



**FAKULTA
STAVEBNÍ
ČVUT V PRAZE**

VYUŽITÍ CFD PRO MODELOVÁNÍ SPOLUPŮSOBENÍ ŘADY PONOŘENÝCH PAPERKŮ

USE OF CFD FOR MODELLING OF A ROW OF SUBMERGED JETS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2018

AUTOR PRÁCE

Bc. Petr ŠPLÍCHAL

VEDOUCÍ PRÁCE

Ing. Petr SKLENÁŘ, Ph.D.



FAKULTA
STAVEBNÍ
ČVUT V PRAZE

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „*Využití CFD pro modelování spolupůsobení řady ponořených paprsků*“ vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Petra Sklenáře, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Praze dne: 5. ledna 2018

.....
Petr Šplíchal



FAKULTA
STAVEBNÍ
ČVUT V PRAZE

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych touto cestou poděkoval vedoucímu práce panu Ing. Sklenářovi, Ph.D. za jeho podnětné rady, věcné připomínky, poskytnutou literaturu, ochotu a trpělivost při psaní této práce.

V Praze dne: 5. ledna 2018

.....
Petr Šplíchal



Název práce: Využití CFD pro modelování spolupůsobení řady ponořených paprsků

Autor: Bc. Petr Šplíchal

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Vodní hospodářství a vodní stavby

Katedra: Katedra hydrauliky a hydrologie

Vedoucí práce: Ing. Petr Sklenář, Ph.D.

E-mailová adresa: Petr.Sklenar@cvut.cz

Abstrakt

Předložená diplomová práce svým obsahem navazuje na bakalářskou práci, která se věnovala modelování ponořeného turbulentního paprsku v oblasti plně vyvinutého turbulentního proudění. Oproti bakalářské práci je zde pozornost zaměřena na modelování oblasti jádra turbulentního paprsku včetně popisu vzájemného spolupůsobení paprsků ve formě řady ponořených turbulentních paprsků. Modelovaná osová vzdálenost ponořených paprsků vychází z návrhového rozměru přírubového spoje trysky, který rozměrově odpovídá reálně vyráběnému potrubí. Vnitřní tvar trysky má za účel eliminovat velikost hydrodynamických nestabilit na konkávní straně trysky a poskytovat téměř konstantní rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky. V první části této práce jsou shrnuty základní poznatky o turbulentním proudění včetně výčtu základních rovnic používaných pro modelování turbulentního proudění. Výklad je rozšířen i o popis použitých turbulentních modelů včetně popisu a rozdělení výpočetní sítě.

Klíčová slova: Vodní paprsek, řada vodních paprsků, vodní tryska, vícenásobné turbulentní paprsky, volná smyková turbulence, stěnová turbulence, mezní vrstvy turbulence, výpočetní dynamika tekutin (CFD), metoda *RANS* a *DES*, osově symetrické paprsky, kruhové paprsky, turbulentní modely *k-ε* Standard, *k-ω SST*, *DES (k-ω SST)*.



Title: Use of CFD for Modelling of a Row of Submerged Jets

Author: Bc. Petr Šplíchal

Study Programme: Civil Engineering

Branch of Study: Water Management and Water Structures

Department: Department of Hydraulics and Hydrology

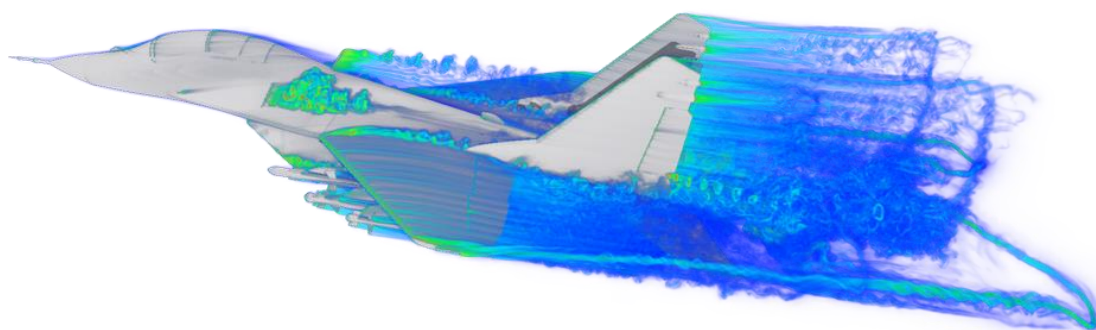
Supervisor: Ing. Petr Sklenář, Ph.D.

E-mail Address: Petr.Sklenar@cvut.cz

Abstract

The presented master's thesis builds on the bachelor thesis, which was devoted to modeling the submerged turbulent jet in the region of fully developed turbulent flow. In contrast to the bachelor thesis, attention is paid to modelling the region of the turbulent jet core including the description of the interaction of the jets in the form of a row of submerged turbulent jets. The model axial distance of the submerged jets is based on the design dimension of the flange connection of the nozzle, which corresponds to the dimension of the actually produced pipe. The inner shape of the nozzle is designed to eliminate the magnitude of hydrodynamic instabilities on the concave side of the nozzle and provide an almost constant velocity distribution across the nozzle orifice. In the first part of this work are summarized basic knowledge about turbulent flow including the enumeration of basic equations used for modeling of turbulent flow. The explanation is extended by the description of used turbulent models, including the description and division of the mesh.

Keywords: Water jet, row of water jets, water nozzle, multiple turbulent jets, free shear flows, wall-bounded flow, boundary layer, computational fluid dynamics (*CFD*), methods *RANS* and *DES*, axisymmetric jets, circular jets, turbulence models *k-ε* Standard, *k-ω SST*, *DES (k-ω SST)*.



Ukázka numerické simulace proudění podél stíhacího letounu [48]

„CFD (Computational Fluid Dynamics) je nástroj využívající počítače k simulacím chování systémů, které zahrnuje proudění tekutin, sdílení tepla a jiné doplňující procesy. Je založena na řešení rovnic mechaniky tekutin ve výpočtové oblasti se specifikovanými okrajovými, resp. počátečními podmínkami.“ [21]

OBSAH

1	STANOVENÍ CÍLŮ PRÁCE	11
2	ÚVOD	12
3	TURBULENCE	14
3.1	Definice turbulence	14
3.2	Vznik turbulence.....	14
3.2.1	Reynoldsov experiment.....	15
3.3	Vyvinutá turbulence	16
3.3.1	Kolmogorova teorie.....	16
3.4	Základní typy turbulence.....	18
3.4.1	Mezní vrstva	19
4	ZÁKLADNÍ SYSTÉM ROVNIC	23
4.1	Základní vztahy	23
4.1.1	Zákony zachování	23
4.2	Řešení turbulentního proudění	24
4.3	Středování pohybových rovnic	26
4.3.1	Reynoldsovo středování	26
4.3.2	Středované rovnice zachování hmotnosti a hybnosti	27
4.3.3	Rovnice pro turbulentní energii a rychlost disipace turbulentní energie	28
4.3.4	Způsoby uzavření Navier-Stokesových rovnic	28
4.4	Metoda Large Eddy Simulation	29
4.5	Hybridní RANS/LES metody	30
4.5.1	Metoda Detached Eddy Simulation.....	31
5	MODELÝ TURBULENTNÍHO PROUDĚNÍ	33
5.1	Dvourovnicové modely s turbulentní vazkostí	33
5.1.1	Dvourovnicové modely $k-\omega$	33
5.1.2	Dvourovnicové modelu $k-\epsilon$	35
5.2	Metoda DES založená na modelu $k-\omega$ SST.....	36
6	VÝPOČETNÍ SÍŤ	39
6.1	Typy výpočetní sítě	39
6.1.1	Klasifikace výpočetní sítě.....	40
6.1.2	Kvalita buněk výpočetní sítě.....	41
6.1.3	Výpočet prvního uzlu výpočetní sítě	42
6.2	Výpočetní síť pro metodu DES.....	43
6.2.1	Eulerův region	44

6.2.2	RANS region.....	44
6.2.3	LES region	44
6.3	Délka časového kroku.....	45
6.4	Interpolační schémata.....	46
7	TURBULENTNÍ PAPERKY	48
7.1	Ponořený kruhový paprsek.....	48
7.1.1	Pohybové rovnice	49
7.1.2	Integrální tvar rovnice hybnosti	50
7.1.3	Integrální tvar energetické rovnice	51
7.1.4	Hypotéza o strhávání tekutiny	52
7.1.5	Šířka paprsku	53
7.1.6	Reynoldsovo číslo	53
7.1.7	Základní oblasti ponořeného kruhového paprsku.....	54
7.1.8	Vzájemná podobnost proudění	56
7.1.9	Uniformní turbulentní vazkost	57
7.2	Vzájemné spolupůsobení paprsků.....	59
8	MODEL TRYSKY	61
8.1	Tryska	61
8.1.1	Pojem tryška a optimální tvar tryšky.....	61
8.2	Geometrie vnitřního tvaru tryšky.....	61
8.2.1	Görtlerova nestabilita.....	61
8.2.2	Návrh geometrie vnitřního tvaru kontrakce tryšky.....	62
8.3	Modelování tvaru tryšky.....	63
8.3.1	Vstupní podmínka rychlosti.....	63
8.3.2	Matematický model tryšky (prvotní návrh).....	64
8.3.3	Numerický model tryšky.....	66
8.3.4	Matematický model tryšky (druhotný návrh)	71
8.3.5	Vnitřní tvar kontrakce tryšky	72
9	MODELOVÁNÍ JÁDRA TURBULENTNÍHO PAPERKU.....	74
9.1	Model jádra paprsku (metoda RANS).....	74
9.1.1	Popis tvorby modelu.....	75
9.1.2	Zpracování výsledků modelu k- ϵ Standard a k- ω SST.....	75
9.2	Model jádra paprsku (metoda DES)	81
10	MODEL ŘADY PONOŘENÝCH TURBULENTNÍCH PAPERKŮ	87
10.1	Pozorování řady ponořených paprsků.....	87
10.2	Model řady paprsků	88

10.2.1	Základní popis modelu řady paprsků.....	89
10.2.2	Rozbor výsledků modelu řady paprsků	90
10.3	Model krajního paprsku	97
10.3.1	Základní popis modelu krajního paprsku	98
10.3.2	Rozbor výsledků modelu krajního paprsku	99
11	ZÁVĚR	101
12	SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN	106
13	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	110
14	SEZNAM OBRÁZKŮ	113
15	SEZNAM TABULEK A GRAFŮ	114
16	SEZNAM PŘÍLOH.....	115
17	VÝKRESOVÁ ČÁST	133

1 STANOVENÍ CÍLŮ PRÁCE

Diplomová práce nese označení „*Využití CFD pro modelování spolupůsobení řady ponořených paprsků*“ a svým obsahem navazuje na bakalářskou práci, jejímž tématem bylo „*Modelování ponořeného turbulentního paprsku*“.

V rámci bakalářské práce byly při tvorbě modelu ponořeného paprsku uplatněny jisté předpoklady, které se snaží tato diplomová práce dále rozvíjet. Konkrétně se jedná o předpoklad konstantního rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky a jednotně zvolenou počáteční hodnotu intenzity turbulence pro aplikované turbulentní modely. V rámci konstantního rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky byl navržen a optimalizován vnitřní tvar trysky a dále byly sestaveny modely jádra paprsku s různě zvolenou počáteční hodnotou intenzity turbulence.

Mezi hlavní cíle práce náleží souhrn základních přístupů v modelování turbulentního proudění včetně popisu aplikovaných turbulentních modelů, návrh a optimalizace (vnitřního) tvaru trysky, který má za účel poskytovat téměř konstantní rozdělení rychlosti po průřezu a minimalizovat velikost hydrodynamických nestabilit na konkávní straně trysky. Diplomová práce se dále snaží nalézt optimální velikost počáteční hodnoty intenzity turbulence pro aplikované turbulentní modely v souladu s experimentálními pozorováními vodních paprsků. Vedle poznatků uplatněných v rámci bakalářské práce, je zde věnována pozornost popisu vzájemné interakce mezi paprsky, které jsou umístěny v rámci jedné řady paprsků.

2 ÚVOD

Převážná většina případů proudění reálné tekutiny v přírodě a technických zařízeních je turbulentní. Totéž platí i pro proudění tekutiny v paprsku, kde se laminární proudění vyskytuje velice ojediněle, a proto lze proudění v paprsku považovat za turbulentní.

Ponožené turbulentní paprsky patří mezi často pozorovatelné příklady turbulentního proudění. Lze je pozorovat v přírodě, ale také v průmyslových aplikacích, jelikož se vyznačují významným přenosem hybnosti a výbornými difúzními vlastnostmi. Tyto vlastnosti bývají často multiplikovány spojením několika paprsků do skupin paprsků, tehdy dochází k vzájemnému spolupůsobení paprsků. Uspořádání několika vzájemně se ovlivňujících paprsků lze označovat jako skupinu paprsků. V případě, že jsou otvory (trysky), z nichž tekutina vytéká, umístěny v jedné linii, mluvíme o řadě paprsků. V opačném případě je skupina paprsků označována jako pole paprsků.

Z praktického hlediska je spojování paprsků do řady nebo pole paprsků poměrně časté, jelikož dochází k účinnému promíchávání dvou látek a k přenosu hybnosti, která odpovídá součtu dílčích hybností jednotlivých paprsků. Pole paprsků je možné pozorovat uvnitř lopatek turbín, kde napomáhají k jejímu ochlazení. Řada paprsků nachází uplatnění např. ve vzduchotechnice, energetice, ale i ve vodním stavitelství, např. při plnění plavební komory, kde proti sobě obvykle vystupují dvě řady ponořených paprsků. Při detailním pozorování světa kolem nás lze nalézt mnoho dalších aplikací pole či řady ponořených turbulentních paprsků.

Motivací pro sepsání této diplomové práce bylo navázat na bakalářskou práci, která vycházela z několika předpokladů, které byly uplatněny při tvorbě modelu ponořeného turbulentního paprsku. Konkrétně se jednalo o předpoklad konstantního rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky a jednotně zvolenou počáteční hodnotu intenzity turbulence pro veškeré tehdy použité dvourovnicové turbulentní modely. Vzhledem k častému skládání turbulentních paprsků do řady, je věnována pozornost vzájemné interakci řady ponořených paprsků. Posledním významným faktorem, který se snažila předložená práce reflektovat, byla snaha o využití náročnějšího přístupu v řešení turbulentního proudění (metoda *DES* založená na turbulentní modelu *k- ω SST*), jako možného pokračovatele *RANS* modelů z hlediska předpokládaného nárůstu výpočetní kapacity počítačů a vyššími nároky na přesnost simulace.

Práce je rozdělena celkem do sedmnácti kapitol. První a druhou kapitolu tvoří *stanovení cílů práce* a *úvod*. Posledních sedm kapitol je věnováno *závěru*, *seznamu použitých veličin*, *literatury*, *obrázků*, *tabulek*, *grafů*, *příloh* a závěrečné kapitoly věnované *výkresové části*, v níž jsou uvedeny výkresy návrhového tvaru trysky a její grafická prezentace. Práce je dále doplněna o funkce („manuál“), které byly sestaveny v rámci rozboru výsledků modelování trysky a ponořeného turbulentního paprsku.

Zbylé kapitoly zaměřují svůj výklad na:

Kapitola 3: Tato kapitola se věnuje základnímu popisu turbulentního proudění a uvádí základní poznatky o turbulentním proudění, které jsou využity v následujícím textu.

Kapitola 4: Jedná se o kapitolu orientovanou na výčet základních rovnic zákonů zachování, které jsou uplatněny v metodě *CFD*.

Kapitola 5: Kapitola věnovaná popisu použitých modelů turbulentního proudění, které byly použity pro řešení problematiky spolupůsobících turbulentních paprsků včetně návrhu trysky a modelování jádra paprsku.

Kapitola 6: Tato kapitola se věnuje skladbě, klasifikaci, tvorbě a posuzování kvality výpočetní sítě. Vzhledem k vyšším nárokům na výpočetní síť pro metodu *DES* je v této kapitole věnována speciální pozornost popisu výpočetní sítě pro tuto metodu (detailnější rozbor jednotlivých modelovaných oblastí). V závěru této kapitoly jsou uvedena základní interpolační schémata, jakožto významný parametr ovlivňují přesnost a stabilitu řešení.

Kapitola 7: Svým výkladem soustředí pozornost na popis ponořeného turbulentního paprsku včetně výčtu základních pohybových rovnic. Dále je zde uvedeno univerzální rozdělení rychlostí v paprsku a na konci kapitoly je popsán princip „skládání“ řady paprsků podle *Reichardtovy induktivní teorie turbulence*.

Kapitola 8: Kapitola spočívá v návrhu tvaru trysky a jeho postupné optimalizaci pomocí sestaveného matematického modelu a modelu *k- ω SST*. Výsledky modelu *k- ω SST* jsou následně implementovány do matematického modelu, resp. do jeho druhé verze (druhotný návrh). Výsledkem této kapitoly je návrh tvaru trysky, který poskytuje téměř konstantní rozdělení rychlosti po průřezu a minimalizuje velikost hydrodynamických nestabilit na konkávní straně trysky.

Kapitola 9: Tato kapitola se zabývá modelováním jádra turbulentního paprsku s ohledem na volbu velikosti počáteční hodnoty intenzity turbulence s ohledem na modelovanou délku jádra paprsku v rámci použitého turbulentního modelu (modely *k- ϵ Standard* a *k- ω SST*). Dále je v této kapitole sestaven model jádra paprsku pomocí kombinace dvou metod *RANS* a *DES*, které jsou založeny na turbulentním modelu *k- ω SST*.

Kapitola 10: Kapitola věnovaná modelování nekonečně dlouhé řady paprsků a modelování krajního paprsku řady paprsků. Návrhová hodnota intenzity turbulence je zvolena na základě výsledků z předešlé kapitoly pro aplikovaný model *k- ϵ Standard* a rozdělení rychlosti v ústí trysky je modelováno jako konstantní.

3 TURBULENCE

3.1 Definice turbulence

Navzdory dlouhotrvajícímu zkoumání turbulence nelze jednoznačně stanovit přesnou matematickou definici, co je turbulentní proudění. Obecně lze říci, že turbulentní proudění je takové proudění, které je neuspořádané v prostoru a čase. Nicméně tato definice není dostačující, a proto je turbulence vyjadřována pomocí seznamu vlastností (atributů), kterými jsou [45]

- *Náhodnost* – Malé náhodné poruchy v daném počáteční čase jsou zesilovány do té míry, až se stává jakákoliv deterministická předpověď nemožná,
- *Difuzivita* – Transportované skalární veličiny jsou promíchávány podstatně rychleji, než je tomu při molekulární difúzi,
- *Spektrum měřítek* – Vírové struktury vznikající v turbulentním proudovém poli jsou popisovány pomocí široké škály měřítek. Velikost největších měřítek je omezena fyzikálními parametry proudění. Největší délková měřítka postupně přebírají kinetickou energii proudu a předávají ji prostřednictvím kaskádového procesu (energetické kaskády) menším měřítkům. Při nejmenších měřítcích se vyskytují velké třecí síly (vazká napětí) a dochází k přeměně kinetické energie na teplo,
- *Prostorovost* – Turbulentní vírové struktury se nalézají na náhodných místech s náhodnou orientací v prostoru,
- *Disipativnost* – Jedná se o disipativní proces, tj. kinetická energie pohybu tekutiny je disipována na úrovni malých vírů a přeměněna na teplo,
- *Nelinearita* – Turbulentní proudění je svou podstatou nelineární. Jeho samotný vznik je podmíněn uplatněním nelinearit, kdy dochází k nárůstu malých poruch,
- *Vířivost* – S turbulentním prouděním souvisí vysoké lokální hodnoty vířivosti $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, kde je \mathbf{u} vektor rychlostního pole. Obecně lze pole vířivosti považovat za nehomogenní a s časem se dynamicky měnícím. Vírové struktury jsou označovány jako *koherentní víry*, popř. *koherentní struktury*. Koherentní struktury jsou struktury v proudu tekutiny, které navzdory chaotické povaze turbulentního proudění vykazují jistou pravidelnost.

Z výše uvedených vlastností vyplývají i některé další vlastnosti, jež jsou v nich implicitně obsaženy a určité závěry týkající se velikosti některých bezrozměrných charakteristik. Podrobnému popisu turbulentního proudění se věnují [45], [19] a [31].

3.2 Vznik turbulence

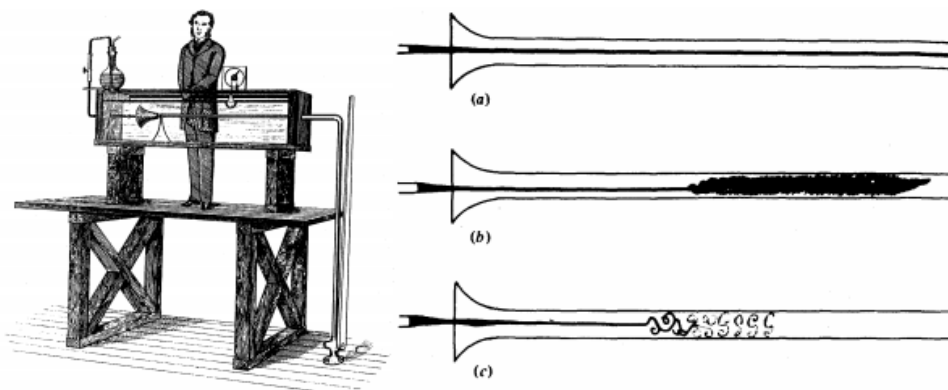
Přechod z laminárního režimu proudění na turbulentní režim lze pozorovat v různých typech smykových oblastí při narůstající rychlosti proudění. Proces přechodu režimů počíná vznikem

nestability systému vzhledem k určitému druhu poruchy. Vzhledem k povaze tekutiny jsou v proudící tekutině velice malé poruchy všech typů přítomny vždy, jelikož se sestává z velmi velkého počtu částic (molekul). [45]

Ztráta stability laminárního proudění má za následek produkci pravidelných vírových struktur a jejich postupný nárůst. Z počátku se nárůst vírových struktur jeví jako lineární, avšak posléze dochází ke stále většímu uplatňování nelinearit. V jisté fázi dochází ke vzniku chování, které je typické pro nelineární systémy, tj. ke vzniku deterministického chaosu. Po homogenizaci v prostoru dochází k ukončení procesu přechodu do turbulentního režimu proudění. [45]

3.2.1 Reynoldsův experiment

Osborne Reynolds ve svém článku (doslovný překlad): *Experimentální vyšetřování okolností určujících, zda pohyb bude přímý nebo sinusoidní a zákony odporu v přímých korytech* (*Transactions of Royal Society London, 1863*) odhalil existenci dvou různých režimů proudění (laminární a turbulentní režim).



Obr. 3.1 Reynoldsův experiment [45]

Schéma tohoto experimentu je patrné na **obr. 3.1**. Reynolds při svém experimentu dospěl k následujícím závěrům [45]

- Pokud je rychlost proudění dostatečně nízká, proužek barviva vytváří téměř dokonalou přímou čáru uvnitř potrubí (**obr. 3.1(a)**),
- Pokud není v zásobníku voda dokonale klidná, proužek se při stále nízké rychlosti proudění může pohybovat v potrubí, nevytvářejí se však pravidelné poruchy,
- Při zvyšování rychlosti proudění v postupně malých krocích dochází v určitém místě potrubí, avšak dostatečně vzdáleném od vtoku, k náhlému promíchání barviva a k rovnoměrnému obarvení tekutiny v celém průřezu potrubí (**obr. 3.1(b)**). Další zvyšování rychlosti vede k přibližování bodu „zhroutení“ blíže ke vtoku, nikdy jej však nedosáhne. Při osvětlení oblasti zhrouteného proudění je patrná soustava více či méně zřetelných vírů různé velikosti (patrné na **obr. 3.1(c)**).

Z Reynoldsova experimentu vyplývá, že přechod z laminárního režimu na turbulentní je možné popsat pomocí bezrozměrného parametru, který udává poměr sil *setrvačných* a *vazkých*. Označujeme jej jako Reynoldsovo číslo, pro které platí

$$Re = \frac{uL}{\nu}, \quad (3.1)$$

kde u je rychlost proudění, L hydraulický rozměr proudění a ν je kinematická vazkost tekutiny. Z laboratorních měření vyplývá, že kritická hodnota Reynoldsova čísla pro přechod z laminárního režimu proudění na turbulentní je přibližně $Re_{crit} \cong 2000$.

3.3 Vyvinutá turbulence

3.3.1 Kolmogorova teorie

Z Richardsonova popisu turbulence vyplývá, že turbulentní proudění obsahuje pohyby široké škály měřítek, tj. sada vírů různé velikosti, které spolu navzájem spolupůsobí. Víry jsou tedy základním stavebním prvkem proudového pole. Kolmogorov roce 1941 poskytl fundamentální článek, který matematicky popisuje Richardsonovu představu o energetické kaskádě. Kolmogorova teorie (označovaná jako $K41$) vychází ze třech hypotéz, tj. *hypotéza lokální izotropie*, *první a druhá podobnostní hypotéza*.

Hypotéza lokální izotropie se věnuje popisu vírů malých měřítek. Vychází z předpokladu, že největší víry mohou dosahovat zhruba velikosti smykové oblasti proudění $\mathcal{L} = L$. Topologie těchto vírů je anizotropní a je dána konkrétními okrajovými podmínkami. Při přenosu energie směrem k malým měřítkům dochází k postupnému nárůstu izotropie malých měřítek. [39]

Kolmogorova hypotéza lokální izotropie: „Při dostatečně vysokých Reynoldsových číslech jsou pohyby malých měřítek $\ell \gg \ell_0$ staticky izotropní“ (ℓ_0 představuje střední velikost energetických vírů).

Následně bude zavedeno vírové měřítko, které tvoří hranici mezi malými izotropními víry a velkými neizotropními víry, jenž bude označeno jako ℓ_{EI} . V oblasti malých izotropních vírů $\ell < \ell_{EI}$ převládají dva mechanismy transportu energie, kterými jsou *přenos energie od velkých měřítek k menším* a *vazká disipace*. Rozhodujícími parametry těchto procesů je kinematická vazkost ν a rychlost přenosu energie \mathfrak{S}_{EI} od velkých měřítek menším. Při ustáleném stavu je možné považovat rychlost disipace ε rovnu rychlosti produkce $\varepsilon = \mathfrak{S}_{EI}$.

Kolmogorova první podobnostní hypotéza: „V turbulentním proudu při dostatečně vysokých Reynoldsových číslech mají statistiky pohybů malých měřítek ($\ell < \ell_{EI}$) univerzální tvar a závisí pouze na délkovém měřítku ℓ , kinematické vazkosti ν a rychlosti disipace ε .

Z této hypotézy vyplývá, že energetické spektrum $E(\kappa)$ má univerzální tvar, jenž závisí na ν a ε . [39]

Z rozměrové analýzy je možné na základě rychlosti disipace ε a kinematické vazkosti ν jednoznačně určit hodnoty výsledných „Kolmogorových měřítek“. Délkové η , rychlostní u_η a časové Kolmogorovo měřítko τ_η můžeme definovat pomocí následujících výrazů

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.2)$$

$$u_\eta \equiv (\varepsilon \nu)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.3)$$

$$\tau_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

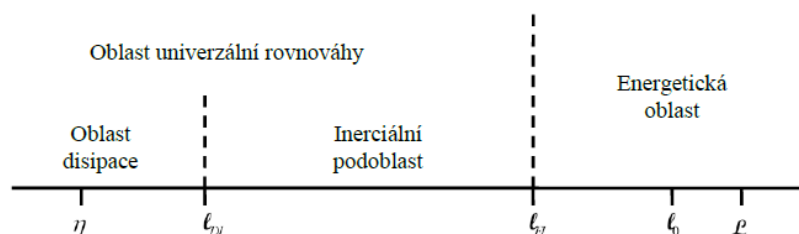
Z výše uvedených výrazů rov. (3.2), (3.3) a (3.4) vyplývají dva základní poznatky:

- Reynoldsovo číslo vycházející z Kolmogorových parametrů je jednotkové, tj. $\eta u_\eta / \nu = 1$,
- Pomocí výrazů rov. (3.2) a rov. (3.4) je možné vyjádřit rychlost disipace jako

$$\varepsilon = \frac{\nu^3}{\eta^4} = \frac{u_\eta^4}{\nu} = \frac{\nu}{\tau_\eta^2}. \quad (3.5)$$

Druhá Kolmogorova podobnostní hypotéza: „V každém turbulentním proudění při velmi vysokém Reynoldsově čísle směřujícím do nekonečna mají pohyby turbulentních měřítek ℓ (platí pro $\ell_0 \gg \ell \gg \eta$) univerzální tvar a jsou závislé pouze na rychlosti disipace ε a nikoliv na kinematické vazkosti tekutiny ν .

Následně zavedeme měřítko ℓ_{DI} (přibližná velikost $\ell_{DI} = 60\eta$) [45], které rozděluje oblast *univerzální rovnováhy* na dvě podoblasti: *inerciální podoblast* ($\ell_{EI} > \ell > \ell_{DI}$) a *oblast disipace* ($\ell < \ell_{DI}$). Druhá Kolmogorova hypotéza je platná na intervalu $\ell_{EI} > \ell > \ell_{DI}$. Zbývající oblastí je tzv. *energetická oblast* $\mathcal{L} > \ell > \ell_{DI}$, jež je oblastí největších vírů.

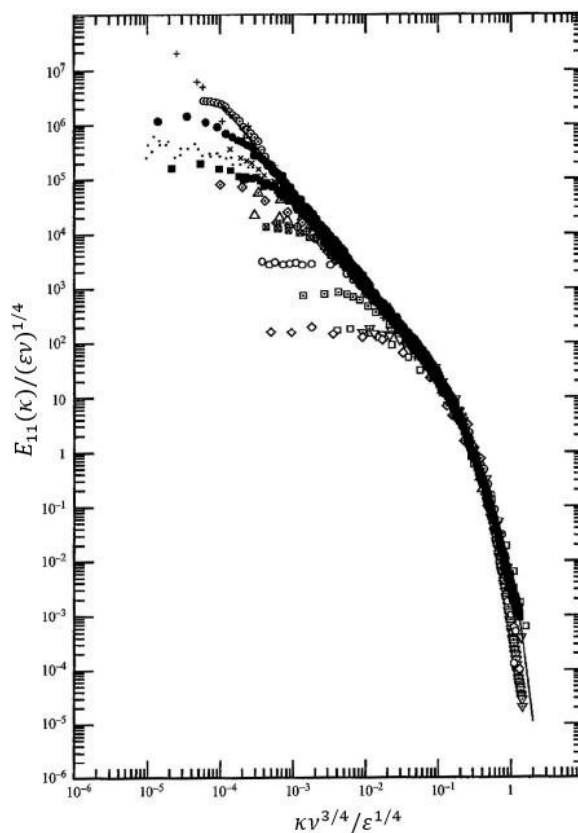


Obr. 3.2 Oblasti délkových měřítek podle Kolmogorova [45]

Pomocí Kolmogorových hypotéz je možné získat tvar energetického spektra $E(\kappa)$ turbulentního proudění pro pohyby středního měřítka ve tvaru

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (3.6)$$

kde C_K je Kolmogorova konstanta, pro kterou platí $C_K \approx 1,50$ a κ je vlnové číslo, které je možné učit pomocí výrazu $\kappa = \pi/L$, kde L je vlnová délka. Rov. (3.6) je známá jako *Kolmogorův spektrální zákon* nebo *-5/3 spektrum*.



Obr. 3.3 Podélné energetické spektrum turbulence určené na základě mnoha pozorování v laboratoři [42]

POZN.: Velikost Kolmogorova délkového měřítka η v turbulentním paprsku je možné určit na základě známé velikosti Reynoldsova čísla (uvažováno $L \propto d = 0,03$ m). Kolmogorovo měřítko lze spočítat pomocí následující formulace

$$\frac{L}{\eta} \sim \left(\frac{u L}{\nu} \right)^{\frac{3}{4}} = Re^{\frac{3}{4}}. \quad (3.7)$$

Pro návrhovou hodnotu Reynoldsova čísla ($Re = 1,5 \cdot 10^5$) odpovídá velikost Kolmogorova délkového měřítka hodnotě

$$\eta \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ [m]}. \quad (3.8)$$

3.4 Základní typy turbulence

Turbulentní proudění lze dále rozlišovat na dva základní typy, kterými jsou *volné smykové proudění (free shear flow)* a *proudění podél pevných stěn (wall-bounded flow)*.

Mezi volné smykové proudění řadíme *paprsky tekutiny, směšovací vrstvy a úplavy* za tělesa. Označení „volné“ znamená, že se jedná o proudění v dostatečné vzdálenosti od stěny, aby nedocházelo k ovlivnění turbulentního proudu.

Druhým typem je proudění podél pevných stěn, ve kterém dochází vlivem přítomnosti tečných napětí v tekutině ke vzniku *mezní vrstvy*.

3.4.1 Mezní vrstva

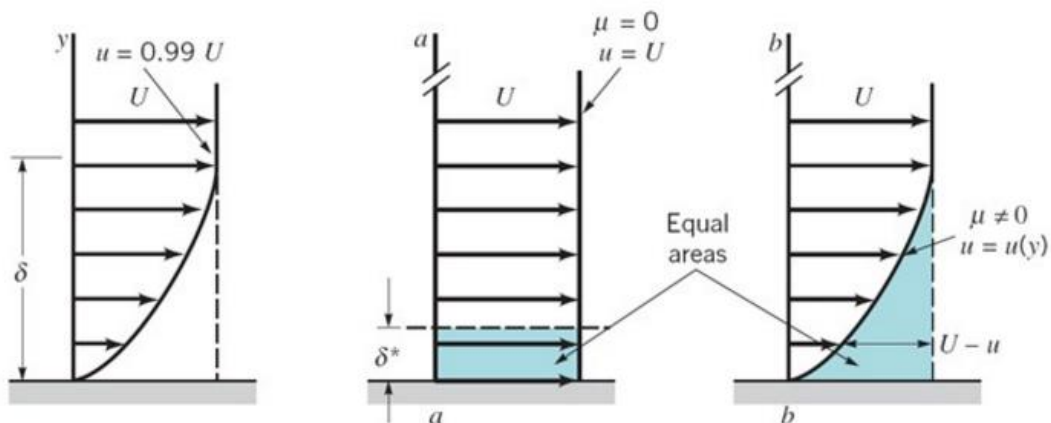
Při proudění tekutiny v oblasti podél pevné stěny dochází vlivem vazkosti tekutiny k ulpívání molekul na povrchu nehybné stěny (rychlost molekul tekutiny je na povrchu stěny nulová). Příčinou této vlastnosti proudění je tenká vrstva tekutiny v blízkosti obtékaného povrchu (stěny), ve které dochází ke změně rychlosti z nulové rychlosti (na povrchu tělesa) na hodnotu rychlosti ve volném proudu v dostatečné vzdálenosti od obtékané stěny. Tato vrstva je v praxi označována jako *mezní vrstva (boundary layer)*, protože se vyskytuje na okraji (hranici) proudění.

Pošinovací tloušťka mezní vrstvy δ^ (displacement thickness)* – vzdálenost, o kterou je třeba posunout obtékanou stěnu kolmo na její normálový vektor za předpokladu, že hustota a rychlost vnějšího proudu nabývají konstantních hodnot.

Pošinovací tloušťka mezní vrstvy pro nestlačitelné proudění je určena výrazem

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy, \quad (3.9)$$

kde je $u(y)$ lokální rychlost a U_e rychlost ve vnějším proudu.



Obr. 3.4 Tloušťka mezní vrstvy δ a pošinovací tloušťka mezní vrstvy δ^* [20]

Impulzová tloušťka mezní vrstvy θ (momentum thickness) – reprezentuje tloušťku, která je určena tak, aby úbytek hybnosti částic reálné tekutiny v mezní vrstvě vyrovnal hybnost částic dokonalé tekutiny protékající mezi rychlostním profilem ideální tekutiny posunutým o θ a skutečným rychlostním profilem (reálné tekutiny).

Impulzová tloušťka mezní vrstvy pro nestlačitelné proudění je dána výrazem

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u(y)}{U_e} \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy, \quad (3.10)$$

kde je $u(y)$ lokální rychlost a U_e rychlost ve vnějším proudě.

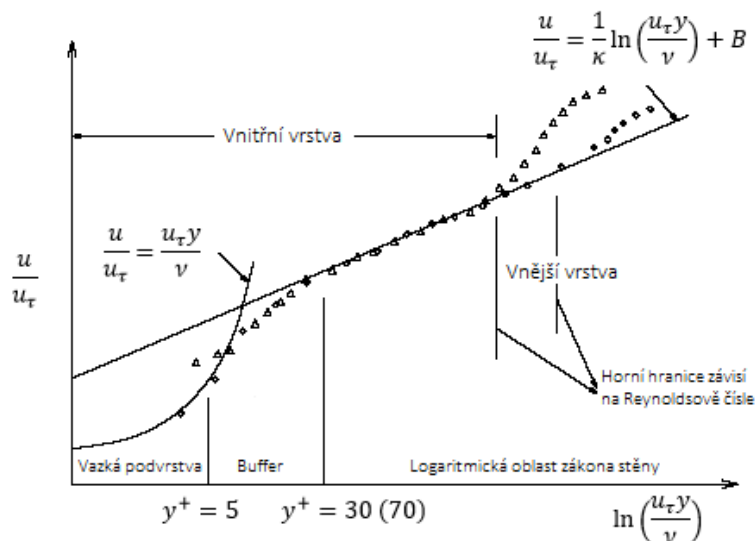
Tvarový parametr H (shape factor) – je bezrozměrný parametr mezní vrstvy, který udává poměr pošinovací a impulzové tloušťky mezní vrstvy, tj.

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}. \quad (3.11)$$

Tvarový parametr popisuje, do jaké míry je rychlostní profil zaplněn.

3.4.1.1 Rozdělení rychlosti v turbulentním proudění

Turbulentní rychlostní profil se skládá z různých (pod)vrstev, které se vyznačují různou tloušťkou, rozdílným režimem proudění a tvarem rychlostního profilu. Konkrétně se jedná o *vazkou (pod)vrstvu*, *přechodovou (pod)vrstvu (buffer)* a *logaritmickou (pod)vrstvu*, ve které se nachází již plně rozvinuté proudění a zabírá převážnou část turbulentního rychlostního profilu.



Obr. 3.5 Turbulentní rychlostní profil [3]

Na tvar rozdělení rychlosti v turbulentním režimu proudění má rozhodující vliv drsnost obtékaného povrchu, která je reprezentována součinitelem tření λ . Vzájemné spolupůsobení proudění v mezní vrstvě a velikost výstupků ovlivňují režim tření, při kterém závisí na velikosti výstupků, tj. do jaké vzdálenosti mezní vrstvy dosahují, rozlišujeme:

- *Hydraulicky hladké potrubí* – velikost výstupků na vnitřní straně potrubí je menší, než je tloušťka vazké (laminární) podvrstvy. Proudění uvnitř vazké podvrstvy je laminární, z čehož vyplývá, že tření je viskózní a závislé pouze na hodnotě Re .

- *Proudění v přechodové oblasti* – velikost výstupků zasahuje do přechodové oblasti. K obtékání výstupků na vnitřní straně potrubí dochází v laminárním režimu proudění (vazká (pod)vrstva) a turbulentním režimu proudění (přechodová (pod)vrstva). Tření závisí na Re a Δ/D .
- *Hydraulicky drsné potrubí* – velikost výstupků na vnitřní straně potrubí zasahuje až do logaritmické oblasti a zamezují existenci vazké podvrstvy. K obtékání výčnělků dochází pouze v turbulentním režimu proudění a tření závisí pouze na relativní drsnosti potrubí Δ/D .

Thloušťky jednotlivých (pod)vrstev se snižují s rostoucí rychlostí proudění. Thloušťky jednotlivých vrstev jsou určovány pomocí bezrozměrné souřadnice (ve formě Reynoldsova čísla) $y^+ = (U_\tau y)/\nu$. Thloušťka vazké podvrstvy dosahuje $y^+ \leq 5$, následuje přechodová oblast $5 < y^+ \leq 30$ (70), na kterou navazuje logaritmická oblast $70 < y^+ \leq 10^3$ (10^5).

Součinitel tření pro hydraulicky hladká potrubí může být určen pomocí Prandtl-Kármánovy rovnice jako

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right), \text{ kde } 4 \cdot 10^3 < Re < 10^8. \quad (3.12)$$

Součinitel tření pro přechodovou oblast lze stanovit na základě Colebrook-Whiteovy rovnice

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3,71D}\right), \text{ kde } Re > 4 \cdot 10^3. \quad (3.13)$$

Součinitel tření pro hydraulicky drsná potrubí pomocí je určen podle Nikuradseho výrazu

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\Delta}{3,71D}\right), \text{ kde } Re > 4 \cdot 10^3. \quad (3.14)$$

Univerzální rozdělení rychlostí v logaritmické oblasti zákona stěny

Na základě Prandtlovy hypotézy o směřovací délce a von Kármánovy teorie laminární podvrstvy je možné získat rovnici popisující logaritmické rozdělení rychlosti v horní části mezní vrstvy. Detailní odvození rovnice pro rozdělení rychlosti v logaritmické oblasti lze nalézt v [26].

Rozdělení rychlosti v logaritmické oblasti zákona stěny pro *hydraulicky hladkou stěnu* nabývá tvaru

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B \quad (3.15)$$

a pro *hydraulicky drsnou stěnu*

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\Delta}\right) + B_s, \quad (3.16)$$

kde u^+ je bezrozměrná rychlost vyjádřená jako podíl bodové rychlosti u vůči třecí rychlosti u_τ , κ je von Kármánova konstanta, Δ velikost výstupků na vnitřní straně potrubí, B konstanta pro hydraulicky

hladká potrubí, B_S pro hydraulicky drsná potrubí a y je svislá souřadnice bodu rychlostního profilu v logaritmické oblasti zákona stěny. [26]

Třecí rychlost je veličina vyjadřující smykové napětí na stěně potrubí v jednotce rychlosti a lze ji vyjádřit z definice součinitele ztráty třením jako

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} v_m, \quad (3.17)$$

kde v_m je střední průřezová rychlost a λ je součinitel tření. Srovnáním rovnic pro hydraulicky drsnou stěnu a hydraulicky hladkou stěnu obdržíme předpis rovnice univerzálního zákona rozdělení rychlosti pro turbulentní proudění ve tvaru [26]

$$u^+ = 2,5 \ln(y^+) + B_{universal}, \quad (3.18)$$

kde $B_{universal}$ je univerzální konstanta, která platí pro hladkou ($\Delta = 0$ m) i drsnou stěnu a lze ji vyjádřit ve tvaru [26]

$$B_{universal} = B + \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_\tau \Delta}{\nu}\right), \quad (3.19)$$

kde B je konstanta pro hydraulicky hladkou stěnu ($B = 5,45$).

POZN.: Pro odvození rychlostního profilu turbulentního proudění v hydraulicky hladkém potrubí můžeme využít Blasiovu rovnici pro součinitel ztrát třením ve tvaru

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (3.20)$$

Dosažením rovnice pro třecí rychlost do Blasiovu rovnice a následnými úpravami při využití empirického předpokladu, že střední průřezová rychlost v turbulentním proudění odpovídá 80% maximální bodové rychlosti, je možné získat rovnici 1/7nového zákona rozdělení rychlosti ve tvaru [26]

$$\frac{u}{u_\tau} = 8,74 \left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right)^{1/7}. \quad (3.21)$$

Mocninné rovnice (Blasius) pro součinitel ztráty třením a rozdělení rychlostí po průřezu je možné bezpečně použít pro proudění v potrubí o $Re < 10^5$ [26].

4 ZÁKLADNÍ SYSTÉM ROVNIC

4.1 Základní vztahy

Okamžitý stav proudící vazké stlačitelné tekutiny lze popsat pomocí složek rychlosti u_i a základními termodynamickými veličinami, kterými jsou statický tlak p , hustota ρ a teplota tekutiny T . energii tekutiny je možné vyjádřit pomocí vnitřní energie $e = c_v T$ nebo entalpie $h = c_p T = e + p/\rho$, případně je možné využít celkovou vnitřní energii proudící tekutiny $E = e + 1/2 u_i u_i$ nebo celkovou entalpii $H = h + 1/2 u_i u_i$. Proudění vazké skutečné tekutiny je obecně popsáno *základními zákony zachování*.

4.1.1 Zákony zachování

Systém základních zákonů zachování je dán následujícími rovnicemi:

1. Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (4.1)$$

2. Zákon zachování hybnosti (Navier-Stokesovy rovnice)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (4.2)$$

kde τ_{ij} je tenzor vazkých napětí a veličina f_i představuje vnější objemové síly (v dalším výkladu nebude uvažován vliv vnějších objemových sil).

3. Zákon zachování energie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho H u_j) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (4.3)$$

Případně je možné vyjádřit zákon zachování energie proudící tekutiny pomocí entalpie h jako

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho h u_j) = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (4.4)$$

kde $\tau_{ij} \partial u_i / \partial x_j$ je disipační funkce, která vyjadřuje disipaci energie vlivem vazkosti. Veličina q_j reprezentuje tok tepla, jenž lze na základě podle Fourierova zákona určit pomocí rovnice

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (4.5)$$

kde λ je součinitel tepelné vodivosti.

4.2 Řešení turbulentního proudění

V zásadě existují dva způsoby řešení turbulentního proudění, kterými jsou *experiment* (fyzikální model) a *numerická simulace* (matematický model).

Fyzikální model představuje model tekutiny, pro nějž je vytvořeno numerické řešení proudění, z čehož vyplývá, že modelová aproximace má pro fyzikální model hmotný charakter. Sestavení fyzikálního modelu bývá složité, drahé a v mnoha případech obtížně proveditelné, jelikož je potřeba zachovávat mj. *dynamickou podobnost* s realitou. [32]

Matematický model obsahuje numerickou metodu řešení parciálních diferenciálních rovnic, tj. převedení parciálních diferenciálních rovnic na soustavu algebraických rovnic (např. metoda konečných prvků, popř. metoda konečných objemů), tvorbu výpočetní sítě, volbu numerického schématu a zadání okrajových podmínek řešení. [32]

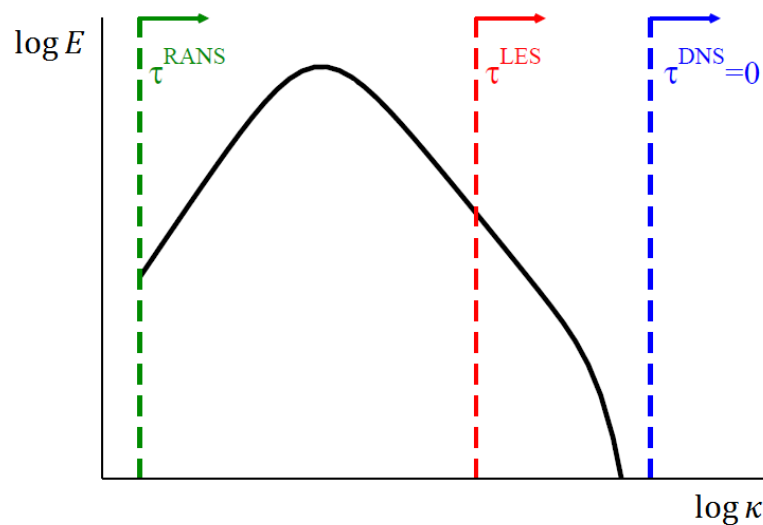
Rovnice, ze kterých jsou matematické modely odvozeny, vychází ze základních zákonů zachování. Při aplikaci pohybových rovnic, doplněných stavovou rovnicí a konstitučními vztahy na laminární případ proudění, lze obdržet *uzavřenou* soustavu rovnic. Zatímco řešení turbulentního případu proudění je poněkud složitější vzhledem k okolnosti, že jednotlivé proměnné (složky rychlosti, tlaku, teploty a hustoty) reprezentují okamžité hodnoty náhodných nestacionárních veličin. K obdržení řešení turbulentního proudění je nutné jisté veličiny vhodně aproximovat.

Implementace veškerých metod využívaných v turbulenci vychází z použití metod numerické matematiky (provádí se diskretizace v prostoru a v čase). V současnosti máme k dispozici pro řešení Navier-Stokesových rovnic celkem tři metody. Konkrétně se jedná o přímou numerickou simulaci (*Direct Numerical Simulation – DNS*), Reynoldsovu formulaci pro řešení středních polí (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations – RANS*) a kombinaci obou přístupů (*Large Eddy Simulation – LES*).

Přímá numerická simulace podává přesný průběh sledované veličiny. Výsledky této metody lze považovat za ekvivalentní experimentům. Přímou numerickou simulaci je možné použít, pokud je úloha charakterizovaná jednoduchou geometrií, Reynoldsovo číslo je dostatečně nízké a počítač dostatečně výkonný. Při nárůstu Reynoldsova čísla se prudce zvyšuje počet diskretizovaných prvků a současně se snižuje velikost časového kroku. Výpočet turbulentního proudění na základě metody *DNS* je extrémně náročný na výkon výpočetní techniky a trvá velmi dlouho.

Metoda simulace velkých vírů je založena na myšlence filtrování Navier-Stokesových rovnic. Při procesu filtrování dochází k rozdělení vírových struktur na dvě části, vírové struktury větší než daná mezní velikost filtru a menší vírové struktury. Jelikož jsou turbulentní víry malých měřítek izotropní je pro ně obecně snazší nalézt univerzální model, jsou modelovány pomocí *subgridních modelů*. V metodě *LES* tedy dochází k řešení velkých vírů a je možné aplikovat hrubší výpočetní sítě, než je

tomu v případě metody *DNS*, avšak oproti metodě *RANS* je výpočetní síť pro metodu *LES* mnohem jemnější a výpočet je mnohem náročnější.



Obr. 4.1 Idealizované spektrum turbulentní kinetické energie izotropní turbulence vzhledem k vlnovému číslu κ a znázornění, jaké množství k je řešeno přímo resp. modelováno [17]

Důvody pro použití metody *LES* lze shrnout v následujících poznámkách:

- Hmoty, hybnost a kinetická energie jsou převážně transportovány prostřednictvím velkých vírů,
- Velké víry jsou více časově závislé. Jsou dány geometrií proudění a okrajovými podmínkami na oblasti proudění,
- Malé víry jsou méně závislé na geometrii, mají větší sklon k izotropii a je pro ně snazší nalézt univerzální model.

Mezi nevýhody metody *LES* se řadí významné nároky na jemnost výpočetní sítě v blízkosti stěny ve všech směrech prostoru. Tomuto nedostatku se snaží předcházet hybridní modely *RANS/LES*.

Třetí možností řešení turbulentního proudění je tzv. statistický přístup, jenž spočívá podle Reynoldse v rozdělení okamžitých hodnot nestacionárních veličin na *střední* a *fluktuální* část, dále v řešení pohybových rovnic pro střední hodnoty závisle proměnných (středování rovnic). Problémem Navier-Stokesových rovnic je neuzavřenost systému, kdy je počet neznámých veličin vyšší než počet rovnic. Modely turbulence, založené na statistickém přístupu podle Reynoldse, jsou semi-empirické výrazy, které umožňují popsat vztahy mezi středními veličinami proudového pole a korelacemi jejich fluktuací. Tyto modely obsahují velké množství empirických konstant a jejich použití není univerzální pro jakýkoliv typ turbulentního proudění. Daný typ modelů turbulence se dále rozděluje do dvou podskupin.

První podskupinu tvoří modely založené na analogii mezi molekulárním a turbulentním přenosem hybnosti, tzv. Boussinesqově hypotéze. Druhou podskupinu tvoří modely turbulence založené na modelování Reynoldsova napětí. Konkrétně se jedná o modely *RSM* (*Reynolds Stress Models*) a jejich zjednodušení *ARSM* (*Algebraic Reynolds Stress Models*).

Problematika uzavření systému středovaných Navier-Stokesových rovnic pomocí Boussinesqovy hypotézy, podle níž se tenzor Reynoldsových turbulentních napětí τ_{ij} vyjádří analogicky k tenzoru vazkých napětí zavedením turbulentní vazkosti μ_t . Pokud je pro stanovení turbulentní vazkosti použito pouze algebraických výrazů, jedná se o *nularovnicové* (též *algebraické*) *modely*. Při využití algebraických výrazů doplněných o diferenciální rovnici získáme *jednorovnicové modely*. Pokud budou použity dvě diferenciální rovnice, bude se jednat o *dvourovnicové modely*.

Navzdory rozvoji metod přímé numerické simulace a simulace pohybu velkých vírů je statistický přístup, založený na řešení středovaných Navier-Stokesových rovnic, nejčastěji používaným způsobem řešení turbulentního proudění.

4.3 Středování pohybových rovnic

4.3.1 Reynoldsovo středování

Jak již bylo zmíněno, řešení turbulence spočívá ve statistickém přístupu, který rozděluje okamžité velikosti hodnot turbulentních veličin na *střední hodnotu* a *fluktuaci*. Jelikož je turbulence náhodný proces, jsou jednotlivé složky turbulentního proudění náhodné funkce času. Tři nejrelevantnější formy středování turbulentního proudění jsou středování *souboru hodnot*, *prostorové* a *časové* středování.

Středování souboru hodnot je nejobecnějším případem středování. Pro vybraný náhodný interval obdržíme jednu realizaci náhodného procesu – *výběrovou funkci*, přičemž náhodný proces je množinou všech výběrových funkcí. Středováním celkového počtu N náhodných funkcí lze získat střední hodnotu náhodné veličiny

$$F_E(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x_i, t). \quad (4.6)$$

Pro homogenní turbulenci je možné použít *prostorové středování*, ve kterém je turbulentní proudění v průměru jednotné ve všech směrech. Středování probíhá skrze prostorové souřadnice

$$F_V(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint f(x_i, t) dV. \quad (4.7)$$

V případech, kdy střední hodnota není závislá na volbě počátečního času t , jedná se o *ergodický stacionární proces*, jenž je pro střední hodnoty stacionární. Střední hodnotu je možné určit *časovým středováním* jedné výběrové funkce podle času

$$F_T(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} f(x_i, t) dt. \quad (4.8)$$

Za účelem obdržení středovaných pohybových rovnic pro turbulentní proudění dochází k náhradě okamžitých turbulentních veličin pohybových rovnic jejich středními a flukтуаčními hodnotami. Při použití *Reynoldsova středování* lze pro složky rychlosti psát

$$u_i(x_i, t) = U_i(x_i) + u_i'(x_i, t), \quad (4.9)$$

kde U_i je střední hodnota rychlosti a u_i' střední hodnota fluktuace rychlosti. Časově středovaná složka rychlosti U_i lze vyjádřit na základě rov. (4.8) jako

$$U_i(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} u_i(x_i, t) dt. \quad (4.10)$$

Časově středovaná složka rychlosti odpovídá střední hodnotě rychlosti, tj.

$$\bar{U}_i(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} U_i(x_i) dt = U_i(x_i). \quad (4.11)$$

Časově středovaná složka fluktuace rychlosti je rovna nule. Fluktuace rychlosti lze vyjádřit jako

$$\bar{u}_i'(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} [u_i(x_i, t) - U_i(x_i)] dt = U_i(x_i) - \bar{U}_i(x_i) = 0. \quad (4.12)$$

4.3.2 Středované rovnice zachování hmotnosti a hybnosti

Pro zjednodušení bude zaveden předpoklad, že vyšetřovaná tekutina je *nestlačitelná* ($\rho = konst.$). Při nahrazení okamžitých hodnot v rov. (4.1) a (4.2) součtem středních hodnot a fluktuací získáme středované rovnice zachování hmotnosti a hybnosti ve tvaru

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.13a,b)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'})..$$

Oproti původním Navier-Stokesovým rov. (4.2) obsahují středované Navier-Stokesovy rovnice na pravé straně člen obsahující Reynoldsova napětí $\overline{u_i' u_j'}$, jejichž fyzikální interpretací je průměrný tok hybnosti ve směru „i“ spojený s flukтуаčním pohybem ve směru „j“ anebo naopak. Reynoldsova napětí tedy představují sílu na jednotku plochy spojenou s přenosem hybnosti flukтуаčním rychlostním polem proti vazkým napětím, která představují sílu, spojenou s transportem hybnosti v molekulárním měřítku. Rovnice (4.13a,b) je označována jako *Reynoldsova středovaná Navier-Stokesova rovnice*. Tenzor Reynoldsových napětí je symetrický tenzor, jenž obsahuje šest nezávislých komponentů. Při

řešení obecného případu turbulentního trojrozměrného proudění obdržíme celkem deset neznámých charakteristik (jedna složka tlaku, tři složky rychlosti a šest složek tenzoru Reynoldsova napětí). Jelikož máme pouze čtyři rovnice (rovnice zachování hmotnosti a tři rovnice zachování hybnosti), nelze daný systém rovnic považovat za *uzavřený*.

4.3.3 Rovnice pro turbulentní energii a rychlost disipace turbulentní energie

Turbulentní kinetickou energii lze vyjádřit jako

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2_1} + \overline{u'^2_2} + \overline{u'^2_3}). \quad (4.14)$$

Rychlost disipace turbulentní energie je pro nestlačitelné proudění dána vztahem

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}. \quad (4.15)$$

4.3.4 Způsoby uzavření Navier-Stokesových rovnic

Pro získání řešení turbulentního proudění tekutiny pomocí středovaných Navier-Stokesových rovnic je nezbytné uzavřít soustavu pohybových rovnic pomocí modelu turbulence, jenž do jisté míry vychází z empirických poznatků o turbulentním proudění. Soustavu pohybových rovnic je možné uzavřít pomocí aproximace Reynoldsova napětí (modely turbulence 1. řádu) nebo aproximace neznámých výrazů v transportní rovnici pro Reynoldsova napětí (modely turbulence 2. řádu).

Rozlišují se celkem dvě skupiny statistických modelů turbulence. Do první skupiny patří modely vycházející z podobnosti mezi molekulárním a turbulentním přenosem hybnosti. Boussinesq navrhl analogicky k Newtonovu třecímu zákonu vyjádřit turbulentní napětí obdobně jako vazké napětí zavedením přídatné turbulentní vazkosti ν_t . Pro dvourozměrnou nestlačitelnou mezní vrstvu platí

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4.16)$$

V obecném případě turbulentního proudění závisí Reynoldsovo napětí na tenzoru rychlosti deformace S_{ij} , jenž nabývá tvaru

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.17)$$

Obdobného tvaru nabývá i tenzor rychlosti rotace

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.18)$$

Turbulentní napětí je poté možné definovat pomocí výrazu

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (4.19)$$

kde k reprezentuje turbulentní kinetickou energii. Hypotéza vychází z představ o podobnosti mezi molekulárním přenosem hybnosti a turbulentním, jenž je ovšem zprostředkováván turbulentním víry mnohem větších rozměrů, než je velikost molekul tekutiny. Aplikací turbulentní vazkosti dochází k nahrazení neznámé velikosti turbulentního napětí.

Do druhé skupiny řadíme modely turbulence založené na řešení transportních rovnic pro složky Reynoldsova napětí. V těchto rovnicích se nacházejí další neznámé korelace turbulentních veličin, pro něž je možné odvodit exaktní transportní rovnice. Při využití tohoto způsobu nelze dosáhnout uzavření soustavy rovnic a je nezbytné neznámé korelace v jistém stupni vhodně aproximovat.

4.4 Metoda Large Eddy Simulation

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, metoda *LES* je založena na procesu filtrování. Při aplikaci prostorového filtru $G = G_{\Delta_f}$ na veličinu ϕ dochází k „vyhlazení“ této veličiny u měřítek turbulentního proudu menších, než je velikost filtru Δ_f . Oproti metodě *RANS* dochází v metodě *LES* k nahrazení členu nelineární konvekce v transportní rovnici členem τ_{ij}^{LES} . Šířka filtru Δ_f potom nabývá funkce parametru modelu obvykle označovaného jako Δ .

Filtrovanou hodnotu veličiny ϕ získáme jako *konvoluci* (matematický operátor zpracovávající dvě funkce) s jádrem filtru jako

$$\hat{\phi}(x_i, t) = (G * \phi)(x_i, t) = \int G(r, x_i) \phi(x - r, t) dr, \quad (4.20)$$

kde G je jádro filtru, které splňuje podmínku

$$\int G(r, x_i) dr = 1. \quad (4.21)$$

Poměr mezi šířkou filtru Δ_f a krokem výpočetní sítě je obvykle roven jedné nebo jako celé malé číslo. Délka kroku výpočetní sítě je parametrem modelu, který odděluje měřítka filtru, proto τ_{ij}^{LES} je obvykle označován jako *subgrid-scale (SGS) model*. Cílem $\Delta \sim \Delta_g$ je dosáhnout maximální schopnosti výpočetní sítě rozlišit měřítka turbulentního spektra na základě implicitně zadaného filtru. Pokud platí $\Delta \sim \Delta_g$, *SGS* model vymizí a simulace se promění na *DNS*.

Základní myšlenkou *LES* je řešení většiny turbulentní kinetické energie proudu k a disipace energie ε je modelována. Toto rozlišení je možné, jelikož k je určena pohyby turbulentních vírů velkých měřítek, zatímco ε je určena turbulentních vírů malých měřítek.

Parametr Δ je možné stanovit několika způsoby, přičemž nejčastěji se pro metodu *LES* využívá geometrického průměru, tj.

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}. \quad (4.22)$$

Pro případ anizotropních výpočetních sítí rov. (4.22) je vhodnější použít výraz [5]

$$\Delta = \left(\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}{3} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

Dalším možným způsobem stanovení velikosti parametru Δ je výpočet maximální délky hrany výpočetní buňky, tj.

$$\Delta = \max\{\Delta_x; \Delta_y; \Delta_z\}. \quad (4.24)$$

POZN.: Jak již bylo zmíněno v předchozím textu každou veličinu lze rozdělit na její filtrovanou a reziduální hodnotu, tj. $\phi(x, t) = \hat{\phi}(x, t) + \phi''(x, t)$, avšak pro filtrované hodnoty $\hat{\phi}(x, t)$ neplatí pravidla Reynoldsova rozkladu, tj. $\widehat{\phi''}(x, t) \neq 0$.

*Filtrované Navier-Stokesovy rovnice použité v metodě *LES* pro nestlačitelné proudění nabývají tvaru*

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{LES}}{\partial x_j}, \quad (4.26)$$

kde τ_{ij}^{LES} je SGS Reynoldsův tenzor napětí, pro který platí

$$\tau_{ij}^{LES} = \widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j. \quad (4.27)$$

*Skrze tento člen bývá vyjádřen vliv lokálně průměrovaných hodnot pohybů vírů malých měřítek na pohyby velkých měřítek. Obdobně, jako je tomu u metody *RANS*, se jedná o neuzavřenou soustavu rovnic, a proto je nutné tento člen modelovat.*

4.5 Hybridní *RANS/LES* metody

Hybridní metody *RANS/LES* vznikly za účelem snížit numerickou náročnost metody *LES* a využít přesnost jejích výsledků. Princip této metody spočívá ve využití *RANS* modelu pro modelování proudění v blízkosti hranice oblasti a modelu *LES* na jejím zbytku. Předností *RANS* modelu je schopnost dobře popsat chování proudu v mezní vrstvě na významně hrubší výpočetní síti, než která by byla nutná při použití modelu *LES*.

V případě, kdy si odmyslíme notaci pro střední a filtrované hodnoty, je možné přepsat obecné rovnice pro modelování turbulentního nestlačitelného proudění do tvaru [5]

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{MOD}}{\partial x_j}, \quad (4.29)$$

kde Reynoldsův tenzor τ_{ij}^{MOD} rozhoduje, zda se jedná o metodu *RANS* nebo metodu *LES*. Model *RANS* závisí na fyzikálních veličinách a na vlastnostech geometrie, zatímco model *LES* závisí na vlastnostech výpočetní sítě.

Hybridní *RANS/LES* metody lze rozdělovat na základě způsobu modelování τ_{ij}^{MOD} v řídicích rovnicích do dvou základních skupin. Do první skupiny patří modely označované jako „*Unified Modeling*“ (*UN*), u kterých je přechod od modelů *RANS* k *LES* modelům spojitý (na celé oblasti jsou použity stejné transportní rovnice). Skupina *UN* se dále dělí na dvě podskupiny „*Blending Models*“ a „*Interfaced Models*“. Druhou skupinu hybridních modelů tvoří modely nazývané jako „*Segregated Modeling*“ (*SM*), kde je výpočetní síť uživatelem rozdělena na části s režimem *RANS* a části režimu *LES*. Podrobnější popis jednotlivých skupin hybridních modelů lze nalézt v [17] a [5].

4.5.1 Metoda Detached Eddy Simulation

Jedná se o hybridní metodu typu „*interfacing*“ označovanou jako *Detached Eddy Simulation* (*DES*) spočívá v „přepnutí“ turbulentního délkového měřítka ℓ modelů *RANS* na délkové měřítko Δ metody *LES*, v místech dostatečně husté výpočetní sítě. Pro menší měřítka sítě je využívána metoda *LES*. Délkové měřítko sítě je uváděno ve tvaru

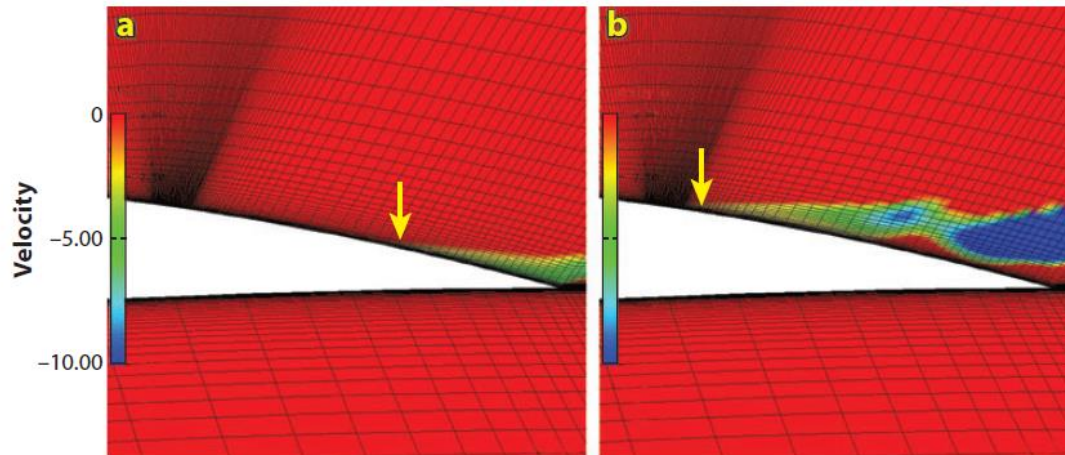
$$\bar{d} = \min(\ell, C_{DES} \Delta_{max}), \quad (4.30)$$

kde C_{DES} je experimentálně stanovená konstanta a Δ_{max} je největší rozměr posuzované buňky výpočetní sítě (parametr zahrnující krok výpočetní sítě). Pro $\bar{d} = \ell$ model přechází v režim *RANS* a pro $\bar{d} = C_{DES} \Delta_{max}$ přechází v režim *LES*. Délkové měřítko \bar{d} je definováno ve tvaru, který umožňuje využití metody *RANS* v oblasti stěny a metody *LES* na oblasti separace mezní vrstvy a ve vnějším proudě.

Původní model *DES* byl založen na jednorovnicovém modelu *SA*. Postupem času bylo zjištěno, že je možné získat model *DES* z jakéhokoliv *RANS* modelu na základě vhodné aproximace délkového měřítka, které je explicitně nebo implicitně obsaženo v turbulentních *RANS* modelech. [17]

Rozhraní mezi jednotlivými metodami není přímé, vyskytují se zde šedé zóny (*grey zones*), ve kterých není použit „čistý“ *RANS* model nebo „čistý“ model *LES*. V šedých zónách se předpokládá, že vlivem turbulentní viskozity nejsou fluktuace rychlosti dostatečně rozvinuté, s čímž souvisí nižší

hodnota přímo řešeného turbulentního napětí. Tento jev je označován jako *Modeled Stress Depletion (MSD)*. Následkem tohoto jevu může být nízká hodnota tření na hranici nebo příliš brzká separace proudění, která je označována jako *Grid Induced Separation (GIS)*. [37]



Obr. 4.2 Výsledky hodnoty vířivosti podél leteckého profilu (a) výsledky metody *RANS*, (b) výsledky metody *DES*. Šipka značí různé modelování separace proudění (jev *GIS*). [38]

Vizualizace jevu *GIS* je uvedena výše (**obr. 4.2**). Zatímco stacionární řešení proudění podél leteckého profilu na základě metody *RANS* je poměrně přesné (při rozboru výsledků a srovnání s experimentálním pozorováním), při řešení pomocí metody *DES* dochází k nepřesnostem v důsledku modelování brzké separace proudění vyvolané jevem *GIS*.

5 MODELY TURBULENTNÍHO PROUDĚNÍ

5.1 Dvourovnicové modely s turbulentní vazkostí

Jedná se o modely turbulence sestavené ze dvou diferenciálních rovnic. První rovnice slouží pro výpočet turbulentní kinetické energie k , zatímco druhá je použita pro stanovení rychlosti disipace ε . Dvourovnicové modely je možné považovat za *kompletní modely turbulence*, jelikož mohou být použity na výpočet turbulentního proudění bez znalosti struktury vyšetřovaného typu proudění.

Dvourovnicové modely se řadí mezi nejjednodušší modely turbulence. Základními stavebními prvky veškerých dvourovnicových modelů je Boussinesqova hypotéza rov. (4.19) a definice turbulentní kinetické energie k pomocí rov. (4.14).

Kolmogorov (1942) použil pro výpočet druhé transportní rovnice *specifickou rychlost disipace* ω . Na základě rozměrové analýzy lze turbulentní vazkost μ_t , turbulentní délkové měřítko ℓ a míru disipace turbulentní energie ε určit podle Kolmogorova na základě výrazů

$$\mu_t \sim \frac{\rho k}{\omega}, \quad \ell \sim \frac{k^{1/2}}{\omega}, \quad \varepsilon \sim \omega k. \quad (5.1a-c)$$

Rotta (1951) na základě představ o lokální izotropii použil jako první transportní rovnici pro turbulentní délkové měřítko a později (1968) navrhl rovnice pro stanovení produkce k a ε . Pro oba případy platí

$$\mu_t \sim \frac{\rho k^{1/2}}{\ell}, \quad \varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{\ell}. \quad (5.2a,b)$$

POZN.: Jedním z klíčových závěrů 1980-81 AFOSR-HTTM Stanfordské konference zaměřené na turbulentní proudění bylo, že největší nejistota dvourovnicových modelů spočívá v transportní rovnici pro stanovení k . [47]

5.1.1 Dvourovnicové modely k - ω

Mezi výhody modelů k - ω náleží rovnice pro určení specifické rychlosti disipace ω , jež umožňuje integraci přes vazkou podvrstvy. Modely k - ω dobře popisují záporný tlakový spád, mezní vrstvy a odtržení proudu vyšetřované tekutiny.

Model k - ω SST (Shear Stress Transport)

Při experimentálním pozorování průběhu turbulentního napětí v mezní vrstvě bylo zjištěno, že turbulentní smykové napětí je zhruba úměrné turbulentní energii (Bradshaw). Nicméně obvyklé formulace turbulentní vazkosti na tuto vazbu nereagují a neberou ohled na vliv transportu turbulentního smykového napětí. Zavedením výrazu $\tau/\rho = a_1/k$ pro výpočet smykového napětí v transportní rovnici pro turbulentní energii je možné uvažovat s transportem smykového napětí.

Z tohoto důvodu vytvořil Menter modifikovanou definici turbulentní vazkosti, jež zahrnuje transport turbulentního smykového napětí, která je použita v modelu $k-\omega$ SST. Turbulentní vazkost je v modelu $k-\omega$ SST určena pomocí vztahu

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (5.3)$$

kde $a_1 = 0,31$ a Ω je absolutní hodnota vířivosti. Spojovací funkce F_2 nabývá hodnoty $F_2 = 1$ při proudění v mezní vrstvě a hodnoty $F_2 \rightarrow 1$ s rostoucí vzdáleností od stěny a pro volné smykové vrstvy.

Transportní rovnice pro turbulentní energii a rychlost disipace jsou použity ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i k)}{\partial x_i} &= P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \rho k \omega, \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \omega)}{\partial x_i} &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\rho(1 - F_1) \frac{\sigma_2}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (5.4a,b)$$

kde P_k je produkce turbulentní energie. Produkce turbulentní energie je určena výrazem

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (5.5)$$

kde τ_{ij} je tenzor turbulentního napětí. Tenzor turbulentního napětí je definován vztahem

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k. \quad (5.6)$$

Funkce F_1 (v rov. (5.4a,b)) vyjadřuje vazbu mezi modelovými konstantami standardního modelu $k-\omega$ (podle Wilcoxe) a transformovaného modelu $k-\varepsilon$. Tuto vazbu je možné vyjádřit pomocí výrazu

$$\Phi = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2, \quad (5.7)$$

kde Φ symbolizuje libovolnou konstantu v rov. (5.7), Φ_1 reprezentuje libovolnou konstantu původního modelu $k-\omega$ a Φ_2 libovolnou konstantu transformovaného modelu $k-\varepsilon$.

Modelové konstanty transformované z modelu $k-\omega$ (Wilcox)

$$\begin{aligned} \beta^* &= 0,09; \quad \beta_1 = 0,0750; \quad \sigma_1^* = 0,85; \quad \sigma_1 = 0,5; \quad \kappa = 0,41; \\ \gamma_1 &= \beta_1 / \beta^* - \sigma_1 \kappa^2 \sqrt{\beta^*} \end{aligned} \quad (5.8)$$

a transformované hodnoty konstant $k-\varepsilon$ modelu (Jones-Lauder)

$$\begin{aligned} \beta^* &= 0,09; \quad \beta_2 = 0,0828; \quad \sigma_2^* = 1,0; \quad \sigma_2 = 0,85; \quad \kappa = 0,41; \\ \gamma_2 &= \beta_2 / \beta^* - \sigma_2 \kappa^2 \sqrt{\beta^*}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kteří byly získány transformací ze vztahů

$$\gamma_2 = C_{\varepsilon 1} - 1, \beta_{\varepsilon 2} = (C_{\varepsilon 2} - 1)C_{\mu}, \beta^* = C_{\mu}, \sigma_2^* = 1/\sigma_k, \sigma_2 = 1/\sigma_{\varepsilon}, \quad (5.10)$$

kde byly použity standardní hodnoty $C_{\mu} = 0,09$; $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $\sigma_k = 1,0$ a $\sigma_{\varepsilon} = 1,17$, přičemž velikost σ_{ε} byla zvolena hodnotou, jež odpovídá von Kármánově konstantě rovné $\kappa = 0,41$.

Funkce F_1 a F_2

Za účelem zaručení obecnosti modelu *SST* je nezbytné, aby funkce F_1 a F_2 splňovaly požadavky pro hladký přechod modelu $k-\omega$ na model $k-\varepsilon$. Funkce F_1 je dána vztahem

$$F_1 = \tanh(\Gamma_1^4), \quad (5.11)$$

kde argument Γ_1 je určen pomocí podmínky

$$\Gamma_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right); \frac{4\rho\sigma_2 k}{D_{\omega} y^2} \right], \quad (5.12)$$

kde y je vzdálenost od nejbližší stěny. Využitím této úpravy lze dosáhnout, že $F_1 \rightarrow 0$ pro $y^+ > 70$. Výraz D_{ω} popisuje kladnou část vztahu pro příčnou difuzi v transportní rovnici ω

$$D_{\omega} = \max \left(2\rho\sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right). \quad (5.13)$$

Funkce F_2 je dána vztahem

$$F_2 = \tanh(\Gamma_2^2), \quad (5.14)$$

kde argument Γ_2 je určen podmínkou

$$\Gamma_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{\omega y^2} \right). \quad (5.15)$$

5.1.2 Dvourovnicové modelu $k-\varepsilon$

Model $k-\varepsilon$ Standard

Model $k-\varepsilon$ Standard využívá pro určení rychlosti disipace Rottova vztahu rov. (5.2a,b), jenž vychází z představy lokální izotropie nejmenších vírů, ve kterých dochází k disipaci energie. Turbulentní vazkost je poté možné vyjádřit na základě výrazu

$$\mu_t = C_{\mu} \rho \sqrt{k} \ell = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5.16)$$

Transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii je použita ve tvaru

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i k)}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \varepsilon \quad (5.17)$$

a transportní rovnice pro rychlost disipace

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 1} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (5.18)$$

kde P_k je produkce turbulentní energie. Pro produkci turbulentní energie platí

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial U_k}{\partial x_k}. \quad (5.19)$$

Model obsahuje celkem pět empirických konstant: $C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}$ a $C_{\varepsilon 2}$, jež je možné určit pomocí jednoduchých případů proudění či numerickou optimalizací. Podle *Patela, Rodiho* a *Scheurerera* se v různých variantách modelu $k-\varepsilon$ Standard používají hodnoty $C_\mu = 0,09$; $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ a $C_{\varepsilon 2} = 1,92$.

POZN.: Ve standardním modelu jsou použity konstanty, které poskytují poněkud vyšší hodnotu von Kármánovy konstanty $\kappa = 0,43$, než je obvyklých 0,40 až 0,41. Podle Laundera aj. hodnoty $C_\mu = 0,09$; $C_{\varepsilon 1} = 1,45$ a $C_{\varepsilon 2} = 1,90$ a $\sigma_\varepsilon = 1,3$ poskytují konstantu $\kappa = 0,42$. [32]

POZN.: Rovnice (5.17) a (5.18) lze aplikovat pouze na případ volného smykového proudění. Při obtékání pevných stěn je nezbytné použít modifikace, jež do výpočtu umožňují zahrnout vliv stěn.

5.2 Metoda DES založená na modelu $k-\omega$ SST

Model *DES* vycházející z Menterova turbulentního modelu *SST* byl poprvé formulován *Travinem, Shurem* a *Spalartem* v roce 2002. V metodě *DES* je *disipativní člen* v rovnici pro turbulentní kinetickou energii určen jako

$$\rho \varepsilon = \rho \beta^* k \omega F_{DES}, \quad (5.20)$$

kde F_{DES} je určen pomocí následujícího výrazu

$$F_{DES} = \max \left(\frac{\ell}{C_{DES} \Delta_{max}}, 1 \right), \quad (5.21)$$

kde C_{DES} je kalibrační konstanta použitá v modelu *DES, k- ω SST* a má hodnotu rovnu 0,61 a Δ_{max} je maximální velikost stěny kontrolního objemu výpočetní sítě, pro kterou platí

$$\Delta_{max} = \max \{ \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \}. \quad (5.22)$$

Turbulentní délkové měřítko je parametr určený na základě modelu $k-\omega$ SST jako

$$\ell = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}. \quad (5.23)$$

V jistých případech může nastat, že člen F_{DES} „přepne“ na metodu DES v mezní vrstvě, jelikož je Δ_z příliš malá hodnota (menší než tloušťka mezní vrstvy δ). To má za následek řešení proudění pomocí metody LES na příliš hrubé výpočetní síti, což může způsobit, že výsledky simulace nebudou přesné (dochází k jevům MSD a GIS) [17]. Řešením tohoto problému je zavedení členu F_{SST} do rov. (5.21), která pak nabývá tvaru

$$F_{DDES} = \max \left[\frac{\ell}{C_{DES} \Delta_{max}} (1 - F_{SST}), 1 \right]. \quad (5.24)$$

Turbulentní model, využívající rovnici (5.24), je označován jako *Delayed Detached Eddy Simulation* ($DDES$). Při využití modelu $k-\omega$ SST je člen F_{SST} určen pomocí spojujících funkcí F_1 a F_2 . Výsledkem tohoto modelu je zúžení šedé zóny mezi režimy $RANS$ a LES , čímž dochází k eliminaci MSD .

Veličiny, kterými jsou hybnost, hmota a energie jsou přenášeny především velkými víry. Velké víry jsou rovněž více časově závislé oproti malým vírům a odvíjí se od geometrie oblasti a okrajových podmínek proudění. Malé víry jsou méně závislé na geometrii oblasti a mají tendenci k izotropii a jsou více univerzální. Z těchto důvodů je pro malé víry mnohem větší šance pro nalezení univerzálního turbulentní modelu. To vše přispívá k použitelnosti metody DES pro modelování turbulence.

Modifikace Delayed Detached Eddy Simulation

Jako prevence jevu MSD , došlo k modifikaci metody DES do podoby, jež nese označení *Delayed Detached Eddy Simulation* ($DDES$), jejíž princip spočívá ve „zdržení“ přechodu mezi $RANS$ a LES metodou výpočtu.

Za účelem zdržení přechodu k režimu výpočtu na základě metody LES je zavedena tlumící funkce f_d , která závisí na aktuálních vlastnostech proudění (turbulentní vazkost) a nabývá tvaru

$$f_d = 1 - \tanh(C_{d1} r_d)^{C_{d2}}, \quad (5.25)$$

kde C_{d1} a C_{d2} jsou kalibrační koeficienty, které pro model $k-\omega$ SST postupně nabývají hodnoty $C_{d1} = 20$ a $C_{d2} = 5$. Pro funkci r_d v rov. (5.25) platí

$$r_d = \frac{\nu + \nu_t}{\kappa^2 d_w^2 \sqrt{\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}}} \quad (5.26)$$

kde κ je von Kármánova konstanta a d_w je kolmá vzdálenost od stěny. Funkce r_d nabývá nulové hodnoty 1 v blízkosti stěny a s rostoucí vzdáleností od stěn postupně klesá k 0 (hranice mezní vrstvy).

Délkové měřítko pro modifikaci *DDES* nabývá tvaru

$$\ell_{DDES} = \ell_{RANS} - f_d \max\{0, \ell_{RANS} - \ell_{LES}\}, \quad (5.27)$$

kde ℓ_{RANS} , resp. ℓ_{LES} je délkové měřítko metody *RANS*, resp. *LES*.

Délkové měřítko metody *RANS* použité modifikaci *DDES* $k-\omega$ *SST* lze určit na základě rov. (5.23) a pro délkové měřítko metody *LES* platí

$$\ell_{LES} = C_{DES}\Delta, \quad (5.28)$$

kde Δ je velikost filtru, který lze spočítat z rov. (5.22) a C_{DES} je modelová konstanta. Modelovou konstantu C_{DES} je možné spočítat z výrazu

$$C_{DES} = (1 - F_1)C_{k-\varepsilon} + F_1C_{k-\omega}, \quad (5.29)$$

kde F_1 je již známá spojovací funkce modelu $k-\omega$ *SST* a $C_{k-\varepsilon}$ a $C_{k-\omega}$ jsou další konstanty modelu.

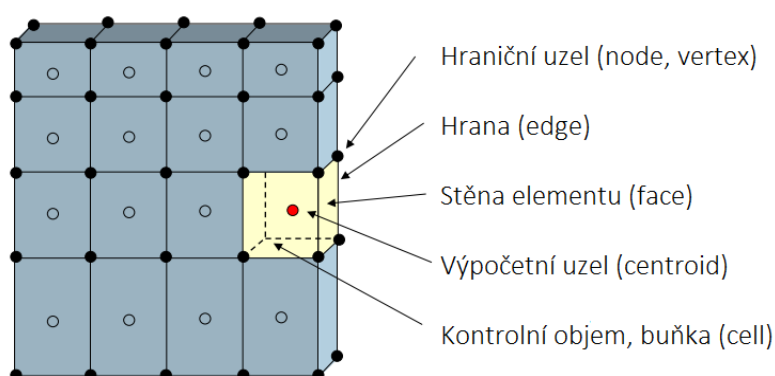
Modelové konstanty *DDES* $k-\omega$ *SST*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5/9; \quad \alpha_2 = 0,44; \quad \alpha_3 = 0,31; \\ \beta_1 &= 0,0075; \quad \beta_2 = 0,0828; \quad \kappa = 0,41; \\ \sigma_{k1} &= 0,85; \quad \sigma_{k2} = 1; \quad \beta^* = 0,09; \\ \sigma_{\omega1} &= 0,5; \quad \sigma_{\omega2} = 0,856; \\ C_{k-\varepsilon} &= 0,61; \quad C_{k-\omega} = 0,78; \\ C_{d1} &= 20; \quad C_{d2} = 3. \end{aligned} \quad (5.30)$$

6 VÝPOČETNÍ SÍŤ

6.1 Typy výpočetní sítě

Pro parciální diferenciální rovnice, které popisují pohyb tekutiny a přenos tepla, není možné, vyjma některých jednoduchých případů, nalézt analytické řešení. Z tohoto důvodu dochází k rozdělení vyšetřované oblasti V na konečný počet elementárních disjunktních podoblastí δV_i . Řídící rovnice jsou následně diskretizovány a numericky řešeny v každé podoblasti zvlášť. Výpočetní síť tedy tvoří základ matematického modelování a její tvorba je označována jako *sítování*. Ukázka výpočetní sítě s popisem základních charakteristik výpočetní sítě je uvedena na **obr. 6.1**.



Obr. 6.1 Terminologie výpočetní sítě [29]

Velikost buněk výpočetní sítě se volí s ohledem na velikost modelovaných charakteristik proudění (vírové struktury jisté velikosti). Značný vliv má výběr modelu turbulence, který ovlivňuje počet potřebných výpočetních buněk. Nejnáročnější metodou na počet elementů výpočetní sítě je metoda *DNS*, jejíž nároky s rostoucím Reynoldsovým číslem významně narůstají, a proto ji lze aplikovat pouze při nižších hodnotách Reynoldsova čísla. Nicméně výsledky *DNS* jsou rovné experimentálním pozorování a v některých případech experimentální měření předčí. Při použití metody *RANS* dochází k významnému snížení nároků na počet elementů výpočetní plynoucí ze statistického přístupu řešení turbulentního proudění. Modely *RANS* svou robustností vystačí s mnohonásobně hrubší výpočetní sítí, avšak kvalitou poskytnutých výsledků nemohou metodě *DNS* konkurovat. [7], [23]

Kvalita výpočetní sítě má značný vliv na dobu simulace a přesnost obdržených výsledků. Nekvalitní výpočetní síť a velký počet buněk sítě významně prodlužují dobu trvání výpočtu. Za účelem úspory času dochází k zahušťování výpočetní sítě v oblastech velkých gradientů sledovaných charakteristik a zředňování sítě v oblastech malých, popř. nulových gradientů. Zahušťování, resp. zředňování buněk by mělo být realizováno jako plynulé, jelikož skokové změny velikosti buněk mohou negativně ovlivnit konvergenci úlohy a přesnost obdržených výsledků. Nárůst velikosti buněk se obecně doporučuje volit jako 20% předchozí hodnoty. [7], [8]

6.1.1 Klasifikace výpočetní sítě

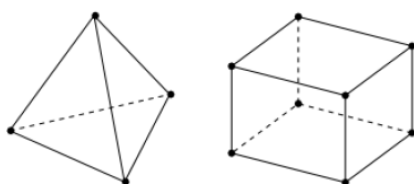
Výpočetní sítě lze rozlišovat na základě napojení jednotlivých elementů a podle typu použitých buněk výpočetní sítě.

Podle rozlišení na základě napojení výpočetních elementů rozlišujeme následující příklady:

- *Strukturovaná výpočetní síť* – libovolná hrana buňky výpočetní sítě sousedí s právě jednou hranou vedlejší buňky.
- *Nestrukturovaná výpočetní síť* – hrana jedné buňky může sousedit s více hranicemi vedlejších buněk.
- *Hybridní výpočetní síť* – tvoří kombinaci strukturované a nestrukturované výpočetní sítě.

Hybridní výpočetní síť využívá čtyřúhelníky a šestistěny v oblastech blízko pevné stěny (vyšší přesnost) a ve zbylých místech ostatní typy buněk. Pokud se výpočetní síť skládá ze stejného typu buněk, jedná se o *uniformní výpočetní síť*.

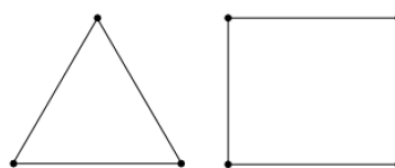
Prostorové typy buněk



čtyřstěn

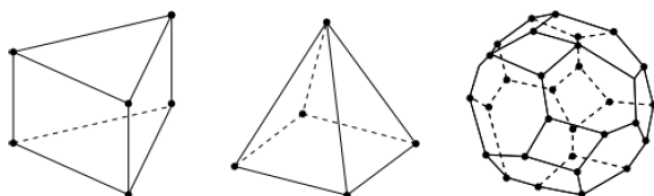
šestistěn

Rovinné typy buněk



trojúhelník

čtyřúhelník



klín

jehlan

mnohostěn

Obr. 6.2 Prostorové a rovinné typy buněk [3]

Rozdělení výpočetních sítí podle typu buněk výpočetní sítě závisí na dimenzi vyšetřované oblasti. Pokud se jedná o rovinný případ proudění, rozlišujeme dva základní typy buněk výpočetní sítě (trojúhelníky a čtverce). Ve trojrozměrném případě existuje pět typů buněk výpočetní sítě, kterými jsou buňky tvaru čtyřstěnu, šestistěnu, klínu, jehlanu a mnohostěnu. Ukázky rovinných i prostorových buněk výpočetní sítě jsou uvedeny na **obr. 6.2**. Volba jednotlivých typů buněk výpočetní sítě se odvíjí od složitosti použité geometrie a typu úlohy.

6.1.2 Kvalita buněk výpočetní sítě

Hodnocení kvality buněk výpočetní sítě vychází z nesouměrnosti buněk, poměru jednotlivých hran buněk, ortogonální kvality buněk. [3]

Nesouměrnost (skewness) buněk popisuje rozdíl mezi tvarem buňky výpočetní sítě a tvarem rovnostranné buňky téhož objemu. Vysoce nesouměrné buňky snižují přesnost výpočtu a destabilizují řešení. Kvalita buňky se vyjadřuje pomocí bezrozměrného čísla, které se pohybuje v rozmezí hodnot od 0 do 1, přičemž buňky nejvyšší kvality se blíží 0 a buňky nejnižší kvality směřují k 1. Kvalita buněk a jí odpovídající rozmezí nesouměrnosti jsou uvedeny v **tab. 6.1**.

Tab. 6.1 Hodnocení kvality buněk na základě nesouměrnosti [3]

Kvalita buněk výpočetní sítě	Rozmezí hodnot nesouměrnosti
Upadající (<i>degenerate</i>)	1,00
Špatná (<i>bad</i>)	0,90 – <1,00
Nevalná (<i>poor</i>)	0,75 – 0,90
Přijatelná (<i>fair</i>)	0,50 – 0,75
Dobrá (<i>good</i>)	0,25 – 0,50
Vynikající (<i>excelent</i>)	>0,00 – 0,25
Dokonalá (<i>equilateral</i>)	0,00

POZN.: Při posuzování kvality buněk z hlediska nesouměrnosti buněk by velikost nesouměrnosti neměla být vyšší než 0,85 [3].

Pro určení kvality 2D resp. 3D buňky může být využit následující výraz rov. (6.1), jenž popisuje, do jaké míry se použitá buňka blíží buňce optimální, jež se skládá z rovnostranných trojúhelníků. Tato metoda je použitelná pouze pro trojúhelníky a čtyřstěny a vychází z výrazu [23]

$$Skewness = \frac{Optimal\ cell\ size - Real\ cell\ size}{Optimal\ cell\ size} \quad (6.1)$$

Poměr jednotlivých hran (aspect ratio) je míra protažení buněk výpočetní sítě. Je počítán jako poměr maximální a minimální vzdálenosti mezi výpočetním uzlem buňky a středem stěny elementu a mezi výpočetním uzlem buňky a hraničním uzlem. V místech velkých gradientů či změn proudění se nedoporučuje vytvářet buňky s náhlými a velkými změnami v poměrech hran, resp. ploch buněk.

Ortogonální kvalita je pro buňky výpočetní sítě stanovena na základě normálových vektorů stěn, vektorů určenými výpočetním uzlem buňky a výpočetními uzly přilehlých buněk a vektory určenými výpočetním uzlem a těžišti všech přilehlých stěn.

Ortogonalní kvalita (*orthogonal quality*) se opět pohybuje v rozmezí od 0 do 1, přičemž buňky s nízkou ortogonalní kvalitou se blíží 0, zatímco buňky s vysokou ortogonalní kvalitou se blíží 1.

6.1.3 Výpočet prvního uzlu výpočetní sítě

Zvláštní pozornost je nutné věnovat skladbě výpočetní sítě v blízkosti pevných stěn, kde dochází ke vzniku *mezní vrstvy*. V oblasti blízko pevné stěny dochází ke tvorbě významných gradientů rychlosti. Aby byla provedená simulace správná, je nutné tyto gradienty správně vyřešit. Děje se tomu zvýšením počtu buněk výpočetní sítě tzv. inflací buněk výpočetní sítě.

Navýšení počtu buněk výpočetní sítě závisí na použitém modelu turbulence a tvaru proudového pole, které řešíme. K vyřešení rychlostního profilu můžeme použít redukovanou variantu buněk výpočetní sítě, která spočívá v aplikaci empirických stěnových funkcí **obr. 6.3** (vlevo). Pokud se jedná o proudění, které je úzce spjato se významnými účinky stěny na proud, doporučuje se řešení absolutního rozlišení výpočetní sítě pomocí inflace buněk výpočetní sítě.

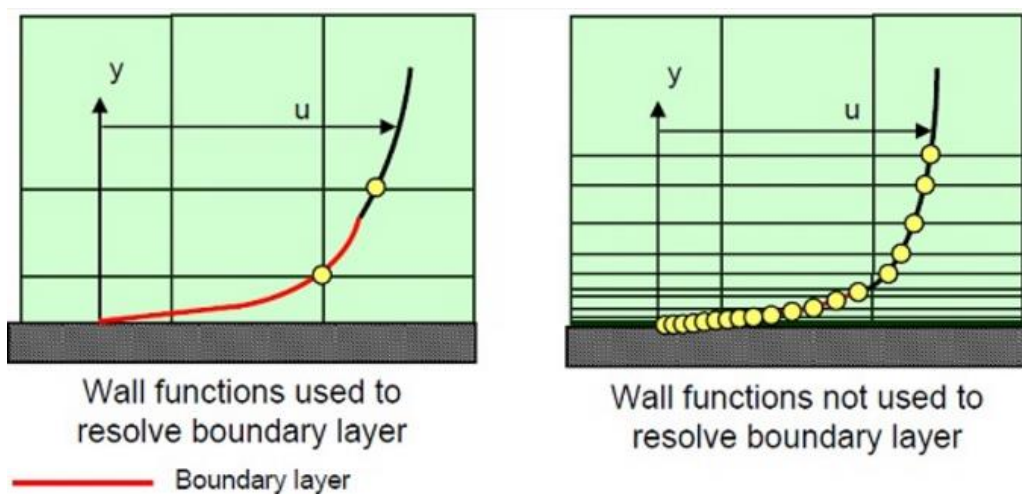
Pro výpočet prvního uzlu výpočetní sítě se obvykle používá pro případ hydraulicky hladkého potrubí bezrozměrná souřadnice ve formě Reynoldsova čísla

$$y_P^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (6.2)$$

kde u_τ je třecí rychlost. Tato veličina může být určena pomocí rovnice

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (6.3)$$

kde τ_w je smykové napětí na stěně potrubí.



Obr. 6.3 Skladba buněk výpočetní sítě v blízkosti pevného povrchu [35]

Při použití stěnových funkcí souřadnice y_p^+ by se měla nacházet v logaritmické oblasti mezní vrstvy, co nejbližší ke stěně, tj. $y_p^+ \approx 30$ až 60. Ve druhém případě by se měla vzdálenost prvního bodu výpočetní sítě od stěny nacházet ve vzdálenosti $y_p^+ = 1$ popř. 2.

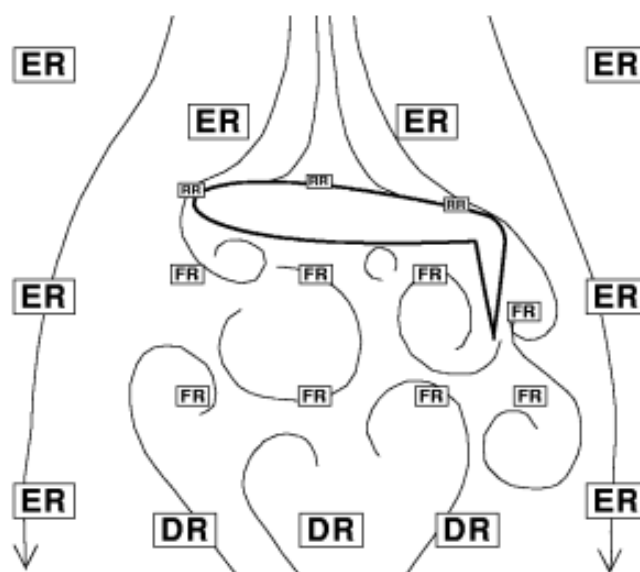
6.2 Výpočetní síť pro metodu DES

Tvorba výpočetní sítě pro metodu *DES* není jednoduchou záležitostí, jelikož zde dochází ke spojení dvou odlišných metod řešení turbulentního proudění. Při síťování metodou *DES* rozlišujeme nadřazené a podřazené oblasti. Mezi nadřazené oblasti patří *Eulerův region (ER)*, *RANS region (RR)* a *LES region (LR)*. Region *RR* a *LR* obsahují podřazené oblasti, které jsou souhrnně uvedeny v **tab. 6.2**.

Tab. 6.2 Nadřazené a jim podřazené oblasti proudění [37]

Nadřazené oblasti	Podřazené oblasti
Eulerův region (<i>ER</i>)	-
RANS region (<i>RR</i>)	Vazká podoblast (<i>VR</i>)
	Vnější podoblast (<i>OR</i>)
LES region (<i>LR</i>)	Vazká podoblast (<i>VR</i>)
	Focus region (<i>FR</i>)
	Departure region (<i>DR</i>)

Na **obr. 6.4** jsou uvedeny pouze čtyři oblasti, jelikož zbylé oblasti (*VR*) jsou příliš tenké pro zobrazení. Jednotlivé regiony se rozlišují na základě různých priorit pro tvorbu výpočetní sítě.



Obr. 6.4 Ukázka oblastí proudění okolo profilu sklopného rotoru [37]

6.2.1 Eulerův region

Eulerův region se nachází proti proudu při obtékání tělesa a obvykle se v něm nevyskytuje turbulentní proudění. Ačkoliv zaujímá značnou část výpočetní oblasti, obsahuje pouze malý počet buněk výpočetní sítě. Proudění je v *ER* řešeno pomocí *RANS* modelu. Jednotlivé buňky výpočetní sítě jsou převážně rozměrově izotropní ve všech směrech. [37]

6.2.2 RANS region

Dalším regionem je tzv. *RANS* region, který pokrývá oblast mezní vrstvy včetně počáteční separace. Tvorba výpočetní sítě je obdobná, jako je tomu při klasické metodě *RANS*. Při nastavení příliš husté výpočetní sítě dochází k aktivaci metody *LES*. Oblast *RR* lze dále rozdělovat na *vazkou podoblast (VR)* a *vnější podoblast (OR)*. [37]

6.2.2.1 Vazká oblast

Vazká oblast (*VR*) tvoří vnitřní část *RR*, přičemž požadavky na výpočetní síť jsou stejné jako pro klasické *RANS* modely. Jedná se o oblast na rozmezí pevné stěny a proudící tekutiny, kde ve směru normály ke stěně dochází ke tvorbě standardní vazké podvrstvy, přechodové oblasti a logaritmické oblasti. Veškeré oblasti mezní vrstvy jsou „modelovány“ ve smyslu, že časová závislost je nízká. Volba prvního kroku by měla být přibližně $\Delta y^+ = 2$ nebo méně. Poměr velikosti bezprostředně na sebe navazujících kroků by se měl pohybovat okolo hodnoty $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j \approx 1,25$ (1,20) nebo méně. Počet vrstev výpočetní sítě mezní vrstvy by měl přibližně dosahovat 10 až 13 vrstev. [37]

6.2.2.2 Vnější oblast

Pro vnější oblast (*OR*) se uplatňují stejné požadavky jako pro *VR*. V mezní vrstvě je proudění řešeno na základě turbulentního modelu bez vlivu metody *LES*. Dále je výhodné využít strukturovanou výpočetní síť, která je (pokud dovoluje geometrie oblasti) podél stěny neměnná. Ve směru normály stěny je opět uplatněno síťování metody *RANS* s kroky výpočetní sítě, které nepřesahují vzdálenost $0,1\delta$, kde δ je tloušťka mezní vrstvy. [37]

6.2.3 LES region

Následuje oblast označovaná jako *LES* region (*LR*), ve které dochází k výskytu vířivosti a turbulence. Tento region se dále rozděluje na vazkou oblast (*VR*), focus region (*FR*) a departure region (*DR*). [37]

6.2.3.1 Vazká oblast

Ve vazkém regionu oblasti *LR* platí stejné požadavky na tvorbu výpočetní sítě jako v předchozím případě vazké oblasti (metoda *RANS*). [37]

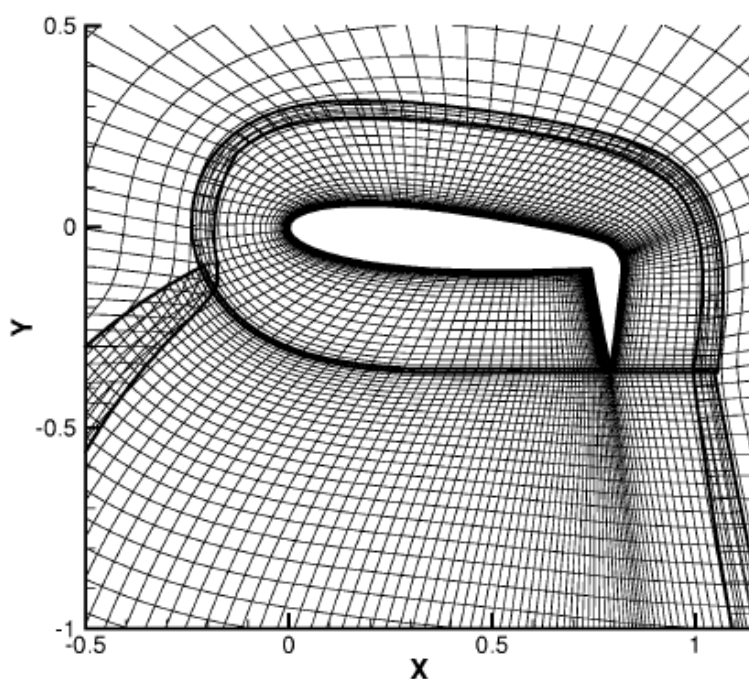
6.2.3.2 Focus region a departure region

Jedná se o region v blízkosti tělesa, ve kterém je zapotřebí správného vyřešení turbulentního proudění. Převažující velikost elementu výpočetní sítě v oblasti *FR* označujeme jako Δ_0 (hlavní rozměr pro

prostorové rozlišení metody *DES*). Nicméně velikost Δ_0 klade velké nároky na výpočet, nelze ji aplikovat na celé oblasti proudění, a proto je použita v místech, kde dochází k náhlým změnám turbulentního proudění. Je tedy nutné rozhodnout, kde *FR* končí a začíná *DR*, reprezentovaný velikostí Δ . Velikost kroku výpočetní sítě Δ významně převyšuje délku Δ_0 . Nicméně je nutné zaručit hladký přechod mezi jednotlivými regiony, aby byla zachována správnost řešení. [37]

V případě turbulentního paprsku *FR* pokrývá oblast mezi ústím trysky do vzdálenosti $x/d = 30$, kde dochází k výraznému útlumu pozorovaných charakteristik proudění. Zbylou oblast $x/d > 30$ pokrývá *DR*. Prostorové řešení výpočetní sítě v oblasti *DR* postupně navazuje na řešení v *ER*, což může být výhodou metody *DES* při aplikaci hrubší sítě.

Při tvorbě výpočetní sítě v oblasti *FR* je vhodné uplatnit obdobné prostorové řešení ve všech směrech, tj. použití krychlovité výpočetní sítě. Důvodem je, že metoda *DES* bere v potaz maximální velikost výpočetní sítě a podrobnější kroky výpočetní sítě by byly plýtváním výpočetní kapacity.



Obr. 6.5 Výpočetní síť pro simulace proudění podél sklopného rotoru pomocí metody *DES* [37]

6.3 Délka časového kroku

Pro volbu délky časového kroku bude využita *CFL* podmínka (Courant-Friedrichs-Léwy), která je při řešení parciálních diferenciálních rovnic nezbytnou podmínkou pro zaručení konvergence řad. Důsledkem této podmínky je, že velikost časového kroku musí být menší, než je jistý časový okamžik, jinak může simulace produkovat nesprávné výsledky.

Tato podmínka se uplatňuje při výpočtu postupu vlny na diskrétní síti při výpočtu amplitudy této vlny, kdy časový krok výpočtu musí být menší, než je čas, během kterého se vlna šíří mezi dvěma body

výpočetní sítě. Při posouzení *CFL* podmínky se uplatňuje vzdálenost bodů výpočetní sítě, rychlost šíření vlny a časový krok ve formě tzv. Courantova čísla, pro které v *1D* platí

$$Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq Co_{max}, \quad (6.4)$$

kde u rychlost, Δt velikost časového kroku a Δx velikost kroku výpočetní sítě. Maximální velikost Courantova čísla závisí na použité metodě řešení, zda se jedná o *explicitní* nebo *implicitní* metody. Pokud se jedná o explicitní metody řešení, nabývá maximální hodnota $Co_{max} = 1$. Implicitní metody řešení jsou obvykle méně citlivé na numerickou stabilitu řešení, a proto je možné volit vyšší Co_{max} .

V obecném n -rozměrném případě je možné zapsat Courantovo číslo ve formě

$$Co = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{x_i}}{\Delta x_i} \leq Co_{max}. \quad (6.5)$$

POZN.: Nestacionární úlohy řešení turbulentního proudění lze řešit pomocí časově explicitního nebo implicitního diskretizačního schématu.

Explicitní schéma – hodnoty bilancovaných veličin v následujícím časovém kroku jsou vypočítány přímo z předchozího časového kroku. Jedná se o velmi rychlou metodu, avšak je nutné zvolit dostatečně „malý“ časový krok řešení, aby nedošlo k divergenci výsledků. Tento výpočet je označován jako „podmínečně stabilní“, tj. závislý na délce časového kroku. [27]

Implicitní schéma – aplikace toho schématu vede k nutnosti řešení rozsáhlé soustavy lineárních rovnic. Je možné zvolit také metodu řešení těchto rovnic a navolit počet iterací řešení soustavy rovnic. Počet iterací v jednom časovém kroku je ovlivněn pomocí minimálního rezidua, kterého je během iterací dosaženo. Při výpočtu pomocí této metody je možné zvolit větší délku časového kroku oproti případu výpočtu pomocí explicitního schématu, aniž by došlo k divergenci výsledků. [27]

6.4 Interpolační schémata

V metodě konečných objemů jsou velikosti složek rychlosti a skalárních veličin vyhodnocovány v geometrických středech, zatímco hodnoty na hranicích objemu jsou získávány interpolací. Pro stanovení hledaných velikostí na okrajích výpočetního objemu lze vybrat z několika interpolačních schémat:

- **First-Order Upwind** (protiproudá interpolace prvního řádu) – je nejjednodušší numerické schéma, které bylo využíváno v dřívějších diskretizačních přístupech. Mezi výhody tohoto interpolačního schématu patří rychlá konvergence řešení při použití výpočetní sítě tvořené čtyřstěny a stabilita výpočtu. Nicméně se jedná o méně přesné interpolační schéma ve srovnání se schématy vyššího řádu. Je vhodné pro prvotní návrhy simulací.

- **Power-Law** (mocninné schéma) – uplatňuje se především v případech jednorozměrného proudění, kdy je směr proudění orientován rovnoběžně s výpočetní oblastí. Dosahovaná přesnost výsledků odpovídá stupni mezi schémata prvního a druhého řádu.
- **Second-Order Upwind** (protiproudá interpolace druhého řádu) – používá se pro případy proudění, které je prostorově orientované. Dosahovaná přesnost výsledků převyšuje předchozí interpolační schémata, avšak výsledné hodnoty obtížněji konvergují. Z tohoto důvodu je doporučováno použití protiproudé interpolace prvního řádu pro první části výpočtu, ve které dojde k ustálení průběhu reziduí a následnému přepnutí na interpolaci druhého řádu, pro kterou je simulace dopočítána.
- **Central Differencing** (interpolační schéma centrálních diferencí) – je možné aplikovat pro stanovení velikosti hybnosti v případě turbulentního *LES* modelu. Výsledná přesnost odpovídá protiproudému interpolačnímu schématu druhého řádu.
- **QUICK** (protiproudá kvadratická interpolace) – využívá se jako alternativa mocninného schématu v případech, kdy je proud tekutiny směřován k výpočetní síti pod definovaným úhlem. Vhodné použití tohoto schématu je v případech rotujícího či vířivého proudění na čtyřhranné nebo šestihranné síti. Jedná se o velmi přesné interpolační schéma, nicméně v oblastech s velkými gradienty se mohou objevit nadhodnocené či podhodnocené výsledky. Použití tohoto schématu může vést k problémům se stabilitou kalkulace.
- **MUSCL** (interpolační schéma třetího řádu) – bylo vytvořeno pomocí kombinace původního MUSCL (Monotone Upstream Centred Schemes for Conservation Laws) společně se schématy centrální diference a interpolace prvního řádu. Oproti interpolačnímu schématu druhého řádu vykazuje vyšší prostorovou přesnost na všech typech výpočetní sítě.

7 TURBULENTNÍ PAPERKY

7.1 Ponořený kruhový paprsek

Ponořený kruhový paprsek je druhem turbulentního proudění, které je označováno jako *volná smyková turbulence*. Jedná se o proud tekutiny (kapaliny či vzdušiny), který vytéká do okolního prostředí z kruhového otvoru (trysky) průměru d . Paprsky tekutiny se vyznačují významnými difúzními vlastnostmi a přenosem hybnosti. Ukázka ponořeného kruhového paprsku je uvedena na **obr. 7.1**.

Ke vzniku paprsků dochází při interakci dvou tekutin, tj. tekutiny tvořící prostředí a pronikající tekutiny. Na hranicích paprsku vznikají *volné smykové vrstvy*, které jsou téměř vždy nestabilní, což má za následek vznik vírových struktur. Pro smykové vrstvy bývá charakteristické, že mají velmi malý příčný rozměr ve srovnání s délkou proudění.



Obr. 7.1 Ponořený turbulentní paprsek [42]

Podle druhu tekutiny v paprsku rozlišujeme paprsky *kapalné*, *plynné* a *několikafázové*. Pokud je prostředí, do něž daný paprsek vytéká, tvořené stejnou tekutinou jako je tekutina tvořící paprsek, mluvíme o *ponořeném paprsku*. Druhým případem je *volný paprsek*, u kterého tekutina vytéká do prostředí tvořeného vzduchem při atmosférickém tlaku. [36]

Na základě režimu proudění lze rozlišovat dva základní druhy ponořených paprsků, kterými jsou paprsky *laminární* a *turbulentní*. Nicméně v naprosté většině vyšetřovaných případů proudění v ponořeném paprsku se bude jednat o turbulentní ponořené paprsky, jelikož postačí i velmi malá hodnota Re (přibližně $Re = 10 \div 100$), aby se stal paprsek turbulentním. [42]

POZN.: Turbulentní ponořené paprsky lze dále rozlišovat na základě mnoha dalších vlastností, kterými mohou být hybnost, charakteristika prostředí, geometrie trysky, popř. průběh pronikání do okolní tekutiny, který může být souvislý či nesouvislý. Podrobnější rozdělení lze nalézt v [11], [12] a [42].

7.1.1 Pohybové rovnice

V následujícím textu budou uvedeny rovnice popisující proudění kruhového turbulentního paprsku. Výchozími rovnicemi budou *Reynoldsovy rovnice* uvedené v cylindrických souřadnicích (r, ϕ, z) doplněné o *rovnici kontinuity*. Reynoldsovy rovnice v cylindrickém systému pro ustálené osově symetrické proudění reálné tekutiny jsou dány ve tvaru [34]

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_r'^2}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{v_r' v_z'}}{\partial r} + \frac{\overline{v_r'^2}}{r} - \frac{\overline{v_\phi'^2}}{r} \right), \quad (7.1)$$

$$V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\phi}{\partial z} + \frac{V_r V_\phi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_r' v_\phi'}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{v_\phi' v_z'}}{\partial z} + \frac{2 \overline{v_r' v_\phi'}}{r} \right), \quad (7.2)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_r' v_z'}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{v_z'^2}}{\partial z} + \frac{\overline{v_r' v_z'}}{r} \right) \quad (7.3)$$

a rovnice kontinuity ve tvaru [34]

$$\frac{\partial}{\partial r} r V_r + \frac{\partial}{\partial z} r V_z = 0, \quad (7.4)$$

kde V_r, V_ϕ a V_z jsou časově středované složky rychlosti ve směrech r, ϕ, z a v_r', v_ϕ', v_z' jsou příslušné fluktuace rychlosti.

Následně budeme uvažovat, že nedochází k rotaci proudění kolem osy x , tj. velikost úhlu ϕ je konstantní ($v_\phi = 0$). Poté veškeré členy v rov. (7.1) a (7.2) obsahující člen v_ϕ a jeho derivace z výše uvedených rovnic vymizí. Dále pro složky rychlosti v paprsku platí $v_z \gg v_r$; gradienty v radiálním směru jsou mnohem větší oproti gradientům ve směru axiálním. Pro velké hodnoty Reynoldsova čísla lze zavést předpoklad, že vazká napětí jsou mnohem menší oproti turbulentním smykovým napětím a normálová turbulentní napětí lze v radiálním uvažovat za téměř shodná s napětími v obvodovém směru. Pomocí výše uvedených předpokladů je možné pohybové rovnice zjednodušit do tvaru [34]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{v_r'^2}}{\partial r}, \quad (7.5)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r'v_z'} + \frac{\overline{v_r'v_z'}}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v_z'^2} \right), \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} rV_r + \frac{\partial}{\partial z} rV_z = 0. \quad (7.7)$$

Integrací rov. (7.5) a substitucí do rov. (7.6) při zavedení zjednodušujících předpokladů, které jsou platná pro rovinný paprsek, obdržíme výraz [34]

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r'v_z'), \quad (7.8)$$

kde p je nyní statický tlak vně paprsku. Vzdálenost ve směru proudění bude dále označována jako x . Složky rychlosti v axiálním, resp. radiálním směru budeme označovat u resp. v . Pro tečné napětí je možné zavést výraz $\tau = -\rho \overline{v_r'v_z'}$. Na základě těchto předpokladů lze pohybové rovnice přepsat do tvaru [34]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial r\tau}{\partial r}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} rU + \frac{\partial}{\partial r} rV = 0. \quad (7.10)$$

Ve většině případů je člen dp/dx téměř nulový, proto v následujícím textu nebude tlakový gradient uvažován. Rov. (7.9) potom přechází do tvaru [34]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial r\tau}{\partial r}. \quad (7.11)$$

Rovnice (7.9) a (7.11) jsou zjednodušenými pohybovými rovnicemi kruhového paprsku.

7.1.2 Integrovaný tvar rovnice hybnosti

Pro kruhové paprsky tekutiny pronikající do klidového prostředí, tvořeném tekutinou se shodnými vlastnosti s pronikajícím proudem, lze dokázat, že tok hybnosti zůstává neměnný.

Roznásobením rov. (7.11) členem ρr a následnou integrací podle r od $r = 0$ do $r = \infty$, obdržíme [34]

$$\int_0^{\infty} \rho U r \frac{\partial U}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho V r \frac{\partial U}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} \frac{\partial \tau}{\partial r} dr, \quad (7.12)$$

$$\int_0^{\infty} \rho U r \frac{\partial U}{\partial x} dr = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho U^2 2\pi r dr, \quad (7.13)$$

$$\int_0^{\infty} \rho V r \frac{\partial U}{\partial r} dr = |\rho U V r|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \rho U \frac{\partial rV}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} \rho U \frac{\partial rU}{\partial r} dr = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho U^2 2\pi r dr, \quad (7.14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tau}{\partial r} dr = |r\tau|_0^{\infty} = 0. \quad (7.15)$$

Odkud dostáváme [34]

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho U^2 2\pi r dr = 0. \quad (7.16)$$

Rov. (7.16) udává, že míra změny axiálního toku hybnosti v axiálním směru je nulová, tudíž tok hybnosti v osovém směru zůstává konstantní.

7.1.3 Integrální tvar energetické rovnice

Pro zavedené předpoklady o kruhovém paprsku a okolním klidovém prostředí bude odvozen tvar energetické rovnice v integrální formě obdobně, jako tomu bylo při získání integrální rovnice zachování hybnosti. Rozdíl spočívá v roznásobení rov. (7.11) členem $\rho U r$ a následnou integrací od $r = 0$ do $r = \infty$ získáme následující tvary rovnic [34]

$$\int_0^{\infty} \rho r U^2 \frac{\partial U}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho r U V \frac{\partial U}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} U \frac{\partial r \tau}{\partial r} dr, \quad (7.17)$$

$$\int_0^{\infty} \rho r U^2 \frac{\partial U}{\partial x} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho U^2}{2} 2\pi r dr, \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho r U V \frac{\partial U}{\partial r} dr &= \int_0^{\infty} r V \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho U^2}{2} dr = \left| r V \frac{\rho U^2}{2} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\rho U^2}{2} \frac{\partial r V}{\partial r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho U^2}{2} \frac{\partial U}{\partial x} 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Spojením těchto dvou členů obdržíme [34]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho r U^2 \frac{\partial U}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho r U V \frac{\partial U}{\partial r} dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} U \frac{\rho U^2}{2} 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U \frac{\rho U^2}{2} 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Integrand výše uvedené rovnice lze považovat za *tok kinetické energie* na elementární prstencové ploše. Pro zbývající člen na pravé straně rov. (7.11) platí následující [34]

$$\int_0^{\infty} U \frac{\partial r \tau}{\partial r} dr = |U r \tau|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} r \tau \frac{\partial U}{\partial r} dr = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tau \frac{\partial U}{\partial r} 2\pi r dr. \quad (7.21)$$

Integrand v rov. (7.21) vyjadřuje, že míra, ve které tok kinetické energie klesá, je rovna míře produkce turbulence. Sloučením rov. (7.19) a rov. (7.21) lze získat upravený tvar integrální rovnice zachování energie, tj.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U \frac{\rho U^2}{2} 2\pi r dr = - \int_0^{\infty} \tau \frac{\partial U}{\partial r} 2\pi r dr. \quad (7.22)$$

Výše zmíněná rov. (7.22) nám říká, že míra poklesu toku kinetické energie je rovna míře, ve které je turbulence produkována.

POZN.: Zavedením členu E , který představuje kinetickou energii paprsku v libovolném průřezu a členu E_0 , reprezentujícím počáteční hodnotu kinetické energie v ústí trysky, můžeme průběh kinetické energie vyjádřit pomocí následujícího výrazu [34]

$$\frac{E}{E_0} = C_1 \frac{1}{x/d}, \quad (7.23)$$

kde C_2 je empirická konstanta, pro kterou platí $C_1 = 4,1$. [1]

7.1.4 Hypotéza o strhávání tekutiny

Pokud je Q_0 objemové množství tekutiny proudící z trysky a Q je objemový průtok v paprsku v libovolném průřezu ve směru x , je známo, že poměr Q/Q_0 je větší než 1 a s rostoucí vzdáleností ve směru proudění narůstá. Důsledkem nárůstu objemového množství tekutiny v paprsku je strhávání okolní tekutiny.

Objemový průtok tekutiny v paprsku je možné vyjádřit jako [34]

$$Q = \int_0^{\infty} U 2\pi r dr. \quad (7.24)$$

Změna průtočného množství tekutiny v paprsku je vyjádřena pomocí výrazu [34]

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U 2\pi r dr = 2\pi \bar{b} V_e, \quad (7.25)$$

kde \bar{b} je nominální vnější hranice paprsku, při které je osová rychlost téměř nulová a V_e je rychlost strhávání okolní tekutiny. Rychlost okolní tekutiny může být vyjádřena jako násobek osově (maximální) rychlosti, tj. [22]

$$V_e = \alpha_e U_{max}. \quad (7.26)$$

Pro koeficient α_e přibližně platí $\alpha_e = 0,026$. [22]

POZN.: Při zavedení členu Q , který vyjadřuje objemový průtok v libovolném profilu tekutiny a členu Q_0 , jenž představuje počáteční objemový průtok v ústí trysky, můžeme průběh objemového průtoku v libovolném průřezu vyjádřit pomocí výrazu [34]

$$\frac{Q}{Q_0} = C_2 \frac{x}{d}, \quad (7.27)$$

kde C_2 je empirické konstanta, pro kterou platí $C_2 = 0,32$. [1]

7.1.5 Šířka paprsku

Z experimentálního pozorování paprsků vyplývá, že poloměr paprsku r resp. šířka paprsku $b = 2r$ lineárně narůstá s rostoucí vzdáleností ve směru proudění. Nárůst šířky paprsku lze vyjádřit pomocí veličiny označované jako *koeficient úměrnosti*. Obvykle uváděné hodnoty koeficientu úměrnosti jsou vztaheny k poloze $r_{1/2}$ na průřezu paprsku, kde je rychlost paprsku rovna právě polovině osově rychlosti v zadaném průřezu.

Koeficient úměrnosti je určen pomocí výrazu [31]

$$S = \frac{dr_{1/2}}{dx}, \quad (7.28)$$

jenž je po délce paprsku konstantní. Poloviční šířku paprsku $r_{1/2}(x)$ je pak možné určit z výrazu [31]

$$r_{1/2} = S(x - x_0), \quad (7.29)$$

kde x_0 je poloha virtuálního počátku, tj. hypotetického místa nulové šířky paprsku.

POZN.: Pro laboratorně pozorované hodnoty koeficientu úměrnosti S bylo zjištěno, že jejich hodnota je nezávislá na druhu tekutiny (voda, vzduch), průměru trysky d ani na rychlosti tekutiny v ústí trysky U_0 [13]. Velikost koeficientu úměrnosti lze uvažovat podle Husseina (laser-Doppler data, 1994) hodnotou $S = 0,094$ [31].

7.1.6 Reynoldsovo číslo

Na základě zachování hybnosti tekutiny v paprsku je součin $r_{1/2}(x)U_0(x)$ nezávislý na poloze x , jelikož platí, že poloměr paprsku ve směru proudění lineárně narůstá $r_{1/2} \sim x$, zatímco rychlost proudění hyperbolicky klesá $U_{max} \sim x^{-1}$. Součin těchto veličin je tedy možno považovat za konstantní a vyskytuje se ve výrazu pro výpočet lokálního Reynoldsova čísla, které je dáno výrazem [31]

$$Re_0 = \frac{r_{1/2}(x)U_{max}(x)}{\nu}, \quad (7.30)$$

který je nezávislý na poloze x .

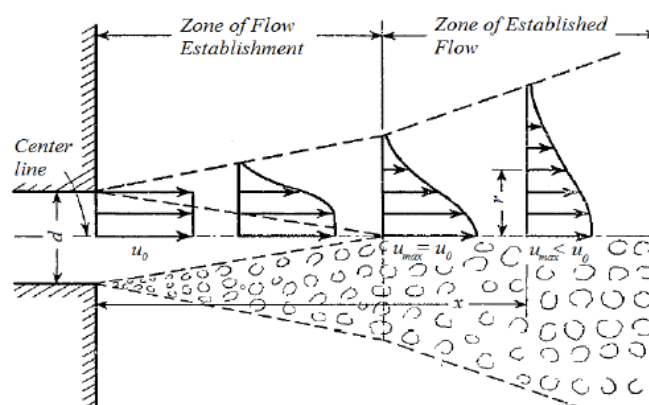
Jelikož lze proudění tekutiny v paprsku určit pomocí rychlosti tekutiny v trysce U_{max} , průměru trysky d a kinematické vazkosti tekutiny ν , zůstává Reynoldsovo číslo jediným bezrozměrným parametrem proudění.

POZN.: Reynoldsovo číslo má vliv na velikost měřítek vírových struktur ve smykové vrstvě paprsku. Při menší hodnotě Reynoldsova čísla jsou měřítka větší oproti měřítkům vírových struktur při vyšších Reynoldsových číslech.

7.1.7 Základní oblasti ponořeného kruhového paprsku

Při proudění tekutiny v ponořeném turbulentním paprsku lze rozeznávat celkem dvě rozdílné oblasti proudění:

- Oblast vývinu proudění (*Zone of Flow Establishment - ZFE*),
- Oblast vyvinutého proudění (*Zone of Established Flow - ZEF*).



Obr. 7.2 Ukázka základních oblastí ponořeného turbulentního paprsku [1]

7.1.7.1 Oblast vývinu proudění

Oblast vývinu proudění *ZFE* je vymezena ústím trysky a koncem jádra paprsku. Zatímco šířka smykové vrstvy ve směru proudění lineárně narůstá, v oblasti jádra paprsku dochází k lineárnímu poklesu šířky. Důležitým poznatkem v oblasti vývinu proudění je, že zde dochází k transformaci z přibližně rovnoměrného rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky na rychlostní profil, jenž lze vyjádřit pomocí Gaussovy křivky.

Jádro paprsku je oblast, ve které jsou rychlosti rovné rychlostem v ústí trysky. Délka paprsku se obvykle udává v násobcích průměru trysky d (přibližně platí $L_{ZFE} = 4$ až $10d$). V oblasti jádra paprsku nedochází ke vzniku vírových struktur.

Rozdělení rychlosti v *ZFE* může být popsáno pomocí následujících výrazů [11]

$$u = U_0 \quad (\text{pro } r \leq R),$$

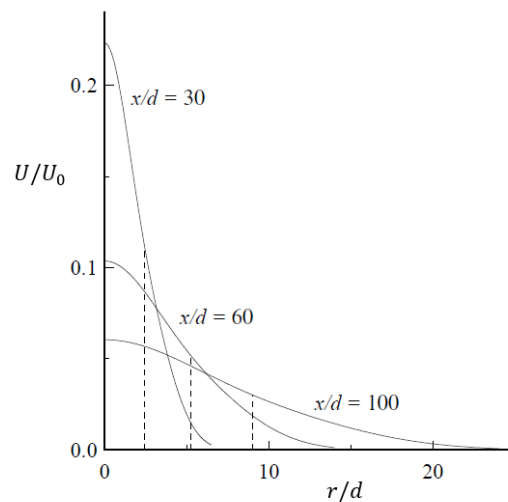
$$u = U_0 \exp \left[-\frac{(r - R)^2}{b^2} \right] \quad (\text{pro } r > R), \quad (7.31)$$

kde R je poloměr jádra paprsku a r je poloměr paprsku.

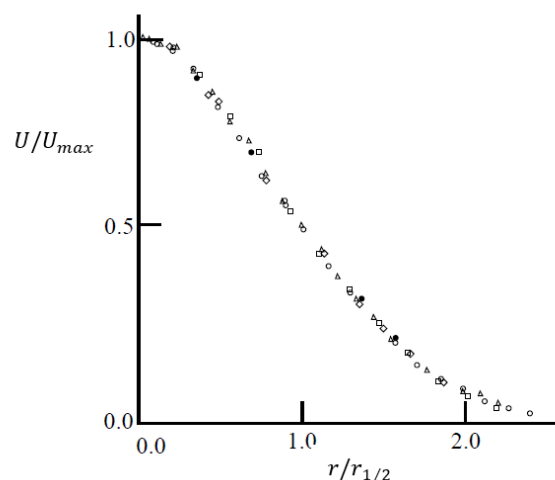
7.1.7.2 Oblast vyvinutého proudění

Oblast vyvinutého proudění *ZEF* navazuje na *ZFE*. V této oblasti lze nalézt další podoblast označovanou jako *transientní zóna* (přechodová oblast), ve které již nejsou patrné vlivy počátečních podmínek proudění a na konci této oblasti dochází zde ke vzniku plně vyvinutého turbulentního proudění. Jednotlivé rychlostní profily mají různou velikost maximální rychlosti, avšak jejich tvar zůstává neměnný (přibližně platí pro vzdálenosti $x/d > 30$). Při vynesení rychlostních profilů do bezrozměrné formy grafu, splynou rychlostní profily v jednu univerzální křivku, která podává důkaz o vzájemné podobnosti (*self-similarity*) proudění tekutiny v paprsku.

Ukázka rychlostních profilů v jednotlivých vzdálenostech oblasti vyvinutého proudění je uvedena na **obr. 7.3** a vynesení jednotlivých profilů do bezrozměrné formy grafu je uvedeno na **obr. 7.4**.



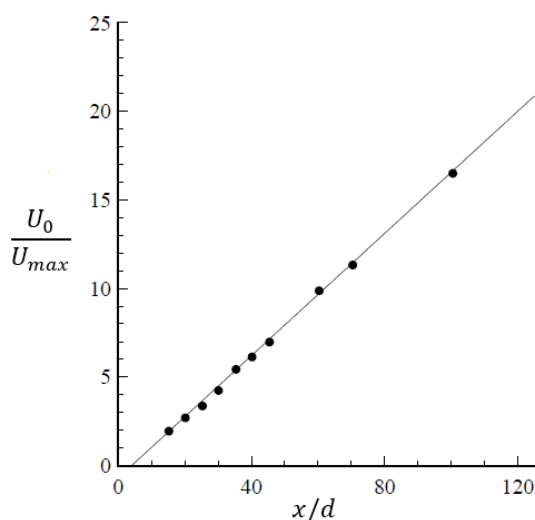
Obr. 7.3 Rychlostní profily při ($Re = 95\,500$). Čárkované čáry značí poloviční šířku $r_{1/2}(x)$. Jednotlivé rychlostní profily se liší různou šikmostí Gaussova rozdělení. [31]



Obr. 7.4 Symboly \circ , $x/d = 40$; Δ , $x/d = 50$; \square , $x/d = 60$; \diamond , $x/d = 75$; \bullet , $x/d = 97,5$ [31]

Pokud nedochází k interakci proudění tekutiny v paprsku s pevnými stěnami, je osová rychlost paprsku rychlostí maximální $U_c = U_{max}$. Na začátku oblasti *ZEF* je maximální osová rychlost rovna rychlosti v jádře paprsku (tj. rychlosti v ústí trysky), ale s rostoucí vzdáleností ve směru proudění dochází k hyperbolickému poklesu osově rychlosti ($U_{max} \sim x^{-1}$). Vyneseme-li průběh osově rychlosti ve formě U_0/U_{max} ve vztahu x/d , obdržíme graf, v němž člen U_0/U_{max} s rostoucí vzdáleností x/d lineárně narůstá, což je inverzním příkladem k hyperbolickému poklesu osově rychlosti.

Vyjádření experimentálně naměřených osových rychlostí je uveden na **obr. 7.5**. Počátek přímky uvedené na **obr. 7.5** je označován jako *virtuální počátek* x_0 .



Obr. 7.5 Experimentální měření osově rychlosti ponořeného kruhového paprsku v závislosti na vzdálenosti ve směru proudění. Experimentální data *Hussein (1994)*. Přímka určená pomocí rov. (7.32) při $x_0/d = 4$ a $B = 5,8$. [31]

Maximální rychlost tekutiny v paprsku je možné popsat pomocí výrazu [31]

$$\frac{U_{max}}{U_0} = \frac{B}{(x - x_0)/d}, \quad (7.32)$$

kde B je empiricky stanovená konstanta a x_0 je poloha virtuálního počátku. Velikost konstanty B dosahuje podle Husseina (1994) *hot-wire data* hodnoty $B = 5,9$, popř. *laser-Doppler data* $B = 5,8$. [31]

7.1.8 Vzájemná podobnost proudění

Vzájemná podobnost (*self-similarity*) udává, že příslušné profily mají stejný tvar, který je nezávislý na vzdálenosti ve směru proudění, přičemž se tyto profily liší pouze ve velikosti jednotlivých charakteristik proudění a šířce paprsku. Rychlostní profily se stávají vzájemně podobné v oblasti plně vyvinutého turbulentního proudění ($x/d > 30$), kde nejsou patrné vlivy počátečních podmínek proudění. Při proudění tekutiny v paprsku za vysokých hodnot Reynoldsova čísla ($Re > 10^4$) je možné pro výpočet maximální rychlosti tekutiny v paprsku U_{max} , resp. poloviční šířky paprsku $r_{1/2}$ uvažovat rov. (7.32),

resp. (7.29). Vzájemná podobnost v příčných profilech bývá obvykle vyjádřena zavedením následujících proměnných [31]

$$\xi = r/r_{1/2}, \quad (7.33)$$

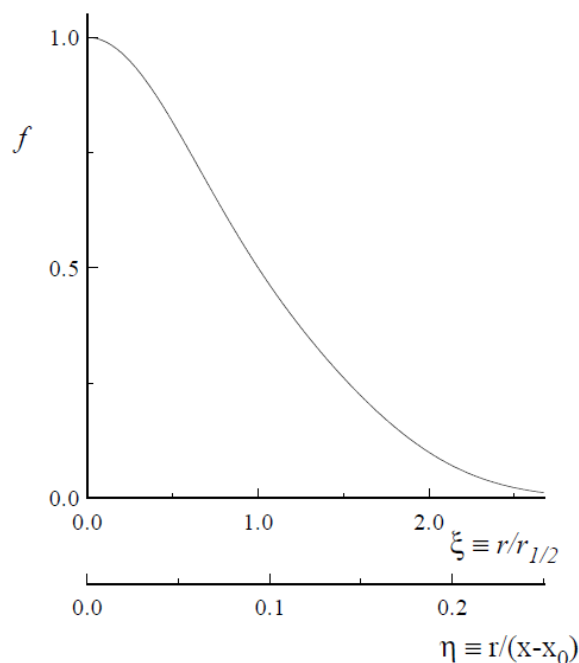
popř. [31]

$$\eta = r/(x - x_0), \quad (7.34)$$

pro které platí $\eta = S\xi$ [31]. Na základě výše uvedených charakteristik lze vzájemně podobný rychlostní profil definovat jako funkci charakteristiky η popř. ξ

$$f(\eta) = \bar{f}(\xi) = u(x, r)/U_{max}(x). \quad (7.35)$$

Univerzální vzájemně podobný profil osové rychlosti je uveden na **obr. 7.6**.



Obr. 7.6 Vzájemně podobný profil osové rychlosti kruhového paprsku. Křivka byla sestrojena na základě LDA dat Hussein (1994). [31]

7.1.9 Uniformní turbulentní vazkost

Při řešení rovnic pro turbulentní mezní vrstvy se vyskytuje zjevný problém s uzavřením rovnic, jelikož máme tři neznámé veličiny U, V a $\overline{u'v'}$, avšak dvě rovnice (kontinuity a hybnosti). Uzavření tohoto systému můžeme dosáhnout zavedením turbulentní vazkosti $\nu_t(x, r)$. Smykové napětí je poté možné určit jako

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (7.36)$$

Při platnosti vzájemné podobnosti proudění uvnitř kruhového paprsku, že hodnota v_T se mění v závislosti na $r_{1/2}$ a U_{max} , tj. [31]

$$v_t(x, r) = r_{1/2}(x)U_{max}(x)\hat{v}_t(\eta) \quad (7.37)$$

a dále, že v převážné části paprsku dosahuje hodnota normalizované turbulentní difuzivity $\hat{v}_t(\eta)$ velikosti 0,028 (v rozmezí 15%) [31]. Z tohoto důvodu je možné při řešení rovnic pro mezní vrstvu považovat veličinu $\hat{v}_t(\eta)$ za konstantní a nezávislou na η , a jelikož je i součin hodnot $r_{1/2}(x)U_{max}(x)$ nezávislý na poloze x , je možné brát turbulentní vazkost za konstantu (nezávislou na poloze x a r) a pohybové rovnice mezní vrstvy lze zjednodušit do tvaru [31]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{v_T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (7.38)$$

Pro vzájemně podobný profil $f(\eta) = U/U_{max}$ při $\eta = r/(x - x_0)$ obdržíme řešení ve tvaru [31]

$$f(\eta) = \frac{1}{(1 + a\eta^2)^2}, \quad (7.39)$$

kde je koeficient a určen pomocí koeficientu úměrnosti S jako [31]

$$a = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{S^2}. \quad (7.40)$$

Tvar rychlostního profilu je v dobré shodě s experimentálními pozorováními vyjma okraje paprsku, kde dochází k prudkému poklesu empiricky stanovené velikosti turbulentní vazkosti. Koeficient úměrnosti je možné stanovit na základě turbulentní difuzivity jako [31]

$$S = 8(\sqrt{2} - 1)\hat{v}_t. \quad (7.41)$$

Veličinu \hat{v}_t je možné vyjádřit pomocí *turbulentního Reynoldsova čísla* jako [31]

$$Re_t \equiv \frac{U_{max}(x)r_{1/2}(x)}{v_t} = \frac{1}{\hat{v}_t} \approx 35. \quad (7.42)$$

Při zavedení zjednodušení pomocí uniformní turbulentní vazkosti je střední pole rychlosti v turbulentním kruhovém paprsku shodné s rychlostním polem v laminárním režimu proudění při $Re_t = 35$. [31]

POZN.: Podrobné odvození univerzálního tvaru rychlostního profilu v bezrozměrných souřadnicích včetně zavedených předpokladů lze nalézt v [31].

7.2 Vzájemné spolupůsobení paprsků

V následující podkapitole bude popsáno vzájemné spolupůsobení paprsků v řadě. Průměr trysky a velikost vstupní rychlosti jsou pro jednotlivé paprsky neměnné. Na základě Reichardtovy induktivní teorie turbulence lze vzájemné spolupůsobení paprsků stanovit superpozicí U^2 , jelikož jsou řídicí rovnice lineární. [24]

Z Reichardtovy hypotézy (1943) pro N paprsků v rovině $(x-y)$ lze hybnost proudu paprsků ve stagnantním prostředí určit pomocí výrazu

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad \text{nebo} \quad U^2 = \sum_{i=1}^N U_i^2. \quad (7.43)$$

Pro kvadrát rychlosti z rov. (7.43) platí

$$U_{si}^2(x, y) = U_{max}^2 \sum_{i=1}^N \exp[-2(y - y_i)^2 / b^2], \quad (7.44)$$

kde je y_i je průsečík osy trysky na ose y , b je šířka paprsku a U_{max} je maximální rychlost v paprsku.

Výslednou rychlost v rovině paprsků $(x-y)$ lze stanovit jako

$$U(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N U_{si}^2(x, y)}. \quad (7.45)$$

Další způsob popisu vzájemného spolupůsobení paprsků vychází z rovnice popisující transport hybnosti pro stacionární dvourozměrné proudění v mezní vrstvě ve směru osy x . Pro osově symetrický paprsek psát ve tvaru [25]

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(ruv) = 0, \quad (7.46)$$

kde u, v jsou okamžité složky rychlosti ve směru osy x a v cylindrických souřadnicích.

Reichardt na základě experimentálních pozorování turbulentních paprsků zavedl předpoklad, že přenos hybnosti v laterálním směru je úměrný příčnému gradientu horizontální složky hybnosti

$$UV = \Lambda(x) \frac{\partial U^2}{\partial r}, \quad (7.47)$$

kde $\Lambda(x)$ je délkové měřítko, které je pouze funkcí polohy x .

S využitím rov. (7.47) lze pohybovou rovnici pro kruhový paprsek přepsat při zanedbání příspěvku fluktuací rychlosti do tvaru

$$\frac{\partial U^2}{\partial x} = \frac{\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U^2}{\partial r} \right). \quad (7.48)$$

Aplikací poznatku o vzájemné podobnosti proudění v paprsku, ze kterého lze vyvodit, že pro hybnost proudu v paprsku přibližně platí $M \sim U_{max}^2 b^2$ a maximální rychlost lze určit jako $U_{max}^2 = B/b^2 f(r/b)$, kde B je konstanta a pro šířku paprsku přibližně platí $b \sim x$.

Délkové měřítko je možné vyjádřit jako

$$\Lambda = \frac{b}{2} \frac{db}{dx}. \quad (7.49)$$

Řešení rov. (7.48) při využití výše uvedených poznatků nabývá tvaru

$$U^2 = \frac{B}{b^2} \exp -(r/b)^2. \quad (7.50)$$

Při vyjádření délkového měřítka $\Lambda = kx$, kde k je konstanta, pohybová rovnice může být převedena na lineární „difúzní“ rovnici v závislosti na U^2 a souřadnice $X = kx^2/2$, tj. [25]

$$\frac{\partial U^2}{\partial X} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U^2}{\partial r} \right). \quad (7.51)$$

Odtud vyplývá, že pro stejné souřadnice X (nebo r), že pokud mají všechny paprsky stejnou závislost pro $\Lambda(x)$, vzájemné příčné (rovina y - z) spolupůsobení paprsků je dáno superpozicí U^2 .

POZN.: Podrobnému popisu vzájemné interakce kruhových paprsků s využitím Reichardtovy hypotézy se věnují [2], [24] a [25].

8 MODEL TRYSKY

8.1 Tryska

8.1.1 Pojem tryska a optimální tvar trysky

Tryska (dýza) je kanál s plynulou změnou průtočného průřezu. Proudění tekutiny v trysce je děj, při kterém dochází k poklesu tlaku a zvýšení kinetické energie tekutiny. [41]

Optimální tvar trysky by měl být realizován jako plynulý, na vstupním a výstupním profilu rovnoběžný s proudnicemi, aby nedocházelo ke vzniku turbulencí vlivem náhlé změny směru proudění a zároveň rozdělení rychlostí ve výstupním profilu by mělo být rovnoměrné. [41]

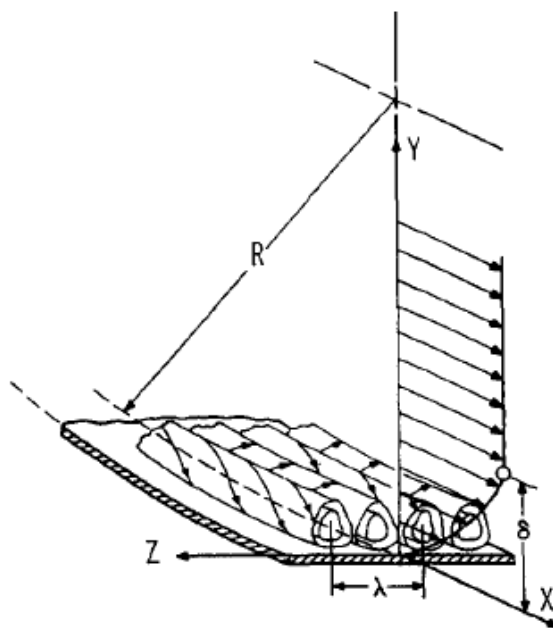
POZN.: Pokud jsou při změně tlaku fluktuace hustoty tekutiny zanedbatelné, lze pro popis proudění tekutiny v trysce využít Bernoulliho rovnici. [41]

8.2 Geometrie vnitřního tvaru trysky

Geometrie vnitřního tvaru trysky spočívá v nalezení takové křivky, která zajistí plynulý přechod z průměru přívodního potrubí D na průměr trysky d . Jelikož je průměr trysky menší oproti průměru přívodního potrubí, bude se jednat o postupně zužující se trysku, tj. konvergentní trysku.

8.2.1 Görtlerova nestabilita

Pro vyhodnocení zvoleného vnitřního tvaru trysky bude za posuzovací kritérium zvoleno *Görtlerovo číslo*, které popisuje vznik hydrodynamických nestabilit při proudění tekutiny podél konkávně zakřivené stěny.



Obr. 8.1 Hydrodynamické nestability v mezní vrstvě podél konkávně zakřivené stěny [16]

Görtlerovy víry jsou sekundárními proudy v mezní vrstvě. Počátek tvorby Görtlerových vírů je možné popsat na základě Görtlerova čísla, které udává poměr *odstředivých* a *vazkých* sil v mezní vrstvě a je určeno výrazem

$$Go = \frac{u_e \theta}{\nu} \sqrt{\frac{\theta}{R}}, \quad (8.1)$$

kde je u_e rychlost ve vnějším proudě mezní vrstvy, θ impulzová tloušťka mezní vrstvy, R je poloměr zakřivení stěny a ν je kinematická vazkost proudící tekutiny. Aplikací Reynoldsova čísla pro impulzovou tloušťku mezní vrstvy $Re_\theta = u_e \theta / \nu$ a zavedením křivosti $r'' = 1/R$, můžeme Görtlerovo číslo upravit do tvaru

$$Go = Re_\theta \sqrt{\theta r''}. \quad (8.2)$$

POZN.: Jelikož křivost na konkávní straně trysky nabývá záporných hodnot, je nutné výpočet Reynoldsova čísla přizpůsobit potřebám jednoduchého výpočtu, tj. odstranění odmocniny z výrazu pro výpočet Görtlerova čísla a výpočet provést pro kvadrát Görtlerova čísla

$$Go^2 = -Re_\theta^2 \theta r''. \quad (8.3)$$

8.2.2 Návrh geometrie vnitřního tvaru kontrakce trysky

Vnitřní tvar trysky bude modelován pomocí polynommické funkce 6. stupně, která bude min. C^2 spojitá (min. spojitost druhého řádu). Pro stanovení koeficientů polynommické funkce je nutné zadat celkem sedm podmínek, z nichž bude jedna „volná“ a šest „pevných“. Pevně zadané podmínky vychází ze zvoleného řádu spojitosti (funkce bude spojitá až do druhé derivace) a ze znalosti velikosti průměru přívodního potrubí D a průměru trysky d . Volná podmínka umožňuje zvýšení řádu polynommické funkce, která vede ke snížení hodnoty křivosti a její poloha je předmětem optimalizace tvaru trysky.

Pro polynommickou funkci 6. stupně, její první a druhou derivaci platí

$$r(x) = Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fx + G, \quad (8.4)$$

$$r'(x) = 6Ax^5 + 5Bx^4 + 4Cx^3 + 3Dx^2 + 2Ex + F, \quad (8.5)$$

$$r''(x) = 30Ax^4 + 20Bx^3 + 12Cx^2 + 6Dx + 2E, \quad (8.6)$$

kde A, B, C, D, E a F jsou hledané koeficienty.

Níže jsou uvedeny okrajové podmínky označované jako „pevné“ použité pro výpočet hledaných koeficientů polynommické funkce: [14]

$$r(0) = D/2, \quad r(L) = d/2, \quad (8.7)$$

$$r'(0) = 0, \quad r'(L) = 0, \quad (8.8)$$

$$r''(0) = 0, \quad r''(L) = 0. \quad (8.9)$$

Okrajová podmínka označovaná jako „volná“ je vázána na polohu maximální křivosti na konkávní straně a vychází z předpokladu, že derivace křivosti je v bodě maxima křivosti nulová, tj. $r'''(z) = 0$. Volná okrajová podmínka je vázána na polohu maximální hodnoty křivosti a vychází z předpokladu, že maximální velikost Görtlerova čísla se vyskytuje v místě maximální křivosti vnitřního tvaru trysky.

Pro „volnou“ podmínku křivosti platí

$$r'''(z) = 120Az^3 + 60Bz^2 + 24Cz + 6D. \quad (8.10)$$

Poloha bodu z , ve kterém je derivace křivosti nulová, je předmětem optimalizace návrhu tvaru trysky. Snížení křivosti na konkávní straně trysky vede k navýšení křivosti na konvexní straně trysky, avšak Görtlerova nestabilita je vázána na konkávní stranu trysky, a proto zvýšení křivosti na konvexní straně trysky nemá vliv na vznik daných hydrodynamických nestabilit uvnitř trysky.

POZN.: Označení trysky vychází ze základních návrhových rozměrů trysky T , kterými jsou celková délka trysky L , průměr přívodního potrubí D , průměr trysky d a délka kontrakce $l - TL$ ($D/d/l$) mm. Pro konkrétní návrh trysky bude použita tryska označovaná jako T155 (100/30/150).

8.3 Modelování tvaru trysky

Model trysky má za účel nalézt optimální tvar trysky, ve kterém bude maximální velikost Görtlerova čísla minimální, tj. optimálně doplnit systém okrajových podmínek vhodnou volbou parametru z . Pro stanovení optimálního tvaru trysky budou použity dva typy modelů, které budou označovány jako numerický a matematický model.

8.3.1 Vstupní podmínka rychlosti

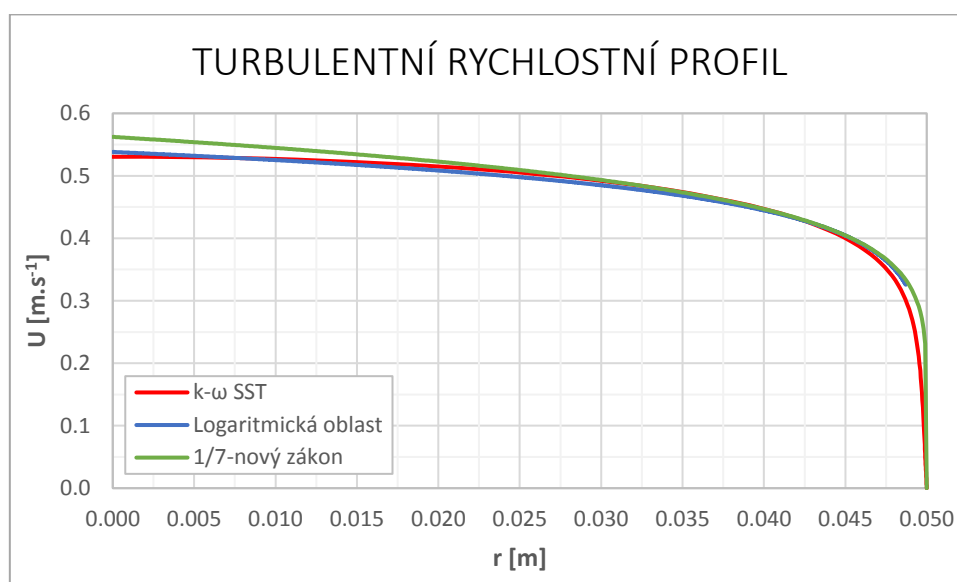
Rozdělení bodových rychlostí na počátku trysky bylo stanoveno pomocí numerického modelu přívodního potrubí. Přívodní potrubí bylo uvažováno jako hydraulicky hladké potrubí konstantního průměru $D = 0,1 \text{ m}$ o délce $L_p = 8 \text{ m}$, která měla zaručit dostatečnou vzdálenost (rozběhovou délku) pro vývin turbulentního rychlostního profilu. Střední hodnota rychlosti na počátku potrubí byla zvolena hodnotou $v_m = 0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro výpočet rychlostního profilu byl použit turbulentní model $k-\omega$ SST.

Intenzita turbulence byla stanovena pomocí výrazu [3]

$$I_{smooth\ pipe} = 0,16 Re_d^{-\frac{1}{8}}, \quad (8.11)$$

kde Re_d je Reynoldsovo číslo přívodního potrubí. Pro zadanou hodnotu střední rychlosti v_m a průměr přívodního potrubí D je možné vyčíslit hodnotu intenzity turbulence pro hydraulicky hladké potrubí rov. (8.11). Výsledná hodnota intenzity turbulence v přívodním potrubí spočtená na základě rov. (8.11) je pro $Re = 45\ 000$ přibližně rovna 4%.

Výsledky modelu přívodního potrubí byly porovnány s rozdělením rychlosti v logaritmické oblasti mezní vrstvy a 1/7novým zákonem rozdělení rychlostí po průřezu (graf 8.1).



Graf 8.1 Srovnání výsledků modelu $k-\omega$ SST s logaritmickým rozdělením rychlosti a 1/7 zákonem rozdělení rychlostí po průřezu v kruhovém potrubí

Ze srovnání výsledků modelu $k-\omega$ SST s rozdělením v logaritmické oblasti mezní vrstvy a 1/7novým zákonem vyplývá, že výsledky modelu $k-\omega$ SST jsou v dobré shodě s logaritmickým rozdělením. Rozdělení rychlosti podle 1/7nového zákona se od logaritmického rozdělení rychlosti poměrně výrazně odlišuje v oblasti blízko stěny a v ose potrubí. Při tvorbě matematického modelu trysky bude použito logaritmické rozdělení rychlosti. Získané rozdělení rychlostí po průřezu přívodního potrubí bylo implementováno do numerického modelu trysky jako vstupní okrajová podmínka.

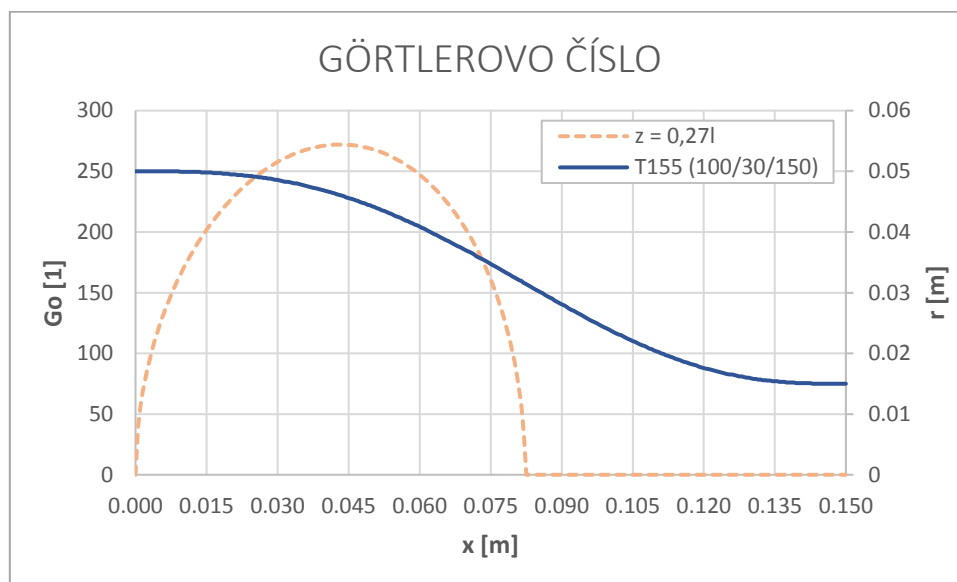
8.3.2 Matematický model trysky (prvotní návrh)

Předmětem prvotního návrhu matematického modelu bylo sestavení vnitřní geometrie tvaru trysky na základě výše uvedených "pevných" okrajových podmínek doplněných variací polohy „volné“ okrajové podmínky. Pro jednotlivé polohy „volné“ okrajové podmínky byly vyhodnoceny pomocí zjednodušeného výpočtu velikosti Görtlerova parametru. Poloha „volné“ okrajové podmínky, při níž vychází hodnota Görtlerova čísla minimální, je označována jako optimální.

Tvorbu matematického modelu trysky lze rozdělit do dvou fází. První fáze spočívá v aplikaci zjednodušujících předpokladů, pomocí kterých je tryska modelována jako několik postupně na sebe

navazujících potrubí o zmenšujícím se průměru daným navrženým tvarem trysky. Výpočet maximální rychlosti a jednotlivých tloušťek mezní vrstvy v prvotním návrhu neuvažoval s vlivem transformace rychlostního profilu vyvolané změnou tvaru trysky.

Optimální tvar trysky s vyznačením průběhu Görtlerova čísla stanovený pomocí prvotního návrhu vnitřního tvaru trysky je uveden níže (**graf 8.2**).



Graf 8.2 Výsledný průběh Görtlerova čísla pro optimální polohu bodu z podle výsledků prvotního návrhu modelu

Výpočet Görtlerova čísla uvnitř trysky pomocí prvotního návrhu matematického modelu vychází z navržené polynomické funkce 6. stupně, pro kterou byla vypočtena její první, druhá (křivost) a třetí derivace. Následně byla na základě rovnice kontinuity vypočtena hodnota střední průřezové rychlosti pro jednotlivé polohy uvnitř trysky a jim příslušející velikosti Reynoldsova čísla. Jelikož bylo potrubí uvažováno jako hydraulicky hladké, lze jednotlivé velikosti součinitele ztrát třením λ stanovit na základě velikosti Reynoldsova čísla prostřednictvím Prandtl-Kármánovy rovnice (za předpokladu splnění platnosti rovnice). Ze známé velikosti součinitele λ a velikosti střední průřezové rychlosti je možné určit třecí rychlost u_τ . Nyní máme veškeré potřebné charakteristiky pro stanovení konkrétních hodnot maximální rychlosti v trysce, ze kterých lze vyčíslit hodnoty pošinovací tloušťky. Velikost impulzové tloušťky byla vypočtena z velikosti pošinovací tloušťky pomocí tvarového parametru. V prvotním návrhu matematického modelu trysky bylo počítáno s konstantní hodnotou velikosti tvarového parametru, která odpovídala velikosti tvarového parametru spočteného z modelu přívodního potrubí.

Variacemi návrhu trysky bylo zjištěno, že optimální hodnota odpovídá poloze $z = 0,27l$. Ukázka průběhu Görtlerova čísla podél trysky pro nalezenou optimální polohu bodu z na základě prvotního

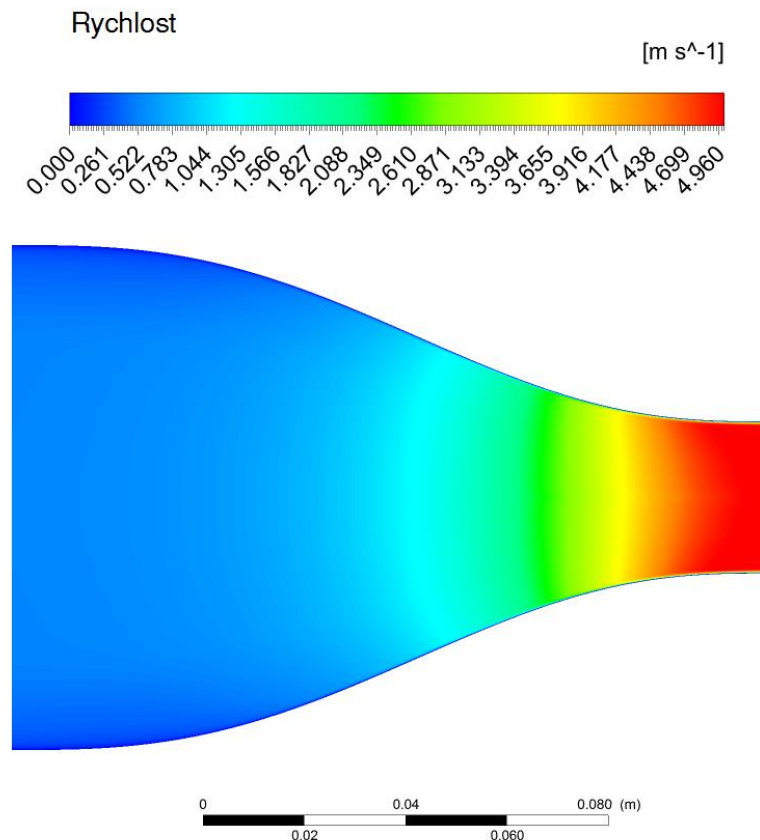
návrhu matematického modelu je uvedena výše (**graf 8.2**). Pro zjištěnou optimální polohu bodu z pomocí matematického modelu vychází maximální velikost Görtlerova čísla rovna $Go_{max} = 272$. Jelikož první fáze matematického modelu byla založena na zjednodušujících předpokladech, bylo nutné její výsledky ověřit sofistikovanějším výpočtem – numerickým modelem. Pro tyto účely byl sestaven numerický model trysky založený na turbulentním modelu $k-\omega SST$, jenž je schopen komplexně popsat proudění v zadané trysce.

Prvotní návrh tvaru trysky posloužil zejména k sestavení geometrie trysky při různé volbě velikosti optimalizačního parametru z a k prvotní představě o průběhu Görtlerova parametru uvnitř navržené trysky. K výhodám prvotního návrhu patří rychlost výpočtu Görtlerova čísla, velikost délky kroku při optimalizaci polohy parametru z .

8.3.3 Numerický model trysky

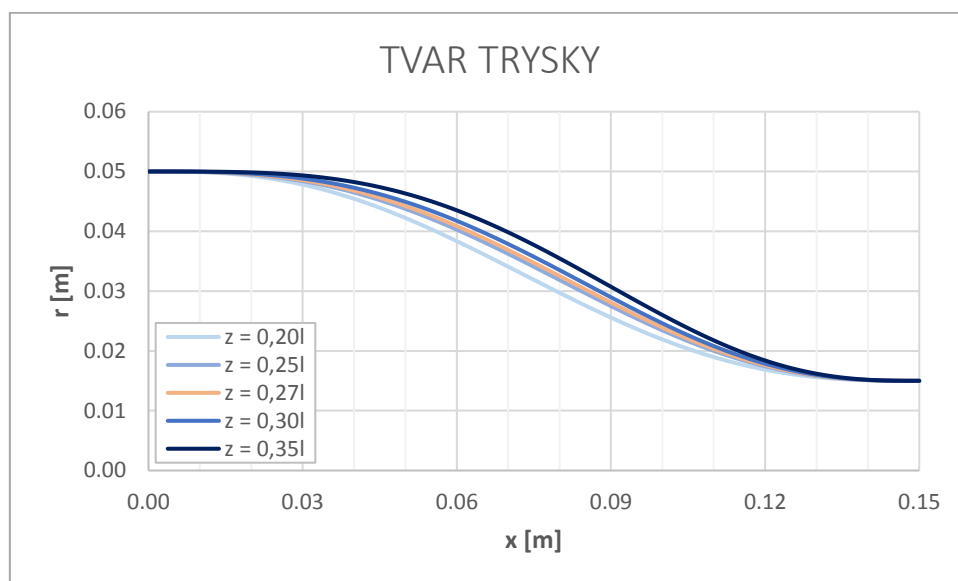
Primární účel numerického modelu spočíval ve vyhodnocení různých geometrií trysky sestavených v prvotním návrhu matematickým modelem. Celkem bylo použito pět různých tvarů trysky, které se lišily polohou bodu z . Konkrétně se jedná o polohy $z = 0,20l; 0,25l; 0,30l; 0,35l$ a optimalizovaný parametr $z = 0,27l$ (výsledná optimální poloha prvotního návrhu matematického modelu).

Modelované hodnoty velikosti rychlosti uvnitř trysky jsou uvedeny níže (**obr. 8.2**).



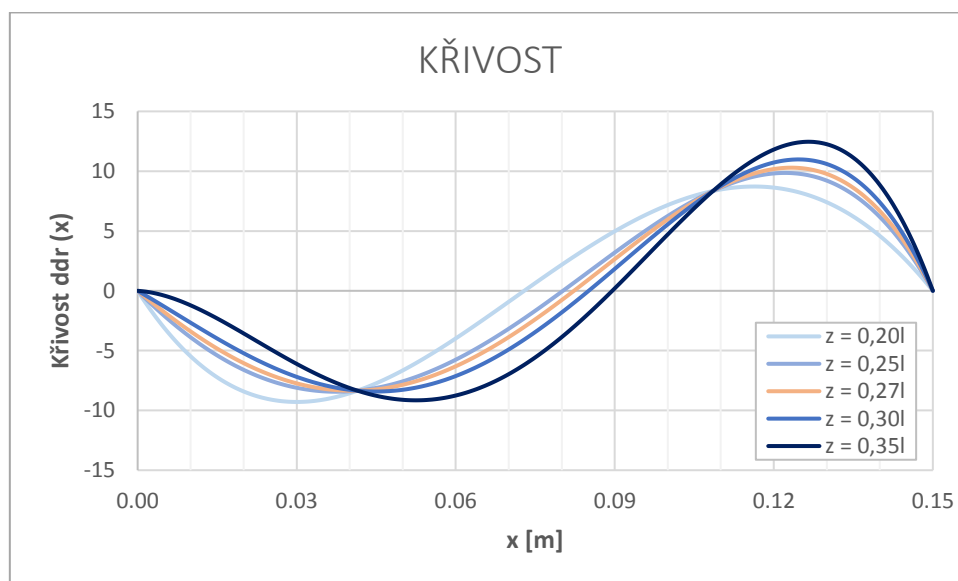
Obr. 8.2 Znárodnění velikostí rychlostí uvnitř trysky ($z = 0,25l$)

Vyšetřované tvary trysky pro jednotlivá polohy bodu z jsou uvedeny níže (**graf 8.3**).



Graf 8.3 Ukázka různých tvarů trysek použitých při výpočtu pomocí numerického modelu

Křivosti odpovídající zkoumaným tvarům křivky jsou uvedeny níže (**graf 8.4**).



Graf 8.4 Průběhy křivostí vyšetřovaných tvarů křivky pro různé polohy bodu z

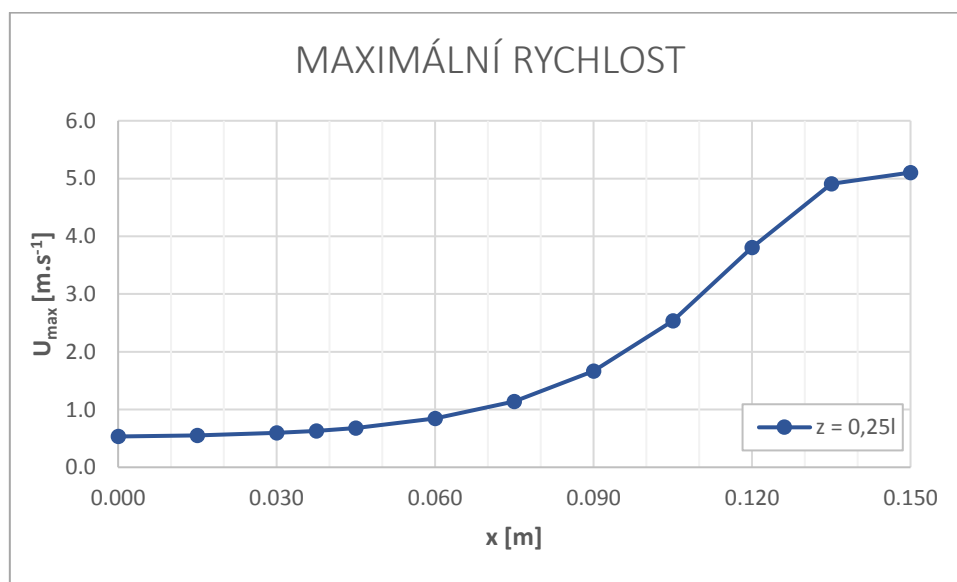
Pro potřeby řešení proudění tekutiny (vody) v trysce byl použit turbulentní model $k-\omega$ SST. Proudění tekutiny v trysce bylo řešeno jako stacionární (použitý algoritmus řešení *SIMPLE*). Použité výpočetní schéma bylo založeno na korekcích tlaku a je označované jako *pressure-based solver*. Hodnota intenzity turbulence uvnitř trysky byla zvolena hodnotou 4%, která odpovídá rov. (8.11). Za interpolační schéma byla použita protiproudá interpolace 2. řádu (stejně interpolační schéma zvoleno i při modelování přívodního potrubí). Stěna trysky byla uvažována jako hydraulicky hladká. Pro výpočet tlaku bylo za interpolační schéma použito *Presto!*, pro výpočet gradientů *Least squares Cell Based*.

K výhodám numerického modelu patří vyšší přesnost dosažených výsledků stanovených výpočtem za předpokladu správného nastavení turbulentního modelu a jeho správného použití na kvalitní výpočetní síti. Nicméně oproti matematickému modelu je výpočet a následné vyhodnocení výsledků časově náročnější, a proto bylo snahou převzít poznatky o proudění v trysce zjištěné pomocí numerického modelu a aplikovat je v matematickém modelu (druhotný návrh). Tím pádem může dojít ke spojení předností prvotního návrhu tvaru trysky (rychlost, jednoduchost) s přesností numerického modelu. Nicméně je třeba mít na zřeteli, že dané výsledky budou v dobré shodě s modelovanými tvary trysek. Při volbě odlišné geometrie trysky může dojít k odchýlení výsledků.

8.3.3.1 Zpracování výsledků numerického modelu trysky

Za optimální tvar trysky je považován tvar trysky, který vykazuje nejmenší hodnoty Görtlerova čísla získaného na základě modelu $k-\omega$ SST. Pro vyhodnocení velikosti Görtlerova čísla v jednotlivých polohách uvnitř trysky je potřeba sestavit rychlostní profily, ze kterých budou vypočteny jednotlivé charakteristiky mezní vrstvy a odečtena velikost rychlosti na ose trysky (maximální rychlost).

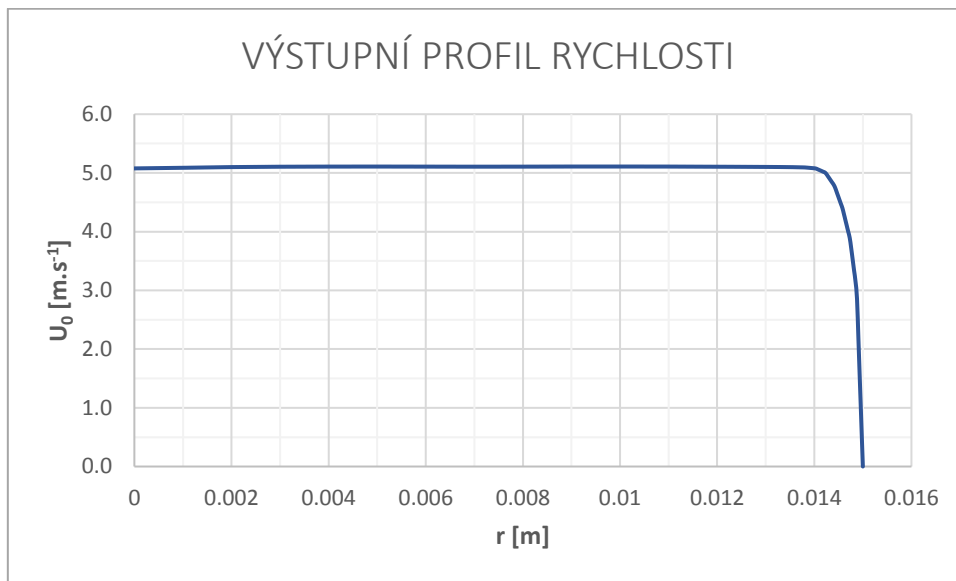
Průběh maximální rychlosti je uveden na grafu níže (**graf 8.5**). Maximální (osová) rychlost tekutiny v trysce postupně narůstá z hodnoty $U_{max,0} \approx 0,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na hodnotu $U_{max,l} \approx 5,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na konci trysky. Maximální rychlost na konci trysky se příliš neliší (cca 2%) od střední průřezové rychlosti na konci trysky $U_l = 5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, proto je možné považovat navrženou geometrii trysky za vhodnou.



Graf 8.5 Průběh maximální rychlosti uvnitř trysky (proudění ve směru kladné osy x)

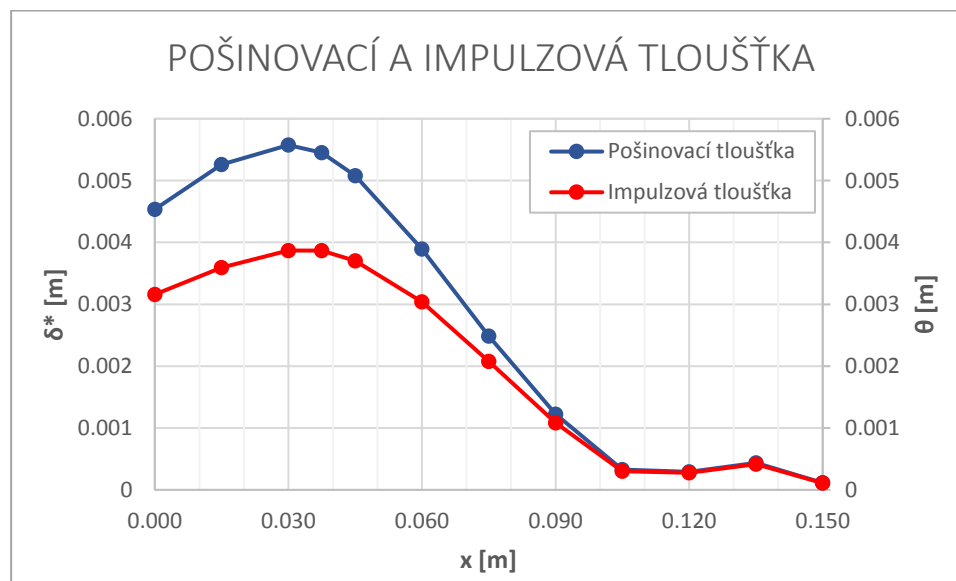
Rozdělení rychlosti v ústí trysky vykazuje po převážně většině (přibližně 96%) konstantní rozdělení rychlosti po průřezu vyjma místa kontaktu tekutiny se stěnou trysky, kde dochází ke vzniku mezní vrstvy. Jelikož lze rozdělení rychlosti na převážně většině průřezu trysky považovat za konstantní, lze návrh tvaru trysky považovat za optimální.

Rozdělení rychlosti po průřezu v ústí trysky je uvedeno níže (**graf 8.6**).



Graf 8.6 Ukázka vypočteného rozdělení rychlosti v ústí trysky (uvedena polovina profilu)

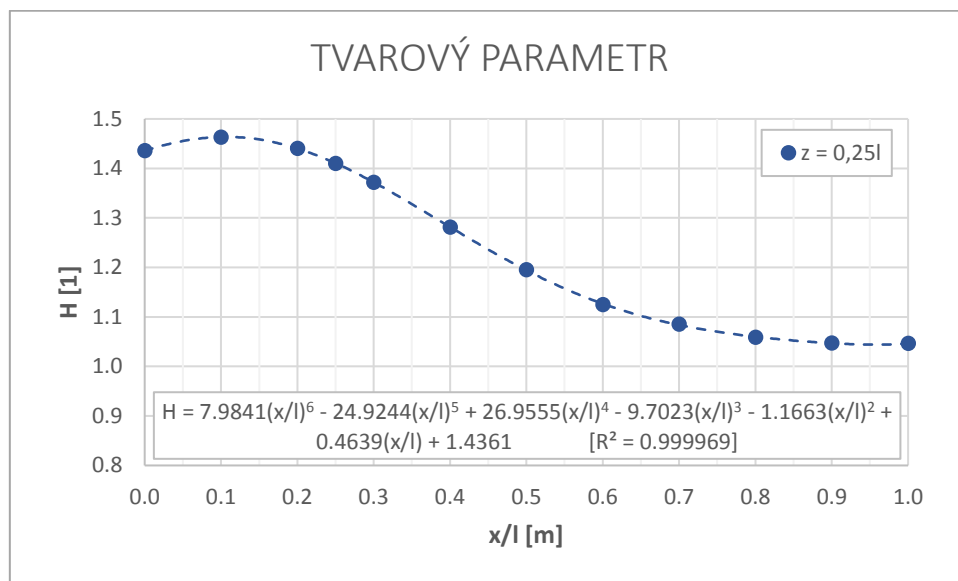
Průběh pošinovací a impulzové tloušťky mezní vrstvy je uveden níže (**graf 8.6**).



Graf 8.7 Průběh pošinovací a impulzové tloušťky mezní vrstvy

Následně bude uveden průběh pošinovací a impulzové tloušťky mezní vrstvy zjištěný analýzou jednotlivých rychlostních profilů uvnitř trysky (**graf 8.7**). Z průběhu jednotlivých tlouštěk vyplývá, že nabývají maximálních hodnot právě v místě maximální křivosti. Zároveň lze z průběhu hodnot pošinovací a impulzové tloušťky vyčíst, že k největším rozdílům ve velikosti dochází na konkávní straně trysky. Na konvexní straně dochází k významnému snížení rozdílů hodnot impulzové a pošinovací tloušťky, což je způsobeno transformací turbulentního rychlostního profilu na počátku trysky na téměř konstantní rozdělení rychlosti po průřezu na konci trysky (pístový tok). Ze znalosti velikostí pošinovací a impulzové tloušťky lze sestavit průběh tvarového parametru.

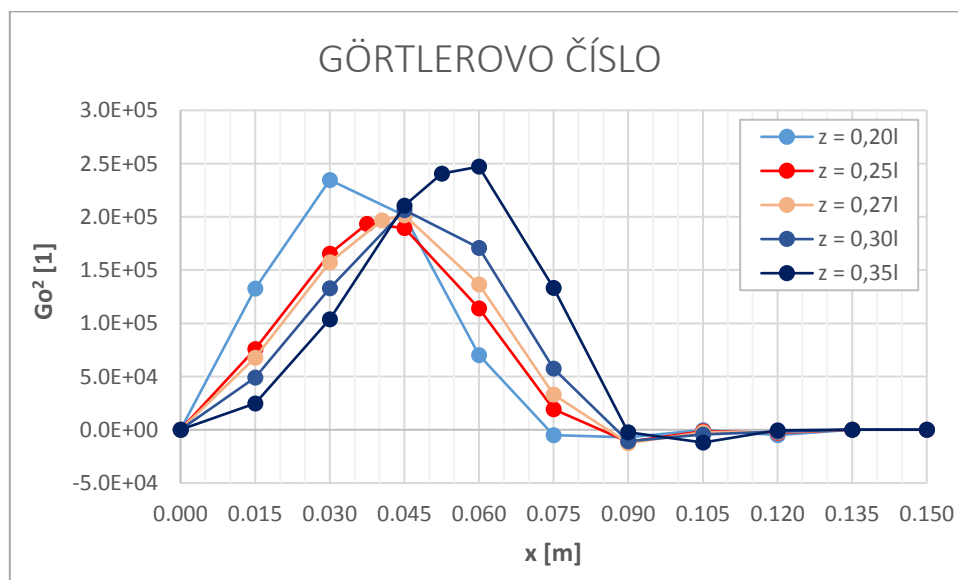
Průběh tvarového parametru uvnitř návrhové trysky je uveden níže (**graf 8.8**).



Graf 8.8 Průběh tvarového parametru mezní vrstvy v trysce

Průběh tvarového parametru se uplatní při výpočtu impulzové tloušťky v upraveném matematickém modelu. Pro popis průběhu tvarového parametru byla použita polynomiální funkce 6. řádu, jež závisí na bezrozměrné souřadnici (x/l), kde l je délka kontrakce trysky. Nyní máme veškeré nezbytné podklady pro výpočet Görtlerova čísla uvnitř trysky a lze přejít k vyhodnocení tvarů trysek.

Vypočtené průběhy kvadrátu hodnot Görtlerova čísla jsou uvedeny níže (**graf 8.9**).

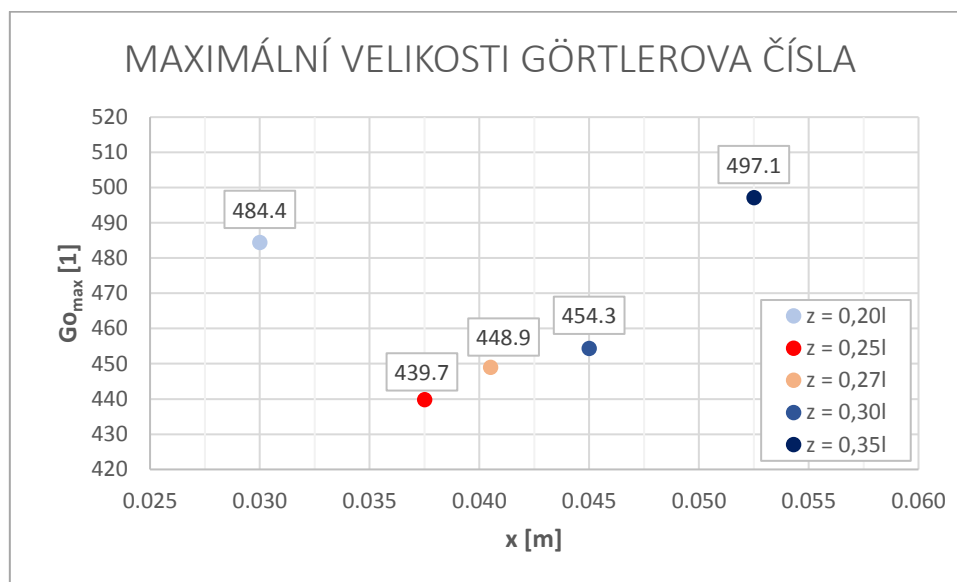


Graf 8.9 Průběh druhé mocniny Görtlerova parametru

Z výsledků maximální velikosti Görtlerova čísla (**graf 8.10**) je patrné, že pro posuzované tvary trysek je dosaženo nejmenší velikosti Görtlerova čísla pro trysky s optimalizačním parametrem velikosti $z = 0,25l$. Optimální poloha stanovená na základě první fáze matematického modelu ($z = 0,27l$)

poskytuje vyšší hodnotu Görtlerova čísla (přibližně 3%). Pro hodnoty $z > 0,25l$ lze z výsledků numerického modelu pozorovat, že dochází k nárůstu Görtlerova čísla, a proto volba vyšších hodnot z nedává smysl. Při volbě hodnoty $z < 0,25l$ lze také pozorovat nárůst Görtlerova čísla, proto je možné v rámci daného kroku $\Delta z = 0,05l$ považovat hodnotu $z = 0,25l$ za optimální.

Modelované maximální hodnoty Görtlerova parametru jsou uvedeny níže (**graf 8.10**)



Graf 8.10 Maximální hodnoty Görtlerova čísla určené pomocí turbulentního modelu $k-\omega$ SST

8.3.4 Matematický model trysky (druhotný návrh)

Jelikož se výsledky prvotního návrhu matematického modelu trysky významně lišily od výsledků numerického modelu, byl matematický model doplněn o poznatky z numerického modelu. Konkrétně se jednalo o úpravu průběhu maximální rychlosti uvnitř trysky a velikost impulzové tloušťky.

Průběh maximálních rychlostí uvnitř trysky byl upraven parametrem ψ , který do vnáší výpočtu vliv transformace tvaru rychlostního profilu vlivem odstředivých sil. Pro parametr ψ platí

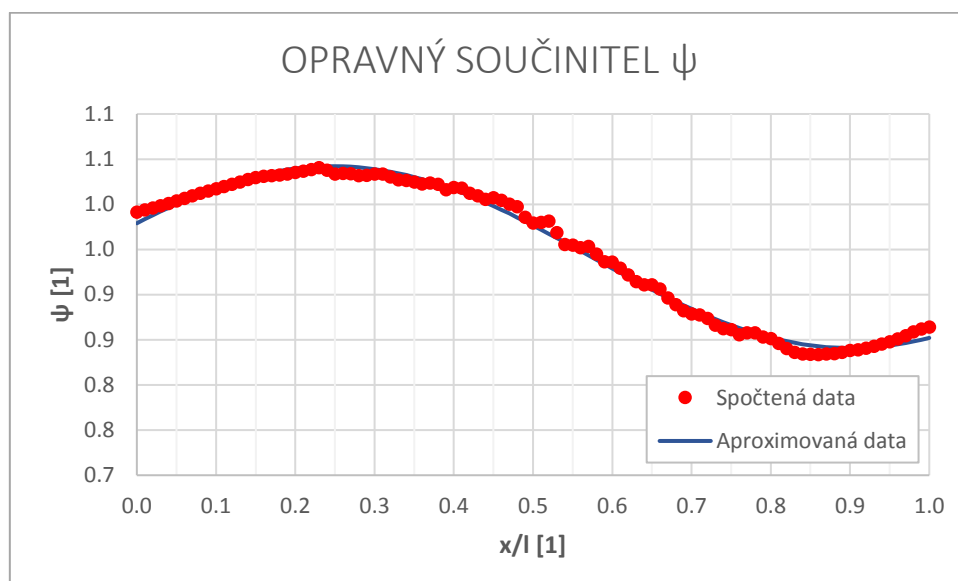
$$\psi = \frac{U_{max,SST}}{U_{max,MM}}, \quad (8.12)$$

kde $U_{max,SST}$ je maximální rychlost určená pomocí turbulentního modelu $k-\omega$ SST a $U_{max,MM}$ je maximální rychlost určená na základě matematického modelu. Průběh součinitele ψ podél trysky byl aproximován pomocí kosinové křivky ve tvaru

$$\psi = a + b \cos \left[c \left(\frac{x}{l} \right) + d \right], \quad (8.13)$$

kde a, b, c a d jsou empiricky stanovené koeficienty, pro které platí $a = 0,941\ 49$; $b = 0,100\ 64$; $c = 4,807\ 15$ a $d = -1,188\ 72$ (platí pro korelační koeficient roven 0,9969).

Průběh opravného součinitele ψ je uveden níže (graf 8.11).



Graf 8.11 Výsledný průběh opravného součinitele ψ

Opravený výpočet impulzové tloušťky mezní vrstvy spočívá v nalezení předpisu pro průběh tvarového parametru podél trysky. Výsledný průběh a předpis pro výpočet tvarového parametru je uveden v předešlém textu (graf 8.8). Srovnání velikostí Görtlerova čísla je uvedeno níže (tab. 8.1).

Tab. 8.1 Srovnání výsledných maximálních velikostí Görtlerova parametru

Okrajová podmínka	$Go_{max,M1}$ [1]	$Go_{max,M2}$ [1]	$Go_{max,SST}$ [1]
$z = 0,20l = 0,0300 \text{ m}$	284,2	484,4	484,4
$z = 0,25l = 0,0375 \text{ m}$	272,6	439,7	439,7
$z = 0,27l = 0,0405 \text{ m}$	272,0	448,9	448,9
$z = 0,30l = 0,0450 \text{ m}$	274,2	454,3	454,3
$z = 0,35l = 0,0525 \text{ m}$	287,1	497,1	497,1

Pomocí výše uvedených úprav lze dosáhnout shody mezi matematickým modelem a numerickým modelem až na hodnotu 87%. Pro dosažení úplné shody bude zaveden nový koeficient ξ

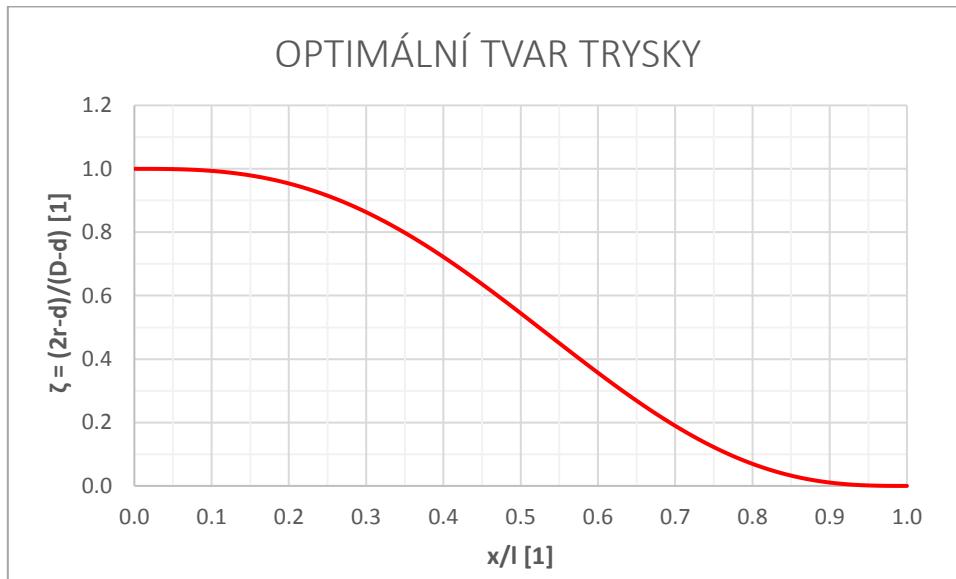
$$Go_{max,M2} = \xi Go_{max,SST}, \quad (8.14)$$

kde hodnota parametru ξ vychází ze srovnání numerického a matematického modelu a pro řešené polohy bodu z je jednoznačně určena. Pro mezilehlé polohy dochází k lineární interpolaci hodnot.

8.3.5 Vnitřní tvar kontrakce trysky

Doplněním optimalizačního parametru z do systému okrajových podmínek pro předpis polynomické funkce 6. řádu získáme vnitřní tvar trysky. Tento tvar je možné přepsat do univerzální formy při

převedení do bezrozměrné formy grafu. Ukázka optimálního tvaru kontrakce trysky je uvedena v bezrozměrné formě grafu ($x/l; \zeta$) níže (**graf 8.12**).



Graf 8.12 Univerzální tvar navržené trysky ($z = 0,25l$)

Pro bezrozměrný parametr ζ platí

$$\zeta = \frac{2r - d}{D - d}, \quad (8.15)$$

kde je D průměr přívodního potrubí a d průměr trysky.

POZN.: Návrhové rozměry přírubového spoje trysky byly převzaty z výrobního programu pro spoje potrubí [33]. Navržený tvar trysky včetně výkresů tvaru trysky a popisu modelu trysky je možné nalézt v přílohách této práce, kde je rovněž možné nalézt číselný průběh optimalizované křivky.

9 MODELOVÁNÍ JÁDRA TURBULENTNÍHO PAPRSKU

V této kapitole budou vytvořeny modely jádra paprsku (oblasti vývinu proudění) pomocí dvou různých přístupů řešení turbulentního proudění. Konkrétně se bude jednat o metodu *RANS* a kombinaci metod *RANS* a *DES*, které jsou popsány v předchozím textu. Jako turbulentní model reprezentující metodu *RANS* byl použit model *k-ε* Standard a *k-ω SST*, za kombinaci metod *RANS* a *DES* byl rovněž použit model *k-ω SST* a metoda *DES* založená *k-ω SST*.

9.1 Model jádra paprsku (metoda RANS)

Při statistickém přístupu řešení turbulentního modelu jádra paprsku pomocí metody *RANS* budou vytvořeny modely jádra paprsku, které se budou lišit použitým modelem řešení turbulentního proudění a zvolenou počáteční hodnotou intenzity turbulence na okraji výpočetní oblasti. Hladina intenzity turbulence na okraji výpočetní oblasti bude postupně volena hodnotami 0,5%; 1%; 5% a 10%. Pro zvolené hodnoty intenzity turbulence budou vyhodnoceny délky jádra paprsku.

Intenzita turbulence (též *stupeň turbulence*) je možné vyjádřit jako [44]

$$I \equiv \frac{u'}{U}, \quad (9.1)$$

kde u' je kvadratický průměr fluktuací rychlosti a U je střední rychlost. Při známé velikosti kinetické energie turbulence k je možné veličinu u' určit jako [44]

$$u' \equiv \sqrt{\frac{1}{3}(u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}k}. \quad (9.2)$$

Za účelem spuštění výpočtu modelu jádra paprsku je nezbytné zadat podmínky na okraji řešené oblasti. Pozornost bude věnována zadávání velikosti hladiny intenzity turbulence (vstupní rychlostní podmínka a výstupní tlaková podmínka) a jejímu vlivu na délku vývinu proudění. Při zadávání velikosti intenzity turbulence na okraji oblasti je vhodné vycházet z experimentálních měření. Pro představu je zde uvedeno několik příkladů velikosti intenzity turbulence: [44]

- 1. Vysoká hodnota intenzity turbulence** – používá se pro případy proudění o vysoké rychlosti na složité geometrii (např. výměníky tepla a turbíny). Typická hodnota intenzity turbulence se pohybuje v rozmezí 5% až 20%.
- 2. Střední hodnota intenzity turbulence** – se vyskytuje při proudění v nepříliš složitých zařízeních, kterými mohou být potrubí velkých průřezů, proudění ve ventilátorech nebo proudění při nízkém Reynoldsově čísle. Intenzita turbulence obvykle nabývá hodnot v rozmezí od 1% až po 5%.

- 3. Nízká hodnota intenzity turbulence** – použitelná v případě obtékání těles (např. ponorky, automobily atd.) Typické hodnoty intenzity turbulence jsou velmi nízké (pod 1%).

„Oproti proudění v mezní vrstvě, které je možné ovlivňovat tvarem a drsností stěny, pro hydrodynamické ovlivňování proudu tekutiny v paprsku existuje jen málo možností ovlivnění proudění. Změna intenzity turbulence patří k neúčinnějším. Zvětšení intenzity turbulence může být dosaženo vložením turbulizační mříže.“ [43]

9.1.1 Popis tvorby modelu

Jelikož se jedná o osově symetrické proudění, je možné při statistickém přístupu řešení turbulentního proudění pomocí metody *RANS* použít geometrii ve *2D*. Velikost oblasti bude vycházet z experimentálně pozorovaných hodnot délky jádra paprsku, které se pohybují v rozmezí 5 až 10násobku průměru trysky [42]. Délka výpočetní oblasti (při hodnotě průměru trysky $d = 0,03 \text{ m}$) byla zvolena s jistou rezervou a odpovídá velikosti $12d$. Potřebnou výšku oblasti je možné určit pomocí koeficientu úměrnosti S , který popisuje nárůst šířky paprsku a odpovídá velikosti $S = 0,096$ [31]. Odpovídající poloměr paprsku na konci oblasti činí přibližně $2,3d$. Nicméně za účelem zamezení ovlivnění struktury proudění vlivem přítomnosti okrajové podmínky bude výška oblasti navržena hodnotou $6d$. Rozměry oblasti tvaru obdélníku tedy činí $360 \times 180 \text{ mm}$.

Výpočetní síť byla navržena jako pravoúhlá čtyřúhelníková se „zahuštěním“ počtu elementů v místech očekávaných významných gradientů rychlosti. Zahuštění výpočetní sítě bylo realizováno jako plynulé, aby nedocházelo k negativnímu ovlivnění výsledků modelu. Z hlediska posuzování kvality výpočetní sítě podle hodnoty ortogonální kvality výpočetní sítě lze použitou výpočetní hodnotit za velmi kvalitní (hodnota ortogonální kvality výpočetní sítě je rovna jedné), jelikož hodnoty minimální ortogonální kvality a maximální hodnoty nesouměrnosti splňují požadavky na kvalitní výpočetní síť.

Proudění v jádře paprsku lze charakterizovat pomocí Reynoldsova čísla $Re = 150\,000$, tj. turbulentní proudění. Pro výpočet proudění tekutiny v jádře turbulentního paprsku byl použit stacionární výpočet. Rozdělení rychlosti ve vstupním profilu (rychlostní okrajová podmínka) bylo nastaveno podél trysky jako konstantní. Za interpolační schéma bylo pro výpočet složek rychlosti použito schéma označované jako MUSCL, pro zbylé charakteristiky byla použita protiproudá interpolace 2. řádu.

9.1.2 Zpracování výsledků modelu *k-ε Standard* a *k-ω SST*

Z výsledků modelů *k-ε Standard* a *k-ω SST* vyplývá, že rozdělení rychlosti v rozmezí šířky jádra (B) paprsku a šířky paprsku (b) lze popsat pomocí Gaussova modelu. Jednotlivé rychlostní profily v oblasti vývinu proudění se s postupným zvětšováním od ústí trysky stávají vzájemně podobné, tj. při vynesení do bezrozměrné formy grafu ($\eta; U/U_0$) mají univerzální tvar.

Rozdělení rychlosti v oblasti vývinu proudění

$$U = U_0 \quad (r \leq B/2), \quad (9.3)$$

$$\frac{U}{U_0} = a \exp\left[-\frac{(\eta - b)^2}{2c^2}\right] \quad (B/2 < r \leq b/2), \quad (9.4)$$

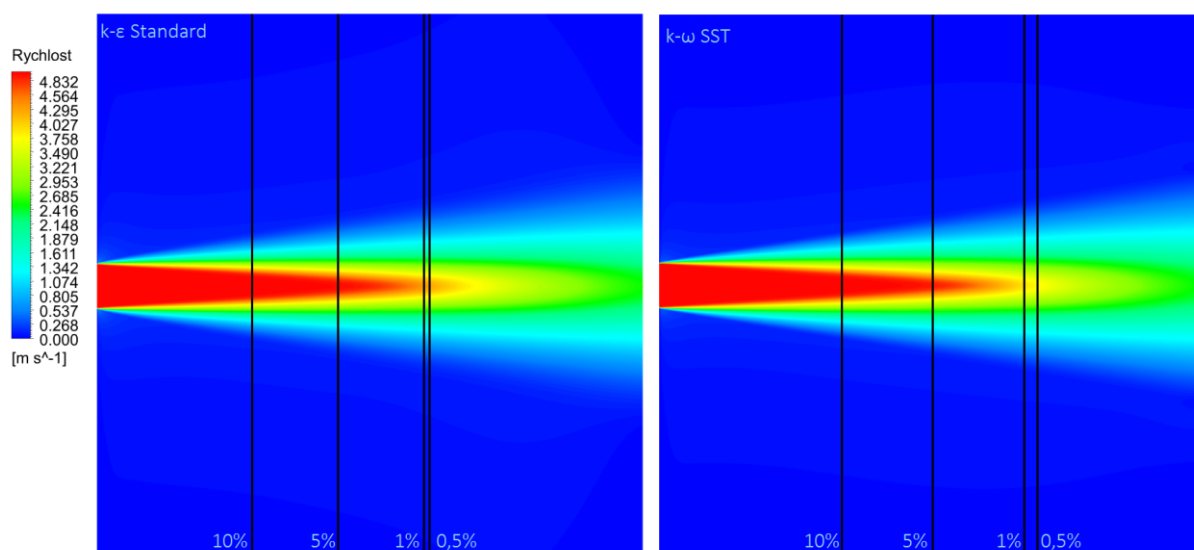
kde a, b a c jsou koeficienty stanovené na základě modelového řešení turbulentního jádra paprsku a B je šířka jádra paprsku ve zkoumaném místě. Na základě výsledků modelu $k-\varepsilon$ Standard, resp. modelu $k-\omega$ SST lze pro $(x/d > 2)$ hledané koeficienty (průměrné hodnoty) platí: $a = 1,0740$; $b = 0,1136$ a $c = 0,3996$; resp. $a = 0,5207$; $b = -0,4937$ a $c = 0,2346$.

Tab. 9.1 Spočtené délky jádra paprsku pro různě zvolené hodnoty počáteční intenzity turbulence

Intenzita turbulence	Model $k-\varepsilon$ Standard	Model $k-\omega$ SST
$I = 0,5\%$	$L_{ZFE} = 7,3d$	$L_{ZFE} = 8,3d$
$I = 1\%$	$L_{ZFE} = 7,2d$	$L_{ZFE} = 8,0d$
$I = 5\%$	$L_{ZFE} = 5,3d$	$L_{ZFE} = 6,0d$
$I = 10\%$	$L_{ZFE} = 3,4d$	$L_{ZFE} = 4,0d$

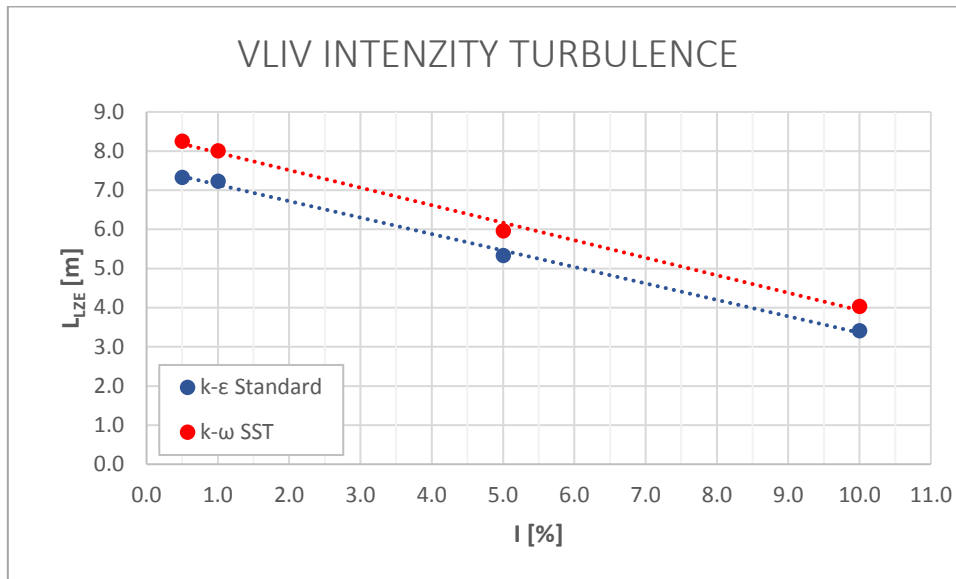
POZN.: Z experimentálních pozorování (Crow & Champagne, 1971) vodních paprsků za vysokého Reynoldsova čísla vyplývá, že délka jádra paprsku dosahuje velikosti 5,3násobku průměru trysky. [15]

Velikosti rychlostí uvnitř jádra paprsku podle výsledků modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST jsou uvedeny níže (**obr. 9.1**). Použitá hodnota intenzity turbulence pro zobrazení výsledků odpovídá 5%.



Obr. 9.1 Vyjádření velikosti rychlostí uvnitř jádra paprsku dle modelu $k-\varepsilon$ Standard (vlevo) a $k-\omega$ SST (vpravo) včetně vyznačení délky jádra paprsku pro jednotlivé hodnoty intenzity turbulence

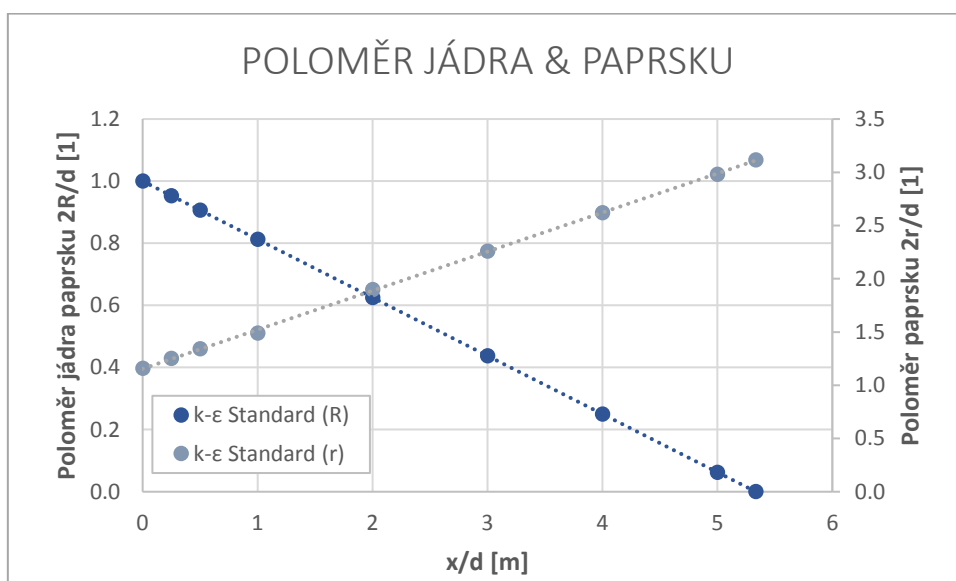
Hodnoty délky oblasti vývinu proudění v závislosti na zvolené počáteční intenzitě turbulence jsou uvedeny níže (**graf 9.1**).



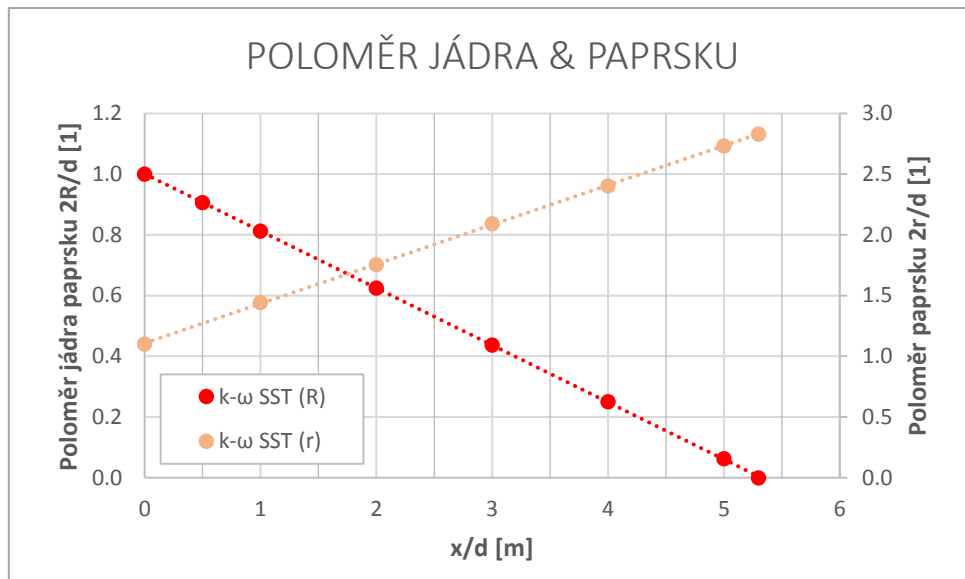
Graf 9.1 Ukázka závislosti délky oblasti vývinu proudění pro různé hodnoty intenzity turbulence

Z průběhu velikosti délky oblasti vývinu proudění v závislosti na zvolené hodnotě intenzity turbulence vyplývá, že délka oblasti vývinu proudění s rostoucí hodnotou intenzity turbulence lineárně klesá (**graf 9.1**). Pro experimentálně pozorovanou délku jádra paprsku *Crow & Champagne (1971)*, která je pro vodní paprsky za předpokladu vysoké hodnoty Re rovna $L_{ZFE} = 5,3d$. Této hodnotě odpovídá velikost intenzity turbulence $I = 5\%$ (pro model $k-\epsilon$ Standard), resp. $I = 7\%$ (pro model $k-\omega$ SST).

Ukázka průběhu poloměru jádra paprsku a poloměru paprsku je uvedena níže (**graf 9.2**) a (**graf 9.3**).



Graf 9.2 Ukázka průběhu poloměru jádra paprsku a poloměru paprsku ($k-\epsilon$ Standard ($I = 5\%$))



Graf 9.3 Ukázka průběhu poloměru jádra paprsku a poloměru paprsku ($k-\omega$ SST ($I = 7\%$))

Šířka jádra paprsku ve směru proudění lineárně klesá a ve vzdálenosti odpovídající délce jádra paprsku protíná osu symetrie paprsku. Šířku jádra paprsku ($0 \leq x \leq L_{ZFE}$) je možné vyjádřit jako

$$2R = -\frac{d}{L_{ZFE}}x + d, \quad (9.5)$$

kde d je průměr trysky a L_{ZFE} je délka oblasti vývinu proudění.

Zatímco poloměr jádra paprsku ve směru proudění lineárně klesá až do své nulové hodnoty, poloměr paprsku ve směru proudění lineárně narůstá. Lineární nárůst poloměru paprsku je možné vyjádřit jako

$$\frac{2r}{d} = A\left(\frac{x}{d}\right) + B, \quad (9.6)$$

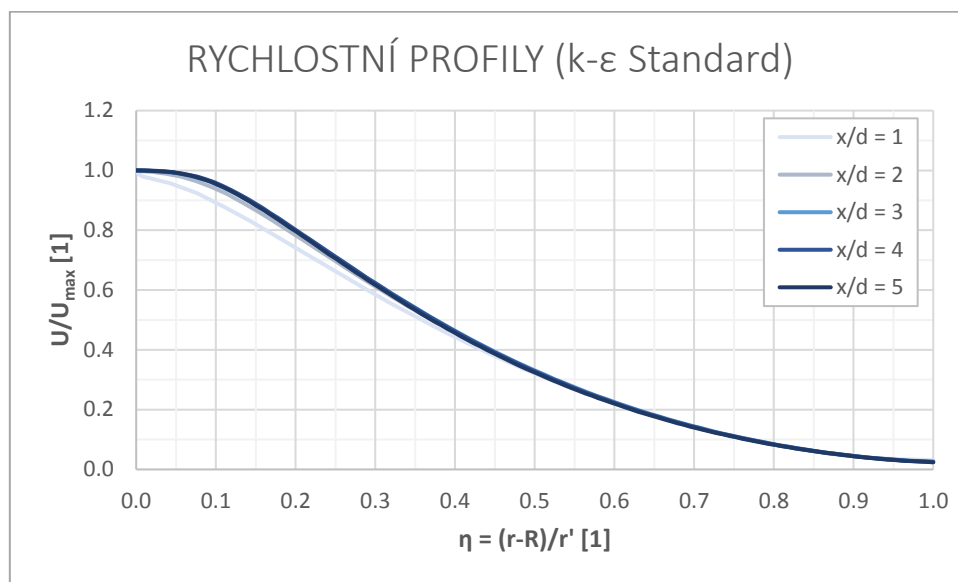
kde A, B jsou výpočetně stanovené výsledky. Pro model $k-\varepsilon$ Standard ($I = 5\%$) dosahují koeficienty lineárního předpisu ($0 \leq x \leq L_{ZFE}$) velikosti $A = 0,366 87$ a $B = 1,154 48$, pro model $k-\omega$ SST ($I = 7\%$) výsledné velikosti koeficientů vychází rovny $A = 0,325 28$ a $B = 1,108 13$.

Pro analýzu tvaru rychlostního profilu je nutné rozdělit rychlostní profil podél šířky paprsku na dvě oblasti. V první ($r(x) < B/2$) oblasti jsou rychlosti rovné rychlostem v ústí trysky a rychlostní profil je konstantní. Ve druhé oblasti ($B/2 < r(x) < b/2$) rychlost se zvyšující se hodnotou poloměru paprsku klesá. Veličina $B(x)$ reprezentuje šířku jádra paprsku, zatímco veličina $b(x)$ představuje šířku paprsku.

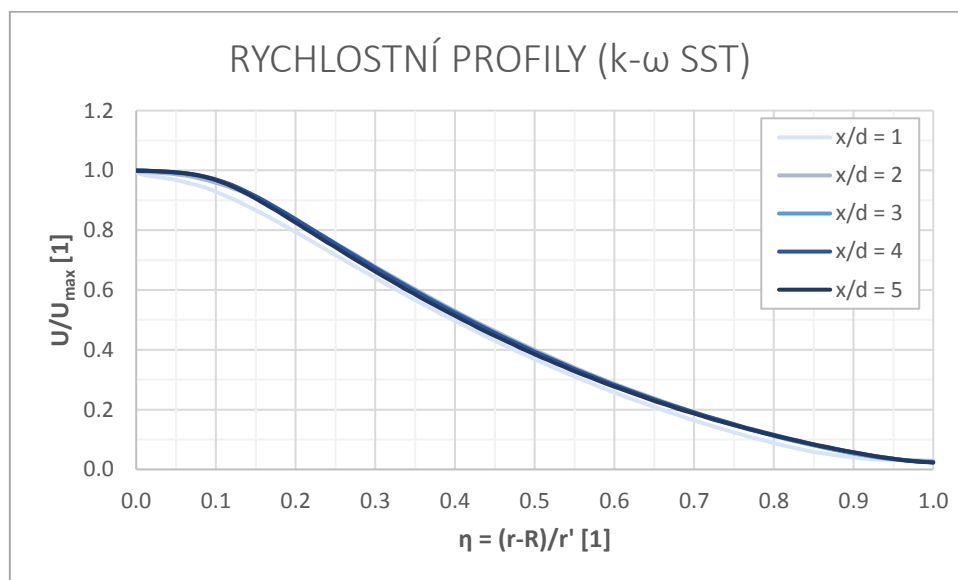
Z vynesení rychlostních profilů do bezrozměrné formy grafu (**graf 9.4**), (**graf 9.5**) vyplývá, že ve vzdálenosti ($x/d > 2$) rychlostní profily splývají v jednu křivku a proudění v oblasti jádra paprsku se stává vzájemně podobné. Pro vyjádření průběhu tvaru rychlostních profilů podél délky jádra paprsku

je možné sestavit Gaussův model, jehož koeficienty se podél délky jádra paprsků mění v závislosti na rostoucí vzdálenosti od ústí trysky, tím může být popsán vývin tvaru rychlostních profilů.

Ukázka tvaru rychlostních profilů ($B/2 < r(x) < b/2$) v oblasti vývinu proudění osově symetrického paprsku získaných z výsledků modelu $k-\varepsilon$ Standard ($I = 5\%$) je uvedena níže (**graf 9.4**), z výsledků modelu ($k-\omega$ SST, $I = 7\%$) je uvedena níže (**graf 9.5**).



Graf 9.4 Vynesení rychlostních profilů v bezrozměrné formě (model $k-\varepsilon$ Standard, $I = 5\%$)



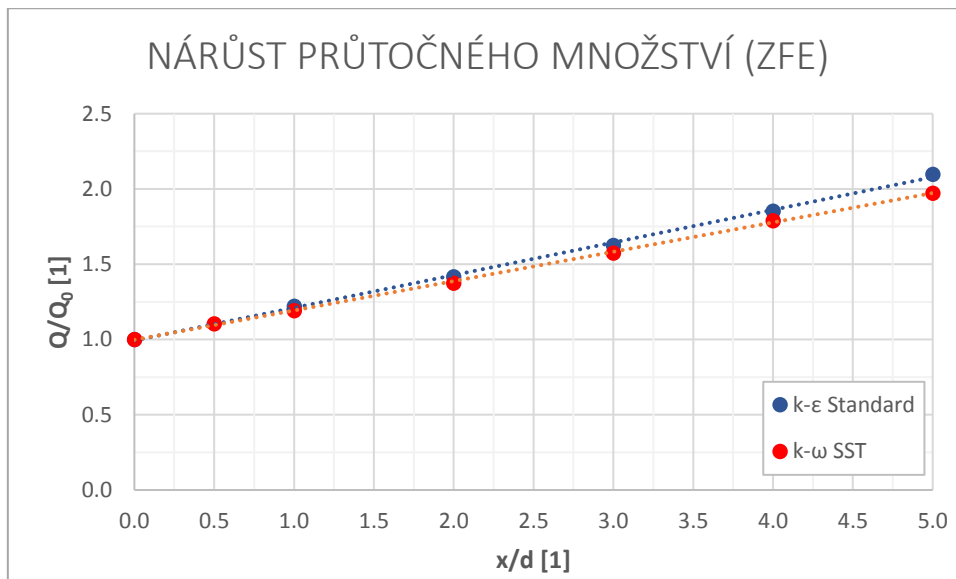
Graf 9.5 Vynesení rychlostních profilů v bezrozměrné formě (model $k-\omega$ SST, $I = 7\%$)

POZN.: Pro nalezení průběhu tvaru rychlostních profilů v transienční oblasti vyvinutého proudění (ZEF) je opět možné aplikovat Gaussův model rozdělení rychlosti. Rozdílnost jednotlivých profilů v transienční oblasti se projeví v proměnlivosti koeficientů tohoto rozdělení. Nalezením průběhu koeficientů Gaussova modelu lze stavit tvar rychlostního profilu (funkce „Turbulentní paprsek ZEF“).

Průtočné množství a střední kinetická energie proudu

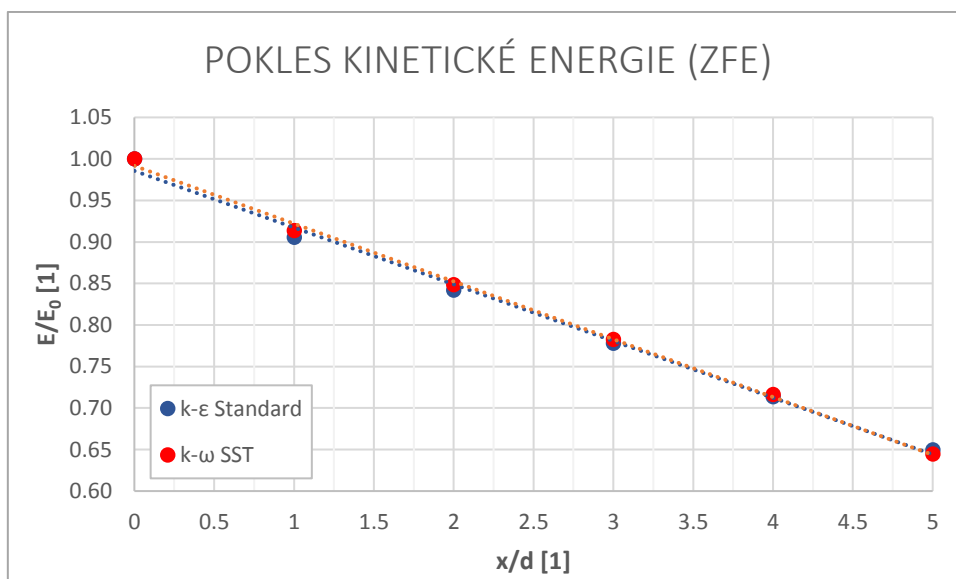
Pro jednotlivé polohy v oblasti vývinu proudění turbulentního paprsku byly následně vyhodnoceny hodnoty *průtočného množství* a velikosti *střední kinetické energie proudu*. Při vyčíslení hodnot průtočného množství v posuzovaných profilech bylo zjištěno, že průtočné množství v oblasti vývinu proudění s rostoucí vzdáleností ve směru proudění lineárně narůstá (**graf 9.6**), zatímco velikost střední kinetické energie proudu lineárně klesá (**graf 9.7**).

Nárůstu průtočného množství tekutiny v paprsku je uveden níže (**graf 9.6**).



Graf 9.6 Ukázka nárůstu průtočného množství v oblasti vývinu proudění

Pokles kinetické energie proudu tekutiny je uveden níže (**graf 9.7**).



Graf 9.7 Ukázka poklesu kinetické energie proudu tekutiny v oblasti vývinu proudění

Nárůst průtočného množství tekutiny v oblasti vývinu proudění osově symetrického kruhového paprsku je možné vyjádřit jako

$$\frac{Q}{Q_0} = A \left(\frac{x}{d} \right) + B, \quad (9.7)$$

kde A, B jsou koeficienty použitých turbulentních modelů získané analýzou výsledků. Velikost koeficientů modelu $k-\varepsilon$ Standard, resp. modelu $k-\omega$ SST je rovna $A = 0,2169$ a $B = 0,9936$; resp. $A = 0,1959$ a $B = 0,9941$.

Pro pokles kinetické energie proudu tekutiny v oblasti vývinu proudění kruhového paprsku platí

$$\frac{E}{E_0} = -A \left(\frac{x}{d} \right) + B, \quad (9.8)$$

kde A, B jsou koeficienty použitých turbulentních modelů získané analýzou výsledků. Velikost koeficientů modelu $k-\varepsilon$ Standard, resp. modelu $k-\omega$ SST je rovna $A = 0,0683$ a $B = 0,9856$; resp. $A = 0,0696$ a $B = 0,9916$.

9.2 Model jádra paprsku (metoda DES)

V pořadí druhým přístupem v modelování jádra turbulentního paprsku je specifický přístup využívající metodu *RANS* v kombinaci s metodou *DES*. Jako model reprezentující metodu *RANS* byl použit dvourovnicový model $k-\omega$ SST. V metodě *DES* byl použit rovněž model vycházející z modelu $k-\omega$ SST. Jelikož je metoda *DES* bezpečně použitelná pouze na 3D výpočetní oblasti, byla sestavena 3D výpočetní síť ve tvaru válce. Průměr a výška válce byly navrženy hodnotou $12d$. Návrhové parametry modelu zůstaly neměnné a proudění v jádře paprsku je možné definovat pomocí $Re = 150\,000$.

Výpočetní oblast byla sestavena v souladu se základními principy tvorby výpočetní sítě pro metodu *DES*, které jsou uvedeny v kapitole zaměřené na výpočetní síť. Výpočetní síť byla navržena ze šestistěnů o minimální délce hrany výpočetní sítě o velikosti $\Delta_{min} = 0,001\text{ m}$. Při tvorbě výpočetní sítě bylo věnováno maximální úsilí, aby buňky výpočetní sítě v blízkosti osy válce dosahovaly stejné délky hrany z důvodu procesu filtrování. Ve větší vzdálenosti od osy výpočetní oblasti bylo umožněno v rámci úspory výpočetních nároků navýšení anizotropie v délkách hran výpočetních buněk.

Výpočet pomocí samostatného modelu $k-\omega$ SST byl proveden jako *stacionární*, zatímco výpočet prostřednictvím metody *DES* byl *nestacionární*. Aby bylo možné přejít od samostatného dvourovnicového modelu $k-\omega$ SST k metodě *DES*, je nutné vygenerovat rychlostní profily okamžitých rychlostí z výsledků modelu $k-\omega$ SST a řešení následně před opětovným spuštěním inicializovat. Dále je nutné kvůli nestacionárnímu způsobu výpočtu nastavit délku výpočetního kroku simulace a počet iterací, které vymezí celkový simulovaný čas.

Volba délky časového kroku

Základním údajem pro stanovení délky časového kroku bude předpokládaná frekvence produkce vírů v turbulentním paprsku. Návrhová frekvence produkce vírů v turbulentním ponořeném paprsku byla zvolena hodnotou

$$f = 50 \text{ [Hz]}. \quad (9.9)$$

POZN.: S frekvencí generace vírů v turbulentním paprsku souvisí Strouhalovo číslo, které nese jméno po českém fyziku Vincenci Strouhalovi a představuje bezrozměrné číslo používané při popisu oscilujících mechanismů. Strouhalovo číslo lze určit na základě formulace

$$St = \frac{fd}{U_0} = \frac{50 \cdot 0,03}{5,0} = 0,3 \text{ [1]}, \quad (9.10)$$

kde f je frekvence produkce vírů, d průměr trysky a U_0 je rychlost v ústí trysky.

Ze znalosti frekvence produkce vírů je možné vypočítat periodu vzniku vírových struktur. Perioda produkce vírových struktur se spočte jako

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ [s]}. \quad (9.11)$$

Nyní je nutné nastavit počet časových úseků n v rámci jedné periody, během kterých bude docházet k vyhodnocení sledovaných charakteristik, tj. délku časového kroku. Výsledná hodnota časového kroku je rovna

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{0,02}{40} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ [s]}. \quad (9.12)$$

Při známé velikosti délky časového kroku výpočtu je možné na základě CFL podmínky vypočítat minimální velikost buňky výpočetní sítě při $Co_{max} = 2,5$. Minimální velikost buňky výpočetní sítě pro zadané parametry vychází rovna

$$\Delta x_{min} = \frac{U_0 \Delta t}{Co_{max}} = \frac{5,0 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2,5} = 0,001 \text{ [m]}. \quad (9.13)$$

Nyní máme veškeré potřebné podklady pro tvorbu modelu řady ponořených paprsků a můžeme přejít k výpočtu. Celkový simulovaný čas byl navržen hodnotou $T = 1,00$ s. Maximální počet iterací v jednotlivém kroku byl nastaven hodnotou 25 iterací.

Za výpočetní schéma byl použit řešič založený na korekcích tlaku (*Pressure based solver*). Při stacionárním výpočtu pomocí modelu $k-\omega$ SST byl použit algoritmus označovaný jako *SIMPLE*, zatímco při nestacionárním výpočtu byl použit algoritmus *PISO* (*Pressure Implicit with Splitting*

Operator). Algoritmus *PISO* spadá do skupiny *SIMPLE* algoritmů a je založen na vyšší úrovni aproximací mezi korekcemi tlaku a rychlostí. Mezi výhody *PISO* algoritmu patří stabilita řešení a nižší nároky na výpočetní paměť počítače. Využíván je především pro časově závislé simulace proudění, zvláště při volbě velkého časového kroku [3]. Pro výpočet gradientů bylo použito schéma *Least squares Cell Based*. Pro potřeby prostorové diskretizace bylo použito schéma protiproudé interpolace druhého řádu, které je kompatibilní s oběma přístupy v řešení turbulentního proudění. Dále bylo pro prevenci podhodnocení velikosti turbulentního napětí u metody *DES* použito na rozhraní metod *RANS* a *LES* (šedé zóny) nastavení *DDES*.

POZN.: Vedle kombinace stacionární metody RANS a metody DES byl proveden výpočet pouze pomocí metody DES, která opět vycházela z modelu k- ω SST. Veškerá nastavení simulace zůstala totožná s nastaveními použitými v metodě DES v předešlém případě. Její výsledky jsou součástí příloh.

Ze znázornění rychlostí uvnitř jádra turbulentního paprsku je patrná postupná generace vírových struktur. Vírové struktury se pohybují ve směru proudění a postupně dochází k jejich rozpadu. S rozpadem vírových struktur souvisí postupné rozšiřování turbulentního paprsku. Víry modelované pomocí metody *DES* je možné pozorovat i při proudění reálné tekutiny. Uvnitř jednotlivých vírů lze pozorovat, že rychlost uvnitř víru zpočátku odpovídá rychlosti uvnitř jádra paprsku a poté dochází k jejímu poklesu souvisejícím s rozpadem víru. Vznik těchto vírových struktur je zapříčiněn vazkým třením uvnitř tekutiny na rozhraní okolní (klidové tekutiny) a pronikající tekutiny, důvodem vzniku těchto struktur je tedy viskozita tekutiny a rozdílné rychlostní poměry na rozhraní smykové vrstvy.

Vedle zkoumání rychlostních poměrů byla věnována pozornost velikosti tlaku (**obr. 9.3**), průběhu *TKE* (**obr. 9.4**), *TEF* (**obr. 9.5**) a vířivosti (**obr. 9.6**) na zkoumané oblasti v čase $T = 1,00$ s.

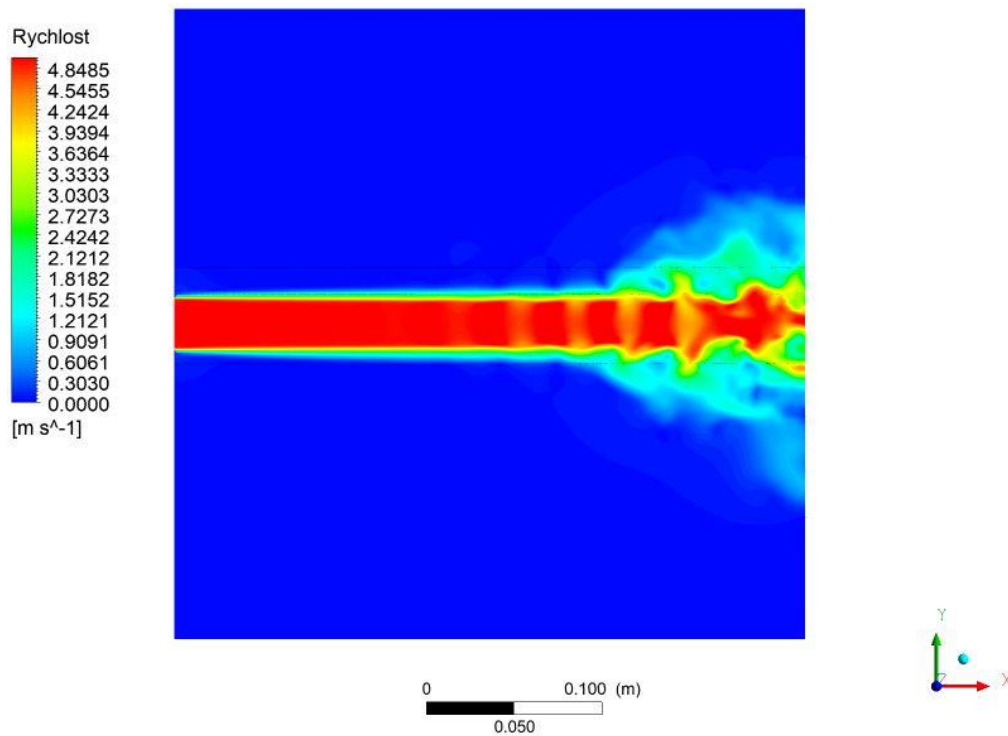
Tlakové poměry uvnitř turbulentního paprsku nejsou příliš významné. V zásadě lze zavedený předpoklad o nulovém tlakovém gradientu podél osy x použitý při odvozování základních pohybových rovnic považovat za oprávněný. Z průběhu tlakových poměrů je možné identifikovat jednotlivé víry tvořící turbulentní paprsky, kde je patrná vyšší či nižší hodnota tlaku. V návrhovém čase $T = 1,00$ s nejsou uvnitř jádra turbulentního paprsku patrná významnější kolísání velikosti tlaku.

Specifická disipace turbulentní kinetické energie ω vyjadřuje míru transformace *TKE* na vnitřní tepelnou energii v jednotce objemu za časovou jednotku. Specifická disipace *TKE* bývá též označována jako *turbulentní frekvence* nebo *turbulentní vířivá frekvence* (*TEF*) a lze ji spočítat jako [3]

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k'} \quad (9.14)$$

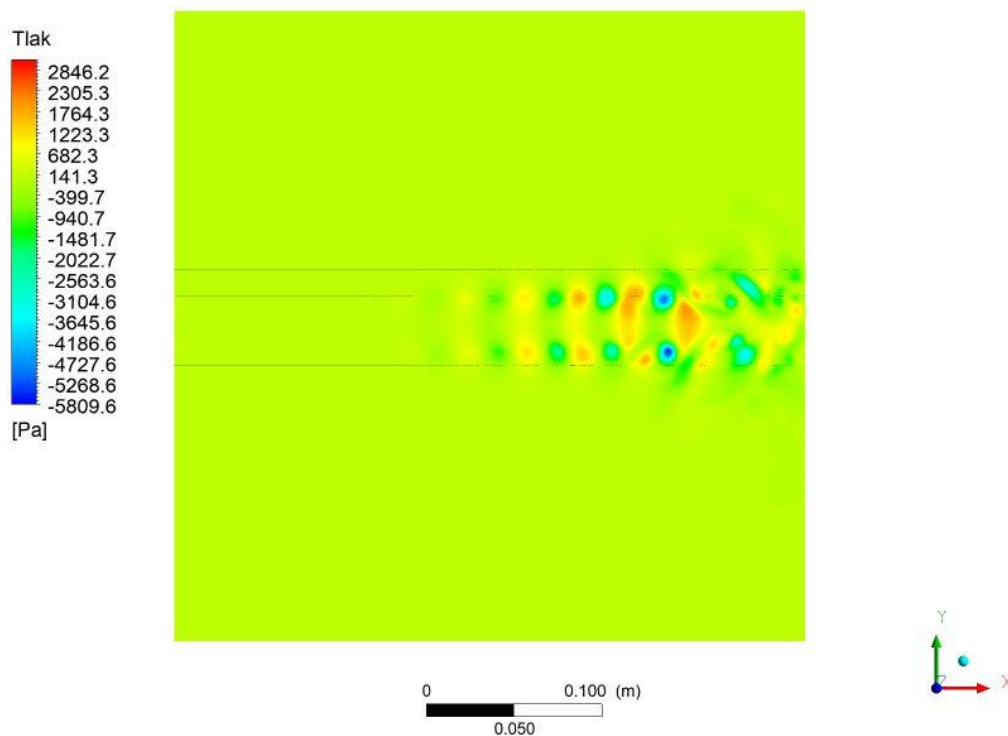
kde k' je hodnota turbulentní kinetické energie, ε je disipace kinetické energie a je konstanta, pro kterou platí $\beta^* = C_\mu = 0,09$.

Průběh rychlostí uvnitř turbulentního paprsku při ($Re = 150\,000$) je uveden níže (**obr. 9.2**)



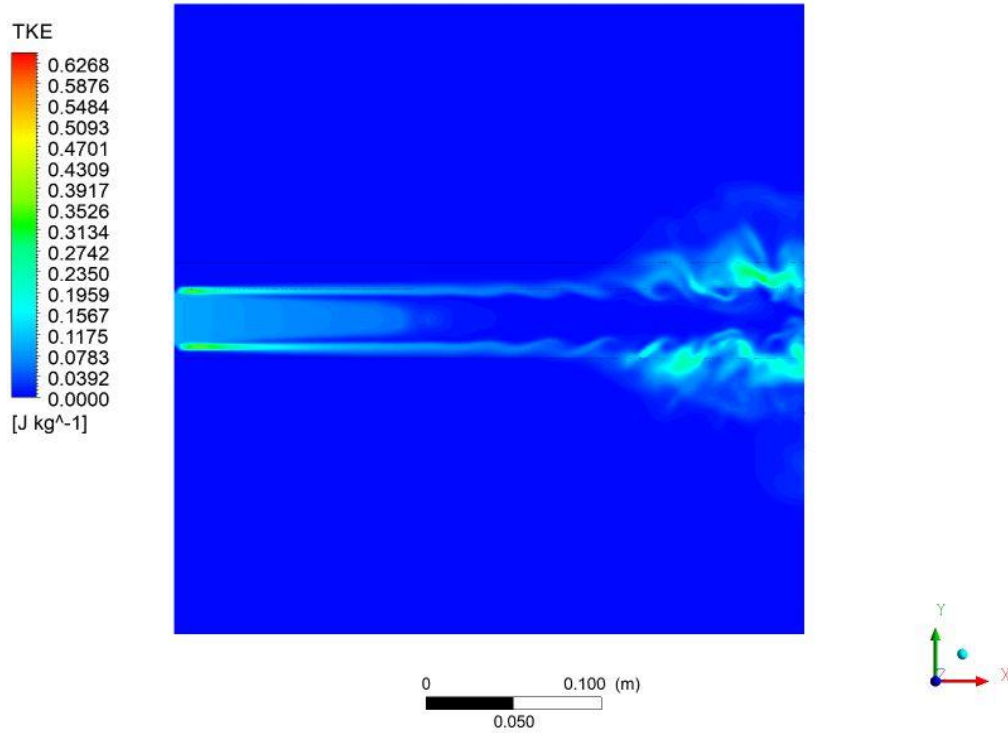
Obr. 9.2 Modelované hodnoty rychlosti získané pomocí modelu *DES k- ω SST* v čase $T = 1,00$ s

Výsledné tlakové poměry uvnitř turbulentního paprsku při ($Re = 150\,000$) jsou patrné na **obr. 9.3**.



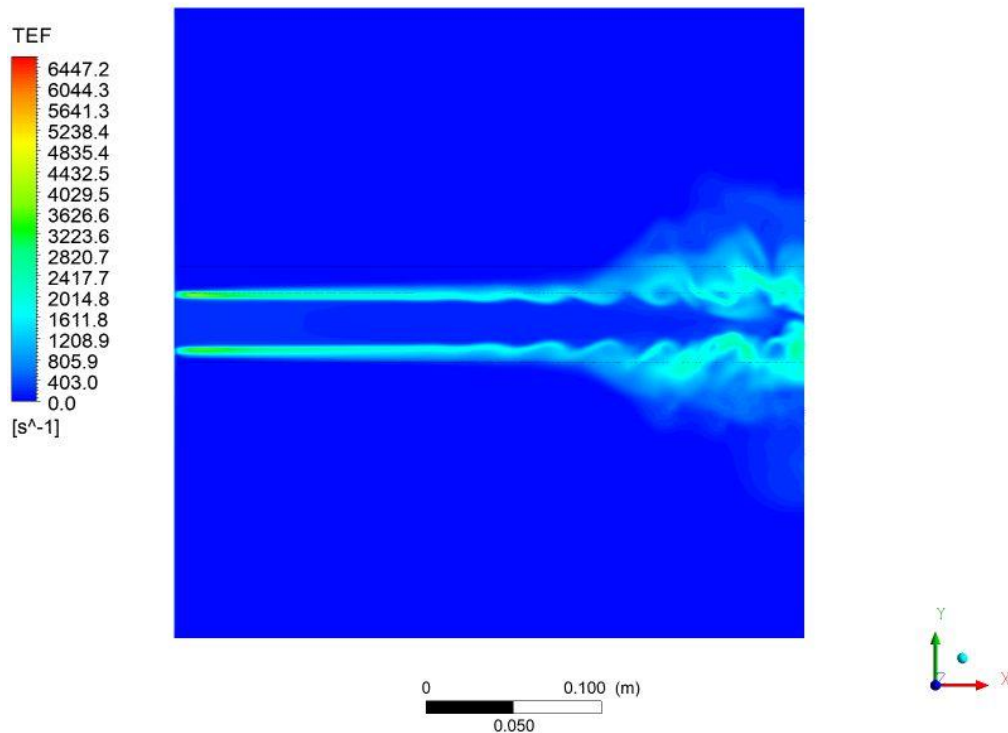
Obr. 9.3 Tlakové poměry v čase $T = 1,00$ s

Hodnoty TKE uvnitř turbulentního paprsku při ($Re = 150\,000$) jsou uvedeny níže (**obr. 9.4**)



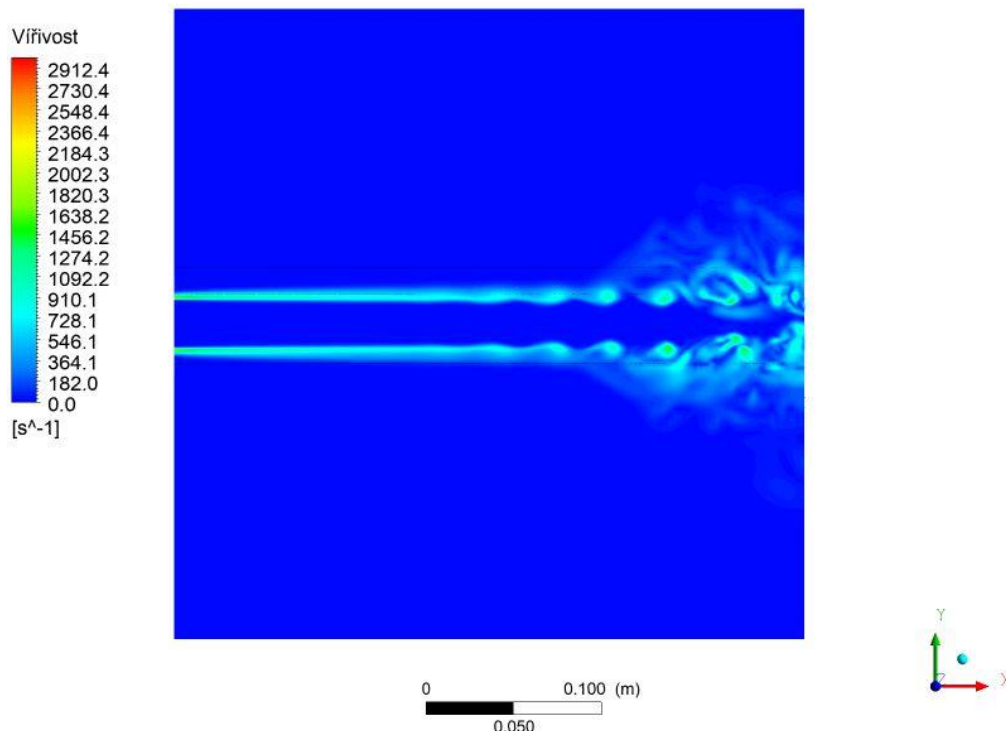
Obr. 9.4 Velikost TKE v čase $T = 1,00$ s

Hodnoty TEF uvnitř turbulentního paprsku při ($Re = 150\,000$) jsou uvedeny níže (**obr. 9.5**).



Obr. 9.5 Velikost TEF v čase $T = 1,00$ s

Průběh vířivosti uvnitř turbulentního paprsku při ($Re = 150\,000$) je uveden níže (**obr. 9.6**).



Obr. 9.6 Hodnota vířivosti v čase $T = 1,00$ s

Jak již bylo zmíněno v úvodu této práce *vířivost* (též *vír rychlosti*) je jedním ze základních atributů turbulentního proudění a je definována jako rotace rychlosti

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}. \quad (9.15)$$

Z **obr. 9.6** je patrné, že v oblasti jádra paprsku nedochází k tvorbě vírových struktur. Jednotlivé vírové struktury vznikají na hranicích jádra paprsku, poté dochází k jejich přesunu a rozpadu ve směru proudění.

POZN.: Z rozboru výsledků kombinace metody DES a RANS resp. samostatné metody DES vyplývá, že návrhová frekvence převyšuje frekvenci pozorovanou pro oba přístupy (kombinace RANS a DES, resp. samostatné metody DES). Výsledkem je, že použitá délka časového kroku je v rámci návrhu na základě postupné generace vírů vyšší, než by bylo zapotřebí, nicméně menší hodnota časového kroku nemá negativní vliv na přesnost výsledků.

10 MODEL ŘADY PONOŘENÝCH TURBULENTNÍCH PAPERKŮ

Tato kapitola je věnována modelování řady ponořených kruhových paprsků, které jsou umístěny v osové vzdálenosti $s = 8d$, kde d je průměr trysky ($d = 0,03 \text{ m}$). Jednotlivé velikosti průměru trysek d jsou neměnné. Osová vzdálenost paprsků vychází z navrženého tvaru geometrie trysky (velikosti přírubového spoje – průměr příruby 235 mm).

Pro numerické řešení turbulentního proudění bude aplikován statistický přístup řešení pomocí metody *RANS*. Jako model reprezentující danou metodu bude použit dvourovnicový model $k-\varepsilon$ Standard. Volba turbulentního modelu $k-\varepsilon$ Standard vychází ze zpracovaných výsledků modelu *ponořeného turbulentního paprsku* v rámci bakalářské práce [42], kde byly pro účely modelování ponořeného paprsku použity různé dvourovnicové turbulentní modely, které byly srovnány s rozdělením rychlosti podle *Tollmiena* a *Görtlera*. Model $k-\varepsilon$ Standard dosahoval (při $Re = 10^6$) největší shody s použitými rozděleními rychlosti, jejichž platnost byla ověřena experimentálně. Proudění tekutiny v řadě bude řešeno jako *stacionární případ proudění*. Velikost Reynoldsova čísla v ústí trysky byla zvolena hodnotou $Re = 150\,000$.

POZN.: O vhodnosti použití standardního modelu $k-\varepsilon$ pro potřeby modelování čtvercového pole ponořených paprsků svědčí [18], kde model $k-\varepsilon$ poskytoval dobrou shodu s experimentálními pozorováními.

10.1 Pozorování řady ponořených paprsků

Experimentálnímu pozorování řady ponořených turbulentních paprsků byla věnována pozornost již v polovině minulého století. Corrsin (1944) se zabýval experimentálním měřením řady paprsků s orientací na měření teploty turbulentního proudu. Z měření vzešly dva základní poznatky, kterými jsou sloučení paprsků v jisté vzdálenosti od ústí trysek v jeden paprsek a zakřivení dráhy krajních paprsků směrem k sousednímu paprsku v řadě. Corrsinovy poznatky o proudění uvnitř řady paprsků byly potvrzeny i experimentálními pozorováními dalších autorů, kterými jsou Knystautas (1962), Marsters (1979); Tanaka a Nakata (1975), Pani a Dash (1983) a Cho (2008). [18]

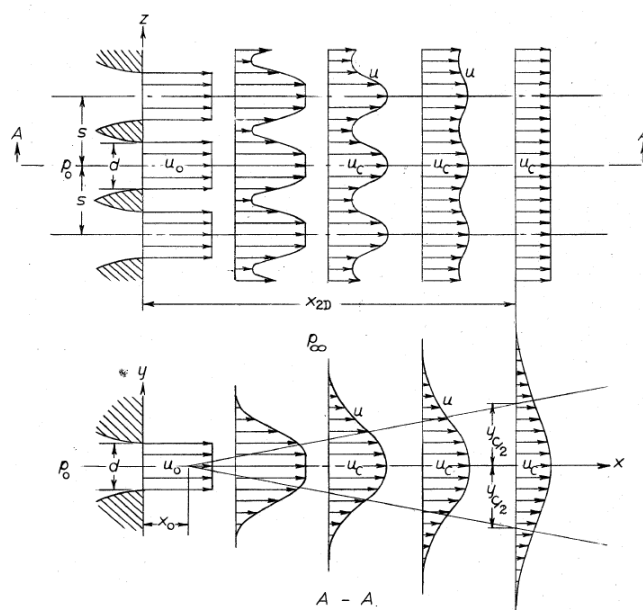
Numerické simulace doplněné experimentálními pozorováními autorů Böhm (2008), Stein (2011) a Rieth (2014) prokázaly existenci tří základních oblastí proudění uvnitř pole ponořených paprsků. Počáteční region, ve kterém je rychlost rovna rychlosti v ústí trysky a malými rychlostmi mezi tryškami, na nějž navazuje region se silnou vzájemnou interakcí paprsků, doprovázenou poklesem rychlosti a koncový region, ve kterém již nejsou patrné rysy individuálních paprsků a dochází k útlumu turbulentního proudění. [18], [24]

Vzdálenost x_{2D} , ve které dochází ke sloučení řady paprsků v kvazi dvourozměrný paprsek a poloha virtuálního počátku x_0 jsou za předpokladu vysoké hodnoty Re závislé na poměru osové vzdálenosti trysek a průměru trysky, tj. [24]

$$\frac{x_{2D}}{d} = f\left(\frac{s}{d}\right), \quad (10.1)$$

$$\frac{x_0}{d} = f\left(\frac{s}{d}\right), \quad (10.2)$$

kde s je osová vzdálenost trysek.



Obr. 10.1 Kvazi dvourozměrný paprsek [24]

10.2 Model řady paprsků

Předmětem modelování řady kruhových paprsků bude výpočet rychlostního pole se zaměřením na vzájemné spolupůsobení paprsků.

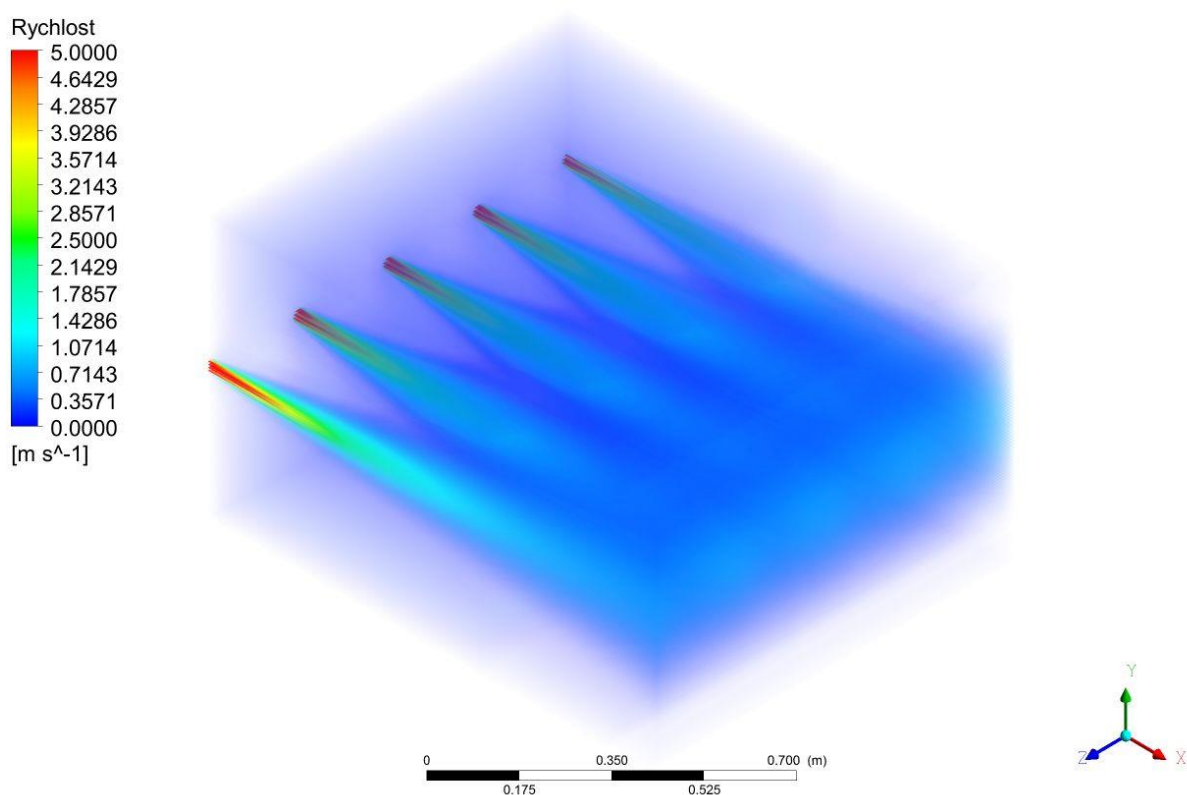
Výpočetní oblast řady ponořených paprsků byla sestavena ve tvaru kvádrů s využitím symetrie řešení. Rozměry oblasti vyjádřené v násobcích průměru trysky postupně dosahují hodnot (délka x šířka x výška – $40d \times 16d \times 17d$). Pro výpočet byla použita síť, která se skládala ze šestistěnů a klínů o minimální délce hrany

$$\Delta_{min} = \frac{d}{10} = \frac{0,03}{10} = 3 \cdot 10^{-3} [m]. \quad (10.3)$$

V oblastech s předpokládanými nižšími gradienty výpočetních charakteristik došlo k navyšování rozměru buněk výpočetní sítě. Dále byla věnována maximální snaha o vytvoření buněk s optimální hodnotou šikmosti a ortogonální kvality.

POZN.: Za účelem dosažení optimální výpočetní sítě, která nemá negativní účinky na výsledky modelu, bylo provedeno několik výpočtů řady ponořených paprsků na různých výpočetních sítích, u kterých docházelo k postupnému navyšování velikosti buněk výpočetní sítě v místech významných gradientů výpočetních charakteristik. Za optimální výpočetní síť byla uvažována síť, která při následujícím navýšení elementů neměla vliv na obdržené výsledky (testováno na rychlostních profilech). Nastavení výpočtu zůstalo pro veškeré posuzované sítě neměnné. Rychlostní profily byly posuzovány pro již konvergované výsledky (kritérium $1E-06$).

Grafické znázornění rychlostních poměrů modelu řady ponořených turbulentních paprsků ($Re = 150\,000$) simulovaných pomocí modelu $k-\varepsilon$ Standard je uvedeno níže (**obr. 10.2**).



Obr. 10.2 Model řady ponořených turbulentních paprsků ($k-\varepsilon$ Standard)

10.2.1 Základní popis modelu řady paprsků

V případě stacionárního výpočtu jsou jednotlivé výpočetní charakteristiky (rychlost) nezávislé na čase, ale na poloze vyšetřovaného bodu. Stacionární přístup je jednodušší metodou řešení, kterou lze aplikovat při použití metody *RANS*.

Návrhová velikost intenzity turbulence vycházela z výsledků předchozí kapitoly a pro model $k-\varepsilon$ Standard dosahuje velikosti 5%. Použité výpočetní schéma je založeno na korekcích tlaku a nese označení *pressure-based solver*. Jelikož se jedná o stacionární případ řešení řady paprsků, bude použit

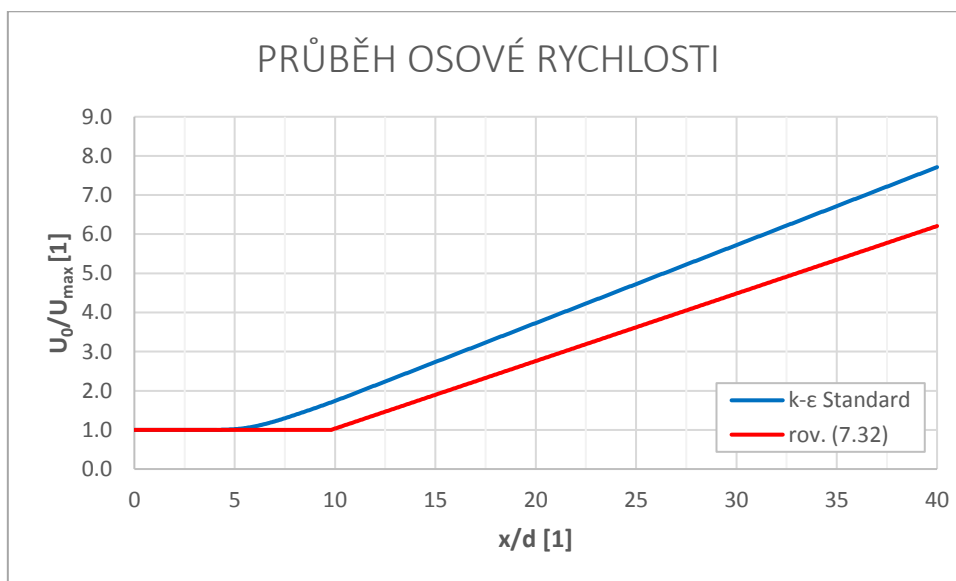
algoritmus označovaný jako *SIMPLE* (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*). Jedná se o sekvenční algoritmus, který využívá vztahu mezi korekcemi rychlostí a tlaku k získání tlakového pole se zachováním hmoty. Pro řešení bylo využito kombinace protiproudé interpolace prvního (*First-Order Upwind*) a interpolace druhého řádu (*Second-Order Upwind*), přičemž pro první část výpočtu byla použita interpolace prvního řádu, na kterou navázala interpolace druhého řádu. Pro výpočet tlaku bylo za interpolační schéma použito *Presto!*, pro výpočet gradientů metoda *Least squares Cell Based*.

10.2.2 Rozbor výsledků modelu řady paprsků

Výsledky modelu *k-ε Standard* na „optimální“ výpočetní síti za výše zmíněného nastavení řešení byly následně vyhodnoceny. Pozornost byla věnována především rychlostem uvnitř spolupůsobícího paprsku. Z rozboru výsledků vyplývá, že turbulentní proud lze rozdělit do dvou základních oblastí. První oblast je vymezena ústím trysky a počátkem vzájemné interakce paprsků. Druhá oblast navazuje na první a je pro ni charakteristická vzájemná interakce paprsků. Obě oblasti lze dále rozdělovat do dvou podoblastí. V první oblasti se jedná o podoblast jádra paprsku a následného poklesu rychlosti (transientní oblasti). Ve druhé oblasti lze rozlišovat podoblast, ve které je stále patrný rozdíl mezi maximální rychlostí proudu a minimální rychlostí, dále podoblast, v níž se proudění stává kvazi dvourozměrné, kde v rovině paprsků je rychlostní profil konstantní.

*POZN.: Při vyhodnocení výsledků budou rozlišovány dvě základní roviny. Rovina ponořených spolupůsobících paprsků (označovaná jako rovina *x-z*) a rovina kolmá na rovinu paprsků v místě osy paprsku (označovaná jako rovina *x-y*).*

Průběh osové rychlosti samostatného a spolupůsobícího paprsku je uveden níže (**graf 10.1**).



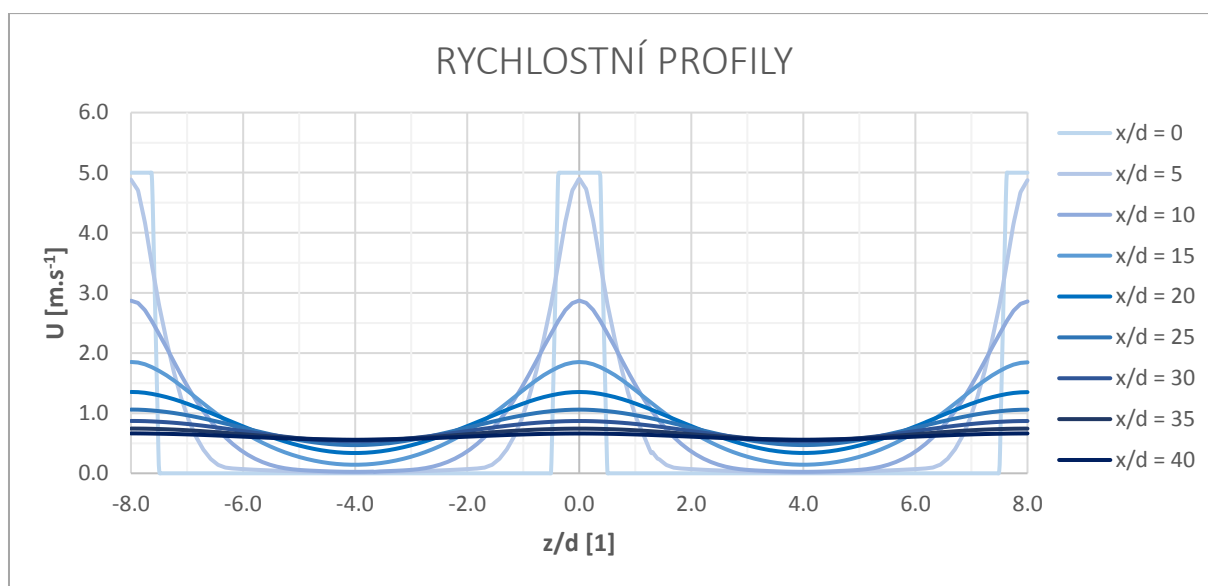
Graf 10.1 Průběh osové rychlosti uvnitř samostatného paprsku rov. (7.32) pro $(x_0/d = 4)$ a spolupůsobícího paprsku podle výsledků modelu *k-ε Standard*

Pro průběh osové rychlosti uvnitř spolupůsobícího paprsku získaný na základě výsledků turbulentního modelu $k-\varepsilon$ Standard při $Re = 150\,000$ platí

$$\frac{U_{max}}{U_0} = \frac{B^*}{(x - x_0)/d}, \quad (10.4)$$

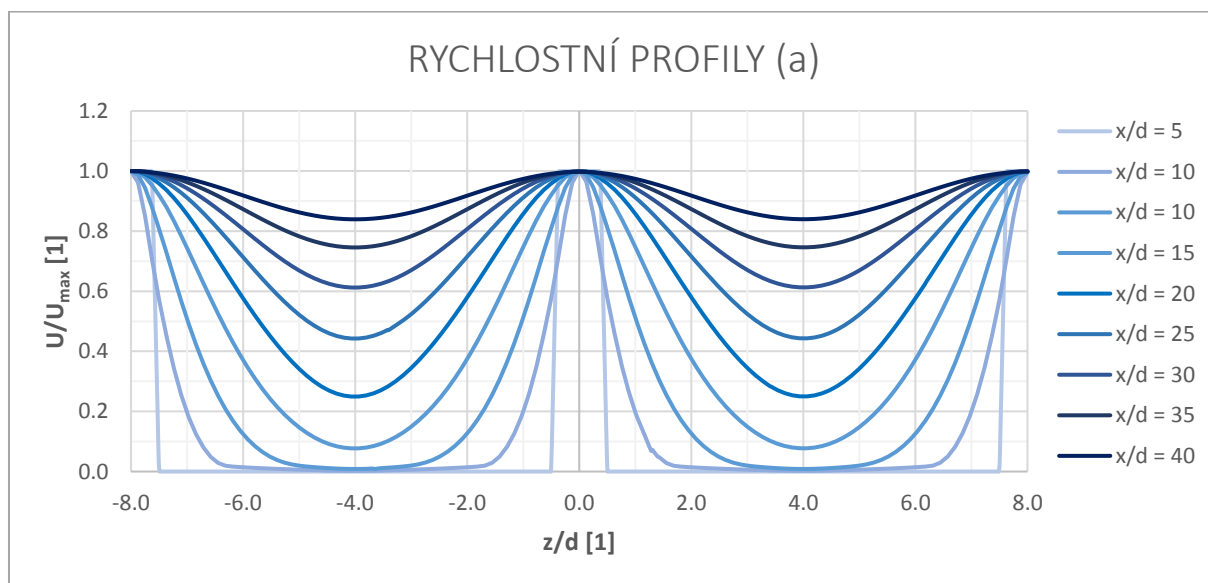
kde B^* je konstanta stanovená rozbořem výsledků modelu $k-\varepsilon$ Standard, pro kterou platí $B^* \approx 5,0$ a x_0 je poloha virtuální počátku, která dosahuje hodnoty $x_0 = 1,27d$.

Rychlostní profily řady spolupůsobících paprsků v rovině paprsků $x-z$ jsou uvedeny níže (**graf 10.2**).



Graf 10.2 Ukázka rychlostních profilů ve formě grafu ($y/d ; U$) v rovině $x-z$

Rychlostní profily řady spolupůsobících paprsků v rovině paprsků jsou uvedeny níže v bezrozměrné formě grafu (**graf 10.3**).

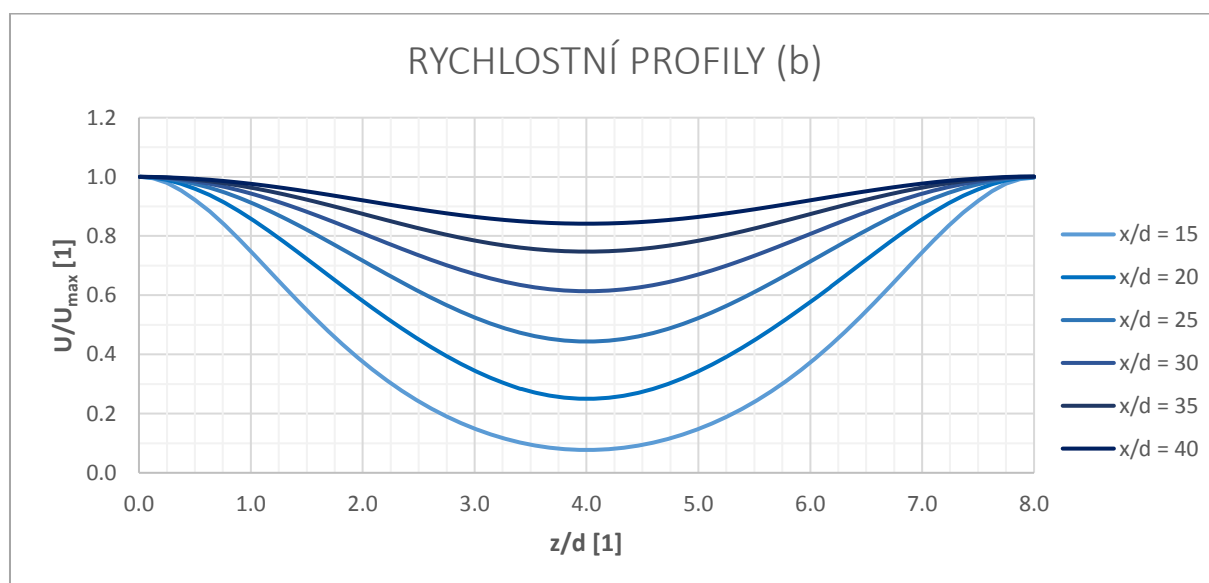


Graf 10.3 Ukázka rychlostních profilů v bezrozměrné formě grafu ($y/d ; U/U_{max}$) v rovině $x-z$

Ze srovnání průběhu osově rychlosti uvnitř samostatného a spolupůsobícího paprsku (**graf 10.1**) vyplývá, že uvnitř spolupůsobícího paprsku dochází k intenzivnějšímu poklesu osově rychlosti, než je tomu u samostatného paprsku. Pokles osově rychlosti uvnitř spolupůsobícího paprsku je opět hyperbolický, jehož inverzním případem je přímka, a jelikož je v inverzním případě sklon přímky reprezentující pokles osově rychlosti spolupůsobícího paprsku vyšší, než je tomu v případě samostatného paprsku, je pokles osově rychlosti uvnitř spolupůsobícího paprsku významnější. Rovněž délka jádra paprsku stanovená numerickou simulací na základě modelu $k-\varepsilon$ Standard je nižší $L_{ZFE} \sim 5d$, než je tomu v případě samostatného turbulentního paprsku $L_{ZFE} \sim 5,3d$.

Z průběhu rychlostních profilů řady spolupůsobících paprsků (**graf 10.2**), (**graf 10.3**) vyplývá, že dochází k postupnému slučování paprsků a následnému snižování rozdílů mezi minimální a maximální rychlostí v rychlostním profilu paprsku, až dochází k vývinu konstantního rychlostního profilu.

Vynesení rychlostních profilů v bezrozměrné formě grafu $(y/d; U/U_{max})$ na oblasti vzájemné interakce paprsků je uvedena níže (**graf 10.4**).



Graf 10.4 Vynesení rychlostních profilů v bezrozměrné formě grafu $(y/d; U/U_{max})$ v rovině $x-z$

Rychlostní profily v oblasti vzájemné interakce paprsků až po vznik kvazi dvourozměrného paprsku je možné aproximovat pomocí kosinové funkce, která dobře vystihuje periodicitu rychlostního profilu. Pro popis rozdělení rychlosti tedy byla využita kosinová funkce ve tvaru

$$\frac{U}{U_{max}} = \alpha + \beta \cos \left[\gamma \left(\frac{z}{d} \right) + \delta \right], \quad (10.5)$$

kde α , β , γ a δ jsou koeficienty kosinové funkce, které jsou pro jednotlivé rychlostní profily zpracovány níže (**tab. 10.1**).

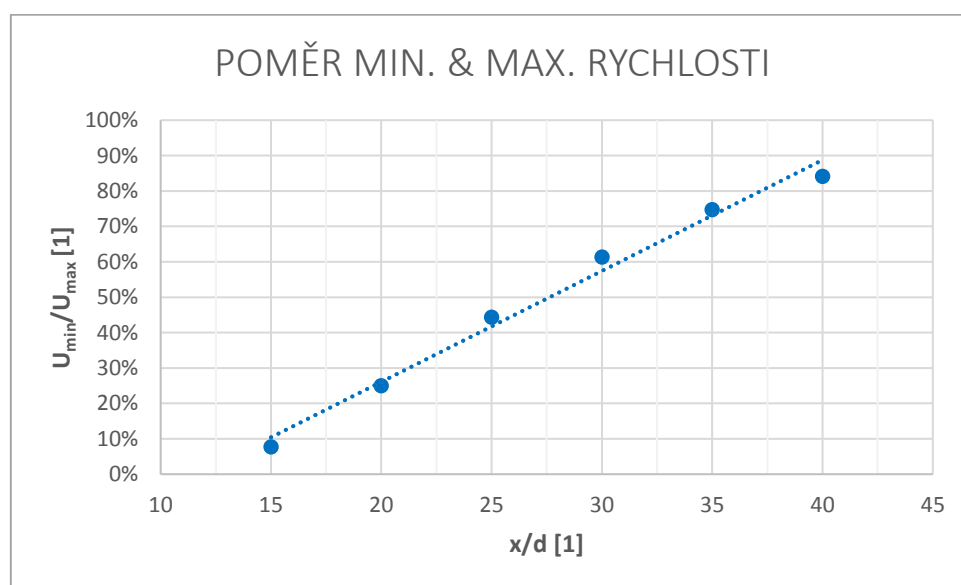
Výše uvedená rov. (10.5) byla odvozena pro nekonečně dlouhou řadu ponořených paprsků, které jsou rozmístěny v konstantní osově vzdálenosti odpovídající $s = 8d$. Platnost rovnice je omezena na oblast mezi počátkem vzájemného spolupůsobení paprsků až po vznik kvazi dvourozměrného paprsku.

Tab. 10.1 Hodnoty koeficientů kosinového rozdělení rychlosti a hodnoty korelačního koeficientu

	$x/d = 15$	$x/d = 20$	$x/d = 25$	$x/d = 30$	$x/d = 35$	$x/d = 40$
Koeficient α	0,72896	0,63912	0,72287	0,80650	0,87355	0,92103
Koeficient β	0,66838	0,39163	0,27853	0,19239	0,12612	0,07938
Koeficient γ	0,52260	0,71525	0,77238	0,78830	0,78865	0,78299
Koeficient δ	1,04865	0,27706	0,04744	-0,01586	-0,01515	0,01157
Korel. koef.	0,99853	0,99986	0,99999	0,99999	0,99999	0,99998

Srovnáním velikosti minimální a maximální rychlosti (**graf 10.5**) spolupůsobícího paprsku v oblasti, na které dochází ke sloučení rychlostních profilů až po následný vývoj kvazi dvourozměrného paprsku, lze stanovit základní oblasti spolupůsobícího paprsku na základě rozboru rychlostních profilů (**graf 10.4**). Pro vzdálenost, v níž paprsky vykazují dvourozměrné chování, platí, že poměr maximální a minimální rychlosti je roven $U_{min}/U_{max} = 1$, zatímco pro vzdálenost, ve které dochází k počátku vzájemné interakce, platí $U_{min}/U_{max} = 0$.

Ukázka velikosti poměru mezi maximální a minimální rychlostí spolupůsobícího paprsku v závislosti na vzdálenosti od trysky v rovině paprsků je uvedena níže (**graf 10.5**).



Graf 10.5 Poměr min. a max. rychlosti v závislosti na poloze ve směru proudění v rovině x - z

Na základě zpracování závislosti velikosti poměru minimální a maximální profilové rychlosti vyplývá, že s rostoucí vzdáleností od ústí trysky dochází k lineárnímu nárůstu poměru rychlostí, tj.

$$\frac{U_{min}}{U_{max}} = A \left(\frac{x}{d} \right) + B, \quad (10.6)$$

kde A, B jsou koeficienty, pro které platí $A = 0,031\ 33$ a $B = -0,365\ 89$ (při $R^2 = 0,987\ 48$).

Vzdálenost, v níž dochází ke vzniku vzájemné interakce paprsků, je možné určit na základě rov. (10.6) při položení poměru rychlostí $U_{min}/U_{max} = 0$. Rovněž lze na základě téže rovnice stanovit vzdálenost, ve které dochází ke vzniku kvazi dvourozměrného paprsku jako $U_{min}/U_{max} = 1$.

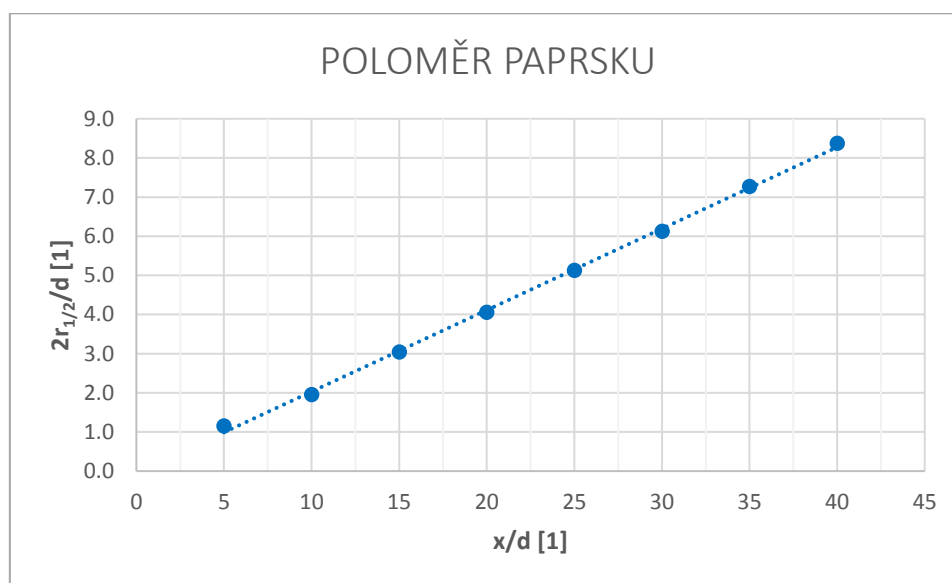
Vzdálenost počátku vzájemné interakce paprsků je rovna

$$x_1 = 11,7d. \quad (10.7)$$

Vzdálenost, ve které lze proud označit jako kvazi dvourozměrný, odpovídá velikosti

$$x_{2D} = 43,6d. \quad (10.8)$$

Ukázka nárůstu poloměru spolupůsobícího paprsku v rovině x - y je uvedena níže (**graf 10.6**).



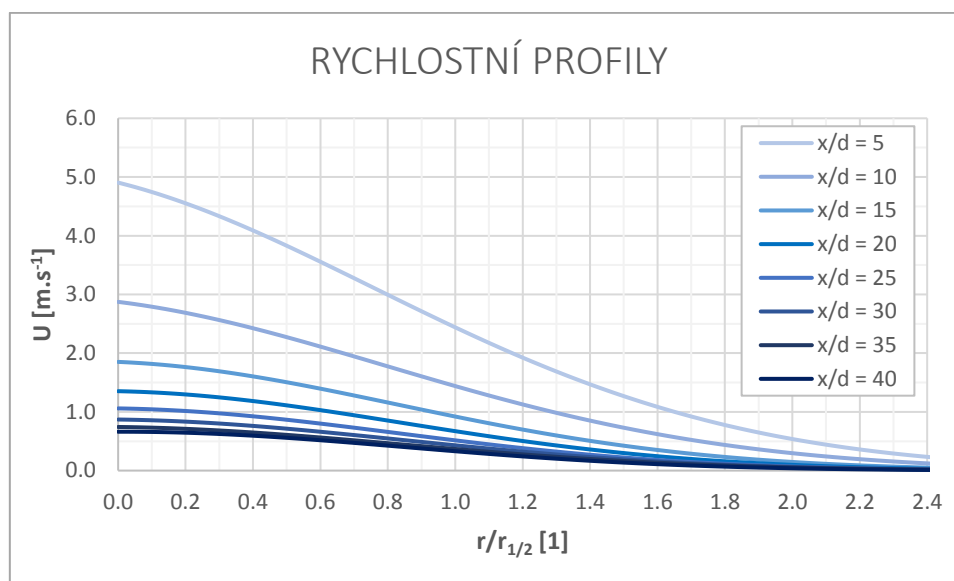
Graf 10.6 Nárůst poloměru paprsku v rovině x - y

Průběh poloměru paprsku v závislosti na poloze ve směru proudění lze popsat pomocí lineárního modelu, pro který platí

$$\frac{2r_{1/2}}{d} = A \left(\frac{x}{d} \right) + B, \quad (10.9)$$

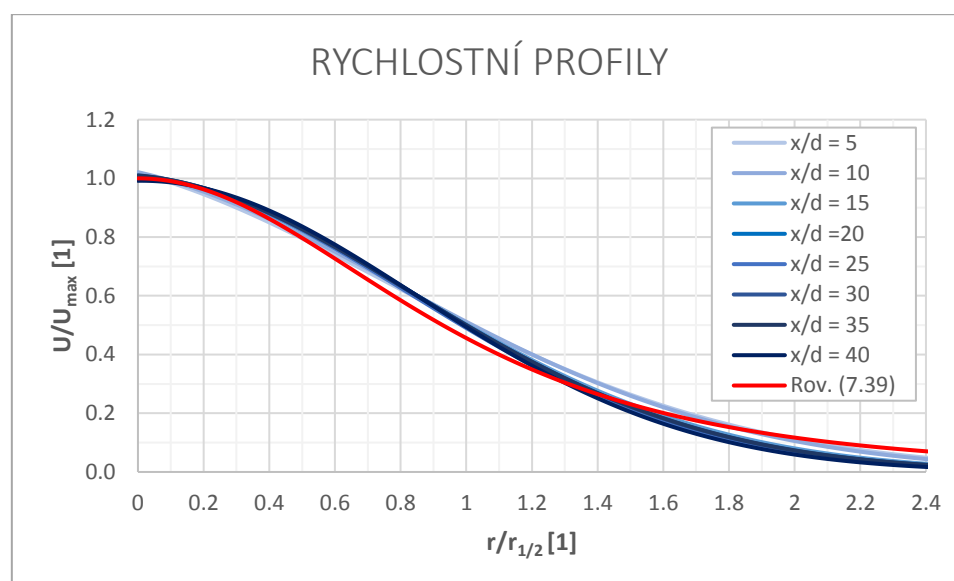
kde A, B jsou koeficienty lineární funkce, pro které platí $A = 0,208\ 15$ a $B = 0,051\ 28$.

Rychlostní profily spolupůsobícího paprsku v rovině x - y jsou uvedeny níže (**graf 10.7**).



Graf 10.7 Rychlostní profily v rovině x - y

Vynesení rychlostních profilů uvnitř spolupůsobícího paprsku do bezrozměrné formy grafu ($r/r_{1/2}; U/U_{max}$) se srovnáním rozdělení rychlosti na základě uniformní turbulentní viskozity rov. (7.39) je uvedeno níže (**graf 10.8**).



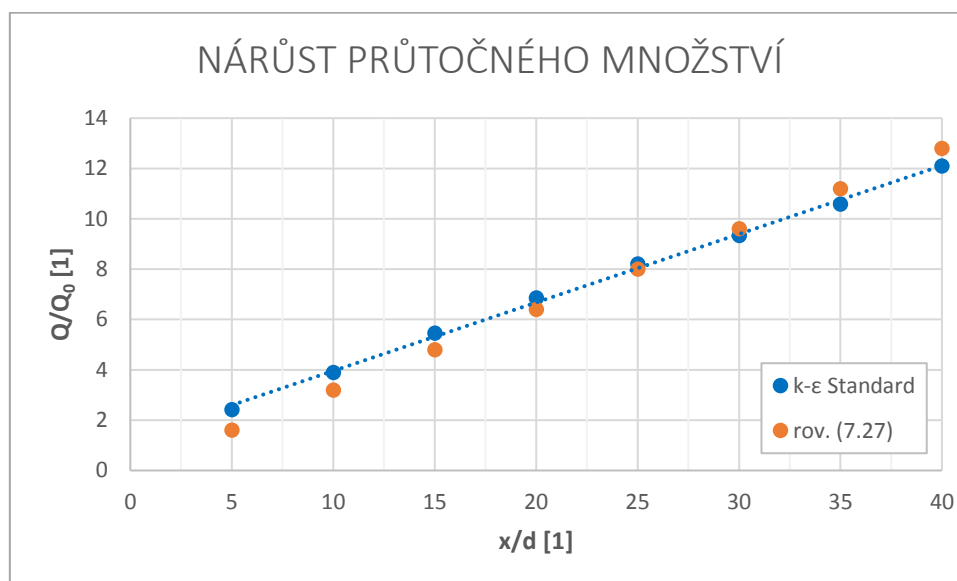
Graf 10.8 Vynesení rychlostních profilů v rovině x - y do bezrozměrné formy grafu

Ze srovnání modelovaných rychlostních profilů v rovině x - y s rozdělením rychlosti na základě předpokladu uniformní konstantní turbulentní vazkosti vyplývá, že modelované rychlostní profily jsou v dobré shodě s použitým rozdělením zejména v oblasti osy paprsku. S rostoucí vzdáleností od osy paprsku dochází k nárůstu rozdílu, který je způsoben s poklesem hodnoty turbulentní vazkosti. Pro sestavení rozdělení rychlosti byl uvažován koeficient úměrnosti roven $S = 0,096$ [31].

Průtočné množství a střední kinetická energie proudu

Dalšími charakteristikami, které byly v rámci modelování spolupůsobícího paprsku vyhodnocovány, bylo průtočné množství a střední kinetická energie. Z průběhu průtočného množství uvnitř spolupůsobícího paprsku vyplývá, že opět dochází k lineárnímu nárůstu ve směru proudění, které lze opět přisuzovat strhávání okolní tekutiny dovnitř paprsku. Při srovnání s empiricky odvozenou rovnicí rov. (7.27) pro výpočet objemového průtoku uvnitř samostatného turbulentního paprsku vyplývá, že si jednotlivé hodnoty průtočného množství samostatného a spolupůsobícího paprsku (při $s/d = 8$) v zásadě odpovídají.

Nárůst průtočného množství tekutiny v paprsku je uveden níže (**graf 10.9**).



Graf 10.9 Ukázka nárůstu průtočného množství tekutiny uvnitř samostatného paprsku podle rov. (7.27)(7.23) a spolupůsobícího ponořeného paprsku na základě modelu $k-\varepsilon$ Standard

Pro vyjádření nárůstu průtočného množství je opět možné aplikovat lineární model, pro který platí

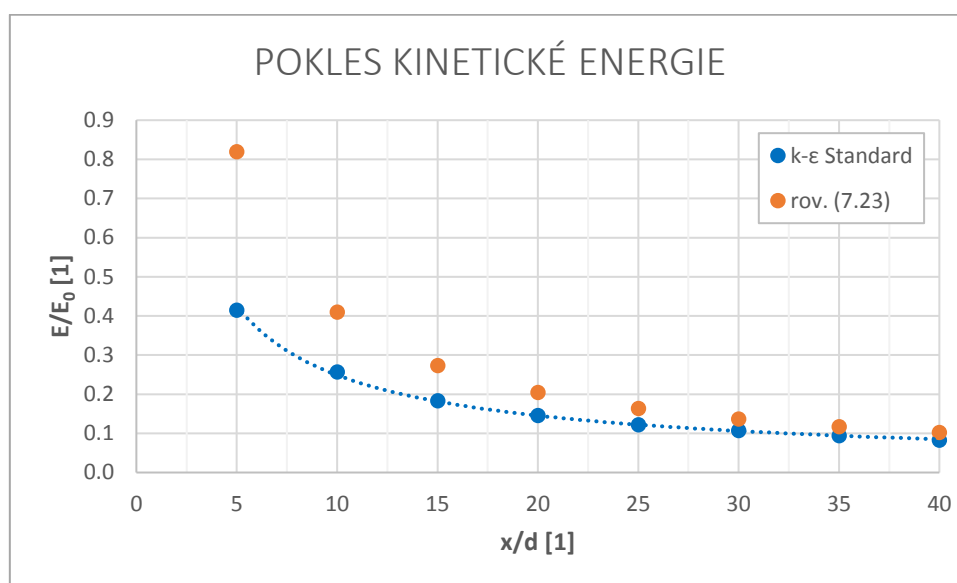
$$\frac{Q}{Q_0} = A \left(\frac{x}{d} \right) + B, \quad (10.10)$$

kde A, B jsou empiricky stanovené koeficienty $A = 0,271\ 95$ a $B = 1,236\ 62$.

POZN.: Pro výpočet velikosti průtoku uvnitř oblasti vývinu proudění lze použít rov. (9.7).

Průběh kinetické energie proudu uvnitř ponořeného spolupůsobícího paprsku byl stanoven na základě poznatku o zachování konstantní velikosti hybnosti ve směru proudění. Ze známé velikosti průtočného množství a hustoty tekutiny lze vypočítat střední rychlost, z níž je možné určit průtočnou plochu v jednotlivých polohách ve směru proudění. Ze známé velikosti hustoty tekutiny (předpokládáno proudění nestlačitelné tekutiny), objemového průtoku a střední rychlosti je poté možné vyčíslit hodnoty kinetické energie proudu.

Pokles kinetické energie proudu tekutiny v paprsku je uveden níže (**graf 10.10**).



Graf 10.10 Ukázka nárůstu průtočného množství tekutiny uvnitř samostatného paprsku podle rov. (7.23) a spolupůsobícího ponořeného paprsku na základě modelu $k-\varepsilon$ Standard

Vypočtené hodnoty kinetické energie byly následně vyneseny do grafu a srovnány s empiricky stanovenou rovnicí rov (7.23), popisující pokles kinetické energie proudu uvnitř samostatného ponořeného turbulentního paprsku. Ze srovnání výsledných hodnot kinetické energie pro případ samostatného a spolupůsobícího paprsků vyplývá, že hodnoty kinetické energie spolupůsobícího paprsku jsou až téměř dvojnásobně nižší než velikosti kinetické energie samostatného paprsku. Důvodem odlišností hodnot střední kinetické energie může být chyba ve vyčíslení kinetické energie způsobená výpočtem ze střední průřezové rychlosti za předpokladu konstantní hodnoty Coriolisova čísla $\alpha = 1,0$ a především okolnost, že dochází k ovlivňování proudu okolními spolupůsobícími paprsky.

Pro výpočet poklesu kinetické energie proudu tekutiny uvnitř spolupůsobícího paprsku je možné použít mocninnou funkci ve tvaru

$$\frac{E}{E_0} = A \left(\frac{x}{d} \right)^B, \quad (10.11)$$

kde A, B jsou empiricky stanovené koeficienty $A = 1,484\ 83$ a $B = -0,775\ 79$.

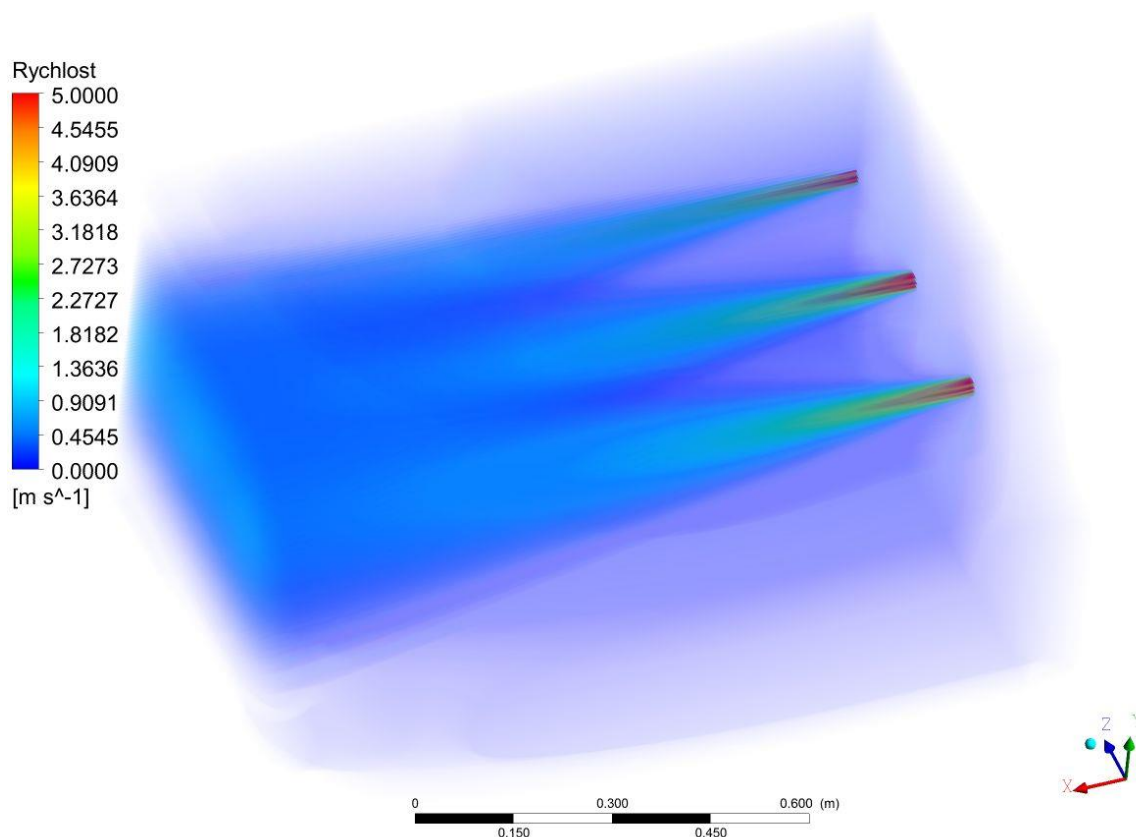
POZN.: Pro výpočet velikosti kinetické energie uvnitř oblasti vývinu proudění lze použít rov. (9.8).

10.3 Model krajního paprsku

V pořadí druhým modelem sestaveným v rámci této kapitoly je model krajního paprsku. Pozornost bude především věnována rozboru rychlostního pole v rovině $x-z$ a dráze krajního paprsku.

Výpočetní oblast opět využívala symetrie řešení řady ponořených paprsků. Tvar výpočetní oblasti byl navržen ve tvaru kvádrů o rozměrech (délka x šířka x výška – $40d \times 32d \times 13d$). Výpočetní buňky byly opět navrženy ve tvaru šestistěny a klínu o minimální délce hrany Δ_{min} , jako v předešlém případě řady paprsků, tj. $\Delta_{min} = 10^{-3} [m]$.

Grafické znázornění rychlostních poměrů modelu krajního paprsku ($Re = 150\,000$) podle modelu $k-\varepsilon$ Standard je uvedeno níže (**obr. 10.3**).



Obr. 10.3 Model krajního ponořeného turbulentního paprsku ($k-\varepsilon$ Standard)

POZN.: Použitá výpočetní síť tvoří modifikaci předchozí výpočetní sítě použité při modelování řady paprsků.

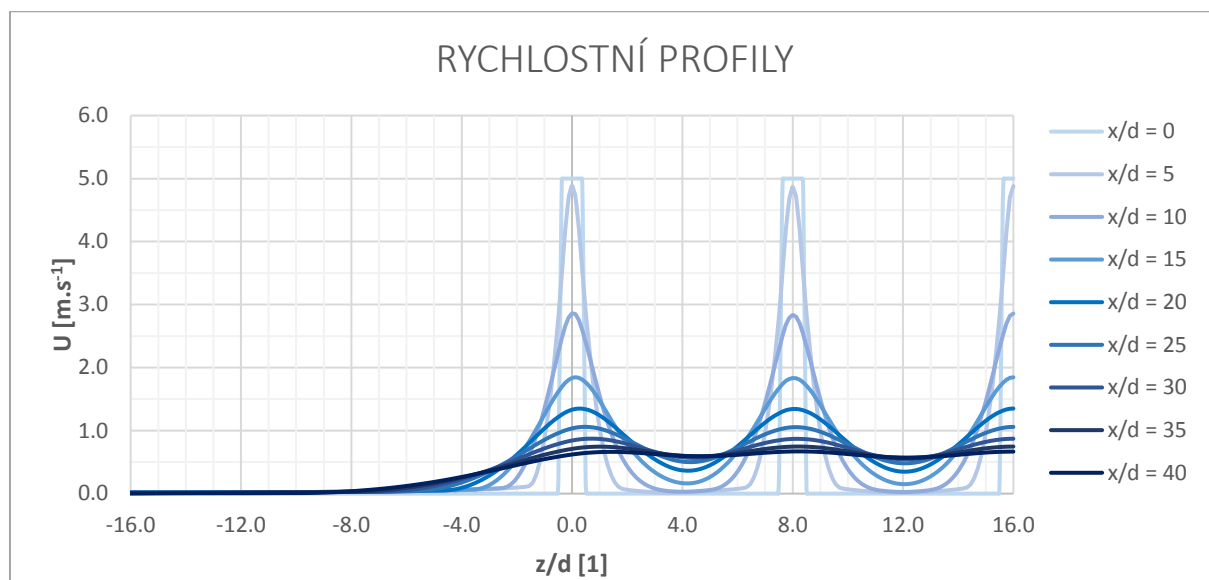
10.3.1 Základní popis modelu krajního paprsku

Pro model krajního paprsku byly modelovány celkem tři ponořené paprsky. Rozdílnost oproti předcházejícímu modelu řady ponořených paprsků spočíval v zadávání okrajových podmínek, kde místo symetrické okrajové podmínky byla nastavena výstupní tlaková podmínka. Nicméně nastavení výpočtu zůstalo shodné s předchozím případem řady paprsků. Pro výpočet byl použit model $k-\varepsilon$ Standard.

10.3.2 Rozbor výsledků modelu krajního paprsku

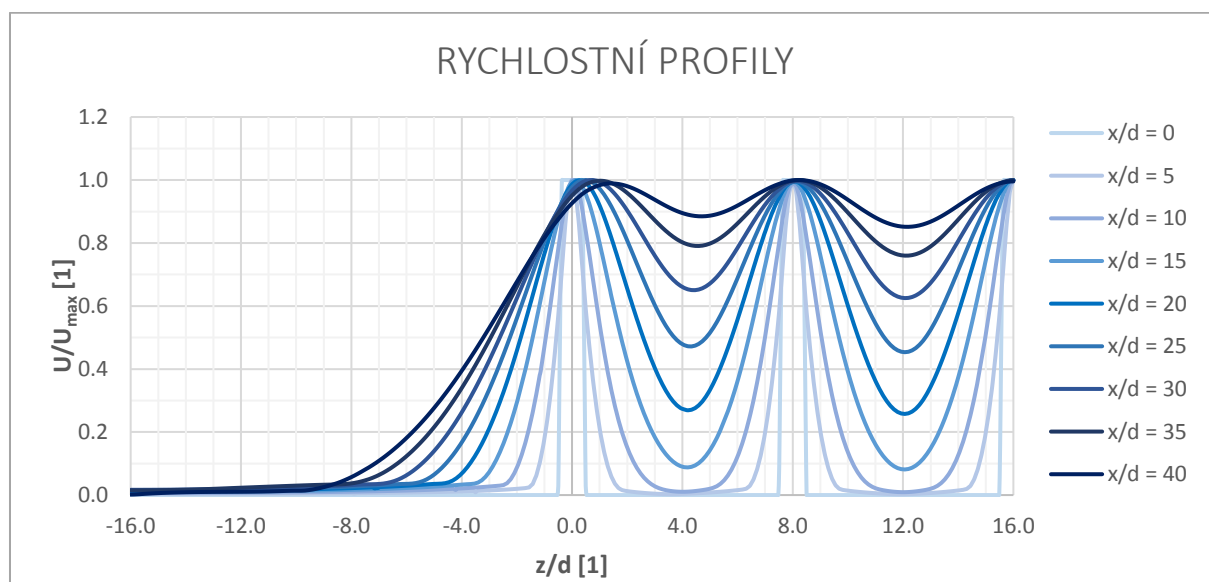
Následně byly výsledky modelu krajního paprsku vyhodnoceny. Z výsledků vyplývá, že dochází k nakřivení dráhy krajního paprsku směrem k sousednímu paprsku.

Rychlostní profily krajního a dvou sousedních paprsků v rovině $x-z$ jsou uvedeny níže (**graf 10.11**).



Graf 10.11 Rychlostní profily krajního a nejbližších dvou sousedních paprsků

Rychlostní profily krajního a dvou sousedních paprsků v rovině $x-z$ jsou uvedeny níže v bezrozměrné formě grafu (**graf 10.12**).

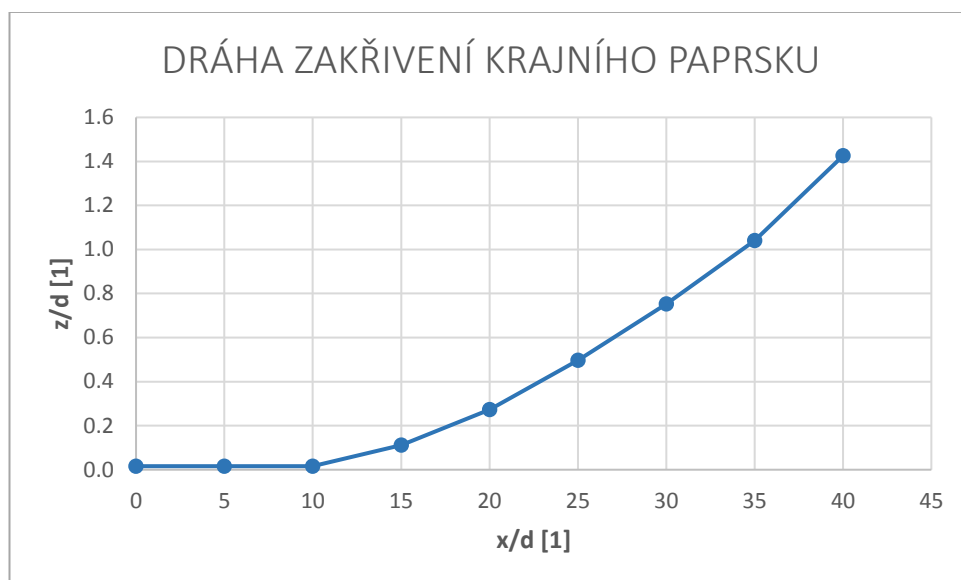


Graf 10.12 Rychlostní profily krajního a sousedních dvou paprsků v bezrozměrné formě grafu

Z vynesení rychlostních profilů v rovině $x-z$ (**graf 10.12**) vyplývá, že poměr minimální a maximální profilové rychlosti mezi krajním a sousedním paprskem vykazuje trochu vyšší nárůst hodnot, než je tomu při modelování nekonečně dlouhé řady ponořených turbulentních paprsků, avšak hodnoty

vzdáleností x_1 a x_{2D} stanovené z rozboru řady paprsků jsou platná pro model krajního paprsku při uvažování ($s/d = 8$).

Ukázka zakřivení dráhy maximální rychlosti krajního spolupůsobícího paprsku v rovině x - z je uvedena níže (**graf 10.13**).



Graf 10.13 Zakřivení krajního paprsku v rovině x - z

Ke zakřivení dráhy paprsku směrem k sousednímu paprsku dochází až v oblasti vzájemné interakce paprsků. Největší zakřivení dráhy krajního paprsku vykazuje krajní paprsek, avšak mírné zakřivení bylo pozorováno i u sousedního paprsku, které však bylo 6krát nižší. Příčinou jsou rozdílné tlakové poměry po obou stranách paprsku. Maximální naměřená velikost odchýlení od hypotetické osy paprsku je rovna $\Delta \sim 1,4d$ (**graf 10.13**).

POZN.: Pro popis rychlostí v rozmezí od osy krajního paprsku směrem do volného prostředí lze pro popis rychlostního pole opět uplatnit Gaussovo rozdělení rychlosti resp. rov. (7.39) doplněnou rov. (7.40) (na oblasti plně vyvinutého proudu). Z rozboru výsledků modelu krajního paprsku dále vyplývá, že koeficient úměrnosti S dosahuje přibližně o 20% nižší hodnoty, než je tomu v případě samostatného turbulentního paprsku. Tato okolnost může být opět důsledkem rozdílných tlakových poměrů, kde na straně sousedního paprsku dochází ke vzniku podtlaku, který způsobuje zakřivení dráhy krajního paprsku a snižuje rozšíření paprsku opačným směrem k sousednímu paprsku.

11 ZÁVĚR

Práce byla věnována popisu turbulentního proudění se zaměřením na problematiku spolupůsobení turbulentních paprsků, jádra paprsku a návrhu trysky za pomoci metody *CFD*. Navazuje na bakalářskou práci, ze které čerpá poznatky o modelování ponořeného turbulentního paprsku a snaží se zaměřit na určité předpoklady, které byly v rámci bakalářské práce použity při tvorbě modelu ponořeného paprsku. Pro veškeré provedené výpočty byla za proudící tekutinu uvažována voda o hustotě $\rho = 998,2 [kg \cdot m^{-3}]$ a hodnotě dynamické viskozity rovné $\nu = 1,003 \cdot 10^{-3} [Pa \cdot s]$. Návrhová hodnota Reynoldsova čísla v ústí trysky byla pro veškeré modely neměnná o velikosti $Re = 150\,000$.

Za účelem ověření předpokladu konstantního rozdělení rychlosti po průřezu trysky byla sestavena polynomická křivka 6. stupně, která reprezentovala vnitřní tvar kontrakce trysky. Vnitřní tvar křivky byl postupně optimalizován na základě maximálních hodnot Görtlerova čísla, které představovalo účelovou funkci, jež bylo zapotřebí optimalizovat (minimalizovat). Optimalizační podmínka byla vázána na polohu maximální křivosti křivky na konkávní straně trysky, jelikož křivost vystupuje ve výrazu pro výpočet Görtlerova čísla. Pro optimalizaci vnitřního tvaru trysky byly uplatněny celkem dva přístupy označované jako „matematický“ a „numerický“ model. Matematický model byl sestaven ve dvou krocích. První krok spočíval v sestavení geometrie vnitřního tvaru trysky pro konkrétně zadanou polohu (velikost) optimalizační podmínky a zjednodušeném vyčíslení Görtlerova čísla. Z prvotního vyčíslení Görtlerova parametru, vyplývá, že optimální poloha odpovídá velikosti $z = 0,27l$. Optimální tvar trysky zjištěný na základě prvotního výpočtu byl doplněn o další vnitřní tvary trysek, které se lišily polohou maximální velikosti křivosti ($z = 0,20l$; $z = 0,25l$; $z = 0,30l$; $z = 0,35l$), poté byl sestaven numerický model trysky. Pro výpočet numerického modelu byl použit model *k- ω SST*, který spočíval ve využití rotační symetrie trysky, a proto byl použit na rovinné výpočetní síti. Z rozboru obdržených výsledků modelu *k- ω SST* vyplývá, že optimální poloha maximální křivosti na konkávní straně trysky je nižší ($z = 0,25l$). Ze srovnání dosažených maximálních hodnot Görtlerova čísla získaných na základě modelu *k- ω SST* a prvotního návrhu vyplývá, že hodnota Görtlerova čísla získaná na základě matematického modelu vychází významně nižší (**tab. 8.1**), nicméně poloha optimalizační podmínky vychází přibližně shodná s optimální polohou získanou pomocí modelu *k- ω SST*. Odlišnosti v hodnotách Görtlerova parametru jsou zapříčiněny způsobem vyčíslení hodnoty impulzové tloušťky mezní vrstvy, která je přepočtena z pošinovací tloušťky mezní vrstvy přes konstantní hodnotu tvarového parametru, jehož velikost byla spočtena z rychlostního profilu modelu potrubí. Rychlostní profily, z nichž byla pošinovací tloušťka odvozena, pro jednoduchost výpočtu prvotního návrhu matematického modelu neuvažovaly s vlivem zakřivení, čímž došlo k dalšímu zkreslení výsledků. Navzdory různým hodnotám Görtlerova parametru vyšly optimální polohy maximální křivosti téměř

shodné. Důvodem je význam křivosti při stanovování hodnoty, která v rámci vyhodnocení Görtlerova čísla vykazovala významné kolísání hodnot.

Velikost Görtlerova čísla při $z = 0,25l$ na základě výsledků numerického modelu odpovídá velikosti $Go_{max} = 439,7$. Tato hodnota významně převyšuje velikost kritického Görtlerova čísla (přibližně platí $Go_{krit} = 0,58$) [10], při níž dochází ke vzniku hydrodynamických nestabilit na konkávní straně trysky. Ze srovnání spočtené hodnoty Go_{max} a Go_{krit} vyplývá, že vzniku hydrodynamických nestabilit uvnitř trysky nelze zabránit, nicméně může dojít k jejich eliminaci prostřednictvím optimalizace tvaru. Při zaměření se na výstupní rychlostní profil bylo pozorováno, že na 96% plochy průřezu dosahuje rychlost téměř konstantní hodnoty, která je přibližně o 2% vyšší, než je střední průřezová rychlost, která byla spočtena na základě rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu.

Výsledky modelu $k-\omega$ SST byly použity ve druhém kroku tvorby matematického modelu, který pro návrhový stav poskytuje totožné výsledky jako model $k-\omega$ SST. Matematický model doplněný o poznatky turbulentního modelu $k-\omega$ SST je součástí této práce (základní funkce). Ačkoliv funkci „Görtlerovo číslo“, lze aplikovat pro rozličné návrhy trysek, je její použití doporučováno při volbě obdobných parametrů, které byly použity při sestavování (numerického) modelu $k-\omega$ SST.

Veškeré provedené výpočty trysky uvažovaly s jednotnou velikostí průměru přívodního potrubí, průměru trysky a délky kontrakce trysky. Účinnou metodou pro snížení velikosti Görtlerova čísla, by bylo prodloužení délky kontrakce trysky, čímž by došlo k významnému snížení křivosti návrhového tvaru trysky, a tím ke snížení Görtlerova čísla. Například při prodloužení délky kontrakce o $1/3l$ dojde ke snížení křivosti o 56%, zatímco při zkrácení délky kontrakce o $1/3l$ dojde k navýšení velikosti křivosti o 125%.

Dalším předmětem zájmu bylo modelování jádra turbulentního paprsku. Z poznatků o modelování jádra paprsku vyplývá, že počáteční hodnota intenzity turbulence má vliv na délku jádra paprsku (s rostoucí počáteční hodnotou intenzity turbulence dochází ke zkrácení délky jádra paprsku). Z tohoto důvodu bylo provedeno několik simulací jádra paprsku pomocí dvourovnicových modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST s různě zvolenou počáteční hladinou intenzity turbulence. Závislost délky jádra paprsku na zvolené počáteční hodnotě intenzity turbulence je vynesena do grafů (**graf 9.1**). Z vynesení závislosti délky jádra paprsku a hodnoty intenzity turbulence vyplývá lineární závislost mezi délkou jádra paprsku a počáteční hodnotou intenzity turbulence. Pro stanovení optimální hodnoty intenzity turbulence byla použita experimentálně naměřená délka jádra paprsku (pro vysoké Reynoldsovo číslo) vodního paprsku podle *Crow & Champagne* (1971), pomocí které byla odečtena hodnota intenzity turbulence odpovídající výsledkům jednotlivých dvourovnicových RANS modelů. Pro model $k-\varepsilon$ Standard, resp. $k-\omega$ SST vychází optimální hodnota intenzity turbulence rovna 5%, resp. 7% (model

$k-\omega$ SST poskytuje při konkrétně zadané hodnotě intenzity turbulence delší oblast jádra paprsku). Výsledky získané pomocí dvourovnicových modelů vychází z předpokladu konstantního rozdělení rychlosti po průřezu trysky, které je teoretickým případem. Při aplikaci skutečného rychlostního profilu (nulová rychlost na stěně trysky) jsou velikosti napětí na rozhraní pronikající a klidové tekutiny nižší, a proto dochází k prodloužení délky jádra paprsku. Avšak modelovaný profil výstupní rychlosti se svými hodnotami významně blíží ideálnímu rychlostnímu profilu, proto lze očekávat, že aplikací ideálního rychlostního profilu (konstantního rozdělení rychlosti po průřezu) nedochází k významného odchýlení výsledků od skutečnosti.

Následně byla pro návrhové intenzity turbulence použitých modelů vyhodnocena šířka jádra paprsku, šířka paprsku a tvar rychlostních profilů uvnitř oblasti vývinu proudění. Při vynesení rychlostních profilů do bezrozměrné formy grafu bylo zjištěno (**graf 9.4**) a (**graf 9.5**), že pro popis tvaru rychlostního profilu lze aplikovat Gaussův model (vyjma těsné blízkosti trysky, kdy dochází k přechodu z konstantního rozdělení rychlosti). Dále bylo pozorováno, že pro $2 \leq x/d \leq L_{ZFE}$ se rychlostní profily stávají vzájemně podobné (koeficienty Gaussova modelu jsou téměř neměnné).

Posledními charakteristikami turbulentního proudu uvnitř paprsku, kterým byla věnována pozornost, byla velikost objemového průtoku (**graf 9.6**) a kinetické energie (**graf 9.7**). Z vyhodnocení objemového průtoku vyplývá, že s rostoucí vzdáleností ve směru proudění dochází z důvodu strhávání okolní tekutiny k nárůstu objemového průtoku. Z průběhu kinetické energie ve směru proudění vyplývá, že dochází poklesu kinetické energie. Průběh obou veličin je v rámci oblasti vývinu proudění lineární. Nárůst objemového průtoku na konci jádra paprsku je téměř dvojnásobný, zatímco pokles kinetické energie odpovídá 35% počáteční hodnoty E_0 .

Další metodou, která byla v rámci modelování jádra turbulentního paprsku uplatněna, byla metoda *DES* založená na modelu $k-\omega$ SST. Jedná se o poměrně nový přístup v řešení turbulentního proudění, který nachází své příznivce i odpůrce. Metoda *DES* byla využita především pro vizualizaci rychlostních poměrů, tlakových poměrů, TKE , TEF a vířivosti. Oproti statistickému přístupu řešení na základě metody *RANS* je možné pozorovat postupnou generaci vírů a jejich transport ve směru proudění. Pro výpočet na základě metody *DES* založené na modelu $k-\omega$ SST byly uplatněny dva způsoby řešení, které se lišily pouze nastavením počátečních podmínek. První přístup spočíval ve využití metody *RANS* reprezentované modelem $k-\omega$ SST (v rámci *SSS*), na který navázal model *DES* a druhý přístup představující samostatnou metodu *DES* založenou na modelu $k-\omega$ SST.

Ze srovnání výsledků jádra paprsku metody *DES* a metody *RANS* vyplývá, že šířka jádra paprsku, modelovaná na základě metody *RANS* lineárně klesá, zatímco šířka paprsku s lineárně narůstá, oproti tomu metoda *DES* modeluje významnější nárůst šířky paprsku až na konci oblasti vývinu proudění

související s postupným transportem a rozpadem vírů. Dále lze z rozboru *TKE*, *TEF* a vířivosti patrné, že v oblasti jádra paprsku nedochází k disipaci kinetické energie, ani ke vzniku vířivosti. K disipaci kinetické energie a produkci vírů dochází na hranici jádra paprsku a okolního prostředí, kde vznikají významná smyková napětí. Tlakové gradienty jsou napříč turbulentním paprskem nevýznamné a předpoklady použité při odvození základních pohybových rovnice lze považovat za oprávněné. Z průběhu tlakových poměrů uvnitř paprsku jsou patrné jednotlivé fragmenty vírových struktur. Další charakteristikou jádra turbulentního paprsku, které byla věnována pozornost, byla frekvence produkce vírů (z tohoto důvodu byl modelovaný čas zvolen hodnotou $T = 1,00$ s). Z rozboru výsledků přístupu *SSS* dosahovala frekvence produkce vírů rovna $f_1 = 42$ Hz, na základě klasického přístupu $f_2 = 45$ Hz. Obě frekvence jsou nižší, než návrhová frekvence použitá pro stanovení délky časového kroku výpočtu, a proto nebylo potřeba upravovat velikost časového kroku výpočtu z důvodu nepřesného odhadu frekvence produkce vírů.

Výpočet pomocí metody *DES* se doporučuje provádět na jednoduché geometrii pro oblasti s významnou separací proudu. Náročnost výpočtu spočívá v sestavení výpočetní sítě, která negativně neovlivňuje výsledky a vhodně využívá metodu *LES* a *RANS*. Dále dochází k navýšení nároků na samostatný výpočet, jelikož dochází k částečnému řešení pohybových rovnic a k částečnému modelování. Ke zvýšení nároků výpočtu metody *DES* přispívá i nutnost aplikace 3D výpočetní sítě (výsledky metody *DES* získané na 2D výpočetní síti byly zjevně nereálné). Avšak nároky na výpočet jsou stále nižší, než je tomu u samostatné metody *LES*, jelikož lze metodu *DES* bezpečně aplikovat na hrubší výpočetní síti za použití delšího časového kroku výpočtu.

Nicméně se stále rostoucí kapacitou moderních výpočetních nástrojů bude výpočet pomocí metody *DES*, resp. metody *LES* stále dostupnější, a proto se může vyplatit věnovat metodám *DES* a *LES* pozornost, jelikož mohou svou přesností předčit výsledky metody *RANS*. To však neznamená, že výsledky dosažené metodou *RANS* jsou nepřesné. V řadě případů (např. turbulentních paprsků) jsou výsledky metody *RANS* ve výborné shodě s experimentálními pozorováními (pro model *k-ε* Standard) a za určitých podmínek (při porušení pravidel tvorby výpočetní sítě a/nebo špatnému nastavení výpočtu) výsledky metody *DES* předčí.

Dalším tématem, kterému byla v rámci diplomové práce věnována pozornost bylo modelování řady ponořených spolupůsobících turbulentních paprsků, které jsou umístěny v rámci jedné řady o konstantní osové vzdálenosti, jež vychází z navrženého tvaru trysky. Vedle modelování řady paprsků, byl vytvořen i model krajního paprsku.

Pozornost byla věnována především rozboru rychlostních profilů v rovině paprsků (rovina *x-z*). Z rozboru rychlostních profilů v rovině *x-z* vyplývá, že ve vzdálenosti $x_1 = 11,7d$ dochází ke vzájemné

interakci paprsků, která je doprovázena vyšším poklesem osově rychlosti, než je tomu v případě samostatného paprsku a ve vzdálenosti $x_{2D} = 43,6d$ dochází ke vzniku kvazi dvourozměrného paprsku. Pro rozdělení rychlosti do vzdálenosti x_1 je možné použít poznatky o rozdělení rychlosti, které jsou platné pro samostatné paprsky. Ve vzdálenosti $x_1 < x < x_{2D}$ lze pro popis tvaru rychlostních profilů pro případ nekonečně dlouhé řady paprsků uplatnit rov. (10.5). Pro případ konečně dlouhé řady paprsků dochází v místě krajního paprsku k zakřivení osy (dráhy) paprsku směrem k sousednímu paprsku. Pro modelovanou řadu paprsků charakterizovanou $s/d = 8$ dosahovala maximální hodnota zakřivení velikosti $\Delta \sim 1,4d$. Jistou velikost zakřivení lze pozorovat i u v pořadí druhého paprsku směrem od kraje. Nicméně tato velikost je 6krát nižší a pro jednoduchost ji lze zanedbat a tvar rychlostních profilů lze získat pomocí rov. (10.5). Za účelem vyjádření velikosti rychlostních profilů je potřeba zjistit velikost osově rychlosti. Velikost osově rychlosti lze popsat na základě rov. (10.4).

Rozdělení rychlosti paprsku v rovině x - y paprsku dostatečně vzdáleného od kraje bylo srovnáno s rozdělením rychlosti rov. (7.39) v kombinaci s rov. (7.40) při koeficientu úměrnosti $S = 0,096$. Ze srovnání vyplývá, že tvar rychlostních profilů v rovině x - y v zásadě odpovídá použitému rozdělení odvozenému na základě předpokladu uniformní hodnoty turbulentní vazkosti. Použité rozdělení odpovídá experimentálnímu pozorování zejména v oblasti osy paprsku, kde turbulentní vazkost v rámci 15% hodnoty odpovídá hodnotě 0,028; avšak s narůstající velikostí poloměru paprsku dochází k prudkému poklesu hodnoty turbulentní vazkosti, který se projevuje sníženou přesností použitého rozdělení.

12 SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Značení latinskou abecedou

b	Šířka paprsku	[m],
	Šířka jádra paprsku	[m],
B	Konstanta pro hydraulicky hladká potrubí ($B = 5,45$)	[1],
	Konstanta pro výpočet max. rychlosti ($B = 5,8$)	[1],
B_S	Konstanta pro hydraulicky drsná potrubí	[1],
$B_{universal}$	Univerzální konstanta	[1],
B^*	Konstanta pro výpočet max. rychlosti ($B = 5,0$)	[1],
C_{DES}	Konstanta metody <i>DES</i> ($C_{DES} = 0,61$)	[1],
C_K	Kolmogorova konstanta ($C_K \approx 1,50$)	[1],
C_μ	Konstanta ($C_\mu = 0,09$)	[1],
C_1	Empirická konstanta ($C_1 = 4,1$)	[1],
C_2	Empirická konstanta ($C_2 = 0,32$)	[1],
d	Průměr trysky	[m],
D	Průměr přívodního potrubí	[m],
E	Kinetická energie proudu	[J],
E_0	Počáteční kinetická energie proudu	[J],
$E(\kappa)$	Energetické spektrum	[$m^3 \cdot s^{-2}$],
f	Frekvence produkce vírů	[Hz],
f_i	Vektor vnějších objemových sil	[$N \cdot m^{-3}$],
H	Tvarový parametr mezní vrstvy	[1],
	Celková entalpie	[J],
I	Intenzita turbulence (stupeň turbulence)	[1],
k	Turbulentní kinetická energie	[$m^2 \cdot s^{-2}$],
L	Charakteristický rozměr proudění	[m],
M	Hybnost proudu tekutiny	[$kg \cdot m \cdot s^{-1}$],
P	Statický tlak	[Pa],
P_k	Produkce turbulentní energie	[$m^2 \cdot s^{-2}$],
q	Hustota tepelného toku	[$W \cdot m^{-2}$],
Q	Objemový průtok tekutiny	[$m^3 \cdot s^{-1}$],
Q_0	Počáteční hodnota objemového průtoku tekutiny	[$m^3 \cdot s^{-1}$],
r	Poloměr paprsku	[m],
R	Poloměr jádra paprsku	[m],

s	Osová vzdálenost trysek	$[m]$,
S	Koeficient úměrnosti	$[1]$,
S_{ij}	Tenzor rychlosti deformace	$[m \cdot s^{-1}]$,
	Čas	$[s]$,
T	Perioda odtrhávání vírů	$[s]$,
	Termodynamická teplota	$[K]$,
u_η	Kolmogorovo rychlostní měřítko	$[m \cdot s^{-1}]$,
u_τ	Třecí rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$,
U_e	Rychlost ve vnějším proudu mezní vrstvy	$[m \cdot s^{-1}]$,
U_0	Velikost vstupní rychlosti	$[m \cdot s^{-1}]$,
x_0	Poloha virtuálního počátku	$[m]$,
y^+	Bezrozměrná vzdálenost od stěny	$[1]$,
U, V, W	Složky vektoru rychlosti v kartézských souřadnicích	$[m \cdot s^{-1}]$,
V_r, V_ϕ, V_z	Složky vektoru rychlosti v cylindrických souřadnicích	$[m \cdot s^{-1}]$,
x, y, z	Kartézské souřadnice	$[1]$,
r, ϕ, z	Cylindrické souřadnice	$[1]$,

Značení řeckou abecedou

δ^*	Pošinovací tloušťka mezní vrstvy	$[m]$,
δ_{ij}	Kronerovo delta	$[1]$,
Δ	Velikost drsnostních výstupků na vnitřní straně potrubí	$[m]$,
ε	Rychlost disipace turbulentní kinetické energie	$[m^2 \cdot s^{-3}]$,
η	Kolmogorovo délkové měřítko	$[m]$,
θ	Impulzní tloušťka mezní vrstvy	$[m]$,
κ	Vlnové číslo	$[m^{-1}]$,
	von Kármánova konstanta ($\kappa = 0,4187$)	$[1]$,
λ	Součinitel ztráty třením	$[1]$,
	Součinitel tepelné vodivosti,	$[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$,
Λ	Délkové měřítko	$[m]$,
μ_t	Turbulentní dynamická vazkost tekutiny	$[Pa \cdot s]$,
ν	Kinematická vazkost tekutiny	$[m^2 \cdot s]$,
ν_t	Turbulentní kinematická vazkost tekutiny	$[m^2 \cdot s^{-1}]$,
π	Ludolfovo číslo ($\pi = 3,14159$)	$[1]$,
ρ	Hustota tekutiny	$[kg \cdot m^{-3}]$,
τ	Tečná napětí	$[Pa]$,

τ_w	Tečné napětí na stěně potrubí	[Pa],
τ_η	Kolmogorovo časové měřítko	[s],
ω	Specifická disipace kinetické energie	[s ⁻¹],
Ω_{ij}	Tenzor rychlosti rotace	[m. s ⁻¹],

Bezrozměrná čísla

Co	Courantovo číslo	[1],
Go	Görtlerovo číslo	[1],
Re	Reynoldosovo číslo	[1],
St	Strouhalovo číslo	[1],

Symbole podobné písmenům

\mathfrak{S}	Rychlost přenosu energie od velkých měřítek malým	[m],
ℓ	Turbulentní délkové měřítko	[m],
\mathcal{L}	Charakteristický rozměr proudění	[m],

Dolní indexy

c	Osové
MM	Matematický model
t	Turbulentní
w	Stěna
0	Počáteční

Použité zkratky

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Léwy Condition
DES	Detached Eddy Simulation
$DDES$	Delayed Detached Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DR	Departure Region
ER	Euler Region
FR	Focus Region
GIS	Grid Induced Separation
LES	Large Eddy Simulation
LR	LES Region
$MUSCL$	Monotone Upstream Centred Schemes For Conservation Laws
MSD	Modeled Stress Depletion

<i>OR</i>	Outer Region
<i>PISO</i>	Pressure Implicit With Splitting Operator
<i>QUICK</i>	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
<i>RANS</i>	Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations
<i>RR</i>	RANS Region
<i>SA</i>	Spalart-Allmaras
<i>SGS</i>	Subgrid Scale Model
<i>SIMPLE</i>	Semi-Implicit Method For Pressure-Linked Equations
<i>SM</i>	Segregated Modeling
<i>SST</i>	Shear Stress Transport
<i>TKE</i>	Turbulentní Kinetic Energy
<i>VR</i>	Viscous Region
<i>ZEF</i>	Zone of Established Flow
<i>ZFE</i>	Zone of Flow Establishment

POZN.: Zde neuvedené symboly a označení jsou vysvětleny v textu.

13 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ALBERTSON, M. L., Y. B. DAI, R. A. JENSEN a Hunter ROUSE. Diffusion of Submerged Jet. New York: American Society of Civil Engineers, 1950.
- [2] Avestia Publishing. International Journal of Mechanical Engineering and Mechatronics: Application of CFD and Phenomenological Models in Studying Interaction of Two Turbulent Plane Jets [online]. Vancouver: Avestia Publishing, 2012 [cit. 2017-11-27]. Dostupné z: <http://ijmem.avestia.com/2012/005.html>
- [3] ANSYS FLUENT Theory Guide, Release 14.5. ANSYS, Inc., October 2012.
- [4] BAUTISTA, Mary C., Jörn NATHAN, Hugo OLIVARES-ESPINOSA, Louis DUFRESNE a Christian MASSON. Flow around a square-section cylinder using k- ω SST delayed detached eddy simulation. In: *Sinmec* [online]. Montréal, Canada: École de technologie supérieure [cit. 2017-11-08]. Dostupné z: http://www.sinmec.ufsc.br/~dihlmann/MALISKA/proceedings_cfd_society_of_canada_conference_may_2012/papers/Bautista_Nathan_Olivares-Espinosa_Dufresne_Masson.pdf
- [5] BENEŠOVÁ, Stanislava. *DES modelování turbulentního proudění*. Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce Josef Brechler.
- [6] BERGTHORSON, Jeffrey Myles. *Experiments and Modeling of Impinging Jets and Premixed Hydrocarbon Stagnation Flames*[online]. Pasadena, California, 2005 [cit. 2017-11-06]. Dostupné z: <https://thesis.library.caltech.edu/2004/>. Disertační práce. California Institute of Technology.
- [7] BLEJCHAŘ, Tomáš. *Turbulence Modelování CFX: Učební text*. 1. vydání. Ostrava: VŠB, 2010.
- [8] BOJKO, Marián. *Návody do cvičení "Modelování proudění" FLUENT*. Ostrava: VŠB Technická univerzita Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1909-9.
- [9] Boundary Layer. *National Aeronautics and Space Administration* [online]. Glenn Research Center, 2015 [cit. 2017-11-26]. Dostupné z: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/boundlay.html>
- [10] CEBECI, Tuncer a Jean COUSTEIX. Modeling and Computation of Boundary Layer Flow: Laminar, Turbulent and Transitional Boundary Layers in Incompressible Flows. Second Revised and Extended Edition. Germany: Horizons Publishing, 2005. ISBN 0-9668461-9-2.
- [11] CHEN a HAI-BO. *Turbulent Boyant Jets and Plumes in Flowing Ambient Environments*. 3. vydání. Aalborg: Department of Civil Engineering, Aalborg University, 1991. ISBN 87-90034-16-3.
- [12] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. Turbulent Jets: Environmental Fluid Mechanics. In: *Thayer School of Engineering at Dartmouth* [online]. Dartmouth [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <https://thayer.dartmouth.edu/~d30345d/courses/engs151/EFM-Jets-Puffs.pdf>
- [13] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. *Environmental Fluid Mechanics*. 1. vydání. Dartmouth College: Thayer School of Engineering, 2014.
- [14] DAVIDSON, Lars. *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling* [online]. 1. vydání. Göteborg, Sweden: Division of Fluid Mechanics, Department of Applied Mechanics Chalmers University of Technology, 2016 [cit. 2016-12-05]. Dostupné z: http://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript_files/solids-and-fluids_turbulent-flow_turbulence-modelling.pdf
- [15] DIMITRIADIS, P., M. LIVERI-DALAVERI, A. KALDIS, C. KOTSALOS, G. PAPACHARALAMPOUS a P. PAPANICOLAOU. Zone of flow establishment in turbulent jets. In: *Slideshare.net* [online]. Vienna: National Technical University of Athens, 2012 [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: <https://www.slideshare.net/ChristosKotsalos/jetcoreegu2012pr1-51671260>
- [16] FLORYAN, J. M. 1991. On the Görtler Instability of Boundary Layers. *Prog. Aerospace Sci.*, 28, 235–271.
- [17] FRÖHLICH, Jochen a Dominic VON TERZI. *Hybrid LES/RANS Methods for the Simulation of Turbulent Flows* [online]. Dresden, 2008 [cit. 2017-12-15]. Dostupné z: https://tu-dresden.de/ing/maschinenwesen/ism/psm/ressourcen/dateien/mitarbeiter/froehlich/publications/Froehlich_vonTerzi_Hybrid-LES-RANS_PAS_08.pdf?lang=de.

- [18] GHAHREMANIAN, Shahriar. *A Near-Field Study of Multiple Interacting Jets: Confluent Jets*. Sweden, 2014. Disertační. Linköping University.
- [19] GEORGE, William K. *Lectures in Turbulence for the 21st Century*. London, UK, 2013. Imperial College of London London, Chalmers University of Technology Gothenburg.
- [20] HLADÍKOVÁ, Martina. *Proudění stlačitelné tekutiny v úzkém kanále*. Praha, 2016. Bakalářská práce. ČVUT. Vedoucí práce Pavel Šafařík.
- [21] HYHLÍK, Tomáš. Computational Fluid Dynamics: Definice. In: CIV [online]. Praha: ČVUT, 2009 [cit. 2017-12-12]. Dostupné z: <http://www.civ.cvut.cz/ESF/info/PMT/node2.html>
- [22] KARIMIPANAH, Taghi. *Turbulent jets in confined spaces: Application in mixing ventilation Experimental and Numerical Studies*[online]. Gävle Sweden, 1996 [cit. 2017-11-06]. Dostupné z: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:761872/FULLTEXT01.pdf> . Disertační práce. Royal Institute of Technology, Centre for Built Environment.
- [23] KOZUBKOVÁ, Milada. *Modelování proudění tekutin Ansys, CFX* [online]. 1. vydání. Ostrava: VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2008 [cit. 2017-12-18]. Dostupné z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Kozubkova-Fluent.pdf>
- [24] KNYSTAUTAS, R. *The Turbulent Jet From a Series of Holes in Line* [online]. Montreal, 1962 [cit. 2017-11-29]. Dostupné z: http://digitool.library.mcgill.ca/R/?func=dbin-jump-full&object_id=93326&local_base=GEN01-MCG02. Mc Gill university.
- [25] LEE, J. H. W., and Vincent H. CHU. *Turbulent Jets and Plumes: A Lagrangian Approach*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [26] MATOUŠEK, Václav. *Struktura proudění* [online prezentace]. 2017 [cit. 2017-11-11]. Dostupné z: http://hydraulika.fsv.cvut.cz/Hydraulika/Users/Matousek/MujWeb_soubory/Page437.htm
- [27] Manuál pro výuku numerických metod, Kateřina Horáková, Vít Honzejk, František Lemfeld, TU Liberec, Fakulta strojní, Katedra energetických zařízení.
- [28] Meshing. *CFD Online* [online]. 2012 [cit. 2017-10-16]. Dostupné z: <https://www.cfd-online.com/Wiki/Meshing>
- [29] Metoda konečných objemů. In: *Ústav chemického inženýrství: Počítačová dynamika tekutin* [online]. Praha: VŠCHT [cit. 2017-10-16]. Dostupné z: https://vscht.cz/uchi/ped/cfd/cfd.metoda_konecných_objemu.pdf
- [30] MLYNAŘÍKOVÁ, Helena. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Plzeň, 2012. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Vedoucí práce Jan Vimmr.
- [31] POPE, Stephen B. *Turbulent flows*. 1. vydání. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 2000. ISBN 0 521 59125 2.
- [32] PŘÍHODA, Jaromír a Petr LOUDA. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03623-5.
- [33] Prirubove spoje. In: *Duktus liniové potrubní systémy* [online]. [cit. 2017-12-16]. Dostupné z: http://www.duktus.cz/katalog_kanal/04_Prirubove_spoje.pdf
- [34] RAJARATMAN, N. *Developments in Water Science: Turbulent Jets*. 1. vydání. Amsterdam: Elsevier, 1976. ISBN 9780080869964.
- [35] Representation of Wall Function approach vs fully resolving the boundary layer. In: *Computational Fluid Dynamics: Leap Australia* [online]. Australia: Leading Engineering Application Providers, 2014 [cit. 2017-10-16]. Dostupné z: <https://www.computationalfluidynamics.com.au/tips-tricks-inflation-layer-meshing-in-ansys/>
- [36] KOLÁŘ, Václav, Cyril PATOČKA a Jiří BÉM. *Hydraulika*. 1. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983.
- [37] SPALART, Philippe R. *Young-Person's Guide to Detached-Eddy Simulation Grids*. *Boeing Commercial Airplane Group, Seattle, WA United States*. NASA Langley Research Center; Hampton, VA United States, 2001. DOI: 20010080473.

- [38] SPALART, Phillipe R. Detached Eddy Simulation. Annual review [online]. , 181 - 202 [cit. 2017-12-12]. DOI: 10.1146/annurev.fluid.010908.165130. Dostupné z: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.010908.165130>
- [39] SU, Lester. Turbulent Free Shear Flows: Jets. In: *Aplied Fluid Imaging Laboratory* [online]. Baltimore: Johns Hopkins University, 2005 [cit. 2017-11-03]. Dostupné z: <http://www.imaging.me.jhu.edu/PDF/635lec05-turbshear1.pdf>
- [40] ŠESTÁK, Jiří a RIEGER František. *Přenos hybnosti tepla a hmoty*. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2005. ISBN 80-01-02933-6.
- [41] ŠKORPÍK, Jiří. Proudění plynů a par tryskami, *Transformační technologie*, 2006-02, [last updated 2016-01]. Brno: Jiří Škorpík, [on-line] pokračující zdroj, ISSN 1804-8293. Dostupné z <http://www.transformacni-technologie.cz/proudeni-plynu-a-par-tryskami.html>.
- [42] ŠPLÍCHAL, Petr. *Modelování ponořeného turbulentního paprsku*. Praha, 2016. Bakalářská práce. České vysoké učení technické. Vedoucí práce Petr Sklenář.
- [43] TESAŘ, Václav. Mezní vrstvy a turbulence. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1996. ISBN 80-01-00675-1.
- [44] Turbulence intensity. *CFD online* [online]. 2017 [cit. 2017-10-16]. Dostupné z: https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_intensity
- [45] URUBA, Václav. *Turbulence*. 2. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-05600-4.
- [46] VLČEK, Petr. Modelování turbulentního proudění. In: *Chemické a potravinářské strojnictví. Fakulta strojní ČVUT Praha* [online]. Praha [cit. 2017-12-01]. Dostupné z: <http://chps.fsid.cvut.cz/pt/2013/pdf/3509.pdf>
- [47] WILCOX, David C. *Turbulence Modeling for CFD*. 1. California, U.S. : DCW Industries, 1993. ISBN 0-9636051-0-0.
- [48] Xflow-Fighter-Jet. In: Blog OCF [online]. 2013 [cit. 2017-12-12]. Dostupné z: <http://blog.ocf.co.uk/wp-content/uploads/2013/08/XFlow-Fighter-Jet.png>

14 SEZNAM OBRÁZKŮ

OBR. 3.1 REYNOLDSŮV EXPERIMENT [45]	15
OBR. 3.2 OBLASTI DÉLKOVÝCH MĚŘÍTEK PODLE KOLMOGOROVA [45].....	17
OBR. 3.3 PODÉLNÉ ENERGETICKÉ SPEKTRUM TURBULENCE URČENÉ NA ZÁKLADĚ MNOHA POZOROVÁNÍ V LABORATOŘI [42]	18
OBR. 3.4 TLOUŠŤKA MEZNÍ VRSTVY δ A POŠINOVAČÍ TLOUŠŤKA MEZNÍ VRSTVY δ^* [20]	19
OBR. 3.5 TURBULENTNÍ RYCHLOSTNÍ PROFIL [3]	20
OBR. 4.1 IDEALIZOVANÉ SPEKTRUM TURBULENTNÍ KINETICKÉ ENERGIE IZOTROPNÍ TURBULENCE VZHEDEM K VLNOVÉMU ČÍSLU k A ZNÁZORNĚNÍ, JAKÉ MNOŽSTVÍ k JE ŘEŠENO PŘÍMO RESP. MODELOVÁNO [17]	25
OBR. 4.2 VÝLEDKY HODNOTY VÍŘIVOSTI PODÉL LETECKÉHO PROFILU (A) VÝLEDKY METODY <i>RANS</i> , (B) VÝLEDKY METODY <i>DES</i> . ŠÍPKA ZNAČÍ RŮZNÉ MODELOVÁNÍ SEPARACE PROUDĚNÍ (JEV <i>GIS</i>). [38].....	32
OBR. 6.1 TERMINOLOGIE VÝPOČETNÍ SÍTĚ [29]	39
OBR. 6.2 PROSTOROVÉ A ROVINNÉ TYPY BUNĚK [3]	40
OBR. 6.3 SKLADBA BUNĚK VÝPOČETNÍ SÍTĚ V BLÍZKOSTI PEVNÉHO POVRCHU [35].....	42
OBR. 6.4 UKÁZKA OBLASTÍ PROUDĚNÍ OKOLO PROFILU SKLOPNÉHO ROTORU [37]	43
OBR. 6.5 VÝPOČETNÍ SÍŤ PRO SIMULACE PROUDĚNÍ PODÉL SKLOPNÉHO ROTORU POMOCÍ METODY <i>DES</i> [37]	45
OBR. 7.1 PONOŘENÝ TURBULENTNÍ PAPERSEK [42]	48
OBR. 7.2 UKÁZKA ZÁKLADNÍCH OBLASTÍ PONOŘENÉHO TURBULENTNÍHO PAPERSKU [1]	54
OBR. 7.3 RYCHLOSTNÍ PROFILY PŘI ($Re = 95\,500$). ČÁRKOVANÉ ČÁRY ZNAČÍ POLOVIČNÍ ŠÍŘKU $r_{1/2}(x)$. JEDNOTLIVÉ RYCHLOSTNÍ PROFILY SE LIŠÍ RŮZNOU ŠIKMOSTÍ GAUSSOVA ROZDĚLENÍ. [31].....	55
OBR. 7.4 SYMBOLY \circ , $x/D = 40$; Δ , $x/D = 50$; \square , $x/D = 60$; \diamond , $x/D = 75$; \bullet , $x/D = 97,5$ [31].....	55
OBR. 7.5 EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ OSOVÉ RYCHLOSTI PONOŘENÉHO KRUHOVÉHO PAPERSKU V ZÁVISLOSTI NA VZDÁLENOSTI VE SMĚRU PROUDĚNÍ. EXPERIMENTÁLNÍ DATA <i>HUSSEIN (1994)</i> . PŘÍMKA URČENÁ POMOCÍ ROV. (7.32) PŘI $x_0/d = 4$ A $B = 5,8$. [31]	56
OBR. 7.6 VZÁJEMNĚ PODOBNÝ PROFIL OSOVÉ RYCHLOSTI KRUHOVÉHO PAPERSKU. KŘIVKA BYLA SESTROJENA NA ZÁKLADĚ <i>LDA</i> DAT <i>HUSSEIN (1994)</i> . [31].....	57
OBR. 8.1 HYDRODYNAMICKÉ NESTABILITY V MEZNÍ VRSTVĚ PODÉL KONKÁVNĚ ZAKŘIVENÉ STĚNY [16].....	61
OBR. 8.2 ZNÁZORNĚNÍ VELIKOSTÍ RYCHLOSTÍ UVNITŘ TRYSKY $z = 0,25l$	66
OBR. 9.1 VYJÁDRĚNÍ VELIKOSTI RYCHLOSTÍ UVNITŘ JÁDRA PAPERSKU DLE MODELU $k-\varepsilon$ STANDARD (VLEVO) A $k-\omega$ <i>SST</i> (VPRAVO) VČETNĚ VYZNAČENÍ DÉLKY JÁDRA PAPERSKU PRO JEDNOTLIVÉ HODNOTY INTENZITY TURBULENCE	76
OBR. 9.2 MODELOVANÉ HODNOTY RYCHLOSTI ZÍSKANÉ POMOCÍ MODELU <i>DES</i> $k-\omega$ <i>SST</i> V ČASE $T = 1,00$ s	84
OBR. 9.3 TLAKOVÉ POMĚRY V ČASE $T = 1,00$ s	84
OBR. 9.4 VELIKOST TKE V ČASE $T = 1,00$ s	85
OBR. 9.5 VELIKOST TEF V ČASE $T = 1,00$ s	85
OBR. 9.6 HODNOTA VÍŘIVOSTI V ČASE $T = 1,00$ s.....	86
OBR. 10.1 KVAZI DVOUROZMĚRNÝ PAPERSEK [24].....	88
OBR. 10.2 MODEL ŘADY PONOŘENÝCH TURBULENTNÍCH PAPERSKŮ ($k-\varepsilon$ STANDARD).....	89
OBR. 10.3 MODEL KRAJNÍHO PONOŘENÉHO TURBULENTNÍHO PAPERSKU ($k-\varepsilon$ STANDARD).....	98

15 SEZNAM TABULEK A GRAFŮ

Seznam tabulek

TAB. 6.1 HODNOCENÍ KVALITY BUNĚK NA ZÁKLADĚ NESOUMĚRNOSTI [3]	41
TAB. 6.2 NADŘAZENÉ A JIM PODŘAZENÉ OBLASTI PROUDĚNÍ [37]	43
TAB. 8.1 SROVNÁNÍ VÝSLEDNÝCH MAXIMÁLNÍCH VELIKOSTÍ GÖRTLEROVA PARAMETRU	72
TAB. 9.1 SPOČTENÉ DÉLKY JÁDRA PAPRSKU PRO RŮZNĚ ZVOLENÉ HODNOTY POČÁTEČNÍ INTENZITY TURBULENCE	76
TAB. 10.1 HODNOTY KOEFICIENTŮ KOSINOVÉHO ROZDĚLENÍ RYCHLOSTI A HODNOTY KORELAČNÍHO KOEFICIENTU	93

Seznam grafů

GRAF 8.1 SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ MODELU $k-\omega SST$ S LOGARITMICKÝM ROZDĚLENÍM RYCHLOSTI A $1/7$ ZÁKONEM ROZDĚLENÍ RYCHLOSTÍ PO PRŮŘEZU V KRUHOVÉM POTRUBÍ	64
GRAF 8.2 VÝSLEDNÝ PRŮBĚH GÖRTLEROVA ČÍSLA PRO OPTIMÁLNÍ POLOHU BODU Z PODLE VÝSLEDKŮ PRVOTNÍHO NÁVRHU MODELU	65
GRAF 8.3 UKÁZKA RŮZNÝCH TVARŮ TRYSEK POUŽITÝCH PŘI VÝPOČTU POMOCÍ NUMERICKÉHO MODELU	67
GRAF 8.4 PRŮBĚHY KŘIVOSTÍ VYŠETŘOVANÝCH TVARŮ KŘIVKY PRO RŮZNÉ POLOHY BODU Z	67
GRAF 8.5 PRŮBĚH MAXIMÁLNÍ RYCHLOSTI UVNITŘ TRYSKY (PROUDĚNÍ VE SMĚRU KLADNÉ OSY x)	68
GRAF 8.6 UKÁZKA VYPOČTENÉHO ROZDĚLENÍ RYCHLOSTI V ÚSTÍ TRYSKY (UVEDENA POLOVINA PROFILU)	69
GRAF 8.7 PRŮBĚH POŠINOVAČÍ A IMPULZOVÉ TLOUŠTKY MEZNÍ VRSTVY	69
GRAF 8.8 PRŮBĚH TVAROVÉHO PARAMETRU MEZNÍ VRSTVY V TRYSCĚ	70
GRAF 8.9 PRŮBĚH DRUHÉ MOCNINY GÖRTLEROVA PARAMETRU	70
GRAF 8.10 MAXIMÁLNÍ HODNOTY GÖRTLEROVA ČÍSLA URČENÉ POMOCÍ TURBULENTNÍHO MODELU $k-\omega SST$	71
GRAF 8.11 VÝSLEDNÝ PRŮBĚH OPRAVNÉHO SOUČINITELE ψ	72
GRAF 8.12 UNIVERZÁLNÍ TVAR NAVRŽENÉ TRYSKY ($z = 0,25l$)	73
GRAF 9.1 UKÁZKA ZÁVISLOSTI DÉLKY OBLASTI VÝVINU PROUDĚNÍ PRO RŮZNÉ HODNOTY INTENZITY TURBULENCE	77
GRAF 9.2 UKÁZKA PRŮBĚHU POLOMĚRU JÁDRA PAPRSKU A POLOMĚRU PAPRSKU ($k-\varepsilon$ STANDARD $I = 5\%$)	77
GRAF 9.3 UKÁZKA PRŮBĚHU POLOMĚRU JÁDRA PAPRSKU A POLOMĚRU PAPRSKU ($k-\omega SST$ ($I = 7\%$))	78
GRAF 9.4 VYNESENÍ RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ V BEZROZMĚRNÉ FORMĚ (MODEL $k-\varepsilon$ STANDARD, $I = 5\%$)	79
GRAF 9.5 VYNESENÍ RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ V BEZROZMĚRNÉ FORMĚ (MODEL $k-\omega SST$, $I = 7\%$)	79
GRAF 9.6 UKÁZKA NÁRŮSTU PRŮTOČNÉHO MNOŽSTVÍ V OBLASTI VÝVINU PROUDĚNÍ	80
GRAF 9.7 UKÁZKA POKLESU KINETICKÉ ENERGIE PROUDU TEKUTINY V OBLASTI VÝVINU PROUDĚNÍ	80
GRAF 10.1 PRŮBĚH OSOVÉ RYCHLOSTI UVNITŘ SAMOSTATNÉHO PAPRSKU ROV. (7.32) PRO ($x_0d = 4$) A NA ZÁKLADĚ VÝSLEDKŮ MODELU $k-\varepsilon$ STANDARD	90
GRAF 10.2 UKÁZKA RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ VE FORMĚ GRAFU $yd; U$ V ROVINĚ $x-z$	91
GRAF 10.3 UKÁZKA RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ V BEZROZMĚRNÉ FORMĚ GRAFU $yd; UU_{max}$ V ROVINĚ $x-z$	91
GRAF 10.4 VYNESENÍ RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ V BEZROZMĚRNÉ FORMĚ GRAFU $yd; UU_{max}$ V ROVINĚ $x-z$	92
GRAF 10.5 POMĚR MIN. A MAX. RYCHLOSTI V ZÁVISLOSTI NA POLOZE VE SMĚRU PROUDĚNÍ V ROVINĚ $x-z$	93
GRAF 10.6 NÁRŮST POLOMĚRU PAPRSKU V ROVINĚ $x-y$	94
GRAF 10.7 RYCHLOSTNÍ PROFILY V ROVINĚ $x-y$	95
GRAF 10.8 VYNESENÍ RYCHLOSTNÍCH PROFILŮ V ROVINĚ $x-y$ DO BEZROZMĚRNÉ FORMY GRAFU	95
GRAF 10.9 UKÁZKA NÁRŮSTU PRŮTOČNÉHO MNOŽSTVÍ TEKUTINY UVNITŘ SAMOSTATNÉHO A SPOLUPŮSOBÍCÍHO PONOŘENÉHO PAPRSKU	96
GRAF 10.10 UKÁZKA NÁRŮSTU PRŮTOČNÉHO MNOŽSTVÍ TEKUTINY UVNITŘ SAMOSTATNÉHO A SPOLUPŮSOBÍCÍHO PONOŘENÉHO PAPRSKU	97
GRAF 10.11 RYCHLOSTNÍ PROFILY KRAJNÍHO A NEJBLIŽŠÍCH DVOU SOUSEDNÍCH PAPRSKŮ	99
GRAF 10.12 RYCHLOSTNÍ PROFILY KRAJNÍHO A SOUSEDNÍCH DVOU PAPRSKŮ V BEZROZMĚRNÉ FORMĚ GRAFU	99
GRAF 10.13 ZAKŘIVENÍ KRAJNÍHO PAPRSKU	100

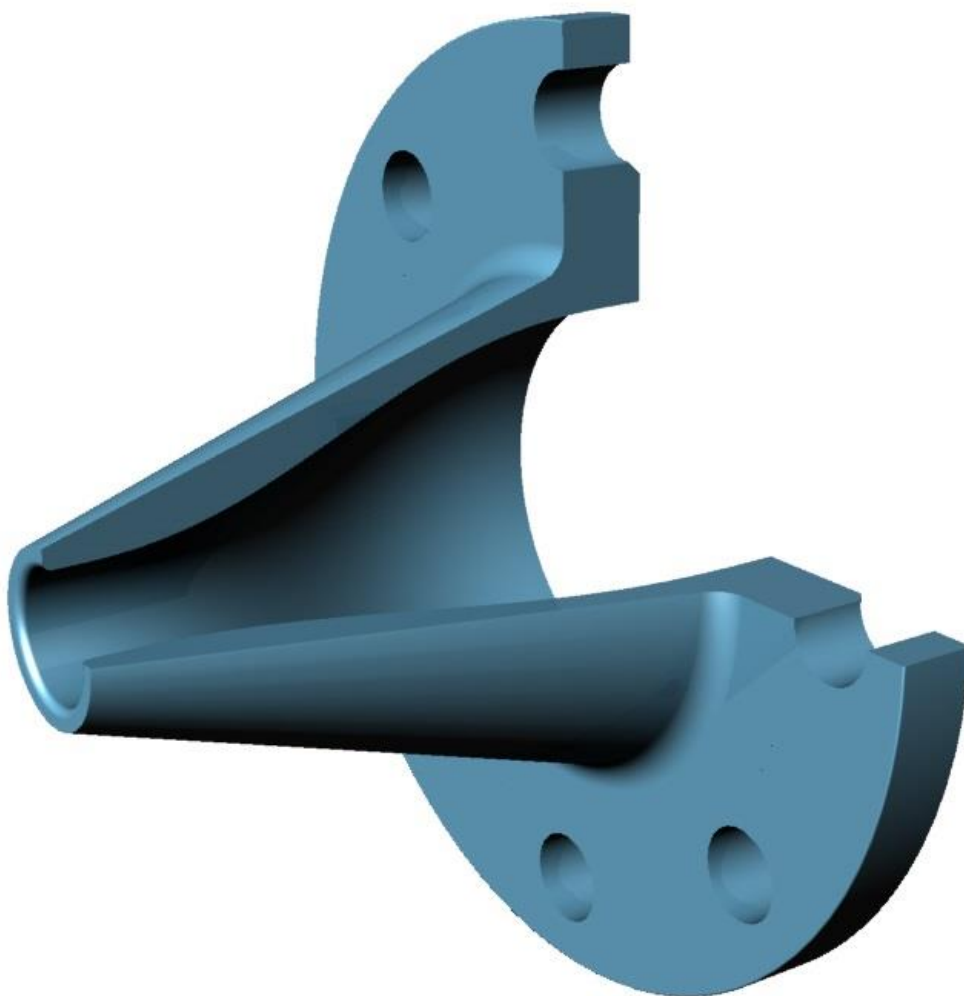
16 SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA A OPTIMALIZOVANÝ TVAR TRYSKY V BEZROZMĚRNÝCH SOUŘADNICÍCH $z = 0,25l$	116
PŘÍLOHA B VIZUALIZACE OPTIMALIZOVANÉHO TVARU TRYSKY (POHLED ZEPŘEDU PERSPEKTIVA)	117
PŘÍLOHA C VIZUALIZACE OPTIMALIZOVANÉHO TVARU TRYSKY (POHLED ZE ZADU PERSPEKTIVA)	118
PŘÍLOHA D MODELOVANÉ HODNOTY RYCHLOSTI UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) NA ZÁKLADĚ METODY <i>DES</i> V ČASE $T = 1,00\ s$ BEZ POUŽITÍ PRVOTNÍHO VÝPOČTU NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i>	119
PŘÍLOHA E MODELOVANÉ TLAKOVÉ POMĚRY UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>DES</i> V ČASE $T = 1,00\ s$ BEZ POUŽITÍ PRVOTNÍHO VÝPOČTU POMOCÍ METODY <i>RANS</i>	120
PŘÍLOHA F MODELOVANÉ HODNOTY <i>TKE</i> UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>DES</i> V ČASE $T = 1,00\ s$ BEZ POUŽITÍ PRVOTNÍHO VÝPOČTU POMOCÍ METODY <i>RANS</i>	121
PŘÍLOHA G MODELOVANÉ HODNOTY <i>TEF</i> UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>DES</i> V ČASE $T = 1,00\ s$ BEZ POUŽITÍ PRVOTNÍHO VÝPOČTU POMOCÍ METODY <i>RANS</i>	122
PŘÍLOHA H MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI VÍŘIVOSTI UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>DES</i> V ČASE $T = 1,00\ s$ BEZ POUŽITÍ PRVOTNÍHO VÝPOČTU POMOCÍ METODY <i>RANS</i>	123
PŘÍLOHA I MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI RYCHLOSTI TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i> (STACIONÁRNÍ MODEL <i>k-ω SST</i>)	124
PŘÍLOHA J MODELOVANÉ HODNOTY TLAKOVÝCH POMĚRŮ UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i> (STACIONÁRNÍ MODEL <i>k-ω SST</i>)	125
PŘÍLOHA K MODELOVANÉ HODNOTY <i>TKE</i> UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i> (STACIONÁRNÍ MODEL <i>k-ω SST</i>)	126
PŘÍLOHA L MODELOVANÉ HODNOTY <i>TEF</i> UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i> (STACIONÁRNÍ MODEL <i>k-ω SST</i>)	127
PŘÍLOHA M MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI VÍŘIVOSTI UVNITŘ TURBULENTNÍHO PAPERU (PŘI $Re = 150\ 000$) ZÍSKANÉ NA ZÁKLADĚ METODY <i>RANS</i> (STACIONÁRNÍ MODEL <i>k-ω SST</i>)	128
PŘÍLOHA N MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI RYCHLOSTI ŘADY PONOŘENÝCH TURBULENTNÍCH PAPERŮ V ROVINĚ PAPERŮ $x-z$ (OSO VÁ VZDÁLENOST TRYSEK $s = 8d$)	129
PŘÍLOHA O MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI RYCHLOSTI ŘADY PONOŘENÝCH TURBULENTNÍCH PAPERŮ V ROVINĚ PAPERŮ $x-y$ (OSO VÁ VZDÁLENOST TRYSEK $s = 8d$)	130
PŘÍLOHA P SROVNÁNÍ ZÁKLADNÍCH PROUDOVÝCH CHARAKTERISTIK SPOLUPŮSOBÍCÍHO A SAMOSTATNÉHO PAPERU	131
PŘÍLOHA Q MODELOVANÉ HODNOTY VELIKOSTI RYCHLOSTI KRAJNÍHO PAPERU V ROVINĚ $x-z$ (OSO VÁ VZDÁLENOST TRYSEK $s = 8d$)	132

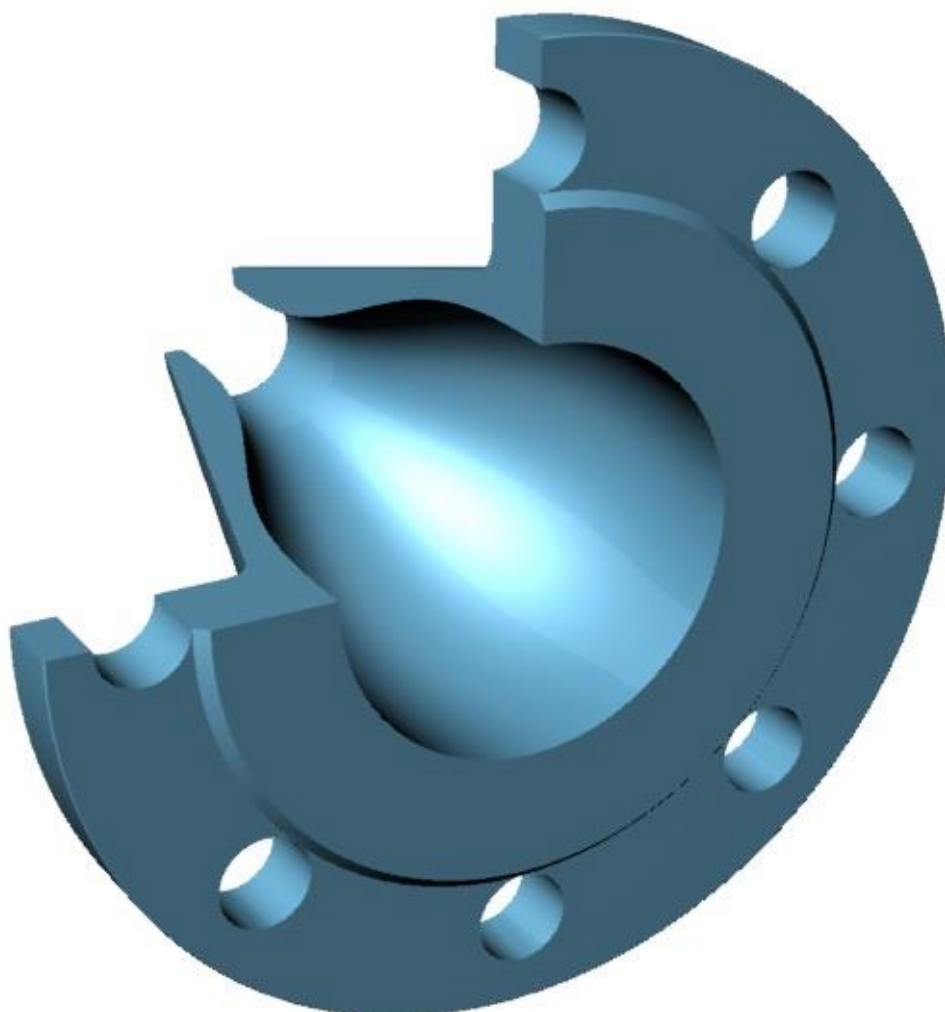
Příloha A Optimalizovaný tvar trysky v bezrozměrných souřadnicích ($z = 0,25l$)

x/L	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/L	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/L	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/L	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$
0,00	1,0000	0,26	0,9060	0,52	0,5070	0,78	0,0889
0,01	1,0000	0,27	0,8962	0,53	0,4880	0,79	0,0789
0,02	0,9999	0,28	0,8858	0,54	0,4691	0,80	0,0696
0,03	0,9998	0,29	0,8748	0,55	0,4502	0,81	0,0609
0,04	0,9996	0,30	0,8634	0,56	0,4313	0,82	0,0529
0,05	0,9991	0,31	0,8514	0,57	0,4125	0,83	0,0455
0,06	0,9985	0,32	0,8389	0,58	0,3938	0,84	0,0387
0,07	0,9977	0,33	0,8259	0,59	0,3753	0,85	0,0325
0,08	0,9966	0,34	0,8124	0,60	0,3569	0,86	0,0270
0,09	0,9952	0,35	0,7985	0,61	0,3388	0,87	0,0220
0,10	0,9935	0,36	0,7840	0,62	0,3209	0,88	0,0177
0,11	0,9915	0,37	0,7692	0,63	0,3032	0,89	0,0139
0,12	0,9890	0,38	0,7539	0,64	0,2858	0,90	0,0106
0,13	0,9862	0,39	0,7382	0,65	0,2688	0,91	0,0079
0,14	0,9830	0,40	0,7221	0,66	0,2521	0,92	0,0057
0,15	0,9793	0,41	0,7056	0,67	0,2358	0,93	0,0039
0,16	0,9752	0,42	0,6888	0,68	0,2200	0,94	0,0025
0,17	0,9706	0,43	0,6716	0,69	0,2045	0,95	0,0015
0,18	0,9655	0,44	0,6542	0,70	0,1895	0,96	0,0008
0,19	0,9599	0,45	0,6364	0,71	0,1750	0,97	0,0003
0,20	0,9538	0,46	0,6185	0,72	0,1611	0,98	0,0001
0,21	0,9472	0,47	0,6003	0,73	0,1476	0,99	0,0000
0,22	0,9400	0,48	0,5819	0,74	0,1347	1,00	0,0000
0,23	0,9323	0,49	0,5633	0,75	0,1223	-	-
0,24	0,9241	0,50	0,5446	0,76	0,1106	-	-
0,25	0,9153	0,51	0,5258	0,77	0,0994	-	-

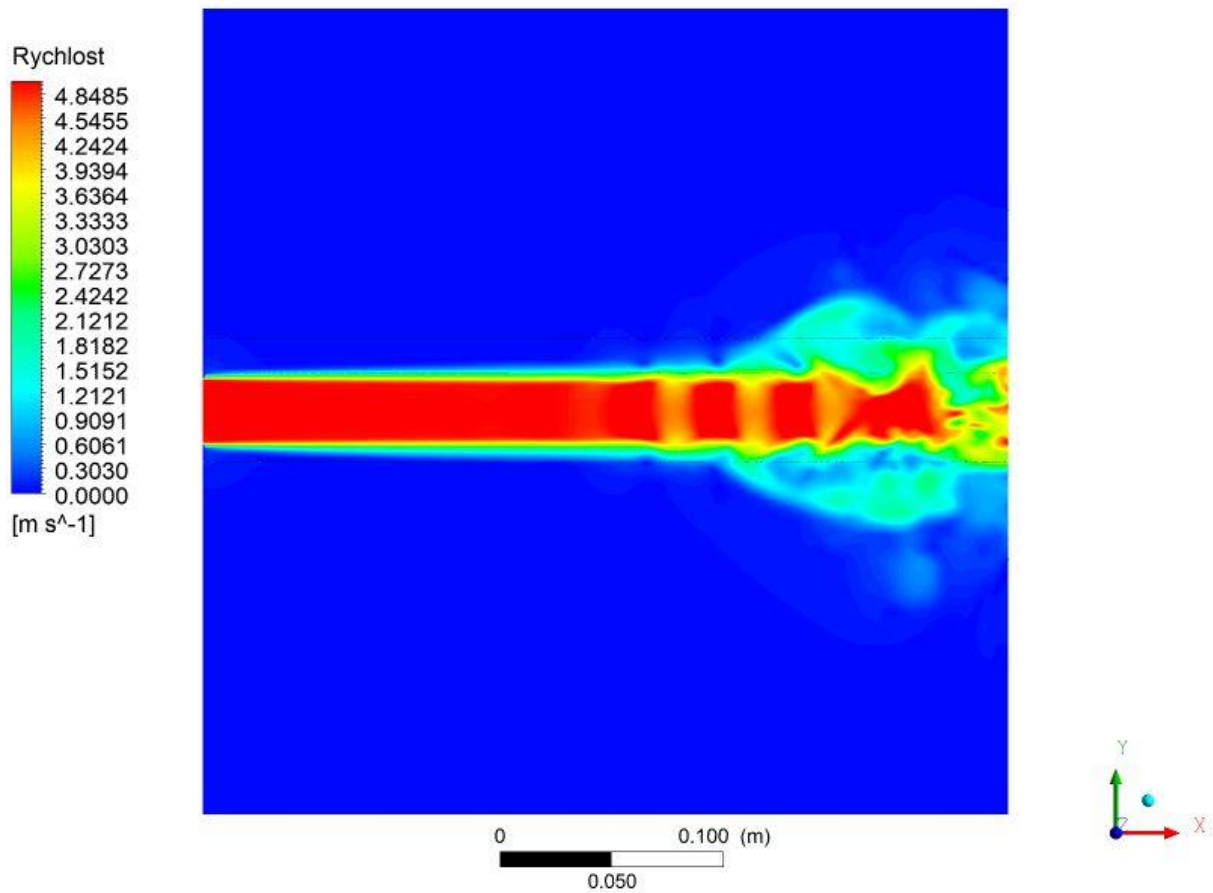
Příloha B Vizualizace optimalizovaného tvaru trysky (pohled zepředu perspektiva)



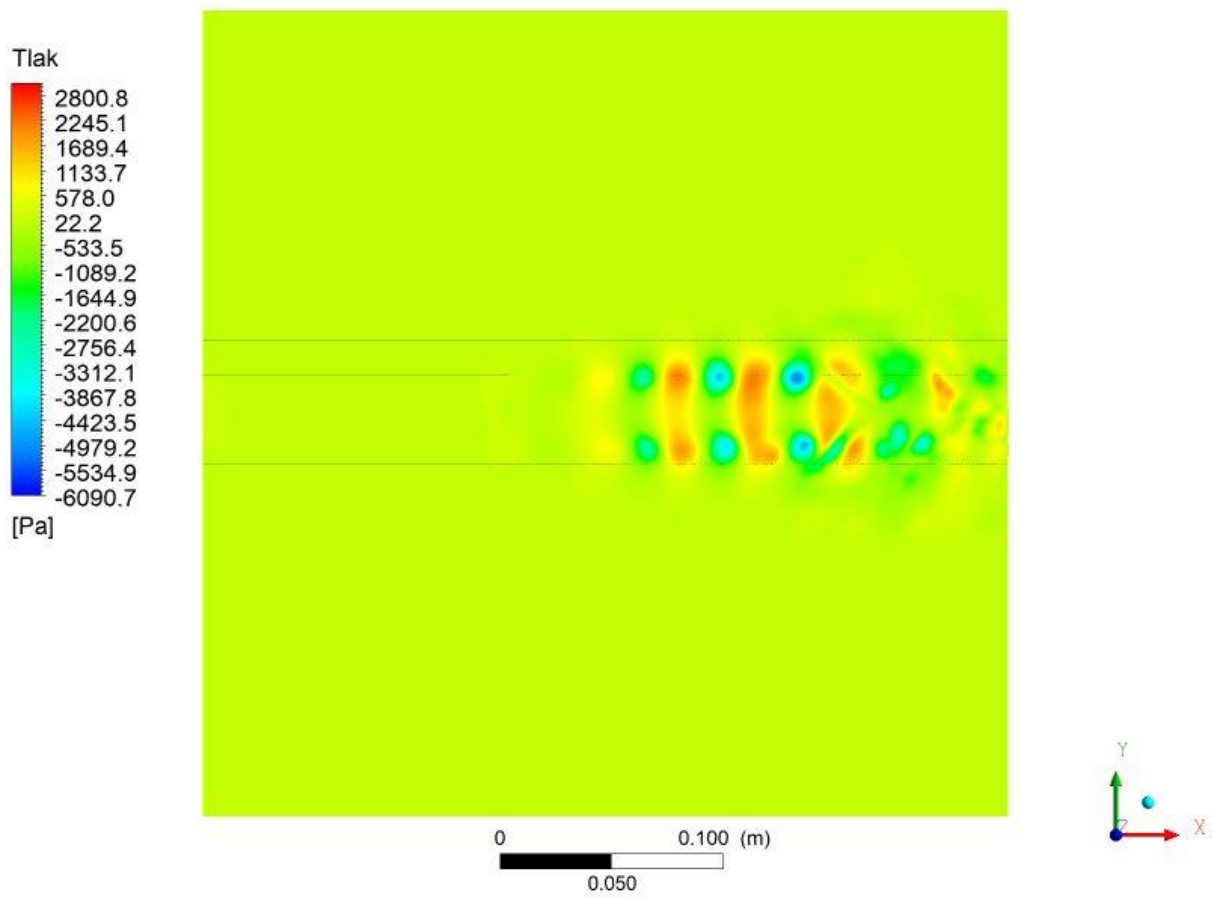
Příloha C Vizualizace optimalizovaného tvaru trysky (pohled zezadu perspektiva)



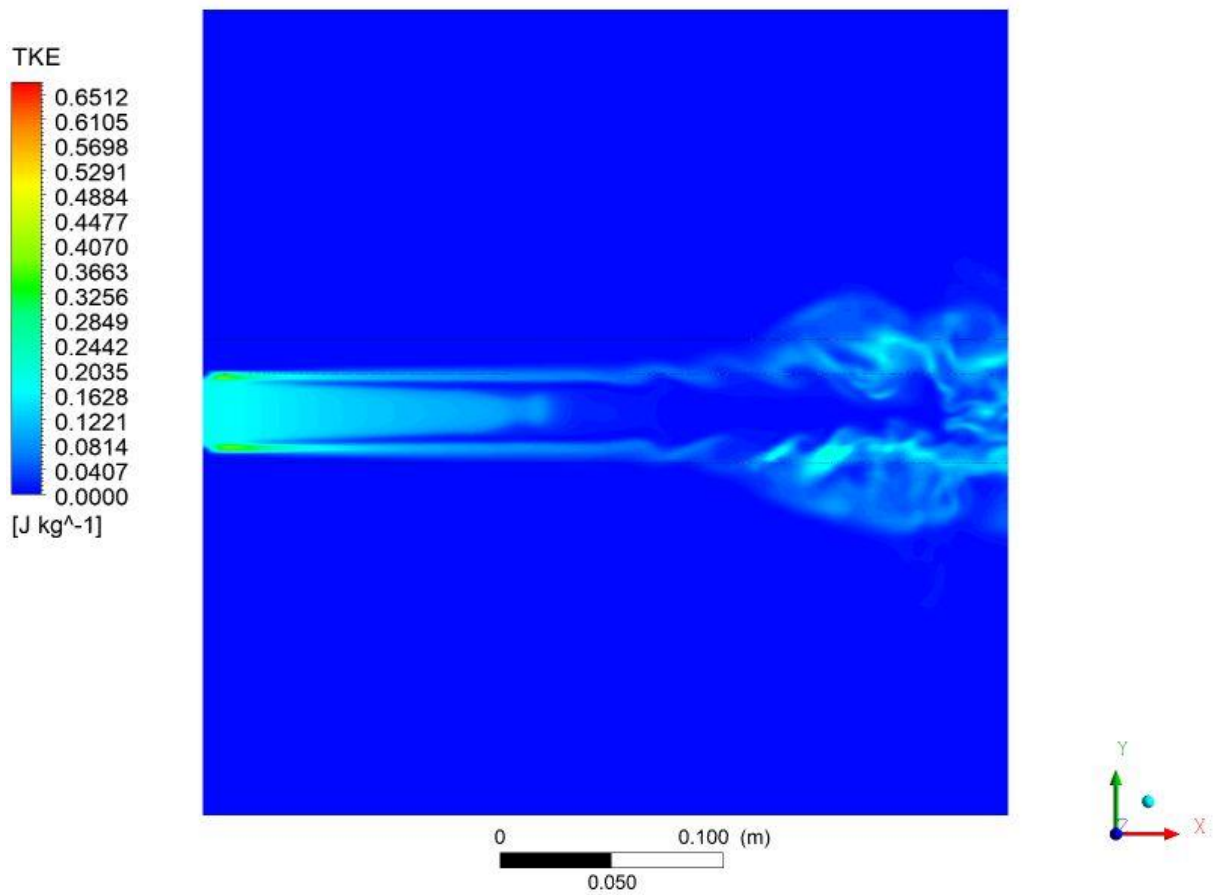
Příloha D Modelované hodnoty rychlosti uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) na základě metody *DES* v čase $T = 1,00$ s bez použití prvotního výpočtu na základě metody *RANS*



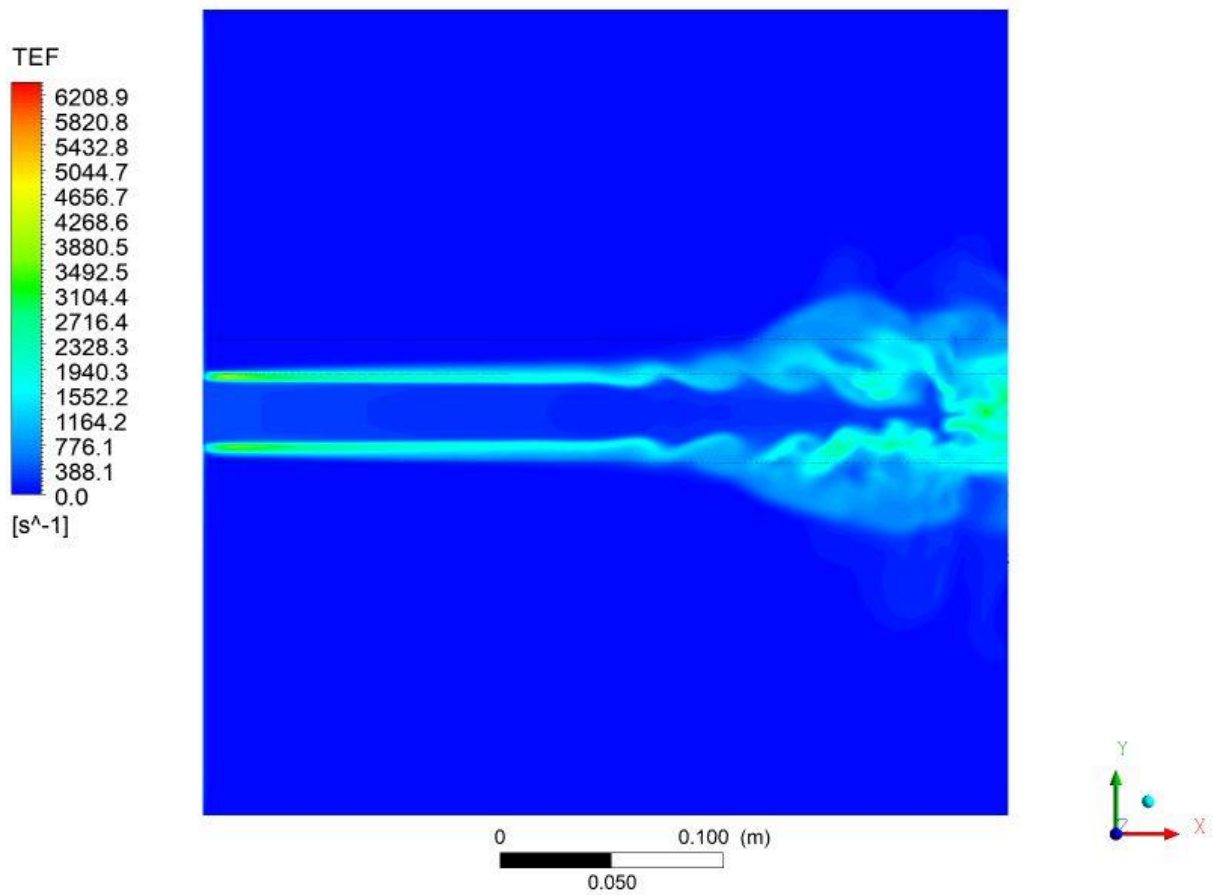
Příloha E Modelované tlakové poměry uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody *DES* v čase $T = 1,00$ s bez použití prvotního výpočtu pomocí metody *RANS*



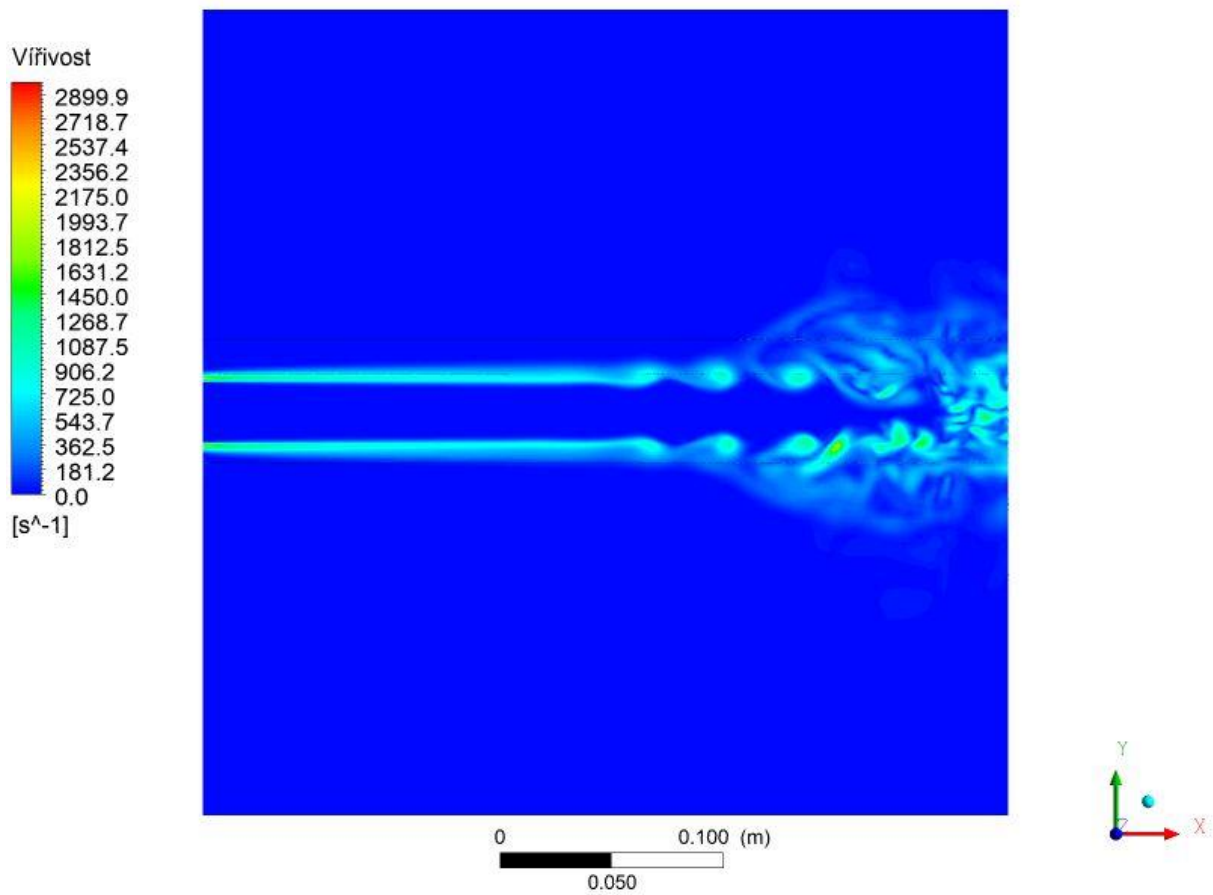
Příloha F Modelované hodnoty TKE uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody DES v čase $T = 1,00\text{ s}$ bez použití prvotního výpočtu pomocí metody $RANS$



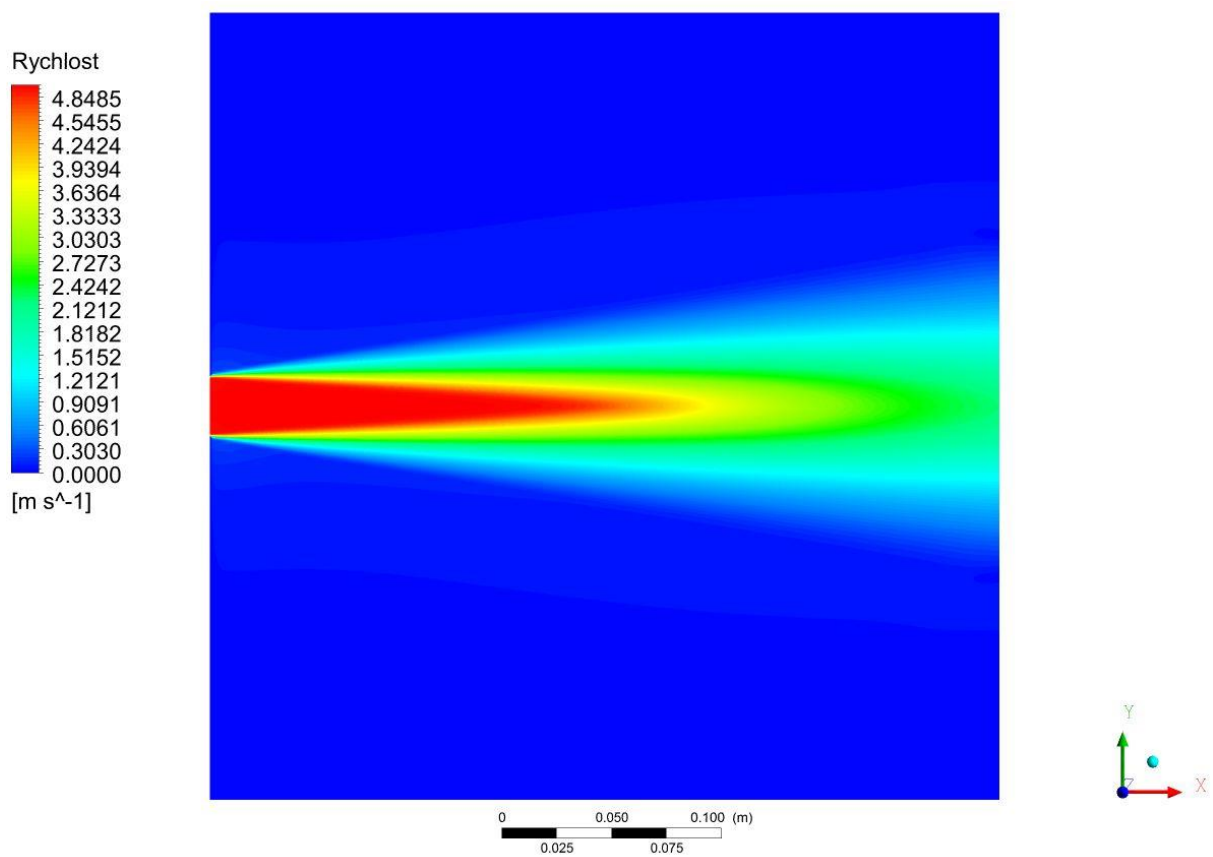
Příloha G Modelované hodnoty TEF uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody DES v čase $T = 1,00\text{ s}$ bez použití prvotního výpočtu pomocí metody $RANS$



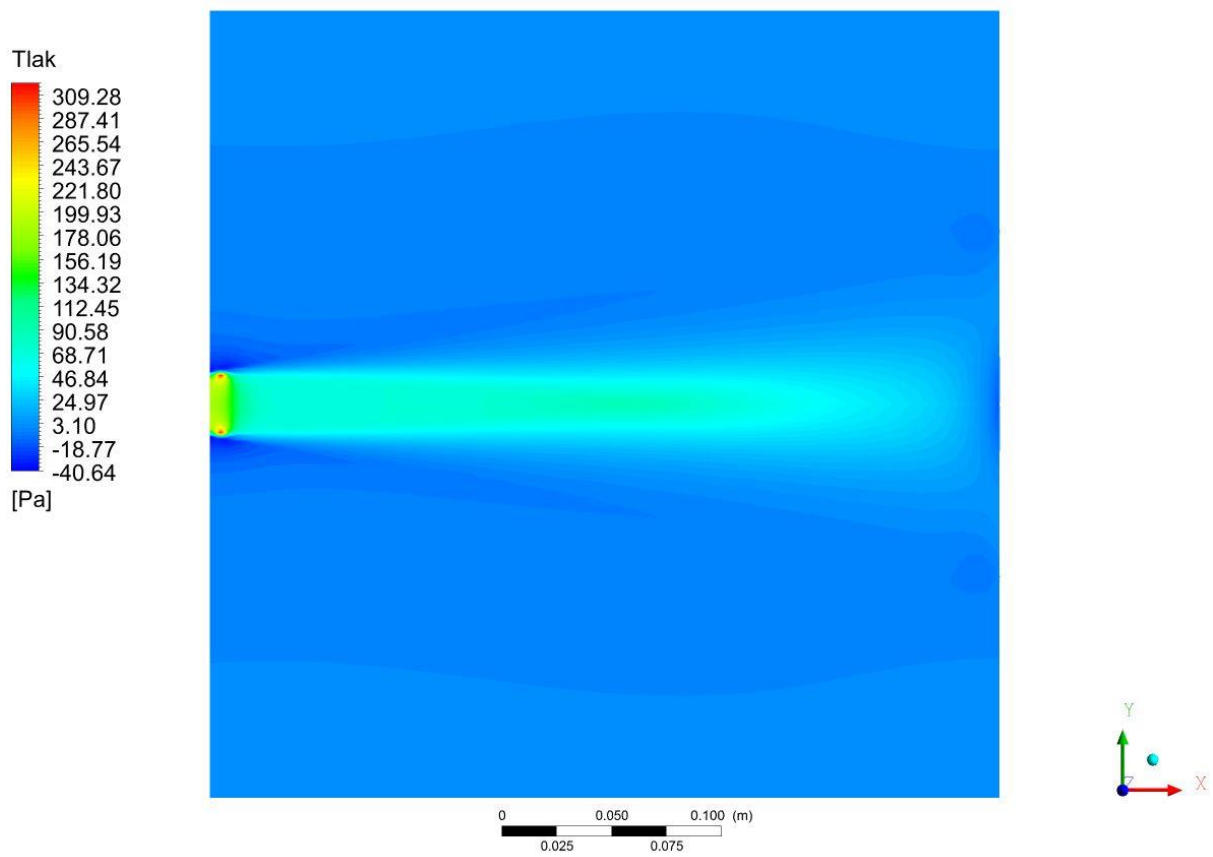
Příloha H Modelované hodnoty velikosti vířivosti uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody *DES* v čase $T = 1,00\text{ s}$ bez použití prvotního výpočtu pomocí metody *RANS*



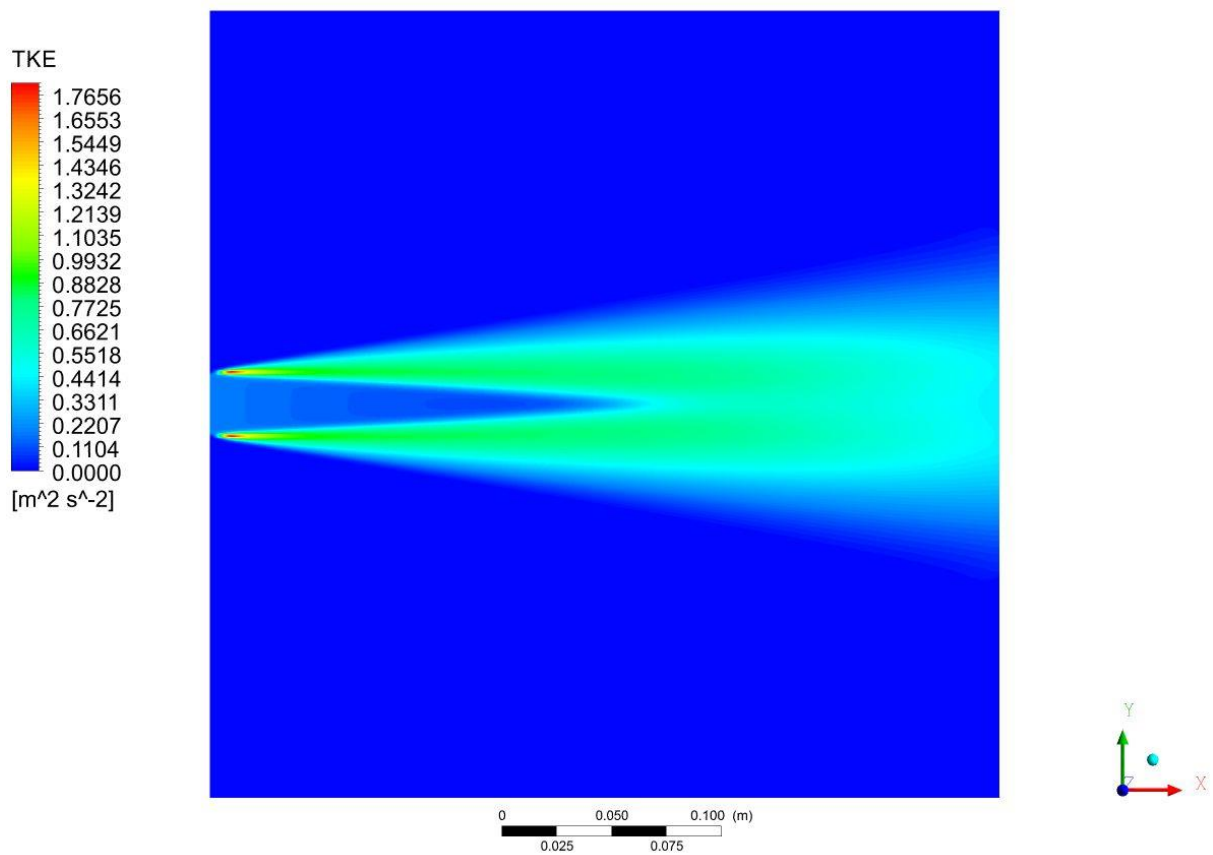
Příloha I Modelované hodnoty velikosti rychlosti turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody *RANS* (stacionární model $k-\omega$ SST)



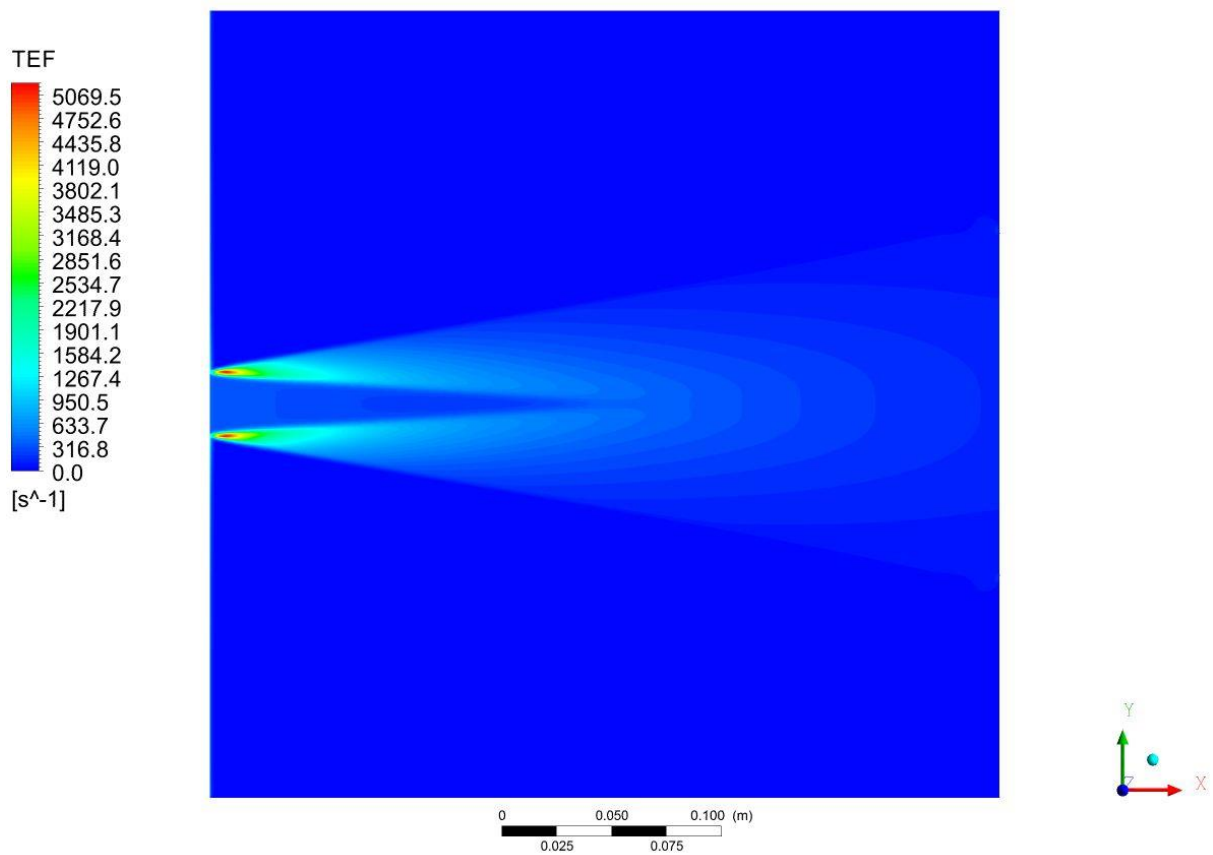
Příloha J Modelované hodnoty tlakových poměrů uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$)
získané na základě metody *RANS* (stacionární model $k-\omega$ SST)



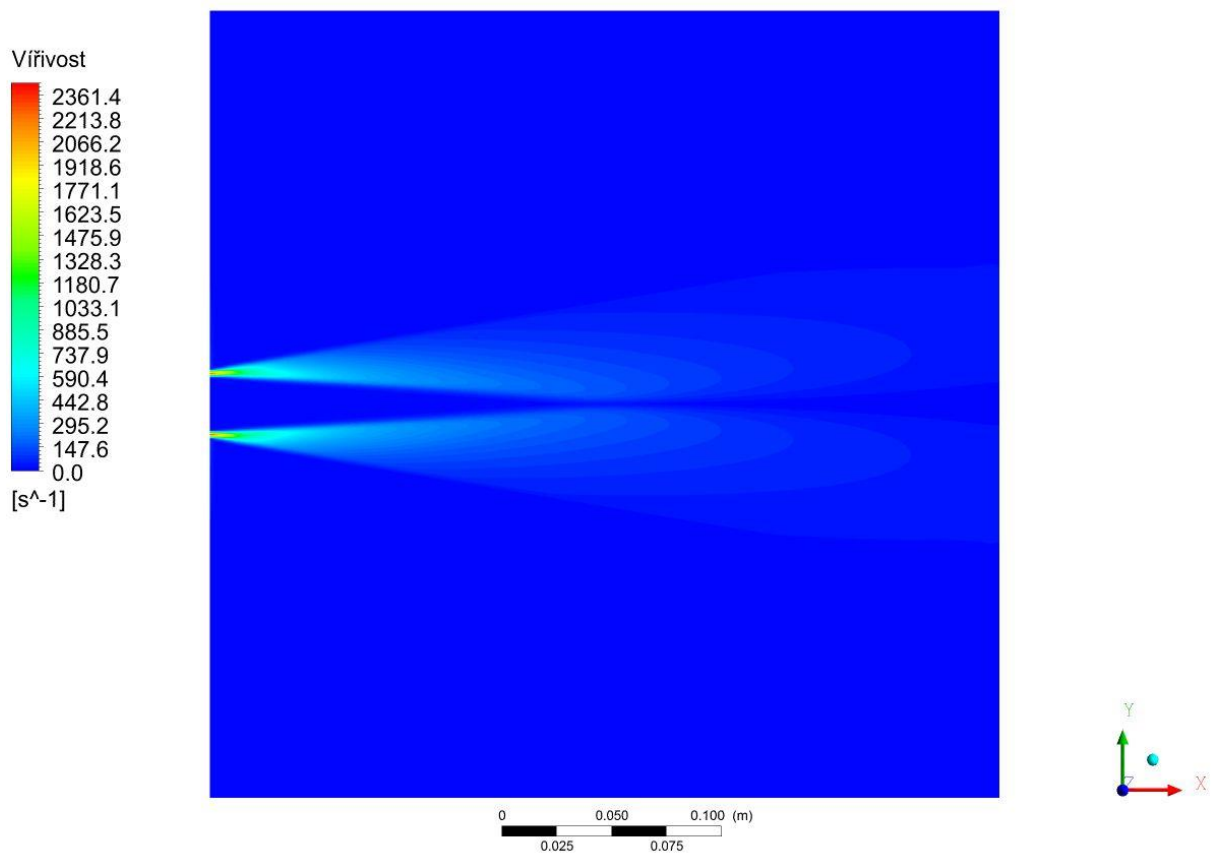
Příloha K Modelované hodnoty TKE uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody $RANS$ (stacionární model $k-\omega SST$)



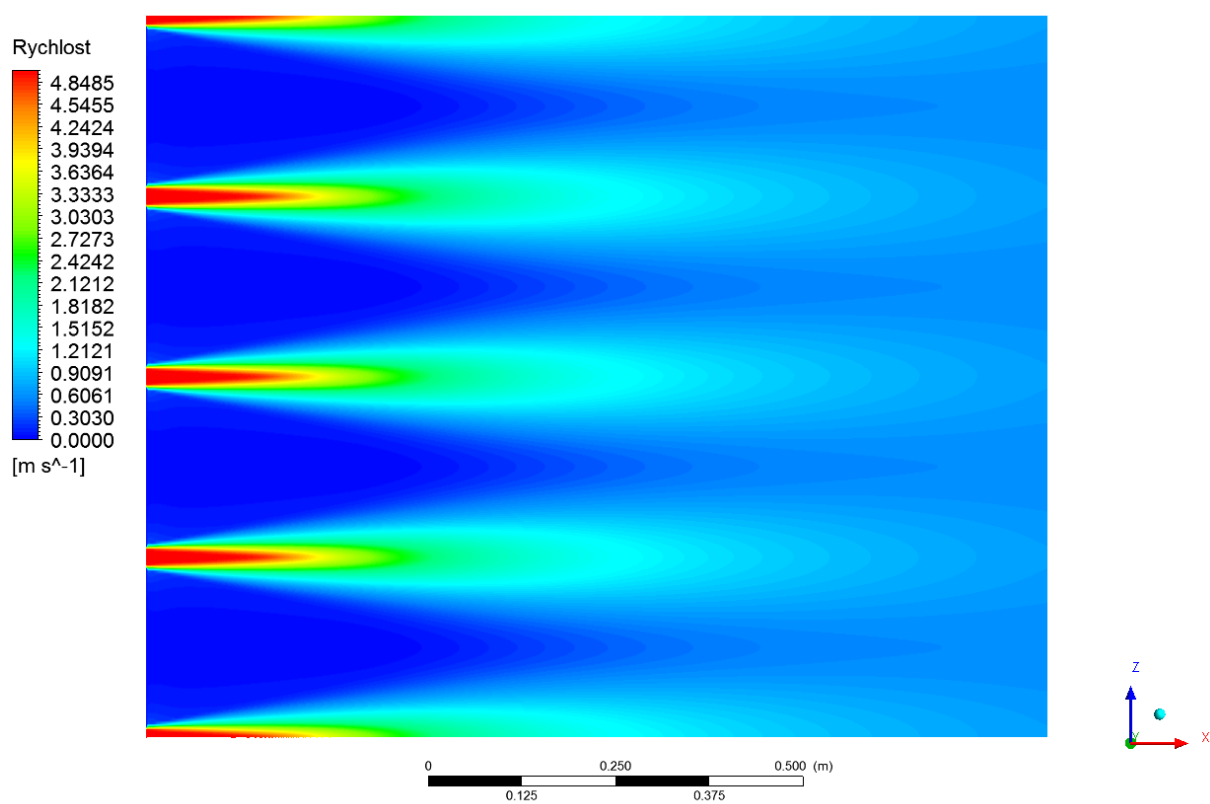
Příloha L Modelované hodnoty TEF uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$) získané na základě metody $RANS$ (stacionární model $k-\omega SST$)



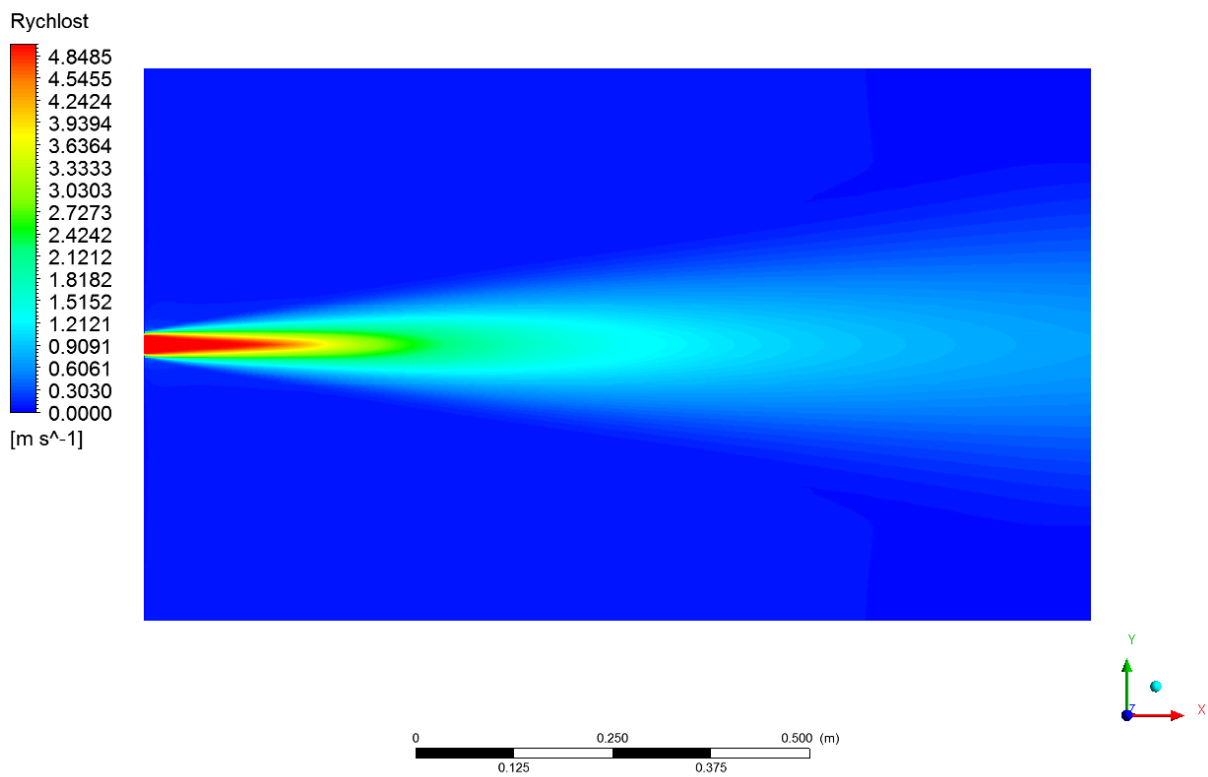
Příloha M Modelované hodnoty velikosti vířivosti uvnitř turbulentního paprsku (při $Re = 150\,000$)
získané na základě metody *RANS* (stacionární model $k-\omega$ SST)



Příloha N Modelované hodnoty velikosti rychlosti řady ponořených turbulentních paprsků v rovině paprsků x - z (osová vzdálenost trysek $s = 8d$)



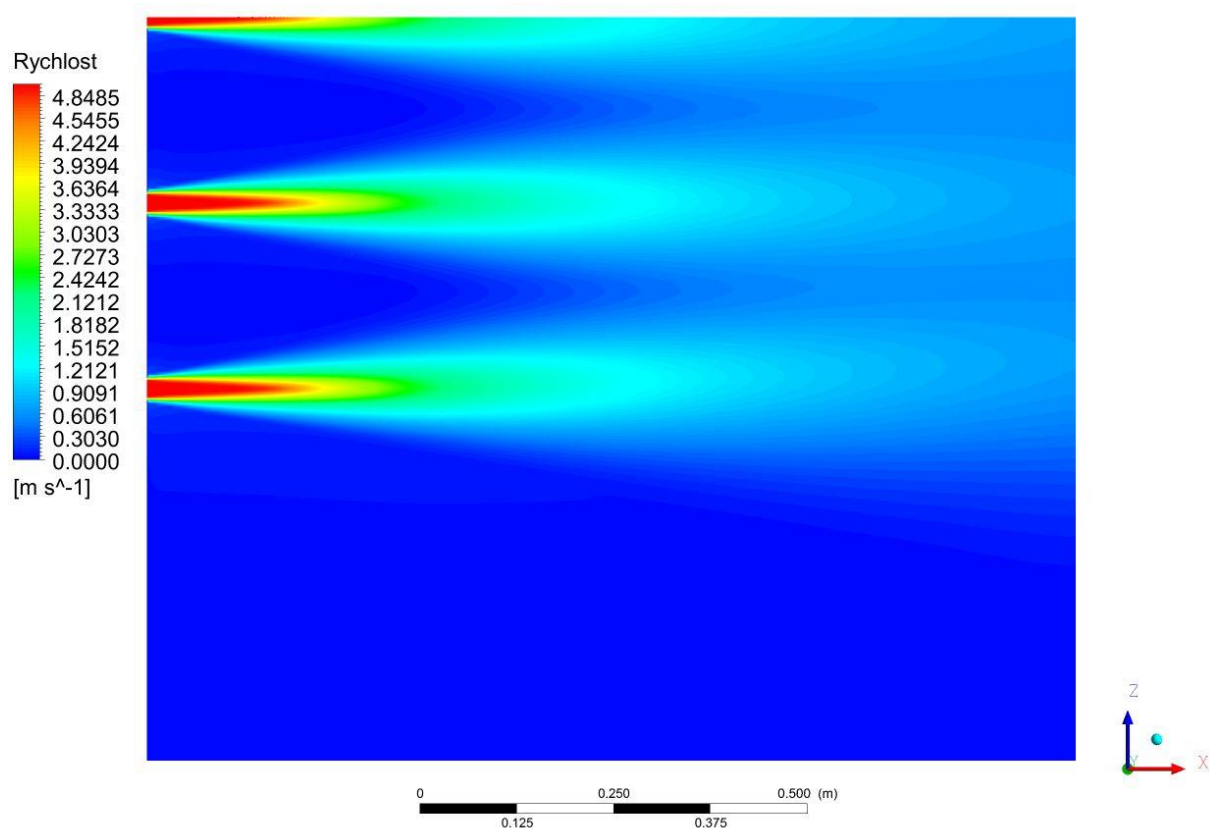
Příloha O Modelované hodnoty velikosti rychlosti řady ponořených turbulentních paprsků v rovině paprsků x - y (osová vzdálenost trysek $s = 8d$)



Příloha P Srovnání základních proudových charakteristik spolupůsobícího a samostatného paprsku

		Spolupůsobící paprsek				Samostatný paprsek			
		Hybnost proudu tekutiny				$M_0 = 17,65 [kg \cdot m \cdot s^{-1}]$			
		Hustota tekutiny				$\rho = 998,2 [kg \cdot m^{-3}]$			
x/d	U_{max}	U	Q	E	U_{max}	U	Q	E	
[1]	$[m \cdot s^{-1}]$	$[m \cdot s^{-1}]$	$[m^3 \cdot s^{-1}]$	[J]	$[m \cdot s^{-1}]$	$[m \cdot s^{-1}]$	$[m^3 \cdot s^{-1}]$	[J]	
10	2,87	1,28	$13,8 \cdot 10^{-3}$	11,3	3,076	1,10	$16,0 \cdot 10^{-3}$	18,9	
15	1,85	0,92	$19,3 \cdot 10^{-3}$	8,1	1,986	0,66	$26,9 \cdot 10^{-3}$	13,3	
20	1,35	0,73	$24,2 \cdot 10^{-3}$	6,4	1,425	0,48	$36,8 \cdot 10^{-3}$	9,3	
25	1,06	0,61	$29,0 \cdot 10^{-3}$	5,4	1,092	0,39	$45,8 \cdot 10^{-3}$	6,8	
30	0,87	0,54	$33,0 \cdot 10^{-3}$	4,7	0,875	0,33	$54,0 \cdot 10^{-3}$	5,2	
35	0,74	0,47	$36,4 \cdot 10^{-3}$	4,2	0,723	0,29	$61,7 \cdot 10^{-3}$	4,0	
40	0,66	0,41	$38,1 \cdot 10^{-3}$	3,6	0,612	0,26	$68,9 \cdot 10^{-3}$	3,2	

Příloha Q Modelované hodnoty velikosti rychlosti krajního paprsku v rovině x - z (osová vzdálenost trysek $s = 8d$)



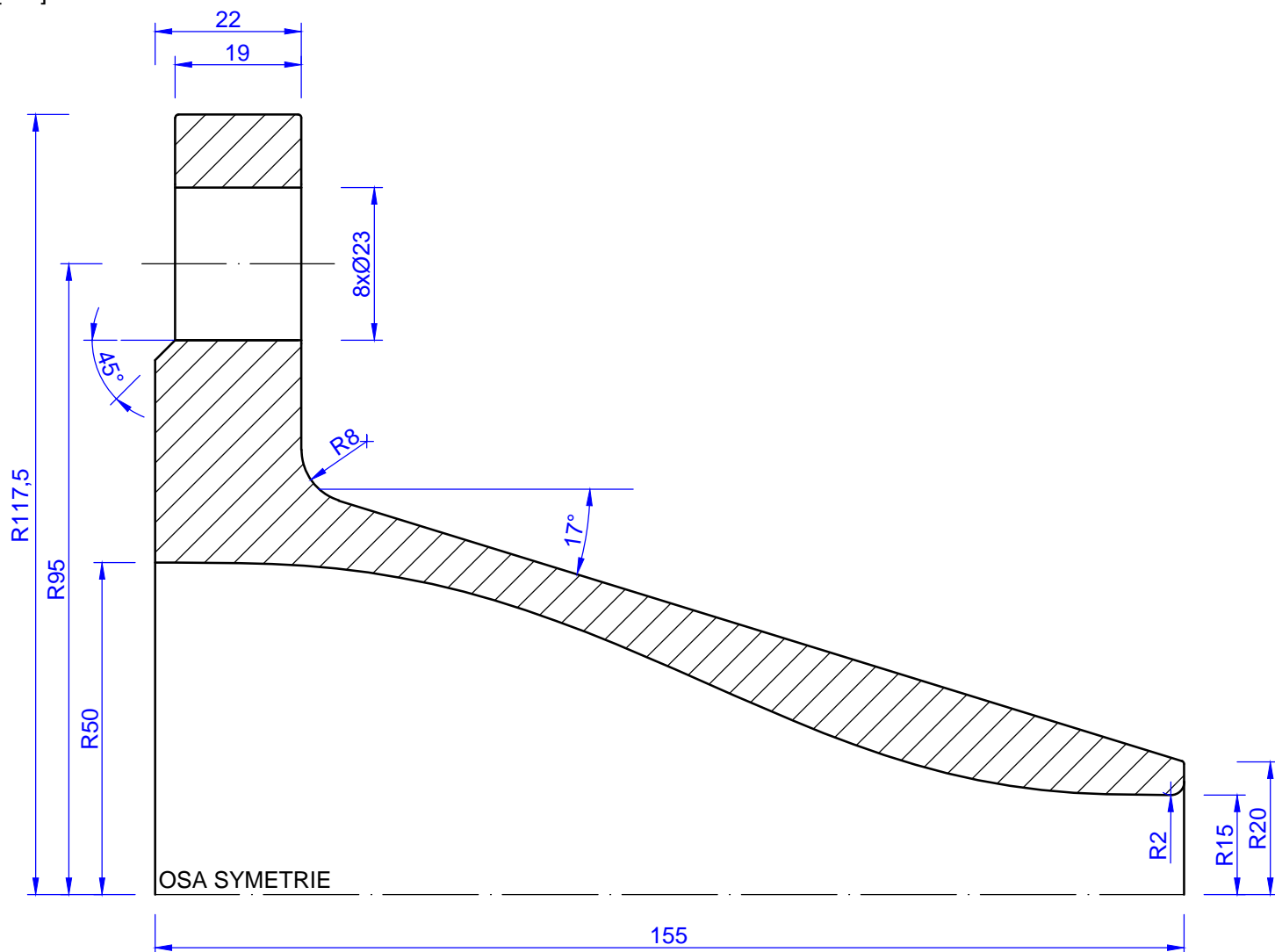
17 VÝKRESOVÁ ČÁST

Výkres 8.1	TRYSKA T155 (100/30/150)	Formát A4
Výkres 8.2	TRYSKA T155 (100/30/150)	Formát A3
Výkres 8.2	TRYSKA T155 (100/30/150)	Formát A3
Vizualizace	MODEL TRYSKY	Formát A3

VÝKRES TRYSKY

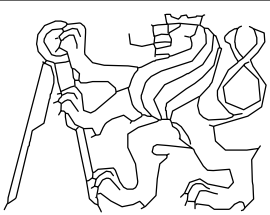
M1:1

[mm]



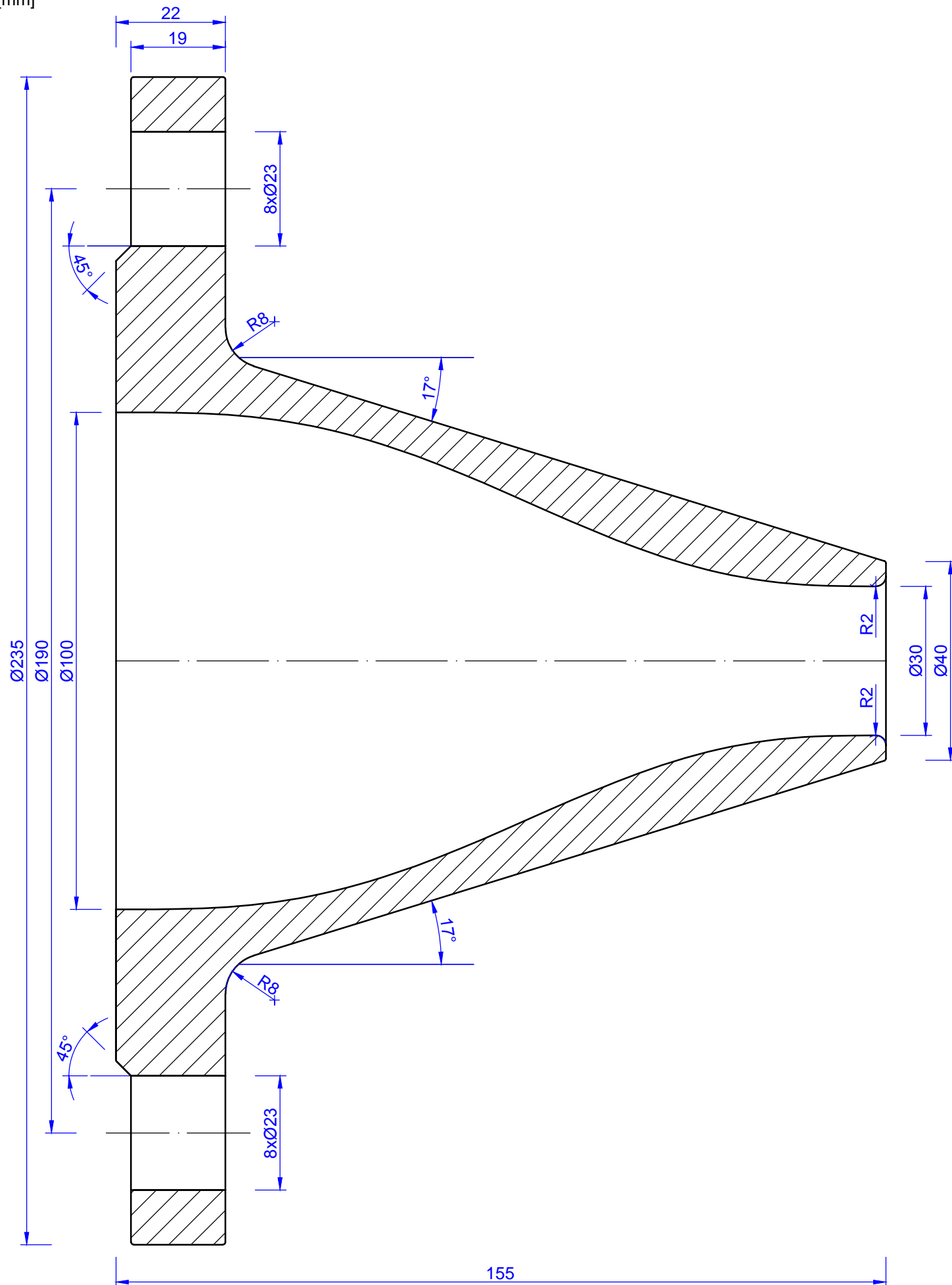
POZNÁMKY

VE VÝKRESU UVEDENA POUZE POLOVINA PRŮŘEZU TRYSKY - DRUHÁ POLOVINA SYMETRICKÁ
 VEŠKERÉ HRANY NUTNO ZAOLIT MIN. POLOMĚR ZAOLBENÍ R0.5 (POKUD NENÍ UVEDENO JINAK)
 SPOJENÍ POMOCÍ ŠROUBŮ M20, L = 80 mm, POČET 8
 TĚSNĚNÍ Z PRYŽE S OCELOVOU VLOŽKOU

OBOR	KATEDRA	JMÉNO STUDENTA		
v	HYDRAULIKY A HYDROLOGIE	Bc. PETR ŠPLÍCHAL		
ROČNÍK	VYUČUJÍCÍ			
DRUHÝ	Ing. PETR SKLENÁŘ, Ph.D.			
AKCE:				
DIPLOMOVÁ PRÁCE			FORMÁT	A4
			MĚŘÍTKO	1:1
OBSAH: TRYSKA T155 (100/30/150)			DATUM	12/2017
			Č. VÝKR.	8.1

VÝKRES TRYSKY

M1:1
[mm]



NÁVRHOVÉ PARAMETRY TRYSKY

NÁVRHOVÁ VELIKOST PRŮTOKU
 NÁVRHOVÁ VELIKOST PŘETLAKU
 PRŮMĚR PŘÍVODNÍHO POTRUBÍ
 PRŮMĚR TRYSKY
 STŘEDNÍ PRŮŘEZOVÉ RYCHLOSTI V PŘÍVODNÍM POTRUBÍ A V ÚSTÍ TRYSKY (ROV. KONTINUITY)

$Q = 0,0035 \text{ [m}^3\text{/s]}$,
 $p = 400 \text{ [kPa]}$,
 $D = 100 \text{ [mm]}$,
 $d = 30 \text{ [mm]}$,

$$v_{m1} = \frac{Q}{S_1} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,0035}{\pi \cdot 0,1^2} = 0,45 \text{ [m/s]},$$

$$v_{m2} = v_{m1} \frac{S_1}{S_2} = v_{m1} \frac{d_1^2}{d_2^2} = 0,45 \cdot \frac{0,1^2}{0,03^2} = 5,0 \text{ [m/s]}.$$

VÝPOČET SILOVÉHO NAMÁHÁNÍ V PŘÍRUBOVÉM SPOJI

INTEGRÁLNÍ ROVNICE BILANCE HYBNOSTI

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = - \int_S n \rho u u dS - \int_S n p dS + \int_S n \tau dS + \int_V \rho f dV,$$

PRO PŘÍPAD USTÁLENÉHO PROUDĚNÍ LEVÁ STRANA ROVNICE BILANCE HYBNOSTI JE NULOVÁ

$$0 = -\rho \int_{S_1} n u u dS - \rho \int_{S_2} n u u dS - \rho \int_{S_T} n u u dS - \int_{S_1} n p dS + \int_{S_2} n p dS + F'_T + \int_V \rho g dV,$$

VELIKOST REAKČNÍ SÍLY KAPALINY NA STĚNU TRYSKY

$$F_{Tx} = -\rho \int_{S_1} u^2 dS - \rho \int_{S_2} u^2 dS - \int_{S_1} p dS + \int_{S_2} p dS,$$

VYČÍSLENÍ VELIKOSTI REAKČNÍ SÍLY

$$F_{Tx} = 998,2 \cdot 0,45^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 - 998,2 \cdot 5,0^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,03^2 + 400 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 - 0 = 3,2 \text{ [kN]}.$$

OBOR	KATEDRA	JMÉNO STUDENTA		
V	HYDRAULIKY A HYDROLOGIE	Bc. PETR ŠPLÍCHAL		
ROČNÍK	VYUČUJÍCÍ			
DRUHÝ	Ing. PETR SKLENÁŘ, Ph.D.			
AKCE:				
DIPLOMOVÁ PRÁCE			FORMÁT	A3
			MĚŘITKO	1:1
			DATUM	12/2017
OBSAH:			Č. VÝKR.	8.2
TRYSKA T155 (100/30/150)				

MODEL TRYSKY



ZÁKLADNÍ PARAMETRY TRYSKY

PRŮMĚR PŘÍVODNÍHO POTRUBÍ
 PRŮMĚR TRYSKY
 DÉLKA TRYSKY
 DÉLKA ZÚŽENÍ TRYSKY

$D = 100$ [mm],
 $d = 30$ [mm],
 $L = 155$ [mm],
 $l = 150$ [mm],

VÝPOČETNÍ PARAMETRY TRYSKY

VÝPOČTOVÁ VELIKOST PRŮTOKU
 HUSTOTA TEKUTINY
 KINAMETICKÁ VAZKOST TEKUTINY
 OPTIMALIZAČNÍ PARAMETR
 VYPOČTENÁ VELIKOST GÖRTLEROVA PARAMETRU

$Q = 0,0035$ [m³/s],
 $\rho = 998,2$ [kg/m³],
 $\nu = 0,000\ 001$ [m²/s],
 $z = 0,25l = 0,0375$ [m]
 $Go = 439,7$ [1].

x/l	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/l	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/l	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$	x/l	$\zeta = \frac{r-d}{D-d}$
0.00	1.0000	0.26	0.9060	0.52	0.5070	0.78	0.0889
0.01	1.0000	0.27	0.8962	0.53	0.4880	0.79	0.0789
0.02	0.9999	0.28	0.8858	0.54	0.4691	0.80	0.0696
0.03	0.9998	0.29	0.8748	0.55	0.4502	0.81	0.0609
0.04	0.9996	0.30	0.8634	0.56	0.4313	0.82	0.0529
0.05	0.9991	0.31	0.8514	0.57	0.4125	0.83	0.0455
0.06	0.9985	0.32	0.8389	0.58	0.3938	0.84	0.0387
0.07	0.9977	0.33	0.8259	0.59	0.3753	0.85	0.0325
0.08	0.9966	0.34	0.8124	0.60	0.3569	0.86	0.0270
0.09	0.9952	0.35	0.7985	0.61	0.3388	0.87	0.0220
0.10	0.9935	0.36	0.7840	0.62	0.3209	0.88	0.0177
0.11	0.9915	0.37	0.7692	0.63	0.3032	0.89	0.0139
0.12	0.9890	0.38	0.7539	0.64	0.2858	0.90	0.0106
0.13	0.9862	0.39	0.7382	0.65	0.2688	0.91	0.0079
0.14	0.9830	0.40	0.7221	0.66	0.2521	0.92	0.0057
0.15	0.9793	0.41	0.7056	0.67	0.2358	0.93	0.0039
0.16	0.9752	0.42	0.6888	0.68	0.2200	0.94	0.0025
0.17	0.9706	0.43	0.6716	0.69	0.2045	0.95	0.0015
0.18	0.9655	0.44	0.6542	0.70	0.1895	0.96	0.0008
0.19	0.9599	0.45	0.6364	0.71	0.1750	0.97	0.0003
0.20	0.9538	0.46	0.6185	0.72	0.1611	0.98	0.0001
0.21	0.9472	0.47	0.6003	0.73	0.1476	0.99	0.0000
0.22	0.9400	0.48	0.5819	0.74	0.1347	1.00	0.0000
0.23	0.9323	0.49	0.5633	0.75	0.1223	-	-
0.24	0.9241	0.50	0.5446	0.76	0.1106	-	-
0.25	0.9153	0.51	0.5258	0.77	0.0994	-	-

OBOR	KATEDRA	JMÉNO STUDENTA	
v	HYDRAULIKY A HYDROLOGIE	Bc. PETR ŠPLÍCHAL	
ROČNÍK	VYUČUJÍCÍ		
DRUHÝ	Ing. PETR SKLENÁŘ, Ph.D.		
AKCE:			
DIPLOMOVÁ PRÁCE			
		FORMÁT	A3
		MĚŘITKO	1:M
		DATUM	12/2017
OBSAH:		Č. VÝKR.	8.3
TRYSKA T155 (100/30/150)			

MODEL TRYSKY

