

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Štěpánek

Jméno: Jan

Osobní číslo: 410124

Zadávací katedra: katedra mechaniky

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Dopravní stavby a konstrukce

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: modely zatížení chodci na lávkách pro pěší

Název diplomové práce anglicky: pedestrian load models for footbridges

Pokyny pro vypracování:

- vytvoření výpočetního nástroje v programu MATLAB pro výpočet odezvy konstrukce na pohybující se zatížení
- porovnání účinků různých zatěžovacích modelů na 2D konstrukcích
- porovnání výsledků numerické analýzy s experimentem

Seznam doporučené literatury:

-Shahabpoor, E., Pavic, A. and Racic, V. (2017). Interaction between Walking Humans and Structures in Vertical Direction: A Literature Review.

-Ivana Štímac Grandić. Serviceability verification of pedestrian bridges under pedestrian loading

-Sasparm.ps. (2017). SASPARM Project 2013 :: Fundamentals of Structural dynamics.

Jméno vedoucího diplomové práce: Prof. Ing. Jiří Máca, CSc.

Datum zadání diplomové práce: 12.10.2017

Termín odevzdání diplomové práce: 8.1.2018

Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

12.10.2017

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra mechaniky**

Modely zatížení chodci na lávkách pro pěší

Pedestrian load models for footbridges

Diplomová práce

Studijní program: Stavební inženýrství
Studijní obor: Dopravní stavby a konstrukce

Vedoucí práce: prof. Ing. Jiří Máca, CSc.

Jan Štěpánek

Praha 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

.....

Poděkování

Zde bych rád poděkoval všem, kteří mi pomohli při tvorbě této práce, zejména své rodině za její podporu. Další díky patří mému vedoucímu práce prof. Ing. Jiřímu Mácovi, CSc. a všem ostatním vyučujícím za předané znalosti a cenné rady.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá způsoby modelování zatížení chodci. Za tímto účelem byl vytvořen program, jehož pomocí je možné sestavit dvourozměrné prutové modely konstrukcí a provést jejich dynamickou analýzu. Jsou zde vytvořeny výpočetní model předpjatého betonového nosníku a zavěšené lávky pro pěší v Čelákovících. Na nich je vypočtena odezva při použití různých modelů chodců, která je následně porovnána s daty zjištěnými při zatěžovacích zkouškách.

Na základě první části práce byl vybrán jeden pohyblivý zatěžovací model, který nejlépe simuluje jdoucí osobu. Ten byl následně použit pro nalezení vztahu pro prostý nosník, který umožní určit odezvu na přechod chodce po konstrukci bez nutnosti integrace pohybových rovnic.

Abstract

The thesis focuses on various types of pedestrian load models. A program which can be used for creation of planar beam constructions and their dynamic analysis was created for this purpose. The models of prestressed concrete beam and cable-stayed footbridge in Čelákovice were used to analyze their response to load induced by pedestrians. The results of the calculation were compared to results of dynamic load tests.

One model of walking person which provides the best results was chosen on the basis of first part of the thesis. An equation which is capable to determine the response of simply supported beam was proposed using this model. The Application of this simplified methodology does not require integration of equations of motion.

Klíčová slova

zatěžovací modely chodců, modální analýza, odezva konstrukce, vynucené kmitání, vlastní tvar, vlastní frekvence

Keywords

pedestrian load models, modal analysis, response of construction, forced vibration, natural mode, natural frequency

Obsah

Abstrakt	i
Klíčová slova	iii
1 Úvod	1
2 Cíle práce	3
3 Zatížení vyvolané chodci	5
3.1 Popis zatížení	5
3.2 Metodika návrhu lávek	7
3.3 Způsoby modelování přechodu chodce	9
3.3.1 Aproximace na prostém nosníku	9
3.3.2 Stacionární síla	10
3.3.3 Pohybující se síla	10
3.3.4 Biodynamické modely	12
3.3.5 Další navrhované modely	13
4 Tvorba výpočetního nástroje	15
4.1 Údaje o konstrukci a zatížení	15
4.1.1 Vytvoření konstrukce	15
4.1.2 Zadání zatížení	17
4.1.3 Kontrola geometrie	17
4.2 Vytvoření sítě pro MKP	20
4.3 Sestavení matic K a M	21
4.4 Sestavení matice C	23
4.4.1 Klasický útlum	23
4.4.2 Neklasický útlum	23
4.5 Vlastní kmitání	23
4.6 Statický výpočet	24
4.7 Stacionární dynamické zatížení	25
4.7.1 Newmarkova metoda	25
4.8 Pohyblivé dynamické zatížení	25
4.8.1 Vytvoření trajektorie	25

4.8.2	Sestavení vektoru zatížení	26
4.8.3	Biodynamické modely	26
5	Analýza předpjatého nosníku	29
5.1	Údaje o konstrukci	29
5.2	Vytvoření a identifikace výpočetního modelu	30
5.3	Výpočet vlastní frekvence	31
5.4	Odezva na zatížení chodcem	31
5.4.1	Zatížení pohybující se silou	32
5.4.2	Zatížení s biodynamickým modelem osoby	33
5.4.3	Výsledky	35
6	Analýza lávky v Čelákovcích	41
6.1	Popis konstrukce	41
6.2	Vytvoření výpočetního modelu	42
6.3	Výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitání	45
6.4	Identifikace výpočetního modelu	47
6.5	Výpočet odezvy na zatížení chodci	48
6.6	Výsledky	48
7	Výpočet odezvy na zatížení chodcem pomocí ustáleného kmitání	53
7.1	Sestavení souboru nosníků	53
7.2	Výpočet odezvy	55
7.2.1	Odezva na stacionární proměnnou sílu	55
7.2.2	Odezva na pohybující se sílu	55
7.3	Výhodnocení	56
7.4	Ověření navrženého vztahu	59
8	Závěr	63
	Seznam obrázků	65
	Seznam tabulek	67
	Literatura	69

1 Úvod

Lávky pro pěší jsou nedílnou součástí obydlených oblastí. Vzhledem k tomu, že jsou navrhovány na výrazně nižší statické zatížení než například silniční nebo železniční mosty, jde často o lehké a subtilní konstrukce s velkými rozpětími. Protože mají lávky v mnoha případech vlastní frekvence blízké frekvenci lidského kroku, vzniká zde riziko rezonance. Během historie bylo zaznamenáno několik případů zřícení mostu vlivem zatížení chodci [1]. Jde však o extrémní případy. Mnohem častější, přesto stále závažný problém, je překročení mezního stavu použitelnosti (MSP) - pohody chodců vlivem nadměrných vibrací.

Lidské tělo je velmi citlivé na vibrace a při některých frekvencích dokáže registrovat kmitání s amplitudou od 0,001 mm [1]. Citlivost na vibrace je různá v závislosti na frekvenci a také záleží na tom, zda jde o kmitání ve vertikálním či horizontálním směru.

Tato práce se zabývá porovnáním způsobů modelování chodce jdoucího po konstrukci. Kromě toho, že každý jednotlivec má různou hmotnost, délku kroku a rychlost chůze, nelze přesně definovat ani časový průběh zatížení. Proto lze v literatuře najít mnoho různých způsobů, jak zatížení chodce modelovat. Jednoznačně lze pouze říci, že se jedná o zatížení periodické, které má ve svislém i v horizontálním podélném směru periodu rovnou periodě kroku. V horizontálním příčném směru má pak periodu dvojnásobnou.

Dalším problémem bránícím jednoduché analýze konstrukce je fenomén synchronizace chodců. Ten je možné rozdělit do dvou kategorií. První z nich je synchronizace chodec-chodec. V případě tohoto jevu, který vzniká při pohybu větších skupin osob po mostovce, jdou někteří lidé se sjednoceným krokem. Takže místo náhodného rozdělení frekvence kroku a fázového posunu dochází k jejich sjednocení a tím zvýšení dynamického zatížení.

Druhá kategorie je synchronizace chodec-konstrukce. Chodec změní charakter chůze v závislosti na tom, jak konstrukce kmitá. Při dosažení zrychlení vyššího než $0,1 \text{ m/s}^2$ může dojít k tzv. lock-in efektu, při kterém je pro chodce nejpohodlnější zvolit frekvenci kroku, která odpovídá frekvenci již kmitající konstrukce. To může mít za následek efektivnější buzení a následné další navýšení kmitání. Pravděpodobně nejznámější případ vyvolání tohoto stavu nastal během otevíracího ceremoniálu Millenium bridge v Londýně. Most musel být uzavřen a následovala jeho nákladná úprava zajišťující zvýšení tlumení.

2 Cíle práce

Tato práce se zabývá analýzou lávek pro pěší a způsoby modelování zatížení vyvolaného pohybem osob po konstrukci.

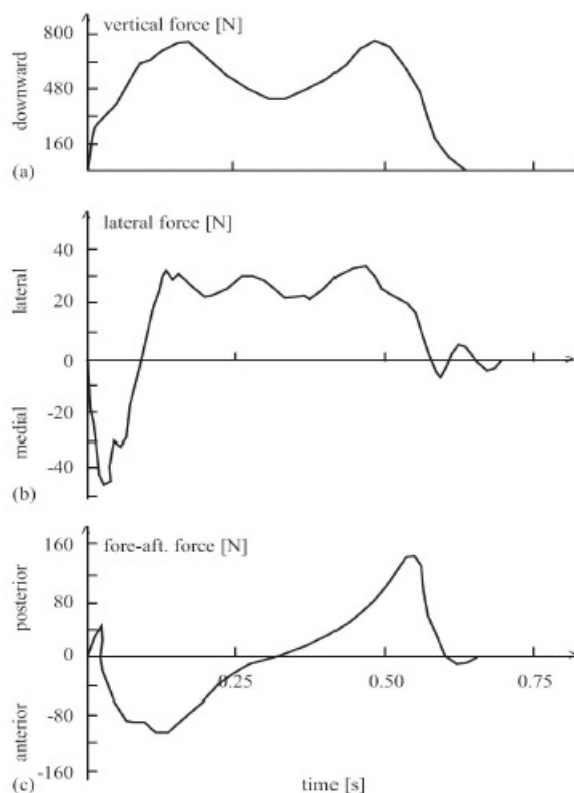
Pro účely této práce bude vytvořen program v prostředí MATLAB, díky kterému bude možné modelování prutových konstrukcí a analýza jejich vlastní frekvencí a tvarů kmitání. Pomocí programu bude dále simulováno zatížení chodcem jako proměnná síla pohybující se v čase po konstrukci. K tomuto účelu bude použita Newmarkova metoda. Pohybující se síla bude navíc doplněna o biodynamické modely chodců, které budou simulovat interakci s konstrukcí.

Na základě porovnání výsledků simulací s experimentálními daty bude vybrán jeden model zatížení chodcem pro další analýzu. Pomocí tohoto modelu bude vytvořena parametrická studie, v rámci které bude vygenerován soubor nosníků (mostů). Na nich bude vyhodnoceno zrychlení vyvolané zvoleným pohyblivým modelem chodce a porovnáno s ustáleným kmitáním vyvolaným nepohyblivou harmonickou silou. Na základě těchto výsledků bude vytvořen vztah dávající do souvislosti parametry mostu, zrychlení vyvolané ustáleným kmitáním a zrychlení vyvolané pohyblivým modelem chodce.

3 Zatížení vyvolané chodci

3.1 Popis zatížení

Zatížení pohybujícími se osobami je v čase proměnné a lze rozložit do jedné vertikální složky a dvou složek horizontálních. Ty jsou vykresleny na obr. 3.1. Tato práce se zabývá pouze vlivem vertikální složky zatížení. Dále lze zatížení rozdělit podle způsobu pohybu osoby na chůzi, běh a skákání. Každé z těchto zatížení má výrazně jiný charakter než ostatní a je třeba k nim přistupovat samostatně.



Obrázek 3.1: Kontaktní síla ve vertikálním a horizontálním směru [2]

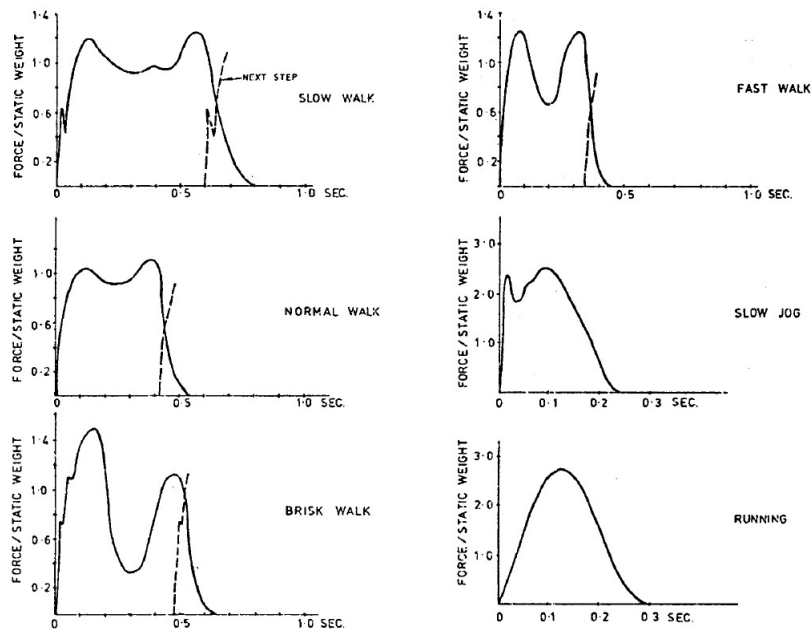
Skákání na mostě, obzvláště pokud je úmyslně prováděno za účelem rozkmitání lávky, je podle [3] považováno za vandalismus. Není proto nutné navrhovat konstrukce tak, aby při tomto druhu zatížení splňovaly všechna kritéria pohody chodců. Je ovšem nezbytné, aby dokázaly i takovéto zatížení bezpečně přenést.

Běh je pohyb osoby, z pravidla rychlejší než chůze, při němž se v určité části kroku žádná z končetin nedotýká země. Na obr. 3.2 je vidět, že při běhu vzniká kontaktní síla, která je až třikrát vyšší než síla, kterou působí stojící osoba. Zároveň je ve většině případů kroková frekvence běhu vyšší než u chůze, podle [4] jde o frekvence 2-3,5 Hz. S tímto typem zatížením se běžně mosty setkávají. Až na extrémní případy (např. běžecký závod) jde však o jednotlivce či malé skupinky běžců, proto není ekonomicky vhodné navrhovat lávku na zatížení běžícími osobami po celé délce mostovky.

Chůze je nejběžnější pohyb osob po lávce, při kterém v každém časovém okamžiku zůstává alespoň jedna noha v kontaktu s podkladem. Kroková frekvence se pohybuje mezi 1,6-2,4 Hz [4]. Z obr. 3.2 je patrné, že časový průběh zatížení během jednoho kroku je závislý na rychlosti chůze v_p . Ta je dána délkou kroku l_s a krokovou frekvencí f_p pomocí vztahu:

$$v_p = l_s * f_p \quad (3.1)$$

Vzhledem k tomu, že na některých lávkách je možné očekávat větší skupiny chodců nebo proud osob, je nutné na tyto situace danou konstrukci navrhnout. Pokud uvažujeme skupinu N osob, je možné výsledné zatížení získat jako násobek zatížení způsobeného jedním chodcem, které přenásobíme hodnotou $N_{eq} = \sqrt{N}$. Výsledné zatížení odpovídá N osobám pohybujících se stejnou frekvencí kroku a náhodným fázovým posunem. Pro známý poměrný útlum ξ a náhodný počet chodců jdoucích v hustém davu je možné použít vzorec $N_{eq} = 10,8 * \sqrt{N\xi}$. Při přechodu velmi hustého proudu osob po konstrukci a následném vzniku lock-in efektu bylo experimentálně zjištěno až desetinásobné podcenění hodnot zrychlení odhadnutých pomocí $N_{eq} = \sqrt{N}$. Pro tyto situace je navrženo použít $N_{eq} = 0,2N$ [4].



Obrázek 3.2: Vertikální složka zatížení při chůzi a běhu [4]

3.2 Metodika návrhu lávek

V literatuře lze najít více způsobů pro správný postup při navrhování lávky, např. [4],[5]. V této kapitole je zjednodušeně popsán postup uvedený v předpisech SETRA [4].

Pro zajištění dostatečné pohody chodců je již při návrhu mostu nutné určit, jakou hustotu chodců lze v průběhu životnosti očekávat. K tomu může posloužit zařazení mostu do třídy I-IV podle jeho umístění. O třídě však rozhoduje majitel mostu, který může například zvolit vyšší třídu pro snížení rizika nadměrných vibrací nebo zajištění vysoké pohody chodců i v extrémních případech.

- IV třída: nachází se převážně v extravilánu, spojuje málo osídlené oblasti - Velmi nízký provoz
- III třída: běžně používané lávky s občasným výskytem větších skupin osob, nikdy není zatížena celá plocha mostovky - Nízký provoz
- II třída: lávky spojující osídlené oblasti, lze očekávat vysoký provoz a občasné zatížení celé plochy mostovky - Hustý provoz
- I třída: lávky ve vysoce frekventovaných oblastech (např. v okolí stanic metra) nebo v místech, kde se často pohybují davy lidí (např. demonstrace, turisté) - Velmi hustý / Mimořádně hustý provoz

Pro danou třídu mostu musí majitel zvolit také třídu pohody chodců podle obr. 3.2. Dále lze v návrhu pokračovat podle schématu na obr. 3.3.

Třída provozu	Intenzita provozu Počet osob na m ²
Velmi nízký	0,10, nejméně však 15/(BxL)
Nízký	0,20, nejméně však 15/(BxL)
Hustý	0,50, nejméně však 15/(BxL)
Velmi hustý	1,00
Mimořádně hustý	≥ 1,50

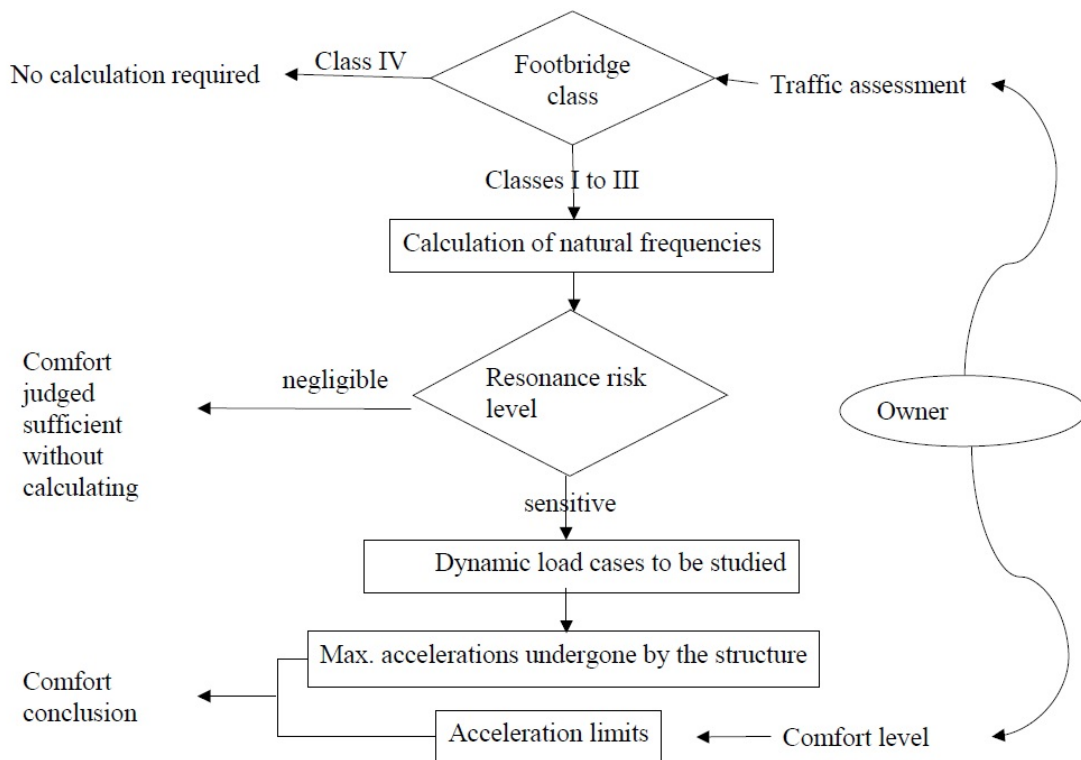
kde B (m) je šířka průchozího prostoru lávky a L (m) je rozpětí lávky.

Tabulka 3.1: Třída provozu [5]

K uvedeným třídám lávky se vztahují třídy provozu v tab. 3.1, pomocí kterých lze určit maximální počet osob vyskytujících se na konstrukci v jeden okamžik. Z této metodiky a popisu zatížení uvedeném v kap. 3.1 vyplývá, že při znalosti třídy lávky, jejích vlastních frekvencí f_i a odezvy lávky na zatížení jedním chodcem lze odhadnout, zda daná konstrukce bude splňovat třídu pohody. Je však potřeba s dostatečnou přesností modelovat zatížení jedním chodcem, čímž se zabývá zbylá část této práce.

Třída pohody	Svislé zrychlení	Vodorovné zrychlení
Vysoká	$\leq 0,50$	$\leq 0,10$
Normální	$\leq 0,70$	$\leq 0,20$
Nízká	$\leq 1,00$	$\leq 0,40$

Tabulka 3.2: Třída pohody chodců - limitní zrychlení [m/s^2] [5]



Obrázek 3.3: Metodika návrhu lávky pro pěší [4]

3.3 Způsoby modelování přechodu chodce

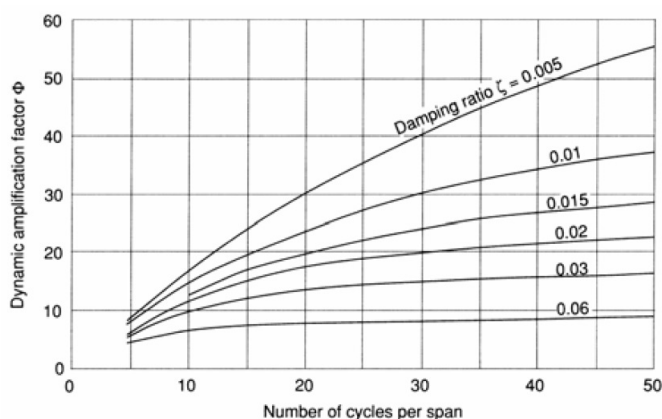
Při návrhu některých konstrukcí, které mají například nízkou tuhost, hmotnost nebo jsou velmi subtilní, je nutné zjistit odezvu na zatížení chodci. Pro tuto potřebu lze v literatuře najít mnoho způsobů, jak simulovat přechod chodců přes lávku. V nejjednodušších případech je navržen postup, při kterém se celý problém zjednodušuje na výpočet pomocí vzorce. Použitím metody konečných prvků (MKP) lze vytvořit komplexní model mostu. Na něm pak lze řešit odezvu pomocí ustáleného kmitání, kdy je harmonická síla umístěna v místě, kde vyvolává největší účinky. Pro přesnější analýzu je možné použít sílu pohybující se po konstrukci, či biodynamický model, který dokáže simulovat interakci mezi chodcem a konstrukcí. Tyto metody však vyžadují analýzu v čase a definování dráhy chodce. V této kapitole jsou některé ze zmíněných modelů popsány podrobněji.

3.3.1 Aproximace na prostém nosníku

V příručce [6] jsou uvedeny dva vztahy, pomocí kterých lze pro prostý nosník odhadnout zrychlení uprostřed rozpětí při přechodu chodce. Oba předpokládají, že zatížení chodcem je aproximováno harmonickou silou pohybující se po konstrukci. Prvním z nich je odhad vertikálního zrychlení a_v podle Rainera:

$$a_v = 4\pi^2 f^2 y \alpha \Phi \quad (3.2)$$

kde f je první vlastní frekvence mostu a zároveň frekvence harmonické síly, α je koeficient členu Fourierovy řady pro odpovídající frekvenci kroku podle Bachmanna z tab. 3.3, y je statický průhyb uprostřed nosníku způsobený referenční silou (700N) odpovídající hmotnosti chodce, Φ je dynamický součinitel závislý na počtu kroků nutných pro přechod konstrukce a poměrném útlumu ξ . Φ je možné určit podle obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Součinitel Φ [6]

Druhý vzorec pro odhad zrychlení při přechodu chodce na prostém nosníku, platný za stejných podmínek, byl navržen Grundmannem:

$$a_v = \frac{F}{M_{gen}} \frac{\pi}{\delta} (1 - e^{-n\delta}) \quad (3.3)$$

kde harmonická síla $F = \alpha G$ a G je tíha chodce (700N). α lze určit podle Bachmanna z tab. 3.3. M_{gen} je kmitající hmota pro konstrukci převedenou na 1 stupeň volnosti, v případě prostého nosníku $M_{gen} = 0,5M$ a M je celková hmotnost nosníku. δ je logarytmický dekrement útlumu a n je počet kroků potřebný pro přechod konstrukce.

3.3.2 Stacionární síla

Nejjednodušším způsobem jak modelovat zatížení chodcem na libovolně složité konstrukci je použití stacionární harmonické síly. K výpočtu lze využít například řešení ustáleného kmitání metodou rozkladu do vlastních tvarů a není nutné řešit dynamickou odezvu na zatížení pohybující se po konstrukci. Jde o poměrně výrazné zjednodušení, vytvořené především kvůli možnosti provádět tuto analýzu v běžných programech používaných pro modelování stavebních konstrukcí.

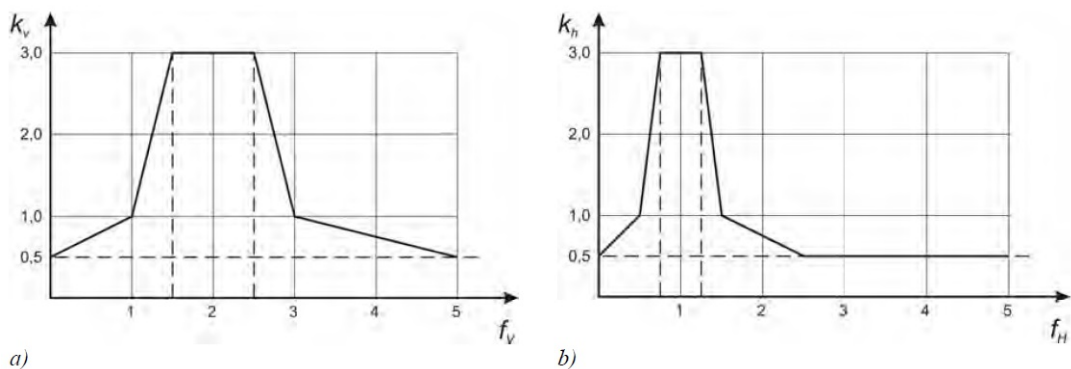
Tento způsob byl doporučen například v [7]. Zmíněná přednorma navrhuje nejdříve analyzovat vlastní tvary a frekvence kmitání. Dále je vybrán vertikální vlastní tvar, jehož frekvence f_v je nejbližší 2 Hz. Harmonická síla $F_{p,v}(t)$ musí být umístěna do místa největší vertikální pořadnice vybraného vlastního tvaru. Následně je provedena analýza ustáleného kmitání k získání zrychlení vyvolaného přechodem jednoho chodce. Uvedený způsob je označován jako dynamický zatěžovací model 1 (DLM1):

$$F_{p,v}(t) = 280\sin(2\pi f_v t) \quad (3.4)$$

Amplituda síly v tomto případě odpovídá hmotnosti člověka 70 kg a Fourierovu koeficientu $\alpha_1 = 0,4$ ($700 * 0,4 = 280N$), což je v souladu s [4].

Pro získání odezvy na zatížení skupinou 8-15 chodců je použit stejný postup, síla je však zvětšena koeficientem synchronizace k_v podle obr. 3.5 (DLM2):

$$F_{p,v}(t) = k_v 280\sin(2\pi f_v t) \quad (3.5)$$



Obrázek 3.5: a) součinitel k_v pro vertikální směr, b) součinitel k_h pro horizontální směr [6]

3.3.3 Pohybující se síla

Pro realistickou simulaci chodce na konstrukci je vhodné vzít v úvahu, že zatížení během svého působení mění svoji polohu rychlostí v_p . Chodec (nebo jejich skupina) se pohybuje po

konstrukci pouze omezený časový interval a v závislosti na umístění má zatížení různý vliv na konstrukci. Časový průběh tohoto zatížení lze měřit experimentálně pomocí běžícího pásu nebo tlakových podložek a je vyobrazen na obr. 3.2.

Vzhledem k tomu, že zatížení chodci je periodické, existuje možnost jeho rozkladu pomocí Fourierovy řady. Modely chodců založené na tomto principu jsou tedy složeny z několika harmonických sil s frekvencí f_n a fázovým posunem φ_n [8]. Při dostatečném počtu členů řady lze tímto způsobem téměř přesně simulovat libovolné periodické zatížení. Obecně lze říci, že vzhledem k časovému průběhu kroku stačí uvažovat maximálně prvních pět členů řady. Koeficienty α_n u vyšších členů jsou velmi nízké, proto je možné tyto členy zanedbat. Seznam vybraných modelů, které byly aplikovány v této práci, byl převzat z [1] a je v tab. 3.3. Další způsoby rozkladu kontaktní síly lze nalézt například v [4], [9], [10].

Z počtu dostupných modelů je zřejmé, že stále neexistuje jednotný přístup a nelze jednoznačně říct, který popisuje realitu nejlépe. Jedním z možných důvodů je chování lidského těla. Každá osoba má mírně jiný charakter zatížení, který je navíc závislý i na délce a frekvenci kroku. Z tohoto důvodu jsou modely v kapitolách 5.2 a 6.2 porovnány s výsledky experimentů.

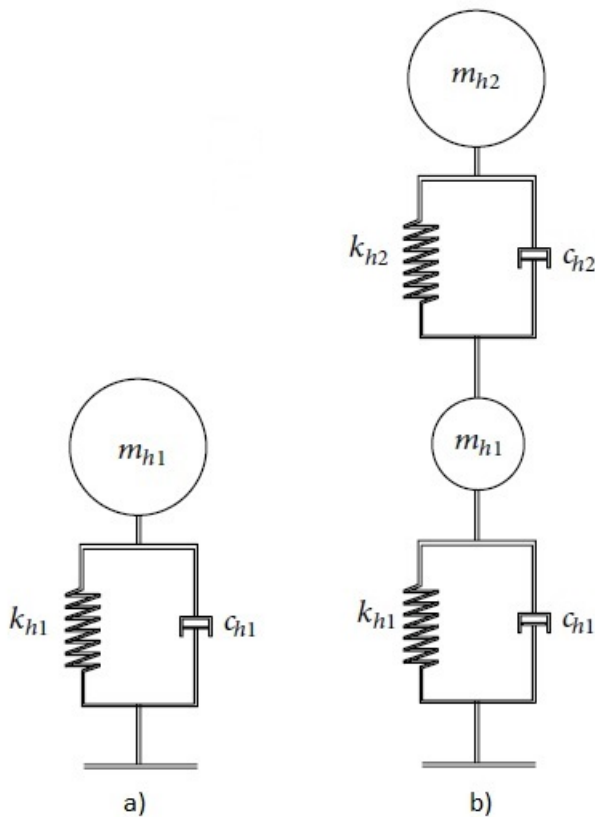
Author(s)	Fourier coefficients / Phase angles	Comment	Load direction
Blanchard et al.	$\alpha_1 = 0,257$	up to 4 Hz	vertical
Bachmann et al.	$\alpha_1 = 0,4/0,5;$ $\alpha_2 = \alpha_3 = 0,1$ $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$	at 2/2,4 Hz	vertical
	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,1$ $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$	at 2 Hz	lateral
	$\alpha_{1/2} = 0,1; \alpha_1 = 0,2; \alpha_2 = 0,1$	at 2 Hz	longitudinal
Charles & Hoorpah	$\alpha_1 = 0,4$	-	vertical
	$\alpha_1 = 0,05$	-	lateral
	$\alpha_1 = 0,2$	-	longitudinal
Young	$\alpha_1 = 0,37(f_s - 0,95) \leq 0,5$ $\alpha_2 = 0,054 + 0,0088 f_s$ $\alpha_3 = 0,026 + 0,015 f_s$ $\alpha_4 = 0,01 + 0,0204 f_s$	mean values of DLF for $f_s = 1 \div 2,8$ Hz	vertical
Schulze	$\alpha_1 = 0,37; \alpha_2 = 0,1; \alpha_3 = 0,12;$ $\alpha_4 = 0,04; \alpha_5 = 0,08$	at 2 Hz	vertical
	$\alpha_1 = 0,039; \alpha_2 = 0,01;$ $\alpha_3 = 0,043; \alpha_4 = 0,012;$ $\alpha_5 = 0,015$	at 2 Hz	lateral
	$\alpha_{1/2} = 0,037; \alpha_1 = 0,204;$ $\alpha_{3/2} = 0,026; \alpha_2 = 0,083;$ $\alpha_{5/2} = 0,024$	at 2 Hz	longitudinal

Tabulka 3.3: Vybrané modely chodů a jejich Fourierovy koeficienty[1]

3.3.4 Biodynamické modely

Podle [9] lze zatížení chodcem na lávce rozdělit na dvě složky. První je kontaktní síla, kterou by daná osoba vyvolala pohybem po dokonale tuhém podkladu. Vzhledem k tomu, že lávky jsou velmi často konstrukce poddajné, chodec je ovlivněn vibracemi podkladu a dochází k interakci mezi osobou a mostem. Ta vytváří další složku zatížení označovanou jako interakční síla. Výsledná síla pak vzniká superpozicí těchto dvou složek. Jedním ze způsobů, jak tento stav simulovat, je zahrnutí chodce coby biodynamického modelu do výpočtu.

Model chodce je vytvořen jako sestava hmot, pružin a tlumičů a měl by odpovídat charakteristikám lidského těla. Nejjednodušší model lze vytvořit pomocí jedné soustředěné hmoty s hmotností m_{h1} a jedné pružiny s tuhostí k_{h1} , případně tlumiče s útlumem c_{h1} . Takováto sestava má pouze jeden stupeň volnosti (SDOF). Složitější modely mohou mít dva (2DOF), nebo i více (MDOF) stupňů volnosti.



Obrázek 3.6: a) SDOF model chodce, b) 2DOF model chodce [9]

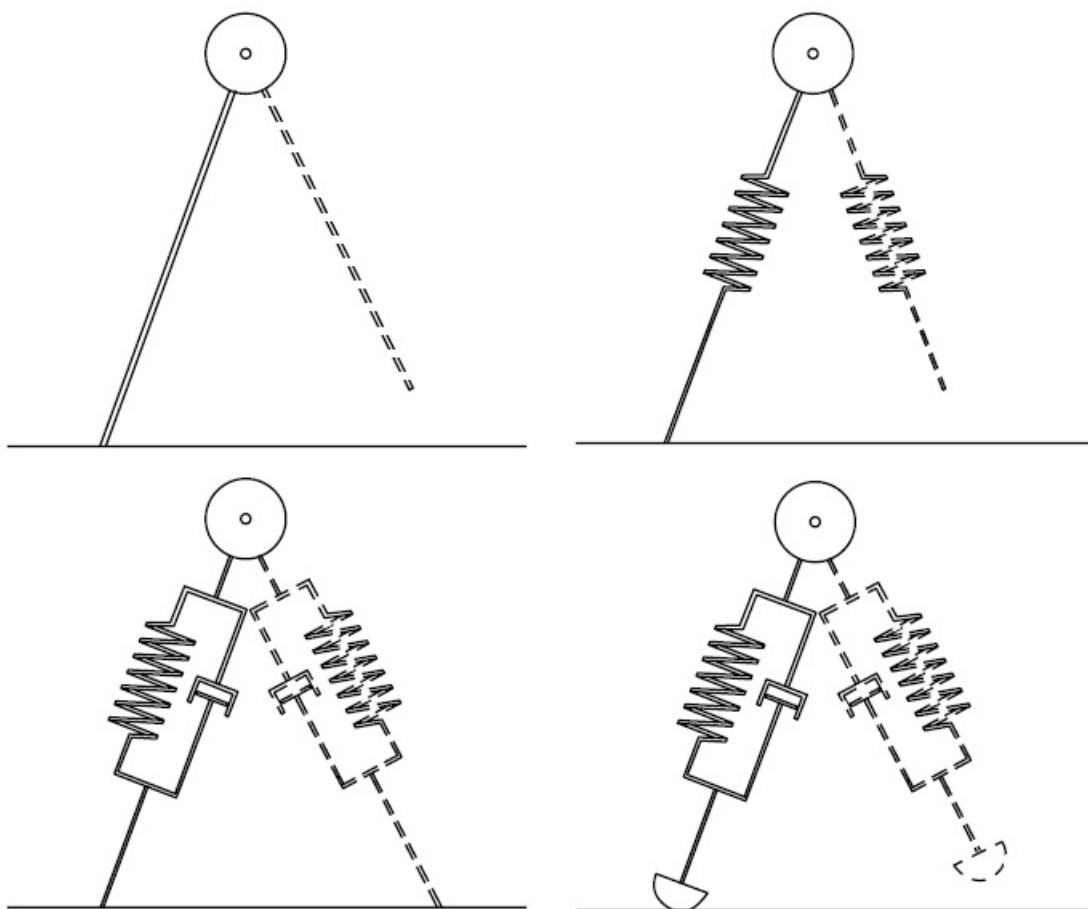
Zásadní nevýhodou těchto modelů je jejich pasivita. Pro jejich aktivaci je nutné zahrnout vnější impuls. Jednou z možností je periodické vynucování výchylky v některém stupni volnosti. Tím dochází k buzení biodynamického modelu a následnému vzniku kontaktní síly, která je aplikována na konstrukci. Tento způsob byl použit např. v [10].

Druhým způsobem aktivace je vložení budící síly do kontaktního bodu konstrukce a modelu. Tímto způsobem je zaručeno, že při chůzi po dokonale tuhém podkladu nevzniká žádná interakce, výsledná kontaktní síla je tvořena pouze budící silou a model zůstává pasivní. Pokud však síla

vyvolává zrychlení podkladu (jak je tomu u lávek pro pěší), model začíná kmitat a dochází ke vzniku interakční složky síly. Tento postup je uveden např. v [11] a je použit i v této práci. Detailně je popsán v kap. 4.8.3.

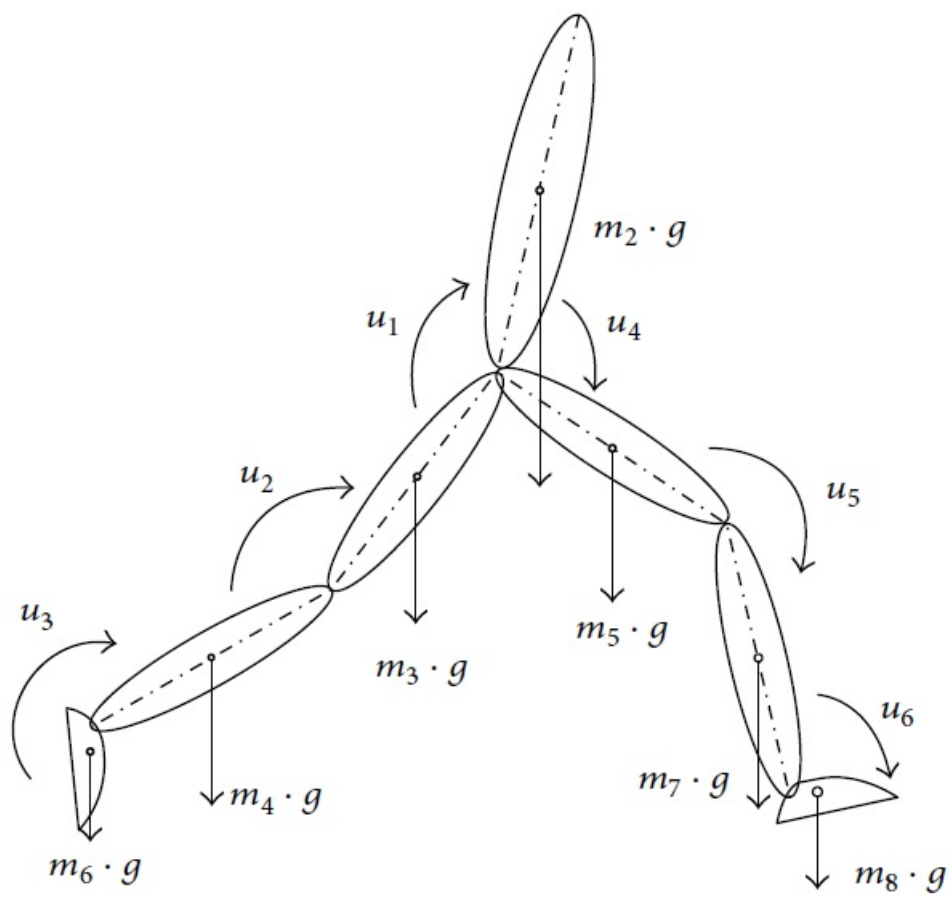
3.3.5 Další navrhované modely

Existuje i několik dalších navrhovaných modelů, mezi které patří například tzv. převrácené kyvadlo. To simuluje váhu těla jako jednu soustředěnou hmotu, vytváří však každou nohu jako samostatný systém pružiny, která může být doplněna tlumičem.



Obrázek 3.7: Převrácené kyvadlo [9]

Komplexní model, který byl navržen Mácou a Valáškem, zmíněný v [9], využívá 8 tuhých těles a má celkem 9 stupňů volnosti.



Obrázek 3.8: Model pohybujícího se člověka [9]

4 Tvorba výpočetního nástroje

V rámci této práce byl vytvořen výpočetní nástroj, pomocí kterého je možné modelovat 2D prutové konstrukce podle Bernoulli-Navierovy hypotézy, tedy se zanedbáním smykové deformace. K naprogramování výpočtu metodou konečných prvků (MKP) bylo použito prostředí MATLAB. Zadávání vstupních parametrů je možné pomocí vstupního formuláře vytvořeného v programu MS Excel. Program dokáže plnit tři základní funkce:

- výpočet statické deformace způsobené soustavou sil působících v uzlech konstrukce - Tato funkce byla vytvořena jako první za účelem kontroly správného sestavení matice tuhosti a vektoru zatížení. Může sloužit pro výpočet statických vychylek, nebo pro kontrolu správného vytvoření konstrukce.
- analýza vlastních tvarů a frekvencí - nezbytná součást dynamické analýzy každé konstrukce
- výpočet odezvy konstrukce na zatížení proměnné v čase - Tato funkce využívá Newmarkovu metodu a je možné s její pomocí řešit odezvu konstrukce na sílu proměnou v čase (stacionární i pohyblivou) a zahrnout do výpočtu biodynamické modely chodců.

Výpočet je možné rozdělit do několika základních bodů:

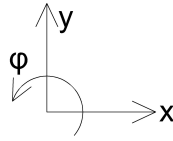
- sestavení geometrie a vlastností konstrukce, nastavení parametrů výpočtu
- načtení dat ze vstupního souboru a jejich kontrola
- vytvoření sítě bodů
- sestavení matic tuhosti \mathbf{K}^e , hmotnosti \mathbf{M}^e pro jednotlivé prvky
- lokalizace matic tuhosti \mathbf{K} , hmotnosti \mathbf{M} a sestavení matice útlumu \mathbf{C} pro celou konstrukci, sestavení vektoru zatížení \mathbf{p}
- výpočet sestavených rovnic nebo nalezení vlastních tvarů a frekvencí
- interpretace výsledků

4.1 Údaje o konstrukci a zatížení

4.1.1 Vytvoření konstrukce

Pro celý výpočet byl zvolen globální pravotočivý souřadnicový systém podle obr. 4.1 a musí být důsledně dodržován. Program je vytvořen bez zahrnutí jednotek, je tedy na uživateli, aby

sám zvolil kompatibilní jednotky. Vzhledem k jejich množství a složitosti výpočtu byly v této práci použity výhradně jednotky SI.



Obrázek 4.1: Souřadnicový systém

Některé funkce programu nevyžadují zadání všech parametrů, které jsou uvedeny dále (např. hmotnost pro výpočet posunů od statického zatížení), pro zjednodušení popisu není typ výpočtu v kapitole 4.1 brán v úvahu. Tvorba konstrukce začíná vytvořením materiálů, u kterých je zadána objemová hmotnost ρ a Youngův modul pružnosti E . Dále jsou vytvořeny průřezy zadáním své plochy A , momentu setrvačnosti I a přiřazením materiálu.

K sestavení geometrie konstrukce je nutné zadat souřadnice uzlů (x_i, y_i) ve všech bodech, ve kterých začíná nebo končí vybraný průřez, dochází ke změně směru střednice prutu, nebo je zde umístěn další z prvků nezbytných pro výpočet (např. pružina, tlumič, podpora, soustředěná hmota). Z výše uvedeného vyplývá, že jedním prvkem lze modelovat pouze prismatické pruty a pro zadání zakřiveného prvku je nutné vytvořit více bodů a aproximovat ho částí polygonu. Všechny body mají tři stupně volnosti definované v globálních souřadnicích - posun u_x ve směru osy x , posun w_y ve směru osy y a pootočení φ . Každý prut je následně definován pomocí počátečního bodu, koncového bodu a přiřazeného průřezu. Tím je zároveň definován i směr prutu - od prvního bodu k druhému, který je použit při definici dráhy chodce v kap. 4.8.

Kromě prutových prvků je možné zadat pružinu výběrem spojovaných bodů a nastavením její tuhosti. Takto vytvořená pružina odpovídá oboustranně kloubově připojenému prvku s nulovou hmotností. Funkce byla vytvořena pro zjednodušení zadání některých částí konstrukcí.

Pro simulaci reálných spojů, které umožňují vzájemné pootočení prvků v bodě jejich kontaktu, je nutné vytvoření vnitřních kloubů. Ty jsou zadány pomocí čísla prvku a volbou bodu, ve kterém je umožněno pootočení.

Takto vytvořená konstrukce má vždy singulární matici tuhosti, protože může docházet k jejímu celkovému posunu či pootočení. Pro funkční výpočet je potřeba nastavit podpory, které tomu zabraňují. Ty jsou zadány výběrem bodu, ve kterém se podpora nachází a zvolením stupňů volnosti, které konstrukci odebírá.

Pro dynamickou analýzu je kromě hmotností vypočtených pomocí průřezových charakteristik a materiálů možné zadat soustředěnou hmotu výběrem bodu a určením její hmotnosti. Dále je také umožněno vložení rovnoměrně rozložené hmoty na prut výběrem prvku a určením hmotnosti na jednotku délky.

Pokud se na konstrukci nachází viskózní tlumič, lze ho zadat pomocí bodů které spojuje a jeho viskozitou.

4.1.2 Zadání zatížení

Zatížení pro statický výpočet je možné zadat pomocí bodů, ve kterých jsou umístěny síly a ohybové momenty.

Zatížení v čase proměnnou silou $F(t)$ je zadáno pomocí referenční síly G a určením jednoho ze zatěžovacích modelů:

- konstantní síla G
- harmonická síla s amplitudou G
- model chodce s hmotností G podle tab. 3.3, který využívá uvedené Fourierovy koeficienty a fázové posuny

K zadání pohyblivého zatížení je nutné nejdříve definovat dráhu, po které se pohybuje. K tomu slouží výčet prvků a zadání směru, kterým se po vybraných prvcích posouvá (zda jde v rámci jednoho prvku od uzlu č.1 k uzlu č.2 nebo v opačném směru). Poté je vybrán jeden z výše uvedených zatěžovacích modelů.

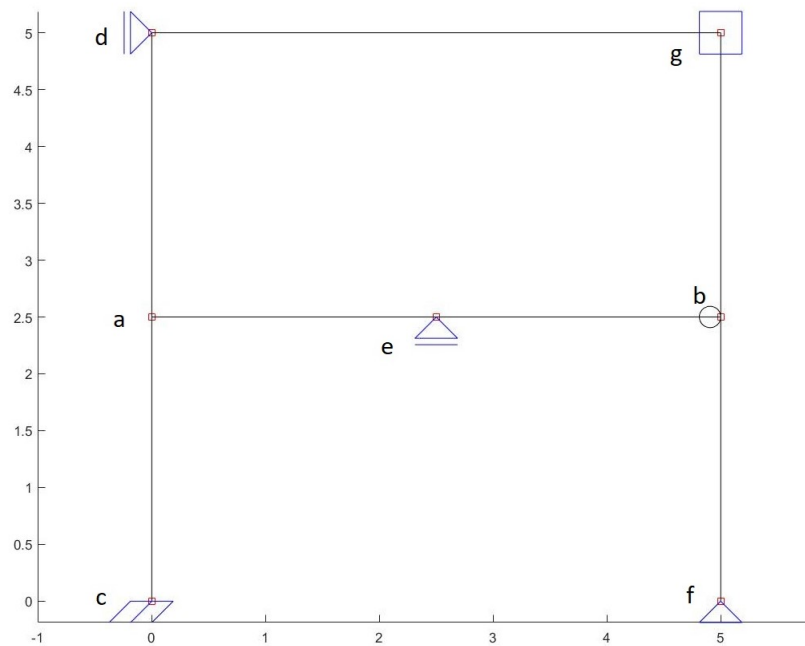
Program poskytuje možnost přidat k pohyblivému zatížení biodynamický model s jedním nebo dvěma stupni volnosti podle obr. 3.6. U nich je potřeba uvést charakteristiky k_{hi} , c_{hi} a m_{hi} .

4.1.3 Kontrola geometrie

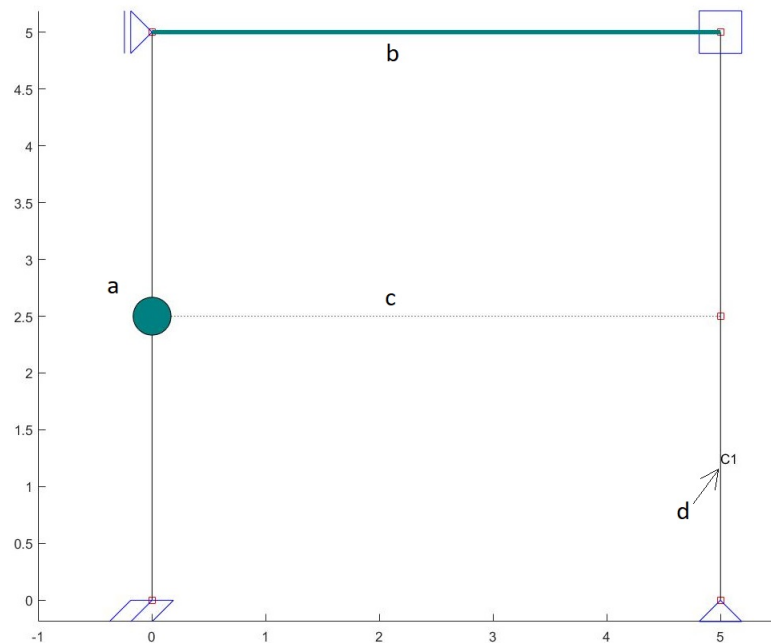
Možnost vizuální kontroly je pro složitější konstrukce téměř nezbytná. Za tímto účelem byla vytvořena metoda schopná vykreslit konstrukci včetně všech jejích elementů. Způsob vykreslení jednotlivých částí je na následujících obrázcích.

Pokud není na prvku definován kloub, je spoj automaticky uvažován jako vetknutý. Na obr. 4.4 je zobrazena rámová konstrukce a fialově vykreslen její první vlastní tvar kmitání. Při zadávání parametrů konstrukce je možno zvolit, v kolika bodech bude vykreslen průhyb po délce prvku. Ten je aproximován z koncových posunů a pootočení pomocí básových funkcí uvedených v kap. 4.3. Na deformované konstrukci je možné vizuálně zkontrolovat, zda jsou všechny prvky propojeny tak, jak bylo zamýšleno, a zda v rámových rozích nedochází k vzájemnému pootočení připojených prutů.

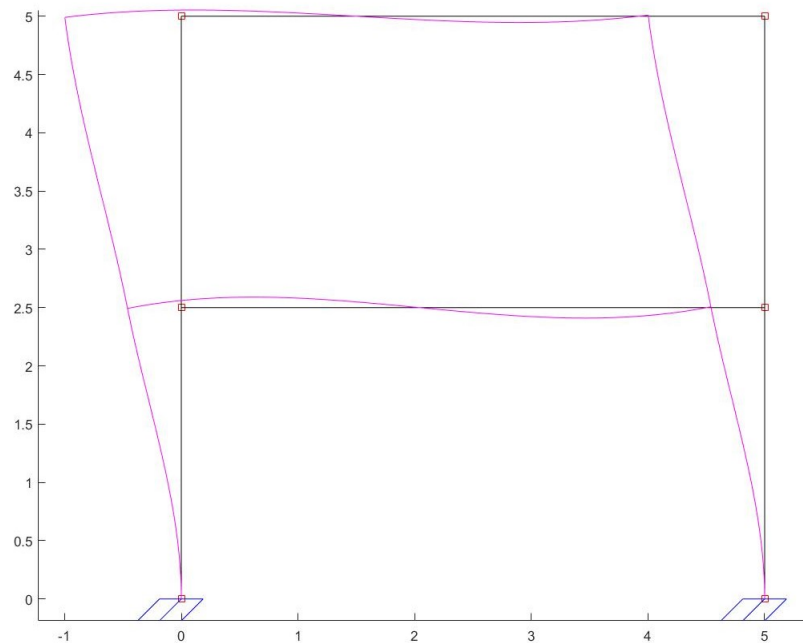
Při použití pohyblivého se zatížení je do programu implementována možnost očíslovat pořadí bodů konstrukce (po vytvoření sítě), mezi kterými se zatížení pohybuje.



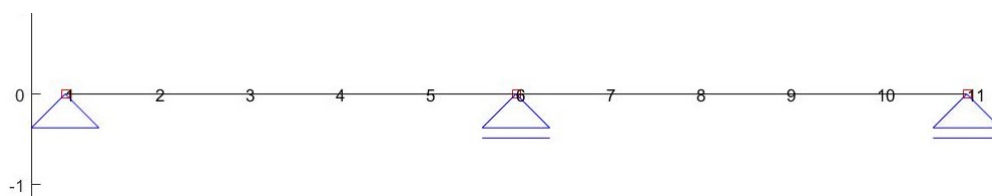
Obrázek 4.2: Vzorová konstrukce č.1: a) uzel, b) vnitřní kloub, c) vetknutí, d) a e) posuvné klouby, f) pevný kloub, g) jiná podpora (např. posuvné vetknutí)



Obrázek 4.3: Vzorová konstrukce č.2: a) soustředěná hmota v uzlu, b) spojitá hmota na prutu, c) pružné spojení dvou bodů, d) umístění tlumiče označeného $C1$



Obrázek 4.4: Vzorová konstrukce č.3: první vlastní tvar rámové konstrukce



Obrázek 4.5: Číslování vygenerovaných uzlů pro trajektorii pohyblivého zatížení

4.2 Vytvoření sítě pro MKP

Na konstrukci složené z prutových prvků, která je staticky zatížena pouze v uzlech konstrukce, není vytváření sítě nutné. Normálová síla N_x může být po délce prutu pouze konstantní. Z (4.1) je tedy patrné, že osový posun u může mít pouze lineární charakter. Pro aproximaci osových posunů u_x jsou použity lineární báze funkce $h1$ a $h2$. Pokud je možné přesné řešení složit jako lineární kombinaci báze funkcí použitých pro Ritzovu metodu, je vypočtená aproximace zároveň přesné řešení. Pro průhyby prvku w_y lze dokázat totéž. Pokud vycházíme z lineárního průběhu momentu M_y , je podle (4.2) průběh průhybů polynom maximálně třetího řádu a pro jeho aproximaci jsou použity báze funkce $h3$ - $h6$ třetího řádu.

$$N_x = EA \frac{du_x}{dx} \quad (4.1)$$

$$M_y = EI_y \frac{d^2w_y}{dx^2} \quad (4.2)$$

V případě konstrukce, která je zatížena po délce prvku, nebo je namáhána dynamickým zatížením, již neplatí tvrzení uvedené v předchozím odstavci. K zajištění dostatečné přesnosti výsledků je nutné použít adekvátně hustou síť uzlů.

Ve vytvořeném programu lze nastavit počet prvků, na které je následně rozdělen každý z prutů zadaných ve vstupním souboru. Na každém prvku je vygenerován zvolený počet bodů, který jej rovnoměrně rozdělí na kratší pruty. Tyto body jsou následně přidány do seznamu uzlů a je vygenerován nový seznam prvků. Nutné je správně rozdělit spojitě hmoty přiřazené k prutům a zachovat pozice vnitřních kloubů.

Zařazení nově vygenerovaných uzlů až za body zadané ve vstupním souboru není ideální pro numerickou stabilitu následného výpočtu, protože některé nově vygenerované prvky vnášejí do matic K a M nenulové hodnoty na pozice velmi vzdálené od diagonály. Tento problém by bylo možné vyřešit například přečíslováním uzlů. Vzhledem k tomu, že cílem není vytvořit vysoce efektivní program pro složité konstrukce, ale pouze dostatečně rychlý program pro konstrukce jednoduché, je číslování uzlů zachováno.

4.3 Sestavení matic K a M

Pro výpočet pomocí MKP byla zvolena deformační varianta Ritzovy metody. Bázové funkce jsou zvoleny tak, aby platila rovnice (4.3) [12]. Pro prutové prvky uvažující Bernoulli-Navierovu hypotézu je vhodné použít pro aproximaci osového posunu u_x dvě lineární bázové funkce a pro aproximaci průhybu w_y po délce prutu 4 bázové funkce 3. řádu. Pokud je prvek zatížen pouze na svých okrajích, poskytuje tato aproximace v rámci zavedených předpokladů přesné řešení. Pro další zápis je použita přirozená souřadnice $\eta = \frac{x^e}{l^e}$ (symbol η je zvolen místo běžně používaného symbolu ξ za účelem zabránění možné záměny s poměrným útlumem ξ). x^e je lokální osa totožná se střednicí prutu a s počátkem v jeho krajním bodě, l^e je délka prutu.

$$u = Nr \quad (4.3)$$

u je vektor posunutí, N je matice bázových funkcí a r je vektor uzlových posunutí (vektor neznámých) [13]. r lze vyjádřit ve tvaru:

$$r = \left\{ u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \right\}^T \quad (4.4)$$

kde u_i je osový posun ve směru lokální souřadnice x^e , w_i je posun ve směru kolmém ke střednici a φ_i je pootočení ve směru φ podle obr. 4.1. Index 1 označuje počáteční bod prvku a index 2 značí jeho koncový bod.

$$u = \left\{ \begin{array}{c} u_x \\ w_y \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Složka u_x vektoru u vyjadřuje osový posun ve směru střednice a w_y je průhyb prvku (posun kolmý ke střednici).

Použité bázové funkce:

$$h_1 = 1 - \eta$$

$$h_2 = \eta$$

$$h_3 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$h_4 = (-\eta + 2\eta^2 - \eta^3)l^e$$

$$h_5 = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$h_6 = (\eta^2 - \eta^3)l^e$$

Bázové funkce h_1 a h_2 jsou lineární a popisují průběh osových posunů po délce prutu při jednotkovém osovém posunu na koncích prutu.

Funkce h_3 a h_5 popisují průhyb po délce prutu vyvolaný jednotkovými posuny ve směru kolmém na střednici v koncových uzlech.

Funkce h_4 a h_6 popisují průhyb vyvolaný jednotkovými pootočeními v koncových uzlech.

Bázové funkce je možné sestavit do matice N [13] :

$$N = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Matice derivací bázových funkcí je pak $B = \partial^T N$ [13] :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 h_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h_4}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2 h_5}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h_6}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Odpovídající matici tuhosti průřezu D lze zapsat jako:

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_y \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Matice tuhosti prvku v lokálních souřadnicích \bar{K}^e je následně vyjádřena pomocí vztahu (4.9).

$$\bar{K}^e = \int_0^1 B^T D B l^e d\eta \quad (4.9)$$

Matice hmotnosti prvku \bar{M}^e lze odvodit za stejných předpokladů.

$$\bar{M}^e = \int_0^1 N^T \mu N l^e d\eta \quad (4.10)$$

kde μ je hmotnost na jednotku délky prvku. Integrace uvedené v rovnicích (4.9) a (4.10) však nejsou v programu prováděny. Pro zjednodušení výpočtu jsou matice vyjádřeny s pomocí parametrů E, A, I_y, l^e a μ , které jsou následně pro každý prvek dosazeny.

Výše uvedený způsob je dostačující pro prvek, který nemá lokální souřadnicový systém pootočen vůči globálnímu souřadnicové systému. Pokud je však prvek pootočen o úhel φ , je nutné použít transformační matici T^e ve které $c_\varphi = \cos(\varphi)$ a $s_\varphi = \sin(\varphi)$ [14].

$$T^e = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Výsledné matice K^e a M^e jsou následně získány podle vztahů (4.12) a (4.13). Poté je již možné provést pro každý prvek lokalizaci těchto matic na příslušné pozice v maticích konstrukce K a M .

$$K^e = (T^e)^T \bar{K}^e T^e \quad (4.12)$$

$$M^e = (T^e)^T \bar{M}^e T^e \quad (4.13)$$

4.4 Sestavení matice C

4.4.1 Klasický útlum

Pro konstrukce neobsahující tlumiče nebo pohlcovače kmitání je uvažován proporcionální útlum. Matice útlumu je sestavena jako lineární kombinace K a M , jedná se tedy o tzv. Rayleighův útlum.

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.14)$$

Parametry α a β je možné určit pomocí známého nebo odhadnutého poměrného útlumu příslušícímu dvěma a více vlastním frekvencím kmitání. Pro tento přístup je vhodné znát útlum první vlastní frekvence a dále některé vlastní frekvence, která je od první dostatečně vzdálená [12]. Poté je možné určit parametry ze soustavy rovnic (4.15):

$$2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \quad (4.15)$$

kde ξ_i je poměrný útlum příslušící i -tému vlastnímu tvaru a ω_i je i -tá vlastní kruhová frekvence.

Druhou možností je určit oba parametry pouze pomocí útlumu prvního vlastního tvaru. Tato možnost však vychází z předpokladu, že nejméně je tlumen právě první vlastní tvar [12]. Ze (4.15) lze odvodit:

$$\frac{d\xi}{d\omega} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{\omega^2} + \beta\right) = 0 \quad (4.16)$$

Dosazením $\omega = \omega_1$ můžeme vyjádřit $\alpha = \xi_1\omega_1$ a $\beta = \frac{\xi_1}{\omega_1}$. Pro výše uvedené způsoby sestavení C je nutné znát alespoň první vlastní frekvenci konstrukce. Za tímto účelem je použita metoda inverzních iterací.

4.4.2 Neklasický útlum

Pokud je na konstrukci použit tlumič, není možné počítat s klasickým útlumem. Jeho výhody spočívají především v jednodušším použití metody rozkladu do vlastních tvarů, která však v tomto programu není použita.

Konstrukce je sestavena stejně jako v předchozí kapitole. Zadáním tlumiče ve vstupním programu je do matice útlumu navíc k odpovídajícím stupňům volnosti lokalizován přidáný útlum.

4.5 Vlastní kmitání

Při vlastním kmitání nepůsobí na konstrukci žádné zatížení, útlum lze zanedbat. Výpočet vlastního kmitání je použit pro získání dynamických charakteristik systému - vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání. Musí platit pohybová rovnice:

$$Ku(t) + M\ddot{u}(t) = 0 \quad (4.17)$$

Vyjádříme posuny u a zrychlení \ddot{u} pomocí vlastního tvaru Φ :

$$u(t) = \Phi(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \quad (4.18)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) \quad (4.19)$$

Dosazením do (4.17) získáme rovnici:

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0 \quad (4.20)$$

Vyřešení rovnice (4.20) je problém hledání vlastních čísel ω a vektorů Φ . Řešením této rovnice je každá vlastní kruhová frekvence ω_n a jí odpovídající vlastní tvar Φ_n . Jejich počet odpovídá počtu stupňů volnosti konstrukce.

Ve vytvářeném programu je možnost najít všechny vlastní frekvence a tvary pomocí algoritmu obsaženého v MATLABu, nicméně pro rozsáhlejší problémy většinou není potřeba znát vysoké vlastní frekvence. Hledání všech vlastních čísel problému je navíc výpočetně náročné.

Pro nalezení několika prvních vlastních tvarů je dostačující metoda inverzních iterací s Gram-Schmidtovou ortogonalizací. Tu bylo nutné vytvořit. Tato metoda se používá při každém výpočtu, ve kterém je zahrnuta matice C , protože k sestavení matice proporcionálního útlumu je nutné znát první vlastní kruhovou frekvenci ω_1 .

4.6 Statický výpočet

Pro řešení statického výpočtu je vymodelována konstrukce a sestavena matice tuhosti podle kap. 4.3.

K vytvoření vektoru zatížení p působícího v uzlech konstrukce není nutné brát v úvahu báze funkce. Každá působící síla či moment je zařazena do vektoru zatížení na místo odpovídající danému stupni volnosti. Pro řešení výsledné soustavy rovnic (4.21) je použita Gaussova eliminace.

$$Kr = p \quad (4.21)$$

Takto vytvořená soustava rovnic však nelze vyřešit, neboť K vzniklá příspěvkem jednotlivých prutů je singularní, protože v ní nejsou zahrnuty podpory. Vzhledem k tomu, že v rámci této práce není potřeba znát silové reakce v podporách, je soustava (4.21) upravena tak, že rovnice odpovídající odebraným stupňům volnosti (podporám) jsou ze soustavy odebrány. Výsledný vektor posunů je pak zpětně sestaven z vypočteného vektoru uzlových posunutí r a nulových hodnot posunů v odebraných stupních volnosti.

Pro možnost vizuální kontroly byla vytvořena metoda vykreslení deformované konstrukce. U reálných konstrukcí je nutné zvětšit měřítko posunů, aby deformace byla okem viditelná. Každý prvek je vykreslen pomocí uzlů po deformaci a předem zvoleného počtu bodů uvnitř prvku, jejichž posun je vypočten s použitím báze funkcí.

4.7 Stacionární dynamické zatížení

Ve vytvořeném programu je možné zadat v čase proměnné zatížení v uzlu buď jako harmonickou sílu, nebo jako zatížení jedním chodcem podle tab. 3.3. Výstupem jsou pak vektory posunů r , rychlosti \dot{r} a zrychlení \ddot{r} v libovolném čase, který však musí být zvolen jako celočíselný násobek délky integračního kroku Δt .

4.7.1 Newmarkova metoda

Ke zjištění odezvy konstrukce na zatížení je nutné řešit pohybovou rovnici:

$$Kr(t) + C\dot{r}(t) + M\ddot{r}(t) = p(t) \quad (4.22)$$

Pro řešení rovnice (4.22) přímou integrací je používána implicitní Newmarkova metoda. Při volbě parametrů $\gamma = 1/2$ a $\beta = 1/4$ je metoda nepodmíněně stabilní a je nazývána metoda průměrného konstantního zrychlení [12]. Vektor zrychlení v následujícím časovém kroku \ddot{r}_{n+1} získáme ze soustavy rovnic:

$$(M + \gamma\Delta tC + \beta\Delta t^2K)\ddot{r}_{n+1} = p_{n+1} - C[\dot{r}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{r}_n] - K[r_n + \Delta t\dot{r}_n + (0.5 - \beta)\Delta t^2\ddot{r}_n] \quad (4.23)$$

Dále můžeme vypočítat:

$$r_{n+1} = r_n + \Delta t\dot{r}_n + (0.5 - \beta)\Delta t^2\ddot{r}_n + \beta\ddot{r}_{n+1}\Delta t^2 \quad (4.24)$$

$$\dot{r}_{n+1} = \dot{r}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{r}_n + \gamma\Delta t\ddot{r}_{n+1} \quad (4.25)$$

Uvedeným postupem jsou získány vektory zrychlení, rychlosti i uzlových posunů, které jsou použity v dalším iteračním kroku.

Z levé strany rovnice lze vyjádřit matici efektivní tuhosti \hat{K} :

$$\hat{K} = M + \gamma\Delta tC + \beta\Delta t^2K \quad (4.26)$$

Dále je z (4.23) patrné, že v každém kroku je nutné řešit soustavu rovnic. Tomu se lze vyhnout za předpokladu, že matice \hat{K} zůstane konstantní po celou dobu výpočtu. Tento předpoklad lze dodržet v lineárních úlohách, pokud po celou dobu výpočtu nebude změněna délka integračního kroku Δt . Nalezením \hat{K}^{-1} před zahájením výpočtu a následným použitím pro vyřešení soustavy rovnic se pak v každém kroku problém zjednoduší na násobení matic.

4.8 Pohyblivé dynamické zatížení

4.8.1 Vytvoření trajektorie

K použití zatížení pohybujícího se po konstrukci je potřeba definovat jak směr a rychlost pohybu, tak prvky, po kterých se zatížení pohybuje. Pro každý integrační krok je vypočtena aktuální

poloha zatížení, ze které je možné odvodit prvek a na něm konkrétní polohu, kde momentálně zatížení působí. Pro kontrolu správného sestavení trajektorie je možné zobrazit číslování bodů v pořadí, ve kterém jimi následně prochází síla (viz obr. 4.5).

4.8.2 Sestavení vektoru zatížení

Průběh zatížení v čase lze zvolit stejně jako v kapitole 4.7, pro potřeby výpočtu zatížení chodci je však umožněno používat pouze svislou sílu.

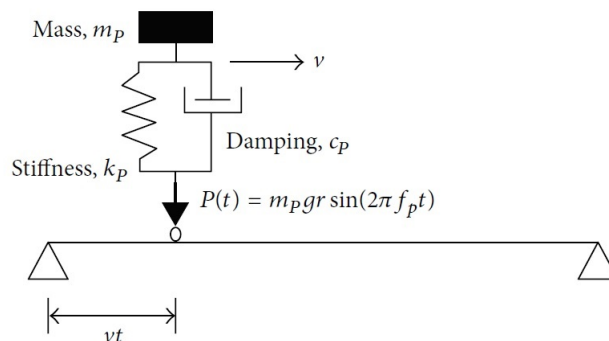
V [15] je síla rozložena pomocí lineárních básových funkcí mezi krajní uzly prvku. Při použití husté MKP sítě může být tato aproximace dostatečná. Ve vytvořeném programu je však použita přesnější metoda. Působící síla je rozdělena na normálovou a tečnou složku a dále je využito básových funkcí z kap. 4.3 k lokalizaci vektoru zatížení p podle (4.27) [16].

$$p = \int_0^1 N^T \bar{p} l d\eta \quad (4.27)$$

kde \bar{p} je svislá zatěžovací síla rozložená na tečnou a normálovou složku. V případě osamocené síly se integrace v (4.27) zjednoduší na násobení hodnot básových funkcí h pro danou souřadnici η s aktuální velikostí příslušné složky \bar{p} . K vyřešení integrace je použita Newmarkova metoda stejně jako pro stacionární zatížení.

4.8.3 Biodynamické modely

Pro simulaci interakce mezi chodcem a konstrukcí je implementována možnost použití SDOF a 2DOF biodynamických modelů popsaných v kap. 3.3.4. K jejich aktivaci dochází v důsledku kmitání konstrukce, se kterou jsou v kontaktu. Proto mohou být použity pouze ve spojení se silovým zatížením konstrukce.



Obrázek 4.6: Příklad použití biodynamického modelu [11]

U biodynamických modelů je nutné zadat parametry k_{hi} , m_{hi} a c_{hi} . Jejich hodnoty použité pro tuto práci byly převzaty z [10] a [17] a jsou shrnuty v tab. 4.1.

Pomocí Newmarkovy metody je vypočten vektor zrychlení \ddot{r}_n v n -tém kroku. Z rovnice (4.3) je vypočteno svislé zrychlení \ddot{u}_g v místě, kde se nachází biodynamický model. Ten je následně zatížen zrychlením podle (4.28) [13].

$$K_h u(t) + C_h \dot{u} + M_h \ddot{u} = -M_h r^s \ddot{u}_g(t) \quad (4.28)$$

kde K_h , M_h a C_h jsou matice odpovídající biodynamickému modelu. r^s je směrový vektor určující, které stupně volnosti odpovídají směru zrychlení, v němž je konstrukce zatížena. Pro tento případ je vektor r^s jednotkový.

Soustava rovnic (4.28) je vyřešena také Newmarkovo metodou. Následně je vypočtena reakční síla F_h v místě kontaktu konstrukce a biodynamického modelu:

$$F_h = k_{h1} u_1 + c_{h1} \dot{u}_1 \quad (4.29)$$

F_h v integračním kroku $n+1$ následně vstupuje jako zatížení konstrukce. Tento způsob vnáší několik nepřesností. Například síla vypočtená v kroku n je použita v kroku $n+1$. Jednou z možností jak chybu odstranit by bylo ji použít znovu v kroku n a takto iterativně dospět k rovnováze, až poté přejít ke kroku $n+1$. Další nepřesnost je dána tím, že síla způsobená chodcem je nalezena v místě, kde se zatížení nachází v čase n , použita je však až v následujícím kroku, tedy v prostoru o $v_p \Delta t$ dále. Obě zmíněné nepřesnosti lze redukovat zkrácením časového kroku Δt .

model	m_{h1} [kg]	m_{h2} [kg]	k_{h1} [kN/m]	k_{h2} [kN/m]	c_{h1} [kNs/m]	c_{h2} [kNs/m]
sdof - Brownjohn 1999	80	-	82	-	1.946	-
2dof - ISO 1981	13	62	80	62	0.93	14.6

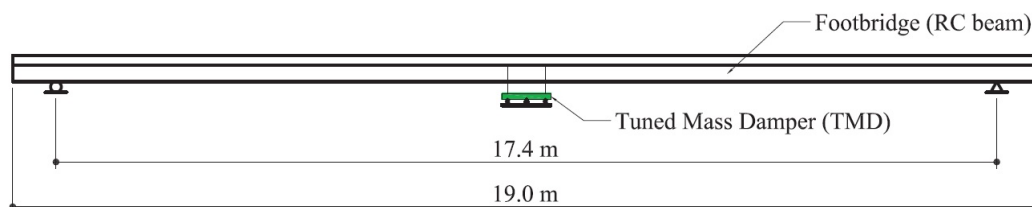
Tabulka 4.1: Použité parametry biodynamických modelů

5 Analýza předpjatého nosníku

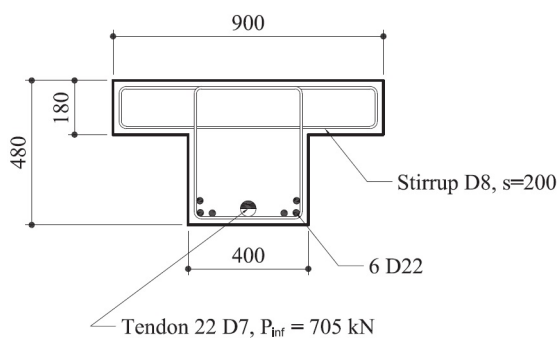
Za účelem porovnání jednotlivých modelů chodců byl vytvořen model předpjatého nosníku, který byl použit jako experimentální konstrukce v [15]. Nosník sloužil k měření odezvy při přechodu jednoho chodce, zástupu chodců, skákání a impulzu síly (pád pytle s pískem z výšky 1 m). Zaznamenány byly výchylky a zrychlení uprostřed rozpětí. Tato kapitola se dále zabývá pouze přechodem jedné osoby přes konstrukci.

5.1 Údaje o konstrukci

Konstrukce je předpjatý betonový nosník o jednom poli s rozpětím 17,4 m a s krátkými převislými konci. Statické schéma je na obr. 5.1. K použití nosníku jako lávky pro pěší byl zvolen "T"průřez. Jeho geometrie je na obr. 5.2. Souhrn parametrů a vlastností lze najít v tab. 5.1. Tuhost a hmotnost konstrukce byly zvoleny tak, aby první vlastní frekvence ležela v blízkém okolí 2 Hz a bylo možné ji jednoduše budit pomocí chůze.



Obrázek 5.1: Statické schéma [15]



Obrázek 5.2: Příčný řez [15]

Uprostřed hlavního pole byl instalován pohlcovač kmitání. Ten byl navržen pro co nejvyšší účinnost při kmitání s frekvencí 2 Hz. Při jednotlivých zatěžovacích zkouškách bylo možné pohlcovač uzamknout pevným spojením s konstrukcí, působil tedy pouze jako zavěšená hmota. Každá zatěžovací zkouška byla provedena pro uzamčený i pro funkční pohlcovač. Bylo tak možné vyhodnotit jeho vliv na kmitání konstrukce.

Parametry konstrukce	
celková délka nosníku	19 m
rozpětí L	17.4 m
plocha průřezu A	0.282 m ²
moment setrvačnosti průřezu I _y	0.0053081 m ⁴
svislá tuhost uprostřed rozpětí K _H	861 kN/m
modul pružnosti betonu E	23.5 GPa
celková hmotnost M	10600 kg
poměrný útlum ζ ₁	1.43%

Tabulka 5.1: Parametry nosníku [15]

Parametry pohlcovače kmitání	
hmotnost M _T	310 kg
tuhost K _T	50.9 kN/m
útlum c _T	1.18 kNs/m
poměrný útlum ζ _T	13%
vlastní frekvence f _T	1.91 Hz

Tabulka 5.2: Parametry pohlcovače kmitání [15]

5.2 Vytvoření a identifikace výpočetního modelu

Výpočetní model byl vytvořen pomocí čtyř prutových prvků, pevné kloubové podpory na jeho levé straně a posuvného kloubu na pravé straně. Uprostřed rozpětí byl přidán pohlcovač s charakteristikami podle tab. 5.2. Ten byl vytvořen jako další bod konstrukce, který leží pod ní a je se středem nosníku vertikálně propojen pomocí pružiny a tlumiče. Zároveň je v místě zmíněného bodu nutné umístit podporu, která zabraňuje jeho pootočení a horizontálnímu posunu. Tím je umožněn pouze jeho vertikální posun, který odpovídá jeho jedinému stupni volnosti.

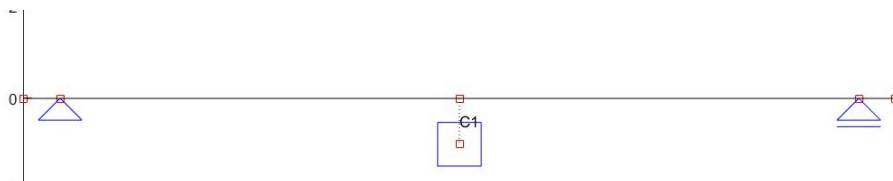
Pokud by byl model vytvořen pouze pomocí znalosti geometrie a modulu pružnosti betonu, došlo by k vnesení výrazné chyby. Vzhledem k tomu, že se jedná o prostý předpjatý nosník, je možné vzít při výpočtu v úvahu vliv předpětí. Proběhla tedy identifikace modelu na základě dvou experimentálně změřených vlastností:

- svislé tuhost uprostřed rozpětí $K_H = 861$ kN/m
- první vlastní frekvence $f_1 = 1,98$ Hz

Nejdříve byl upraven modul pružnosti betonu $E_c = 17,8$ GPa, který ovlivňuje tuhost i vlastní frekvence. Tím bylo dosaženo odpovídající tuhosti K_H . Následně byla upravena objemová hmot-

nost betonu $\rho_c = 2190 \text{ kg/m}^3$, která má vliv pouze na vlastní frekvence a nikoliv již na svislou tuhost. Tímto způsobem bylo dosaženo odpovídající vlastní frekvence i svislé tuhosti K_H .

Další možností zahrnutí vlivu předpětí je použití geometrické matice tuhosti K_g podle [12], která zohledňuje vliv osových sil na tuhost konstrukce. K použití této metody je však nutné znát velikost předpínací síly vnesené do nosníku.

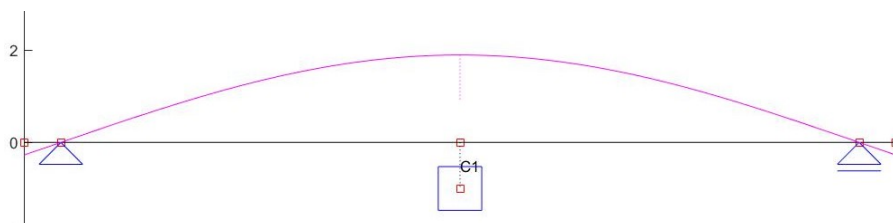


Obrázek 5.3: Výpočetní model

5.3 Výpočet vlastní frekvence

Pro potřeby výpočtu byla vygenerována síť s hustotou deset prvků na každý zadaný prut. Výpočtem první vlastní frekvence bylo ověřeno, že hustější síť již neovlivní první vlastní frekvenci ani na čtvrtém desetinném místě. Tato přesnost je považována za dostačující.

Nejdříve byl s upravenými parametry E_c a ρ_c vyhodnocen první vlastní tvar a kmitání a první vlastní frekvence $f_1 = 1,9776 \text{ Hz} \approx 1,98 \text{ Hz}$. První vlastní tvar odpovídá očekávanému chování konstrukce a je vykreslen na obr. 5.4.



Obrázek 5.4: První vlastní tvar

Tento výpočet byl proveden s uzamčeným pohlcovačem. To bylo simulováno tak, že se řádově zvýšila tuhost pružiny, která jej spojuje s nosníkem. Tím bylo dosaženo jejich tuhého spojení podobně jako při experimentu. Na konstrukci však dále figuruje jeho hmotnost.

5.4 Odezva na zatížení chodcem

V této kapitole je simulován přechod chodce přes konstrukci. K tomu byly použity pohybuující se síly uvedené v tab. 3.3. Jednotlivé výpočty lze rozdělit do tří skupin:

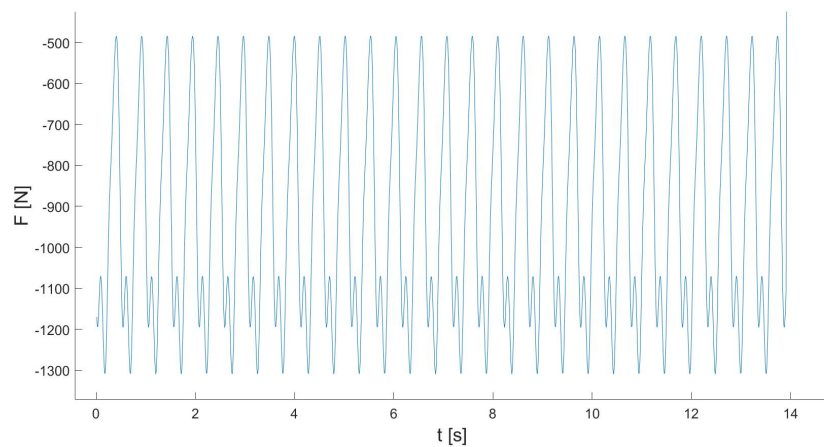
- samostatná proměnná síla
- proměnná síla doplněná o SDOF biodynamický model
- proměnná síla doplněná o 2DOF biodynamický model

V každé této skupině je použito pět modelů chodce. Celkem tedy bylo provedeno 15 výpočtů pro konstrukci s uzamčeným pohlcovačem kmitání a 15 výpočtů s funkčním pohlcovačem.

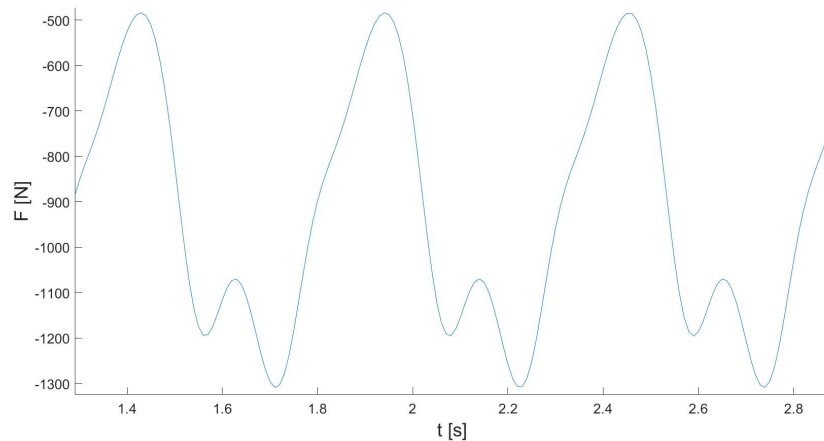
Při experimentu přes konstrukci přecházela osoba vážící 93 kg. Délka kroku byla $l_s = 0,7$ m (což mimo jiné neodpovídá [1] ani [6], kde jsou pro frekvenci 2 Hz uvedeny délky kroku 0,9 a 0,75 m) s frekvencí $f_p = 1,95$ Hz. Výsledná rychlost chůze v_p tedy byla 1,365 m/s. Všechny tyto parametry je nutné znát pro správné nastavení výpočtu. V následujících výpočtech byl použit integrační krok $\Delta t = 0,01$ s. Matice útlumu byla sestavena za předpokladu, že je nejméně tlumen první vlastní tvar podle (4.16) s použitím měřeném poměrném útlumu $\xi_1 = 1,43$ %.

5.4.1 Zatížení pohybující se silou

Zatížení se pohybuje po konstrukci zleva doprava. Během simulace jsou v každém kroku získány vektory $r(t)$, $\dot{r}(t)$ a $\ddot{r}(t)$. Doba přechodu chodce (zatížení) trvá přibližně 14 s. Aby bylo možné sledovat i dokmitání konstrukce, bylo ve vstupním souboru nastaveno ukončení výpočtu až po 30 sekundách.



Obrázek 5.5: Průběh zatížení podle Bachmanna

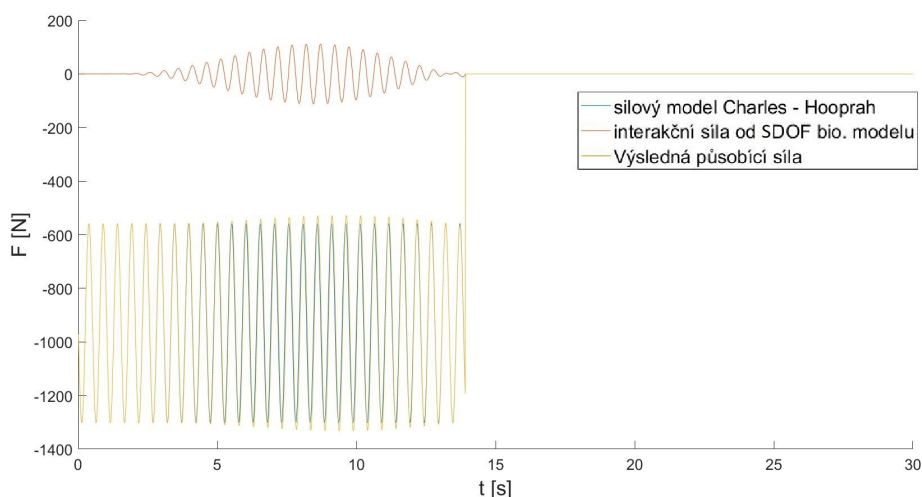


Obrázek 5.6: Průběh zatížení podle Bachmanna, detail

Na obr. 5.5 je zaznamenán průběh svislé síly během výpočtu. V tomto případě jde o model navržený Bachmanem pro $G = 930$ N. Na obrázku je vidět, že síla působí cca 14 s, což odpovídá času, který osoba potřebuje k přechodu konstrukce. Záporné znaménko zatížení je dáno tím, že podle zavedeného souřadnicového systému směřuje kladná osa Y nahoru. Chodec však působí silou v opačném směru. Na obr. 5.6 je detail zatížení z obr. 5.5. Výpočet byl následně proveden pro všech pět silových modelů chodců a pro uzamčený i uvolněný pohlcovač kmitání.

5.4.2 Zatížení s biodynamickým modelem osoby

Jako další byly provedeny výpočty se zahrnutím biodynamických modelů podle tab. 4.1. Výsledná síla působící na konstrukci byla vytvořena jako součet zatížení pohybující se silou podle tab. 3.3 a síly, kterou působí biodynamický model v důsledku kmitání podkladu.

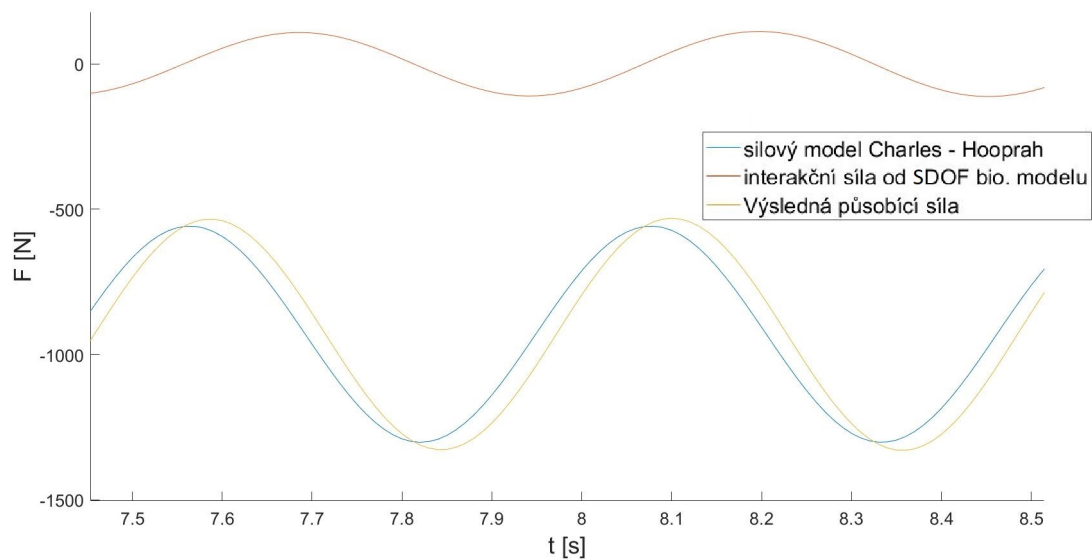


Obrázek 5.7: Průběh zatížení, silový model Charles-Hooprah + SDOF

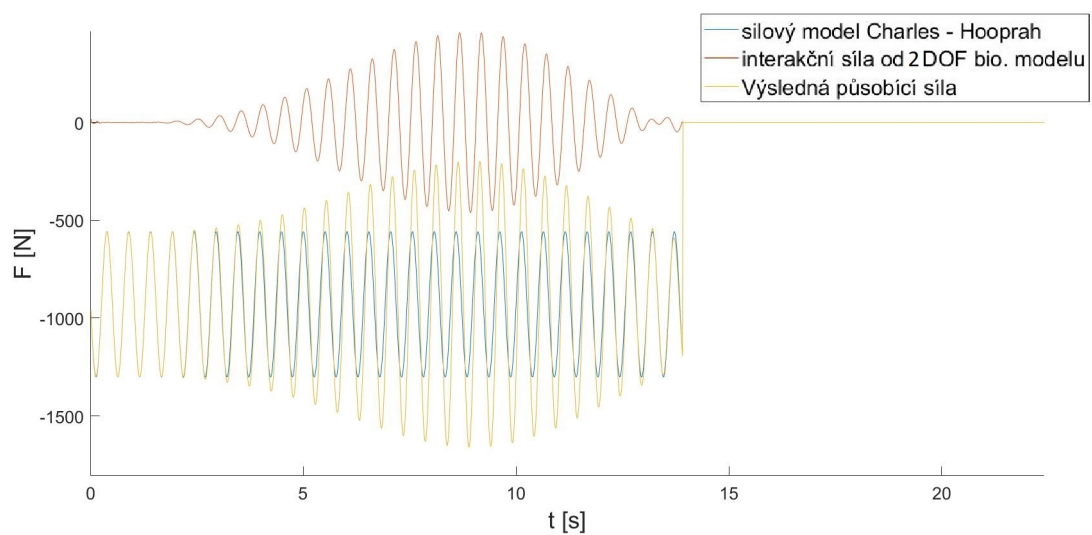
Na obr. 5.7 je vidět, že na začátku výpočtu konstrukce nekmitá, biodynamický model je v klidu a nepůsobí žádnou silou. Silovým zatížením dochází k rozkmitání konstrukce a vzniku interakční složky zatížení. Vzhledem k tomu, že frekvence chůze je velmi blízká první vlastní frekvenci nosníku, je biodynamický model nejvíce aktivní zhruba ve chvíli, kdy se nachází uprostřed rozpětí. To je dáno tím, že v tomto místě zároveň vzniká nejvyšší zrychlení z celého nosníku. Chování modelu tedy odpovídá předpokladu.

Při pohledu na obrázek 5.7 se může jevit, že výsledná síla je menší než součet jednotlivých složek. Tento efekt je lépe vidět na obr. 5.8, který zachycuje kratší úsek výpočtu. Na něm je již patrné, že tyto dvě složky jsou vůči sobě fázově posunuty. Amplituda výsledné síly je tedy menší než součet amplitud jednotlivých složek.

Při použití 2DOF modelu byla zaznamenána výrazně větší interakční složka síly než při použití modelu s jedním stupněm volnosti.



Obrázek 5.8: Průběh zatížení, silový model Charles - Hooprah + SDOF, detail

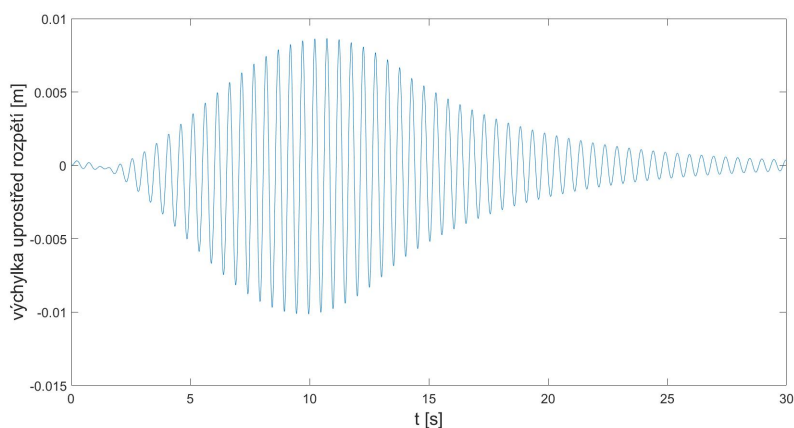


Obrázek 5.9: Průběh zatížení, silový model Charles-Hooprah + 2DOF

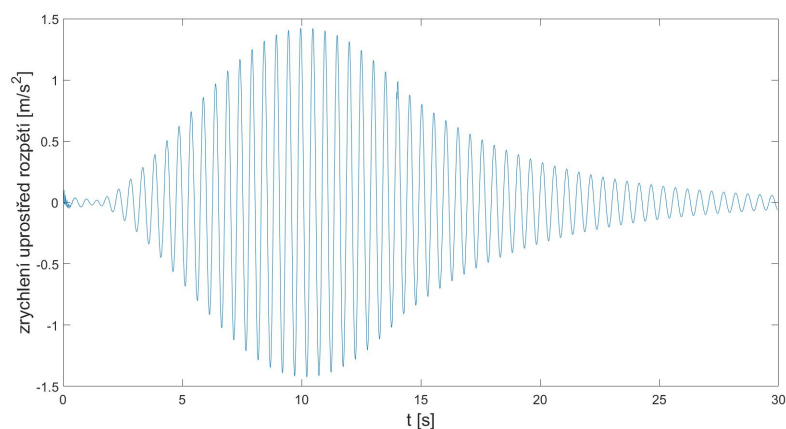
5.4.3 Výsledky

Protože jako hlavní kritérium pro zajištění pohody chodců slouží zrychlení konstrukce, bylo u všech výpočtů vyhodnoceno zrychlení. U některých modelů byly vypočteny i výchylky, které sloužily pouze jako kontrola výsledků. Na následujících obrázcích v této sekci jsou použity výsledky získané pomocí zatěžovacího modelu Charles-Hooprah bez biodynamického modelu, který byl vyhodnocen jako nejvhodnější. Při vizuálním porovnání výsledků simulace na obr. 5.10 a 5.11 s experimentálními výsledky na obr. 5.12 lze říci, že simulace pohybujícího se chodce proběhla úspěšně. Výsledky všech provedených výpočtů jsou shrnuty v tab. 5.3

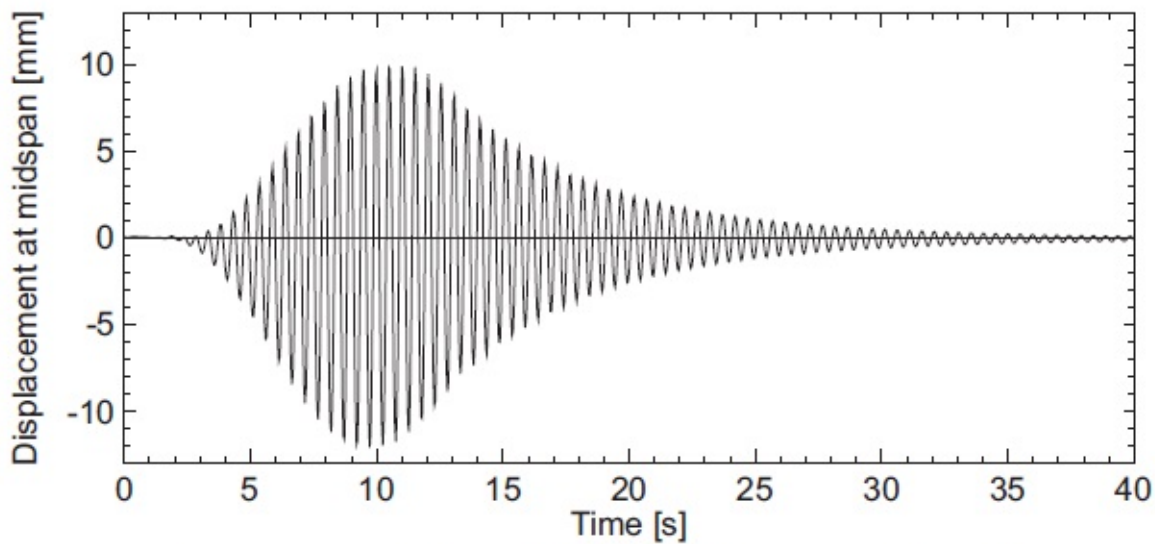
Na obr. 5.14 je patrná špička zrychlení v čase cca 14 sekund. Ta vzniká tím, že pohybující se síla má konstantní složku $G = 930 \text{ N}$, která působí na krátkém převislém konci konstrukce. Její odstranění působí ve výpočtu stejně jako náhle působící síla. Vzhledem k charakteru takového zatížení není vhodně použita Newmarkova metoda. Protože konstrukce není ve skutečnosti odtěžována okamžitě, ale v průběhu jednoho lidského kroku, lze tento jev vnímat pouze jako výpočetní chybu a není třeba se jím dále zabývat.



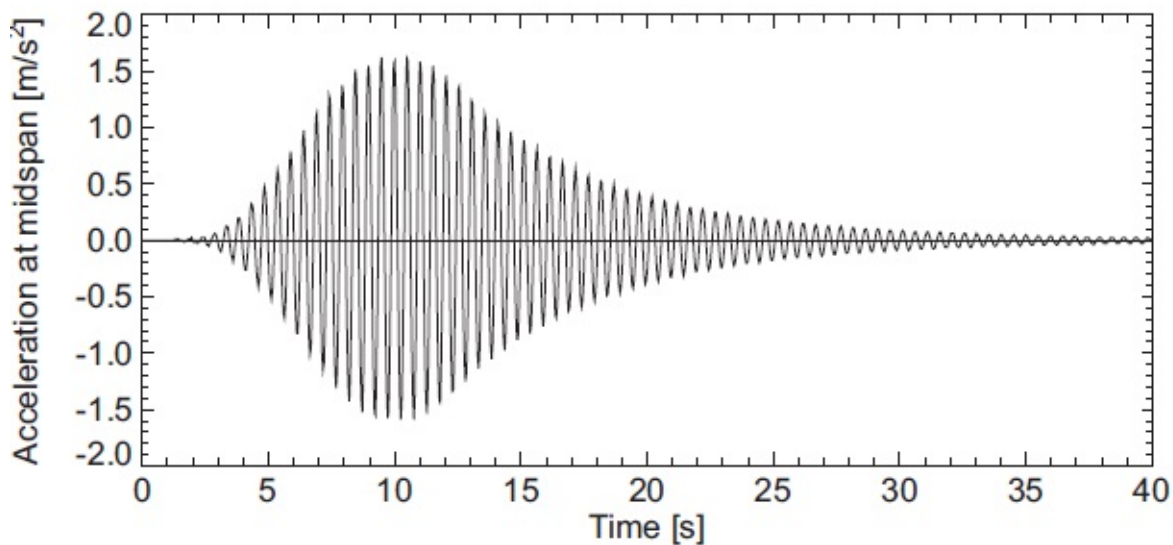
Obrázek 5.10: Vypočtený průběh výchylky uprostřed rozpětí, uzamčený pohlčovač



Obrázek 5.11: Vypočtený průběh zrychlení uprostřed rozpětí, uzamčený pohlčovač

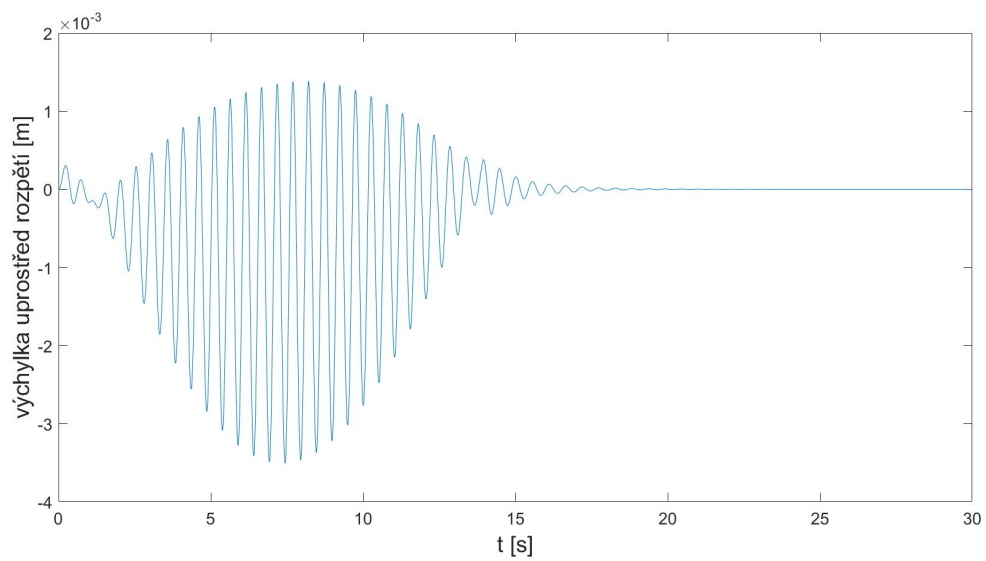


One person walking with 2 Hz: Displacement at midspan with locked TMD.

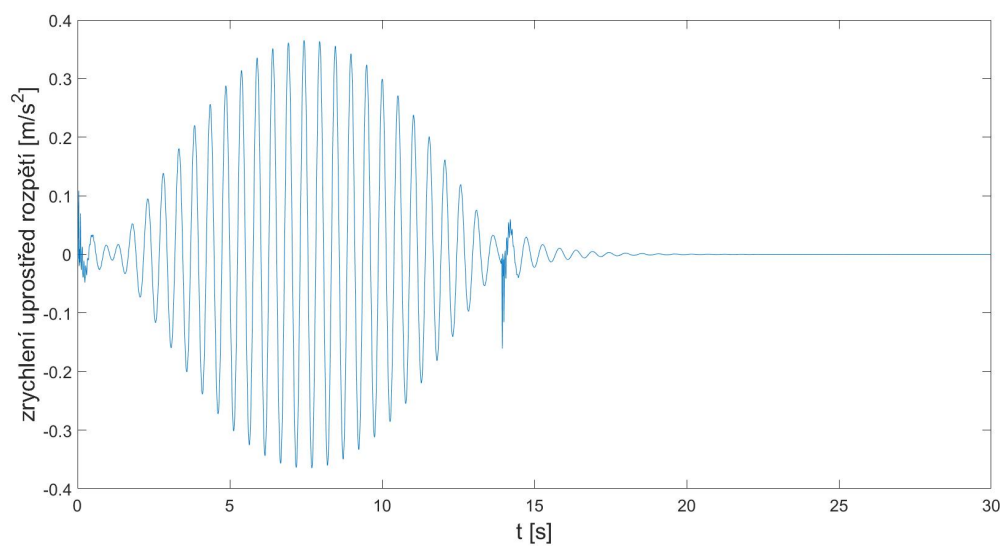


One person walking with 2 Hz: Acceleration at midspan with locked TMD.

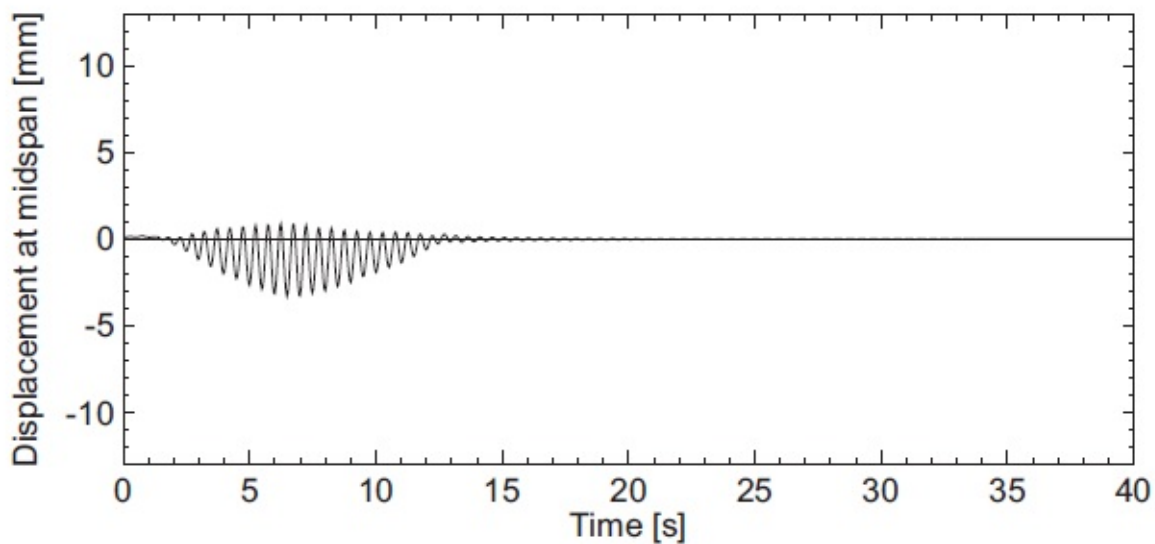
Obrázek 5.12: Záznam z experimentu, uazmčený pohlcovač [15]



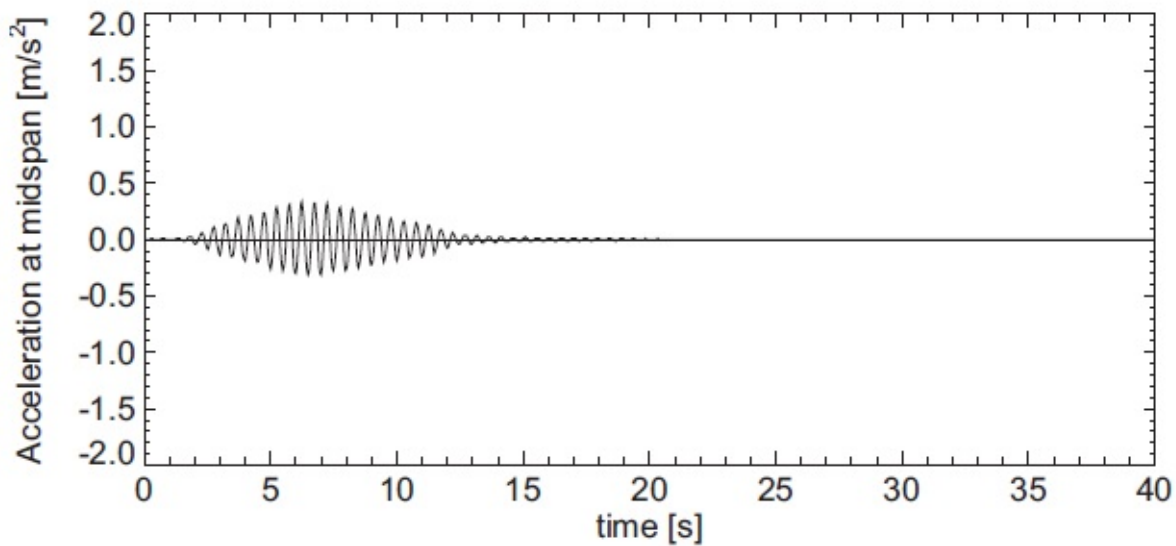
Obrázek 5.13: Vypočtený průběh výchylny uprostřed rozpětí, funkční pohlcovač



Obrázek 5.14: Vypočtený průběh zrychlení uprostřed rozpětí, funkční pohlcovač



One person walking with 2 Hz: Displacement at midspan with free TMD.



One person walking with 2 Hz: Acceleration at midspan with free TMD.

Obrázek 5.15: Záznam z experimentu, funkční pohlcovače [15]

uzamčený pohlcovač kmitání - měřené $a_{\max} = 1.63 \text{ m/s}^2$		
autor modelu	vypočtené $a_{\max} [\text{m/s}^2]$	odchylka od měření [%]
samostatná pohybující se síla		
Blanchard	0.979	-39.9
Bachman	1.362	-16.4
Charles & Hooprah	1.423	-12.7
Young	1.324	-18.8
Schultze	1.316	-19.3
pohybující se síla +SDOF		
Blanchard	0.973	-40.3
Bachman	1.366	-16.2
Charles & Hooprah	1.422	-12.8
Young	1.322	-18.9
Schultze	1.293	-20.7
pohybující se síla +2DOF		
Blanchard	1.535	-5.8
Bachman	2.151	32.0
Charles & Hooprah	2.236	37.2
Young	2.065	26.7
Schultze	2.061	26.4

Tabulka 5.3: Výsledky výpočtů zrychlení s uzamčeným pohlcovačem kmitání

funkční pohlcovač kmitání - měřené $a_{\max} = 0.34 \text{ m/s}^2$		
autor modelu	vypočtené $a_{\max} [\text{m/s}^2]$	odchylka od měření [%]
samostatná pohybující se síla		
Blanchard	0.251	-26.2
Bachman	0.387	13.8
Charles & Hooprah	0.365	7.4
Young	0.349	2.6
Schultze	0.370	8.8
pohybující se síla +SDOF		
Blanchard	0.247	-27.4
Bachman	0.382	12.4
Charles & Hooprah	0.359	5.6
Young	0.350	2.9
Schultze	0.373	9.7
pohybující se síla +2DOF		
Blanchard	0.287	-15.7
Bachman	0.429	26.2
Charles & Hooprah	0.418	22.9
Young	0.410	20.6
Schultze	0.424	24.7

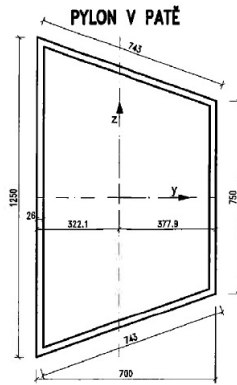
Tabulka 5.4: Výsledky výpočtů zrychlení s funkčním pohlcovačem kmitání

Z tabulky 5.3 je vidět, že u pouze silových modelů bylo dosaženo poměrně dobré shody s experimentem. Jako nejlepší z těchto modelů se jeví model Charles-Hooprah, který je zároveň i nejjednodušší. Obsahuje pouze první člen Fourierovy řady s koeficientem $\alpha = 0,4$. Při použití modelu navrženého Blanchardem bylo zjištěno výrazné podcenění odezvy konstrukce.

Zahrnutí biodynamického modelu s jedním stupněm volnosti nemělo na výpočet zásadní vliv, došlo ke zvýšení extrémní hodnoty vypočteného zrychlení o cca 1-2 %.

Vliv 2DOF modelu byl výrazně větší než u SDOF modelu a ve většině případů vedl k přecenění zatížení. Je však nutné vzít v úvahu, že v případě této konstrukce (s uzamčeným pohlcovačem kmitání) dochází ke vzniku velkých vertikálních výchylek a zrychlení (kolem $1,6 \text{ m/s}^2$), což jsou hodnoty silně překračující všechny třídy pohody na lávkách pro pěší. Výsledky ovšem nejsou neočekávané a nelze je považovat například za chybu výpočetního programu. Při použití totožného 2DOF modelu je v [9] uvedeno zvýšení odezvy konstrukce (která není ve zmíněné studii blíže specifikována) o 34 % oproti silovému modelu.

Každý pylon tvoří dvojice svařovaných ocelových profilů. Ty mají lichoběžníkový tvar a směrem nahoru se zužují. V horní třetině jsou oba profily propojeny a vychází z nich závěsy. Pylony i opěry jsou hlubinně založeny. V místě, kde se kříží mostovka s pylonem, jsou oba jeho profily příčně propojeny kruhovou trubicí $\text{Ø}168 \times 14$ mm, k níž je kloubově připojena mostovka. Výška pylonu od založení je 36 m [18],[19].



Obrázek 6.3: řez ocelovým profilem pylonu v patě [19]

Mostovka byla sestavena z prefabrikovaných segmentů o délce 11,288 m. Ty jsou vyrobeny z UHPC s rozptýlenou ocelovou výztuží. Jeho charakteristiky převyšují C110/130 [19]. Každý segment je předepjat tyčovým předpětím a po dokončení montáže byla mostovka jako celek navíc předepjata lanovým předpětím. Jednotlivé prefabrikáty jsou tvořeny dvěma krajními nosníky, mezi kterými leží 60 mm tlustá deska. Tu podpírají příčná žebra v osové vzdálenosti 920 mm.

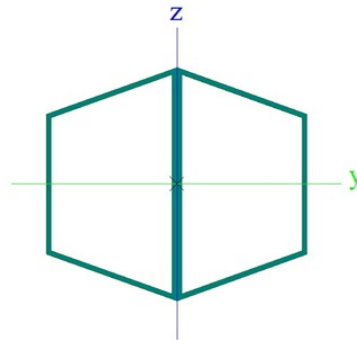
Krajní pole mají podélný sklon 7 %. Prostřední pole tvoří výškový oblouk s proměnným sklonem. Na celé mostovce byl navržen příčný sklon 2 %.

6.2 Vytvoření výpočetního modelu

Pro sestavení geometrie konstrukce bylo použito dat z [20]. Mostovka byla vytvořena pomocí prutových prvků spojujících jednotlivé uzly, v nichž jsou ukotveny závěsy. Parametry průřezu byly určeny podle obr. 6.2 a lze je najít v tab. 6.2. Pro beton byl použit modul pružnosti $E_c = 45$ GPa. Objemová hmotnost betonu s vlivem předpínacích tyčí a kabelů byla odhadnuta jako $\rho_c = 2600$ kg/m³. V hmotnosti získané z průřezové plochy mostovky není zahrnuta hmotnost příčných žebel a zábradlí, proto je po celé délce mostovky vložena liniová hmota 254 kg/m podle [20].

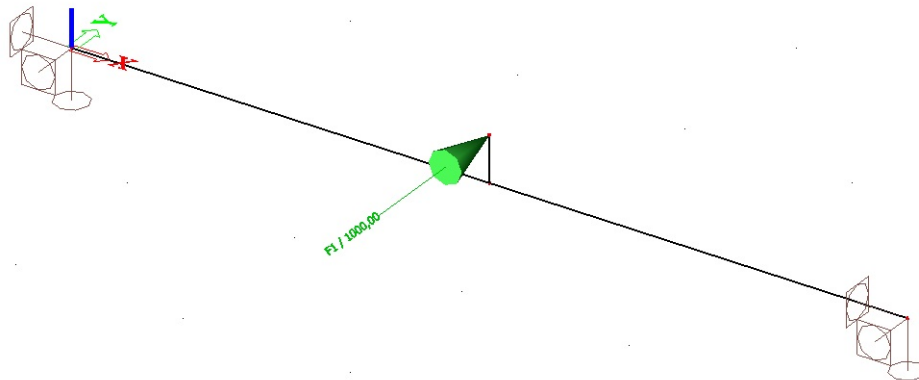
Protože se sloupy pylonu zužují s výškou, bylo pro výpočet použito 3 průřezů s různými charakteristikami [20]. Pro ocel byl použit $E_s = 210$ GPa a $\rho_s = 7850$ kg/m³

Vzhledem ke statickému chování konstrukce jsou pylony modelovány jako vetknuté. Pro levou opěru je použita pevná kloubová podpora k zamezení podélného posunu mostovky, na pravé straně mostu je posuvný kloub.



Obrázek 6.4: Průřez prutového prvku použitého v patě pylonu [20]

V místě křížení mostovky s pylonem bylo nutné stanovit tuhost příčného propojení pylonu. Ve svislém směru bylo připojení kruhové trubky na pylon simulováno jako vetknutí, výsledná tuhost tedy vychází z oboustranně vetknutého nosníku. V horizontálním směru je připojení modelováno jako kloubové. Mostovka je však připojena s excentricitou 279 mm, tuhost je tedy závislá na ohybových i torzních parametrech prvku. Ke stanovení výsledné svislé tuhosti $k_{p,v}$ a vodorovné tuhosti $k_{p,h}$ byl použit program SCIA Engineer 16.0. $k_{p,v} = 6,485 \text{ MN/m}$ a $k_{p,h} = 1,572 \text{ MN/m}$.

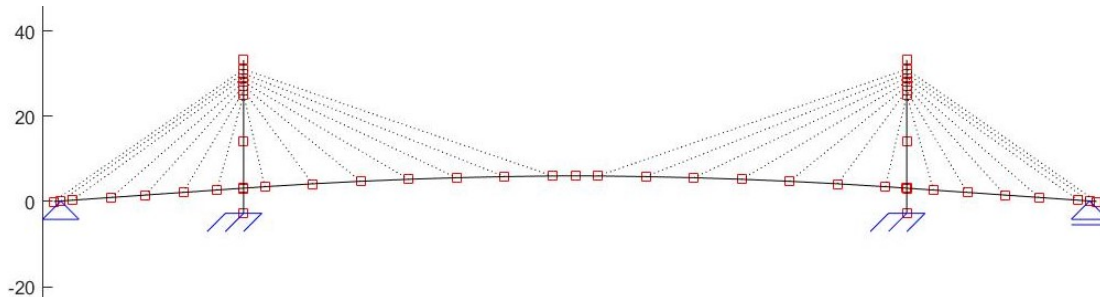


Obrázek 6.5: Výpočet horizontální tuhosti propojení pylonu

Lana závěsů byla modelována vždy po dvou jedním prvkem. To umožnil fakt, že v rovinném modelu mají obě lana (nesoucí levý a pravý nosník mostovky) stejnou geometrii. V případě, že by byly závěsy modelovány jako oboustranně kloubově připojené prvky, nevstupovaly by do výpočtu jejich ohybové tuhosti a výpočet by proběhl správně. Pokud je však vytvořena síť pro MKP výpočet, byly by uvnitř lan vygenerovány uzly a jednotlivé části lan by byly mezi sebou spojeny vetknutím. Při zadání nulové ohybové tuhosti by pak byla matice tuhosti konstrukce singulární. V případě, že by byl zadán nenulový moment setrvačnosti, by byla matice tuhosti velmi blízko k singulární matici. Pokud by výpočet i přes to proběhl, bylo by problematické vyhodnocovat vlastní tvary kmitání, protože mnoho tvarů s nízkými frekvencemi by odpovídalo kmitání závěsů. Tomu by se dalo vyhnout například tím, že by se síť na závěsech nevytvářela. Použito bylo řešení, ve kterém se pro každou dvojici lan vypočetla tahová tuhost:

$$k_j = \frac{2EA_j}{l_j} \quad (6.1)$$

kde EA je osová tuhost průřezu určená podle [21] a l_j je délka závěsu. Následně byly závěsy pomocí k_j zavedeny do výpočtu podle tab. 6.1 jako pružiny spojující pylon a mostovku, na kterých se síť nevytváří. Toto řešení však vede k zanedbání hmotnosti závěsů. Na obr. 6.6 je zobrazen celý model konstrukce. Prvky přenášející pouze osově síly jsou vykresleny tečkovaně.



Obrázek 6.6: Statické schéma

Parametry závěsů				
dvojice závěsů č.	d	2*EA	l	k
	[mm]	[MN]	[m]	[MN/m]
1.0	36.0	284	54.3	5.227
2.0	36.0	284	52.4	5.423
3.0	36.0	284	49.5	5.736
4.0	28.0	172	41.2	4.173
5.0	20.0	87.8	34.2	2.566
6.0	20.0	87.8	27.8	3.161
7.0	20.0	87.8	23.2	3.788
8.0	20.0	87.8	22.1	3.971
9.0	20.0	87.8	27.2	3.223
10.0	25.0	126.4	35.4	3.569
11.0	28.0	172	45.0	3.821
12.0	31.0	224	55.3	4.050
13.0	36.0	284	66.0	4.304
14.0	36.0	284	76.9	3.695

Tabulka 6.1: Parametry závěsů pro jeden pylon [21]

Průřezové charakteristiky			
prvek	A	I_y	materiál
	[m ²]	[m ⁴]	-
pylon - pata	0.17560	0.02741	ocel
pylon - střed	0.14615	0.01653	ocel
pylon - vrchol	0.12478	0.00987	ocel
mostovka	0.51368	0.01237	beton

Tabulka 6.2: Použité průřezové charakteristiky

6.3 Výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitání

K tomuto výpočtu byla použita metoda postupných aproximací s Gram - Schmidtovou ortogonalizací. Vytvoření sítě bylo nastaveno tak, aby byl každý zadaný prut rozdělen na 5 prvků. Nalezeno bylo prvních 8 vlastních frekvencí a tvarů kmitání. Jejich pořadí a tvar (podle vizuální kontroly) se shoduje s [18]. Výsledky výpočtu a měření jsou porovnány v tab. 6.3. Odchylka $\Delta_{(i)}$ [%] je vypočtena podle (6.2).

$$\Delta_{(i)} = \frac{f_{(i)cal} - f_{(i)obs}}{f_{(i)cal}} 100 \quad (6.2)$$

Podle [3] lze stanovit mezní přípustnou odchylku vyjádřenou v %:

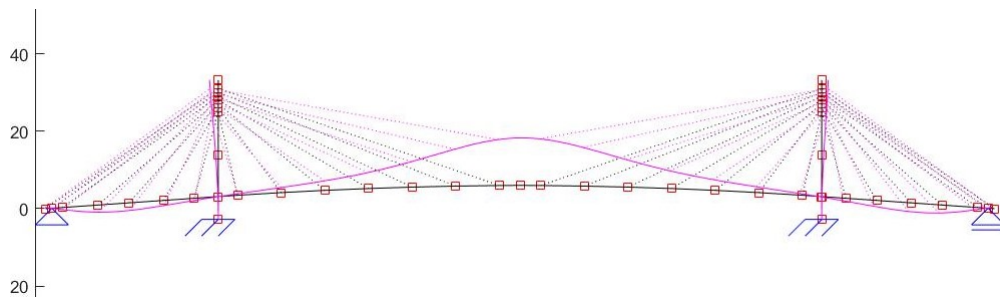
$$\Delta_{(i)max} = \pm \left(14 + \frac{f_{(i)cal}}{f_{(min)cal}} \right) \leq 25\% \quad (6.3)$$

kde $f_{(i)cal}$ je vypočtená i-tá vlastní frekvence, $f_{(i)obs}$ je experimentálně zjištěná i-tá vlastní frekvence, a $f_{(min)cal}$ je vlastní frekvence odpovídající prvnímu vertikálnímu tvaru kmitání, v tomto případě $f_{(1)cal}$.

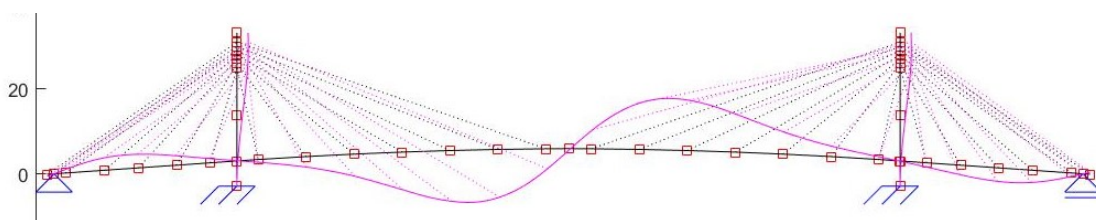
pořadí vl. frekvence	f_{cal} [Hz]	f_{obs} [Hz]	Δ [%]	Δ_{max} [%]
1	0.650	0.72	-10.8	15.0
2	0.830	0.91	-9.6	15.3
3	1.171	1.25	-6.7	15.8
4	1.449	1.55	-7.0	16.2
5	1.654	1.8	-8.8	16.5
6	1.735	1.95	-12.4	16.7
7	1.828	2.02	-10.5	16.8
8	2.082	2.17	-4.2	17.2

Tabulka 6.3: Srovnání vypočtených a měřených vlastních frekvencí

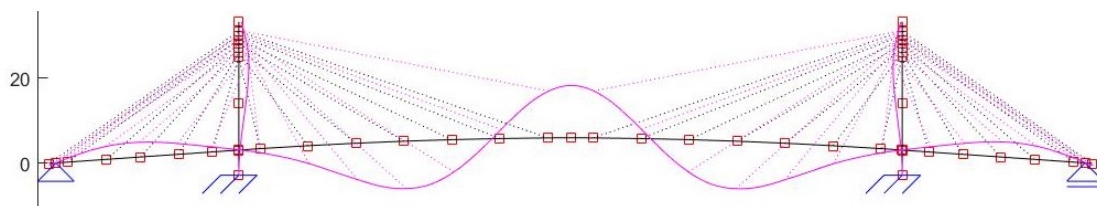
V tabulce 6.3 je patrné, že mezní hodnota odchylky nebyla pro žádný z analyzovaných vlastních tvarů překročena. Je však vidět, že některé odchylky jsou poměrně velké a pohybují se v okolí 10 %. To je pravděpodobně dáno nepřesnostmi a zjednodušeními ve vytvořeném modelu. Vliv na výpočet může mít zanedbání osových sil v závěsech a jejich nelineárního chování, způsob, jakým byl rozdělen pylon na prismatické prvky, zanedbání předpětí v mostovce a jejího prostorového chování. Na tuhosti konstrukce se podílí například i zábradlí, které však není zohledněno.



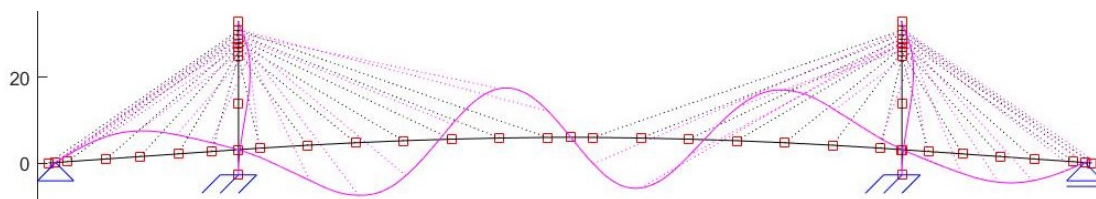
Obrázek 6.7: 1. vlastní tvar - $f_1 = 0,650$ Hz



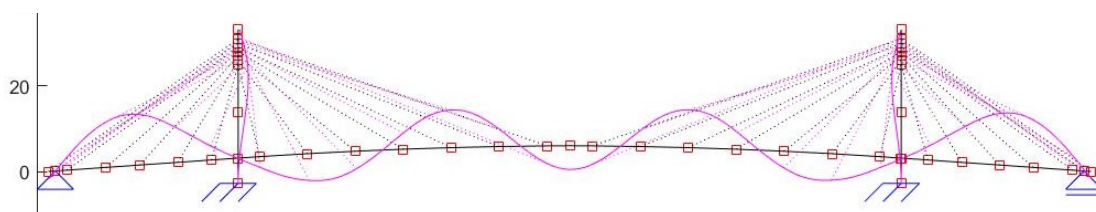
Obrázek 6.8: 2. vlastní tvar - $f_2 = 0,830$ Hz



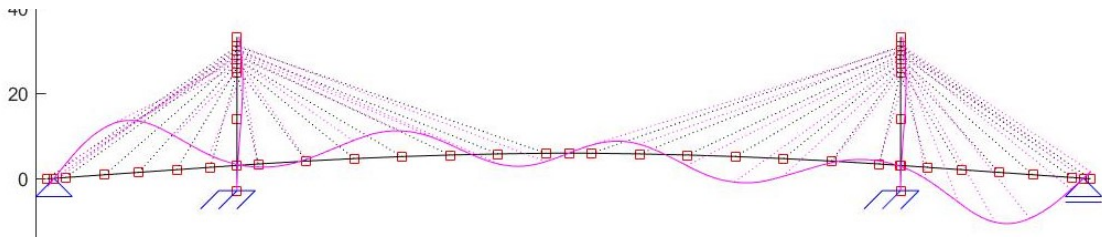
Obrázek 6.9: 3. vlastní tvar - $f_3 = 1,171$ Hz



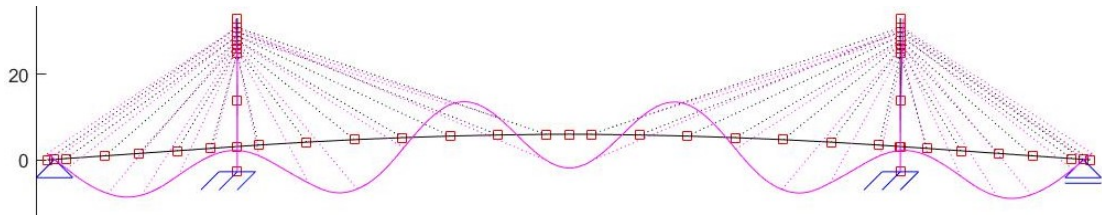
Obrázek 6.10: 4. vlastní tvar - $f_4 = 1,449$ Hz



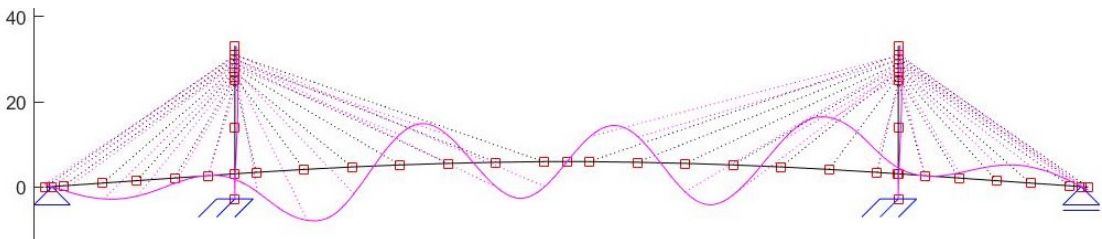
Obrázek 6.11: 5. vlastní tvar - $f_5 = 1,654$ Hz



Obrázek 6.12: 6. vlastní tvar - $f_6 = 1,735$ Hz



Obrázek 6.13: 7. vlastní tvar - $f_7 = 1,828$ Hz



Obrázek 6.14: 8. vlastní tvar - $f_8 = 2,082$ Hz

6.4 Identifikace výpočetního modelu

V rámci zatěžovací zkoušky bylo provedeno měření odezvy konstrukce na přechod dvou synchronizovaných chodců jdoucích s frekvencí 2,17 Hz, což odpovídá osmé vlastní ohybové frekvenci [18]. Zaznamenány byly RMS hodnoty a extrémní výkmity zrychlení na mostovce.

Pro účely této simulace byla provedena identifikace výpočetního modelu tak, aby se shodovaly osmé vlastní frekvence modelu a skutečné stavby. Na obrázku 6.14 je vidět, že tuhost mostovky v ohybu má pravděpodobně velký vliv na frekvenci odpovídající tomuto vlastnímu tvaru. Protože modul pružnosti betonu není přesně znám a zároveň je v mostovce zanedbán vliv předpětí, byl E_c navýšen o 19 % na 53,6 GPa aby se shodovaly výše zmíněné frekvence.

Během zatěžovací zkoušky byl z volného dokmitání konstrukce vyhodnocen i poměrný útlum příslušící každému vlastnímu tvaru. U tohoto mostu neplatí předpoklad, že nejméně je tlumen první vlastní tvar. Pro použití proporcionálního útlumu je nutné určit parametry α a β vyřešením soustavy rovnic (4.15). Pro tuto soustavu je nutné znát 2 vlastní frekvence a jim příslušné poměrné útlumy. Dosazením $\xi_1 = 0,019$, $\xi_8 = 0,0063$, $\omega_1 = 2\pi 0,654$, $\omega_8 = 2\pi 2,171$ získáme $\alpha = 0,1546$ a $\beta = 9,331 \cdot 10^{-5}$. Vlastní frekvence a poměrné útlumy modelu, který byl použit k výpočtu odezvy na zatížení, jsou shrnuty v tab. 6.4.

$$\Delta_{\xi^{(j)}} = \frac{\xi^{(j)cal} - \xi^{(j)obs}}{\xi^{(j)cal}} 100 \quad (6.4)$$

kde ξ_{cal} je poměrný útlum použitý pro výpočet, ξ_{obs} je změřený poměrný útlum a Δ_{ξ} [%] je odchylka použitých útlumů od měřených útlumů.

pořadí vl. frekvence	f_{cal} [Hz]	f_{obs} [Hz]	Δ [%]	Δ_{max} [%]	ζ_{cal} -	ζ_{obs} -	Δ_{ζ} [%]
1	0.654	0.72	-10.1	15.0	0.0190	0.0190	0.00
2	0.844	0.91	-7.9	15.3	0.0148	0.0150	-1.19
3	1.194	1.25	-4.7	15.8	0.0106	0.0110	-3.30
4	1.484	1.55	-4.4	16.3	0.0087	0.0088	-0.91
5	1.691	1.8	-6.4	16.6	0.0078	0.0098	-26.18
6	1.767	1.95	-10.4	16.7	0.0075	-	-
7	1.879	2.02	-7.5	16.9	0.0071	0.0080	-12.73
8	2.171	2.17	0.1	17.3	0.0063	0.0063	0.00

Tabulka 6.4: Vlastní frekvence a útlumy modelu použitého pro výpočet odezvy

V tabulce 6.4 je vidět, že poměrný útlum odpovídá pouze u první a osmé vlastní frekvence. To proto, že pomocí těchto frekvencí byly vyjádřeny parametry α a β .

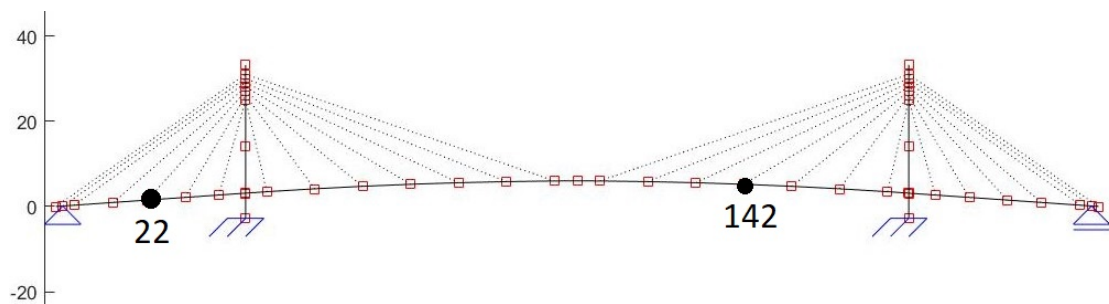
6.5 Výpočet odezvy na zatížení chodci

Cílem výpočtu bylo simulovat přechod dvou chodců po konstrukci, který byl proveden během zatěžovací zkoušky. Osoby přecházely se synchronizovaným krokem o frekvenci 2,17 Hz. Na rozdíl od kapitoly 5.4 nejsou známy všechny potřebné vstupní hodnoty. Bylo nutné odhadnout tíhu osob G a délku kroku l_s . Podle doporučení v [4] bylo zvoleno $G = 700$ N a podle [6] $l_s = 0,89$ m pro frekvenci kroku 2,17 Hz.

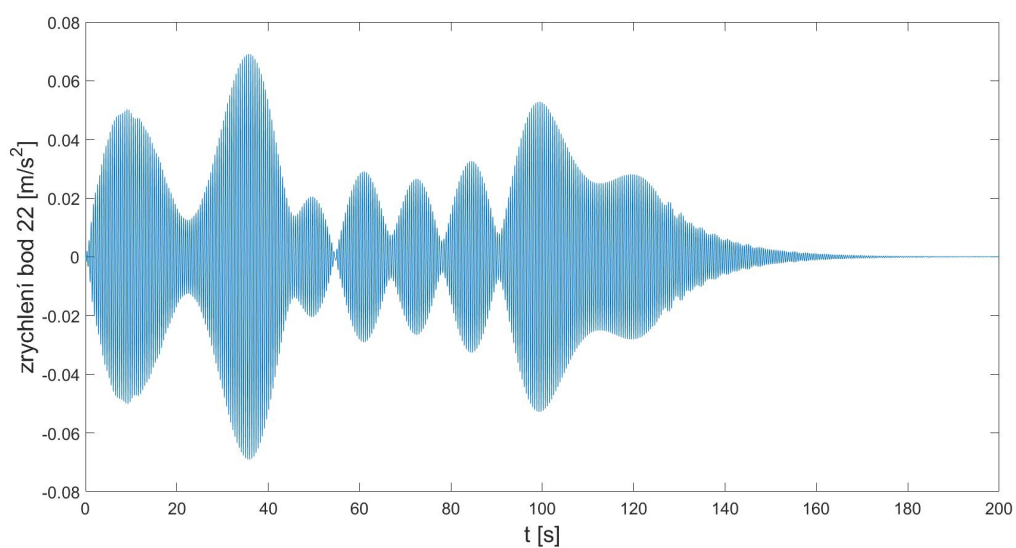
Protože při zatěžovací zkoušce přes konstrukci přecházeli dva chodci, byla zvětšena použitá síla $G = 2 \cdot 700 = 1400$ N. Všechny parametry biodynamických modelů byly také vynásobeny dvěma. Postup při výpočtu odezvy byl shodný jako v kap. 5.4.

6.6 Výsledky

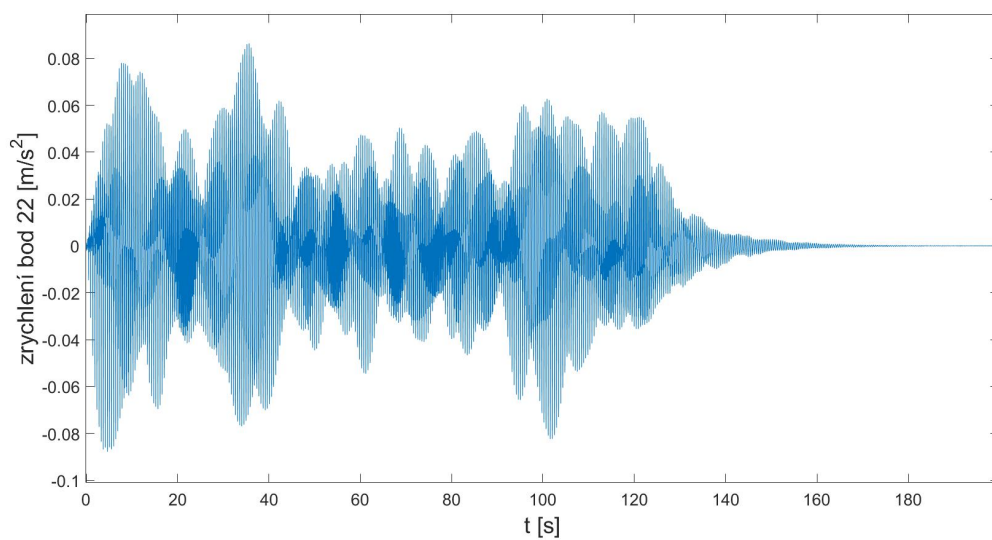
Výsledky měření a výpočtu byly porovnány ve dvou bodech konstrukce. Oba byly umístěny uprostřed příčného řezu a v podélném řezu do míst ukotvení závěsů k mostovce. Pro vyhodnocení byl vybrán jeden bod v krajním poli a jeden bod v hlavním poli. Oba tyto body se nachází v místech, kde má osmý vlastní tvar (jehož buzení bylo cílem zkoušky) dostatečně velké pořadnice ve svislém směru. V [18] jsou označeny čísla 22 a 142, toto značení bylo zachováno a jejich umístění je na obr. 6.15.



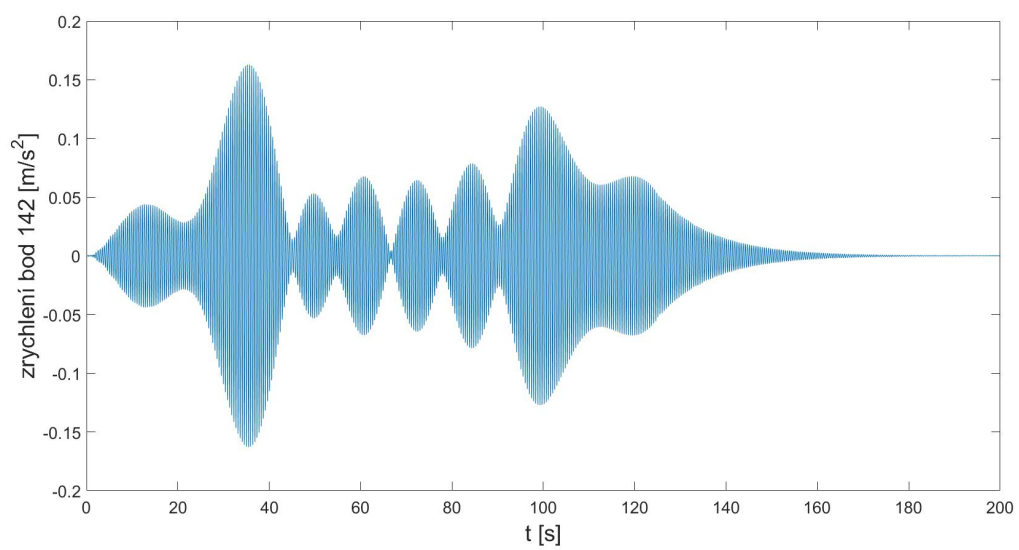
Obrázek 6.15: Body pro vyhodnocení odezvy



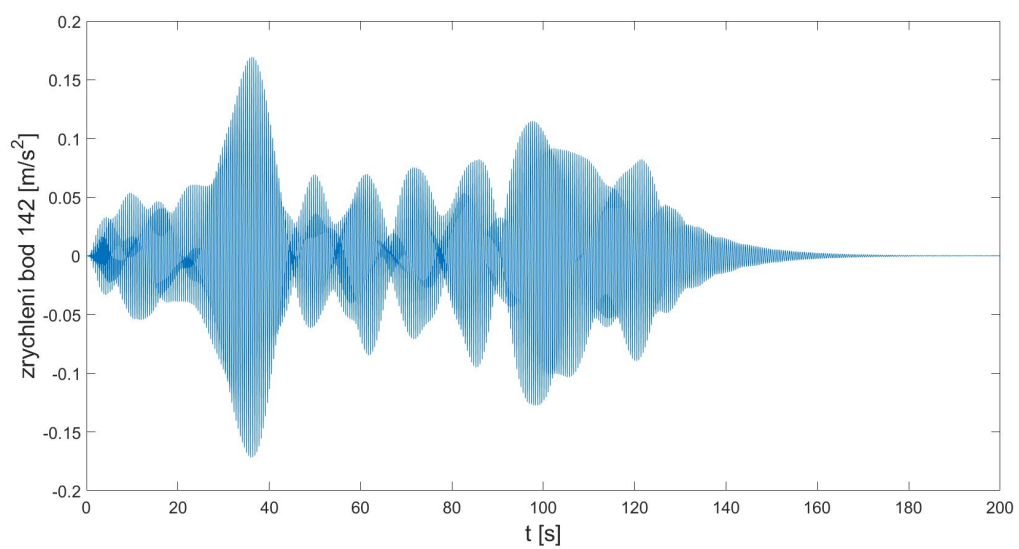
Obrázek 6.16: Zrychlení v bodě 22, model Charles and Hooprah



Obrázek 6.17: Zrychlení v bodě 22, model Bachmann



Obrázek 6.18: Zrychlení v bodě 142, model Charles and Hooprah



Obrázek 6.19: Zrychlení v bodě 142, model Bachmann

bod 22 - měřené $a_{\max} = 0.137 \text{ m/s}^2$		
autor modelu	vypočtené $a_{\max} [\text{m/s}^2]$	odchylka od měření [%]
samostatná pohybující se síla		
Blanchard	0.0475	-65.3
Bachman	0.0886	-35.3
Charles & Hooprah	0.0691	-49.6
Young	0.0867	-36.7
Schultze	0.0841	-38.6
pohybující se síla +SDOF		
Blanchard	0.0468	-65.8
Bachman	0.0865	-36.9
Charles & Hooprah	0.068	-50.4
Young	0.085	-38.0
Schultze	0.0836	-39.0
pohybující se síla +2DOF		
Blanchard	0.0506	-63.1
Bachman	0.0865	-36.9
Charles & Hooprah	0.0735	-46.4
Young	0.0895	-34.7
Schultze	0.0847	-38.2

Tabulka 6.5: Výsledky odezvy konstrukce při zatížení dvěma chodci - bod 22

bod 142 - měřené $a_{\max} = 0.312 \text{ m/s}^2$		
autor modelu	vypočtené $a_{\max} [\text{m/s}^2]$	odchylka od měření [%]
samostatná pohybující se síla		
Blanchard	0.113	-63.8
Bachman	0.173	-44.6
Charles & Hooprah	0.164	-47.4
Young	0.198	-36.5
Schultze	0.178	-42.9
pohybující se síla +SDOF		
Blanchard	0.111	-64.4
Bachman	0.171	-45.2
Charles & Hooprah	0.162	-48.1
Young	0.194	-37.8
Schultze	0.177	-43.3
pohybující se síla +2DOF		
Blanchard	0.121	-61.2
Bachman	0.1844	-40.9
Charles & Hooprah	0.176	-43.6
Young	0.211	-32.4
Schultze	0.191	-38.8

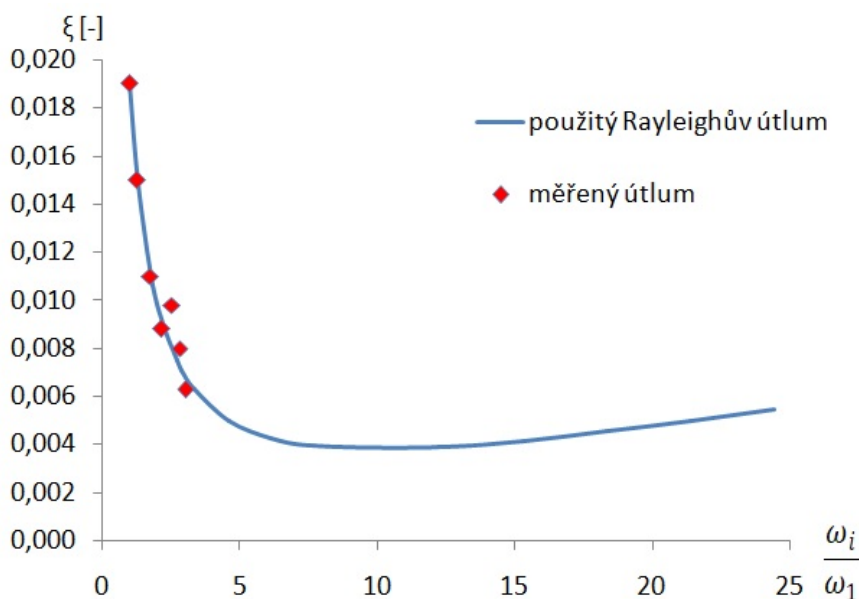
Tabulka 6.6: Výsledky odezvy konstrukce při zatížení dvěma chodci - bod 142

Z tabulek 6.5 a 6.6 je zřejmé, že při použití všech dostupných způsobů modelování chodce byla zjištěná zrychlení značně podhodnocena. U takto složité konstrukce na to může mít vliv mnoho faktorů. Ty lze rozdělit na dvě základní kategorie:

1. zjednodušení výpočetního modelu
2. model zatížení chodci

Některá zjednodušení, která bylo nutno přijmout pro vytvoření výpočetního modelu konstrukce, byla zmíněna v kapitole 6.3. Tyto vlivy by však vzhledem k identifikaci výpočetního modelu neměly mít takto velký vliv na odezvu konstrukce. Zároveň je v tab. 6.5 a 6.6 vidět, že pro jednotlivé modely vzniká velmi podobná chyba v obou vyhodnocovaných bodech. To znamená, že poměry vypočtených zrychlení v bodech 22 a 142 odpovídají poměrům zrychlení ze zatěžovací zkoušky. To značí správnost geometrie konstrukce a nalezeného osmého vlastního tvaru, jenž má na odezvě největší podíl.

Jednou z možností, která může mít velký vliv na odezvu, je nesprávně zvolený útlum. Pro dosažení co největší přesnosti byl použit Rayleighův útlum, kde je matice C sestavena jako lineární kombinace matic K a M . Na obr. 6.20 je vidět, že pro frekvence do 2,17 Hz je použitý model relativně výstižný. Pokud se však na odezvě konstrukce podílí i vyšší tvary kmitání s vyššími frekvencemi, není možné určit, zda jsou použité konstanty útlumu α a β zvoleny správně.



Obrázek 6.20: Použitý a měřený poměrný útlum

Odehlyky vyvolané nesprávně zvolenými parametry chodců mohou výsledky ovlivnit velmi výrazně. Nízká použitá tíha chodců G nebo příliš velká délka kroku l_s mohou mít značný vliv na podhodnocení odezvy. Pro získání přesnějších výsledků je nutná znalost těchto parametrů.

7 Výpočet odezvy na zatížení chodcem pomocí ustáleného kmitání

V této kapitole je vytvořena parametrická studie, jejímž cílem je najít vztah mezi DLM1, který je popsán v kap. 3.3.2 a modelem chodce jako síly pohybující se po konstrukci. Hlavní výhoda DLM1 je jeho jednoduchost a možnost řešení odezvy na zatížení chodcem pomocí ustáleného kmitání. Není tedy potřeba provádět analýzu v čase [1]. Nevýhoda tohoto řešení spočívá v nemožnosti zohlednění doby, po kterou je chodec na konstrukci. Tím může dojít k velkému nadhodnocení odezvy. Pro účely této kapitoly byl upraven výpočetní program vytvořený v kap. 4 tak, aby bylo možné provést výpočet odezvy pro více různých konstrukcí při jednom spuštění programu. Vzhledem k relativně vysoké rychlosti chodu programu (výpočet odezvy na pohybující se sílu pomocí Newmarkovy metody pro konstrukci v kap. 5 trvá cca 1-2 s) je možné provést větší množství výpočtů pro porovnání dvou výše zmíněných modelů zatížení.

7.1 Sestavení souboru nosníků

Pro automatické zadání i vyhodnocení většího množství konstrukcí je potřeba, aby byly geometricky velmi jednoduché a celá konstrukce byla definována jen pomocí několika parametrů. Kvůli tomu bylo rozhodnuto provést výpočet pro soubor prostých nosníků s jednou vlastní frekvencí rovnou 2 Hz. Jejich geometrii související s body, prvky a podporami je pak možné definovat pouze pomocí rozpětí l . Výběr jednotné frekvence 2 Hz byl zvolen ze dvou důvodů. Frekvence lidského kroku se pohybuje v okolí 2 Hz a pro zadání zatížení s frekvencí shodnou s jednou vlastní frekvencí konstrukce je potřeba tuto vlastní frekvenci nejdříve najít. Pokud mají všechny vygenerované konstrukce jednu z vlastních frekvencí stejnou, lze pro všechny výpočty odezvy použít stejný zatěžovací model.

Pro nastavení parametrů nosníků byl použit analytický vztah (7.1), pomocí kterého lze určit i -tou vlastní kruhovou frekvenci prostého nosníku.

$$\omega_i = \pi^2 i^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\mu l^4}} \quad (7.1)$$

Vyjádřením momentu setrvačnosti ze (7.1) získáme:

$$I_y = \frac{\mu l^4 \omega_i^2}{\pi^4 i^4 E} \quad (7.2)$$

Hmotnost na jednotku délky μ vyjádříme jako:

$$\mu = \rho A + \mu_{ad} \quad (7.3)$$

kde ρ je objemová hmotnost materiálu, A je plocha průřezu a μ_{ad} [kg/m] je přidaná hmotnost na jednotku délky.

Z výše uvedených rovnic je patrné, že při libovolné volbě ostatních parametrů lze určit I_y tak, že bude jedna z vlastních frekvencí nosníku rovna 2 Hz. Při použití obdélníkového průřezu je pak možné stanovit jeho šířku b a výšku h ze soustavy dvou rovnic (7.4) a (7.5) pro dvě neznámé b a h .

$$A = bh \quad (7.4)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (7.5)$$

Cílem této kapitoly je sestavení souboru nosníku se širokým rozpětí parametrů, aby bylo možné dále vyhodnotit jejich vliv na odezvu konstrukce. Některé z vygenerovaných konstrukcí jistě nemohou existovat jako stavby sloužící veřejnosti, ať již z hlediska MSP nebo MSU. To však neznamená, že nemohou být vytvořeny jako laboratorní či pouze matematický model. Všechny použité nosníky jsou uvažovány jako železobetonový trám s obdélníkovým průřezem. Výše uvedené parametry byly pro každý nosník vygenerovány náhodně s rovnoměrným rozložením v uvedených mezích:

- $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ - obvyklá objemová hmotnost betonu
- $E = 32 \text{ GPa}$ - modul pružnosti betonu C30/37
- $\omega_i = 12.5664$ - odpovídající kruhová frekvence pro $f_i = 2 \text{ Hz}$
- $l = 10\text{-}50 \text{ m}$ - Na mostech kratších než 10 m běžně nehrozí riziko nadměrného kmitání. Pro rozpětí $> 50 \text{ m}$ není vhodné uvažovat obdélníkový železobetonový trám jako hlavní nosný prvek.
- $A = 0,03\text{-}3 \text{ m}^2$ - od subtilního trámu např. $0,3 \times 0,1 \text{ m}$ až po velmi masivní průřez
- $\mu_{ad} = 0 - 300 \text{ kg/m}$
- $i = 1\text{-}3$ - nosník má jednu z prvních třech vlastních frekvencí rovnu 2 Hz
- $\xi = 0,008\text{-}0,02$ - poměrný útlum použitelný pro železobetonové lávky [22]

Aby se vygenerované konstrukce alespoň částečně blížily reálným stavbám, byly pro každý nosník vypočteny hodnoty b a h a zkontrolovány následující vlastnosti:

- $h > 0,1 \text{ m}$, $b > 0,1 \text{ m}$ - minimální výška a šířka průřezu
- $0,1 < h/b < 10$ - minimální a maximální poměr výšky a šířky průřezu

- $h/l < 0,1$ - nutný předpoklad pro získání dostatečně přesného výsledku i přes zanedbání smykových deformací
- $b/l < 0,5$ - při vyšším poměru b/l už by šlo spíše o deskovou konstrukci

Pokud vygenerovaný nosník jakoukoliv z těchto podmínek nesplňoval, nebyl připuštěn do výsledného testovacího souboru. Výpočet ukázal, že tyto podmínky častěji nesplnili nosníky s vyšším i - tedy konstrukce, u kterých byla požadována druhá nebo třetí vlastní frekvence 2 Hz. To vedlo k tomu, že nejčastěji byly ve výsledném souboru zahrnuty konstrukce s první vlastní frekvencí 2 Hz. Aby bylo tomuto nežádoucímu jevu zabráněno, byl výsledný soubor sestaven ze tří částí. Každá z nich byla vytvořena pro fixní i (1-3) a každá obsahuje 100 konstrukcí.

Vzhledem k tomu, že nevhodné nosníky nejsou vloženy do výsledného souboru, dochází k porušení rovnoměrného rozdělení některých parametrů, např. není možné vytvořit trám o délce 10 m, který by měl třetí vlastní frekvenci 2 Hz a zároveň splňoval výše uvedené podmínky. Pro zaplnění 300 míst ve vstupním souboru bylo potřeba otestovat cca 700 nosníků. Vzhledem k tomu, že zhruba každý druhý nosník splní požadované parametry, není třeba se obávat, že dojde k zásadnímu ovlivnění diverzity vygenerovaných konstrukcí.

7.2 Výpočet odezvy

7.2.1 Odezva na stacionární proměnnou sílu

Na každý ze 300 vygenerovaných nosníků byl aplikován DLM1. Nejdříve je nutné nalézt vlastní tvar, jehož frekvence je nejbližší 2 Hz. U všech konstrukcí podle parametru i víme, kolikátý tvar je třeba hledat. Následně je nalezena největší pořadnice ve svislém směru. V tomto místě je nosník zatížen harmonickou silou podle rovnice (7.6).

$$F_{p,v}(t) = 280 \sin(2\pi f_v t) \quad (7.6)$$

Odezva na zatížení je hledána jako ustálení kmitání. Pro tento účel byla použita dostupná Newmarkova metoda. Za dostatečně přesný odhad ustáleného kmitání byl považován stav, kdy se dva po sobě jdoucí výkmity zrychlení v bodě působení síly lišily o méně než 0,1 %. Pro tento stav bylo vyhodnoceno extrémní vertikální zrychlení a_{DLM1} .

7.2.2 Odezva na pohybující se sílu

Pro tuto část výpočtu bylo nutné vybrat jeden silový model chodce. Podle poznatků z kap. 5.4 byl vybrán model Charles-Hooprah s $G = 700$ N. V kap. 6 nebyla nalezena dostatečná shoda s výsledky zatěžovací zkoušky, proto nebyla zohledněna při výběru silového modelu chodce pro tuto kapitulu. Použitý model obsahuje pouze první Fourierův člen s koeficientem $\alpha_1 = 0,4$. Amplituda této složky zatížení $F_A = 0,4 \cdot 700 = 280$ N, je tedy shodná s amplitudou použité stacionární síly. Pro tento model byla použita délka kroku 0,75 m podle [6]. Pomocí Newmarkovy metody byl nalezen největší výkmit zrychlení a_{ped} na celé konstrukci v průběhu zatěžování.

7.3 Vyhodnocení

Pro určení vztahu mezi zrychlením získaným pomocí stacionární a pohyblivé síly byl pro každou konstrukci vypočten poměr těchto zrychlení C_{ped} .

$$C_{ped} = \frac{a_{ped}}{a_{DLM1}} \quad (7.7)$$

kde a_{ped} je největší výkmit zrychlení zjištěný při výpočtu pomocí pohybující se síly a a_{DLM1} je největší výkmit zrychlení vypočtený pomocí DLM1. Pokud koeficientem C_{ped} přenásobíme zrychlení získané pomocí DLM1, obdržíme přesnější výsledek vypočtený pomocí pohybující se síly. Pro stanovení vztahu mezi C_{ped} a parametry nosníku byla použita metoda nejmenších čtverců, pomocí které byly hledány koeficienty β_j k 11 bázovým funkcím b_j :

1. l - délka nosníku
2. μ - hmotnost na jednotku délky
3. I_y - moment setrvačnosti průřezu
4. μl - celková hmotnost konstrukce
5. $\frac{1}{l}$ - převrácená hodnota délky nosníku
6. $\frac{1}{\mu}$ - převrácená hodnota hmotnosti na jednotku délky
7. $\frac{1}{I_y}$ - převrácená hodnota momentu setrvačnosti
8. i - pořadí frekvence která je rovna 2 Hz
9. konstantní člen
10. ξ_1 - poměrný útlum první vlastní frekvence
11. $\frac{1}{\xi_1}$ - převrácená hodnota poměrného útlumu 1. vlastní frekvence

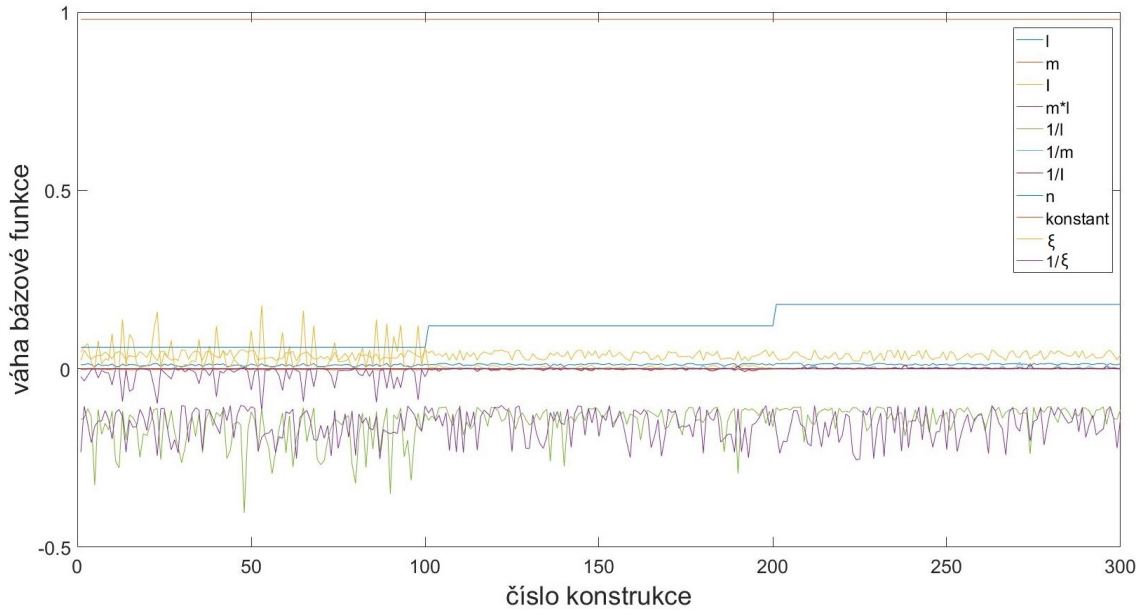
Výsledné řešení je pak nalezeno jako lineární kombinace těchto bázových funkcí ve tvaru:

$$C_{ped,app} = \sum b_j \beta_j \quad (7.8)$$

kde $C_{ped,app}$ je aproximace funkce C_{ped} . Koeficienty β_j byly získány vyřešením soustavy rovnic:

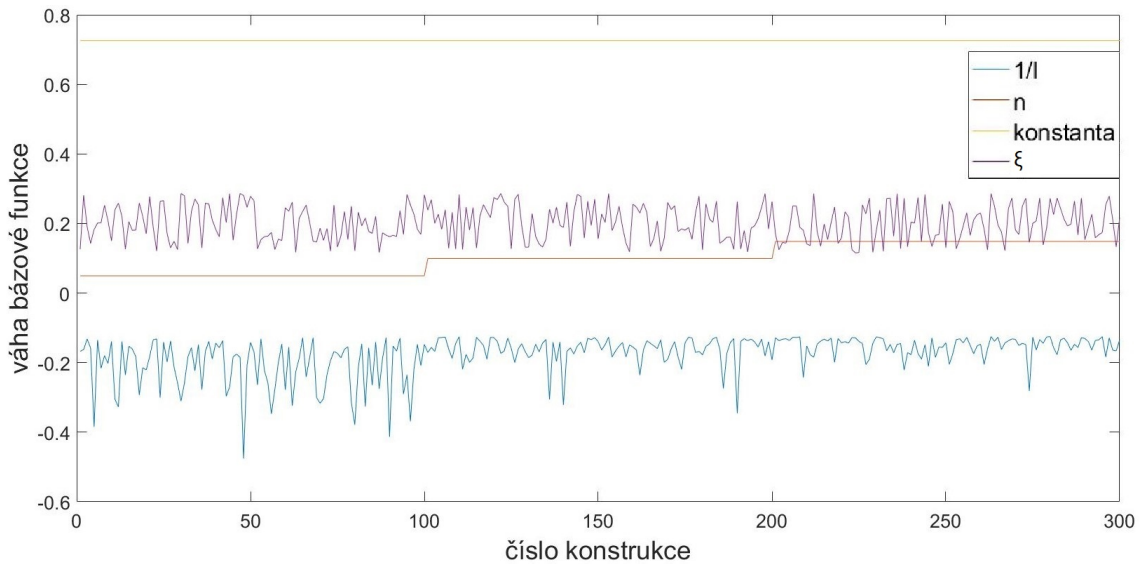
$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

ve které je $X_{ij} = \sum_{k=1}^{300} b_{i,k} b_{j,k}$ a $y_i = \sum_{k=1}^{300} b_{i,k} C_{ped,k}$ kde k značí pořadové číslo konstrukce.

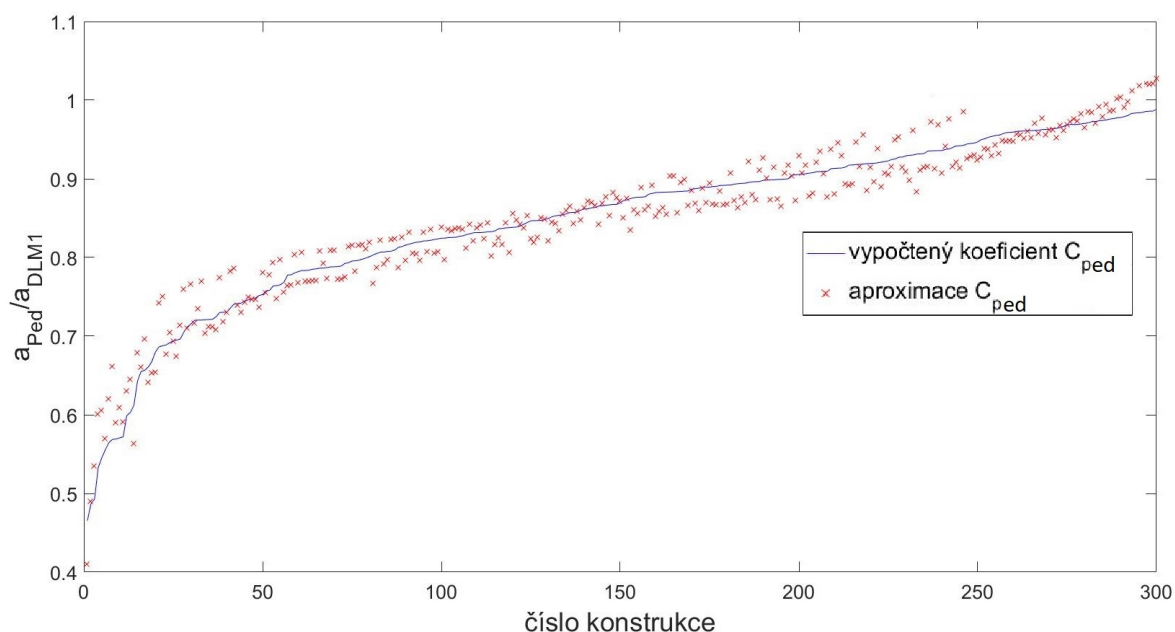


Obrázek 7.1: C_{ped} rozložený do příspěvků jedenácti funkcí b_i

Pokud by byl sestaven vzorec jako kombinace všech použitých funkcí b_i , musel by obsahovat 11 členů. Toto řešení je však nepraktické a pro ruční použití složité. Podle obr. 7.1 bylo rozhodnuto použít čtyři bázové funkce, které mají na řešení největší podíl. Těmi funkcemi jsou č. 5, 8, 9 a 10. Následně byla aproximace C_{ped} provedena znovu s využitím pouze těchto funkcí.



Obrázek 7.2: C_{ped} rozložený do příspěvků čtyř funkcí b_i



Obrázek 7.3: Vypočtený koeficient C_{ped} a jeho aproximace pomocí čtyř bázových funkcí

Na obr. 7.3 je pro přehlednost seřazen průběh koeficientu C_{ped} od nejmenší vypočtené hodnoty po největší. Každému bodu poté odpovídá jeden bod jeho aproximace bázovými funkcemi. Průměrná odchylka $\Delta_{C,ped}$ při této aproximaci vypočtená podle (7.10) je 2,3 %. Při uvážení všech ostatních nejistot simulování chodců bylo rozhodnuto, že jde o dostatečně nízkou nepřesnost.

$$\Delta_{C,ped} = \frac{\sum_{n=1}^{300} \frac{|C_{ped,calc,n} - C_{ped,app,n}|}{C_{ped,calc,n}}}{300} 100 \quad (7.10)$$

kde $C_{ped,calc,n}$ je vypočtený poměr zrychlení a $C_{ped,app,n}$ je jeho aproximovaná hodnota.

Výše uvedenou metodikou byl stanoven vztah pro odhad odezvy na zatížení jedním chodcem, pomocí kterého je možné odhadnout vertikální zrychlení na mostě, jehož statické schéma odpovídá prostému nosníku:

$$a_{ped} = C_{ped} a_{DLM1} \quad (7.11)$$

$$C_{ped} = \frac{-6,248}{l} + 0,0495i + 14,42\xi_1 + 0,726 \quad (7.12)$$

Díky výsledkům na obr. 7.3 lze říci, že DLM1 ve všech případech přeceňuje maximální výkmitu zrychlení. Zároveň pouze u jedné konstrukce bylo zaznamenáno přecenění hodnot více než dvojnásobné, proto je vhodné stanovit pro C_{ped} obor hodnot:

$$0,5 \leq C_{ped} \leq 1 \quad (7.13)$$

Význam jednotlivých složek bázových funkcí ve vzorci (7.12) lze vysvětlit následovně:

$\frac{1}{l}$ Čím delší most je, tím delší dobu na něm chodec působí. Na krátkých nosnících nemá pohyblivý model dostatek času na předání energie konstrukci. Proto je pro krátké nosníky vliv tohoto členu větší než pro dlouhé.

i Pořadí vlastní frekvence má pravděpodobně vliv zejména proto, že konstrukce, jenž mají vyšší vlastní frekvenci rovnou 2 Hz, jsou obvykle delší nebo velmi subtilní. Proto dojde k jejich rozkmitání snáze i při přechodu chodce, který je časově omezen.

ξ_1 Čím vyšší je poměrný útlum, tím kratší čas je potřeba k dosažení ustáleného kmitání a tím menší je rozdíl odezvy na pohyblivou a stacionární sílu.

Konstantní člen se uplatní díky výše uvedenému oboru hodnot.

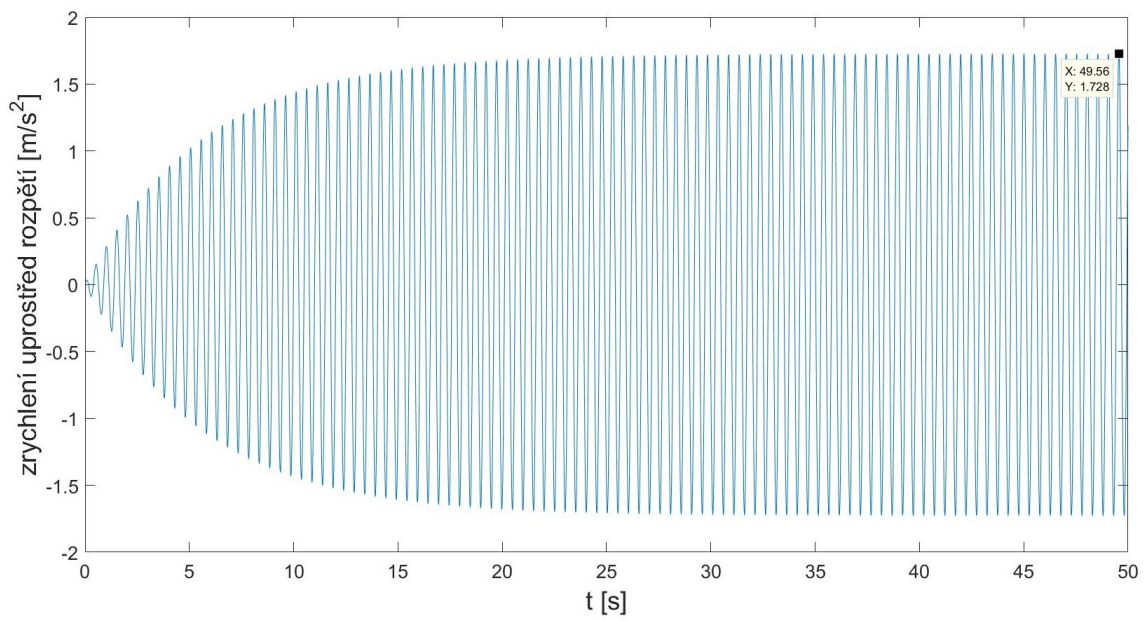
7.4 Ověření navrženého vztahu

Pro ověření metodiky stanovení odezvy na pohybující se sílu pomocí ustáleného kmitání a koeficientu C_{ped} byla použita konstrukce z kap. 4 s uzamčeným pohlcovačem kmitání. Od nosníků použitých ke stanovení vzorce pro výpočet C_{ped} se konstrukce v některých vlastnostech liší. V předchozí kapitole byly použity prosté nosníky, ke kontrole je použita konstrukce s krátkými převislými konci. Její průřez je ve tvaru T, nikoliv obdélníkový. Uprostřed konstrukce je zavěšen pohlcovač kmitání, který je simulován jako soustředěná hmota o hmotnosti 310 kg.

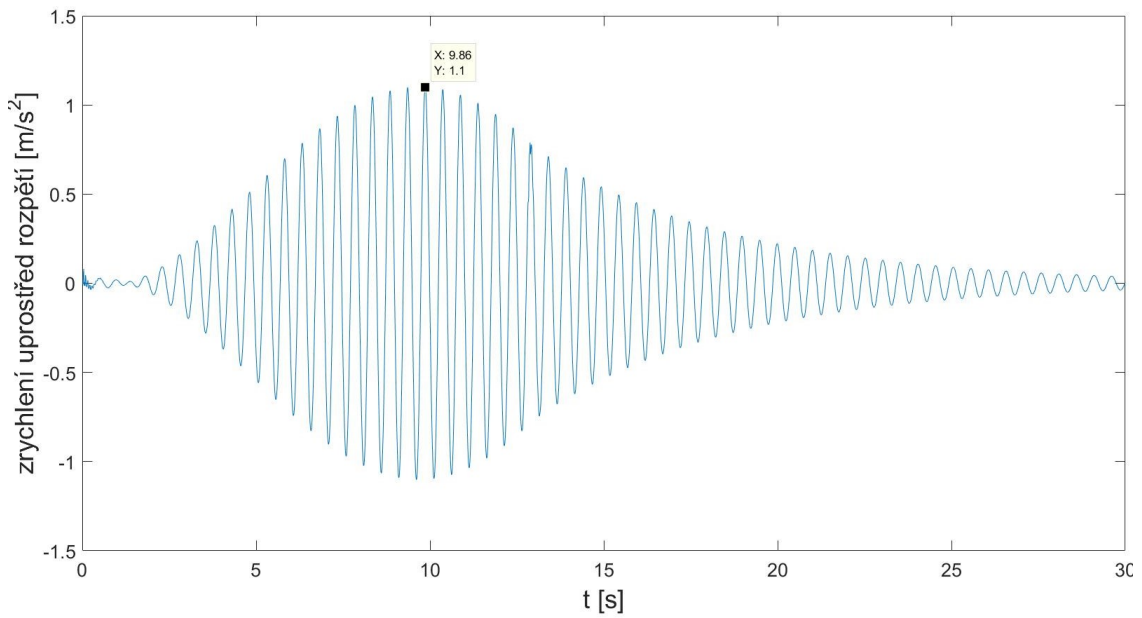
Při výpočtu odezvy konstrukce pomocí DLM1 je nalezena amplituda zrychlení při ustáleném kmitání způsobeného silou s amplitudou 280 N podle rovnice (3.4). Ta je umístěna uprostřed rozpětí nosníku. Frekvence této síly je shodná s první vlastní frekvencí konstrukce, tedy $f_1 = 1,9776$ Hz. Odpovídající zrychlení uprostřed rozpětí $a_{DLM1} = 1,73$ m/s².

K určení zrychlení při přechodu chodce (pohybujícího se silového modelu) byl použit model Charles-Hooprah s $G = 700$ N a délkou kroku 0,75 m. Tímto způsobem bylo zjištěno maximální zrychlení $a_{ped} = 1,1$ m/s².

Na obrázcích 7.4 a 7.5 je zobrazen průběh zrychlení uprostřed rozpětí pro oba výše zmíněné modely zatížení.



Obrázek 7.4: Odezva na DLM1



Obrázek 7.5: Odezva na pohybující se sílu

Podle (7.7) lze určit koeficient $C_{ped,calc}$:

$$C_{ped,calc} = \frac{a_{ped}}{a_{DLM1}} = \frac{1,1}{1,73} = 0.64 \quad (7.14)$$

Pokud bychom chtěli určit odezvu konstrukce na přechod chodce pouze pomocí ustáleného kmitání, museli bychom použít navržený vzorec (7.12) pro odhad C_{ped} :

$$\begin{aligned} C_{ped,app} &= \frac{-6,248}{l} + 0,0495i + 14,42\xi_1 + 0,726 \\ C_{ped,app} &= \frac{-6,248}{19} + 0,0495 * 1 + 14,42 * 0,0143 + 0,726 \\ C_{ped,app} &= 0.65 \approx C_{ped,calc} \end{aligned}$$

Tímto výpočtem byl ověřen navržený vztah pro výpočet odezvy na přechod jednoho chodce po prostém nosníku.

8 Závěr

V první části práce byla provedena rešerše používaných modelů chodců a způsobů stanovení odezvy na zatížení. Některé z těchto modelů byly dále použity pro výpočty v dalších částech této práce.

Pro potřeby výpočtu byl úspěšně vytvořen program, pomocí kterého bylo možné modelovat rovinné prutové konstrukce a provádět jejich dynamickou analýzu. Ta se skládala z modální analýzy a řešení odezvy na různé typy zatížení proměnné v čase, zejména výpočet odezvy na zatížení pohybující se po konstrukci

Na modelu předpjatého betonového nosníku byla vyhodnocena odezva na vybrané modely chodců včetně silových a biodynamických modelů s jedním i dvěma stupni volnosti. Z výsledků bylo zjištěno, že většina použitých pohyblivých silových zatížení dávala dostatečně přesné výsledky při porovnání s experimentem. Pouze model navržený Blanchardem výrazně podcenil odezvu konstrukce. Doplnění silového zatížení o vybraný biodynamický model s jedním stupněm volnosti nemělo na odezvu zásadní vliv. Při použití modelu s dvěma stupni volnosti bylo zjištěno výrazné zvýšení odezvy oproti samostatné pohybující se síle, které vedlo ve většině případů k nadhodnocení odezvy.

Pro analýzu lávky přes Labe v Čelákovících byl vytvořen její prutový model, na kterém bylo nalezeno osm prvních vlastních frekvencí a tvarů kmitání. Při porovnání s experimentem bylo zjištěno, že nalezené vlastní tvary a frekvence odpovídají měření s dostatečnou přesností. Dále byla vyhodnocena odezva na zatížení dvěma chodci, u které došlo ke značnému podcenění extrémních výkmitů zrychlení. To může být způsobeno zvolenými parametry modelů zatížení chodci nebo použitím zjednodušeného výpočetního modelu konstrukce.

V poslední kapitole byla vytvořena parametrická studie. V ní bylo pomocí analýzy 300 prostých nosníků s různými parametry zjištěno, že použití stacionární harmonické síly pro modelování jdoucí osoby vede ke značnému nadhodnocení odezvy. Dále byl sestaven vztah pro výpočet koeficientu, jehož pomocí je možné dosáhnout přesnějších výsledků odezvy při použití stacionární harmonické síly. Tento vzorec byl úspěšně ověřen na předpjatém nosníku z kapitoly 5. Navržený postup je z praktického hlediska velmi vhodný, neboť redukuje výpočet odezvy na zatížení chodcem na výpočet ustáleného harmonického kmitání.

Seznam obrázků

3.1	Kontaktní síla ve vertikálním a horizontálním směru [2]	5
3.2	Vertikální složka zatížení při chůzi a běhu [4]	6
3.3	Metodika návrhu lávky pro pěší [4]	8
3.4	Součinitel Φ [6]	9
3.5	a) součinitel k_v pro vertikální směr, b) součinitel k_h pro horizontální směr [6]	10
3.6	a) SDOF model chodce, b) 2DOF model chodce [9]	12
3.7	Převrácené kyvadlo [9]	13
3.8	Model pohybujícího se člověka [9]	14
4.1	Souřadnicový systém	16
4.2	Vzorová konstrukce č.1: a) uzel, b) vnitřní kloub, c) vetknutí, d) a e) posuvné klouby, f) pevný kloub, g) jiná podpora (např. posuvné vetknutí)	18
4.3	Vzorová konstrukce č.2: a) soustředěná hmota v uzlu, b) spojitá hmota na prutu, c) pružné spojení dvou bodů, d) umístění tlumiče označeného C1	18
4.4	Vzorová konstrukce č.3: první vlastní tvar rámové konstrukce	19
4.5	Číslování vygenerovaných uzlů pro trajektorii pohyblivého zatížení	19
4.6	Příklad použití biodynamického modelu [11]	26
5.1	Statické schéma [15]	29
5.2	Příčný řez [15]	29
5.3	Výpočetní model	31
5.4	První vlastní tvar	31
5.5	Průběh zatížení podle Bachmanna	32
5.6	Průběh zatížení podle Bachmanna, detail	32
5.7	Průběh zatížení, silový model Charles-Hooprah + SDOF	33
5.8	Průběh zatížení, silový model Charles - Hooprah + SDOF, detail	34
5.9	Průběh zatížení, silový model Charles-Hooprah + 2DOF	34
5.10	Vypočtený průběh výchylky uprostřed rozpětí, uzamčený pohlcovač	35
5.11	Vypočtený průběh zrychlení uprostřed rozpětí, uzamčený pohlcovač	35
5.12	Záznam z experimentu, uzamčený pohlcovač [15]	36
5.13	Vypočtený průběh výchylky uprostřed rozpětí, funkční pohlcovač	37
5.14	Vypočtený průběh zrychlení uprostřed rozpětí, funkční pohlcovač	37
5.15	Záznam z experimentu, funkční pohlcovače [15]	38
6.1	Schématický podélný řez [18]	41
6.2	Příčný řez mostovky [19]	41

6.3	řez ocelovým profilem pylonu v patě [19]	42
6.4	Průřez prutového prvku použitého v patě pylonu [20]	43
6.5	Výpočet horizontální tuhosti propojení pylonu	43
6.6	Statické schéma	44
6.7	1. vlastní tvar - $f_1 = 0,650$ Hz	46
6.8	2. vlastní tvar - $f_2 = 0,830$ Hz	46
6.9	3. vlastní tvar - $f_3 = 1,171$ Hz	46
6.10	4. vlastní tvar - $f_4 = 1,449$ Hz	46
6.11	5. vlastní tvar - $f_5 = 1,654$ Hz	46
6.12	6. vlastní tvar - $f_6 = 1,735$ Hz	47
6.13	7. vlastní tvar - $f_7 = 1,828$ Hz	47
6.14	8. vlastní tvar - $f_8 = 2,082$ Hz	47
6.15	Body pro vyhodnocení odezvy	49
6.16	Zrychlení v bodě 22, model Charles and Hooprah	49
6.17	Zrychlení v bodě 22, model Bachmann	49
6.18	Zrychlení v bodě 142, model Charles and Hooprah	50
6.19	Zrychlení v bodě 142, model Bachmann	50
6.20	Použitý a měřený poměrný útlum	52
7.1	C_{ped} rozložený do příspěvků jedenácti funkcí b_i	57
7.2	C_{ped} rozložený do příspěvků čtyř funkcí b_i	57
7.3	Vypočtený koeficient C_{ped} a jeho aproximace pomocí čtyř bázových funkcí	58
7.4	Odezva na DLM1	60
7.5	Odezva na pohybující se sílu	60

Seznam tabulek

3.1	Třída provozu [5]	7
3.2	Třída pohody chodců - limitní zrychlení [m/s^2] [5]	8
3.3	Vybrané modely chodců a jejich Fourierovy koeficienty[1]	11
4.1	Použité parametry biodynamických modelů	27
5.1	Parametry nosníku [15]	30
5.2	Parametry pohlcovače kmitání [15]	30
5.3	Výsledky výpočtů zrychlení s uzamčeným pohlcovačem kmitání	39
5.4	Výsledky výpočtů zrychlení s funkčním pohlcovačem kmitání	39
6.1	Parametry závěsů pro jeden pylon [21]	44
6.2	Použité průřezové charakteristiky	44
6.3	Srovnání vypočtených a měřených vlastních frekvencí	45
6.4	Vlastní frekvence a útlumy modelu použitého pro výpočet odezvy	48
6.5	Výsledky odezvy konstrukce při zatížení dvěma chodci - bod 22	51
6.6	Výsledky odezvy konstrukce při zatížení dvěma chodci - bod 142	51

Literatura

- [1] GRANDIĆ Štimac. *Serviceability verification of pedestrian bridges under pedestrian loading*. Tehnicki vjesnik - Technical Gazette, 2015.
- [2] MÁCA Jiří, *Dynamika stavebních konstrukcí 2 - Dynamika mostů a lávek pro pěší [přednáška]*. Praha: ČVUT [cit. 2017.12-05]
- [3] ČSN. *ČSN 73 6209 Zatěžovací zkoušky mostů*. Praha: ČNI, 1996.
- [4] Setra. *Footbridges - Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading*. Le Sétra appartient au Réseau Scientifique et Technique de l'Équipement, 2006.
- [5] ČSN EN. *ČSN EN 1991 Zatížení konstrukcí – Část 2: Zatížení mostů dopravou*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2005.
- [6] FIB Bulletin 32. *Guidelines for the design of footbridges*. Stuttgart: CEB, 2005.
- [7] ČSN EN. *ČSN P ENV 1995-2: Navrhování dřevěných konstrukcí - Část 2: Mosty*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 1998.
- [8] KALA, Jiří. *Kmitání mostní konstrukce vyvolané pohybem osob*, habilitační práce, Brno: VUT, 2009.
- [9] SHAHABPOOR E, PAVIC A, and RACIC V. *Interaction between Walking Humans and Structures in Vertical Direction: A Literature Review*. Hindawi Publishing Corporation, 2016.
- [10] ŠÁŇA, Vladimír. *Vibration of footbridges - humans structure interaction*. Ph.D. thesis. Praha: České vysoké učení technické, 2016.
- [11] CAPRANI C. C. *Characteristic Vertical Response of a Footbridge Due to Crowd Loading*. Leuven, Belgium: EuroDyn:8th. International Conference on Structural Dynamics, 4-6 July, 2011.
- [12] BITTNAR, Zdeněk a Petr ŘEŘIČHA. *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*. Praha: SNTL, 1981.
- [13] MÁCA Jiří, *Dynamika stavebních konstrukcí 2 - MKP v dynamice konstrukcí [přednáška]*. Praha: ČVUT [cit. 2017.12-08]

- [14] FELIPPA, Carlos A. *Introduction to Finite Elements Methods*. University of Colorado Boulder, USA, 2004.
- [15] ALESSANDRO, Dazio. *Fundamentals of Structural Dynamics*. An-Najah National University, 2013.
- [16] BITTNAR, Zdeněk a Jiří ŠEJNOHA. *Metoda konečných prvků 1*. Praha: České vysoké učení technické, 1991.
- [17] International Organization for Standardization (ISO). *Mechanical driving point impedance of the human body*. ISO 5982:1981, 1981.
- [18] POLÁK M. a PLACHÝ T. *Dynamická zatěžovací zkouška nově postavené lávky pro pěší a cyklisty přes Labe v Čelákovících*. Praha: České vysoké učení technické, 2014.
- [19] KVASNIČKA V. a POKORNÝ J. *Cyklistická stezka přes Labe v Čelákovících - statický výpočet*. Pontex, spol. s.r.o., 2013.
- [20] ŠTĚPÁNEK, Jan. *Dynamická analýza lávky pro pěší*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické, 2016
- [21] Redaelli Tecna S.p.A *full lockted coil strands*[online]. [cit. 2017-12.17]. Dostupné z: <http://www.redaelli.com/en/products/ropes/full-locked-coil-strands/full-locked-coil-strands/>
- [22] IRVINE, Tom. *Damping Properties Of Materials*, 2004, [online], [cit. 2017-12.22] Dostupné z: <https://syont.files.wordpress.com/2007/05/damping-properties-of-materials.pdf>
- [23] MARTENSSON, Anders and Martin NILSSON. *Dynamic Analysis of Pedestrian Load Models for Footbridges. Master's thesis*. Göteborg, Sweden: Chalmers University of technology, 2014.
- [24] BITTNAR, Zdeněk a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky1*. Praha: ČVUT, 1992.