

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

MÚVS

Masarykův ústav vyšších studií
Oddělení pedagogických a psychologických studií

Učební text pro výuku odborného předmětu

Ing. Milan Němý

Vedoucí: prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc.

Obor: Specializace v pedagogice

Studijní program: Učitelství odborných předmětů

Duben 2018

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Němý Jméno: Milan Osobní číslo: 397747
Fakulta/ústav: Masarykův ústav vyšších studií (MÚVS)
Zadávací katedra/ústav: Oddělení pedagogických a psychologických studií
Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)
Studijní obor: Učitelství odborných předmětů (7507R056)

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Učební text pro výuku odborného předmětu

Název bakalářské práce anglicky:

Textbook for Technical Subject Teaching

Pokyny pro vypracování:

Cílem bakalářské práce je analýza matematických nástrojů používaných při výuce vybraných odborných předmětů na středních odborných školách elektrotechnického zaměření a na základě této analýzy vypracovat učební text v podobě krátké metodické příručky. Příručku koncipovat tak, aby byla motivačně využitelná jak učiteli, tak i studenty při názorném výkladu technicko-fyzikálních témat a jejich pochopení pomocí pokročilejšího matematického vyjádření. Těžiště příručky orientovat na dostatečný počet řešených příkladů, na které budou navazovat úlohy pro studenty. Podle časových možností provést praktické ověření některých částí příručky.

Seznam doporučené literatury:

LEPIL, Oldřich. Teorie a praxe tvorby výukových materiálů. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010.
RILEY, Kenneth Franklin at al. Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide. Camb. university, 2006.
VANĚČEK, David a kol. Didaktika technických odborných předmětů. Praha: ČVUT 2016. ISBN 978-80-01-0591-3.
Vybrané STUDIJNÍ TEXTY pro řešitele fyzikální olympiády. RVP pro obor vzdělání 26-41-M/01 Elektrotechnika.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

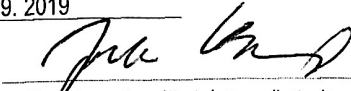
prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc., oddělení pedagogických a psychologických studií, MÚVS ČVUT


Jméno a pracoviště konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: 6. 12. 2017 Termín odevzdání bakalářské práce: 4. 5. 2018

Platnost zadání bakalářské práce: 30. 9. 2019


Podpis vedoucí(ho) práce

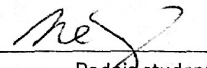

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

14. 2. 2018

Datum převzetí zadání


Podpis studenta(ky)

Poděkování

Děkuji prof. Emanuelovi Svobodovi za pomoc při vedení bakalářské práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně. Dále prohlašuji, že jsem všechny použité zdroje správně a úplně citoval a uvádím je v přiloženém seznamu použité literatury.

Nemám závažný důvod proti zpřístupnění této závěrečné práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Praze, 21. dubna 2018

Abstrakt

Tato bakalářská práce řeší problematiku mezioborových vztahů předmětu Matematika a fyzikálně-technických předmětů na středních odborných školách elektrotechnického zaměření. Cílem bylo nalezení těch matematických témat, která by se v odborných předmětech dala s výhodou uplatnit, ale v praxi tomu tak větší není.

Na základě analýzy kurikulárních dokumentů označuje práce témata diferenciálního a integrálního počtu za látku, která má tento potenciál. Z toho důvodu byl vytvořen výukový text pro střední školy zabývající se těmito matematickými metodami a jejich aplikacemi ve fyzikálně-technickém kontextu.

Klíčová slova: učební text, matematika, fyzika, elektrotechnika, rámcový vzdělávací plán, školní vzdělávací plán, diferenciální počet, integrální počet

Vedoucí: prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc.

Abstract

This bachelor's thesis deals with the issue of interdisciplinary relations of mathematics, physics and technical subjects at secondary schools of electrical engineering. The aim was to find those mathematical topics that could be applied in technical subjects, but in practice it is usually not the case.

The thesis chooses calculus as a topic that has this potential based on an analysis of curriculum documents. For this reason, a short textbook for secondary schools dealing with these mathematical methods and their applications in physical and technical context was created.

Keywords: textbook, mathematics, physics, electrical engineering, Framework Education Programme, School Education Programme, differential calculus, integral calculus

Title translation: Textbook for Technical Subject Teaching

Obsah

Úvod	1
1 Teoretická část	3
1.1 RVP	3
1.1.1 Matematické vzdělávání	5
1.1.2 Přírodovědné vzdělávání	6
1.1.3 Elektrotechnický základ	6
1.2 ŠVP a časové plány	6
1.2.1 SPŠE V Úžlabině	10
1.2.2 VOŠ a SPŠE Františka Křížíka	14
1.3 Přehled současných učebních materiálů	17
1.3.1 Učebnice a učební texty se schvalovací doložkou MŠMT	17
1.3.2 Další používané učebnice	18
1.3.3 Ostatní studijní materiály ...	19
1.4 Výběr témat pro příručku	20
2 Praktická část	23
2.1 Východisko pro tvorbu příručky	23
2.2 Tvorba příručky	24
2.2.1 Navrhovaná struktura	24
2.2.2 Grafická úprava	27
2.2.3 Tvorba úloh	31
Závěr	33
Literatura	35
Příručka	37

Obrázky

2.1 Ukázka grafu vytvořeného pomocí knihovny <i>TikZ</i> – obsah plochy ohraničené dvěma křivkami	30
2.2 Ukázka složitější ilustrace vytvořené pomocí knihovny <i>TikZ</i> – jednoduchý generátor	30
2.3 Ukázka schématu elektrického obvodu vytvořeného pomocí knihovny <i>CircuitikZ</i> – úloha maximalizace výkonu na spotřebiči	30

Tabulky

1.1 Obsah matematického vzdělávání (RVP Elektrotechnika [1])	5
1.2 Obsah fyzikálního vzdělávání (RVP Elektrotechnika [1])	7
1.3 Obsah okruhu Elektrotechnický základ (RVP Elektrotechnika [1])	8
1.4 Výtah z učebního plánu ŠVP Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině	10
1.5 ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Matematika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	11
1.6 ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Fyzika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	12
1.7 ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Základy elektrotechniky – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	13
1.8 Výtah z učebního plánu ŠVP Elektrotechnika VOŠ a SPŠE Františka Křížíka	14
1.9 ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křížíka) Matematika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	15
1.10 ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křížíka) Fyzika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	16
1.11 ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křížíka) Základy elektrotechniky – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků	17



Úvod

Ústředním tématem práce je analýza matematických nástrojů používaných při výkladu vybraných odborných předmětů na středních odborných školách. Zejména se jedná o rozbor interdisciplinárního vztahu mezi předměty matematika a elektrotechnickými předměty, a to na úrovni obvykle používaných učebních osnov a časových plánů.

Podnětem pro tuto práci je častá zkušenost s disproporcí mezi matematickými nástroji potřebnými k vyložení učební látky v odborných předmětech a časovým plánem předmětu matematika, který tyto nástroje zařazuje až mnohem později, a tak jednak vynucuje zavádění a používání triviálních pravidel místo exaktních matematických vyjádření, a pak také nezanedbatelně omezuje nadané a zvědavé studenty s hlubším zájmem o studium daného předmětu. Tím se jim znesnadňuje studovat jiné učební materiály, než ty primárně určené pro střední školy, a tak se jim například snižuje konkurenceschopnost při přijetí ke studiu technických oborů na vysokých školách u nás i v zahraničí.

Cílem tedy bude identifikace témat ve vybraných odborných předmětech, k jejichž výkladu jsou použity zjednodušené poučky a pravidla místo příslušných matematických konstruktů. Na základě toho vznikne učební text v podobě krátké příručky, která bude mít za úkol studentovi názorně vysvětlit dané téma pomocí exaktnějšího matematického vyjádření. Tedy příručka bude mít jednak za úkol vyložit daný matematický jev, a poté ho uplatnit ve vzorově řešených úlohách s fyzikálním či technickým námětem, nejlépe ve srovnání se zjednodušenými postupy. Nakonec by měly být zařazeny neřešené úlohy pouze s klíčem správných řešení.

Práce je členěna na tento úvod a na teoretickou část, který vymezuje počáteční východisko a provádí pojmovou a vztahovou analýzu učebnic pro střední odborné školy elektrotechnického zaměření. Dále následuje část praktická, ve které jsou rozebrány jednotlivé identifikované matematické konstrukty a k nim příslušející fyzikálně technická témata a rozvedeno strukturování učebního materiálu (příručky). Práci završuje diskuse a závěr, bilancující cíle a skutečně vytvořený materiál a jeho použitelnost v praxi. Jako příloha bude připojena samotná příručka, která bude volně dostupná i v on-line podobě.

Kapitola 1

Teoretická část

V současné době je běžnou praxí, že se na středních školách (SOŠ, SPŠ, ale i gymnáziích) výuka odborných a fyzikálních předmětů přizpůsobuje pomalému tempu vykládání látky v matematice. V důsledku to znamená, že se některé odborné partie vyučují pouze teoreticky bez výpočtů, nebo se vymýšlí velmi konkrétní zjednodušená pravidla. V lepším případě se učitelé k odborné látce vrací ke konci studia po probrání příslušných matematických znalostí a zrevidují výpočty pomocí nových nástrojů. Avšak jedná se pak zcela o vůli učitele (resp. školy), protože náplní jejich práce není suplování práce učitele matematiky. Na vině je často matematická nepřipravenost a různá úroveň znalostí žáků přicházejících z různých základních škol, dále dlouhotrvající trend snižování nároků na znalost matematiky, a v neposlední řadě i ne zcela vždy synchronizované časové plány souvisejících předmětů.

Z těchto důvodů tato práce analyzuje Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělávání 26-41-M/01 Elektrotechnika, školní vzdělávací programy a časové plány vybraných středních průmyslových škol a nejčastěji používané učebnice matematiky a odborných elektrotechnických předmětů vyučovaných na tomto typu škol. Na základě tohoto rozboru budou stanoveny matematické okruhy, jejichž probrání by mělo být zařazeno v časovém plánu dříve, aby znalost této látky mohla podpořit výuku odborných předmětů. Tento výběr bude východiskem pro vznik příručky, která si dává za cíl podpořit nadané a zvědavé žáky a zároveň rozšířit portfolio učebních materiálů, které by učitelům dávalo alespoň základní možnost, jak vyhovět poptávce žáků po vědění a dát jim možnost rozvíjet své nadání.

1.1 RVP

Pro vytvoření širšího obrazu při analýze učiva se v první řadě zaměříme na rozbor Rámcového vzdělávacího programu (RVP). Jak již bylo nastíněno v úvodu, tato práce se zabývá především středními školami elektrotechnického zaměření, a tak bude rozebrán RVP pro obor vzdělávání 26-41-M/01 Elektrotechnika [1], který je volně přístupný z internetových stránek Národního ústavu odborného vzdělávání.

Národní program vzdělávání v České republice a zákon č. 561/2004 Sb. o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání

(*školský zákon*, novelizován v roce 2015 pod č. 82/2015) zavádějí systém, v rámci něhož jsou dokumenty definující obsah vzdělávání rozděleny do dvou úrovní:

- **státní** – Národní program vzdělávání (tzv. Bílá kniha¹) a rámcové vzdělávací programy (RVP)
- **školní** – školní vzdělávací programy (ŠVP); dokument, na základě kterého škola realizuje vzdělávání v daném oboru vzdělání

Rámcové vzdělávací plány jsou tedy státem vydané pedagogické (kurikulární) dokumenty, které vymezují závazné požadavky na vzdělávání v jednotlivých stupních a oborech vzdělání, tzn. zejména výsledky vzdělávání, kterých má žák v závěru studia dosáhnout, obsah vzdělávání, základní podmínky realizace vzdělávání a pravidla pro tvorbu školních vzdělávacích programů. Jsou závazným dokumentem pro všechny školy poskytující střední odborné vzdělávání, které jsou povinny jej respektovat a rozpracovat do svých školních vzdělávacích programů [1].

RVP jsou členěny do 12 kapitol věnujících se mimo jiné cílům, kompetencím, organizaci vzdělávání, obsahovým rámcům pro jednotlivé oblasti vzdělávání či rámcovému rozvržení obsahu vzdělávání.

Nejtěsněji se k obsahu učiva váže kapitola 6: *Kurikulární rámce pro jednotlivé oblasti vzdělávání* pojednávající o závazném obsahu všeobecného a odborného vzdělávání a uvádí jeho požadované výsledky. Obsah tohoto vzdělávání člení na vzdělávací oblasti a obsahové okruhy. Přehled vzdělávacích oblastí:

- Jazykové vzdělávání a komunikace
- Společenskovědní vzdělávání
- Přírodovědné vzdělávání
- Matematické vzdělávání
- Estetické vzdělávání
- Vzdělávání pro zdraví
- Vzdělávání v informačních a komunikačních technologiích
- Ekonomické vzdělávání
- Odborné vzdělávání

Navazující kapitola 7: *Rámcové rozvržení obsahu vzdělávání* přináší konkrétní východisko pro tvorbu učebních plánů v ŠVP. V této kapitole se uvádí

¹Od května 2014 Bílá kniha pozbyla platnosti, protože česká vláda schválila nový dokument Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2020.

stanovené vzdělávací oblasti a obsahové okruhy a minimální počty vyučovacích hodin.

Pro potřeby analýzy vztahu předmětu matematika a fyzikálně odborných předmětů jsou relevantní vzdělávací oblasti: přírodovědné vzdělávání, matematické vzdělávání a vzdělávací okruh elektrotechnický základ, které na základě již zmíněného RVP pro obor vzdělávání Elektrotechnika [1] podrobněji rozebereme v následujících odstavcích.

1.1.1 Matematické vzdělávání

Funkce této vzdělávací oblasti je dvojitá: jednak všeobecně vzdělávací, jednak průpravná pro odbornou složku vzdělávání. Tedy úkolem je nejenom žáka naučit logicky přemýšlet, ale i připravit půdu pro ostatní předměty, které již staví na pevně vybudovaném matematickém základě a přidávají odbornou složku.

Tabulka 1.1 shrnuje Programem vyžadované učivo a výsledky vzdělávání.

Obsahový okruh	Učivo
1 Operace s čísly a výrazy	aritmetické operace v \mathbb{R} , absolutní hodnota, intervaly, procenta, mocniny
2 Funkce a její průběh, řešení rovnic a nerovnic	základní pojmy, definiční obor, obor hodnot, graf funkce, lineární, racionální, kvadratická, exponenciální, logaritmická, goniometrická funkce, rovnice a nerovnice, trigonometrie
3 Planimetrie	polohové a metrické úlohy, shodnost a podobnost trojúhelníků, Euklidovy věty
4 Stereometrie	základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru: přímky, roviny, jejich odchylky, vzdálenosti, povrch a objem základních těles
5 Analytická geometrie v rovině	vektory: součet vektorů, násobení vektorů reálným číslem, skalární součin vektorů, přímka a její analytické vyjádření
6 Posloupnosti a jejich využití	aritmetická a geometrická posloupnost, finanční matematika
7 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika v praktických úlohách	variace, permutace a kombinace bez opakování, náhodný jev a jeho pravděpodobnost, základy statistiky

Tabulka 1.1: Obsah matematického vzdělávání (RVP Elektrotechnika [1])

RVP dodává, že toto učivo lze rozšířit vzhledem k potřebám odborného vzdělávání zejména o:

- operace s komplexními čísly a řešení kvadratických rovnic v množině \mathbb{C}
- řešení aplikačních úloh s využitím funkcí, posloupností a trigonometrie
- analytickou geometrii kuželoseček

Dále je požadováno, aby minimální počet vyučovacích hodin za celou dobu vzdělávání byl 384 neboli 12 týdenních vyučovacích hodin, tj. součet počtu vyučovacích hodin za jeden týden přes všechny ročníky.

Lze si všimnout, že tento obsah vzdělávání nezahrnuje ani diferenciální a integrální počet, ani složitější vektorové operace (vektorový součin, převod na exponenciální tvar). Tyto matematické dovednosti přitom tvoří důležitý základ pro hlubší pochopení odborné látky (fyzika, elektrotechnika) a představují nezbytný nebo minimálně žádoucí balíček znalostí při vstupu na vysoké školy technického zaměření.

1.1.2 Přírodovědné vzdělávání

Přírodovědné vzdělávání zahrnuje fyzikální, chemické a biologicko-ekologické vzdělávání. Fyzikální a chemické vzdělávání je realizováno ve 3, resp. ve 2, variantách náročnosti podle nároků na konkrétním typu školy.

Tabulka 1.2 shrnuje všechny tři varianty fyzikálního vzdělávání (A představuje nejnáročnější variantu, B středně náročnou, C je varianta s nejnižšími nároky). Z této oblasti se budeme zabývat pouze fyzikou, protože představuje všeobecný předstupeň předmětů elektrotechnického zaměření.

RVP požaduje, aby minimální počet vyučovacích hodin v přírodovědném vzdělávání za celou dobu vzdělávání byl 192 neboli 6 týdenních vyučovacích hodin. Fyzikální složce vzdělávání se věnují z RVP stanoveného minimálního počtu týdenních vyučovacích hodin 3 týdenní hodiny.

Ve variantě A (ale i menším dílem v ostatních dvou variantách) lze vyhledat celou řadu témat, která vyžadují použití „netriviálních“ matematických nástrojů, nebo by jejich použitím prohloubila jejich pochopení.

1.1.3 Elektrotechnický základ

Obsahový okruh Elektrotechnický základ navazuje na znalosti z fyziky, které prohlubuje především v oblasti elektrostatiky, stejnosměrného proudu, elektromagnetismu a střídavého proudu. Žák bude schopen uchopit jevy a principy v oblasti elektrotechniky pomocí matematických vztahů a početně řešit elektrotechnické problémy [1].

Tabulka 1.3 shrnuje učivo vyžadované Programem. Jak je detailněji popsáno v sekci 1.4, nalézáme zde opět velké množství témat, na které se s výhodou dají aplikovat pokročilejší matematické metody.

Minimální požadovaný počet vyučovacích hodin za celou dobu studia je 192 neboli 6 týdenních vyučovacích hodin.

1.2 ŠVP a časové plány

Jak již bylo řečeno výše, od roku 2007 (přesněji schválením zákona č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání) postupně vznikala dvoustupňová tvorba vzdělávacích programů: Na státní

varianta A	varianta B	varianta C
<p>1 Mechanika pohyby přímočaré a po kružnici Newtonovy pohybové zákony mechanická práce a energie gravitační pole Newtonův gravitační zákon pohyby v gravitačním poli mechanika tuhého tělesa mechanika tekutin</p> <p>2 Molekulová fyzika a termika základní poznatky teplo a práce částicová stavba látek stavové změny ideálního plynu práce plynu struktura pevných látek přeměny skupenství látek</p> <p>3 Mechanické kmitání a vlnění mechanické kmitání druhy mechanického vlnění odraz vlnění</p> <p>4 Elektřina a magnetismus elektrický náboj tělesa elektrický proud v kovech elektrické obvody elektrický proud v polovodičích kapalinách a v plynech magnetické pole vznik střídavého proudu obvody střídavého proudu elektromagnetické kmitání elektromagnetické vlnění</p> <p>5 Optika světlo a jeho šíření vlnové vlastnosti světla zobrazování zrcadlem a čočkou</p> <p>6 Speciální teorie relativity principy speciální teorie relativity základy relativistické dynamiky</p> <p>7 Fyzika mikrosvěta základní pojmy kvantové fyziky model atomu radioaktivita zdroje jaderné energie</p> <p>8 Astrofyzika Slunce a hvězdy galaxie a vývoj vesmíru výzkum vesmíru</p>	<p>1 Mechanika pohyby přímočaré a po kružnici Newtonovy pohybové zákony mechanická práce a energie mechanika tuhého tělesa tlakové síly a tlak v tekutinách proudění tekutin</p> <p>2 Molekulová fyzika a termika základní poznatky teplo a práce tepelné děje v ideálním plynu první termodynamický zákon práce plynu struktura pevných látek a kapalin přeměny skupenství látek</p> <p>3 Elektřina a magnetismus elektrický náboj tělesa elektrický proud v látkách elektrické obvody vodivost polovodičů, přechod PN magnetické pole elektromagnetická indukce vznik střídavého proudu</p> <p>4 Vlnění a optika mechanické kmitání a vlnění zvukové vlnění světlo a jeho šíření zobrazování zrcadlem a čočkou</p> <p>5 Fyzika atomu model atomu radioaktivita jaderná energie a její využití</p> <p>6 Vesmír sluneční soustava hvězdy a galaxie</p>	<p>1 Mechanika pohyby přímočaré a po kružnici Newtonovy pohybové zákony mechanická práce a energie posuvný a otáčivý pohyb tlakové síly tlak v tekutinách</p> <p>2 Termika teplota teplotní roztažnost látek teplo a práce struktura pevných látek a kapalin přeměny skupenství</p> <p>3 Elektřina a magnetismus elektrický náboj tělesa elektrický proud v látkách polovodiče magnetické pole elektromagnetická indukce vznik střídavého proudu</p> <p>4 Vlnění a optika mechanické kmitání a vlnění zvukové vlnění světlo a jeho šíření zrcadla a čočky, oko</p> <p>5 Fyzika atomu radioaktivita jaderné záření jaderná energie a její využití</p> <p>6 Vesmír Slunce, planety a jejich pohyb hvězdy a galaxie</p>

Tabulka 1.2: Obsah fyzikálního vzdělávání (RVP Elektrotechnika [1])

Obsahový okruh	Učivo
1 Základní pojmy z elektrotechniky	stavba hmoty, elektrická vodivost látek, elektrický náboj, elektrické pole
2 Elektrostatické pole	kondenzátory, silové působení elektrostatických polí, energie elektrostatického pole, piezoelektrický jev
3 Stejnoseměrný proud	základní veličiny a pojmy, Ohmův zákon, zdroje elektrické energie, Kirchhoffovy zákony, stejnosměrné obvody
4 Základy elektrochemie	elektrolýza, Faradayovy zákony, chemické zdroje elektrického proudu
5 Magnetické pole	magnetická indukce, magnetické vlastnosti látek, magnetické obvody, energie magnetického pole
6 Elektromagnetická indukce	indukční zákon, Lencovo pravidlo, pravidlo pravé ruky, vlastní a vzájemná induktance cívek, vířivé proudy
7 Střídavé proudy	časový průběh střídavých veličin, efektivní a střední hodnota střídavých veličin, jednoduché střídavé obvody s jednotlivými prvky R, L, C, složené obvody, sériové a paralelní řazení prvků R, L, C, výkon střídavého proudu, rezonance sériová a paralelní, vyjádření fázoru komplexním číslem, komplexní výraz impedance a admitance
8 Trojfázová soustava	druhy zapojení trojfázové soustavy, základní druhy zapojení zatížení, práce a výkon trojfázové soustavy

Tabulka 1.3: Obsah okruhu Elektrotechnický základ (RVP Elektrotechnika [1])

úrovni vydává MŠMT rámcové vzdělávací programy, na lokální úrovni se podle nich vytvářejí školní vzdělávací programy (ŠVP) [2]. ŠVP tedy zpracovává sama škola, resp. je výsledkem spolupráce učitelů jednotlivých vyučovacích předmětů.

Rámcový učební plán rámcového vzdělávacího programu stanovuje pouze základní parametry organizace vzdělávání – minimální časové dotace pro jednotlivé vzdělávací oblasti. Dává tak široký prostor pro tvorbu učebních plánů školních vzdělávacích programů. Každá škola tak má možnost poměrně dobře parametrizovat počet vyučovacích předmětů, jejich obsahovou skladbu, časovou dotaci, dokonce i realizaci obsahu. Lze tak uskutečňovat i individuální vzdělávací záměry školy pomocí různorodého využití disponibilní časové dotace a propojování vzdělávacího obsahu.

Podle RVP [1] obsahuje ŠVP tyto části:

1. úvodní identifikační údaje
2. profil absolventa

3. charakteristiku vzdělávacího programu
4. učební plán
5. přehled rozpracování obsahu vzdělávání v RVP do ŠVP
6. učební osnovy nebo vzdělávací moduly
7. popis materiálního a personálního zajištění výuky v daném ŠVP a oboru vzdělání
8. charakteristiku spolupráce se sociálními partnery při realizaci daného ŠVP

V ŠVP je obsah vzdělávacích oblastí rozpracován v podobě učebního plánu a učebních osnov vyučovacích předmětů.

Učební plán vychází z kurikulárních rámců a z rámcového rozvržení obsahu vzdělávání uvedeného v RVP (kapitola 6 a 7). Na jejich základě se stanovují vyučovací předměty a jejich časová dotace. Učební plán se skládá především z tabulky s přehledem vyučovacích předmětů. Ta obsahuje výčet všech vyučovacích předmětů, jejich hodinovou dotaci a rozvržení do ročníků, celkové počty vyučovacích hodin za všechny ročníky, celkový počet hodin týdně v jednotlivých ročnících [2].

Učební osnova je pedagogický dokument, který vymezuje didaktickou koncepci jednotlivých vyučovacích předmětů a kurzů. Koncepce vyučovacích předmětů vychází z profilu absolventa ve ŠVP a z kurikulárních rámců v RVP [2]. Učební osnova každého předmětu má tyto části:

- **záhlaví** – název předmětu a jeho časová dotace (celková a týdenní)
- **pojetí vyučovacích předmětů** – tato část vysvětluje zvolenou didaktickou koncepci vyučovacích předmětů, jeho cíle, charakteristiku učiva, hodnocení žáků, aj.
- **rozpis učiva a výsledků vzdělávání** – obsahuje nejen učivo, ale i plánované výstupy – výsledky vzdělávání. Tento rozpis je většinou formulován pomocí přehledné tabulky obsahující rozepsané učivo jednotlivých tematických celků, předpokládané výsledky vzdělávání a často orientační počet vyučovacích hodin.

Abychom si vytvořili představu, jak školní vzdělávací plány konkrétních škol mohou vypadat a provedli analýzu, jak se v nich transformuje skutečná podoba matematického a fyzikálního vzdělávání a elektrotechnického základu, vybrali jsme dva zástupce středních průmyslových škol nabízejících obor vzdělávání 26-41-M/01 Elektrotechnika, kteří zveřejnili ŠVP na svých internetových stránkách. Jedná se o SPŠE V Úžlabině, Praha 10-Malešice² a VOŠ a SPŠE Františka Křížíka, Praha 1³.

²<https://www.uzlabina.cz/>

³<http://www.vosaspsekrizik.cz>

Je potřeba poznamenat, že zatím není stále běžné, že by všechny školy zveřejňovaly své ŠVP na internetových stránkách. Valná většina škol uvádí, že ŠVP je k nahlédnutí u ředitele školy, v lepším případě uvádí aspoň učební plán v podobně tabulky.

1.2.1 SPŠE V Úžlabině

SPŠE V Úžlabině nabízí čtyřletý vzdělávací program *Aplikovaná elektronika* (obor vzdělávání 26-41-M/01 Elektrotechnika). Přehledně zpracovaný ŠVP lze nalézt na internetových stránkách školy [3].

Námi sledované vzdělávací oblasti a obsahové okruhy ve školním vzdělávacím programu [3] jsou upraveny následovně:

- *Matematické vzdělávání* je realizováno v předmětu Matematika. Hodinová dotace výuky matematiky je vyšší, než je běžné v učebních plánech studijních oborů na průmyslových školách. K posílení hodinové dotace byly využity disponibilní hodiny.
- *Přírodovědné vzdělání* je rozděleno do předmětů Fyzika a Základy přírodních věd.
- *Elektrotechnický základ* je vyučován v předmětech Základy elektrotechniky a Základy silnoproudu.

Učební plán dále uvádí konkrétní rozpis časových dotací jednotlivých předmětů přes jednotlivé ročníky. Tabulka 1.4 ukazuje jeho část pro relevantní předměty. Doplnili jsme poslední sloupec s minimální počtem vyučovacích týdenních hodin, jak je uvedeno v příslušném RVP. Všimneme si, že hodinové dotace jednotlivých předmětů jsou štedřejší, než je požadováno v RVP.

předmět	1. roč.	2. roč.	3. roč.	4. roč.	celkem	požadováno v RVP
Matematika	5	4	3	3	15	12
Fyzika	2	3	-	-	5	3
Základy elektrotechniky	3	4	-	-	7	6
Základy silnoproudu	-	-	-	2	2	

Tabulka 1.4: Výtah z učebního plánu ŠVP Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině

Matematika

Autoři v úvodu poukazují na nutnou multidisciplinaritu předmětu: „Kromě základních operací s čísly a výrazy je těžiště výuky v práci s funkcemi, jejich průběhem a řešení rovnic a nerovnic tak, aby byl žák schopen kvalitně pochopit výuku v odborných předmětech v oblasti vzorců, vztahů i grafů závislostí veličin.“ [3]

Následuje rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků (viz tabulka 1.5). Všimneme si především zařazení látky zabývající se komplexními čísly a vektorovou algebrou již v 2. ročníku a diferenciálním a integrálním počtem ve 3. ročníku. V posledním ročníku je netradičně zařazeno komplexní pojetí učiva.

	Opakování a prohloubení učiva ZŠ Mocniny a odmocniny Algebraické výrazy Goniometrie ostrého úhlu a řešení pravoúhlého trojúhelníku Základní poznatky o výrocích a množinách
1. roč.	Funkce a její graf Lineární funkce, rovnice a nerovnice a jejich soustavy Matice Kvadratická funkce, rovnice a nerovnice Základy planimetrie Obvody a obsahy rovinných obrazců
2. roč.	Goniometrie obecného úhlu Komplexní čísla Funkce mocninné, exponenciální a logaritmické, rovnice, nerovnice Stereometrie Vektorová algebra a analytická geometrie lineárních útvarů v rovině Analytická geometrie v prostoru
3. roč.	Analytická geometrie v prostoru - metrika Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině Diferenciální a integrální počet Posloupnosti, řady a finanční matematika
4. roč.	Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika Systemizace poznatků a opakování a prohlubování učiva střední školy, komplexní pojetí učiva

Tabulka 1.5: ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Matematika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

Dále se uvádí, že je vyučováno podle dále nespecifikované „sady učebnic pro SOŠ“ a procvičováno podle „Sbírky úloh pro SOŠ 1 a 2, autor F. Jirásek a kol“. Zřejmě se jedná o tituly [4] a [5].

Fyzika

V oddílu *Charakteristika obsahu učiva* se uvádí, že obsah tematického celku Elektřina a magnetismus je probírán v předmětech Základy elektrotechniky a Hardware a sítě cvičení. Ostatní témata jsou společně s přiřazením ročníku, ve kterém jsou probírána, uvedena v tabulce 1.6.

Následuje poměrně detailní odstavec zabývající se pojetím výuky. Uvádí se v něm, že „v dalších ročnících je fyzikální učivo řazeno tak, aby potřebné

matematické znalosti byly již probrány“. Nicméně vzhledem k tomu, že jak předmět Fyzika, tak i Základy elektrotechniky se vyučují pouze v prvních dvou ročnících, žáci zužitkují znalosti z matematiky pouze z těchto dvou ročníků, jmenovitě především goniometrii, komplexní čísla, vektorovou algebru a analytickou geometrii. Naopak diferenciální a integrální počet se do fyzikálního a elektrotechnického kontextu nepromítne.

	Úvod
1. roč.	Mechanika + Astrofyzika Molekulová fyzika a termika
	Molekulová fyzika a termika Mechanické kmitání a vlnění
2. roč.	Optika Speciální teorie relativity Fyzika mikrosvěta

Tabulka 1.6: ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Fyzika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

■ Základy elektrotechniky

Předmět Základy elektrotechniky je stěžejním předmětem studijního oboru Elektrotechnika. Navazuje na poznatky z fyziky získané v základním vzdělávání a rozvíjí je v oblasti elektřiny [3].

Vzhledem ke kontextu této práce si všimneme, že jeden ze zmíněných cílů vzdělávání je, aby žák dovedl řešit jednoduché elektrotechnické problémy v oblasti elektrostatického a magnetického pole, elektromagnetické indukce, stejnosměrného a střídavého proudu na základě pochopení elektrotechnických jevů, principů a správně používal k řešení těchto elektrotechnických problémů veličiny popisující elektrické a magnetické pole a potřebný matematický aparát.

V tomto ohledu je zřetelné, že se autoři ŠVP dobře zamysleli nad tím, jaké matematické nástroje budou žáci využívat při elektrotechnických výpočtech a prozřetelně zařadili kapitoly o komplexních číslech a vektorové algebře již do druhého ročníku předmětu Matematika. Jejich znalost totiž tvoří nezbytný předpoklad pro výpočty se střídavým proudem apod. Pokud by však žáci usilovali o trochu hlubší proniknutí do tématu elektrostatického nebo magnetického pole, které se vyučuje již v 1. ročníku, např. za účelem účasti v oborové olympiádě či jiné soutěži, budou si muset potřebný matematický aparát nastudovat sami.

Tabulka 1.7 pro úplnost uvádí konkrétní rozvržení jednotlivých témat do ročníků.

1. roč.	Stejnoseměrný proud
	Elektrostatické pole
	Slaboproudé zdroje elektrické energie
	Magnetické pole
2. roč.	Magnetické pole
	Elektromagnetická indukce
	Střídavý proud
	Akustika
	Zobrazovací prvky a elektronky

Tabulka 1.7: ŠVP (Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině) Základy elektrotechniky – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

■ Základy silnoproudu

Předmět *Základy silnoproudu* naplňuje spolu s předmětem *Základy elektrotechniky* kurikulum okruhu *Elektrotechnický základ*.

Navazuje na předměty *Základy elektrotechniky*, *Elektronika* a praktická cvičení a rozšiřuje dříve získané znalosti z elektrotechniky, především formou seznámení se s praktickými aplikacemi zákonů elektromagnetického pole v elektrotechnických silnoproudých zařízeních, sloužících dnes prakticky ve všech oborech lidské činnosti [3].

ŠVP [3] velmi výstižně charakterizuje obsah učiva: výuka navazuje na poznatky a dovednosti z fyziky a dovednosti získané studiem základů elektrotechniky a elektroniky. Přitom efektivním způsobem využívá a aplikuje v praxi znalosti získané v matematice. Výuka směřuje k tomu, aby žák

- prohloubil znalosti v oblasti třífázových obvodů střídavého proudu
- prohloubil znalosti v oblasti magnetických obvodů
- uměl se orientovat v oblasti silnoproudé elektroniky a elektrických pohonů
- rozuměl principům činnosti elektrických a magnetických obvodů točivých strojů
- dovedl aplikovat znalosti zákonů elektromagnetického pole
- pochopil energetická náhradní schémata elektrických strojů a dovedl je aplikovat
- pochopil význam a činnost energetických zařízení pro chod národního hospodářství
- znal podstatu a význam ochrany a bezpečnosti práce na elektrických zařízeních

Předmět je tedy orientován převážně prakticky. Pokud však při výkladu (odvozeních, vzorových příkladech) je potřeba využít matematického aparátu, lze se jistě opřít o fakt, že předmět je vyučován až ve 4. ročníku, a tak žáci mají již potřebné nástroje vžitě.

1.2.2 VOŠ a SPŠE Františka Křížíka

VOŠ a SPŠE Františka Křížíka nabízí celkem 3 vzdělávací programy z toho dva uskutečňují obor vzdělávání 26-41-M/01 Elektrotechnika. Jedná se o programy *Elektronické počítačové systémy* a *Elektrotechnika*. Protože jsou si v mnoha ohledech velmi podobné a vyučovací předměty Matematika, Fyzika a Základy elektrotechniky jsou v obou programech naprosto totožné, budeme se v následujících odstavcích věnovat rozboru ŠVP *Elektrotechnika* [6] s tím, že uvedené informace jsou platné i pro druhý program.

Tento ŠVP transformuje sledované vzdělávací oblasti a obsahové okruhy RVP podle následujícího klíče:

- *Matematické vzdělávání* je realizováno v předmětu Matematika.
- *Přírodovědné vzdělávání* je rozděleno do dvou předmětů: Fyzika a Chemie a ekologie.
- *Elektrotechnický základ* je vyučováno v předmětu Základy elektrotechniky.

Tabulka 1.8 popisuje část učebního plánu věnovanou námi sledovaným vzdělávacím oblastem a obsahovým okruhům. Poslední sloupec uvádí pro úplnost požadavek RVP. Opět si všimneme, že časové dotace na jednotlivé předměty jsou lehce nadstandardní.

předmět	1. roč.	2. roč	3. roč.	4. roč.	celkem	požadováno v RVP
Matematika	5	3	3	3	14	12
Fyzika	2	2	-	-	4	3
Základy elektrotechniky	4	3	-	-	7	6

Tabulka 1.8: Výtah z učebního plánu ŠVP Elektrotechnika VOŠ a SPŠE Františka Křížíka

Matematika

Podle RVP [6] mezi obecné cíle předmětu patří „zprostředkovat žákům matematické poznatky, orientovat se v matematickém textu a porozumět zadání matematické úlohy, umět vyhodnotit informace získané z různých zdrojů reálných situací – grafů, diagramů a tabulek, správně se matematicky vyjadřovat, podílet se na rozvoji logického myšlení, zkoumat a řešit problémy, aplikovat matematické poznatky a postupy v odborných předmětech.“

Tabulka 1.9 uvádí zkrácenou verzi rozpisu učiva. Až na malé nuance je velmi podobný rozdělení tematických celků ve výše uvedeném rozpisu předmětu Matematika na SPŠE V Úžlabině. Oba taktéž obsahují závěrečný celek shrnující a prohlubující učivo. V tomto případě jeho výsledkem je, že žák:

- používá matematické metody v přírodovědných a technických předmětech,

- logicky analyzuje, řeší a diskutuje reálné situace,
- je schopen využít získaných dovedností a znalostí v praxi.

Tato snaha o využití posledních hodin v závěrečném ročníku k propojení matematiky a látky odborných předmětů je vskutku chvályhodná. Převážná část matematických nástrojů se stačí probrat ještě před většinou kapitol z fyzikálně-odborných předmětů, kde by byly zapotřebí, nicméně látka 3. a 4. ročníku se již nepromítne do předmětů Fyzika ani Základy elektrotechniky, neboť ty se vyučují pouze v prvních dvou letech studia. Z toho vyplývá, že pokud má dojít k propojení k této látce, je tak potřeba učinit v předmětu Matematika.

Toto řešení má však dva nedostatky. Za prvé nevyhoví nadaným a zvědavým žákům se zájmem o hlubší studium matematiky, fyziky a odborných předmětů a jejich přípravě na oborové olympiády. Za druhé sebekvalitnější prohlubování látky v předmětu Matematika nemůže nikdy nahradit výuku látky odborného předmětu vyučovanou v určitém systému učiva.

	Základní poznatky z matematiky Základní poznatky o výrocích a množinách Mocniny a odmocniny Algebraické výrazy
1. roč.	Funkce Lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy Kvadratické rovnice a nerovnice Soustavy rovnic Planimetrie
	Další elementární funkce Goniometrie a trigonometrie
2. roč.	Komplexní čísla Vektorová algebra, analytická geometrie Analytická geometrie kvadratických útvarů
	Stereometrie
3. roč.	Základy diferenciálního počtu Základy integrálního počtu Kombinatorika
	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika
4. roč.	Posloupnosti, řady a finanční matematika Shrnutí a prohloubení učiva

Tabulka 1.9: ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křižíka) Matematika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

Fyzika

Učivo se skládá z těchto hlavních částí: mechanika, molekulová fyzika a termika, mechanické kmitání a vlnění, optika, speciální teorie relativity, fyzika mikrosvěta, astrofyzika. Tematický okruh elektřina a magnetismus se vyučuje v předmětu základy elektrotechniky [6].

Učební osnova tohoto předmětu se nezmiňuje o návaznosti na předmět Matematika.

Tabulka 1.10 předkládá zkrácenou verzi rozpisu učiva. Čísla v závorkách uvádějí počet vyučovacích hodin vyhrazených pro výklad jednotlivých tematických celků.

1. roč.	Mechanika (45)
	Molekulová fyzika a termika, 1. část (21)
2. roč.	Molekulová fyzika a termika, 2. část (14)
	Mechanické kmitání a vlnění (19)
	Optika (17)
	Speciální teorie relativity (3)
	Fyzika mikrosvěta (11)
	Astrofyzika (2)

Tabulka 1.10: ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křižíka) Fyzika – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

Základy elektrotechniky

Obecné cíle předmětu říkají, že: „Základy elektrotechniky jsou základním průpravným předmětem elektrotechnického vzdělání. Navazuje úzce na základní poznatky z fyziky, které dále prohlubuje.“

Pro naše potřeby je velmi důležitá část učebních osnov věnující se charakteristice obsahu učiva: „Učivo představuje soubor základních poznatků z elektřiny a magnetismu týkajících se elektrostatického pole, elektrického proudového pole a magnetického pole. Tyto poznatky jsou využívány k řešení stejnosměrných a střídavých jednofázových a třífázových obvodů. Využívá se přitom odpovídajícího matematického aparátu – goniometrických funkcí, komplexních čísel apod. Užívané matematické poznatky nedovolují podrobněji zkoumat nehomogenní pole či přechodné děje.“ [6]

Zmíněný matematický aparát se v největší míře uplatňuje při řešení obvodů střídavého napětí a proudu. Jak se můžeme přesvědčit v tabulce 1.11 rozpisu učiva, toto téma se probírá ve 2. ročníku stejně jako dotyčné matematické postupy.

S užitečnou vektorovou algebrou se žáci seznámí ve 2. polovině 2. ročníku, tudíž potenciálně mohou její znalost s výhodou využít v tomto předmětu. Diferenciální a integrální počet již nikoli.

	Základní pojmy elektrotechniky Elektrostatické pole
1. roč.	Stejnoseměrný proud Základy elektrochemie Magnetické pole
	Elektromagnetická indukce
2. roč.	Střídavé proudy Trojfázová soustava

Tabulka 1.11: ŠVP (Elektrotechnika VOŠ a SPŠE F. Křižíka) Základy elektrotechniky – rozdělení tematických celků do jednotlivých ročníků

1.3 Přehled současných učebních materiálů

K vytvoření ucelenějšího obrazu o stavu provázanosti výuky předmětů Matematika, Fyzika a Základy elektrotechniky, je také užitečné zmapovat situaci na trhu učebnic. Zaměříme se především na následující učební materiály:

- učebnice a učební texty se schvalovací doložkou MŠMT podle § 27 školského zákona [7] (platnou v době tisku této práce)
- požadované nebo doporučené učebnice a učební texty uvedené na webových stránkách vybraných středních průmyslových škol elektrotechnických
- jiné vybrané učební materiály

1.3.1 Učebnice a učební texty se schvalovací doložkou MŠMT

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky uděluje a odnímá učebnicím a učebním textům pro základní a střední vzdělávání schvalovací doložku na základě posouzení, zda jsou v souladu s cíli vzdělávání stanovenými školským zákonem, rámcovými vzdělávacími programy a právními předpisy. Seznam učebnic a učebních textů, kterým byla udělena schvalovací doložka, zveřejňuje ministerstvo ve Věstníku Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a na internetové stránce ministerstva⁴. [7]

Učebnici s udělenou schvalovací doložkou poznáme tak, že na rubové straně titulního listu nacházíme doslovné znění platné schvalovací doložky:

„Schválilo MŠMT čj. ... dne ... k zařazení do seznamu učebnic pro přípravnou třídu základní školy / pro třídy přípravných stupňů základních škol speciálních / základní vzdělávání / střední vzdělávání pro vzdělávací obor / obsahový okruh / průřezové téma / předmět ... s dobou platnosti ... let.“

Následující výčet shrnuje učebnice výše zmíněných předmětů uvedených v tomto seznamu (v době, kdy vznikl tento text) pro uvažovaný typ škol. Ze

⁴www.msmt.cz

■ Základy elektrotechniky

- *Elektrotechnika* (2 díly), Blahovec, A., Informatorium.
- *Základy elektrotechniky*, Vlček, J., BEN – technická literatura.
- *Elektrotechnická praxe v příkladech*, Meluzín, H., SNTL – Státní nakladatelství technické literatury.

Je patrné, že většina středních škol technického zaměření se shoduje ve výběru předepsaných učebnic. Domníváme se, že je tak dáno zejména omezenou nabídkou kvalitních učebnic na trhu.

■ 1.3.3 Ostatní studijní materiály

Kromě učebnic oficiálně používaných na školách při výuce, tj. splňující cíle vzdělávání stanovenými školským zákonem a rámcovými vzdělávacími programy, existují další výukové materiály. Patří mezi ně zejména různé výukové příručky, podpurné materiály, texty pro přípravu na oborové olympiády či lze také samozřejmě zapátrat mezi cizojazyčnými učebnicemi. Uvádíme několik takových materiálů, které lze vřele doporučit pro podporu výuky:

- *Encyklopedie fyziky* – Velmi zdařilý projekt on-line encyklopedie fyziky Jaroslava Reichla. Často uvádí matematické vložky, kde je to zapotřebí. Přístupný z <http://fyzika.jreichl.com/>.
- *Studijní texty z Knihovničky fyzikální olympiády* – Během každého ročníku Fyzikální olympiády vychází hned několik studijních textů, které rozšiřují znalosti žáků ve zvoleném studijním tématu nad rámec středoškolského učiva. Knihovnička mimo jiné nabízí texty sloužící k matematické přípravě žáků. Mezi nimi lze najít témata jako je vektorový počet, matematika křivek, diferenciální a integrální počet nebo diferenciální rovnice. Studenti elektrotechniky zase mohou prostudovat texty o řešení elektrických obvodů, elektromagnetické indukci, elektrostatice nebo elektromagnetických vlnách. Všechny texty jsou zdarma ke stažení z <http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty>.
- *Sbírka řešených úloh z matematiky a fyziky*. Tato on-line sbírka úloh vzniká na Katedře didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK a čítá více než tisíc detailně řešených úloh z matematiky a fyziky. Většina úloh kromě zadání obsahuje přehledné sekce nápovědy, rozboru, řešení, zápisu, číselného dosazení a odpovědi. Sbírkou nabízí rozsáhlou sekci věnovanou elektřině a magnetismu. Přístupné z <http://reseneulohy.cz>.
- *Elektrické obvody: teorie a příklady*, Černík, M., Technická univerzita v Liberci. Studijní materiál v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050 Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů, který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Jedná se o skripta primárně určena studentům bakalářského studia oboru Elektronické, informační a řídicí systémy Technické univerzity v Liberci, kteří si potřebují procvičit základní vztahy v teorii elektrických lineárních obvodů. Avšak vzhledem k zevrubnosti výkladu, více než 300 příkladům (jedna třetina dokonce s kompletním postupem řešení) a matematickým vložkám, je více než vhodná pro žáky středních škol se zájmem o předmět. Dostupné v elektronické podobě z <https://dspace.tul.cz/handle/15240/7152>.

- *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*, Riley, K. F. a kol. [8]. Rozsáhlá učebnice matematických metod pro fyziku a inženýrské obory. Každá kapitola se věnuje jednomu matematickému tématu, které objasňuje jak teoreticky, tak i na řešených příkladech. V závěru kapitoly se vždy nachází velké množství příkladů neřešených.

1.4 Výběr témat pro příručku

Z předchozího rozboru RVP pro obor vzdělávání Elektrotechnika, ŠVP realizujících tento program na dvou konkrétních průmyslových elektrotechnických školách a nejčastěji používaných učebnic a učebních textů vyplývá několik poznatků:

- Předmět Matematika (MAT) je většinou vyučován ve všech 4 ročnících studia, zatímco Fyzika (FYZ) a Základy elektrotechniky (ZE) se vyučují pouze v prvních 2 ročnících.
- FYZ a ZE zahrnují „náročnější“ témata, která vyžadují pochopení látky matematiky, zejména jde o: goniometrii, komplexní čísla, vektorovou algebru, diferenciální a integrální počet. První 3 témata se stačí probrat v hodinách MAT předtím, než jsou potřeba v odborných předmětech.
- Diferenciální a integrální počet se probírá ve 3. ročníku bez přímé návaznosti v odborných předmětech.
- Posledním tématem MAT v posledním ročníku bývá shrnutí a komplexní pojetí učiva.

Z toho vyplývá, že se žáci nesetkají s diferenciálním a integrálním počtem dříve než ve 3. ročníku, zatímco odborné elektrotechnické předměty, které by toho mohly využít, se ve 3. a 4. ročníku již nevyučují. Kromě toho se jedná o značně omezující faktor pro nadané žáky.

Z toho důvodu si dovoluujeme navrhnout krátký *učební text* zabývající se tématy diferenciálního a integrálního počtu tak, aby jejich výklad byl srozumitelný pro žáky již prvních ročníků středních škol a který by jednotlivá témata ilustroval na technicky zaměřených příkladech. Zaměříme se především na následující témata:

- Diferenciální počet
 - *Matematika*: hledání lokálních extrémů
 - *Fyzika*: vztahy pro (úhlovou) dráhu – rychlost – zrychlení, kmitavý pohyb
 - *Základy elektrotechniky*: výpočet napětí na induktoru a proudu kapacitorem, maximalizace výkonu ve stejnosměrném obvodu, Faradayův zákon elektromagnetické indukce,
- Integrální počet
 - *Matematika*: výpočet obsahu plochy pod grafem funkce
 - *Fyzika*: hmotnost a těžiště lineárních a rovinných útvarů, vyjádření funkční závislosti fyzikálně-technických veličin pomocí určitého integrálu (dráha, rychlost, práce, proud induktorem, napětí na kapacitoru), úlohy vedoucí na nekonečné řady a jejich transformace do spojitého světa (nekonečně malého rozlišení) pomocí integrálu, moment setrvačnosti
 - *Základy elektrotechniky*: střední hodnota, efektivní hodnota, napětí na kapacitoru, proud induktorem

Následující kapitola v detailu popisuje tvorbu tohoto navrhovaného textu.

Kapitola 2

Praktická část

V následující kapitole se zabýváme samotnou tvorbou navrhovaného učebního textu – od stanovení rozsahu obsahu a struktury po grafickou úpravu a technické aspekty tvorby.

2.1 Východisko pro tvorbu příručky

Prvním krokem realizace zamýšlené příručky je analýza základních východisek pro její tvorbu. Ta nám bude sloužit k určení vhodných učebních okruhů, stanovení obtížnosti a rozsahu učebního materiálu a v neposlední řadě i k tvorbě její celkové grafické úpravy, která by měla být v souladu s jejím obsahem.

Podle Lepila [9] mezi základní východiska pro tvorbu výukových materiálů patří:

1. **Obsah učiva.** Obsahovým hlediskem se zabývá první kapitola této práce. Ústředním tématem je předmět Matematika a fyzikálně-odborné předměty a jejich vzájemný vztahy na středních školách elektrotechnického zaměření. Prostudovali jsme Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělávání Elektrotechnika [1], jeho praktickou implementaci v podobě školních vzdělávacích programů dvou konkrétních středních průmyslových škol elektrotechnických a v neposlední řadě zmapovali nabídku nejčastěji používaných, ale i méně tradičních učebnic a výukových materiálů uvažovaných předmětů.

Na základě tohoto rozboru jsme došli k závěru, že by bylo vhodné, kdyby vznikl nový výukový materiál věnující se tématům *diferenciálního a integrálního počtu*, a to i z pohledu předmětů Fyzika a Základy elektrotechniky. Neboť tyto okruhy překračují rámec výše zmíněného RVP, příručka bude převážně určena zvědavým a nadaným žákům.

2. **Metody a organizační formy výuky.** Z důvodu nadstandardní obtížnosti příručky (vzhledem k obvyklému kurikulu středních škol uvažovaného typu) ji budeme vytvářet tak, aby ji žák mohl studovat sám (samostudium). Sice předpokládáme výborné znalosti matematiky a fyziky ze základní školy, avšak pro usnadnění bude příručka obsahovat velké množství poznámek připomínající některé důležité zákonitosti.

Očekáváme tedy, že převážně používanou organizační formou výuky bude samostudium. Nicméně není vyloučeno, že tento studijní materiál, a především pak neřešené příklady, mohou posloužit v hodinách fyzikálně-odborných předmětů, resp. v seminářích, ve kterých se probírá pokročilejší látka.

Jak již bylo řečeno, při psaní výukového materiálu je potřeba zohlednit individuální studijní předpoklady žáků. To by se mělo projevit přiměřenou volbou obsahu. V našem případě cílíme na zvědavé a nadané žáky s hlubším zájmem o studium fyziky a teoretických elektrotechnických základů. Můžeme si tedy dovolit používat odborný jazyk, matematické a technické termíny, grafy a tabulky aj. Avšak budeme také pamatovat na to, že by text měl být dostupný a pochopitelný i žákům prvních ročníků.

2.2 Tvorba příručky

Následující sekce popisuje vznik navrhovaného výukového materiálu: jeho strukturu, grafickou úpravu textu a další zásady použité při jeho tvorbě.

2.2.1 Navrhovaná struktura

Při tvorbě konkrétní struktury učebního textu vycházíme ze tří základních charakteristických složek učebnice, jak je líčí Lepil v [9]:

1. Výkladové složky

- *výkladový text* (základní a objasňující text, vzorové úlohy, aplikace učiva v praxi, přehledy poznatků, shrnutí)
- *doplňující text* (motivační text uvozující učivo, rozšiřující poznatky, historické poznámky, ilustrační příklady, doplňující přílohy apod.)
- *vysvětlující text* (vysvětlení původu cizích slov, poznámky pod čarou, texty pod obrázky)

2. Obrazový materiál

- *navazující na věcný obsah výkladových složek* (např. schematické kresby, náčrtky přístrojů a technických zařízení, vyobrazení experimentů, grafické modely a grafy funkčních závislostí atd.)
- *doplňující ilustrace volně navazující na výkladové složky* (např. motivační fotografie a kresby, historická vyobrazení, portréty významných vědců apod.)
- *grafické symboly usnadňující orientaci ve struktuře učebního textu* (např. piktogramy).

3. Nevýkladové složky

- *procesuální aparát* (např. otázky a úlohy, odpovědi a řešení, návody k žakovským činnostem)

- *orientační aparát* (např. nadpisy, odkazy na předchozí text, vyobrazení nebo literaturu, marginálie — hesla na okraji textu, rejstřík, obsah).

Na základě těchto obecných principů jsme vytvořili následující strukturu zamýšleného učebního textu tak, aby obsahovala co nejvíce zmíněných složek, avšak respektovala zamýšlenou délku (do 80 stran) a specifčnost obsahu:

- **Předmluva.** V učebnicích i kratších učebních materiálech bývá zvykem před samotným výkladem uvést krátkou předmluvu shrnující především jejich obsah, důvod vzniku a jmenující předpokládané skupiny čtenářů.

V našem případě se předmluva zabývá nutností znalosti diferenciálního a integrálního počtu a popisem struktury příručky:

„Derivování a integrace dnes patří k té nejnezbytnější a nejzákladnější matematické výbavě každého vysokoškolského studenta technického oboru, všech inženýrů, techniků . . . Avšak teorie založená na použití těchto nástrojů se dotýká i většiny studentů středních škol. Z důvodů pozdního zařazení učiva o derivování a integrování v předmětu Matematika (a nebo často i úplné absenci) jsou pak nuceni si tito studenti pamatovat a používat zjednodušené poučky, kterými jsou schopni spočítat některé jednodušší typy příkladů. Podstata však často uniká. Tato učebnice proto vznikla za účelem poskytnout studentům SŠ ucelený materiál pro samostudium diferenciálního a integrálního počtu včetně jeho využití ve fyzice a elektrotechnice. Měla by tak dát možnost studentům (již od 1. ročníku) proniknout do jednotlivých odborných témat s daleko větší hloubkou a dát jim k dispozici nástroj pro pohled „pod pokličku“. Pokročilé matematické metody v praxi přijdou zajisté vhod zvědavým a nadaným studentům, řešitelům oborových olympiád a také mohou pomoci při přechodu na vysokou školu.

Samozřejmě není možné pokrýt všechny detaily s patřičnou přesností. Některá témata obnášejí poměrně náročnou teoretickou přípravu, a tak, aby byla uchopitelná středoškolským studentem, jsou často zjednodušena (především pak uvedené věty a definice).

Učebnice je členěna na dvě samostatné, poměrně rozsáhlé kapitoly zabývající se diferenciálním a integrálním počtem. V každé z nich je nejprve stručně uvedena nezbytná teorie, několik řešených příkladů a dále vysvětlení fyzikálních a elektrotechnických principů pomocí nově nabytých znalostí. Pro úplnost je v poznámkách na straně uvedeno množství užitečných rad a vzorců, které by měly usnadnit pochopení látky. V učebnici je také celá řada neřešených úloh, které slouží k procvičení učiva. Některé úlohy jsou pak pojaty jako logické pokračování řešených příkladů.

Přeji vám hodně úspěchů ve studiu.“

- **Obsah.** Pro lepší orientaci v textu jsme zvolili detailní variantu uvádějící kapitoly, sekce i podsekce.

- **Seznam obrázků a seznam tabulek.** Seznam uvádí název obrázku či tabulky s jejich pořadovým číslem (složeným z čísla kapitoly a pořadovým číslem v rámci ní) a číslem stránky. Prvky související s řešeným či neřešeným příkladem nesou na začátku názvu označení „Příklad“ a jeho pořadové číslo.
- **Kapitola.** Příručku jsme rozdělili na dvě kapitoly. První se věnuje diferenciálnímu a druhá integrálnímu počtu z důvodu logické návaznosti. Jednotlivé kapitoly se dále člení:

- **Motivační text.** Např. v první kapitole se jedná hned o první odstavec věnující se fyzikálně-technickému využití derivací, o kterém se však žák dovídá až v druhé polovině kapitoly.
- **Obecný matematický základ.** Předtím než se přistoupí k odbornému výkladu, je potřeba uvažovaný matematický nástroj uvést v obecné rovině, tj. především definovat základní termíny a uvést potřebné matematické věty.

V kapitole o diferenciálním počtu je tak např. potřeba nejdříve definovat derivaci v bodě, derivaci funkce, následně uvést základní tabulku derivací a uvést základní věty o derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Každá část navazuje na předchozí. Žák, který není s diferenciálním počtem obeznámen a bude jej tedy studovat poprvé, bude číst příručky tak, jak jdou témata za sebou. Pokročilejší čtenář může v knize listovat a kupříkladu vyhledávat informace potřebné k vyřešení některého ze závěrečných příkladů.

Aby si žák mohl prakticky vyzkoušet nově nabyté dovednosti, uzavírá tuto část vždy několik řešených příkladů. Je důležité, aby uvedené postupy byly dobře osvojeny, protože budou představovat základ pro fyzikálně-technickou látku. Pokud žák získá dostatek sebevědomí při studiu řešených příkladů, může se pokusit o vyřešení příkladů neřešených, které se nachází v závěru kapitoly.

- **Užití matematického nástroje.** Na čistě matematický výklad navazuje praktické využití této látky v matematice, fyzice a elektrotechnice. Každá taková podsekce se nejdříve zabývá uplatněním uvažovaného matematického nástroje v daném fyzikálně-odborném kontextu, jeho geometrickou interpretací apod.

Například pokud se zabýváme využitím derivace ve fyzikálním kontextu, může taková podsekce začínat vztahem mezi okamžitou rychlostí a dráhou – okamžitá rychlost se totiž spočte jako derivace dráhy podle času. Derivaci již umí žák počítat z předchozích sekcí, nyní k tomu přibude fyzikální souvislost.

Jádro této podsekce leží především v řešených příkladech. Pomocí nich se dozvídáme, jak se modelově řeší některé problémy a především, jak se v nich s výhodou uplatní derivace nebo integrál. Každá taková úloha je uvozena zadáním včetně grafického znázornění, pokud je to příhodné. Následuje řešení úlohy. To většinou neobsahuje

klasický zápis, jaký známe z úloh fyziky, ale je poněkud sdílnější, řešení popisuje ve větách tak, aby ho žák pochopil i při samostudiu. V principu v úlohách nejde o číselné hodnoty, anebo úpravu výrazů, ale o získání celkového přehledu, co a jak lze řešit pomocí derivace, resp. integrálu.

- **Neřešené úlohy.** Na závěr každé kapitoly uvádíme několik neřešených příkladů. Většinou se jedná o typ velmi podobný některému z řešených příkladů, nebo jde o zdánlivě odlišnou úlohu, jejíž řešení je však analogické s některou z řešených úloh. V příručce najdeme i úlohy návazné.

Pokud úloha vyžaduje nějaký obtížnější postup nebo znalost vzorce, je většinou pro usnadnění vypsán v poznámce na straně. K tomu jsme přistoupili z toho důvodu, že záměrem není naučit nebo zkoušet žáka z dokonalé znalosti vzorců, ale naučit ho používat některé pokročilejší matematické nástroje ve fyzikálně-technickém kontextu. Tudíž důležitější než znalost vzorce je vhléd do úlohy, její myšlenková analýza a výběr patřičných postupů, které povedou na správné řešení.

2.2.2 Grafická úprava

Navrhovaná příručka byla vytvořena v nástroji pro sázení elektronických dokumentů $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Tento systém umožňuje snadno měnit vlastnosti a rozložení textu, sázet matematické vzorce, vkládat obrazové materiály nebo automaticky generovat pomocný obsah:

- automatické vytváření obsahu, seznamu obrázků a tabulek
- vytváření interaktivních odkazů mezi názvy kapitol a obsahem, dále mezi obrázky a tabulkami a příslušnými položkami v jejich seznamu
- nástroj pro generování seznamu použité literatury

Pro tvorbu příručky jsme využili předdefinovaný vzor dokumentu *Tufte-Style Book*¹ inspirovaný esteticky velmi povedenými knihami Edwarda Tufte.

Pro obyčejný text a nadpisy používá patkové písmo (font) Palatino velikosti 10 (obyčejný text), 20 (nadpis kapitoly) a 8 (poznámky na straně a popisky obrázků a grafů) bodů. Název příručky na titulní straně je vysázen písmem Helvetica o velikosti 36 bodů.

Jeden z hlavních důvodů, proč jsme vybrali tuto šablonu je její význačné použití postranních poznámek. Hlavní text je zúžen tak, aby se na pravé straně (podle originální předlohy) vytvořil prostor dostatečný pro poznámky i ilustrace. Toto místo jsme většinou využili doplňující či vysvětlující informací k textu vlevo, např:

¹<http://www.latextemplates.com/template/tufte-style-book>

Uvedeme několik základních vlastností právě definovaného integrálu:

1. Jestliže $f \leq g$ na (a, b) , pak $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$, pokud oba integrály existují.
2. (*aditivnost určitého integrálu*) Jestliže existuje $\int_a^b f(x) dx$, pak pro každé $c \in (a, b)$ je $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
3. (*linearita určitého integrálu*) Platí rovnost

$$\int_a^b (af(x) + bg(x)) dx = a \int_a^b f(x) dx + b \int_a^b g(x) dx,$$

pokud má pravá strana smysl.

Pravidla 2 s výhodou využíváme při integrování funkce definované po částech, tj. mající rozdílný předpis v různých intervalech jejího definičního oboru. Pak lze v každém takovém intervalu spočítat dílčí integrál a výsledek určit jako jejich součet.

Další možností je připomenout vzorce a poučky týkající se aktuálního příkladu:

Řešení Substitute $t = x^2 + 1$:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ = \ln |x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Platí: $x^2 + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a proto je možné ve výsledku odstranit absolutní hodnotu bez změny znaménka.

Protože použitá šablona je poměrně univerzální, přidali jsme do ní několik funkcionalit tak, abychom mohli vytvářet přehledný, pro naše potřeby specifický obsah:

■ Barevné rámečky pro uvádění definic a matematických vět.

Abychom definice a věty odlišili od okolního textu a zvýraznili jejich důležitost, vyčlenili jsme je do barevných rámečků: fialové pro definice, oranžové pro věty. V záhlaví je vždy uvedeno: „Věta/Definice“, pořadové číslo a popis, čeho se definice týká, resp. název matematické věty. Ukázka:

Definice 2.1: Primitivní funkce

Mějte dány funkce F, f definované v otevřeném intervalu I , jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x)$$

říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I .

Věta 2.2: Linearita integrace

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I , c necht' je reálné číslo. Pak na intervalu I platí:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (2.1)$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (2.2)$$

- **Šedé boxy pro zadání příkladů.** Tyto boxy vznikly z podobného důvodu, jako výše uvedené rámečky. Navíc by měly zřetelně oddělovat, kde končí zadání příkladu a kde už začíná jeho řešení. Sice jak zadání, tak řešení je uvedeno slovem „**Příklad x.y**“, resp. „**Řešení**“, nicméně bez tohoto boxu je velmi snadné v textu ztratit přehled. Ukázka příkladu včetně řešení:

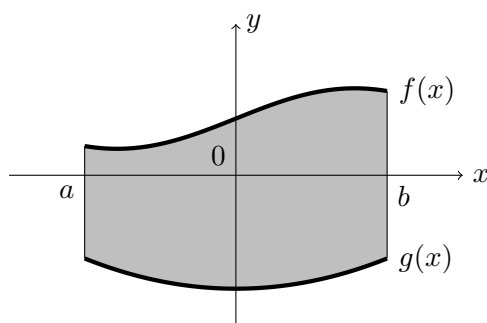
Příklad 2.12. Vypočtěte $\int_1^e x^3 \ln x dx$.

Řešení

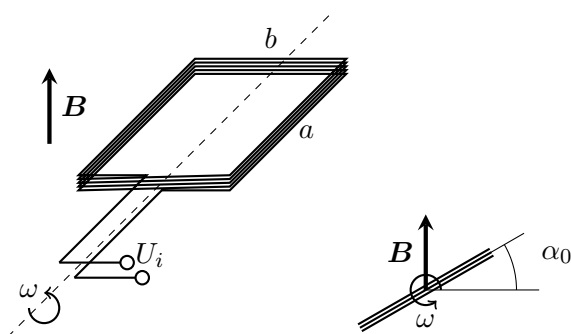
$$\begin{aligned} \int_1^e x^3 \ln x dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^3 \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| &= \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{4} dx = \\ &= \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1}{4} \ln 1 - \left[\frac{x^4}{16} \right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(1 + 3e^4) \end{aligned}$$

- **Použití knihovny *TikZ* pro tvorbu grafů a diagramů.** Doprovodné grafy a diagramy je možné buď vytvořit v bitmapové podobě anebo využít velmi elegantní knihovnu *TikZ*, která vytváří obrázky ve vektorové formě. Ta je výhodnější nežli bitmapová, protože ji lze mimo jiné libovolně škálovat bez ztráty kvality. Grafika bude tak vypadat dobře na monitoru počítače, nebo vytištěná na papíře malého, ale i velkého formátu. Pomocí této knihovny se grafické objekty v podstatě programují. Autor příkazy popisuje, kde a jak se mají jednotlivé grafické prvky vykreslovat. Díky tomu je možné s větším či menším úsilím vykreslit téměř libovolný objekt.

Na obr. 2.1 vidíme ukázkou grafu vytvořeného touto knihovnou. Obr. 2.2 pak ukazuje, že tou samou knihovnou lze vykreslit i technická schémata.

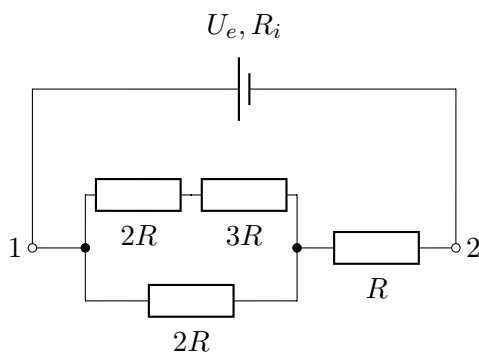


Obrázek 2.1: Ukázka grafu vytvořeného pomocí knihovny *TikZ* – obsah plochy ohraničené dvěma křivkami



Obrázek 2.2: Ukázka složitější ilustrace vytvořené pomocí knihovny *TikZ* – jednoduchý generátor

- **Použití knihovny *CircuitikZ* pro kreslení schémat elektrických obvodů.** Tato knihovna je nadstavbou knihovny *TikZ* pro kreslení elektrických schémat a to především tím, že obsahuje velké množství předem definovaných schématických značek jednotlivých elektrických součástek. Autor pak vytváří schéma tak, že definuje použité součástky a jejich vzájemné propojení. Obr. 2.3 ukazuje příklad jednoho elektrického schématu vytvořeného pomocí této knihovny.



Obrázek 2.3: Ukázka schématu elektrického obvodu vytvořeného pomocí knihovny *CircuitikZ* – úloha maximalizace výkonu na spotřebiči

■ 2.2.3 Tvorba úloh

Řešení úloh je nezbytnou součástí výuky fyzikálně-technických předmětů. Z toho důvodu jsme do výukového textu zařadili celou řadu řešených (43) i neřešených (23) úloh.

Při jejich tvorbě jsme především vycházeli ze zásad, které uvádí Svoboda v [10]:

- převod násobných a dílčích jednotek na tzv. jednotky „hlavní“ (není ale vždy nutné)
- používání (dodržování) smluvených značek veličin
- obecné a následně numerické řešení (dosazení)
- správný zápis jednotek
- dodržování zásad správného zaokrouhlování číselného výsledku
- grafická úprava zápisu – veličiny kurzívou, číselné hodnoty a jednotky veličin stojatě aj.

Naopak jsme záměrně nedodrželi některé následující zásady pro tvorbu a zápis řešení učebnicových úloh:

- **zápis zadání úlohy** – jako první by se měl objevovat zápis zadaných a hledaných veličin. Nicméně navrhovaný text si neklade za úkol být plnohodnotnou učebnicí či sbírkou úloh, která by měla žáka naučit tvořit tento druh zápisu. S touto dovedností by měl žák přicházet již ze základní školy, nebo si ji osvojit v prvním ročníku SŠ. Jádrem úloh je, spíše nežli vytváření školáckého zápisu, pochopení souvislostí mezi fyzikálně-technickou podstatou úlohy a použitím vhodného matematického nástroje. Z toho důvodu také většina ukázkových řešení spíše žáka provádí řešením úlohy pomocí textových informací a detailně popisuje jaké kroky a z jakého důvodu budou následovat. Při řešení samostatných úloh pak žák samozřejmě nebude detailně popisovat své řešení, ale spíše použije klasického zápisu.
- **formulace výstižné odpovědi** – stejně jako v předchozím bodě jsme se snažili v úlohách omezit na samotné jádro problému. Explicitně vyjádřenou odpověď považujeme v tomto případě za nadbytečnou. Ve výše uvedených *Studijních textech z Knihovničky fyzikální olympiády*, které nám sloužily jako předloha, slovní odpovědi autoři taktéž vynechávají.

Při sestavování úloh do navrhované sbírky jsme vycházeli z celé řady zdrojů. Inspirovali jsme se učebnicemi a sbírkami úloh pro střední školy, vysokoškolskými skripty elektrotechniky, ale i zahraniční literaturou:

- *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Petáková, J. [12]. Dosud nepřekonaná sbírka matematických úloh pro střední školy. Posloužila jako velmi dobrá inspirace při sestavování úloh týkajících se matematických základů derivace a integrace.

- *Elektrické obvody 1 a 2.* Havlíček a Pokorný. [13], [14]. Vysokoškolská skripta věnující se základním metodám analýzy elektrických obvodů v ustálených stavech a přechodných dějích.
- *Základy teorie obvodů 1 a 2: cvičení.* Čmejla, Havlíček a Zemánek. [15], [16]. Dvoudílná vysokoškolská skripta určená pro potřeby cvičení v předmětu Základy teorie obvodů. V podstatě se jedná o sbírku úloh s elektrotechnickou tematikou.
- *Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet.* Hrubý a Kubát. [17]. Učebnice infinitezimálního počtu pro gymnázia.
- *Fundamentals of Electric Circuits.* Alexander a Sadiku. [18]. Učebnice elektrotechniky s celou řadou názorných ilustrací, jednoduchých i náročnějších úloh.
- *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide.* Riley, Hobson a Bence. [19]. Velmi obsáhlá učebnice matematických metod, které látku vysvětluje na vzorových řešených i neřešených příkladech, jak čistě matematických, tak i odborně laděných.

Text učebního textu nazvaného „Pokročilé matematické metody v praxi pro SŠ“ uvádíme jako přílohu k této práci.



Závěr

V rámci této bakalářské práce jsme analyzovali vztah předmětu Matematika a fyzikálně-technických předmětů na středních odborných školách elektrotechnického zaměření pomocí studia Rámcového vzdělávacího programu pro obor vzdělávání Elektrotechnika, především pak kurikulární rámce pro vzdělávací oblasti přírodovědné, matematické a odborné vzdělávání. Následně jsme se zaměřili na to, jak jsou tyto vzdělávací oblasti implementovány v praxi, tj. jak jsou specifikovány v konkrétních školních vzdělávacích plánech. Z tohoto důvodu jsme prozkoumali ŠVP Aplikovaná elektronika SPŠE V Úžlabině a ŠVP Elektrotechnika SOŠ a SPŠE Fr. Křižíka a došli k závěru, že předměty Matematika a fyzikálně-technické předměty jsou často v dobrém souladu. Nicméně vytypovali jsme témata *derivace a integrace*, která se sice v hodinách matematiky probírají, ale až v ročnících, ve kterých se již fyzika nebo elektrotechnický základ neučí. Přitom tato látka se dá s výhodou v těchto předmětech využít a rozšířit tak okruh problémů, které by žáci mohli umět s těmito nástroji řešit. Proto jsme navrhli krátký učební text, který by se věnoval právě této problematice.

Druhá část práce se věnuje již tvorbě samotného učebního textu, rozboru rozsahu, formy a struktury. Dále popisujeme jednotlivé technické detaily tvorby textu a uvádíme literaturu, kterou jsme se inspirovali při sestavování úloh.

Z výše uvedených důvodů se domníváme, že jsme splnili stanovený cíl své bakalářské práce.



Literatura

- [1] *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 26-41-M/01 Elektrotechnika* [online]. Praha: MŠMT, 2007 [cit. 2018-03-25]. Dostupné z: <http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202641M01%20Elektrotechnika.pdf>
- [2] KAŠPAROVÁ, Jana. *Metodika tvorby školních vzdělávacích programů SOŠ a SOU*. Praha: Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků, 2012. ISBN 978-80-87652-05-3.
- [3] *Školní vzdělávací program Aplikovaná elektronika* [online]. Střední průmyslová škola elektrotechnická, Praha 10, V Úžlabině 320, 2016 [cit. 2018-03-28]. Dostupné z: https://www.uzlabina.cz/uploads/file/SVP_ELE_2016_minimalizace.pdf
- [4] JIRÁSEK, František et al. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a SOU, I. část*. 6. vydání. Praha: Prometheus, 2016. ISBN 978-80-7196-349-3.
- [5] JIRÁSEK, František et al. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a SOU, II. část*. 4., přeprac. vydání. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 9788071963226.
- [6] *Školní vzdělávací program Elektrotechnika* [online]. Vyšší odborná škola a Střední průmyslová škola elektrotechnická Františka Křížíka, Praha 1, Na Příkopě 16, 2014 [cit. 2018-03-28]. Dostupné z: <http://www.vosaspsekrizik.cz/cs/download/skolni-vzdelavaci-program-elektrotechnika.pdf>
- [7] *Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon)*, in: *Sbírka zákonů České republiky*, 2004, částka 190, s. 10262–10324.
- [8] RILEY, Kenneth Franklin, Michael Paul HOBSON a Stephen John BENCE. *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. 3. vyd. Cambridge: Cambridge University press, 2006. ISBN 978-0-521-86153-3.

- [9] LEPIL, Oldřich. *Teorie a praxe tvorby výukových materiálů: zvyšování kvality vzdělávání učitelů přírodovědných předmětů*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2489-7.
- [10] SVOBODA, Emanuel a Růžena KOLÁŘOVÁ. *Didaktika fyziky základní a střední školy: vybrané kapitoly*. Praha: Karolinum, 2006. ISBN 8024611813.
- [11] VANĚČEK, David. *Didaktika technických odborných předmětů*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2016. ISBN 978-80-01-05991-3.
- [12] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.
- [13] HAVLÍČEK, Václav, Martin POKORNÝ a Ivan ZEMÁNEK. *Elektrické obvody*. 2. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2014-. ISBN 978-80-01-05492-5.
- [14] HAVLÍČEK, Václav a Ivan ZEMÁNEK. *Elektrické obvody 2*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008. ISBN 978-80-01-03971-7.
- [15] ČMEJLA, Roman, Václav HAVLÍČEK a Ivan ZEMÁNEK. *Základy teorie obvodů 1: cvičení*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04446-9.
- [16] ČMEJLA, Roman, Václav HAVLÍČEK a Ivan ZEMÁNEK. *Základy teorie obvodů 2: cvičení*. 2. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03690-7.
- [17] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- [18] ALEXANDER, Charles K. a Matthew SADIKU. *Fundamentals of Electric Circuits*. 4th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009. ISBN 9780071284417.
- [19] RILEY, K.F., M. P. HOBSON a S. J. BENICE. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139450997.



Příručka

ING. MILAN NĚMÝ

POKROČILÉ
MATEMATICKÉ METODY
V PRAXI PRO SŠ

Copyright © 2018 Ing. Milan Němý

TUFTE-LATEX.GOOGLECODE.COM

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the “License”); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, April 2018

Obsah

1	Diferenciální počet	11
1.1	Derivace	11
1.1.1	Motivace	11
1.1.2	Derivace funkce v bodě a její význam	11
1.1.3	Druhá derivace	12
1.1.4	Derivace funkce	12
1.1.5	Derivace elementárních funkcí	13
1.1.6	Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí	13
1.1.7	Řešené příklady	14
1.2	Určování extrémů funkce	16
1.2.1	Lokální extrémy	17
1.2.2	Řešené příklady	18
1.3	Užití diferenciálního počtu	20
1.3.1	Matematické úlohy	21
1.3.2	Fyzikální úlohy	23
1.3.3	Elektrotechnické úlohy	27
1.4	Úlohy k samostatnému řešení	30
1.5	Řešení úloh	33
2	Integrální počet	35
2.1	Primitivní funkce	35
2.1.1	Definice	35
2.1.2	Základní vzorce pro primitivní funkce	36
2.1.3	Integrační metody	39
2.2	Určitý integrál	44
2.2.1	Definice	44
2.2.2	Geometrická interpretace	45
2.2.3	Integrační metody	45
2.3	Užití integrálního počtu	48
2.3.1	Matematické úlohy	48
2.3.2	Fyzikální úlohy	55
2.3.3	Elektrotechnické úlohy	65
2.4	Úlohy k samostatnému řešení	71
2.5	Řešení úloh	75
	Literatura	77

Seznam obrázků

1.1	K vysvětlení derivace	11
1.2	Derivace jako směrnice tečny	16
1.3	Rostoucí přímky (tečny) s kladnou směrnicí, klesající přímky se zápornou směrnicí.	16
1.4	Nulová derivace versus lokální extrém	17
1.5	Příklad 1.3 – průběh funkce $f(x) = x^3 + 6x^2$	19
1.6	Příklad 1.4 – průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$	20
1.7	Příklad 1.5 – skládání krabičky	21
1.8	Příklad 1.6 – válcová nádoba	22
1.9	Příklad 1.9 – vrh šikmý vzhůru	25
1.10	Příklad 1.10 – průběhy proudu a napětí na cívce	27
1.11	Příklad 1.11 – maximalizace výkonu na spotřebiči	29
1.12	Příklad 1.12 – jednoduchý generátor	30
1.13	Příklad 1.18 – průběhy proudu a napětí na kondenzátoru	32
1.14	Příklad 1.19 – maximalizace výkonu na spotřebiči 2	32
1.15	Příklad 1.18 – průběhy proudu a napětí na kondenzátoru – řešení	33
2.1	Příklad 2.2 – význam integrační konstanty	38
2.2	Geometrická interpretace určitého integrálu	45
2.3	Obsah plochy pod grafem funkce	49
2.4	Příklad 2.14 – obsah plochy pod grafem funkce $y = \cos x$	49
2.5	Příklad 2.15 – obsah plochy ohraničené parabolou a osou x	50
2.6	Obsah plochy ohraničené dvěma křivkami	51
2.7	Příklad 2.17 – obsah plochy ohraničené dvěma křivkami	52
2.8	Příklad 2.18 – obsah elipsy	53
2.9	Příklad 2.18 – obsah elipsy zadané parametricky	54
2.10	Příklad 2.19 – těžiště čtvrtkružnice	57
2.11	Příklad 2.20 – těžiště trojúhelníku	57
2.12	Integrace konstantní rychlosti	58
2.13	Integrace lineární rychlosti	58
2.14	Příklad 2.26 – p-V diagram izotermické komprese	62
2.15	Příklad 2.27 – přehrada rybníka	63
2.16	Příklad 2.27 – přehrada rybníka 2	63
2.17	Příklad 2.28 – moment setrvačnosti dlouhé tyče	64
2.18	Geometrická interpretace efektivní hodnoty	66
2.19	Příklad 2.30 – napětí trojúhelníkového průběhu	67
2.20	Příklad 2.30 – integrace napětí trojúhelníkového průběhu	68
2.21	Příklad 2.31 – průběhy napětí na induktoru	69

2.22 Příklad 2.31 – průběh proudu na induktoru (rampa)	70
2.23 Příklad 2.31 – průběh proudu na induktoru (exp)	71
2.24 Příklad 2.45 – přehrada rybníka 2	73
2.25 Příklad 2.46 – moment setrvačnosti rotačního válce	73
2.26 Příklad 2.39 – řešení	75
2.27 Příklad 2.48 – řešení	76

Seznam tabulek

1.1	Derivace elementárních funkcí	13
1.2	Příklad 1.3 – lokální extrémů funkce	19
1.3	Příklad 1.4 – lokální extrémů funkce	20
1.4	Vybrané fyzikální veličiny vyjádřené derivací	23
2.1	Tabulka neurčitých integrálů	36
2.2	Vybrané fyzikální veličiny vyjádřené integrálem	59

Předmluva

Derivování a integrace dnes patří k té nejnezbytnější a nejzákladnější matematické výbavě každého vysokoškolského studenta technického oboru, všech inženýrů, techniků . . . Avšak teorie založená na použití těchto nástrojů se dotýká i většiny studentů středních škol. Z důvodů pozdního zařazení učiva o derivování a integrování v předmětu Matematika (a nebo často i úplné absenci) jsou pak nuceni si tito studenti pamatovat a používat zjednodušené poučky, kterými jsou schopni spočítat některé jednodušší typy příkladů. Podstata však často uniká. Tato učebnice proto vznikla za účelem poskytnout studentům SŠ ucelený materiál pro samostudium diferenciálního a integrálního počtu včetně jeho využití ve fyzice a elektrotechnice. Měla by tak dát možnost studentům (již od 1. ročníku) proniknout do jednotlivých odborných témat s daleko větší hloubkou a dát jim k dispozici nástroj pro pohled „pod pokličku“. *Pokročilé matematické metody v praxi* přijdou zajisté vhod zvědavým a nadaným studentům, řešitelům oborových olympiád a také mohou pomoci při přechodu na vysokou školu.

Samozřejmě není možné pokrýt všechny detaily s patřičnou přesností. Některá témata obnášejí poměrně náročnou teoretickou přípravu, a tak, aby byla uchopitelná středoškolským studentem, jsou často zjednodušena (především pak uvedené věty a definice).

Učebnice je členěna na dvě samostatné, poměrně rozsáhlé kapitoly zabývající se diferenciálním a integrálním počtem. V každé z nich je nejprve stručně uvedena nezbytná teorie, několik řešených příkladů a dále vysvětlení fyzikálních a elektrotechnických principů pomocí nově nabytých znalostí. Pro úplnost je v poznámkách na straně uvedeno množství užitečných rad a vzorců, které by měly usnadnit pochopení látky. V učebnici je také celá řada neřešených úloh, které slouží k procvičení učiva. Některé úlohy jsou pak pojaty jako logické pokračování řešených příkladů.

Přeji vám hodně úspěchů ve studiu.

Ing. Milan Němý
autor učebního textu

1

Diferenciální počet

1.1 Derivace

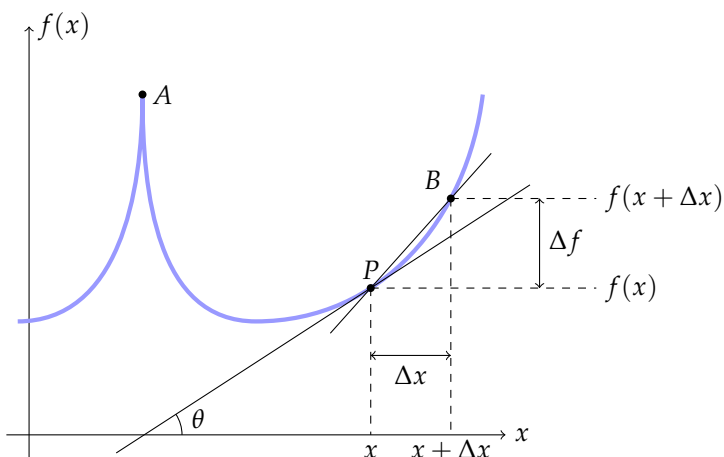
1.1.1 Motivace

Derivace funkce vyjadřuje, jak rychle nebo pomalu se tato funkce mění s tím, jak se mění veličiny, na kterých závisí (tzv. argumenty). O něco přesněji jde o postup získání hodnoty (numerické) nebo výrazu (algebraického) pro rychlost změny funkce vzhledem k jejím argumentům. Mezi známé příklady patří: *zrychlení* (změna rychlosti) nebo *chemická reakční rychlost* (změna koncentrace látky). Obě tyto veličiny udávají změnu veličiny vzhledem k času. Nicméně derivace může být použita i vzhledem k ostatním veličinám, např. změna tlaku vzhledem ke změně teploty apod.

1.1.2 Derivace funkce v bodě a její význam

Uvažujme funkci $f(x)$, jež závisí na jedné proměnné x . Graf na obr. 1.1 ukazuje příklad jedné takové funkce.

Podívejme se blíže na bod P . Poblíž něho se hodnota funkce změní o $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, když x se změní o malou hodnotu Δx . Směrnice tečny grafu $f(x)$ v bodě P je pak **přibližně** $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.



Obrázek 1.1: K vysvětlení derivace

Abychom zjistili skutečnou hodnotu změny růstu funkce v bodě P , budeme přibližovat bod B k bodu P . Tedy uvažujme Δx

nekonečně malé (tj. bod B nekonečně blízko bodu P), pak definujeme první derivaci $f'(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x :

Definice 1.1: Derivace

První derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x :

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (1.1)$$

za předpokladu, že tato limita existuje.

Pokud tato limita existuje v bodě $x = a$, říkáme, že funkce má v tomto bodě derivaci. Pro potřeby výpočtu úloh se dále nebudeme zabývat termínem limita, ale přijmeme intuitivní přístup.

Podle definice (vzorce) se k nule přibližujeme z kladných ($x + \Delta x > x$, tj. bod B se přibližuje k bodu P zprava) nebo záporných hodnot ($x + \Delta x < x$, tj. bod B se přibližuje k bodu P zleva) a požadujeme stejnou limitu v obou případech. Dále platí, že funkce, která má v bodě a derivaci, musí být v a spojitá (funkce nevykazuje v tomto bodě „skok“), ale opak nemusí nutně platit, např. uvažovaná funkce $f(x)$ je ve špičce A spojitá, ale limita 1.1 v tomto bodě, když se Δx blíží k nule z kladných nebo záporných hodnot je rozdílná. Proto funkce $f(x)$ nemá v bodě A (oboustrannou) derivaci.

1.1.3 Druhá derivace

Druhá derivace je derivací první derivace. Její použití si objasníme v následujících kapitolách. Definujeme obdobně jako derivaci první:

Definice 1.2: Druhá derivace

Druhá derivace $f''(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x :

$$f''(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

za předpokladu, že tato limita existuje.

1.1.4 Derivace funkce

Zatím jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x . Výsledkem bylo nějaké číslo. Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (resp. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou následovně:

Definice 1.3: Derivace funkce

Nechť existuje (vlastní) derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, M je podmnožinou definičního oboru f . Pak funkci $f' : y = f'(x), x \in M$, nazýváme derivací funkce f na M .

Co je limita funkce?

Uvažujme funkci f , která hodnotě x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)$, pak f má v bodě p limitu L , jestliže pro x v okolí bodu p jsou hodnoty $f(x)$ blízko L .

Vlastní a nevlastní derivace

Je-li limita 1.1 vlastní (výsledkem je reálné číslo), nazývá se číslo $f'(x_0)$ vlastní derivací funkce f v bodě x_0 .

Je-li limita 1.1 nevlastní (výsledkem je $\pm\infty$), nazývá se číslo $f'(x_0)$ nevlastní derivací funkce f v bodě x_0 .

V následujícím textu budeme vždy pod pojmem derivace rozumět vlastní derivaci, nebude-li řečeno jinak.

Příklad

Pomocí definice 1.1 spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2$ vzhledem k x .

Řešení: Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Derivace elementárních funkcí

Derivaci funkce lze spočítat pomocí její definice (jednoduchý příklad je uveden v poznámce na straně; derivace ostatních elementárních funkcí lze odvodit obdobně). V praxi však zpravidla použijete tabulku 1.1 derivací elementárních funkcí.

f	f'	$D(f)$	$D(f')$	pozn.
c	0	\mathbb{R}	\mathbb{R}	c - konstanta
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$n \in \mathbb{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0$	$x > 0$	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
a^x	$a^x \ln a$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$x > 0$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$	$x > 0$	$a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	$x \neq k\pi$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	

Tabulka 1.1: Derivace elementárních funkcí

Pozn. Funkce v posledním oddílu Tabulky 1.1 jsou inverzními funkcemi k příslušným goniometrickým funkcím. Nazýváme je *cyklometrické funkce*. A tedy například platí:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

Pozn. \arcsin čteme jako /arkus sinus/.

1.1.6 Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí

V následující části si uvedeme dvě důležité věty, které nám budou sloužit jako návod pro výpočet derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí a derivace funkce složené. Uvádíme je bez důkazu, avšak pozorný čtenář by neměl mít problém je odvodit pomocí definice derivace 1.1.

Věta 1.1: Derivace – aritmetické operace

Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$ a cf , kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, mají v bodě x_0 derivaci a platí (pro podíl předpokládáme, že $g(x_0) \neq 0$ v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$):

$$(cf(x))'_{x=x_0} = cf'(x_0) \quad (1.3)$$

$$(f(x) + g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (1.4)$$

$$(f(x) - g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0) \quad (1.5)$$

$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (1.7)$$

Věta 1.2: Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládejme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivace v bodě x_0 a platí:

$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (1.8)$$

1.1.7 Řešené příklady

Příklad 1.1. Vypočtete f' , je-li f dána předpisem:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| (a) $f(x) = x$ | (d) $f(x) = \sqrt{x}$ |
| (b) $f(x) = x^2$ | (e) $f(x) = \sqrt{x^3}$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ | (f) $f(x) = 2^x$ |

Řešení

- (a) $f'(x) = (x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1, x \in \mathbb{R}$
 (b) $f'(x) = (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, x \in \mathbb{R}$
 (c) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 (d) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}^+$
 (e) $f'(x) = (\sqrt{x^3})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$
 (f) $f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2, x \in \mathbb{R}$

Pozn. Definiční obor nepřímé úměrnosti $f(x) = \frac{k}{x}$ je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 1.2. Vypočtete f' , je-li f dána předpisem:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ | (e) $f(x) = 10e^{\sin^2(x^3+x^2+1)}$ |
| (b) $f(x) = (x^2 + 3)^3$ | (f) $f(x) = x^2e^x$ |
| (c) $f(x) = \frac{3}{x^2+5}$ | (g) $f(x) = \frac{x}{(a+bx)^2}, a, b \in \mathbb{R}$ |
| (d) $f(x) = 3 \sin(8x + 2)$ | (h) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ |

Řešení

(a) Použijeme vzorec 1.4 pro derivaci součtu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 2)' = \\ &= (x^4)' + (x^3)' + (x^2)' + (x)' + (2)' = \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

(b) Použijeme vzorec 1.8 pro derivaci složené funkce.

Označíme: $f(u) = u^3$ a $u = g(x) = x^2 + 3$.

Derivace vnější funkce: $f'(u) = (u^3)' = 3u^2$ (podle u).

Derivace vnitřní funkce: $g'(x) = (x^2 + 3)' = 2x$ (podle x).

Výsledek: $F'(x) = f'(u)g'(x) = 3u^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 3)^2$

Pozn. Při počítání derivace složené funkce nezapomeneme v posledním kroku dosadit zpět původní proměnnou.

(c) Všimneme si, že čítec je nezávislý na x , a tedy budeme počítat pomocí vzorce 1.8 pro derivaci složené funkce (ověřte si výsledek použitím vzorce 1.7 pro derivaci podílu).

Označíme: $f(u) = \frac{3}{u} = 3u^{-1}$ a $u = g(x) = x^2 + 5$.

Derivace vnější funkce: $f'(u) = -\frac{3}{u^2}$.

Derivace vnitřní funkce: $g'(x) = 2x$.

Výsledek: $F'(x) = f'(u)g'(x) = -\frac{3}{u^2} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2+5)^2}$

(d) Použijeme vzorec 1.3 pro „vytknutí“ konstanty před derivací.

Zbytek dopočítáme jako složenou funkci: $f(u) = \sin u$ a $g(x) = 8x + 2$.

$F'(x) = 3f'(u)g'(x) = 3 \cos(8x + 2) \cdot 8 = 24 \cos(8x + 2)$

(e) V tomto případě se jedná o několikanásobně složenou funkci

Označíme:

$$f(u) = 10e^u$$

$$u(v) = v^2$$

$$v(w) = \sin w$$

$$w(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Použijeme tzv. řetězové pravidlo:

$$F'(x) = f'(u)u'(v)v'(w)w'(x)$$

$$= 10e^u \cdot 2v \cdot \cos(w) \cdot (3x^2 + 2x)$$

$$= 10e^{\sin^2(x^3+x^2+1)} \cdot 2 \sin(x^3 + x^2 + 1) \cdot \cos(x^3 + x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 2x)$$

(f) Použijeme vzorec 1.6 pro derivaci součinu:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (2 + x) x e^x$$

(g) Použijeme vzorec 1.7 pro derivaci podílu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{(a+bx)^2} \right)' = \frac{(x)'(a+bx)^2 - x[(a+bx)^2]'}{[(a+bx)^2]^2} = \frac{(a+bx)^2 - x(2b(a+bx))}{(a+bx)^4} \\ &= \frac{(a+bx)(a-bx)}{(a+bx)^4} = \frac{a-bx}{(a+bx)^3} \end{aligned}$$

(h) Derivace podílu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

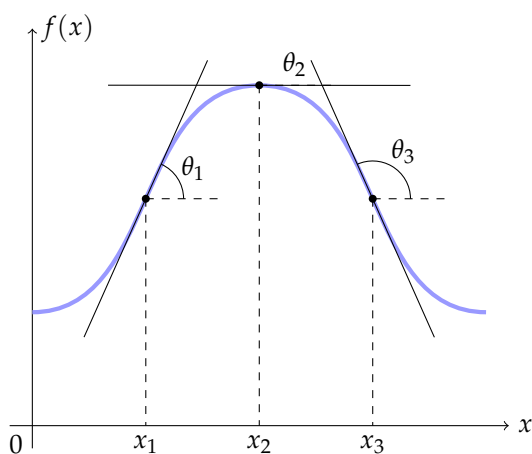
Pozn. Výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ je definicí jedné ze základních goniometrických funkcí. Které? Jaký je její definiční obor?

1.2 Určování extrémů funkce

Jak bylo uvedeno v kapitole 1.1.2, derivace geometricky představuje směrnici tečny grafu funkce v bodě. Tu si můžeme představit jako úhel mezi touto tečnou a souřadnicovou osou x (na grafu na obr. 1.1 označen θ). Pokud tečnu popíšeme rovnicí $y = kx + q$, pak platí

$$k = \tan \theta = f'(x_0).$$

Pro rostoucí úsek funkce dostáváme kladnou směrnici, a tedy i derivace funkce v těchto bodech nabývá kladných hodnot. Naopak směrnice tečen grafu funkce v klesajícím úseku mají zápornou směrnici, a tak derivace funkce je zde záporná. Pokud derivace vychází nulová, může jít o lokální extrém (minimum nebo maximum).

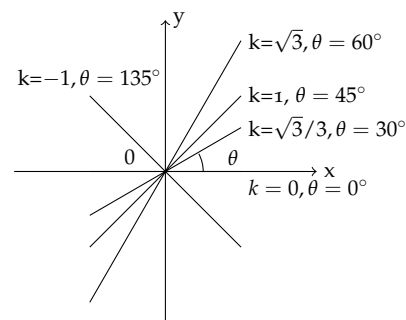


Obrázek 1.2: Derivace jako směrnice tečny

Tuto vlastnost derivace ilustrujeme na grafu na obr. 1.2. Funkce f je v bodě x_1 rostoucí. Tečnou v tomto bodě je tedy rostoucí přímka se směrnici $k = \tan \theta_1 > 0$ a $\theta_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$.

Naopak funkce f je v bodě x_3 klesající, tj. tečna v tomto bodě klesá se směrnici $k = \tan \theta_2 < 0$ a $\theta_2 \in (90^\circ, 180^\circ)$. Je-li funkce na daném intervalu rostoucí nebo klesající, říkáme, že funkce je na tomto intervalu *monotónní*, viz také Věta 1.3.

Bod x_2 je lokálním maximem funkce a tečna v tomto bodě je rovnoběžná s osou x , tj. $k = \tan \theta_3 = 0$ a $\theta_3 = 0^\circ$.



Obrázek 1.3: Rostoucí přímky (tečny) s kladnou směrnici, klesající přímky se zápornou směrnici.

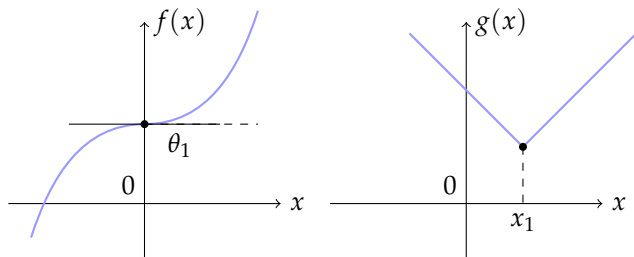
Věta 1.3: Derivace a monotónnost funkce

Nechť funkce f má na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, derivaci. Je-li

1. $f'(x_0) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f rostoucí na (a, b) .
2. $f'(x_0) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f neklesající na (a, b) .
3. $f'(x_0) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f klesající na (a, b) .
4. $f'(x_0) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f nerostoucí na (a, b) .
5. $f'(x_0) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f konstantní na (a, b) .

1.2.1 Lokální extrémy

Nyní se budeme zabývat tím, jak zjistit body, ve kterých funkce nabývá lokálního extrému, a jakého druhu extrém je (minimum nebo maximum).



Grafy na obr. 1.4 dále ukazují neplatnost ekvivalence mít nulovou (vlastní) derivaci v bodě a nabývat lokálního extrému.

Na levém grafu vidíme, že v bodě $x = 0$ má funkce $f(x)$ nulovou derivaci (tečnu se směrnici $k = 0$, tj. rovnoběžnou s osou x), ale o lokální extrém se nejedná. V tomto případě jde o tzv. *inflexní bod*.

Naproti tomu na pravém grafu funkce $g(x)$ má v bodě x_1 jistě lokální minimum, ale nemá v něm derivaci (přibližujeme-li se k bodu zleva, dostáváme jinou tečnu, než když se přibližujeme zprava). A tedy i body definičního oboru, v nichž neexistuje derivace, musíme považovat za podezřelé z extrému.

Závěrem tedy dostáváme Větu 1.4.

Věta 1.4

Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Tato věta je ovšem implikací, tedy platí, že pokud víme, že funkce má v daném bodě lokální extrém, platí, že má v tomto bodě nulovou derivaci, nebo derivace neexistuje. Naopak však, jak jsme ilustrovali výše, tvrzení platit nemusí. Proto při vyšetřování extrémů postupujeme následujícím postupem: nejprve zjistíme všechny body, pro které $f'(x_0) = 0$ (tzv. stacionární body) a body, ve kterých derivace neexistuje. Tyto podezřelé body vyšetříme, zdali jsou skutečnými extrémy a jakého typu.

Shrneme si celý postup hledání lokálních extrémů v několika bodech:

1. Vypočítejte první derivaci dané funkce.
2. Tuto derivaci položte rovnou nule a spočítejte body x_0 , pro které tato rovnost platí.
3. Vypočítejte druhou derivaci funkce.
4. Dosad'te body x_0 do předpisu druhé derivace.

Lokální extrémy

Lokální minimum v bodě x_0 nastává v případě, když jsou hodnoty funkce v okolí bodu x_0 větší než $f(x_0)$.

Lokálního maximum naopak tehdy, když hodnoty funkce v okolí toho bodu jsou menší než $f(x_0)$.

Obrázek 1.4: Nulová derivace versus lokální extrém

Pozn. V tomto případě mluvíme o tzv. podmínce *nutné*, tj. pro každý lokální extrém musí platit, že první derivace v daném bodě je nulová nebo neexistuje. Není to však podmínka *dostačující*, tj. splnění této podmínky neznamená, že v daném bodě musí nutně lokální extrém nastávat.

5. Je-li $f''(x_0) > 0$, nastává lokální minimum, je-li $f''(x_0) < 0$ nastává lokální maximum. Pro $f''(x_0) = 0$ můžeme dostat inflexní bod.
6. Nalezňte všechny body x_1 definičního oboru funkce f , ve kterých neexistuje derivace.
7. Ověřte, že v okolí bodu x_1 jsou funkční hodnoty $f(x)$ vyšší než $f(x_1)$, pak nastává lokální maximum. Pokud jsou funkční hodnoty $f(x)$ v okolí bodu x_1 menší než $f(x_1)$, pak nastává lokální minimum.
8. *Pozn.* Výpočet druhé derivace nemusíme vždy provádět. Ve vhodných případech stačí porovnat funkční hodnoty bodů v okolí bodu podezřelého z extrému.

1.2.2 Řešené příklady

Příklad 1.3. Nalezňte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 + 6x^2$.

Řešení

1. Definiční obor funkce f je $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme první derivaci:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$

3. $f'(x)$ položíme rovno nule a vyřešíme vzniklou rovnici:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 12x \equiv 0 \\ 3x(x + 4) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -4 \\ \Rightarrow x_2 &= 0 \end{aligned}$$

4. $f'(x)$ je mnohočlen, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(f') = \mathbb{R}$, a tedy neexistují body definičního oboru, ve kterých by derivace neexistovala.
5. Spočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = 6x + 12$$

6. Do předpisu pro druhou derivaci dosadíme x_1 a x_2 a zjistíme o jaký typ extrému se jedná.

$$f''(x_1) = 6 \cdot (-4) + 12 = -12 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$f''(x_2) = 6 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

7. Alternativně lze vytvořit tabulku s nalezenými podezřelými body a intervaly monotonie (intervaly ohraničené podezřelými body), z každého takového intervalu pak dosadit jeden bod do vzorce pro první derivaci a zjistit znaménko výsledku. Pokud je

Pozn. V při řešení této rovnice jsme použili rozkladu na součinný tvar. To je výhodné z toho důvodu, že platí tvrzení: *Součin několika čísel nebo výrazů se rovná nule právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů se rovná nule.*

Pozn. Mnohočlen (polynom) je výraz typu

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

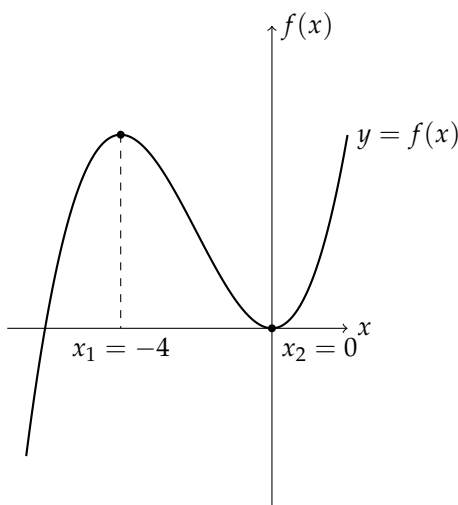
Jeho definičním oborem jsou všechna reálná čísla.

vlevo od podezřelého bodu funkce rostoucí a vpravo klesající, našli jsme lokální maximum. V případě, že vlevo od podezřelého bodu je funkce klesající a vpravo rostoucí, našli jsme lokální minimum. Všechny ostatní případy nevedou na lokální extrém.

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Tabulka 1.2: Příklad 1.3 – lokální extrémy funkce

8. Pro názornost se podíváme na graf průběhu funkce f a ověříme, zda skutečně bod $x_1 = -4$ je lokální maximum a $x_2 = 0$ lokální minimum:



Obrázek 1.5: Příklad 1.3 – průběh funkce $f(x) = x^3 + 6x^2$

Příklad 1.4. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.

Řešení

1. Definiční obor funkce f je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
2. Spočteme první derivaci (derivace podílu):

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2 \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$$

$f'(x)$ existuje na celém definičním oboru f , tj. $D(f) = D(f')$.

3. $f'(x)$ položíme rovno nule a vyřešíme vzniklou rovnici:

$$\frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} \equiv 0$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -6$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

Pozn. V tomto případě se jedná o tzv. racionální lomenou funkci, tj. libovolný zlomek p/q polynomů. Definiční obor takové funkce jsou všechna reálná čísla s výjimkou kořenů $q(x)$.

Pozn. Nulový bod lomené funkce je nulovým bodem jejího čitatele. Jmenovatel naopak nesmí nikdy nabývat.

4. Spočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x) \cdot 2 \cdot (x+3)}{(x+3)^4} = \frac{18}{(x+3)^3}$$

5. Do předpisu pro druhou derivaci dosadíme x_1 a x_2 zjistíme, o jaký druh extrému se jedná.

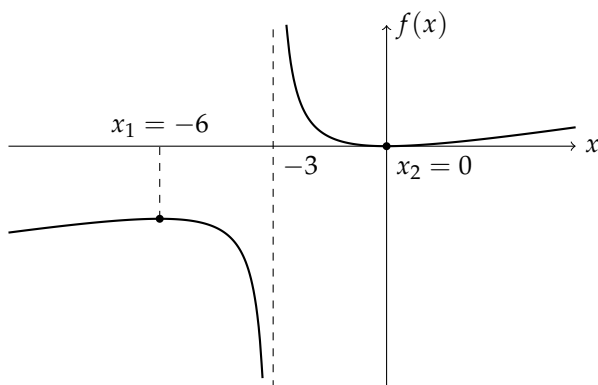
$$f''(x_1) = f''(-6) = \frac{18}{(-6+3)^3} < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$f''(x_2) = f''(0) = \frac{18}{(0+3)^3} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

6. Opět ověříme výsledek i pomocí tabulky:

	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	není def.	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	není def.	↘	lok. min.	↗

7. Pro názornost se podíváme na na graf funkce $f(x)$ a ověříme námi vypočtené extrémy:



Tabulka 1.3: Příklad 1.4 – lokální extrémy funkce

Obrázek 1.6: Příklad 1.4 – průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

Lokální vs globální extrém

Je potřeba rozlišovat mezi lokálním a globálním extrémem funkce. V tomto konkrétním případě v bodě $x_1 = -6$ nastává lok. maximum, protože všechny funkční hodnoty všech bodů v jeho blízkém okolí jsou menší než $f(-6)$. Tato hodnota avšak není globálním extrémem na celém celém D_f , neboť např. všechny hodnoty funkce pro $x > -3$ jsou větší než $f(-6)$.

1.3 Užití diferenciálního počtu

V této kapitole si ukážeme, jak lze poznatky z diferenciálního počtu využít při řešení úloh z matematiky, fyziky a elektrotechniky. Některé úlohy vedou na zjištění lokálních extrémů funkcí. Řešíme je podle obecného schématu:

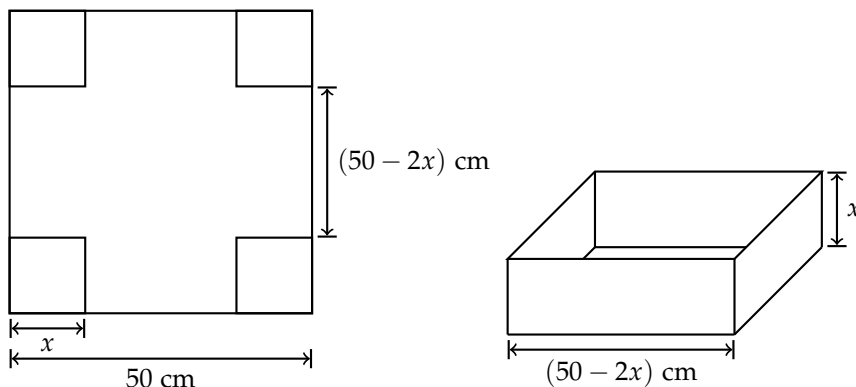
1. Označíme jednotlivé veličiny patřičnými proměnnými.
2. Vyjádříme veličinu, kterou budeme maximalizovat nebo minimalizovat, pomocí těchto proměnných.
3. Zjistíme vztahy (tj. soustavu rovnic) spojující tyto proměnné tak, aby je všechny bylo možné vyjádřit pomocí jediné proměnné.
4. Funkční předpis veličiny z bodu 2 přepíšeme tak, aby byl závislý pouze na jedné proměnné.
5. Nalezneme lokální extrémy této veličiny.

1.3.1 Matematické úlohy

Příklad 1.5. Z papíru tvaru čtverce o straně 50 cm vystříháme ve všech rozích stejné čtverečky a ze zbylé části složíme krabičku. Určete stranu vystřižených čtverečků tak, aby objem výsledné krabičky byl maximální možný.

Řešení

Hledanou stranu čtverečku označíme x a situaci zakreslíme do obrázku:



Obrázek 1.7: Příklad 1.5 – skládání krabičky

Je patrné, že výsledný kvádr bude mít strany o délkách $(50 - x)$ cm, $(50 - x)$ cm a x . Jeho objem bude tedy:

$$V(x) = (50 - 2x)^2 x = 4x^3 - 200x^2 + 2500x$$

Objem závisí pouze na hledané neznámé x , proto tuto funkci označíme $V = V(x)$ a podle zadání ji budeme maximalizovat, tj. spočteme její derivaci, kterou položíme nule:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 2(50 - 2x)(-2)x + (50 - 2x)^2 \equiv 0 \\ (50 - 2x)(-4x + 50 - 2x) &= 0 \\ (50 - 2x)(50 - 6x) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 25 \text{ cm} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{50}{6} \text{ cm} = \frac{25}{3} \text{ cm} \doteq 8,3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Řešení x_1 zamítáme, protože po vystřížení takových čtverečků by z původního papíru nic nezbylo. Že pro x_2 nabývá funkce $V(x)$ maxima ověříme pomocí 2. derivace:

$$\begin{aligned} V'(x) &= (50 - 2x)(50 - 6x) = 12x^2 - 400x + 2500 \\ V''(x) &= 24x - 400 \\ V''(x_2) &= V''\left(\frac{25}{3}\right) = 24 \cdot \frac{25}{3} - 400 = -200 < 0 \Rightarrow \text{maximum} \end{aligned}$$

Vypočtené x_2 je tedy lokálním maximum funkce $V(x)$, a tedy i hledanou stranou vystřiženého čtverečku.

Příklad 1.6. Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2,0l měla co nejmenší povrch.

Řešení Označíme poloměr válcové nádoby r a její výšku h , pak vzorec pro výpočet jejího objemu je:

$$V = 2\pi r^2 h \quad (1.9)$$

Povrch spočítáme jako obsah pláště a dvakrát obsah podstavy, tj. kruhu o poloměru r :

$$P = P_{pl} + 2P_{pod} = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad (1.10)$$

Takto je povrch vyjádřen jako funkce 2 proměnných r a h . Proto z rovnice 1.9 vyjádříme h jako funkci r a dosadíme do rovnice 1.10:

$$\begin{aligned} h &= \frac{V}{2\pi r^2} \\ \Rightarrow P &= 2\pi r \frac{V}{2\pi r^2} + 2\pi r^2 \\ &= \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Nyní se nám podařilo vyjádřit P za pomoci jediné proměnné r (V je konstanta, $V = 21 = 2 \text{ dm}^3$), a proto můžeme začít hledat její maximum:

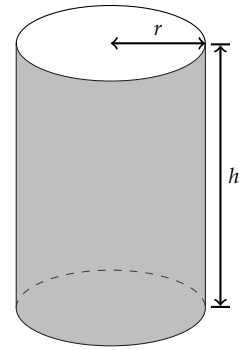
$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \\ P'(r) &= -\frac{V}{r^2} + 4\pi r \equiv 0 \quad / \cdot r^2 \quad (r \neq 0) \\ -V + 4\pi r^3 &= 0 \\ \Rightarrow r_0 &= \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2,0}{4\pi}} \text{ dm} \doteq 0,54 \text{ dm} \end{aligned}$$

Ověříme pomocí 2. derivace, zda toto r_0 opravdu minimalizuje $P(r)$:

$$\begin{aligned} P''(r) &= \frac{2V}{r^3} + 4\pi \\ P''(r_0) &= \frac{2V}{\frac{2}{4\pi}} + 4\pi = 4\pi V + 4\pi > 0 \Rightarrow \text{minimum} \end{aligned}$$

Když máme potvrzeno, že se jedná o lokální minimum, dopočítáme výšku h – druhý parametr válce:

$$h_0 = \frac{V}{2\pi r_0^2} = \frac{V}{2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}\right)^2} = \frac{2,0}{2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{2,0}{4\pi}}\right)^2} \text{ dm} \doteq 1,1 \text{ dm}$$



Obrázek 1.8: Příklad 1.6 – válcová nádoba

- obsah postavy: $S_p = \pi r^2$
- obsah pláště: $S_{pl} = 2\pi r h$
- povrch:
 $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

veličina	značka	vztah	pozn.
rychlost	v	$v = \frac{ds}{dt}$	s – dráha
zrychlení	a	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	
síla	F	$F = \frac{dp}{dt}$	I. impulsová věta p – hybnost ($p = mv$)
úhlová rychlost	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	φ – úhlová dráha
úhlové zrychlení	ϵ	$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	
moment síly	M	$M = \frac{dL}{dt}$	II. impulsová věta L – moment hybnosti $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ J – moment setrvačnosti
napětí indukované v cívce	u	$u = -L \frac{di}{dt}$	i – proud protékající cívkou L – indukčnost cívky
proud protékající kondenzátorem	i	$i = C \frac{du}{dt}$	u – napětí na kondenzátoru C – kapacita kondenzátoru
okamžitý proud indukované	i	$i = \frac{dq}{dt}$	q – elektrický náboj Faradayův zákon
elektromotorické napětí	u	$u = -\frac{d\Phi}{dt}$	elektromagnetické indukce

1.3.2 Fyzikální úlohy

Ve fyzice jsou mnohé veličiny charakterizovány jako derivace jiných veličin. Často se setkáváme s derivací podle času, např. v kinematice se definuje velikost okamžité rychlosti v jako derivace dráhy s podle času t :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Jde o limitní případ známého vzorce pro průměrnou rychlost na úseku Δs , který jsme projeli za čas Δt :

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Tabulka 1.4 uvádí některé důležité fyzikální veličiny vyjádřené jako derivace jiných veličin.

Protože jsme se s derivacemi naučili počítat v předchozích kapitolách, ukážeme si, jak toho využít při řešení základních fyzikálních úloh.

Příklad 1.7. Pohyb tělesa je popsán rovnicí $s = t^2 + 3t - 5$ (m; s). Určete uraženou dráhu, okamžitou rychlost a zrychlení v čase $t = 5,0$ s.

Řešení

- Dráhu spočítáme jednoduchým dosazením do vzorce ze zadání:

$$s(t = 5,0 \text{ s}) = (5,0^2 + 3 \cdot 5,0 - 5) \text{ m} = 35 \text{ m}$$

Tabulka 1.4: Vybrané fyzikální veličiny vyjádřené derivací

Pozn. Některé z uvedených veličin jsou takzvané *vektorové veličiny*. K jejich úplnému určení je potřeba znát nejen číselnou hodnotu a měřicí jednotku (jak je tomu u *skalárních veličin*), ale i směr – např. rychlost, síla, hybnost, moment síly. V následujícím textu se však budeme zabývat jen jejich velikostmi, tj. pod pojmem *rychlost* budeme chápat *velikost rychlosti* apod.

Pozn. Rovnice následovaná jednotkami v závorce v tomto případě značí, že budeme-li dosazovat čas v sekundách, dráha bude udána v metrech. V následujících úlohách obdobně.

- Okamžitou rychlost spočítáme podle výše uvedeného vzorce

$$v = \frac{ds}{dt}:$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = (t^2 + 3t - 5)' = 2t + 3$$

$$v(t = 5,0 \text{ s}) = (2 \cdot 5,0 + 3) \text{ m s}^{-1} = 14 \text{ m s}^{-1}$$

- Okamžité zrychlení pak spočítáme jako derivaci rychlosti podle času (neboli druhou derivaci dráhy podle času):

$$a(t = 5,0 \text{ s}) = \frac{dv}{dt} = (2t + 3)' = 2 \text{ m s}^{-2}$$

Pozn. Můžeme si všimnout, že zatímco dráha a rychlost závisí na čase, zrychlení vyšlo v čase konstantní.

Příklad 1.8. Těleso se pohybuje po dráze popsané rovnicí:

$$s(t) = t^2 - \frac{t^3}{3} + 3t + 8 \text{ (m; s)}.$$

1. Za jaký čas se zastaví?
2. Jaké bude jeho zrychlení v čase $t = 0,50 \text{ s}$?
3. Jakou dráhu urazí do zastavení?

Řešení

1. Těleso se zastaví v čase, kdy bude jeho rychlost nulová. Nejdříve tedy z předpisu pro dráhu spočítáme závislost rychlosti na čase pomocí derivace, a následně nalezený vztah položíme roven nule a dopočítáme hledané t .

$$v = \frac{ds}{dt} = (t^2 - \frac{t^3}{3} + 3t + 8)' = 2t - t^2 + 3 \equiv 0$$

$$2t - t^2 + 3 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$$

$$\Rightarrow t_2 = -1 \text{ s}$$

Řešení $t_2 = -1 \text{ s}$ neuvažujeme, protože hledaný čas bude zřejmě kladný, a tudíž výsledkem je čas $t_1 = 3 \text{ s}$, kdy se těleso zastaví.

2. Zrychlení spočteme podle vzorce $a = \frac{dv}{dt}$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (2t - t^2 + 3)' = 2 - 2t$$

$$a(t = 0,50 \text{ s}) = (2 - 2 \cdot 0,50) \text{ m s}^{-2} = 1,0 \text{ m s}^{-2}$$

3. Z bodu 1. víme, že se těleso zastaví po 3 s, a tudíž stačí toto t dosadit do vztahu pro dráhu:

$$s(t = 3 \text{ s}) = (3^2 - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 + 8) \text{ m} = 17 \text{ m}$$

Rozklad kvadratického trojčlenu na součinnový tvar

Kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$, tj. kvadratický koeficient je roven 1, lze rozložit na součin následujícím způsobem:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice. A platí $x_1 x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$.

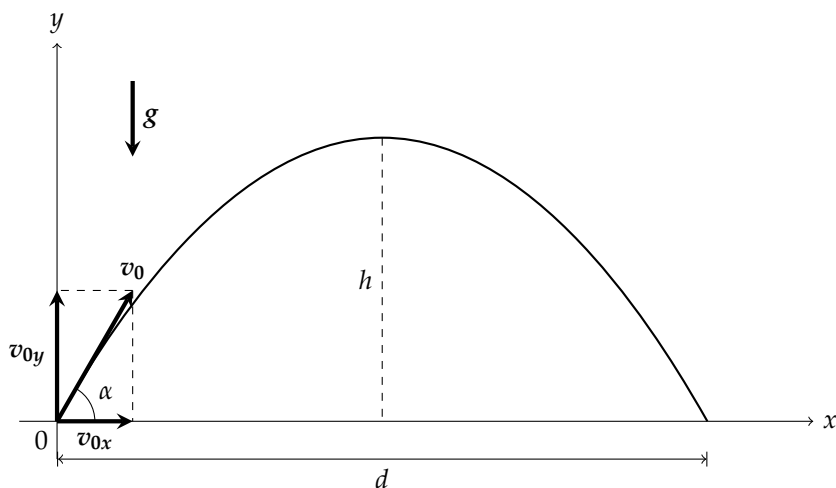
Příklad 1.9. Uvažujme vrh šikmý vzhůru s nulovou počáteční výškou. Počáteční rychlost v_0 ($v_0 = 15 \text{ m s}^{-1}$) svírá s vodorovnou rovinou elevační úhel $\alpha = 60^\circ$. Odpor prostředí můžeme zanedbat.

Uvažujte velikost tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

1. Určete maximální výšku vrhu.
2. Určete délku vrhu.
3. Určete elevační úhel, při kterém je délka vrhu při zadané velikosti počáteční rychlosti maximální.

Řešení

1. Situaci nejdříve znázorníme pomocí schématu na obr. 1.9.



Obrázek 1.9: Příklad 1.9 – vrh šikmý vzhůru

Zkoumaný pohyb můžeme rozložit do dvou složek určených souřadnicovými osami – rovnoměrný pohyb ve směru osy x (neuvažujeme působení tíhové síly) a zrychlený pohyb ve směru osy y (působí tíhová síla). Jednotlivé složky lze popsat rovnicemi známými z kinematiky hmotného bodu:

$$x = v_{0x}t \quad (1.11)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.12)$$

Vektor počáteční rychlosti v_0 jsme rozložili do složek pomocí vztahů známých z goniometrie:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (1.13)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha \quad (1.14)$$

Maximální výšku vrhu určíme jako maximum svislé složky y .

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Pohyb každé z popsaných složek je konkrétním případem *rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu*, tj. pohybu po přímce se stálým zrychlením a .

Pro rychlost a dráhu platí:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Pozn. Ve vztahu 1.12 vystupuje záporné znaménko z toho důvodu, že vektor tíhového zrychlení g je opačně orientovaný vzhledem k souřadné ose y .

Spočítáme, pro jaký čas t_h toto nastává pomocí první derivace:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)' = v_{0y} - gt \equiv 0 \\ &\Rightarrow t_h = \frac{v_{0y}}{g} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nyní toto t_h dosadíme zpět do vztahu pro y a získáme maximální výšku h :

$$\begin{aligned} h = y(t = t_h) &= v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} \\ &= \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ h &= \frac{15^2 \sin^2 60^\circ}{2 \cdot 9,81} \text{ m} \doteq 8,60 \text{ m} \end{aligned} \quad (1.16)$$

2. Délku vrhu d určíme jako vzdálenost od počátku souřadné soustavy k bodu, kde trajektorie protíná osu x . V tomto bodě bude y -ová souřadnice rovna nule, tj. hledáme nulové body funkce $y = y(t)$:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \equiv 0 \\ t(v_{0y} - \frac{1}{2}gt) &= 0 \\ &\Rightarrow t_0 = 0 \\ &\Rightarrow t_D = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Řešení t_0 souhlasí s počátkem vrhu, nás však zajímá řešení t_D . Délku vrhu dopočítáme dosazením tohoto času do rovnice pro x -ovou složku pohybu:

$$\begin{aligned} d = x(t = t_D) &= v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \\ &= \frac{15^2}{9,81} \sin(2 \cdot 60^\circ) \text{ m} \doteq 19,9 \text{ m} \end{aligned} \quad (1.18)$$

3. Hledáme elevační úhel, při kterém bude délka vrhu co nejdelší. Neboli maximalizujeme délku vrhu vzhledem k elevačnímu úhlu. K tomu využijeme vztah 1.18. Tak jako v předchozích případech, budeme tuto funkci $d = d(\alpha)$ maximalizovat pomocí hledání nulových bodů její derivace:

$$\begin{aligned} \frac{dd(\alpha)}{d\alpha} &= \left(\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \right)' = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\alpha) \equiv 0 \\ \cos(2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

$$2\alpha = 90^\circ \text{ uvažujeme pouze } \alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Tedy při zadané velikosti počáteční rychlosti je vrh vždy nejdelší při elevačním úhlu 45° .

Základní goniometrické vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

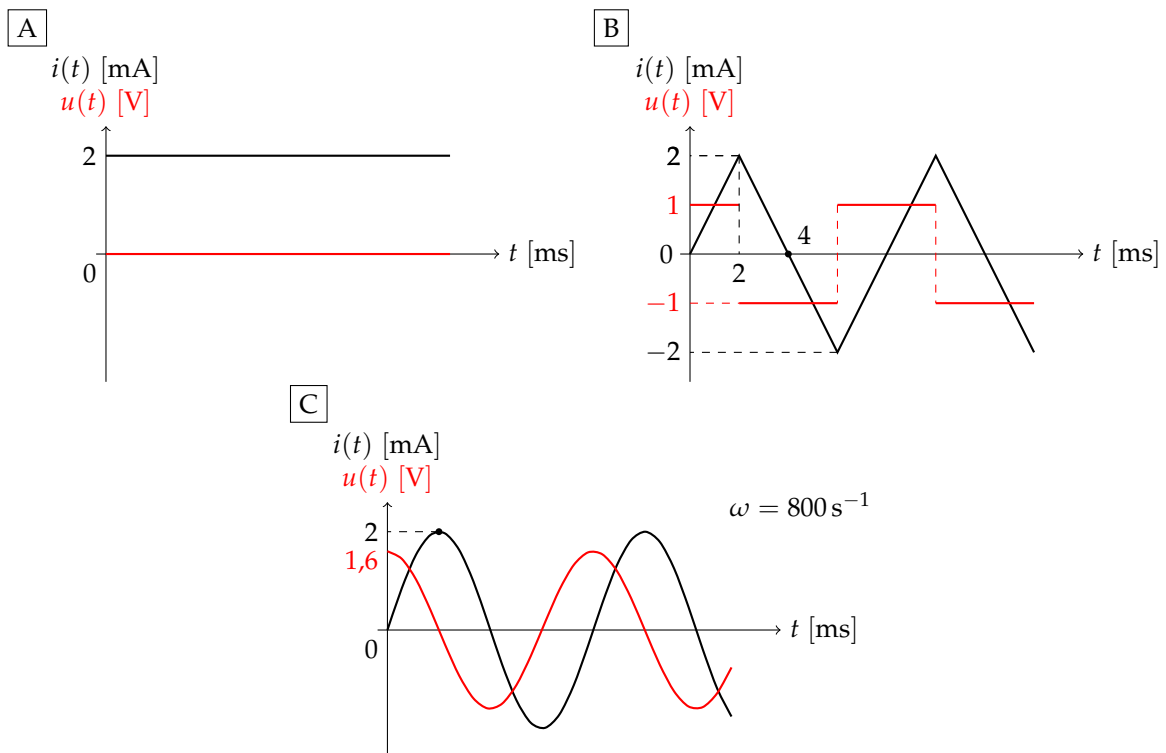
$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

Pozn. Derivujeme podle proměnné α , neboť v tomto případě je v_0 zadané – konstantní.

1.3.3 Elektrotechnické úlohy

Příklad 1.10. Uvažujme cívku o indukčnosti $L = 1$ H. Zakreslete následující průběhy proudu procházejícího cívkou, a dále spočítejte a zakreslete do stejného grafu průběh napětí na cívce:

1. Konstantní proud $I = 2$ mA.
2. Symetrický trojúhelníkový průběh proudu s amplitudou (maximálním proudem) $I_m = 2$ mA a periodou $T = 8$ ms.
3. Sinusový průběh proudu $i(t) = 2 \sin(800t)$ (mA;s), tj. s amplitudou $I_m = 2$ mA a úhlovou frekvencí $\omega = 800$ s⁻¹.



Obrázek 1.10: Příklad 1.10 – průběhy proudu a napětí na cívce

Řešení Ve všech případech použijeme k výpočtu napětí na cívce při znalosti proudu jí protékající vzorec 1.19.

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.19)$$

kde L je indukčnost cívky (jednotka H - henry).

1. Napětí na cívce je úměrné derivaci proudu, který jí protéká. V tomto případě je proud konstantní. Protože $(c)' = 0$, kde c je konstanta, tak napětí bude nulové.

Tedy protéká-li cívkou konstantní (stejnoseměrný) proud, neměříme na ní úbytek napětí, tj. cívka se v tomto případě chová jako přímý vodič.

Indukčnost cívky

Tak jako rezistor je charakterizován svým odporem R , je cívka charakterizována svojí indukčností L .

Indukčnost cívek bez jádra je řádově $10^{-6} - 10^{-2}$ H, tlumivky s jádrem mají indukčnost $10^{-1} - 10^2$ H.

2. Trojúhelníkové napětí vyznačíme černě do grafu na obr. 1.10b.

První způsob

Funkci $i = i(t)$ popíšeme po částech. Protože se periodicky opakuje, postačí, když popíšeme pouze první dva segmenty:

$$i(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 2 \rangle \text{ ms} \\ -t + 4 & \text{pro } t \in \langle 2, 6 \rangle \text{ ms} \end{cases} \quad (\text{mA}) \quad (1.20)$$

Nyní opět použijeme vzorec 1.19:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in (0, 2) \text{ ms} \\ -1 & \text{pro } t \in (2, 6) \text{ ms} \end{cases} \quad (\text{V})$$

Všimneme si, že z původně uzavřených intervalů se staly intervaly otevřené. A to díky tomu, že tento průběh má v některých bodech ($t = 2 \text{ ms}, 6 \text{ ms}, 10 \text{ ms}, \dots$) „špičky“ (podobně jako absolutní hodnota), ve kterých oboustranná derivace není definována.

Druhý způsob

Jednodušším způsobem je uvědomit si, že ve vzorci 1.19 vystupuje derivace proudu podle času, tedy časová změna proudu. Protože v tomto případě jednotlivé části $i = i(t)$ jsou lineární funkce, jejich směrnice je přímo derivací. Z grafu se snadno přesvědčíme, že směrnice rostoucích částí je 1, zatímco částí klesajících -1 . Protože dle zadání $L = 1 \text{ H}$, pak to jsou přímo i výsledná napětí na příslušných intervalech.

3. Předpis pro průběh proudu přepíšeme tak, aby v něm vystupovaly veličiny v jednotkách nenásobných a nedílných:

$$i(t) = 0,002 \sin(800t) \quad (\text{A}; \text{s}) \quad (1.21)$$

Nyní opět spočítáme proud podle vztahu 1.19:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 1 \cdot 0,002 \cdot 800 \cos(800t) = 1,6 \cos(800t) \quad (\text{V}; \text{s})$$

Můžeme si dále všimnout, že platí:

$$u(t) = 1,6 \cos(800t) = 1,6 \sin\left(800t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tedy, pokud cívkou prochází harmonický proud (tj. sinusového průběhu), pak je opožděn za napětím o fázový rozdíl $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 1.11. Uvažujme elektrický obvod se spotřebičem o odporu R připojeným ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i . Pro jakou hodnotu odporu spotřebiče R na něm naměříme nejvyšší výkon?

Pozn. Použité jednotky proudu jsou mA, čas měříme v ms. Tedy jednotka derivace proudu podle času $\frac{di(t)}{dt}$ je $\frac{\text{mA}}{\text{ms}} = \frac{\text{A}}{\text{s}}$, tudíž stejně jako bychom použili jednotky základní. Výsledné napětí pak vychází skutečně ve voltech.

Pozn. Tento vzorec ověříme dosazením do vztahu

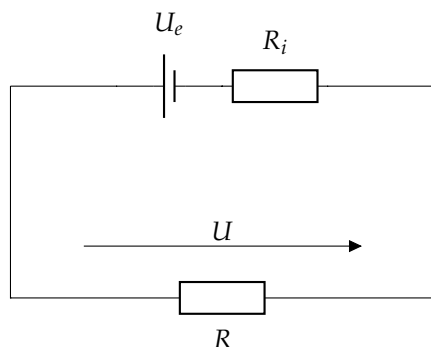
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Tedy:

$$\begin{aligned} & \sin\left(800t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(800t) \cos \frac{\pi}{2} + \cos(800t) \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \sin(800t) \cdot 0 + \cos(800t) \cdot 1 \\ &= \cos(800t) \end{aligned}$$

Řešení

Obvod na obr. 1.11 ilustruje situaci popsanou v zadání.



Vnitřní odpor zdroje napětí se chová jako rezistor o odporu R_i zapojený sériově ke zdroji elektromotorického napětí U_e . Napětí na spotřebiči určíme pomocí vztahu pro dělič napětí¹:

$$U = U_e \frac{R}{R + R_i}$$

Tento vztah dosadíme do vzorce pro výkon stejnosměrného proudu:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{U_e^2 R}{(R + R_i)^2}$$

Protože hledáme maximální výkon v závislosti na velikosti odporu zapojeného rezistoru, maximalizujeme funkci $P = P(R)$ (derivujeme pomocí vzorce pro podíl):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= U_e^2 \frac{(R + R_i)^2 - 2R(R + R_i)}{(R + R_i)^4} \equiv 0 \\ (R + R_i)^2 - 2R(R + R_i) &= 0 & (1.22) \\ (R + R_i)(-R + R_i) &= 0 \\ \Rightarrow R_{max} &= R_i \end{aligned}$$

Aby na spotřebiči ze zadání byl maximální výkon, musí se jeho odpor rovnat vnitřnímu odporu zdroje.

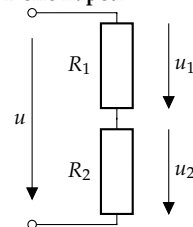
Příklad 1.12. Cívka obdélníkového tvaru o rozměrech a, b a o N závitěch se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω v homogenním magnetickém poli o velikosti magnetické indukce B . Rovina cívky svírá s rovinou kolmou k indukčním čarám počáteční úhel α_0 . Odvod'te vztah pro napětí $U_i(t)$ na svorkách tohoto jednoduchého generátoru střídavého napětí (viz obr. 1.12).

Řešení Při řešení vyjdeme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce ve tvaru:

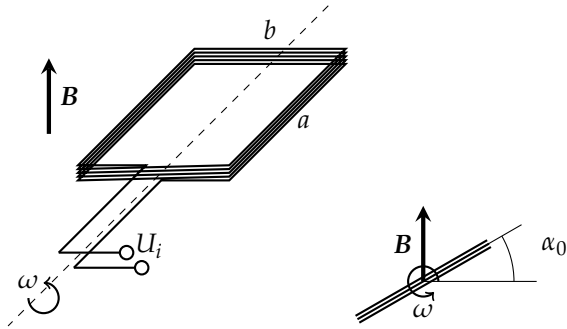
$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.23)$$

neboli *indukované elektromagnetické napětí v elektrickém obvodu je rovno časové změně magnetického indukčního toku Φ procházejícího cívkou.*

Obrázek 1.11: Příklad 1.11 – maximalizace výkonu na spotřebiči

¹ Dělič napětí

$$\begin{aligned} u_1 &= u \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ u_2 &= u \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{u_1}{u_2} &= \frac{R_1}{R_2} \end{aligned}$$



Obrázek 1.12: Příklad 1.12 – jednoduchý generátor

Pro homogenní magnetické pole (o indukci B) a rovinnou plochu S platí: $\Phi = BS \cos \alpha$, kde α je úhel, který svírá vektor magnetické indukce s rovinou S .

V našem případě $S = ab$ a α se rovnoměrně mění úhlovou rychlostí ω s počátečním úhlem α_0 , tedy

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$$

Celkový magnetický indukční tok je (uvažujeme N závitů):

$$\Phi(t) = NBab \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Nyní využijeme vzorec 1.23 a spočítáme výsledné napětí na svorkách cívky:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -[NBab \cos(\omega t + \alpha_0)]' = NBab\omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

1.4 Úlohy k samostatnému řešení

Příklad 1.13. Vypočtěte f' , je-li f dána předpisem:

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = 2 \sin x \cos x$ | (j) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5$ |
| (b) $f(x) = \sin 2x$ | (k) $f(x) = 2x + \sin x - \frac{1}{5}$ |
| (c) $f(x) = \ln(x^a + x^{-a})$, $a \in \mathbb{R}$ | (l) $f(x) = \tan x + 10 \cot x$ |
| (d) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{8x^2 - 4x + 2}$ | (m) $f(x) = x \sin x$ |
| (e) $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^3}$ | (n) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{1-x^2}$ |
| (f) $f(x) = \frac{1}{x}$ | (o) $f(x) = \sin^2 x$ |
| (g) $f(x) = x^2 - 4x$ | (p) $f(x) = \sin x^2$ |
| (h) $f(x) = x^2 + x^3$ | (q) $f(x) = \sqrt{\sin(3x) + 5}$ |
| (i) $f(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$ | |

Příklad 1.14. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí (uvažujte největší možný definiční obor, není-li uvedeno jinak):

- (a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ (f) $f(x) = x + \cos(2x)$,
 (b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$ $x \in (0, \pi)$
 (c) $f(x) = x - \ln(1 + x)$
 (d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (g) $f(x) = 4x - \tan x$,
 (e) $f(x) = e^{-x^2}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 1.15. *Problém líného kosa.* Na plotě, jehož výška je 1 m, sedí kos. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 m. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozsety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má kos sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot \rightarrow žížala \rightarrow strom po přímkách a po nejkratší dráze?

Příklad 1.16. Uvažujme setrvačnick, jehož úhlová dráha je popsána rovnicí: $\varphi(t) = \frac{1}{3}\pi t^2 - \frac{7}{3}\pi t + 6\pi$.

Pozn. Využijte vztah $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

1. Určete jeho úhlovou rychlost ω v čase $t = 1$ s.
2. Za jaký čas se úhlová rychlost sníží na $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$?

Příklad 1.17. Okamžitá výchylka hmotného bodu je popsána rovnicí (kmitavý harmonický pohyb): $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde $y_m = 5$ cm je amplituda (maximální výchylka), $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ je úhlová rychlost a $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad je počáteční fáze.

1. Určete rychlost hmotného bodu v čase $t = 0,26$ s.
2. Určete zrychlení hmotného bodu v čase $t = 0,26$ s.

Příklad 1.18. Uvažujme kondenzátor o kapacitě $C = 1 \mu\text{F}$. Zakreslete následující průběhy napětí na kondenzátoru, a dále spočítejte a zakreslete do stejného grafu průběh proudu pro tři různé případy (viz grafy na obr. 1.13):

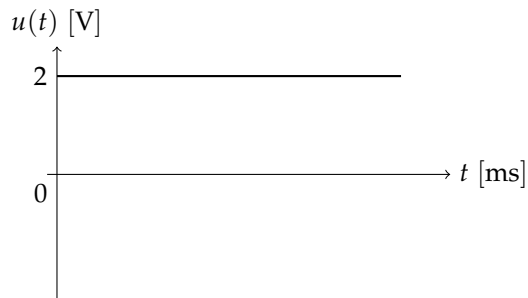
1. Konstantní napětí $U = 2$ V.
2. Symetrický trojúhelníkový průběh s amplitudou (maximálním napětím) $U_m = 2$ V a periodu $T = 8$ ms.
3. Sinusový průběh $u(t) = 2 \sin(800t)$ (V; s), tj. s amplitudou $U_m = 2$ V a úhlovou frekvencí $\omega = 800 \text{ s}^{-1}$.

Pozn. Inspirujte se příkladem 1.10 a využijte vzorec pro výpočet proudu procházejícího kondenzátorem:

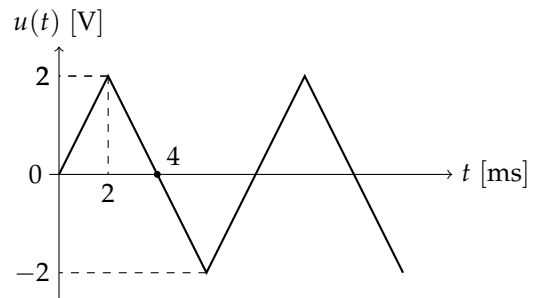
$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Příklad 1.19. Elektrický obvod zapojený podle schématu na obr. 1.14 obsahuje zdroj napětí o elektromotorickém napětí $U_e = 15$ V, a vnitřním odporu $R_i = 51 \text{ k}\Omega$ a dále spotřebič připojený mezi svorkami 1 a 2. Spočítejte hodnotu R tak, aby výkon na připojeném spotřebiči byl maximální.

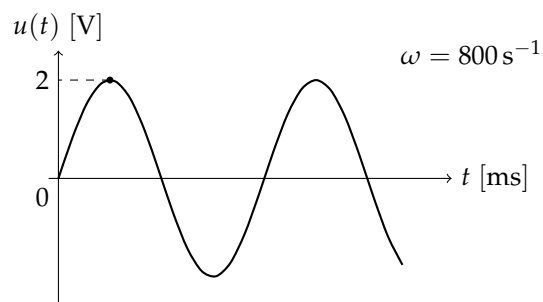
A



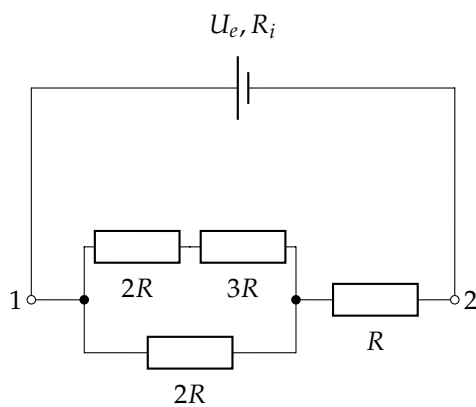
B



C



Obrázek 1.13: Příklad 1.18 – průběhy proudu a napětí na kondenzátoru



Obrázek 1.14: Příklad 1.19 – maximalizace výkonu na spotřebiči 2

1.5 Řešení úloh

Řešení 1.13 (a) $f'(x) = 2 \cos 2x$; (b) $f'(x) = 2 \cos 2x$; (c) $f'(x) = \frac{a(x^{2a}-1)}{x(x^{2a}+1)}$;
 (d) $f'(x) = -\frac{7x^2+x-2}{(4x^2-2x+1)^2}$; (e) $f'(x) = \frac{-6}{(2x+3)^4}$; (f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;
 (g) $f'(x) = 2x - 4$; (h) $f'(x) = 2x + 3x^2$; (i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$;
 (j) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$; (k) $f'(x) = 2 + \cos x$; (l) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 10 \frac{1}{\sin^2 x}$;
 (m) $f'(x) = \sin x + x \cos x$; (n) $f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$; (o) $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$;
 (p) $f'(x) = 2x \cos x^2$; (q) $f'(x) = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x+5}}$

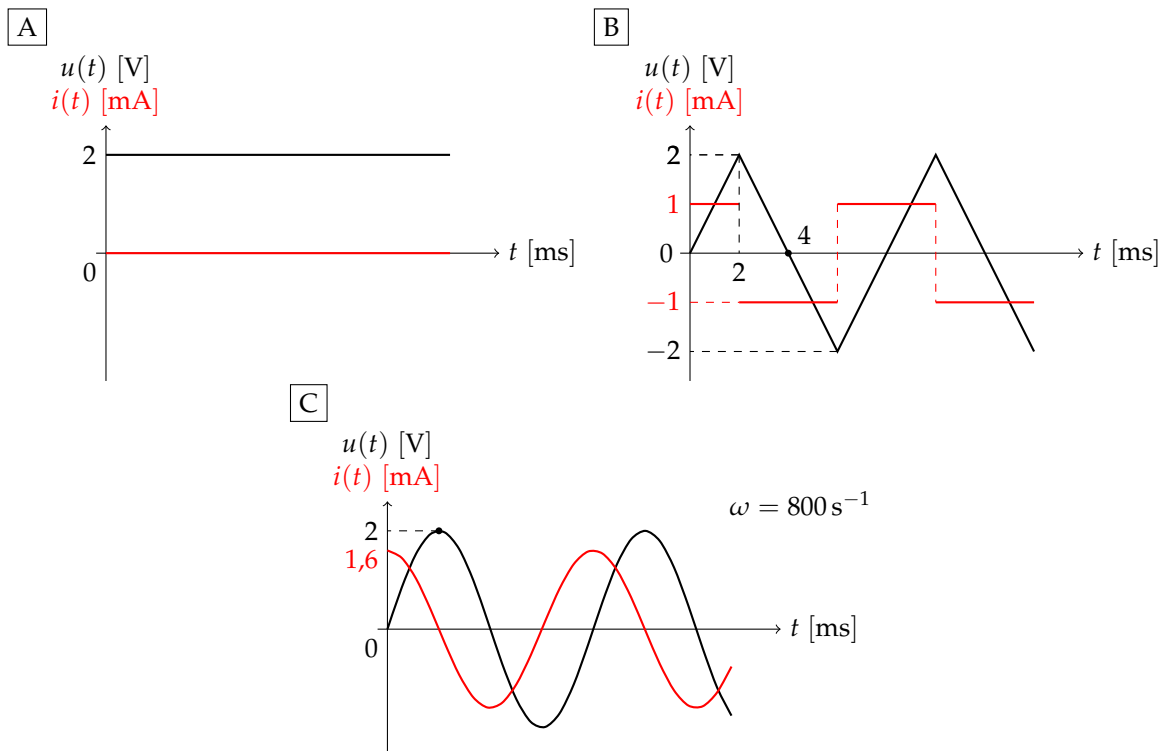
Řešení 1.14 (a) lok. minimum pro $x = \frac{1}{3}$; (b) lok. maximum pro $x = -1$; (c) lok. minimum pro $x = 0$; (d) lok. minimum pro $x = e$;
 (e) lok. maximum pro $x = 0$; (f) lok. maximum pro $x = \frac{\pi}{12}$ a lok. minimum pro $x = \frac{5\pi}{12}$; (g) lok. maximum pro $x = \frac{\pi}{3}$ a lok. minimum pro $x = -\frac{\pi}{3}$

Řešení 1.15 Výška plotu h_1 , výška větve h_2 , vzdálenost plotu od stromu l . Hledaná vzdálenost $x = \frac{h_1}{h_1+h_2}l = 3,75$ m.

Řešení 1.16 1. $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{3}\pi t - \frac{7}{3}\pi$, $\omega(t = 1 \text{ s}) = -\frac{5}{3}\pi \text{ s}^{-1}$,
 2. $t = 5$ s.

Řešení 1.17 1. $v(t = 0,26 \text{ s}) = 0,05 \text{ m s}^{-1}$, 2. $a(t = 0,26 \text{ s}) = 0,17 \text{ m s}^{-1}$.

Řešení 1.18



Obrázek 1.15: Příklad 1.18 – průběhy proudu a napětí na kondenzátoru – řešení

Řešení 1.19 $R = 21 \text{ k}\Omega$.

2

Integrální počet

2.1 Primitivní funkce

2.1.1 Definice

Uvažujme 2 funkce $f : y = 2x$ a $F : y = x^2$. Zřejmě platí, že pro každé $x \in \mathbb{R} : F'(x) = (x^2)' = 2x$, tedy funkce f je derivací funkce F , tj. $F'(x) = f(x)$. V následující kapitole se budeme zabývat, jak k funkci $f(x)$ nalézt takovou funkci $F(x)$ tak, aby $f(x)$ byla derivací $F(x)$.

Definice 2.1: Primitivní funkce

Mějte dány funkce F, f definované v otevřeném intervalu I , jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x)$$

říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I .

Nyní hledíme primitivní funkci k $f(x) = 3x^2 + 2x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Je to například $F(x) = x^3 + x^2$, protože pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ platí $F'(x) = (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x = f(x)$. Nicméně to samé platí i pro $G(x) = x^3 + x^2 + 1$ nebo $H(x) = x^3 + x^2 - 10$. Když $F(x)$ je funkcí primitivní k $f(x)$, pak i $F(x) + C$ je primitivní k $f(x)$, protože $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Tedy známe-li jednu primitivní funkci k $f(x)$, známe jich nekonečně mnoho. Tento poznatek shrnuje Věta 2.3

Věta 2.1

Je-li funkce F v intervalu I primitivní funkcí k funkci f , pak každá primitivní funkce k funkci f je ve tvaru $F(x) + C$, kde C je reálná konstanta.

Pozn. Postup, při kterém určujeme primitivní funkci $F(x) + C$ k dané f se nazývá **integrování** funkce f nebo **integrace** funkce f .

Pozn. Při určování primitivní funkce často postupujeme tak, že konstantu C při výpočtu vynecháváme a připišeme až ke konečnému výsledku.

Obvykle používáme zápis

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

kde

f – integrant

\int – integrační symbol

C – integrační konstanta

dx – zápis sloužící k odlišení integrační proměnné od případných parametrů funkce

$\int f$ – často označujeme jako **neurčitý integrál**

2.1.2 Základní vzorce pro primitivní funkce

Následuje tabulka 2.1 s primitivními funkcemi některých funkcí, takzvané *tabulkové integrály*. Jejich platnost si lze ověřit pomocí Definice 2.1, tj. derivací primitivní funkce.

f	$\int f$	Kde	Pozn.
1	x	$x \in \mathbb{R}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$x \in \mathbb{R}$ pro $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $n < 0$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$x \in (0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x) $	$f(x) \neq 0$	

Tabulka 2.1: Tabulka neurčitých integrálů

Stejně jako v případě derivace existují vzorce pro výpočet primitivní funkce součtu a rozdílu funkcí a násobku funkce:

Věta 2.2: Linearita integrace

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I , c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (2.1)$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (2.2)$$

Příklad 2.1. Vypočtete:

- (a) $\int (x^3 + x^2 - 2) dx$ (e) $\int (5 \cdot 2^x - 8 \sin x + 3) dx$
 (b) $\int (x^2 + 2)(x^2 - 1) dx$ (f) $\int \tan^2 x dx$
 (c) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$
 (d) $\int \sqrt[3]{x}(2x - \sqrt{x}) dx$ (g) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$

Řešení

(a) Použijeme vzorce 2.1 a 2.2:

$$\begin{aligned} \int (x^3 + x^2 - 2) dx &= \int x^3 dx + \int x^2 dx - 2 \int 1 dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x + C, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Neexistuje žádné univerzální pravidlo pro integrál součinu, proto výraz roznásobíme a integrujeme obdobně jako v předchozím případě:

$$\int (x^2 + 2)(x^2 - 1) dx = \int (x^4 + x^2 - 2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 2x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) Opět nemáme žádné pravidlo pro integraci součinu, a tak výraz upravíme jako součet mocninných funkcí:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \int (x^{2-\frac{1}{2}} - 2x^{1-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

(d) Výraz rozložíme na součet dvou mocninných funkcí:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x}(2x - \sqrt{x}) dx &= \int (2x^{\frac{1}{3}+1} - x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}) dx = \int (2x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{6}}) dx = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5} + C, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

(e) Použijeme vzorce pro integraci exponenciální funkce a sinu:

$$\int (5 \cdot 2^x - 8 \sin x + 3) dx = \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + 8 \cos x + 3x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

(f) Použijeme goniometrické vzorce:

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \tan x - x + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx &= \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int 2 \cos x dx = 2 \sin x + C, \\ &x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Násobení a dělení mocnin

Mocniny se stejným základem *vynásobíme* tak, že základ umocníme součtem exponentů:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Mocniny se stejným základem a různým exponentem *vydělíme* tak, že základ umocníme rozdílem exponentů:

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$$

Připomene si důležité goniometrické vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Příklad 2.2. Určete danou funkci f tak, aby platilo:

(a) $f'(x) = x^2 - 1 \wedge f(3) = 2$

(b) $f'(x) = 3 - \frac{2}{x} \wedge f(e) = -2$

Řešení

(a) Hledanou funkci f dostaneme integrací zadané funkce:

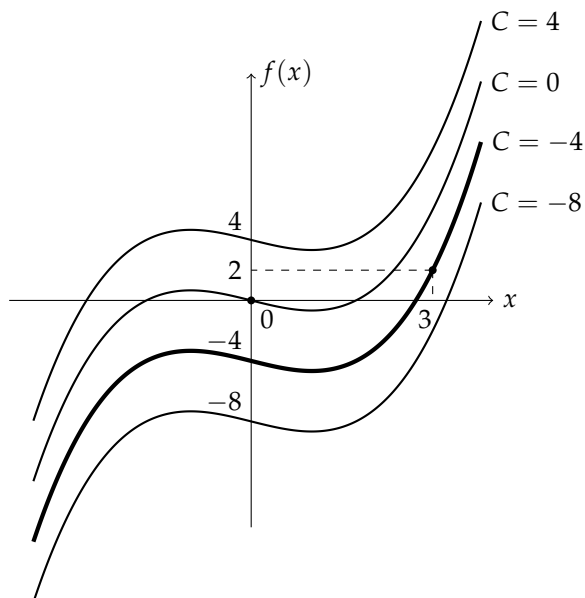
$$\int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Z nekonečně mnoha funkcí, které splňují první podmínku vybereme takovou, která prochází bodem $A[3, 2]$. Jeho souřadnice dosadíme do vypočteného předpisu funkce a vypočítáme konkrétní C pro tento případ:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3^3}{3} - 3 + C \\ 2 &= 6 + C \\ \rightarrow C &= -4 \end{aligned}$$

Pro hledanou funkci f pak platí: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4$.

Graf na obr. 2.1 ilustruje průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$ pro různá C . Je zřejmé, že C má význam posunutí po ose y . Zadaným bodem A prochází pouze jedna taková funkce a to pro $C = -4$.



Pozn. Definiční obor zadané funkce je $D_{f'} = \mathbb{R}$.

Obrázek 2.1: Příklad 2.2 – význam integrační konstanty

(b) Postup je obdobný jako v předchozím případě:

$$\int \left(3 - \frac{2}{x} \right) dx = 3x - 2 \ln |x| + C$$

Nyní dosadíme souřadnice bodu $A[e, -2]$ a vypočteme konstantu C :

$$\begin{aligned} -2 &= 3e - 2 \ln |e| + C \\ -2 &= 3e - 2 + C \\ \rightarrow C &= -3e \end{aligned}$$

Pro funkci f pak platí $f(x) = 3x - 2 \ln |x| - 3e$.

Pozn. Definiční obor zadané funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pozn. Platí $\ln |e| = \ln e = 1$, neboť Eulerovo číslo e je kladné, $e \approx 2,71828$ a $\log_a a = 1$ pro všechny přípustné základy a .

Jaký je definiční obor této funkce?

2.1.3 Integrační metody

V předchozí části jsme ukázali, jak se dají spočítat ty nejjednodušší integrály. Nicméně jsme neuviedli žádné pravidlo pro integraci součinu, podílu, ani složené funkce. V tom nám částečně pomohou 2 následující metody pro výpočet integrálů.

Integrovaní metodou per partes

Uvažujme dvě funkce $u = u(x)$ a $v = v(x)$, které mají derivaci na intervalu (a, b) . Pro derivaci součinu platí:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Vzorec upravíme do tvaru:

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$$

a zintegrujeme:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Věta 2.3: Integrovaní metodou per partes

Mají-li funkce u, v v intervalu (a, b) spojité derivace, pak v (a, b) platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \quad (2.3)$$

Při výpočtu touto metodou postupujeme tak, že integrovanou funkci rozložíme na součin dvou funkcí $u(x)$ a $v'(x)$ nejlépe tak, abychom uměli určit $u'(x)$ (pomocí derivace) a $v(x)$ (pomocí integrace) a zároveň aby integrál $\int u'(x)v(x) dx$ byl snadno spočítatelný.

Způsob výpočtu objasníme na několika řešených příkladech:

Příklad 2.3. Určete primitivní funkce k daným funkcím:

(a) $\int x \cos x \, dx$

(c) $\int \ln x \, dx$

(b) $\int x^2 e^x \, dx$

(d) $\int e^x \sin x \, dx$

Řešení

- (a) Při použití metody *per partes* musíme nejprve rozhodnout, jak určíme funkce u a v . V tomto případě můžeme například zvolit $u(x) = \cos x$ a $v'(x) = x$, pak platí:

$$\left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

Pak ale integrál na pravé straně rovnice 2.3 vychází:

$$-\int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx$$

což je ještě složitější výraz než původně zadaný.

Zkusíme tedy postup opačný. Dosadíme $u(x) = x$ a $v'(x) = \cos x$ a počítáme:

$$\int x \cos x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Shrnutí: Je tedy výhodné za u dosazovat funkce, které se zderivováním zjednoduší, tedy např. mocninné funkce.

- (b) Poučení z minulého příkladu zvolíme $u(x) = x^2$ a $v'(x) = e^x$. Po prvním použití metody se integrál na pravé straně sice zjednoduší, avšak ne natolik, abychom ho uměli přímo spočítat, proto na tento integrál použijeme znovu metodu *per partes*:

$$\int x^2 e^x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C,$$

$x \in \mathbb{R}$

- (c) Při prvním pohledu na integrovanou funkci se může zdát, že se nejedná o součin více funkcí, a proto zde metoda *per partes* nejde použít. Použijeme zde proto malý trik a zapíšeme funkci $f(x) = \ln x$ jako $f(x) = 1 \cdot \ln x$, tedy jako součin konstanty 1 a funkce logaritmus. Při volbě u a v budeme vycházet z toho, že známe vzorec pro derivaci funkce $\ln x$, avšak ne její integrál (ten právě počítáme), a tedy:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C, \quad x \in (0, +\infty)$$

Pozn. Pozor na znaménka při derivaci a integraci goniometrických funkcí:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Funkce logaritmus o základu a :

- definiční obor: $D_f = (0, +\infty)$
- obor hodnot: $H_f = \mathbb{R}$
- funkce rostoucí pro $a > 1$
- funkce klesající pro $a \in (0, 1)$

- (d) V tomto případě si všimneme, že jak funkce e^x tak ani $\sin x$ se po derivování ani integrování příliš nezmění, a tím se nezjednoduší integrál na pravé straně rovnice 2.3, což je požadovaná vlastnost. Použijeme zde trochu odlišný postup: aplikujeme metodu *per partes* dvakrát za sebou, až se v postupu opět objeví výchozí integrál, který následně dopočítáme ze vzniklé rovnice:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x \, dx \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad u' = e^x \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad u' = e^x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \\ &\rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) \\ I &= \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Integrovaní substituční metodou

Substituční metoda je založená na zavedení nové proměnné, která umožní převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze integrovat snadněji. Metoda vychází z věty o derivaci složené funkce. Formálně ji popisuje Věta 2.4.

Věta 2.4: Integrovaní metodou substituční

Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na otevřeném intervalu I a funkce $\varphi(x)$ má na otevřeném intervalu J spojitou derivaci, přičemž pro libovolné $x \in J$ je $\varphi(x) \in I$.

Pak je funkce $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ spojitá na J a na tomto intervalu platí:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt, \quad (2.4)$$

dosadíme-li do výrazu vpravo $t = \varphi(x)$.

Užití této věty při výpočtu primitivních funkcí si nejlépe vysvětlíme na konkrétních příkladech:

Příklad 2.4. Vypočtete $\int (5x + 3)^8 \, dx$.

Řešení Mohli bychom samozřejmě postupovat tak, že bychom integrovanou funkci vyjádřili jako mnohočlen (polynom) osmého řádu a ten integrovali. To by bylo poměrně zdlouhavé, a tak raději využijeme *substituční metodu*.

Označíme $t = 5x + 3$ a vypočítáme derivaci $\varphi'(x) = \frac{dt}{dx} = 5$. „Formálně“ lze psát $dt = 5 \, dx$. Rozšíříme zadaný integrál tak, aby se v něm vyskytovala konstanta 5 a provedeme substituci za t :

$$\begin{aligned} \int (5x + 3)^8 \, dx &= \frac{1}{5} \int 5(5x + 3)^8 \, dx \left| \begin{array}{l} t = 5x + 3 \\ \frac{dt}{dx} = 5 \\ dt = 5 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int t^8 \, dt = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{t^9}{9} + C = \frac{(5x + 3)^9}{45} + C, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Všimneme si, že v posledním kroku se vracíme k původní proměnné dosazením substitučního vzorce.

Příklad 2.5. Vypočtěte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení Substituce $t = x^2 + 1$:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ = \ln |x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C, x \in \mathbb{R}$$

Platí: $x^2 + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a proto je možné ve výsledku odstranit absolutní hodnotu bez změny znaménka.

Příklad 2.6. Vypočtěte $\int \frac{6}{(2x+1)^4} dx$.

Řešení Substituce $t = 2x + 1$:

$$\int \frac{6}{(2x+1)^4} dx \left| \begin{array}{l} t = 2x + 1 \\ dt = 2 dx \\ \frac{1}{2} dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^4} dt = 3 \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{t^3} + C = \\ = -\frac{1}{(2x+1)^3} + C, x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{ nebo } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Příklad 2.7. Vypočtěte $\int \tan x dx$.

Řešení Využijeme definiční vztah: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, substituce $t = \cos x$:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = \\ = -\ln |\cos x| + C, x \in \left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Příklad 2.8. Vypočtěte $\int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} dx$.

Řešení Substituce $t = \sqrt{4x-7}$:

$$\int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} dx \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{4x-7} \\ t^2 = 4x-7 \\ 2t dt = 4 dx \\ \frac{t}{2} dt = dx \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{t dt}{t+3}$$

Pomocí dělení mnohočlenu mnohočlenem (polynomu polynomem) rozložíme poslední zlomek

$$\frac{t}{t+3} = 1 - \frac{3}{t+3}$$

a zavedeme další substituci $u = t + 3$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \int \frac{t \, dt}{t+3} &= \frac{5}{2} \int \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt \quad \left| \begin{array}{l} u = t+3 \\ du = dt \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \left(1 - \frac{3}{u}\right) du = \\ &= \frac{5}{2}(u - 3 \ln |u|) + C = \frac{5}{2}[(t+3) - 3 \ln |t+3|] + C = \\ &= \frac{5}{2} \left[(\sqrt{4x-7} + 3) - 3 \ln (\sqrt{4x-7} + 3) \right] + C, \quad x \in \left\langle \frac{7}{4}, +\infty \right\rangle \end{aligned}$$

Nyní odvodíme vzorec pro integrál složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární. To nám umožní počítat některé jednoduché integrály, aniž bychom museli zdlouhavě používat substituční metodu. Uvažujme funkci f a k ní primitivní funkci F , pak platí:

$$\int f(ax+b) \, dx \quad \left| \begin{array}{l} t = ax+b \\ dt = a \, dx \\ \frac{1}{a} dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(t) \, dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Tento poznatek shrnuje Věta 2.5.

Věta 2.5

Nechť f je funkce integrovatelná na I . Pak

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad (2.5)$$

kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I . Platí pro ta x , pro která je $ax+b \in I$.

Tato věta umožňuje celou řadu integrálů spočítat doslova „z hlavy“:

Příklad 2.9. Vypočtěte:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\int \cos(10x+2) \, dx$ | (d) $\int (3x-8)^{10} \, dx$ |
| (b) $\int \frac{4}{t+3} \, dx$ | (e) $\int \frac{2}{9x^2+12x+5} \, dx$ |
| (c) $\int \frac{4}{5t+3} \, dx$ | (f) $\int e^{6x-8} \, dx$ |

Řešení

- (a) $\int \cos(10x+2) \, dx = \frac{1}{10} \sin(10x+2) + C, \quad x \in \mathbb{R}$
 (b) $\int \frac{4}{t+3} \, dx = 4 \ln |t+3| + C, \quad x \in (-\infty, -3) \text{ nebo } x \in (-3, +\infty)$
 (c) $\int \frac{4}{5t+3} \, dx = \frac{4}{5} \ln |5t+3| + C, \quad x \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \text{ nebo } x \in (-\frac{3}{5}, +\infty)$
 (d) $\int (3x-8)^{10} \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-8)^{11}}{11} + C, \quad x \in \mathbb{R}$
 (e) $\int \frac{2}{9x^2+12x+5} \, dx = \int \frac{2}{1+(3x+2)^2} \, dx = \frac{2}{3} \arctan(3x+2) + C, \quad x \in \mathbb{R}$
 (f) $\int e^{6x-8} \, dx = \frac{1}{6} e^{6x-8} + C, \quad x \in \mathbb{R}$

Funkce druhá odmocnina:

- definiční obor: $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$
- obor hodnot: $H_f = \langle 0, +\infty \rangle$

2.2 Určitý integrál

Dosud jsme počítali neurčité integrály, jejichž výpočtem jsme dostali množinu funkcí. Oproti tomu výsledkem určitého integrálu je číslo. Určitý integrál je totiž také definován jako obsah plochy pod grafem funkce.

Uvažujme funkci $f(x)$ a k ní primitivní funkci $F(x)$. Určitý integrál v mezích od a do b symbolicky zapisujeme:

$$\int_b^a f(x) dx$$

a platí Leibnizův – Newtonův vzorec:

$$\int_b^a f(x) dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a) \quad (2.6)$$

2.2.1 Definice

Definice 2.2: Určitý integrál

Nechť F je primitivní funkce k f v intervalu I . Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá *určitý integrál* funkce f v mezích od a do b a značí se $\int_a^b f(x) dx$.

Uvedeme několik základních vlastností právě definovaného integrálu:

1. Jestliže $f \leq g$ na (a, b) , pak $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$, pokud oba integrály existují.
2. (*aditivnost určitého integrálu*) Jestliže existuje $\int_a^b f(x) dx$, pak pro každé $c \in (a, b)$ je $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
3. (*linearita určitého integrálu*) Platí rovnost

$$\int_a^b (af(x) + bg(x)) dx = a \int_a^b f(x) dx + b \int_a^b g(x) dx,$$

pokud má pravá strana smysl.

Pravidla 2 s výhodou využíváme při integrování funkce definované po částech, tj. mající rozdílný předpis v různých intervalech jejího definičního oboru. Pak lze v každém takovém intervalu spočítat dílčí integrál a výsledek určit jako jejich součet.

Příklad 2.10. Vypočtete:

(a) $\int_1^3 x dx$

(c) $\int_2^4 (x^2 + 2x) dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(d) $\int_{-1}^1 e^x dx$

Řešení

(a) $\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$

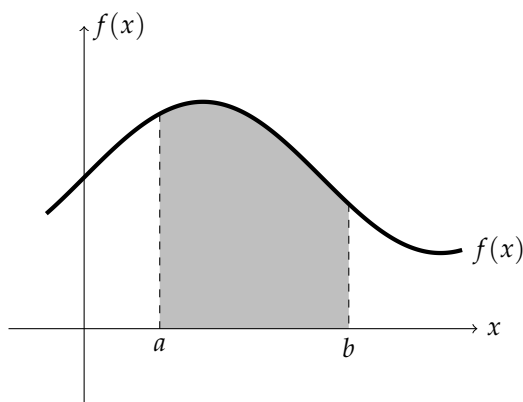
$$(c) \int_2^4 (x^2 + 2x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_2^4 = \left(\frac{4^3}{3} + 4^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) = \frac{92}{3}$$

$$(d) \int_{-1}^1 e^x \, dx = [e^x]_{-1}^1 = e - e^{-1} \approx 2,3504$$

Pozn. Všimneme si, že výsledkem není funkce, ale číslo.

2.2.2 Geometrická interpretace

Uvažujme případ, kdy $a < b$ a funkce f je v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná. Pak určitý integrál udává obsah útvaru ohraničeného grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.



Obrázek 2.2: Geometrická interpretace určitého integrálu

Je-li f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

Pokud je funkce f nekladná, platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq 0.$$

V obecném případě může funkce f libovolně změnit znaménko. Při výpočtu obsahu plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $\langle a, b \rangle$ je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně. Pokud bychom vypočetli integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ na celém intervalu, odečítaly by se kladné a záporné části.

2.2.3 Integrační metody

Určité integrály je možné řešit dvojím způsobem: buď lze spočítat nejprve primitivní funkci, pomocí metod z předchozího oddílu a následně dosadit meze, nebo je možné použít metodu *per partes* a metodu *substituce* pro určitý integrál.

Metoda per partes v určitém integrálu

Věta 2.6: Integrovaní metodou per partes v určitém integrálu

Mají-li funkce u, v v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité derivace, pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad (2.7)$$

Při výpočtu tedy postupujeme obdobně jako v případě neurčitých integrálů.

Příklad 2.11. Vypočtěte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

Řešení

1. *způsob* Nejprve spočítáme primitivní funkci k $f(x) = x \cos x$ a pak dosadíme integrační meze:

$$\int x \cos x dx \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right. = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - (0 \sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. *způsob* Využijeme přímo Větu 2.6 o integrování *per partes* v určitém integrálu:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right. &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 - [-\cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Oba způsoby samozřejmě musí vést na totožný výsledek!

Příklad 2.12. Vypočtěte $\int_1^e x^3 \ln x dx$.

Řešení

$$\begin{aligned} \int_1^e x^3 \ln x dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^3 \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right. &= \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{4} dx = \\ &= \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1}{4} \ln 1 - \left[\frac{x^4}{16} \right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(1 + 3e^4) \end{aligned}$$

Metoda substituční v určitém integrálu

Věta 2.7: Metoda substituční v určitém integrálu

Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt. \quad (2.8)$$

Všimneme si, že při zavedení nové proměnné se mění také meze určitého integrálu. Určíme je jako funkční hodnoty $g(a)$, $g(b)$.

Příklad 2.13. Vypočtete pomocí vhodné substituce:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx & \text{(c)} \int_{-1}^5 \frac{1}{4x+5} dx \\ \text{(b)} \int_{-2}^3 \frac{x}{x^2+1} dx & \text{(d)} \int_{-3}^3 \sqrt{2x+10} dx \end{array}$$

Řešení

- (a) Vybereme substituci $t = \cos x$, takže $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, což lze zapsat jako $dt = -\sin x dx$. Dále je potřeba změnit meze. Dolní mez: $g(0) = \cos 0 = 1$, horní mez: $g(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx & \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ g(0) = \cos 0 = 1 \\ g(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = - \int_1^0 t^2 dt = \\ & = - \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^0 = - \left(0 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (b) Substituce $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \frac{x}{x^2+1} dx & \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx \\ g(-2) = (-2)^2 + 1 = 5 \\ g(3) = 3^2 + 1 = 10 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_5^{10} \frac{dt}{t} = \\ & = \frac{1}{2} [\ln |t|]_5^{10} = \frac{\ln 10 - \ln 5}{2} = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

- (c) Substituce $t = 4x + 5$, $dt = 4 dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 \frac{1}{4x+5} dx & \left| \begin{array}{l} t = 4x + 5 \\ dt = 4 dx \\ \frac{1}{4} dt = dx \\ g(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1 \\ g(5) = 4 \cdot 5 + 5 = 25 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_1^{25} \frac{dt}{t} = \\ & = \frac{1}{4} [\ln |t|]_1^{25} = \frac{\ln 25}{4} = \frac{\ln 5}{2} \end{aligned}$$

Derivaci $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ lze přepsat do tvaru $dt = -\sin x dx$. Je potřeba uvést, že se nejedná o násobení rovnice výrazem dx , protože $\frac{d}{dx}$ není zlomek, ale operátor. Ačkoli uvedenou rovnost nebudeme matematicky zdůvodňovat, platí a lze ji s výhodou používat pro výpočet integrálů pomocí substituční metody.

Pozn. Použili jsme rovnosti:

- $\ln 1 = 0$
- $\ln a^b = b \ln a$

(d) $\int_{-3}^3 \sqrt{2x+10} dx$ Substituce $t = 2x + 10$, $dt = 2 dx$:

$$\int_{-3}^3 \sqrt{2x+10} dx \left| \begin{array}{l} t = 2x + 10 \\ dt = 2 dx \\ \frac{1}{2} dt = dx \\ g(-3) = 2 \cdot (-3) + 10 = 4 \\ g(3) = 2 \cdot 3 + 10 = 16 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_4^{16} \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{16} = \frac{1}{3} [x\sqrt{x}]_4^{16} = \frac{1}{3} (16 \cdot 4 - 4 \cdot 2) = \frac{56}{3}$$

2.3 Užití integrálního počtu

2.3.1 Matematické úlohy

Nejpřímochařejším využitím integrálního počtu je výpočet rovinného obrazce, např. obsah plochy pod grafem funkce nebo obsah útvaru ohraničeného dvěma křivkami.

Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.2.2, obsah útvaru omezeného osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojitě, nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ je dán integrálem

$$\int_a^b f(x) dx$$

Pro případ, že funkce f nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ nekladných hodnot, pak pro integrál platí:

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0$$

V tom případě určíme obsah hledané oblasti tak, že vypočteme absolutní hodnotu tohoto integrálu. Zde to znamená změnu znaménka integrálu.

Obecně může funkce f měnit znaménko, a tak při výpočtu plochy je nutné funkci rozdělit do intervalů, kde f nabývá kladných a kde záporných hodnot. Využijeme aditivnosti určitého integrálu, avšak s tím, že integrály pro záporné úseky odčítáme.

Chceme-li například spočítat obsah plochy pod grafem funkce $f(x)$ vyznačené na grafu na obr. 2.3 v intervalu $\langle a, b \rangle$, budeme postupovat tak, že najdeme nulové body c, d a funkci rozdělíme na tři intervaly, ve kterých se nemění znaménko funkce. Pro hledaný obsah pak platí:

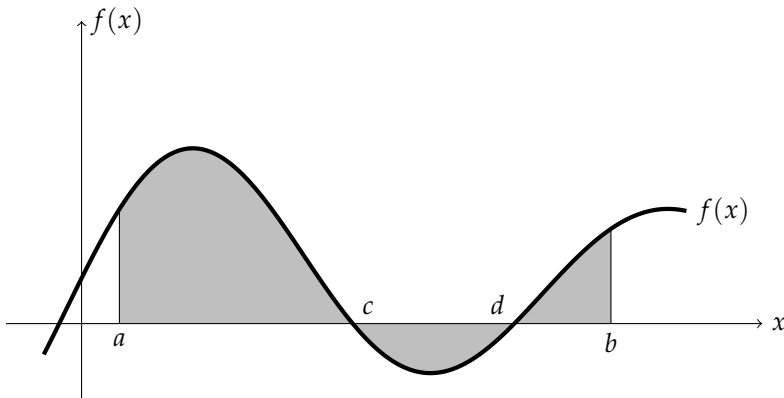
$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right| =$$

$$= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Pozn. Lhostejno zdali hledáme obsah útvaru v intervalu $\langle a, b \rangle$ nebo (a, b) ; oba integrály totiž vychází totožně.

Absolutní hodnotu „odstraňujeme“ podle definice:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$



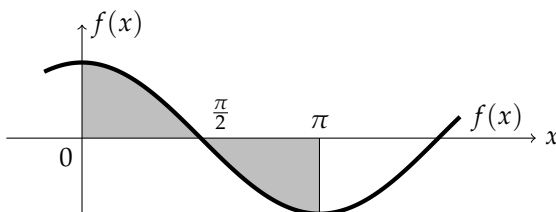
Obrázek 2.3: Obsah plochy pod grafem funkce

Příklad 2.14. Vypočtěte:

- (a) integrál $\int_0^\pi \cos x \, dx$,
 (b) obsah rovinného obrazce omezeného osou x a grafem funkce $y = \cos x$, přičemž $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

- (a) $\int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$,
 (b) Obrazec v zadání nejprve zakreslíme do grafu na obr. 2.3.

Obrázek 2.4: Příklad 2.14 – obsah plochy pod grafem funkce $y = \cos x$

V námi uvažovaném intervalu se nachází jediný nulový bod $x = \frac{\pi}{2}$, který ho dělí na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, ve kterém je funkce f nezáporná, a interval $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, ve kterém je funkce f nekladná. Pro obsah hledaného útvaru tedy platí:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1 - 0 - (0 - 1) = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Pozn. Je tedy zřejmé, že je potřeba rozlišovat mezi prostým výpočtem určitého integrálu a určováním plochy pod grafem funkce.

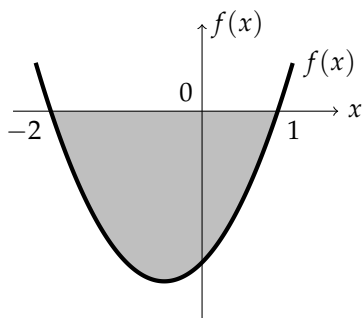
Příklad 2.15. Vypočtěte obsah plochy, kterou ohraničuje graf paraboly dané předpisem $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ a osa x .

Řešení Nejprve nalezneme nulové body funkce f , tj. body, ve

kterých graf funkce protíná osu x :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ 2(x+2)(x-1) &= 0 \\ &\rightarrow x_1 = -2 \\ &\rightarrow x_2 = 1 \end{aligned}$$

Do grafu na obr. 2.6 nyní vykreslíme průběhu této funkce a vyznačit do něj hledanou plochu.



Vyznačený obsah vypočteme pomocí určitého integrálu. Nemáme zapomenout na to, že funkční hodnoty v intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ jsou nekladné, a tudíž je nezbytné při počítání obsahu obrátit znaménko integrálu:

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx \right| = - \int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx = \\ &= - \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x \right]_{-2}^1 = - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4 - \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) \right] = \underline{\underline{9}} \end{aligned}$$

Příklad 2.16.

Určete velikost parametrů $a, b \in \mathbb{R}^+$ tak, aby obsah obrazce omezeného osou x a grafem funkce $y = \frac{1}{x}$ v intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ byl 5 a zároveň aby délka tohoto intervalu byla 10.

Řešení Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ se skládá ze dvou větví, jedna se nachází v I. kvadrantu, druhá ve III. kvadrantu. Vzhledem k tomu, že $a, b \in \mathbb{R}^+$, uvažujeme pouze větev v I. kvadrantu, kde funkce f nabývá nezáporných hodnot. Spočítáme tedy obsah pod touto funkcí v intervalu $\langle a, b \rangle$:

$$S = \int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_a^b = \ln b - \ln a$$

Podmínky ze zadání říkají:

$$\begin{aligned} (I) \quad S &= \ln b - \ln a = 5 \\ (II) \quad b - a &= 10 \end{aligned}$$

Pozn. Pro potřeby náčrtu grafu kvadratické funkce (paraboly) je většinou vhodné najít nulové body a dále zjistit, zdali jde o parabolu *konvexní* (otevřenou nahoru, vrchol je minimem) nebo *konkávní* (otevřenou dolů, vrchol je maximum). O tom rozhoduje znaménko kvadratického členu: konvexní pro $a > 0$, konkávní pro $a < 0$.

Obrázek 2.5: Příklad 2.15 – obsah plochy ohraničené parabolou a osou x

Tedy řešíme tuto soustavu rovnic pro a, b . Nejprve vyjádříme b z druhé rovnice, dosadíme do první a vyřešíme pro a . Neznámou b dopočítáme zpětným dosazením:

$$\begin{aligned} (II) \quad b &= a + 10 \\ (II) \rightarrow (I) \quad \ln(a + 10) - \ln a &= 5 \\ \ln \frac{a + 10}{a} &= 5 \\ \frac{a + 10}{a} &= e^5 \\ a + 10 &= ae^5 \\ 10 &= a(e^5 - 1) \\ a &= \frac{10}{e^5 - 1} \approx \underline{\underline{0,068}} \\ \rightarrow b = a + 10 &= \frac{10}{e^5 - 1} + 10 = \frac{10e^5}{e^5 - 1} \approx \underline{\underline{10,068}} \end{aligned}$$

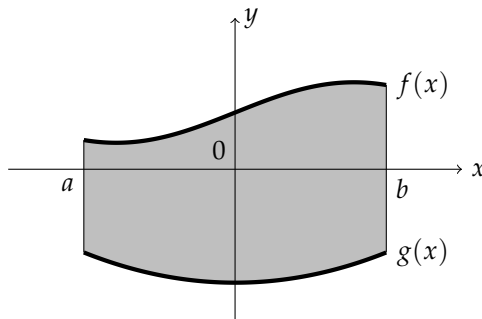
Pozn. Platí rovnost (pro patřičné a, b):

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Obsah útvaru ohraničeného dvěma křivkami

Uvažujme útvar ohraničený křivkami $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Obě funkce jsou v $\langle a, b \rangle$ spojité a $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Pro obsah tohoto útvaru platí:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (2.9)$$



Obrázek 2.6: Obsah plochy ohraničené dvěma křivkami

Příklad 2.17.

Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí $f(x) = x^2 - 1$ a $g(x) = x + 1$. Potom vypočítejte jeho obsah.

Řešení Nejprve vypočítáme souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g , tj. body, ve kterých platí $f(x) = g(x)$:

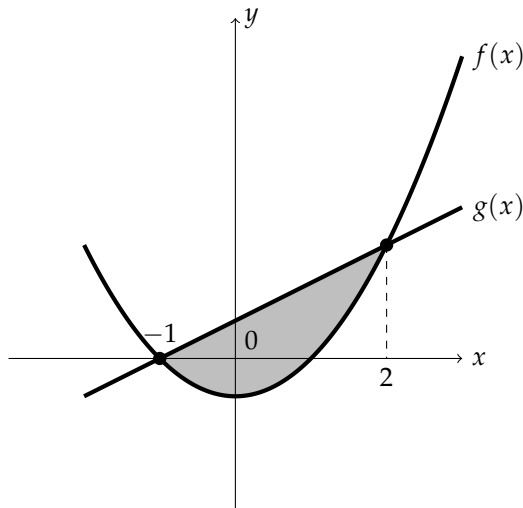
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 1 &= x + 1 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ \rightarrow x_1 &= -1 \\ \rightarrow x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Vypočteme ještě y -ové souřadnice průsečíků:

$$y_1 = f(x_1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$y_2 = f(x_2) = 2^2 - 1 = 3$$

Nyní do grafu na obr. 2.7 zakreslíme průběhy obou funkcí, vyznačíme vypočtené průsečíky a požadovaný obrazec.



Obrázek 2.7: Příklad 2.17 – obsah plochy ohraničené dvěma křivkami

Všimneme si, že na celém intervalu $\langle -1, 2 \rangle$ je $g(x) \geq f(x)$, a proto pro obsah hledaného útvaru platí:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 [(x + 1 - (x^2 - 1))] dx = \\ &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \\ &= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \underline{\underline{\frac{9}{2}}} \end{aligned}$$

Na konec této části uvádíme jeden složitější příklad. Budeme ho řešit dvěma různými způsoby: buď pomocí složitější substituce, než jsme doposud probrali, nebo využitím parametrizace.

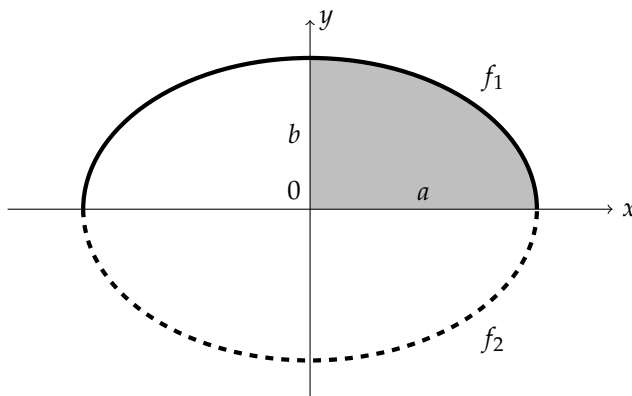
Příklad 2.18. Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného elipsou danou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde a je délka hlavní poloosy, b je délka vedlejší poloosy ($a, b > 0$).

Řešení (pomocí substituce) Rovnice elipsy není funkcí, neboť existuje taková hodnota x , pro kterou existují dvě různé hodnoty y ,

které tuto rovnici splňují. Přesvědčíme se o tom vyjádřením y :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ a^2y^2 &= b^2(a^2 - x^2) \\ y^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \\ |y| &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ \rightarrow y_1 = f_1(x) &= +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (y \geq 0) \\ \rightarrow y_2 = f_2(x) &= -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (y < 0) \end{aligned}$$

Tedy rovnici elipsy lze transformovat na dvě funkce, z nichž f_1 popisuje její část nad osou x a funkce f_2 pod osou x . Graf na obr. 2.8 ilustruje tento příklad.



Obrázek 2.8: Příklad 2.18 – obsah elipsy

Lze si všimnout, že díky symetrii je možné obsah ohraničený elipsou spočítat jako čtyřnásobek obsahu vyznačeného v I. kvadrantu, tj. útvaru ohraničeného funkcí f_1 , osou x a osou y . Ten spočítáme pomocí určitého integrálu jako v předchozích úlohách:

$$S = 4 \int_0^a f_1(x) dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Při řešení tohoto integrálu použijeme druhou variantu substituční metody. Dosud jsme využívali substituci typu $t = \varphi(x)$. S výhodou však lze použít i substituci v opačném směru, tj. $x = \varphi^{-1}(t)$. V tomto případě je doporučeno použít substituci $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$. Novou dolní mez dopočítáme z rovnice: $0 = a \sin t \rightarrow t = 0$, horní mez: $a = a \sin t \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

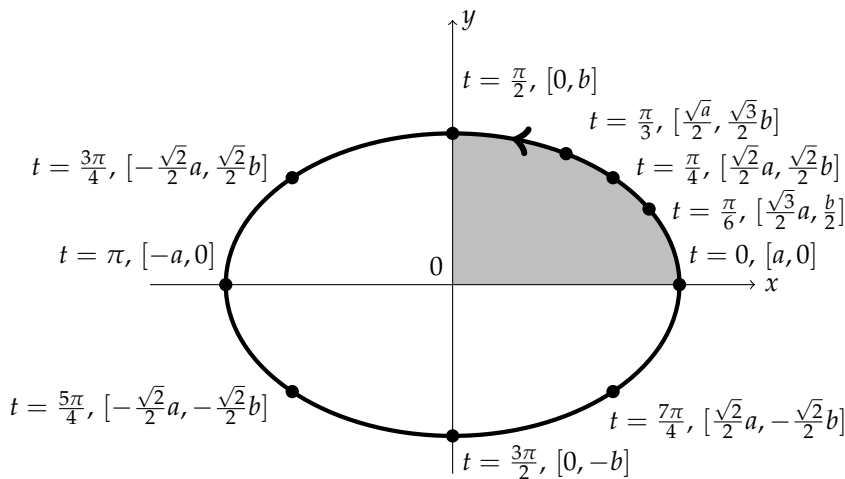
Protože integrujeme přes interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, ve kterém je $\cos t \geq 0$, pak platí $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$.

$$\begin{aligned}
S &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \\
&= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = 4ab \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4ab \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sin 0}{4} \right) = \underline{\underline{\pi ab}}
\end{aligned}$$

Řešení (pomocí parametrizace) Rovnici elipsy lze taktéž zapsat v parametrickém tvaru:

$$\begin{aligned}
x &= a \cos t \\
y &= b \sin t
\end{aligned} \tag{2.10}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Budeme-li dosazovat všechny hodnoty t v tomto intervalu a vykreslovat příslušná x a y do grafu, získáme stejný graf jako v předchozím případě. Graf na obr. 2.9 ukazuje elipsu vykreslenou tímto způsobem a několik bodů pro konkrétní hodnoty t . Jedinou neznámou takového (parametrického) zápisu je tedy proměnná t – parametr.



Pozn. Integrály typu $\int \sin^2$ se s výhodou řeší pomocí goniometrických vztahů pro poloviční úhel

$$\begin{aligned}
\left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\
\left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}
\end{aligned}$$

upravených do tvaru

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

Obrázek 2.9: Příklad 2.18 – obsah elipsy zadané parametricky

Ekvivalenci s rovnicí v zadání lze snadno ověřit umocněním a sečtením obou rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= \cos t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\
\frac{y}{b} &= \sin t \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1
\end{aligned}$$

Obsah plochy vymezený elipsou opět určíme jako čtyřnásobek plochy omezené elipsou, osou x a osou y . Všimneme si, že tento úsek elipsy je popsán parametrem $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Věta 2.8 ukazuje, jak vypočítat obsah rovinného obrazce vymezeného křivkou zadanou parametrickými rovnicemi.

Věta 2.8

Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde funkce φ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, funkce φ má na intervalu (α, β) derivaci $\varphi'(t)$ různou od nuly, a $\varphi'(t)$ je integrovatelná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ vzorec

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right| \quad (2.11)$$

V našem případě platí:

- $x = \varphi(t) = a \cos t$
- $\varphi'(t) = -a \sin t$
- $y = \psi(t) = b \sin t$

Můžeme tedy spočítat obsah elipsy:

$$\begin{aligned} S &= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \cdot (-a \sin t) dt \right| = 4ab \cdot \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = 4ab \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4ab \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sin 0}{4} \right) = \underline{\underline{\pi ab}} \end{aligned}$$

2.3.2 Fyzikální úlohy

Těžiště rovinných útvarů

Pro souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ daného útvaru platí:

$$x_T = \frac{M_y}{m}, \quad y_T = \frac{M_x}{m}, \quad (2.12)$$

kde M_x, M_y jsou statické momenty k příslušným osám a m hmotnost daného útvaru.

Momenty a hmotnost lineárních útvarů (λ je lineární hustota):

$$M_y = \lambda \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2.13)$$

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2.14)$$

$$m = \lambda \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2.15)$$

V případě *lineárního útvaru* (tenký prut, uvažujeme pouze jeden rozměr) $m = \lambda l$, kde l je délka útvaru, resp. grafu funkce.

V případě *plošného útvaru* platí $m = \sigma S$. Obsah S spočítáme např. pomocí určitého integrálu, jak je uvedeno v předchozích částech této kapitoly.

Momenty a hmotnost plošných útvarů vymezených grafem funkce f a osou x ($f \geq 0$, σ je plošná hustota):

$$M_y = \sigma \int_a^b x f(x) dx \quad (2.16)$$

$$M_x = \frac{\sigma}{2} \int_a^b f^2(x) dx \quad (2.17)$$

$$m = \sigma \int_a^b f(x) dx \quad (2.18)$$

Příklad 2.19. Určete polohu těžiště čtvrtkružnice.

Řešení Kružnice o poloměru r se středem v bodě $[0,0]$ má rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Čtvrtkružnice v I. kvadrantu se popíše funkcí $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle 0, r \rangle$.

Dále budeme postupovat podle vzorců 2.12. Nejprve určíme hmotnost. K tomu využijeme znalost délky obvodu kružnice:

$$m = \lambda l = \lambda \frac{2\pi r}{4} = \lambda \frac{\pi r}{2}$$

Postupně rozepíšeme složitější výraz pod odmocninou ve výraz pro výpočet momentů:

- $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$
- $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$
- $[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$
- $1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$
- $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Nyní již můžeme spočítat jednotlivé momenty podle vzorců 2.13, 2.14:

$$M_y = \lambda \int_0^r \frac{xr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \left| \begin{array}{l} t = r^2 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ 0 \rightarrow r^2 \\ r \rightarrow 0 \end{array} \right| = -\frac{\lambda}{2} \int_{r^2}^0 \frac{r}{\sqrt{t}} dt = \frac{\lambda}{2} \int_0^{r^2} \frac{r}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \frac{\lambda r}{2} [2\sqrt{t}]_0^{r^2} = \lambda r^2$$

$$M_x = \lambda \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \lambda r \int_0^r dx = \lambda r^2$$

Pro souřadnice těžiště tedy vychází:

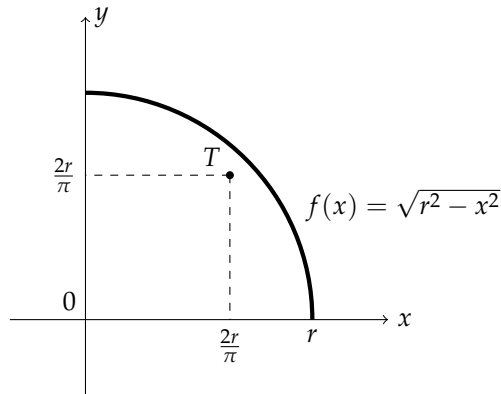
$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\lambda r^2}{\frac{\lambda \pi r}{2}} = \frac{2r}{\pi}$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\lambda r^2}{\frac{\lambda \pi r}{2}} = \frac{2r}{\pi}$$

Pozn. V tomto případě není potřeba používat vzorec 2.15, ale vystačíme si se základními geometrickými vztahy.

Pozn. Použili jsme rovnost:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

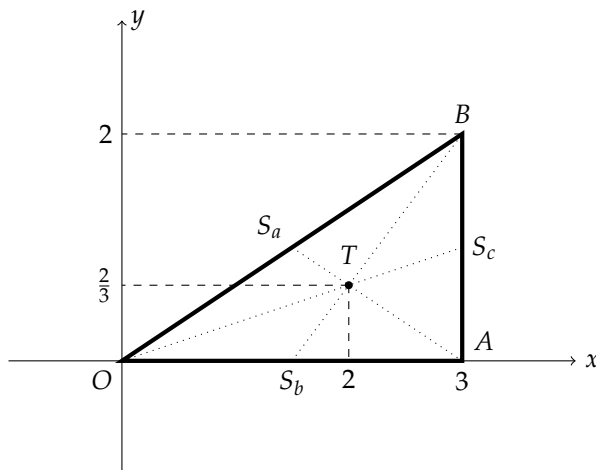


Obrázek 2.10: Příklad 2.19 – těžiště čtvrtkružnice

Pozn. V tomto případě skutečně těžiště leží mimo samotný předmět. Tomu je typicky také tak u předmětů tvaru prstence, u nichž těžiště leží v geometrickém středu.

Příklad 2.20. Určete polohu těžiště tenkého plechu tvaru trojúhelníku určeného vrcholy $O[0,0]$, $A[3,0]$, $B[3,2]$.

Řešení Z nákresu 2.11 plyne, že zadaný trojúhelník vymezen grafem funkce $f(x) = \frac{2}{3}x$, osou x a přímkou $x = 3$.



Obrázek 2.11: Příklad 2.20 – těžiště trojúhelníku

Pro hmotnost a statické momenty platí:

$$m = \sigma S = \sigma \int_0^3 \frac{2}{3}x \, dx = \frac{2}{3}\sigma \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{2}{3}\sigma \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = 3\sigma$$

$$M_y = \sigma \int_0^3 x \cdot \frac{2}{3}x \, dx = \frac{2}{3}\sigma \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{2}{3}\sigma \left(\frac{27}{3} - 0 \right) = 6\sigma$$

$$M_x = \frac{\sigma}{2} \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x \right) dx = \frac{\sigma}{2} \int_0^3 \left(\frac{4}{9}x^2 \right) dx = \frac{2}{9}\sigma \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{2}{9}\sigma \left(\frac{27}{3} - 0 \right) = 2\sigma$$

Souřadnice těžiště tedy jsou:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{6\sigma}{3\sigma} = 2$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{2\sigma}{3\sigma} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow T \left[2, \frac{2}{3} \right]$$

Pozn. Ke stejnému výsledku lze dojít i pomocí nástrojů analytické geometrie.

Integrace fyzikálních veličin Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, celá řada fyzikálních veličin je definovaná jako derivace jiných veličin. Například rychlost jednorozměrného pohybu je určena jako derivace dráhy s podle času t :

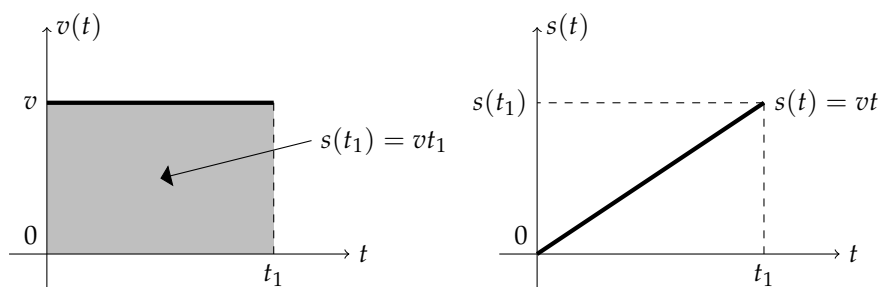
$$v = \frac{ds}{dt}$$

Pokud bychom naopak znali průběh okamžité rychlosti v čase $v = v(t)$ a chtěli dopočítat uraženou dráhu s , použijeme integraci:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Tedy uražená dráha v čase t je geometricky rovna obsahu plochy pod grafem okamžité rychlosti. Člen $s(0)$ značí uraženou dráhu v čase $t = 0$ a není ničím jiným než integrační konstantou. V jednoduchých případech si vystačíme se středoškolskou matematikou a geometrickým pojetím určitého integrálu:

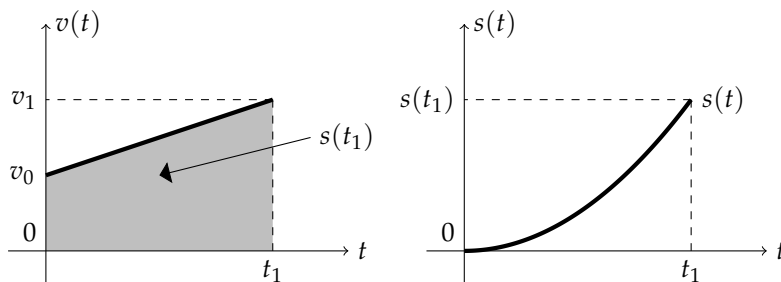
- Okamžitá rychlost je *konstantní* $v(t) = \text{konst.}$ Pak dráhu v čase t_1 určíme jako obsah obdélníku: $s(t_1) = vt_1$. Tento vzorec ovšem platí pro všechna $t \in \langle 0, t_1 \rangle$. Obecněji tedy: $s(t) = vt$.



Obrázek 2.12: Integrace konstantní rychlosti

- Okamžitá rychlost je *lineární* funkcí: $v(t) = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{t_1}t$, tj. rychlost se lineárně zvětšuje z $v(t) = v_0$ v čase $t = 0$ na $v(t) = v_1$ v čase $t = t_1$. Z grafu plyne, že dráhu v čase t_1 spočteme jako obsah lichoběžníku: $s(t_1) = \frac{(v_0 + v_1)t_1}{2}$.

V případě obecného času t nejprve spočítáme okamžitou rychlost v čase t a tu dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku: $s(t) = \frac{1}{2} \left(v_0 + v_0 + \frac{v_1 - v_0}{t_1}t \right) t = v_0t + \frac{1}{2} \cdot \frac{(v_1 - v_0)}{t_1} t^2$. Dostáváme tedy kvadratickou závislost.



Obrázek 2.13: Integrace lineární rychlosti

Pozn. Celá řada veličin patří mezi takzvané *vektorové veličiny*. K jejich úplnému určení je potřeba znát nejen číselnou hodnotu a měřicí jednotku (jak je tomu u *skalárních veličin*), ale i směr – např. rychlost, síla, hybnost, moment síly. V následujícím textu se však budeme zabývat jen jejich velikostmi, tj. pod pojmem *rychlost* budeme chápat *velikost rychlosti* apod.

- Okamžitá rychlost je popsána *libovolnou* funkcí $v(t)$. Až na pár výjimek obsah plochy pod křivkou rychlosti nespočítáme pomocí jednoduchých geometrických vzorců. V tom případě využijeme vzorec 2.19 a tento obsah, tj. odpovídající dráhu, spočteme pomocí určitého integrálu:

- Konstantní rychlost $v(t) = v_0$:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) \, d\tau = s(0) + \int_0^t v_0 \, d\tau = s(0) + [v_0\tau]_0^t = s(0) + v_0t$$

- Rychlost je lineární funkcí: $v(t) = v_0 + at$, kde a je konstanta:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) \, d\tau = s(0) + \int_0^t (v_0 + a\tau) \, d\tau = s(0) + [v_0\tau + a\frac{\tau^2}{2}]_0^t = s(0) + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

- Rychlost je kvadratickou funkcí: $v(t) = v_0 + kt^2$, kde k je konstanta:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) \, d\tau = s(0) + \int_0^t (v_0 + k\tau^2) \, d\tau = s(0) + [v_0\tau + k\frac{\tau^3}{3}]_0^t = s(0) + v_0t + \frac{1}{3}kt^3$$

- apod.

Obdobně lze postupovat i v dalších případech uvedených v tabulce 2.2.

veličina	značka	vztah	pozn.
dráha	s	$s(t) = \int v(t) \, dt$	$v = v(t)$ – rychlost
rychlost	v	$v(t) = \int a(t) \, dt$	$a = a(t)$ – zrychlení
úhlová dráha	φ	$\varphi(t) = \int \omega(t) \, dt$	$\omega = \omega(t)$ – úhlová rychlost
úhlová rychlost	ω	$\omega(t) = \int \epsilon(t) \, dt$	$\epsilon = \epsilon(t)$ – úhlové zrychlení
potenciální energie	E_p	$E_p(x) = \int -F(x) \, dx$	$F = F(x)$ – síla
práce	W	$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ $W = \int F \, dx$	obecný vzorec síla F ve směru pohybu
práce vykonaná id. plynem	W	$W = \int p(V) \, dV$	$p = p(V)$ – tlak V – objem
proud protékající induktorem	i	$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) \, dt$	$u = u(t)$ – napětí na induktoru L – indukčnost
napětí na kapacitoru	u	$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \, dt$	$i = i(t)$ – proud kapacitorem C – kapacita
moment setrvačnosti	J	$J = \int r^2 \, dm$	vysvětlení v Příkladu 2.28

Tabulka 2.2: Vybrané fyzikální veličiny vyjádřené integrálem

Při výpočtech je potřeba do uvedených integrálů dosadit integrační meze. Pokud např. požadujeme okamžitou rychlost v čase t a víme, že v čase t_0 byla rychlost $v(t_0) = v_0$, pak výsledný vztah budeme počítat jako:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$$

Tedy nezávislá proměnná rychlosti se objevuje jako horní mez integrálu (v tomto případě čas t). Pro zamezení nejednoznačnosti pak označíme integrační proměnnou τ , která si zachová rozměr času. Nesmíme též zapomenou uvést integrační konstantu, v tomto případě $v(t_0) = v_0$, tj. hodnota hledané veličiny s dosazenou dolní mezí integrálu.

Příklad 2.21. Určete potenciální energii homogenního tíhového pole.

Řešení V tíhovém poli uvažujeme tíhovou sílu $F_G(y) = -mg$, kde m je hmotnost a g velikost tíhového zrychlení. Potenciální tíhová energie je:

$$E_p(h) = \int -F_G(y) dy = E_{p0} + \int_0^h mg dy = E_{p0} + mgh$$

Příklad 2.22. Určete práci potřebnou k natažení pružiny o tuhosti $k = 7,0 \text{ N m}^{-1}$ o 30 cm z nenapnutého stavu. Uvažujte pružnou deformaci pružiny.

Řešení Při natahování pružiny působíme proti síle pružnosti $F(x) = kx$, kde x je prodloužení pružiny. Protože uvažujeme jednorozměrný případ a síla F je ve směru pohybu, platí vzorec $W = \int F dx$:

$$W = \int F dx = \int_0^{0,30} kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,30} = 7,0 \cdot \frac{0,30^2}{2} \text{ J} = \underline{\underline{0,32 \text{ J}}}$$

Příklad 2.23. Setrvačnick se na začátku pohybu otáčí úhlovou rychlostí $\omega_0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ a začne rovnoměrně zpomalovat se zrychlením $\epsilon(t) = -\frac{10}{1+t} \text{ rad s}^{-2}$. Určete, v jakém čase se setrvačnick zastaví a jakou úhlovou dráhu do té doby urazí.

Řešení Setrvačnick se zastaví ve chvíli, kdy jeho úhlová rychlost dosáhne nulové hodnoty. Nejprve proto určíme vztah pro úhlovou rychlost:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int \epsilon(\tau) d\tau = \omega_0 - \int_0^t \frac{10}{1+\tau} d\tau = \omega_0 - 10[\ln|1+\tau|]_0^t = \\ &= \omega_0 - 10[\ln(1+t) - \ln 1] = \omega_0 - 10 \ln(1+t) \end{aligned}$$

Pozn. Znaménko mínus ve vzorci pro velikost tíhové síly F_G označuje opačnou orientaci této síly a směru osy y .

Pozn. Pokud prohlásíme potenciální energii v nulové hladině za nulovou, tj. $E_{p0} = E_p(0) = 0$, pak dostáváme známý vzorec $E_p = mgh$.

Nyní již můžeme spočítat čas, pro který platí $\omega(t) = 0$:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 - 10 \ln(1+t) = 0 \\ \ln(1+t) &= \frac{\omega_0}{10} \\ 1+t &= e^{\frac{\omega_0}{10}} \\ \rightarrow t_{end} &= e^{\frac{\omega_0}{10}} - 1 = \left(e^{\frac{20}{10}} - 1\right) \text{ s} \approx \underline{\underline{6,4 \text{ s}}}\end{aligned}$$

Vztah pro úhlovou dráhu odvodíme pomocí integrace úhlové rychlosti:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int \omega(\tau) d\tau = \varphi_0 + \int_0^t [\omega_0 - 10 \ln(1+\tau)] d\tau = \\ &= \varphi_0 + [\omega_0 \tau - 10((\tau+1) \ln(\tau+1) - (\tau+1))]_0^t = \\ &= \varphi_0 + t(\omega_0 + 10) - 10(t+1) \ln(t+1)\end{aligned}$$

Dosadíme t_{end} :

$$\varphi(t_{end}) = [(e^2 - 1)(20 + 10) - 10e^2 \ln e^2] \text{ rad} \approx \underline{\underline{44 \text{ rad}}}$$

Příklad 2.24. Určete, jakou práci vykoná síla při prodloužení ocelové tyče počáteční délky $l_0 = 300 \text{ cm}$ a obsahu průřezu $S = 4,0 \text{ mm}^2$ o $1,0 \text{ mm}$. Uvažujte pružnou deformaci a modul pružnosti oceli $E = 210 \text{ GPa}$.

Řešení V případě pružné deformace použijeme Hookův zákon:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0},$$

kde F je velikost tahové síly, Δl prodloužení a l_0 počáteční délka. Sílu, která vyvolává prodloužení, x můžeme tedy vyjádřit jako

$$F(x) = ES \frac{x}{l_0}$$

Pro celkovou práci potřebnou na prodloužení tyče o Δl platí:

$$\begin{aligned}W &= \frac{ES}{l_0} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{ES}{l_0} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\Delta l} = \frac{ES}{2l_0} (\Delta l)^2 \\ &= \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 4,0 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,00} \cdot 0,0010^2 \text{ J} \approx \underline{\underline{0,14 \text{ J}}}\end{aligned}$$

Příklad 2.25. Jakou práci je potřeba vykonat na vytažení ocelového lana o délce 10 m a hmotnosti 15 kg , které volně visí ze střechy domu.

Řešení Při vytahování lana je potřeba překonávat tíhovou sílu, která působí na tu část lana, která ještě pořád visí z domu dolů.

Pokud bylo již vytaženo x metrů, z domu visí $(l - x)$ metrů, pak síla, kterou v ten moment je potřeba na vytažování je úměrná této zbývající délce

$$F_G(x) = mg \frac{l-x}{l}$$

Celkovou práci potřebnou na vytažení lana tedy spočteme integrací přes celou jeho délku:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^l F(x) dx = \int_0^l mg \frac{l-x}{l} dx = \frac{mg}{l} \left[lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{mgl}{2} = \\ &= \frac{15 \cdot 10 \cdot 9,81}{2} \text{ J} \approx \underline{\underline{0,74 \text{ kJ}}} \end{aligned}$$

Příklad 2.26. 1 mol ideálního plynu o teplotě $t_1 = 40^\circ\text{C}$ a objemu $V_1 = 15,01$ byl izotermicky stlačen na konečný objem $V_2 = 4,01$. Určete vykonanou práci. $R \approx 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

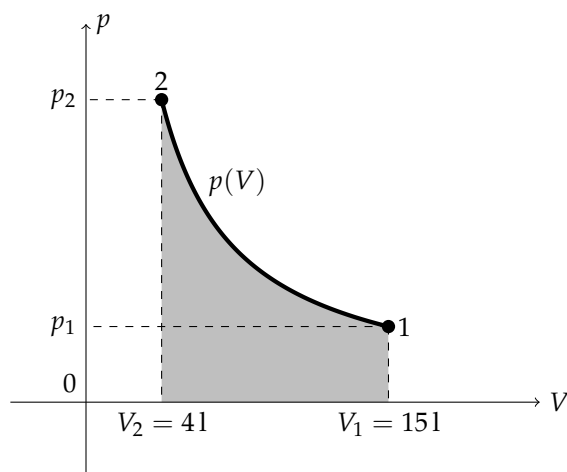
Řešení Platí stavová rovnice ideálního plynu:

$$pV = nRT, \quad (2.20)$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, n látkové množství, R je molární plynová konstanta a T termodynamická teplota. Vyjádříme tlak jako funkci objemu

$$p(V) = \frac{nRT}{V}$$

a situaci znázorníme na p - V diagramu na obr. 2.14.



Obrázek 2.14: Příklad 2.26 – p - V diagram izotermické komprese

Pro práci plynu platí vzorec $W = \int p dV$, který se v případě izochorického děje (tj. při konstantní objemu) zjednodušuje na $W = p\Delta V$. V našem případě je však situace komplikovanější a již si nevystačíme s obsahy základních geometrických obrazců. Je totiž potřeba spočítat obsah plochy pod grafem hyperboly. Využijeme k

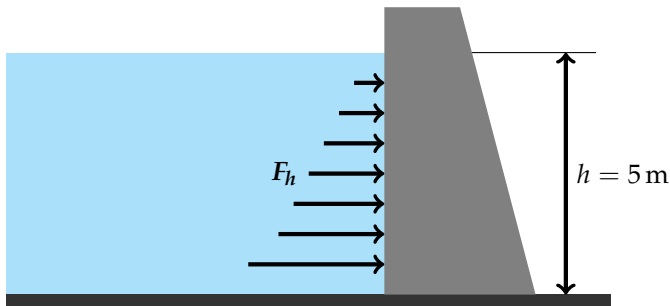
tomu tedy výpočet pomocí určitého integrálu:

$$\begin{aligned} W' &= - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \, dV = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ &= -nRT (\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \end{aligned}$$

Můžeme dosadit číselné hodnoty:

$$W' = 1 \cdot 8,3 \cdot 313,15 \cdot \ln \frac{15,0}{4,0} \text{ J} \approx \underline{\underline{3,4 \text{ kJ}}}$$

Příklad 2.27. Hráz rybníka délky 15,0 m má tvar lichoběžníkového hranolu (viz obr. 2.15). Voda u hráze sahá do výšky 5,0 m ode dna. Jakou silou na ni voda působí?



Pozn. Plyn koná práci

$$W = \int p \, dV,$$

vnější síly však konají práci W' pro kterou platí:

$$W' = -W = - \int p \, dV.$$

Obrázek 2.15: Příklad 2.27 – přehrada rybníka

Řešení Hydrostatický tlak ve výšce y ode dna je

$$p(y) = (h - y)\rho g.$$

Na element plochy o obsahu $\Delta S = l\Delta y$ (viz obr. 2.16) působí hydrostatická tlaková síla o velikosti

$$\Delta F = p(y)\Delta S = (h - y)\rho g l \Delta y.$$

Celková síla působící na hráze je součtem velikostí tlakových sil působící na jednotlivé plošné elementy. Výsledek bude tím přesnější, čím Δy a tím i plošné elementy ΔS budou menší. Budeme-li je nekonečně zmenšovat (a tak jich i získávat nekonečné množství) bude v platit limitě $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y \rightarrow dy$, a tak i pro element síly

$$dF = (h - y)\rho g l dy$$

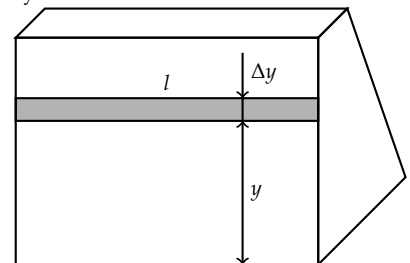
a součet nekonečného počtu nekonečně malých přírůstků dF není nic jiného než určitý integrál přes všechny uvažované hloubky neboli:

$$F = \int_0^h dF = \int_0^h (h - y)\rho g l \, dy = \rho g l \left[hy - \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{\rho g l h^2}{2}$$

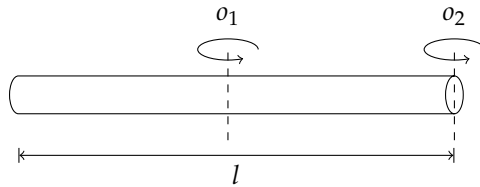
Po dosazení:

$$F = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 15,0 \cdot 5,0^2}{2} \text{ N} \approx \underline{\underline{1,8 \text{ MN}}}$$

Obrázek 2.16: Příklad 2.27 – přehrada rybníka 2



Příklad 2.28. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní tenké tyče o hmotnosti m a délce l vzhledem k ose kolmé na osu tyče a procházející a) středem tyče, b) okrajem tyče.



Obrázek 2.17: Příklad 2.28 – moment setrvačnosti dlouhé tyče

Řešení Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k nehybné ose definujeme vzorcem

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.21)$$

Tato veličina vyjadřuje míru setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Závisí nejenom na celkové hmotnosti tělesa, ale především na jeho rozložení vzhledem k rotační ose.

Předpokládáme-li při výpočtu momentu setrvačnosti spojitě rozloženou hmotu přechází nekonečná řada 2.21 v určitý integrál

$$J = \int_{(m)} r^2 dm, \quad (2.22)$$

kde integrujeme přes celou hmotnost tělesa m . Ve speciálním případě, kdy je těleso *homogenní* (tj. má ve všech bodech stejnou hustotu) platí $dm = \rho dV$, přičemž $\rho = konst.$ a dV je element objemu. Pak integrál 2.22 přechází do tvaru

$$J = \rho \int_{(V)} r^2 dV, \quad (2.23)$$

kde nyní integrujeme přes celý objem tělesa V .

V tomto konkrétním případě uvažujeme dlouhou tyč s konstantním průřezem S po celé její délce. Proto můžeme diferenciál dm zjednodušit na $dm = \rho dV = \rho S dx$. Vycházíme z malých elementů objemu tvaru válce o obsahu základny S a výšce dx . Tímto krokem úlohu zjednodušíme na jednorozměrnou a integrovat tedy budeme pouze přes délku.

a) osa procházející středem tyče

V tomto případě vzdálenosti elementů od uvažované osy leží v intervalu $\langle -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \rangle$:

$$J_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\rho S l^3}{12} = \frac{m l^2}{12}$$

b) osa procházející koncem tyče V případě, že tyč rotuje kolem osy procházející kolmo jejím okrajem, dostaneme moment setrvačnosti J_2 :

$$J_2 = \int_0^l x^2 \cdot \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{\rho S l^3}{3} = \frac{m l^2}{3}$$

Jednotkou momentu setrvačnosti v soustavě SI je kg m^2 .

Moment setrvačnosti se objevuje např. ve II. větě impulsové:

$$J \epsilon = \mathbf{M},$$

kde ϵ je vektor úhlového zrychlení a \mathbf{M} celkový moment sil.

K uvedenému výsledku se lze dobrat i pomocí *Steinerovy věty*:

$$J = J_s + m d^2,$$

kde J_s je moment setrvačnosti vzhledem k ose o procházející těžištěm tělesa, J je moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s o , d je vzdálenost těchto rovnoběžných os.

V našem případě je $d(o_1||o_2) = \frac{l}{2}$ a tedy:

$$J_2 = J_1 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m l^2}{12} + \frac{m l^2}{4} = \frac{m l^2}{3}$$

2.3.3 Elektrotechnické úlohy

Střední hodnota

Střední hodnota je průměrná hodnota periodické funkce v době jedné periody:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad (2.24)$$

V případě střední hodnoty proudu můžeme vycházet z fyzikální definice:

Definice 2.3: Středního hodnota proudu

Střední hodnota periodického proudu $i(t)$ představuje hodnotu ekvivalentního stejnosměrného proudu I_0 , který přenesl za dobu jedné periody stejné celkové množství náboje jako $i(t)$ (stejně elektrochemické účinky):

$$\begin{aligned} I_0 T &= \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt \\ I_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Protože střední hodnota se počítá pomocí určitého integrálu, může nabývat kladných i záporných hodnot. Pokud pro signál platí $U_0 (I_0) = 0$, pak mluvíme o *střídavých veličinách*. Právě pro střídavé veličiny definujeme *aritmetickou střední hodnotu*:

$$U_{sar} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)| dt \quad (2.26)$$

Pro ni zřejmě platí: $U_{sar} \geq 0$.

Efektivní hodnota

Efektivní hodnota udává hodnotu ekvivalentního stejnosměrného proudu, který by při průchodu odporovou zátěží dával stejný průměrný výkon.

Definice 2.4: Efektivní hodnota proudu

Efektivní hodnota periodického proudu $i(t)$ představuje hodnotu ekvivalentního stejnosměrného proudu $I (I_{ef}, I_{RMS})$, který má stejné elektrotepelné účinky jako $i(t)$:

$$\begin{aligned} RI^2 T &= \int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2(t) dt \\ I^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \\ I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Obdobně definujeme i efektivní hodnotu napětí:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt} \quad (2.28)$$

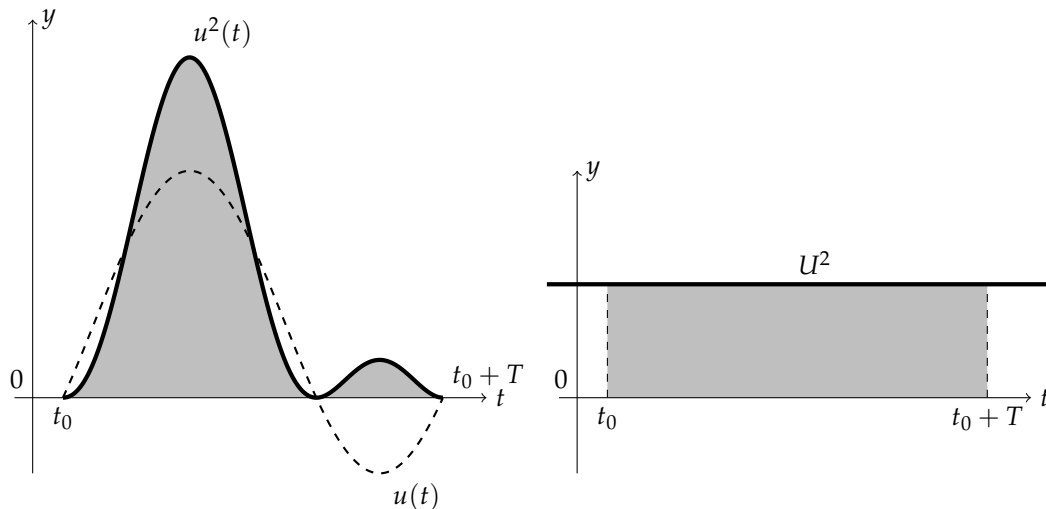
Definice 2.3 vychází z definice okamžitého proudu $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, kde q je náboj. Z toho platí pak pro náboj

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Anglicky efektivní hodnotu označujeme jako *root mean square*, neboli RMS.

Grafy na obr. 2.18 ilustrují geometrický význam efektivní hodnoty. Platí, že obsah plochy pod grafem funkce $u^2(t)$ v intervalu $\langle t_0, t_0 + T \rangle$ je roven obsahu plochy pod grafem konstantní funkce U^2 na témže intervalu, tj. obdélníku o stranách U^2 a T . Protože integrujeme nezápornou funkci, pro efektivní hodnotu platí $U(I) \geq 0$.

Toto tvrzení platí, neboť pro každé x , $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 \geq 0$.



Obrázek 2.18: Geometrická interpretace efektivní hodnoty

Příklad 2.29. Určete střední hodnotu, aritmetickou střední hodnotu a efektivní hodnotu napětí sinusového průběhu. Dále spočítejte poměr efektivní a aritmetické střední hodnoty, takzvaný *koefficient tvaru*.

Řešení Sinusový průběh napětí zapíšeme jako $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, kde U_m je amplituda (maximální hodnota napětí) a ω je úhlová frekvence.

Střední hodnota:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t \, dt = \frac{U_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^T = \\ &= \frac{U_m}{T} \left(-\frac{\cos \omega T}{\omega} + \frac{\cos 0}{\omega} \right) = \frac{U_m}{T} \left(-\frac{\cos 2\pi}{\omega} + \frac{\cos 0}{\omega} \right) = \\ &= \frac{U_m}{T} \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) = \underline{\underline{0 \text{ V}}} \end{aligned}$$

Střední aritmetická hodnota:

$$\begin{aligned} U_{sar} &= \frac{1}{T} \int_0^T |U_m \sin \omega t| \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin \omega t \, dt = \\ &= \frac{2U_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2U_m}{T\omega} \left(-\cos \omega \frac{T}{2} + \cos 0 \right) = \\ &= \frac{2U_m}{2\pi} \left(-\cos \pi + \cos 0 \right) = \frac{U_m}{\pi} \left(-(-1) + 1 \right) = \frac{2U_m}{\pi} \end{aligned}$$

Úhlová frekvence ω :

- jednotka: rad s^{-1} , často pouze s^{-1}
- vztah k frekvenci f ($[f] = \text{Hz}$) a periodě T ($[T] = \text{s}$):

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Pozn. Funkce $f(t) = \sin \omega t = \sin \frac{2\pi}{T}t$ má periodu T .

Pozn. Podle předchozího vztahu platí $\omega T = 2\pi$.

Pozn. Integrovat funkci $f(x) = |\sin x|$ přes celou periodu je stejné jako integrovat funkci $f(x) = \sin x$ přes půl periody a výsledek vynásobit dvěma, neboť absolutní hodnota této funkce v druhé polovině periody je identická s hodnotou funkce v první polovině periody.

Efektivní hodnota:

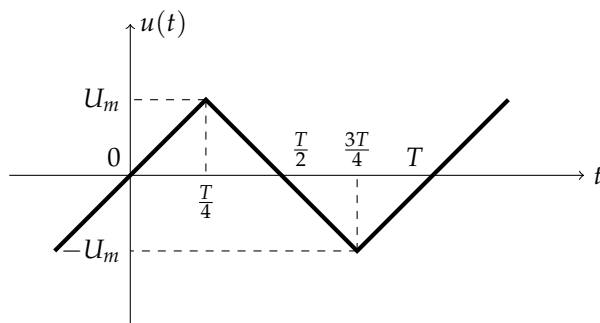
$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_m \sin \omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{\sin 2\omega T}{4\omega} - 0 + \frac{\sin 0}{4\omega} \right)} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 - 0 + 0 \right)} = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Koeficient tvaru:

$$k = \frac{U_{ef}}{U_{sar}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2U_m}{\pi}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2U_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

Tohoto výsledku využívají některé levnější voltmetry a ampérmetry, které dokáží změřit pouze střední aritmetickou hodnotu, tj. integrál z usměrněného signálu. Udávají však i efektivní hodnotu, kterou získají vynásobením U_{sar} koeficientem 1,11. To však dostatečně dobře platí pouze v případě sinusového signálu, jak ukážeme na následujícím příkladu:

Příklad 2.30. Určete střední hodnotu, aritmetickou střední hodnotu a efektivní hodnotu napětí trojúhelníkového průběhu s periodou T a amplitudou U_m , viz. obr. 2.19. Poté vypočítejte příslušný koeficient tvaru.



Řešení

Střední hodnota:

Všimneme si, že průběh výše vyznačeného napětí má v jedné periodě až na znaménko identickou kladnou a zápornou část. Tyto části se tedy v definičním integrálu odečtou a pro výslednou střední hodnotu bude platit:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \underline{\underline{0V}}$$

Střední aritmetická hodnota:

Graf průběhu absolutní hodnoty uvažovaného napětí $u(t)$ se v jedné periodě skládá ze dvou stejných po sobě následujících trojúhelníků. Integrál z toho to průběhu tedy můžeme spočítat podle

Pozn. Připomeňme si poznatek z příkladu 2.18:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t dt &= \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C \end{aligned}$$

S využitím Věty o integraci složené lineární funkce 2.5 počítáme:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \omega t dt &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right) = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} + C \end{aligned}$$

Pozn. Měřicí přístroje měřící skutečnou efektivní hodnotu zpravidla nesou označení True RMS. Převodníky v těchto přístrojích dokáží určit efektivní hodnotu signálu téměř libovolného průběhu.

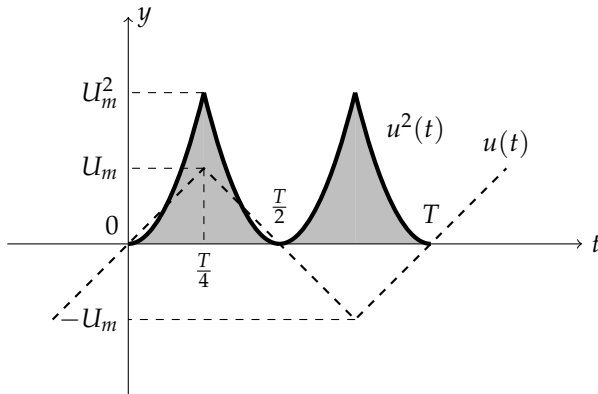
Obrázek 2.19: Příklad 2.30 – napětí trojúhelníkového průběhu

geometrické interpretace určitého integrálu jako dvojnásobek obsahu trojúhelníku o základně délky $\frac{T}{2}$ a výšce U_m :

$$U_{sar} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} U_m = \frac{U_m}{2}$$

Efektivní hodnota:

Nejprve se podíváme na graf funkce $f(t) = u^2(t)$:



Obrázek 2.20: Příklad 2.30 – integrace napětí trojúhelníkového průběhu

Na grafu si všimneme, že plocha, kterou ohraničuje graf funkce $u^2(t)$ se dá rozdělit vždy po čtvrt intervalu $\frac{T}{4}$ na čtyři části o stejném obsahu. Pokud tedy budeme chtít integrovat $u^2(t)$ na celém intervalu $\langle 0, T \rangle$, pak stačí integrovat tuto funkci na intervalu $\langle 0, \frac{T}{4} \rangle$ a výsledek vynásobit čtyřmi. Tedy pro tento případ platí:

$$\int_0^T u^2(t) dt = 4 \int_0^{\frac{T}{4}} u^2(t) dt$$

Zintegrovat $u^2(t)$ na intervalu $\langle 0, \frac{T}{4} \rangle$ je již snadné:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4U_m}{T}t\right)^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{64U_m^2}{T^3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{T}{4}}} = \sqrt{\frac{64U_m^2}{T^3} \cdot \frac{T^3}{64 \cdot 3}} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{3}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Koeficient tvaru:

$$k = \frac{U_{ef}}{U_{sar}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{3}}}{\frac{U_m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547$$

Napětí a proud na induktoru a kapacitoru

Pro napětí a proud kapacitorem platí vztahy:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (2.29)$$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

Pozn. Funkce $u(t)$ na intervalu $\langle 0, \frac{T}{4} \rangle$ je přímo úměrou (procházející počátkem) s rovnicí $u(t) = kt$, kde pro směrnicí k platí:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{U_m}{\frac{T}{4}} = \frac{4U_m}{T}$$

Pozn. Tedy pokud bychom měřili efektivní hodnotu trojúhelníkového napětí levnějším voltmetrem, který ji dopočítává z U_{sar} pomocí koeficientu 1,11, dopouštěli bychom se systematické chyby.

kde C je kapacita. Obdobně pro napětí a proud induktorem:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.31)$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

kde L je indukčnost.

Je potřeba zmínit, že veličiny, které se vyskytují v jednotlivých vztazích v derivaci (napětí na kapacitoru a proud induktorem) se nazývají *integrální veličiny*. Je pro ně charakteristické, že jejich průběhy jsou spojité, tj. limita zleva i zprava je stejná a rovná se funkční hodnotě. Oproti tomu „neintegrální“ veličinu je možno velmi snadno měnit vnějšími podmínkami, tj. změnou proudu kapacitorem či napětí induktorem, a to i nespojitě, skokově.

V předchozí kapitole jsme se věnovali vztahům obsahující derivace, nyní se zaměříme na vztahy 2.30 a 2.32, které využijeme při řešení následující úlohy.

Pozn. Limita zleva v bodě x_0 často zkráceně zapisujeme $f(x_0^-)$, limitu zprava pak $f(x_0^+)$. Pokud je veličina v daném bodě spojitá, tak platí

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0).$$

Příklad 2.31. Uvažte ideální induktor s indukčností $L = 2$ mH. Necht' $i(-5 \text{ ms}) = 1$ A. Určete a nakreslete průběh proudu i , má-li průběh napětí u tvar (viz grafy na obr. 2.21):

(a) Obdélníková funkce:

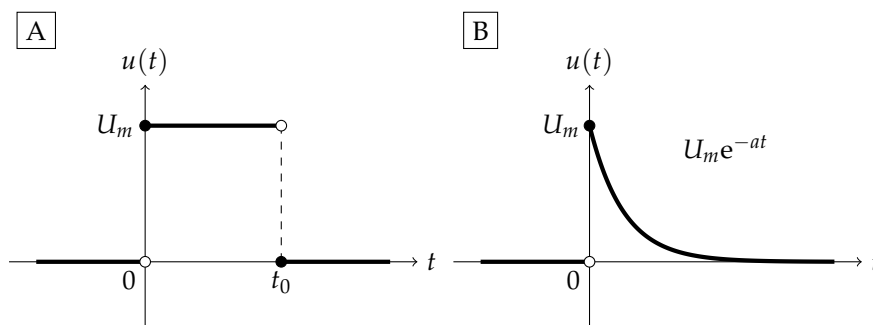
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_m & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & t_0 \leq t \end{cases}$$

kde $U_m = 2$ V, $t_0 = 10$ ms.

(b) Exponenciální funkce v nezáporném čase

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_m e^{-at} & 0 \leq t \end{cases}$$

kde $U_m = 2$ V, $a = 100 \text{ s}^{-1}$.



Obrázek 2.21: Příklad 2.31 – průběhy napětí na induktoru

Řešení V osou případech pro výpočet proudu na induktoru použijeme vzorec 2.32.

- (a) •
- $t \in (-\infty, 0)$
- :

$$i(t) = i(-5 \text{ ms}) + \frac{1}{L} \int_{-5}^t 0 \, dt = i(-5 \text{ ms}) = 1 \text{ A}$$

A tedy:

$$i(0^-) = 1 \text{ A}$$

-
- $t \in (0, t_0)$
- : Protože
- $i(t)$
- je u induktoru integrální veličina, tj. musí být spojitá, platí
- $i(0) = i(0^-) = i(-5 \text{ ms}) = 1 \text{ A}$
- .

$$i(t) = i(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t U_m \, dt = i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} t$$

Platí:

$$i(t_0^-) = i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} t_0$$

$$i(t_0^-) = 1 + \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} 0,01 \text{ A} = 11 \text{ A}$$

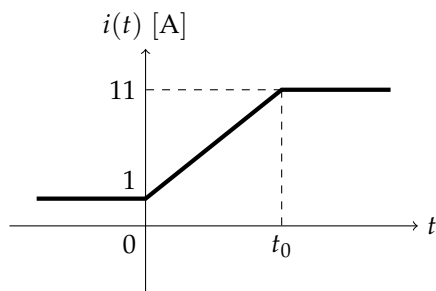
-
- $t \in (t_0, \infty)$
- :

$$i(t) = i(t_0^-) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t 0 \, dt = i(t_0^-) = i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} t_0$$

Tedy celkově pro vypočtený proud $i(t)$ platí:

$$i(t) = \begin{cases} i(-5 \text{ ms}) = 1 \text{ A} & t < 0 \\ i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} t = (1 + 10^3 \{t\}) \text{ A} & 0 \leq t < t_0 \\ i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} t_0 = 11 \text{ A} & t_0 \leq t \end{cases}$$

a týž průběh v grafu:



Obrázek 2.22: Příklad 2.31 – průběh proudu na induktoru (rampa)

- (b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě:

-
- $t \in (-\infty, 0)$
- :

$$i(t) = i(-5 \text{ ms}) + \frac{1}{L} \int_{-5}^t 0 \, dt = i(-5 \text{ ms}) = 1 \text{ A}$$

-
- $t \in (0, \infty)$
- :

$$i(t) = i(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t U_m e^{-a\tau} \, d\tau = i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{L} \left[\frac{e^{-a\tau}}{-a} \right]_0^t =$$

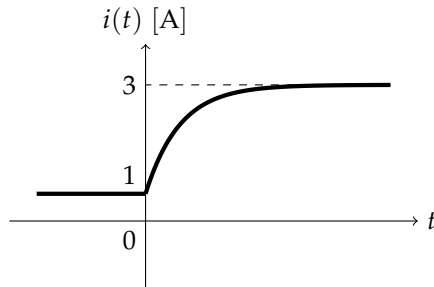
$$= i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{aL} (-e^{-at} + 1)$$

$$i(t) = \left[1 + 2 \left(1 - e^{-100\{t\}} \right) \right] \text{ A} = \left(3 - 2e^{-100\{t\}} \right) \text{ A}$$

Celkově pro vypočtený proud $i(t)$ platí:

$$i(t) = \begin{cases} i(-5 \text{ ms}) = 1 \text{ A} & t < 0 \\ i(-5 \text{ ms}) + \frac{U_m}{aL}(-e^{-at} + 1) = (3 - 2e^{-100\{t\}}) \text{ A} & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Pro úplnost tentýž průběh v grafu:



Obrázek 2.23: Příklad 2.31 – průběh proudu na induktoru (exp)

2.4 Úlohy k samostatnému řešení

Příklad 2.32. Vypočtete:

- | | |
|----------------------------------|--|
| (a) $\int 3x^5 dx$ | (e) $\int \left(\frac{4-x^2}{x}\right)^2 dx$ |
| (b) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | (f) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$ |
| (c) $\int (x^2 - 1)(x + 2)^2 dx$ | (g) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ |
| (d) $\int (3 - x + 5 \sin x) dx$ | (h) $\int \frac{x^4 + 4x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ |

Příklad 2.33. Určete danou funkci f tak, aby platilo:

- (a) $f'(x) = 2x - \cos x \wedge f(0) = 2$
 (b) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2x \wedge f(1) = 1 + \pi$
 (c) $f'(x) = \frac{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2} \wedge f(-1) = \ln 10$

Příklad 2.34. Vypočtete pomocí metody *per partes*:

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| (a) $\int x \sin x dx$ | (d) $\int e^x \cos x dx$ |
| (b) $\int x e^x dx$ | (e) $\int \sin x \cos x dx$ |
| (c) $\int x \ln x dx$ | (f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ |

Příklad 2.35. Vypočtete pomocí *substituční metody*:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$ | (c) $\int \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} dx$ |
| (b) $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$ | (d) $\int 3 \sin 6x dx$ |

V posledním příkladu s výhodou využijte dělení mnohočlenu mnohočlenem.

$$(e) \int 3e^{-x} dx \qquad (g) \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$(f) \int \frac{3 \ln x}{x} dx \qquad (h) \int \frac{5}{2x-3} dx$$

Příklad 2.36. Vypočtěte:

$$(a) \int_0^1 (2x^3 + 2x + 5) dx \qquad (c) \int_1^3 (x+3)^2 dx$$

$$(b) \int_1^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx \qquad (d) \int_2^4 \frac{1}{x} dx$$

Příklad 2.37. Vypočtěte pomocí metody *per partes*:

$$(a) \int_1^2 xe^x dx \qquad (c) \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$(b) \int_0^1 x \arctan x dx \qquad (d) \int_1^e \ln x dx$$

Příklad 2.38. Vypočtěte pomocí *substituční metody*:

$$(a) \int_0^2 3x\sqrt{5+x^2} dx \qquad (c) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(b) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \qquad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

V poslední úloze použijte substituci $t = \sin x$.

Příklad 2.39. Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí f a g . Potom vypočítejte jeho obsah:

$$(a) f(x) = x^2, g(x) = 4$$

$$(b) f(x) = (x+1)^2, g(x) = 1-x$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$(d) f(x) = x^3, g(x) = x$$

$$(e) f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 3-x$$

Příklad 2.40. Vypočtěte:

$$(a) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Využijte substituci $x = 2 \sin t$.

Využijte substituci $x = \sin t$.

Využijte Eulerovu substituci $t = x + \sqrt{1+x^2}$.

Příklad 2.41. Vypočtěte obsah cykloidy, jež je zadána parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Použijte Větu 2.8.

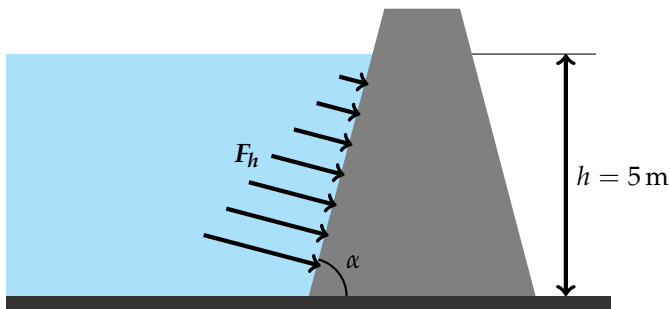
Příklad 2.42. Určete polohu těžiště:

- (a) půlkružnice.
 (b) plošného útvaru omezeného funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a osou x .
 (c) plošného útvaru omezeného funkcí $f(x) = \cos x$ v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a osou x .

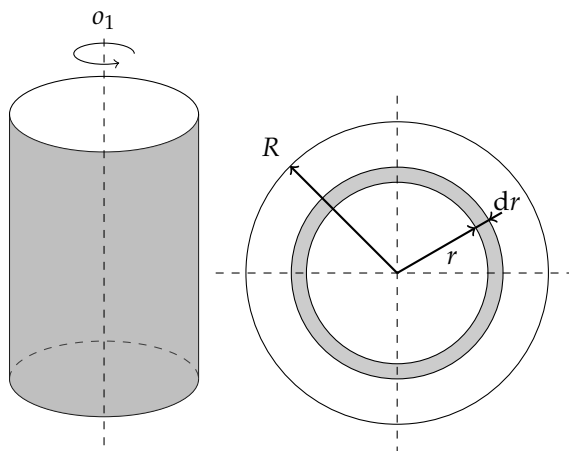
Příklad 2.43. Částice se pohybuje přímočaře se zrychlením o velikosti $a = 1,5 \text{ m s}^{-2}$. Určete rovnici rychlosti a rovnici dráhy (pokud $v_0 = 0,2 \text{ m s}^{-1}$, $s_0 = 150 \text{ m}$). Vypočtěte rychlost a dráhu pohybu v čase $t = 3,0 \text{ s}$.

Příklad 2.44. Kolik tepla je nutné odebrat 112 g dusíku N_2 , abychom ho při teplotě 320 K izotermicky stlačili z tlaku 150 kPa na tlak 400 kPa?

Příklad 2.45. Hráz rybníka délky 15,0 m má tvar lichoběžníkového hranolu s úhlem sklonu stěn $\alpha = 60^\circ$ (viz obr. 2.24). Voda u hráze sahá do výšky 5,0 m ode dna. Jakou silou na ni voda působí?



Příklad 2.46. Určete moment setrvačnosti homogenního rotačního válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k jeho podélné ose.



Použijte vhodné vzorce z tabulky 2.2.

Dusík považujte za ideální plyn. Použijte Boyle-Mariottovův zákon, který platí pro izotermické děje, stavovou rovnici ideálního plynu $pV = nRT$ a vztah $n = \frac{m}{M_m}$, kde n je látkové množství, m hmotnost plynu a M_m molární hmotnost. Ostatní potřebné hodnoty dohledejte v Tabulkách.

Obrázek 2.24: Příklad 2.45 – přehrada rybníka 2

Je potřeba si uvědomit, že tlaková síla působí kolmo na plochu. A dále, že výška hladiny není totožná s délkou ponořené části hráze. Pokud tedy integrujeme přes hloubku, je nezbytné započítat i sklon.

Obrázek 2.25: Příklad 2.46 – moment setrvačnosti rotačního válce

Příklad 2.47. Určete střední a efektivní hodnotu jednocestně usměrněného napětí sinusového průběhu, tj. s předpisem:

$$u(t) = \begin{cases} U_m \sin(\omega t) & \text{pro } t \in \langle kT, k\frac{T}{2} \rangle, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence, T perioda a U_m amplituda.

Příklad 2.48. Uvažujte ideální kapacitor s $C = 25$ pF. Necht' $u(0) = 100$ V. Určete a nakreslete průběh napětí u , je-li průběh proudu pro $t \geq 0$ s určen funkcí: $i(t) = I_m \sin(\omega t)$, kde $I_m = 2 \mu\text{A}$ a $\omega = 200 \text{ s}^{-1}$.

2.5 Řešení úloh

Řešení 2.32 (a) $\frac{x^6}{2}$; (b) $-\frac{1}{3x^3}$; (c) $\frac{x^5}{5} + x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x$; (d) $3x - \frac{x^2}{2} - 5 \cos x$;
 (e) $-\frac{16}{x} - 4x^2 + \frac{x^5}{5}$; (f) $-2 \cos x$; (g) $\tan x - \cot x$; (h) $\frac{x^3}{3} + 3x$

Řešení 2.33 (a) $f(x) = x^2 - \sin x + 2$; (b) $f(x) = \tan x + x^2 + \frac{3\pi}{4}$;
 (c) $f(x) = \ln 5|x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2|$

Řešení 2.34 (a) $-x \cos x + \sin x + C$; (b) $e^x(x-1) + C$; (c) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$;
 (d) $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$; (e) $\frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C'$;
 (f) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

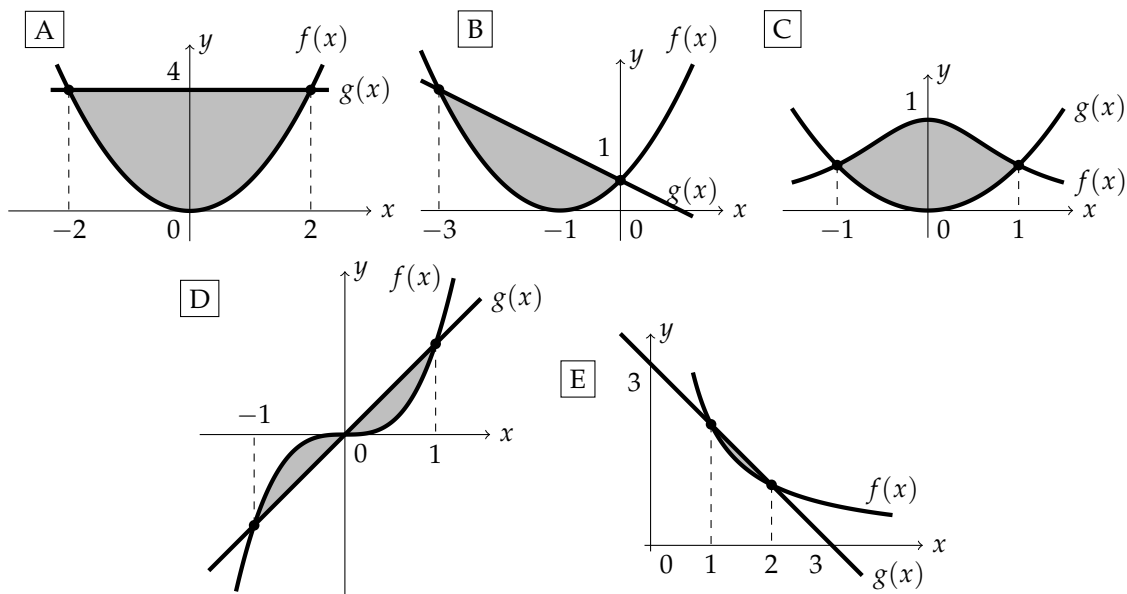
Řešení 2.35 (a) $\ln|1+x^3| + C$; (b) $\ln(2+\sin x) + C$; (c) $\frac{1}{2} \ln|2\sin x - 1| + C$;
 (d) $-\frac{1}{2} \cos 6x + C$; (e) $-3e^{-x} + C$; (f) $\frac{3}{2} \ln^2 x + C$; (g) $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$;
 (h) $\frac{5}{2} \ln|2x-3| + C$

Řešení 2.36 (a) $\frac{9}{2}$; (b) $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$; (c) $\frac{152}{3}$; (d) $\ln 2$

Řešení 2.37 (a) e^2 ; (b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; (c) $-\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} = -\sinh \pi \approx -11,549$;
 (d) 1

Řešení 2.38 (a) $27 - 5\sqrt{5}$; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $7 + \ln 4$; (d) $\frac{2}{3}$

Řešení 2.39 (a) $S = \int_2^2 (4-x^2) dx = \frac{32}{3}$; (b) $S = \int_{-3}^0 [1-x-(x+1)^2] dx = \frac{9}{2}$;
 (c) $S = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; (d) $S = 2 \int_0^1 (x-x^3) dx = \frac{1}{2}$;
 (e) $S = \int_1^2 \left(3-x-\frac{2}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$



Obrázek 2.26: Příklad 2.39 – řešení

Řešení 2.40 (a) 2π ; (b) $\frac{8}{15} - \frac{49\sqrt{3}}{160}$; (c) $2 \ln(\sqrt{2} + 1)$

Řešení 2.41 $S = 3\pi a^2$

Řešení 2.42 (a) $T = [0, \frac{2r}{\pi}]$; (b) $T = [1, \frac{2}{5}]$; (c) $T = [0, \frac{\pi}{8}]$

Řešení 2.43 $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$; $v(t = 3,0\text{ s}) = 4,7\text{ m s}^{-1}$;
 $s(t = 3,0\text{ s}) = 1,6 \cdot 10^2\text{ m}$

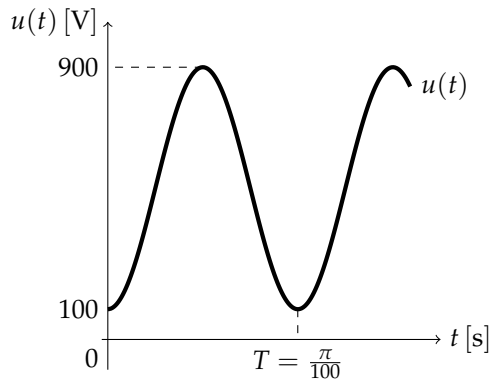
Řešení 2.44 Odebrané teplo Q se rovná práci vykonané okolím W' :
 $Q = W' = -W = \frac{mRT}{M_m} \ln \frac{p_2}{p_1} \approx 10,4\text{ kJ}$.

Řešení 2.45 $F = \frac{\rho g l h^2}{2 \sin \alpha} \approx 2,1\text{ MN}$

Řešení 2.46 $dV = 2\pi r h dr$; $dm = \rho dV$; $J = \int_0^R r^2 dm = \frac{1}{2}mR^2$

Řešení 2.47 střední hodnota $U_0 = \frac{U_m}{\pi}$; efektivní hodnota $U = \frac{U_m}{2}$

Řešení 2.48 $u(t) = u(0) + \frac{I_m}{\omega C} - \frac{I_m}{\omega C} \cos(200t)$; po číselném dosazení:
 $u(t) = -400 \cos(200t) + 500$



Obrázek 2.27: Příklad 2.48 – řešení

Literatura

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.

HAVLÍČEK, Václav, Martin POKORNÝ a Ivan ZEMÁNEK. *Elektrické obvody*. 2. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2014. ISBN 978-80-01-05492-5.

HAVLÍČEK, Václav a Ivan ZEMÁNEK. *Elektrické obvody 2*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008. ISBN 978-80-01-03971-7.

ČMEJLA, Roman, Václav HAVLÍČEK a Ivan ZEMÁNEK. *Základy teorie obvodů 1: cvičení*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04446-9.

ČMEJLA, Roman, Václav HAVLÍČEK a Ivan ZEMÁNEK. *Základy teorie obvodů 2: cvičení*. 2. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03690-7.

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.

ALEXANDER, Charles K. a Matthew SADIKU. *Fundamentals of Electric Circuits*. 4th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009. ISBN 9780071284417.

RILEY, K.F., M. P. HOBSON a S. J. BENCE. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139450997.

