M_c \\ \frac{M_V}{M_H} &= \frac{J_V}{J_H} \\ \frac{M_O}{M_V} &= \frac{J_O}{J_V}. \end{aligned}$$

Po dosadení a vyjadrení jednotlivých momentov dostávame

$$\begin{aligned} M_H + \frac{M_H * J_V}{J_H} + \frac{M_H * J_O}{J_H} &= M \\ M_H * \left(1 + \frac{J_V}{J_H} + \frac{J_O}{J_H}\right) &= M \\ M_H = \frac{M}{\left(1 + \frac{J_V}{J_H} + \frac{J_O}{J_H}\right)}; M_V = \frac{J_V}{J_H} * \left(1 + \frac{J_V}{J_H} + \frac{J_O}{J_H}\right); M_O = \frac{J_O}{J_H} * \left(1 + \frac{J_V}{J_H} + \frac{J_O}{J_H}\right). \end{aligned}$$

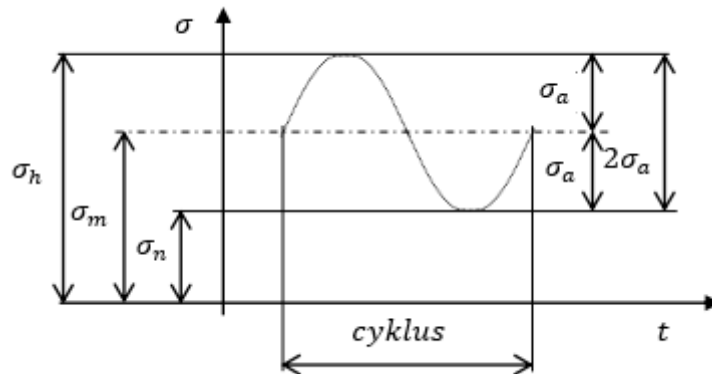
Vzťahy pre jednotlivé prierezové charakteristiky majú tvar

$$J_H = \frac{\pi * d_H^4}{64}; J_V = \frac{\pi * d_V^4}{64} * \left(1 - \left(\frac{d_H}{d_V}\right)^2\right); J_O = \frac{\pi * d_O^4}{64} * \left(1 - \left(\frac{d_V}{d_O}\right)^2\right).$$

## 2.18 Namáhanie pri premenlivom zaťažení

Vznik premenlivého zaťaženia môže byť spôsobený buď silami, ktoré sa periodicky menia, alebo stálymi silami pri premenlivej polohe zaťažovanej súčasti. Tvar priebehu napätia je nahradzovaný sínusovým priebehom.

Pri cyklickom zaťažení sa napätie v jednotlivých vláknach súčastí mení periodicky behom každého cyklu v medziach od minimálnej do maximálnej hodnoty.



Obrázok 28 Zobrazenie nesúmerne striedavého zaťažovacieho cyklu

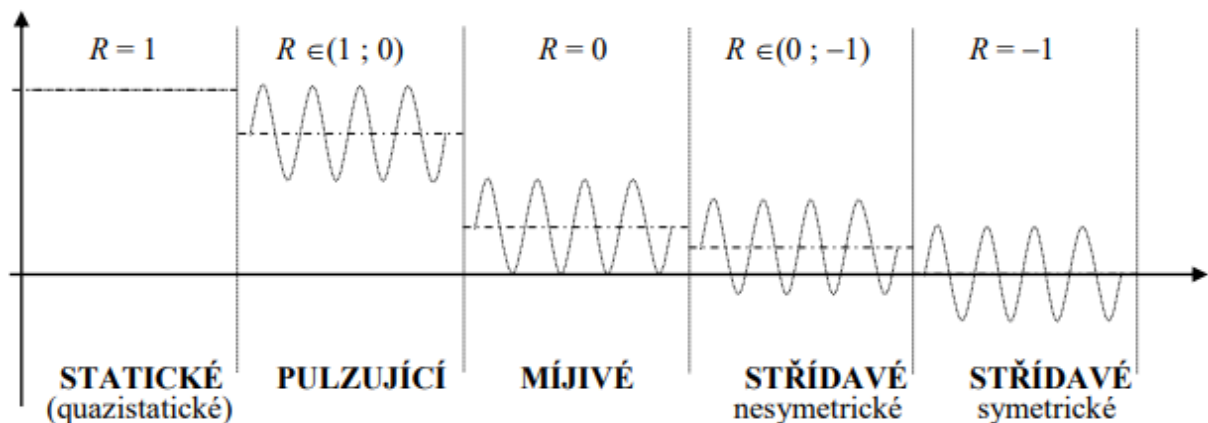
$\sigma_a$  = amplitúda

$\sigma_n$  = dolné napätie

$\sigma_h$  = horné napätie

$\sigma_m$  = stredné napätie

Typy cyklického zaťaženia:



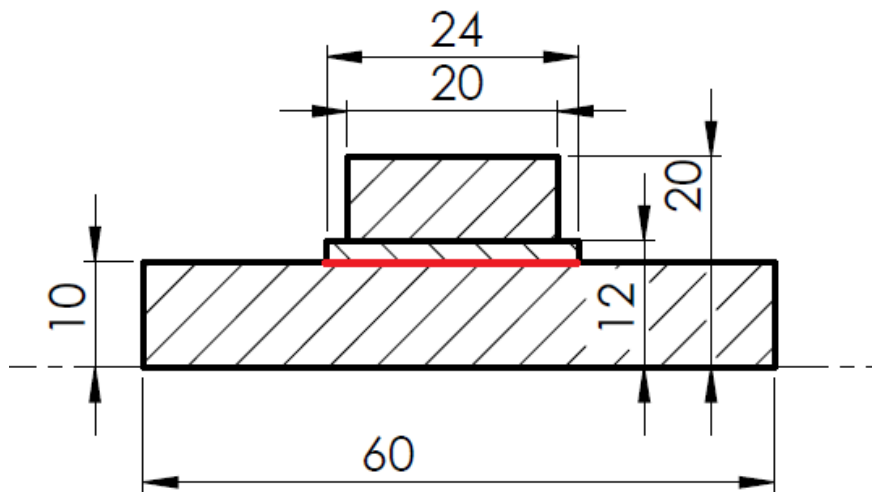
Obrázok 29 Zobrazenie typov priebehu cyklického zaťaženia

Vznik nesúmerne striedavého cyklu je spôsobený súčtom striedavého zaťažovacieho cyklu so statickým cyklom, ktorý sa pridá ako forma osového napätia, ktoré sa objavuje v nalisovaní.

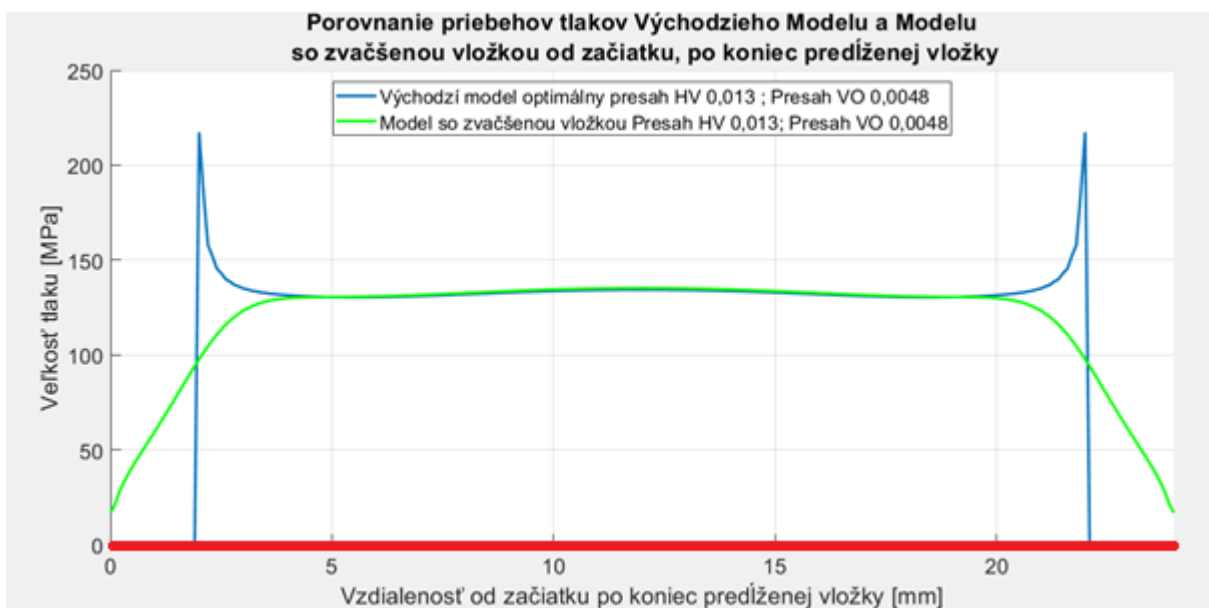
## 2.19 Konštrukčné úpravy

### 2.19.1 Dlhšia vložka

Prvá konštrukčná úprava modelu je zväčšenie veľkosti dĺžky vložky oproti veľkosti objímky. Cieľom tejto úpravy je zmenšenie ťahovej špičky, ktorá vzniká pred nalisovaním v dôsledku existencie osového napätia. Jediný parameter, ktorý je zmenený je dĺžka vložky, keďže jej hrúbku chceme nechať nezmenenú. Zväčšením dĺžky vložky by spoj mal byť schopný preniesť väčší krútiaci moment pri menšom presahu a teda aj nižšom tlaku v konštrukcii vložky a hriadeľa, čo bude vyhodnocované na základe priebehu stykového tlaku medzi hriadeľom a vložkou. Materiál vložky zostane zatiaľ taktiež nezmenený.



Obrázok 30 Konfigurácia nalisovania so základnými rozmerami



Obrázok 31 Porovnanie priebehov tlakov po hriadeľi

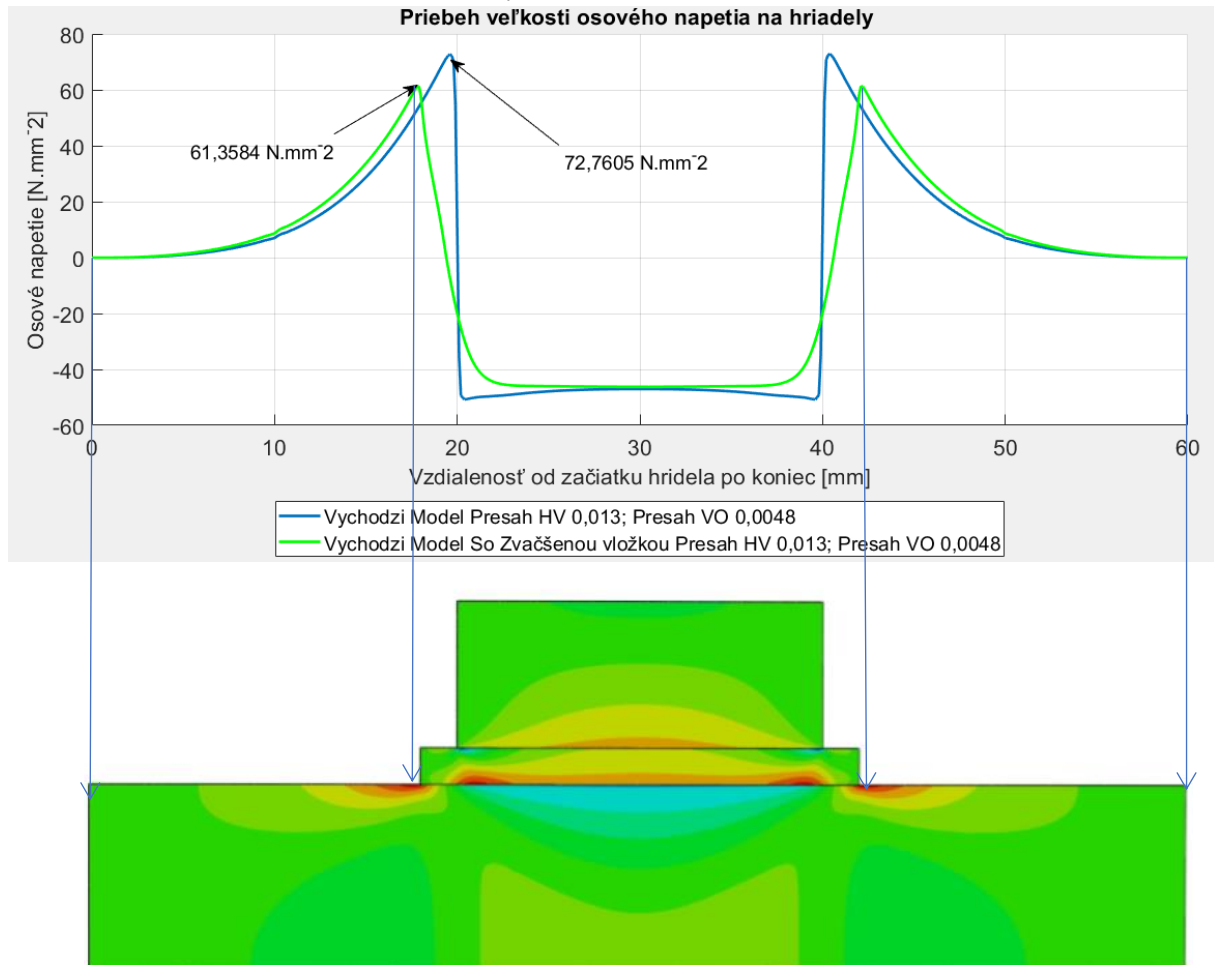


Červenou farbou je na obr.31 znázornená dĺžka predĺženej vložky. Z analýzy priebehu tlakov je zrejmé, že touto modifikáciou modelu sa nám darí obmedziť tlakovú špičku, ktorá vzniká vo východzom modeli. Okrem toho, vďaka zväčšeniu funkčnej dĺžky vložky sme schopný preniesť aj väčší krútiaci moment, čo vyplíva zo vzorca (55).

Výpočet veľkosti prenášaného krútiaceho momentu podľa vzorca (55)

$$M_k = \int_A f * p * r * dA = \int_0^l p_2(y) * \pi * d * f * \frac{d}{2} dy = \pi * 10 * 0,15 * \frac{10}{2} * \int_0^{24} p_2(y)$$

$$M_k = 6915,92 \text{ Nmm}$$

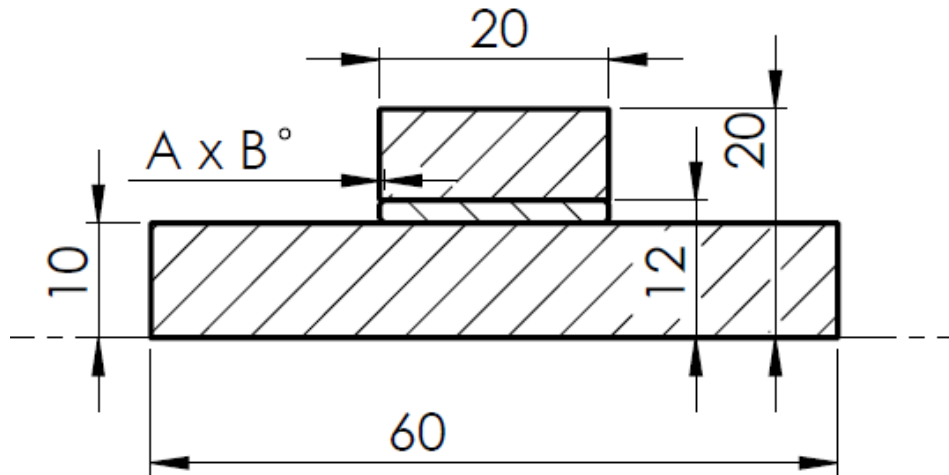


Obrázok 32. Porovnanie veľkostí osového napätia na východzom modeli a na modeli so zväčšenou vložkou

Pri analýze grafu (32) osového napätia je zrejmé, že oproti východziemu modelu sa znížila ťahová špička vznikajúca pri nalisovaní. Zväčšenie účinnej dĺžky vložky má teda pozitívne účinky na nalisovaný spoj. V dôsledku tejto konštrukčnej úpravy môžeme pozorovať existenciu ťahovej špičky aj na vložke, na rozdiel od východzieho modelu, kde sa neobjavuje.

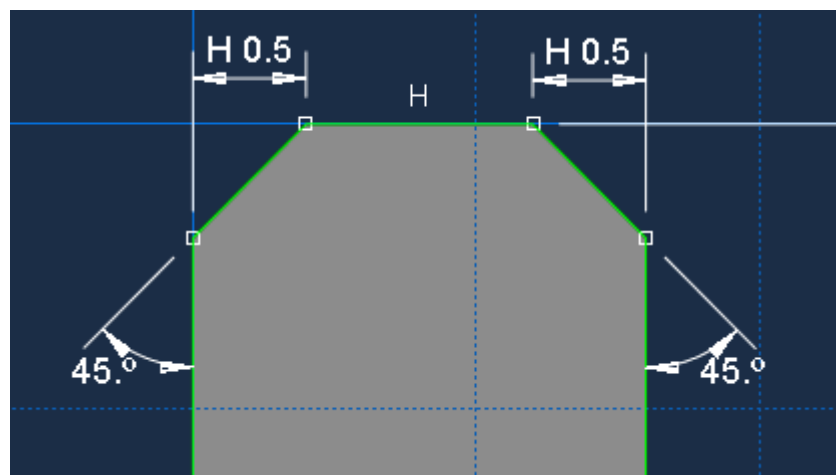
## 2.20 Skosenie

Ďalšou zvolenou konštrukčnou úpravou je vytvorenie skosenia na vložke na jednom aj druhom konci. Pri skosení analyzujeme priebeh osového napätia a tlaku v závislosti na dvoch parametroch. Prvým je dĺžka a druhým uhol skosenia. Skosenie prevedieme na oboch stranách vložky.



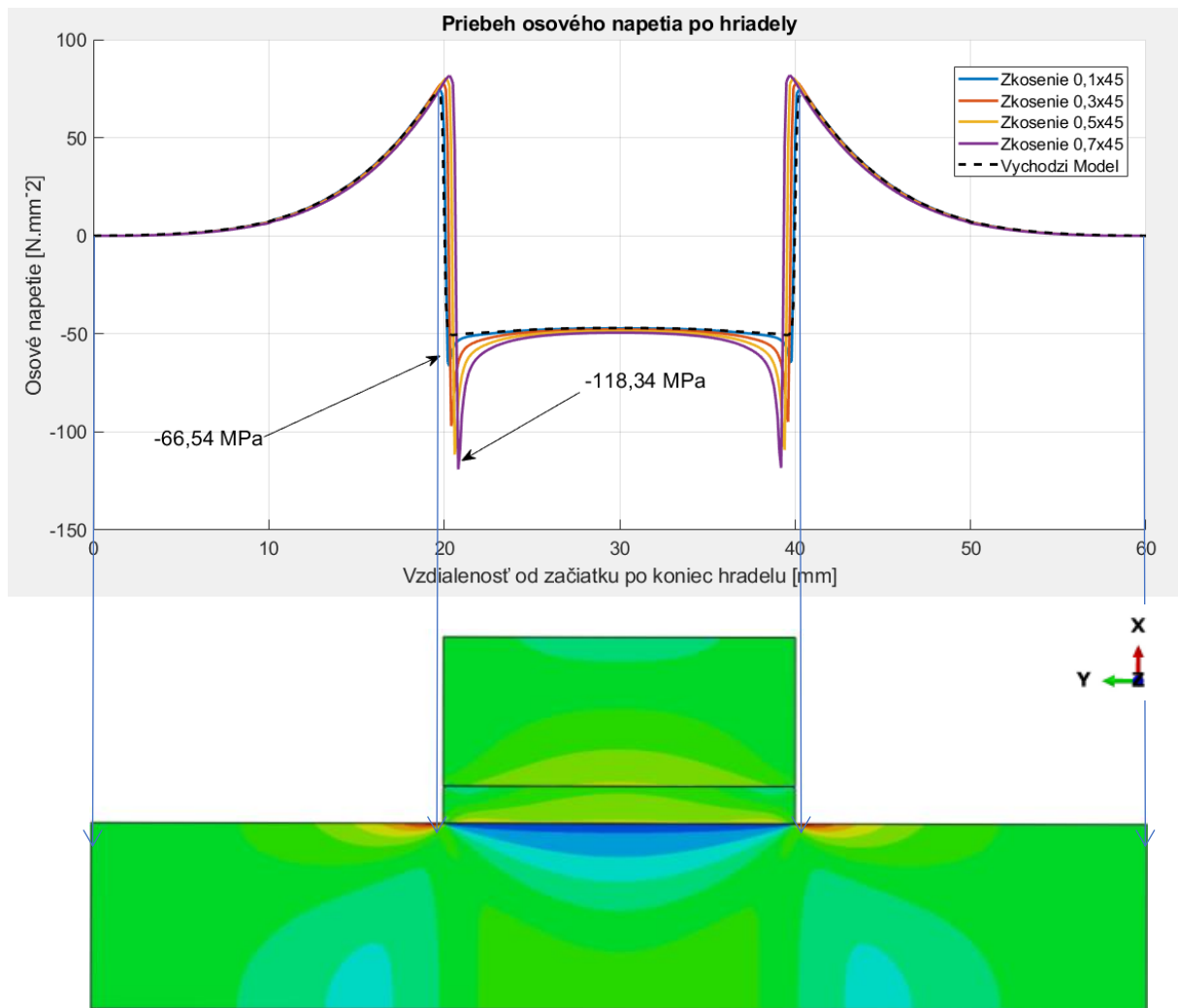
Obrázok 33. Konfigurácia úlohy

Prvým meneným parametrom bude dĺžka skosenia A. Uhol zostane konštantný a to  $45^\circ$ . Parameter A bol zväčšovaný z hodnoty 0,1 až po hodnotu 0,7.



Obrázok 34. Zobrazenie jedného prevedenia skosenia na jednej strane vložky, kedy menený parameter je dĺžka skosenia.

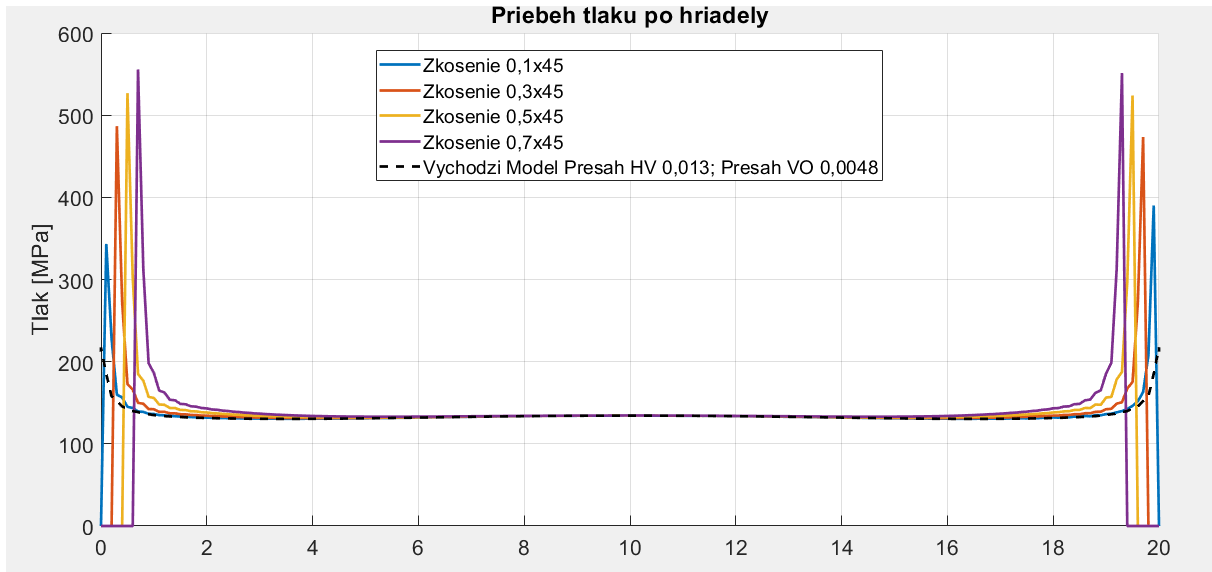
## ČVUT FS



Obrázok 35. Znáznornenie modelu z ABAQUSU a odpovedajúceho priebehu napätia po hriadeli

Z priebehu osového napätia v grafe je zrejmé, že so zvyšujúcou sa dĺžkou skosenia nepatrne až zanedbateľne rastie ťahová špička oproti východzie mu modelu. Ale na rozdiel od nej tlaková špička sa zväčšila z hodnoty -66,54 MPa na hodnotu -118,34 MPa.

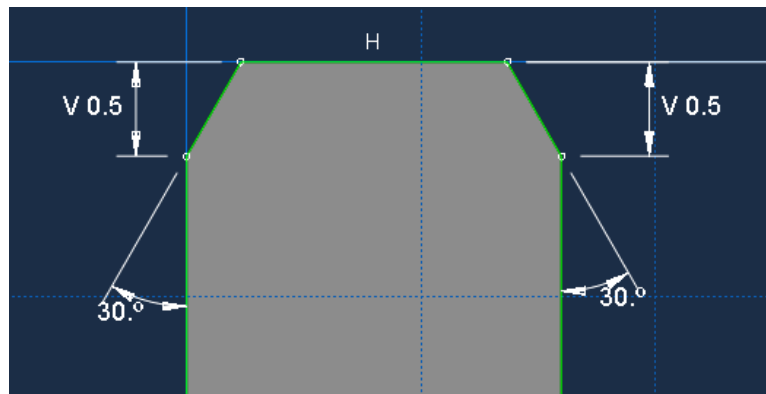
## ČVUT FS



Obrázok 36. Znáznorenie priebehu tlaku

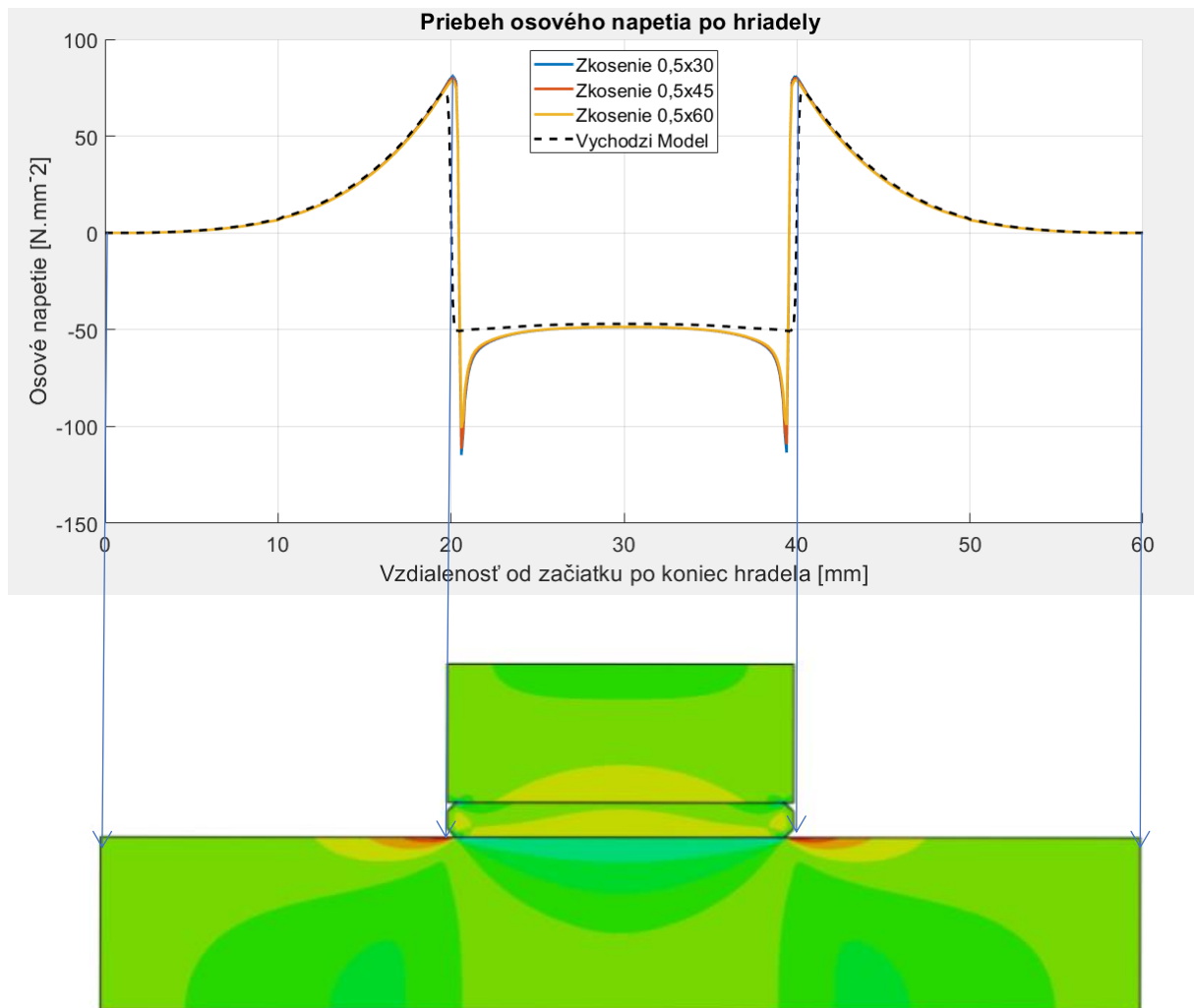
Priebeh tlaku na obr.36 po hriadeli je pri porovnaní s východzím modelom totožný, až na koniec a začiatok nalisovania, kde s rastúcou dĺžkou skosenia prudko rastú tlakové špičky. Tieto špičky sa vyskytujú z dôvodu nastavenia elastického materiálu v ABAQUSE. Pri nastavení plastického materiálu by došlo k porušeniu konštrukcie. Táto konfigurácia sa ukazuje z dôvodu špičiek tlaku ako neovládateľná v praxi.

Pri zmenách parametra B t.j. uhla zostáva konštantná dĺžka skosenie 0,5mm.



Obrázok 37 Zobrazenie jedného z viacerých skosení na jednej strane vložky, kedy parameter ktorý meníme je uhol skosenia.

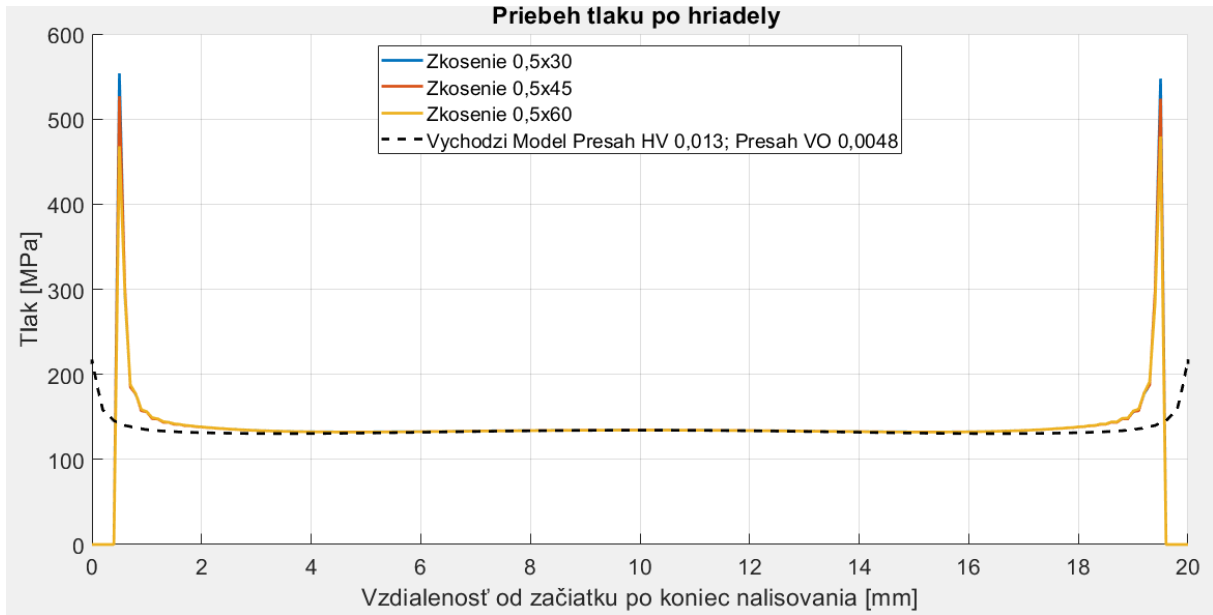
## ČVUT FS



Obrázok 38 Zobrazenie priebehu osového napätia na modely so skosením 0,5x45

Pri analyzovaní obr.38 vidíme, že priebeh osového napätia po hriadeli je veľmi podobný obr.35. Ťahová špička sa zväčšila iba nepatrne.



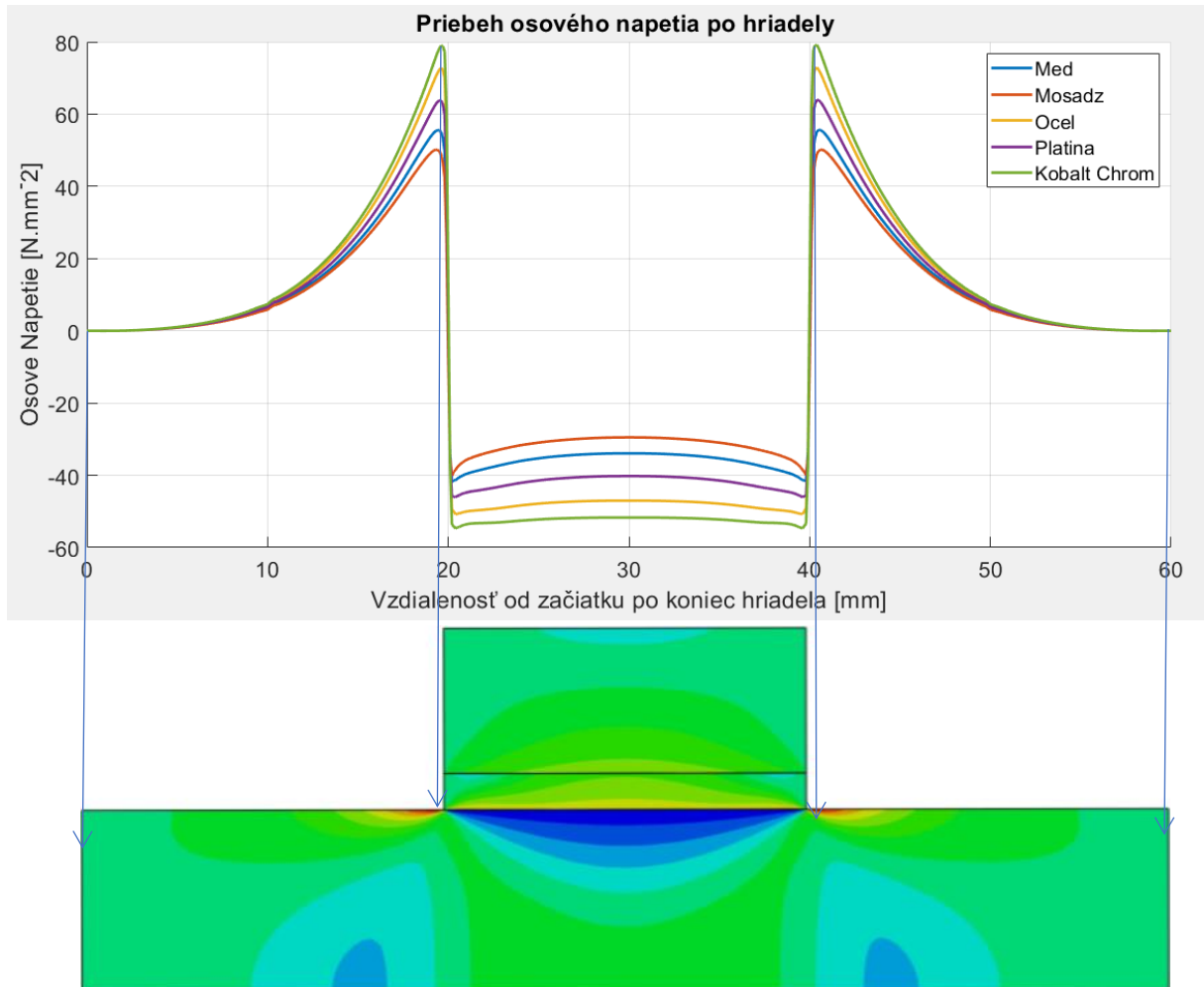


Obrázok 39 Zobrazenie priebehu tlaku

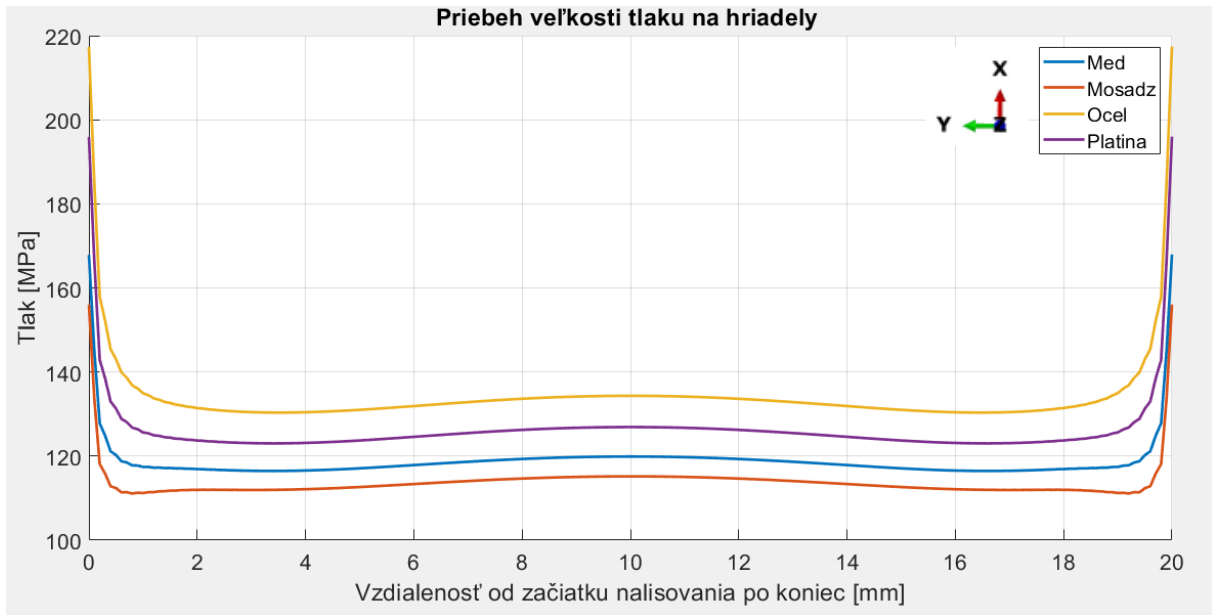
V obr.39 sa taktiež vyskytujú ostré vysoké tlakové špičky, ktoré rastú s klesajúcim uhlom. S rastúcim uhlom skosenia sa darí túto špičku zraziť iba nepatrne. Ich výskyt je spôsobený rovnako ako na obr.36 zvolením elastického materiálu. Z priebehu tlaku po stykovej ploche je vidieť, že skosenie má vplyv na jeho priebeh iba na okrajoch nalisovania a keďže tu boli zvolené rovnaké presahy ako vo východnom modeli, priebehy tlakov sa prekrývajú. Táto modifikácia konštrukcie nie je z dôvodu výskytu špičiek tlaku nevhodná.

## 2.21 Vplyv materiálu na priebeh osového napätia a tlaku

Pri analyzovaní vplyvu materiálu na osovú napätia a tlak vychádzame z východzieho modelu. Základný materiál, s ktorým sme previedli ostatné modifikácie je Oceľ. K nej sú pridané materiály s menším Yangovým modulom a Poissonovým číslom, ale taktiež aj Kobalt Chromu, ktorý má tieto fyzikálne vlastnosti odlišné.



Obrázok 40 Zobrazenie priebehu osového napätia po hriadeli na modely, ktorý je z legovaného materiálu Kobalt-Chrom



Obrázok 41 Grafické zobrazenie priebehov tlaku, pri použití rôznych materiálov

Z odvodeného vzťahu (55) pre prenesený krútiaci moment dostávame hodnoty momentov pre jednotlivé materiály

$$M_k = \int_0^l p_{2(y)} * \pi * d * f * \frac{d}{2} dy = \pi * 10 * 0,15 * \frac{10}{2} * \int_0^l p_{2(y)}$$

$$M_k (\text{Med}) = 55921,92 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_k (\text{Mosadz}) = 53533,519 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_k (\text{Ocel}) = 63709,14 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

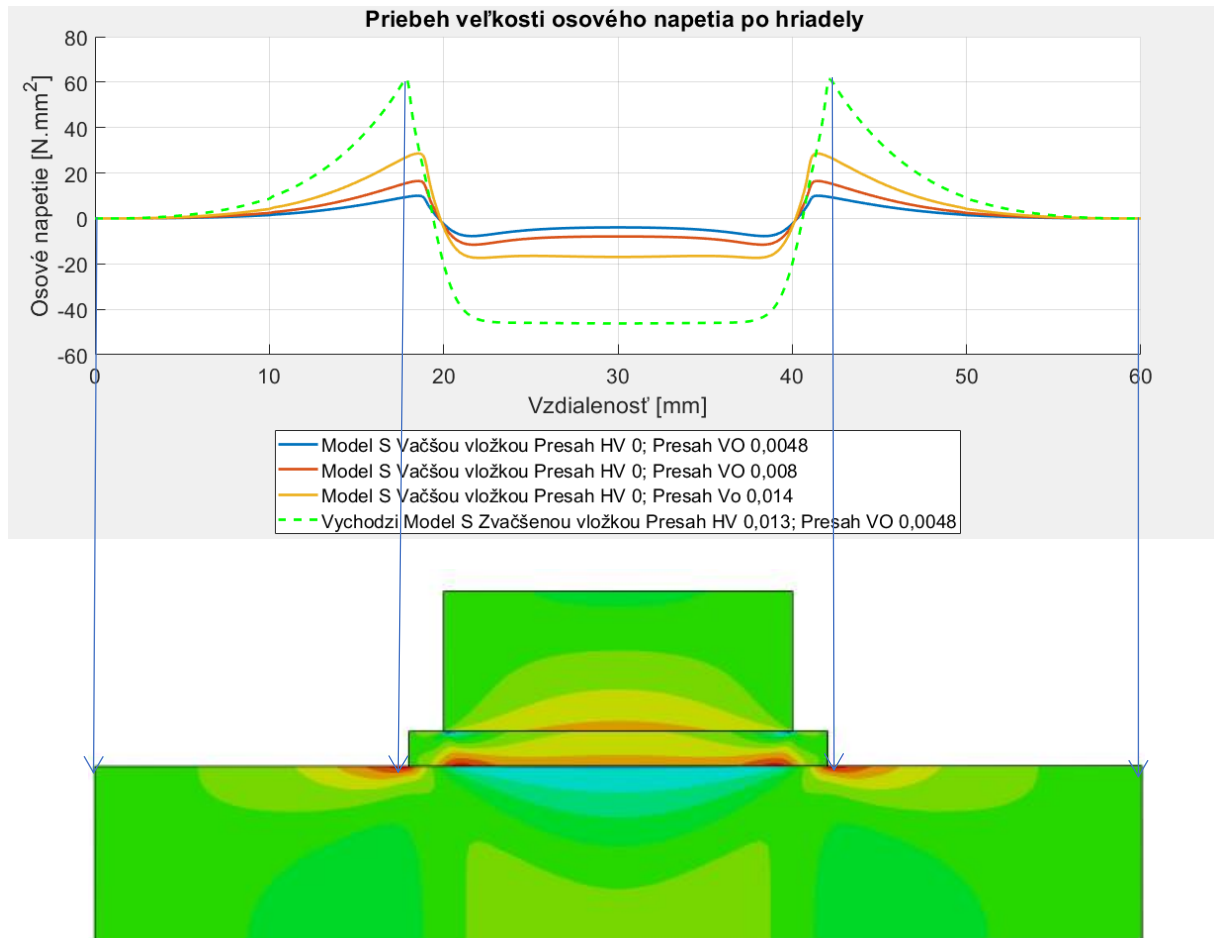
$$M_k (\text{Platina}) = 59420,86 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_k (\text{Kobalt Chrom}) = 65973,44 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Materiály s menším Yangovým modulom a Poissonovým číslom pomáhajú pri zhodnom pre-sahu a trení zmenšiť ťahovú špičku. Na druhej strane z priebehu tlaku po hriadeľi z obr.41 je zrejmé, že výrazne klesá stykový tlak medzi hriadeľom a vložkou. Tento fakt má za následok to, že spoj potom nie je schopný preniesť väčší krútiaci moment, ako to aj vyplýva z numeric-kých výpočtov.

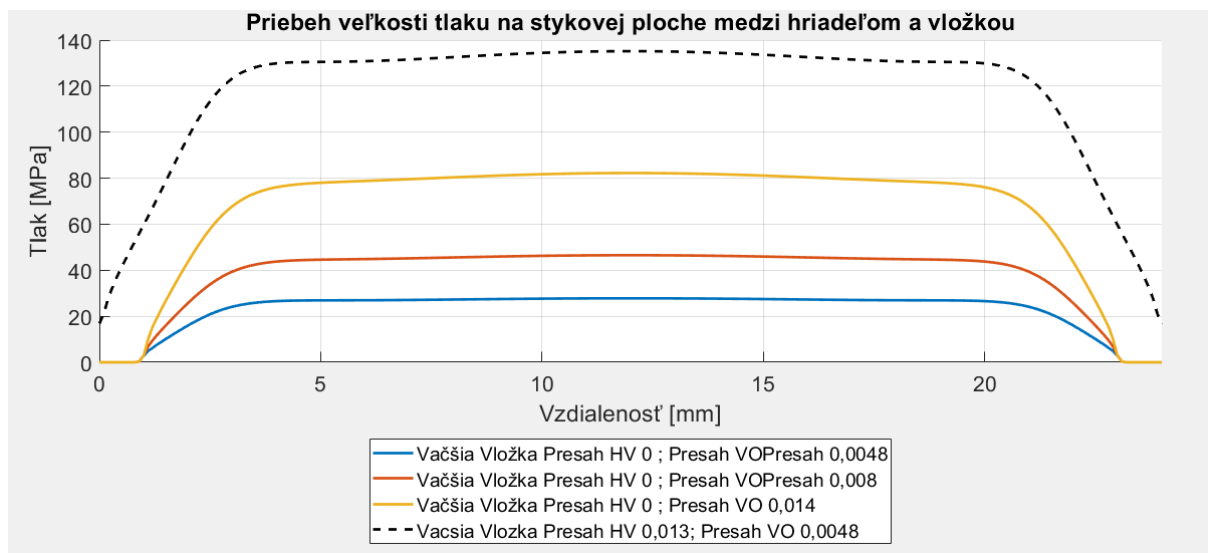
## 2.22 Vplyv konštantného nulového presahu medzi hriadeľom a vložkou na nalisovaný spoj

Ďalšou možnosťou ako sa pokúsime ovládať osovú napätie a tlak na hriadeľ je nastavenie konštantného nulového presahu na rozmedzí hriadeľa a vložky. Parameter, ktorý meníme je presah medzi vložkou a objímkou. Táto úprava bude prevádzaná na modely so zväčšenou vložkou kvôli tomu, že tento model sa zdá byť najlepším konštrukčným riešením, už z doposiaľ prevedených simulácií.



Obrázok 42 Grafické zobrazenie priebehu osového napätia po hriadeľi pri použití východzieho modelu so zväčšenou vložkou. Obrázky z ABAQUSU k ostatným priebehom osového napätia sú analogické k tomuto.

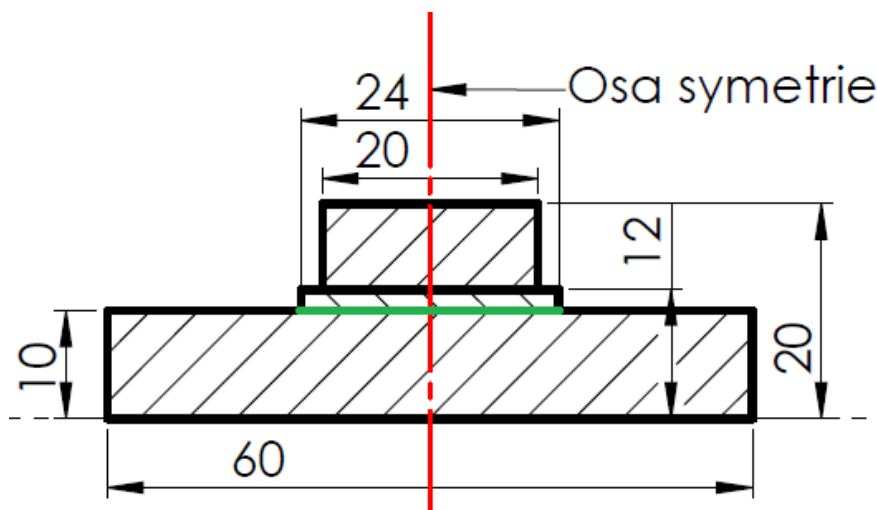
Pri analyzovaní grafu osového napätia je zrejmé, že ťahovú špičku sa darí touto úpravou modelu ovládať. Podľa obr.42 z výpočtu MKP je vidieť, že ťahová špička nenastáva na okraji nalisovania, ale tesne za ním. Taktiež je z tohoto obrázku zrejmé aj miesto, kde dochádza k zmene ťahu na tlak. Okrem toho, že sa zmešila hodnota ťahového napätia, dôležitý je aj fakt, že s klesajúcim presahom medzi vložkou a objímkou je priebeh osového napätia plynulejší.



Obrázok 43 Zobrazenie priebehu tlaku pri predĺžení vložky

V obr.43 priebehu tlaku môžeme pozorovať, že vplyvom zvolenia konštantného nulového presahu medzi hriadeľom a vložkou dochádza k posunutiu začiatku a konca priebehu tlaku. Taktiež hodnoty tlaku nedosahujú také hodnoty, ako vychodzí model. Tieto zistenia majú za následok to, že táto konštrukcia nebude schopná preniesť taký veľký krútiaci moment ako vychodzí model. Na druhej strane jej pozitíva sa nachádzajú v grafe priebehu osového napätia v obr.42.

Ďalej analyzujeme dva modely so zväčšenými vložkami. Prvý je s konštantným nulovým presahom medzi hriadeľom a vložkou a dopočítavaným presahom medzi vložkou a objímkou. Druhý model má optimálny presah medzi hriadeľom a vložkou a medzi vložkou a objímkou. Cieľom tejto analýzy je zistiť, aký veľký musí byť dopočítavaný presah medzi vložkou a objímkou na prvom modely, aby sme vedeli preniesť ten istý krútiaci moment ako druhý model a následne porovnať osovú napätia oboch modelov.



Obrázok 44. Znázornenie konfigurácie modelu so zväčšenou vložkou

Okrajové podmienky tejto konfigurácie sú

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \text{ MPa} \\ p_4 &= 0 \text{ MPa} \\ \Delta r_2 &= 0 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Moment, ktorý chceme byť schopní preniesť vypočítame numerickou integráciou podľa vzorca (55) následovne

$$M_k = \int_0^l p_{2(y)} * \pi * d * f * \frac{d}{2} dy = \pi * 10 * 0,15 * 5 * \int_0^{24} p_{2(y)} = 66915,92 \text{ Nmm}$$

Z toho ideálny tlak na celej stykovej ploche (naznačená na obr.44 zelenou čiarou čiarou) medzi hriadeľom a vložkou je

$$p_{21} \text{ (celá styková plocha)} = \frac{66915,92}{\pi * 10 * 0,15 * 5} = 2840 \text{ MPa}$$

Pri pohľade na obr.45 môžeme vidieť, že tlak  $p_2$  na ose symetrie (naznačená na obr.45 prerušovanou čiernou čiarou) na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou sa rovná

$$p_2 = 135,1867 \text{ MPa}$$

Následne podľa vzorca (52) pre presah plného hriadeľa s násobným nalisovaním zisťujeme tlak  $p_3$  t.j. tlak medzi hriadeľom a vložkou, použitím tlaku  $p_2 = 135,1867 \text{ MPa}$

$$\Delta r_2 = 0 = \frac{20}{210000} * \left( -\frac{135,1867 * 10^2}{10^2 - 0} - \frac{135,1867 * 10^2 - p_3 * 12^2}{12^2 - 10^2} \right)$$

Po úprave dostávame hodnotu tlaku  $p_3$

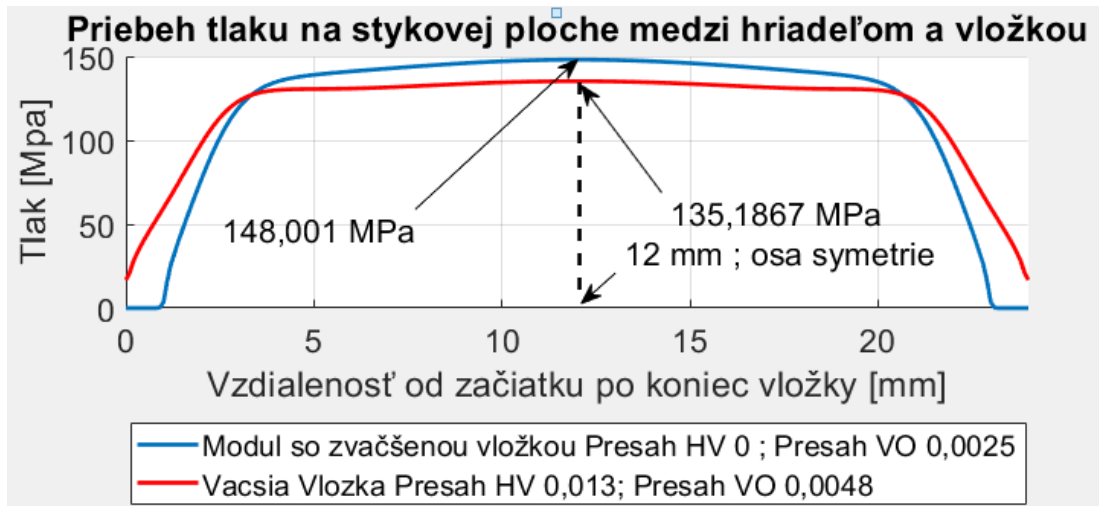
$$p_3 = 135,1867 \text{ MPa}$$

V ďalšom kroku tlaky  $p_3$  a  $p_2$  používame pri výpočte presahu  $\Delta r_3$  t.j. presahu medzi vložkou a objímkou podľa vzorca pre presah (53)

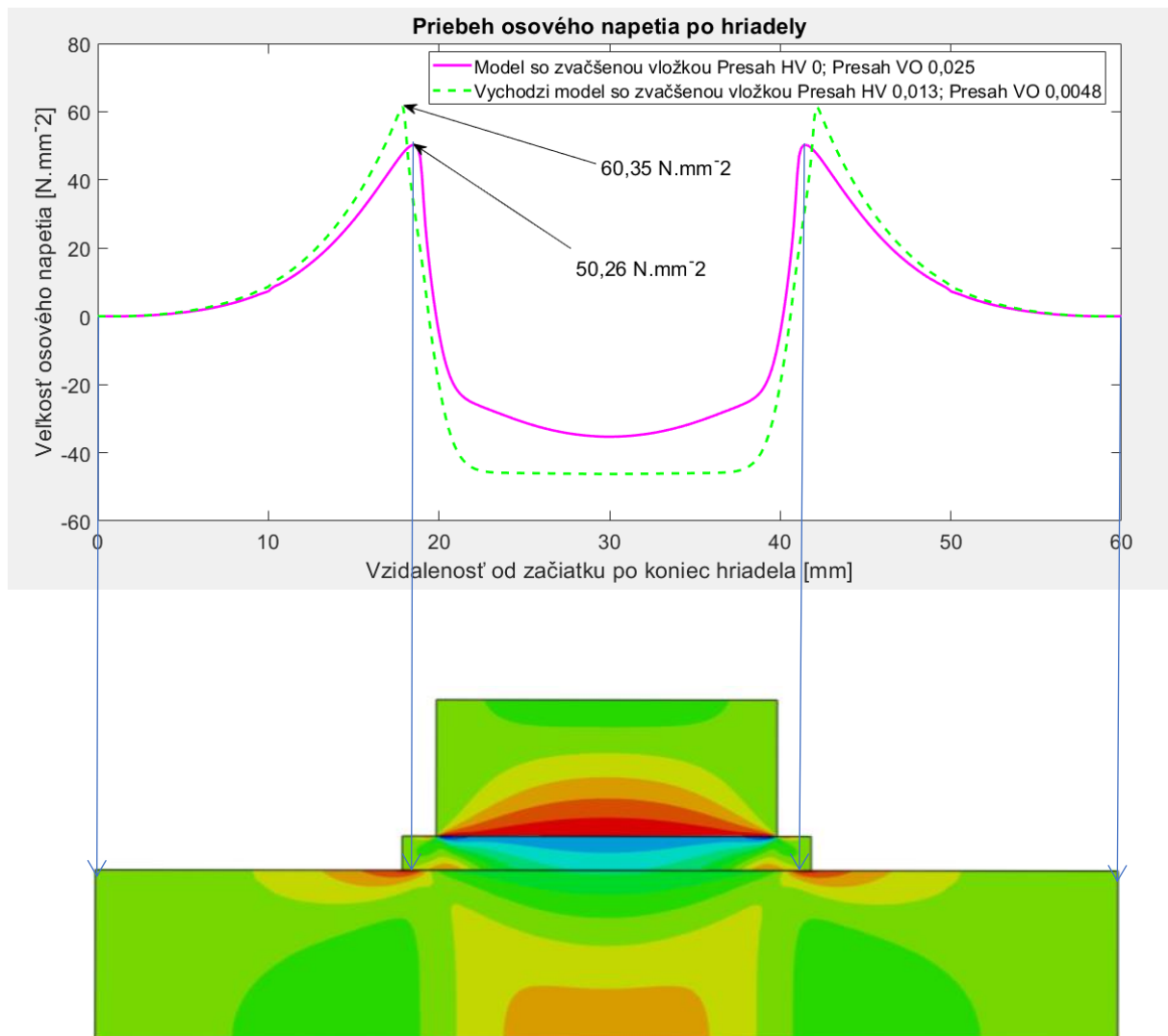
$$\Delta r_3 = \frac{2 * 12}{210000} * \left( \frac{135,1867 * 10^2 - 135,1867 * 12^2}{12^2 - 10^2} - \frac{135,1867 * 12^2}{20^2 - 12^2} \right) \cong -0,025 \text{ mm}$$

Spočítané tlaky a presahy následne analyzujeme v programe ABAQUS s cieľom zistiť tlak  $p_{22}$  na celej stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou a porovnať ho s tlakom  $p_{21}$  (na celej stykovej ploche)

$$p_{22} \text{ (na celej stykovej ploche)} = 2848,1 \text{ MPa} \cong p_{21} \text{ (na celej stykovej ploche)}$$



Obrázok 45. Zobrazenie priebehu porovnania tlakov



Obrázok 46 Grafické zobrazenie priebehu osového napätia po hriadeľi

Z porovnania priebehov osového napätia na obr. 46 vidíme, že aj nulovým presahom na prvom modeli sme schopný dosiahnúť nižších ťahových špičiek, ako s optimálnymi presahmi na druhom modeli a stále preniesť ten istý krútiaci moment. Okrem toho sa podarilo znížiť aj tlakový priebeh na stykovej ploche. Ďalšia zaujímavá vec je, že je tu stále priestor pre ešte väčšie zväčšenie presahu medzi vložkou a objímkou, vďaka rezerve medzi ťahovými špičkami osového napätia.

Taktiež pri pohľade na porovnanie priebehov tlakov po stykovej ploche je zrejmé, že tu nedochádza k tvorbe žiadnej ostrej špičky a grafy priebehov sú si veľmi podobné.

---



## Záver

---

Cieľom tejto bakalárskej práce je prevedenie analýz nalisovaného spoja, ktorý sa skladá z hriadeľa, vložky a objímky. V analýzach je kladený hlavný dôraz na možnosti ovládania parazitného osového napätia, ktoré vzniká v tejto nalisovanej konštrukcii a taktiež aj na možnosti obmedzenia tlakových špičiek, ktoré vznikajú na okrajoch nalisovania.

Na začiatku praktickej časti bolo potrebné stanoviť optimálny presah vo vzorovom príklade, ktorý slúžil ako východzí porovnávací model. Vychádzali sme zo zadaného materiálu (ocel 12 040), kde sa z poznatku medze kluzu a bezpečnosti určila  $\sigma_D$ . Následne sme zo vzorcov odvodených v teoretickej časti určili tlaky  $p_2$  a  $p_3$  a vďaka nim sme sa dopracovali ku konkrétnym hodnotám jednotlivých presahov.

K vyhodnocovaniu analýz jednotlivých modelov boli použité programy ABAQUS a MATLAB. Úpravy na modely boli rozdelené do dvoch skupín. Prvá úprava boli konštrukčné úpravy a druhá úprava boli materiály. Ako prvá zvolená konštrukčná úprava bolo predĺženie vložky. Následne sme pokračovali so skosením hran vložky a to najprv so zmenou uhla a konštantnou dĺžkou a potom s konštantným uhlom a zmenou dĺžky skosenia. Výstupy z ABAQUSU boli prevedené do grafickej podoby v MATLABE a porovnávané s východzím modelom. Z konštrukčných úprav sa ako jediná správna možnosť javilo predĺženie vložky pre jej schopnosť ovplyvniť ťahové špičky v osovom napätí a taktiež v tom, že vďaka nej vieme preniesť väčší krútiaci moment.

Materiály boli zvolené tak, aby ich Yangov modul pružnosti a Poissonovo číslo boli buď väčšie alebo menšie ako východzí materiál – oceľ. Z grafov priebehu osového napätia a tlaku je zrejmé, že pri menších hodnotách Yangovho Modulu a Poissonoveho čísla vieme zmenšiť ťahové špičky v priebehu osového napätia, ale zároveň klesá tlak na stykovej ploche medzi hriadeľom a vložkou a to sa odzrkadlí vo veľkosti krútiaceho momentu, ktorý je táto konštrukcia schopná preniesť. Presne opačný priebeh majú tieto grafy pri zvolení Yangovho modulu a Poissonovho čísla, ktoré sú väčšie ako má oceľ.

Ďalšia prevedená úprava modelu bolo vytvorenie konštantného nulového presahu medzi vložkou a hriadeľom a následné zvyšovanie presahu medzi vložkou a objímkou. Táto úprava bola vykonaná výlučne na modeloch so zväčšenou vložkou. Touto úpravou sa podarilo doceliť najlepšie ovládanie priebehu osového napätia po hriadeľi, na druhej strane veľkosť preneseného krútiaceho momentu klesala so znižovaním presahu. Pri hlbšom skúmaní tejto úpravy sa podarilo dospieť k záveru, že ťahové špičky osového napätia nedosahujú hodnoty, ako pri zavedení oboch nenulových presahov a stále sme schopní preniesť rovnaký krútiaci moment.

Nazov	Značka	Jednotka
Polomer	$R, r$	$mm$
Dížkové rozmery	$l$	$mm$
Obsah plochy	$A$	$mm^2$
Presah	$\delta, \Delta r_2$	$mm$
Síla	$F$	$N$
Moment	$M$	$N \cdot m$
Krútiaci moment	$M_k$	$N \cdot m$
Lisovacia síla	$T$	$N$
Tlak	$p$	$MPa$
Osové napetie	$\sigma_o$	$N \cdot mm^{-2}$
Tečné napetie	$\sigma_t$	$N \cdot mm^{-2}$
Radiálne napetie	$\sigma_r$	$N \cdot mm^{-2}$
Redukované napetie	$\sigma_{red}$	$N \cdot mm^{-2}$
Medza kluzu	$\sigma_k$	$N \cdot mm^{-2}$
Medza pevnosti	$\sigma_D$	$N \cdot mm^{-2}$
Miera bezpečnosti	$k$	-
Modul pružnosti v tahu	$E$	$MPa$
Poissonove číslo	$\nu$	-
Trecí koeficient	$f$	-
Pomerné predĺženie	$\varepsilon$	-

Citácie

---

[1] MICHALEC, Jiří. Pružnost a pevnost II. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1994. ISBN: 978-80-01-01087-7.

[2] ŠVEC, Vladimír. Části a mechanismy strojů: spoje a části spojovací. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2008. ISBN: 978-80-01-04138-3.

[3] Obrázok namáhania plášťa nádoby dostupný z:  
[https://www.researchgate.net/figure/Thick-walled-spherical-pressure-vessel\\_fig1\\_266872103](https://www.researchgate.net/figure/Thick-walled-spherical-pressure-vessel_fig1_266872103)