



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

FAKULTA STAVEBNÍ  
KATEDRA HYDRAULIKY A HYDROLOGIE

**Modelování proudění hrubozrnných směsí s neneutonskou  
nosnou kapalinou v potrubí dvouvrstevným modelem**

**Modelling of coarse slurry flow with non-Newtonian carrier  
in pipe using two-layer model**

Diplomová práce

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Vodní hospodářství a vodní stavby

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Václav Matoušek

**Bc. Lukáš Svoboda**

**Praha 2018**

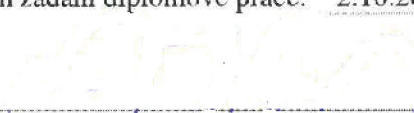
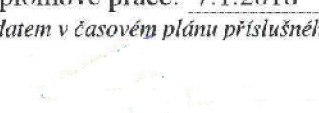


## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: <u>Svoboda</u>	Jméno: <u>Lukáš</u>	Osobní číslo: <u>410196</u>
Zadávací katedra: <u>Katedra hydrauliky a hydrologie - K141</u>		
Studijní program: <u>Stavební inženýrství</u>		
Studijní obor: <u>Vodní hospodářství a vodní stavby</u>		

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: <u>Modelování proudění hrubozrnných směsí s neneutonskou nosnou kapalinou v potrubí dvouvrstevným modelem</u>	
Název diplomové práce anglicky: <u>Modelling of coarse slurry flow with non-Newtonian carrier in pipe using two-layer model</u>	
Pokyny pro vypracování: Diplomová práce má za cíl sestavit vhodný dvouvrstevný model pro matematický popis tlakového proudění hrubozrnné směsi s neneutonskou nosnou kapalinou a ověřit jeho předpovědní schopnosti porovnáním s výsledky experimentů na trubní lince ve Vodohospodářské laboratoři FSv ČVUT. Pro porovnání budou použity výsledky měření proudění směsí s neneutonskou nosnou kapalinou různých reologických vlastností. Stěžejní cíle práce jsou: 1. Vyhodnocení vhodného určení součinitele ztráty tření na rozhraních modelovaných vrstev, a to zejména v případě laminárního proudění 2. Vyhodnocení vhodného určení hydraulického poloměru pro stanovení třecího napětí na povrchu sunutého dna jako dolní vrstvy dvouvrstevného modelu 3. Vyhodnocení vlivu reologických parametrů na veličiny popisující proudění v rámci modelu Seznam doporučené literatury: Wilson, K.C. et al. 2006. Slurry Transport Using Centrifugal Pumps. Third Edition. Springer. Matoušek, V., Pěník, V., Pullum, L., and Chryst, A. 2015. Experimental study of bed friction in stratified flow with viscoplastic carrier in pipe. Proc. 17th Int. Conference on Transport & Sedimentation of Solid Particles, Delft, Netherlands, pp. 175-184 (ISBN 0867-7964)	
Jméno vedoucího diplomové práce: <u>prof. Dr. Ing. Václav Matoušek</u>	
Datum zadání diplomové práce: <u>2.10.2017</u>	Termín odevzdání diplomové práce: <u>7.1.2018</u> <i>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku</i>
 Podpis vedoucího práce	 Podpis vedoucího Katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

<u>2.10.2017</u> Datum převzetí zadání	 Podpis studenta(ky)
---	-------------------------

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 7. 1. 2018

Podpis.....

Jméno a příjmení: Lukáš Svoboda

## **Poděkování**

Tato práce, i studium celkově, pro mě bylo občas velice obtížné. Přesto jsem velice rád, že mi bylo umožněno získat mnoho důležitých znalostí a zkušeností.

To, že jsem došel až sem, není jen mou zásluhou, ale i těch ostatních, kteří při mně stáli, nebo pomáhali svými bohatými znalostmi. Proto bych těmto osobám rád poděkoval.

Zejména bych chtěl poděkovat prof. Dr. Ing. Václavu Matouškovi za vedení mé diplomové práce a cenné rady. Další dík bezpochyby patří Ing. Mikoláši Keselymu, který si vždy udělal čas, aby mi odpověděl na mé dotazy a pomohl mi s experimentálními měřeními.

Poděkování samozřejmě patří mé rodině a přátelům, kteří mě v těžkých chvílích vždy podpořili a pomohli.

## **Abstract**

### **Modelling of coarse slurry flow with non-Newtonian carrier in pipe using two-layer model**

**Bc. Lukáš Svoboda**

**January 2018**

Supervisor of thesis: prof. Dr. Ing. Václav Matoušek

#### Key words:

- non-Newtonian flow
- two-layer model
- coarse slurry flow

An increasing attention has been paid to two-phase flows of specific properties and complex behavior in different branches of industry as is for instance the waste water process industry. Mathematical models are sought that would be used as tools to optimize the flow in the industrial processes and make transport of two-phase mixtures as efficient as possible. A two-layer model is suitable for describing stratified complex flows with non-Newtonian carrier.

The goal of the thesis is to verify predictive abilities of the two-layer model, to perform a sensitivity analysis and to evaluate model weaknesses.

One of the important results of the thesis is that the prediction success of the model is significantly affected by two rheological parameters of the carrier liquid: the coefficient of consistency  $K$  and the flow index  $n$ . Furthermore, it has been shown that the simplistic assumption of circular flow for the upper layer of the stratified flow does not introduce any significant errors to the model. At the same time, it has been found that the solution of the shear stresses in the upper layer using the division of the flow area into two parts belonging to the particular perimeters can be an appropriate way to solve this problem.

In conclusion, the predictive two-layer model in the version by Matoušek et al. (2015) appears to have a potential to be successful in describing coarse stratified flows with visco-plastic carrier and hence it is recommended to continue with verifying and fine-tuning of the model using new experimental results in the future.

## **Abstrakt**

### **Modelování proudění hrubozrnných směsí s neneutonskou nosnou kapalinou v potrubí dvouvrstevným modelem**

**Bc. Lukáš Svoboda**

**Leden 2018**

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Václav Matoušek

Klíčová slova:

- neneutonský proudění
- dvouvrstevný model
- proudění hrubozrnné směsi

V praxi se stále více zvyšuje zájem o popis proudění směsí se specifickými vlastnostmi (neneutonské chování nosné kapaliny, stratifikace hrubozrnné fáze). Takové směsi se vyskytují například v těžebním nebo potravinářském průmyslu či v odpadovém hospodářství. Aby jejich zpracování, respektive doprava, byla co nejefektivnější je nutné tento proces dostatečně matematicky popsat. To by měl zajistit matematický dvouvrstevný model, který je předmětem této práce.

Cílem práce bylo ověřit předpovědní úspěšnost dvouvrstevného modelu, provést citlivostní analýzu a vyhodnotit jeho slabé stránky.

Jedním z důležitých výsledků práce je zjištění, že predikční schopnost modelu je významně závislá na dvou reologických parametrech nosné kapaliny: součiniteli konzistence  $K$  a tokovém indexu  $n$ . Dále se ukázalo, že zjednodušující předpoklad kruhového průřezu pro horní vrstvu proudění nezavádí do modelu nijak výrazné chyby. Zároveň se zjistilo, že řešení v horní vrstvě působících třecích napětí pomocí rozdělení plochy proudění na části příslušící jednotlivým omočeným obvodům rozhraní může být správnou cestou k řešení výpočtu.

Závěrem lze konstatovat, že predikční model dle Matouška a kol. (2015) se jeví jako vhodný nástroj pro popis stratifikovaných proudění s viskoplastickou nosnou kapalinou a bylo by vhodné v jeho hodnocení a úpravách dále pokračovat pomocí nových experimentů.

# OBSAH

<b>1. ÚVOD.....</b>	<b>9</b>
1.1 CÍLE PRÁCE .....	9
1.2 STRUKTURA PRÁCE .....	10
<b>2. POPIS PROBLEMATIKY NENEWTONSKÝCH KAPALIN.....</b>	<b>11</b>
2.1 OBECNÝ POPIS.....	11
2.2 REOLOGIE .....	12
2.3 REOLOGICKÉ MODEL.....	13
2.3.1 <i>Dvoupametrický.....</i>	<i>13</i>
2.3.2 <i>Mocninový dvoupametrický.....</i>	<i>14</i>
2.3.3 <i>Mocninový třípametrický Bulkley – Herschelův (visko-plastické).....</i>	<i>15</i>
2.4 REOMETRIE .....	16
2.4.1 <i>Rotační viskozimetr.....</i>	<i>16</i>
2.5 POPIS PROUDĚNÍ.....	16
2.6 STANOVENÍ ENERGETICKÉ ZTRÁTY TŘENÍM .....	18
2.6.1 <i>Určení hydraulického gradientu.....</i>	<i>18</i>
<b>3. PROUDĚNÍ TEKUTINY V POTRUBÍ.....</b>	<b>19</b>
3.1 ROVNICE ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI.....	19
3.2 POPIS PROUDĚNÍ V POTRUBÍ .....	19
3.3 STANOVENÍ REŽIMU PROUDĚNÍ .....	20
3.4 PROUDĚNÍ SMĚSI .....	21
3.5 HOMOGENNÍ A PSEUDOHOMOGENNÍ PROUDĚNÍ.....	21
3.6 HETEROGENNÍ PROUDĚNÍ.....	22
3.6.1 <i>Proudění s nepohyblivou vrstvou usazeného materiálu.....</i>	<i>23</i>
3.6.1 <i>Proudění se sunoucí se vrstvou usazeného materiálu.....</i>	<i>24</i>
<b>4. MODELOVÁNÍ STRATIFIKOVANÉHO PROUDĚNÍ.....</b>	<b>25</b>
4.1 DVOUVRSTVÝ MODEL .....	25
4.1.1 <i>Matematická formulace modelu.....</i>	<i>27</i>
4.1 MODELY S NENEWTONSKOU NOSNOU KAPALINOU .....	31
4.1.1 <i>Model Pullum a kol. 2004.....</i>	<i>31</i>
4.1.2 <i>Model Rojas a Saez 2012.....</i>	<i>34</i>
4.1.3 <i>Model Matoušek a kol. 2015.....</i>	<i>37</i>
4.1.4 <i>Model dle Krupičky 2014.....</i>	<i>41</i>
<b>5. EXPERIMENTÁLNÍ DATA A MĚŘENÍ .....</b>	<b>43</b>
5.1 EXPERIMENTÁLNÍ TRUBNÍ OKRUH .....	43

5.2	POUŽITÝ MATERIÁL.....	44
5.2.1	<i>Hrubozrnné částice</i> .....	44
5.2.2	<i>Nosná kapalina</i> .....	44
5.3	PŘEVZATÁ EXPERIMENTÁLNÍ DATA.....	45
5.4	VLASTNÍ MĚŘENÍ EXPERIMENTÁLNÍCH DAT.....	46
5.4.1	<i>Popis měření</i> .....	46
5.4.2	<i>Analýza výsledků experimentálních dat</i> .....	48
<b>6.</b>	<b>TESTOVÁNÍ DVOUVRSTVÉHO MODELU .....</b>	<b>53</b>
6.1	CITLIVOSTNÍ ANALÝZA DVOUVRSTVÉHO MODELU .....	54
6.1.1	<i>Volba konfigurace predikčního modelu</i> .....	54
6.1.2	<i>Citlivostní analýza komponentů modelu</i> .....	54
6.1	VYHODNOCENÍ MODELU S MODELEM POČÍTAJÍCÍ S BODOVÝM ROZDĚLENÍM RYCHLOSTÍ .....	63
6.2	VYHODNOCENÍ PŘEDPOVĚDNÍ SCHOPNOSTI PREDIKČNÍHO MODELU .....	65
6.3	VYHODNOCENÍ TŘECÍHO NAPĚTÍ NA ROZHRANÍ DVOU VRSTEV.....	69
6.3.1	<i>Vyhodnocení průběhu napětí</i> .....	70
6.3.2	<i>Vyhodnocení hydraulických poloměrů</i> .....	71
6.3.3	<i>Citlivostní analýza změny reologických parametrů na třecích napětí</i> .....	73
6.3.4	<i>Citlivostní analýza změny reologických parametrů na hydraulických poloměrech</i> .....	76
<b>7.</b>	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>77</b>
	<b>SEZNAM LITERATURY A PODKLADŮ .....</b>	<b>79</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>81</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>82</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>86</b>
	<b>PŘÍLOHY.....</b>	<b>90</b>



# 1. Úvod

V poslední době se objevuje velký zájem o popis proudění specifického materiálu vyskytující se zejména v těžebním průmyslu, či v odpadovém hospodářství. Jedná se o tlakové proudění hrubozrnné směsi s nosnou kapalinou se specifickými vlastnostmi, které neodpovídají obvyklému newtonskému chování. Každá tato specifická kapalina má vlastní reologické chování. Často při dopravě tohoto materiálu dochází k vertikálnímu rozvrstvení proudění. Na dně vzniká vrstva usazených hrubých částic, která se může sunout, nebo zůstat bez pohybu. Nad vzniklou vrstvou pak nosná kapalina.

Při čerpání tohoto materiálu se při nízkých rychlostech stává, že se dopravovaná složka hrubozrnných částic usadí a může tak potrubí ucpat. Aby k tomu nedocházelo a transport materiálu byl efektivní, je nutné dobře nastavit podmínky proudění.

Řešením dostatečně přesného popisu tohoto proudění a určení jeho důležitých charakteristik by měl být matematický model, který je předmětem této diplomové práce.

## 1.1 Cíle práce

Cílem diplomové práce je stanovení vhodného dvouvrstvého modelu pro popis tlakového proudění hrubozrnné směsi s neneutonskou nosnou kapalinou a ověřit jeho předpovědní schopnosti porovnáním s naměřenými daty v experimentální trubní lince ve Vodohospodářské laboratoři Fakulty stavební ČVUT v Praze. Pro zmíněné porovnání budou použity výsledky proudění směsí s neneutonskou nosnou kapalinou různých reologických parametrů.

### **Stěžejní cíle práce jsou:**

1. Vyhodnocení vhodného určení součinitele ztráty tření na rozhraních modelovaných vrstev, a to zejména v případě laminárního proudění.
2. Vyhodnocení vhodného určení hydraulického poloměru pro stanovení třecího napětí na povrchu sunutého dna jako dolní vrstvy dvouvrstvého modelu.
3. Vyhodnocení vlivu reologických parametrů na veličiny popisující proudění v rámci modelu.

## 1.2 Struktura práce

Tato diplomová práce je rozdělena celkem do tří částí.

**První kapitola** se zabývá teoretickým popsáním problematiky dvouvrstvého modelu pro popis tlakového proudění hrubozrnné směsi s neneutonskou nosnou kapalinou. Velký důraz je kladen na popis chování neneutonských kapalin a podrobný popis dvouvrstvého modelu a jeho jednotlivých částí.

**Druhá kapitola** popisuje experimentální měření a jeho výsledky, které byly pro práci použity.

**Třetí kapitola** obsahuje citlivostní analýzu vybraného dvouvrstvého modelu, hodnotí úspěšnost jeho predikčních schopností a odpovídá na stěžejní cíle práce.

## 2. Popis problematiky neneutonských kapalin

### 2.1 Obecný popis

Neneutonská kapalina je pojem, který se v odborné literatuře objevuje mnohem méně než klasická newtonska kapalina. To je způsobeno zejména tím, že každá neneutonská kapalina má své vlastní reologické chování a její popis chování je o mnoho složitější.

Základní odlišnosti neneutonských kapalin od newtonských:

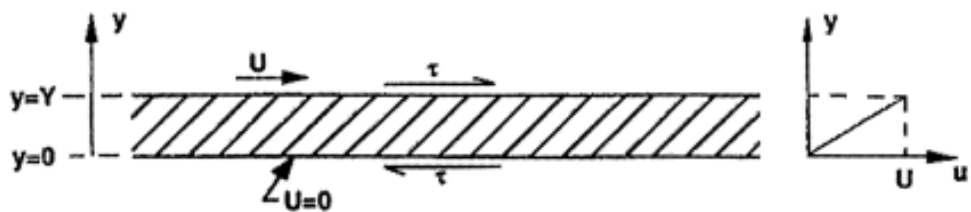
- běžnější výskyt laminárního proudění
- neplatí Newtonův zákon viskozity
- obsahují malé částice zvyšující vnitřní tření
- každá neneutonská kapalina má vlastní zákon viskozity
- rozdílný tvar I-V křivky

Běžnější výskyt laminárního proudění může být způsoben vyšším výskytem jemných částic v proudící kapalině, což zapříčiňuje větší hodnotu vnitřního tření.

U dobře známých newtonských kapalin, mezi které patří například voda, platí Newtonův zákon viskozity, dle kterého platí, že změna mezi smykovým napětím  $\tau$  a rychlostním gradientem ( $du/dy$ ) je lineární a řídí se dle odpovídající dynamické viskozity  $\mu$ , jejíž hodnota je u každé kapaliny jiná (Obr. č. 2). Nutno dodat, že je tomu při laminárním proudění. [3, 4, 6]

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \cdot \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (2.1)$$

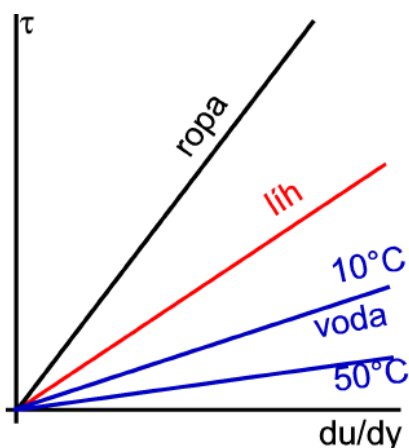
$\mu$	[Pa.s] dynamická viskozita
$\tau$	[Pa] smykové napětí
F	[N] síla nutná k posunu desky
A	[m <sup>2</sup> ] plocha



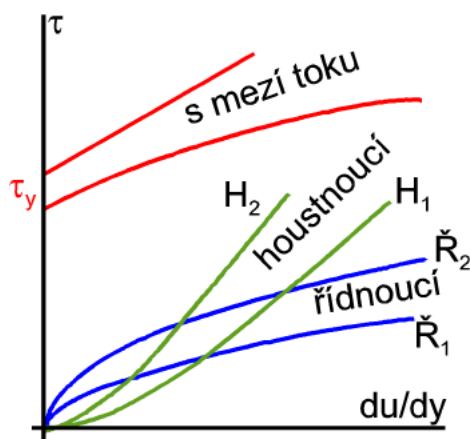
Obr. č. 1: Popis Newtonského zákona viskozity

Níže je uveden viditelný rozdíl mezi průběhem smykového napětí u newtonské (Obr. č. 2) a neneutonské kapaliny (Obr. č. 3). U newtonských kapalin je nárůst smykového napětí vždy lineární, rozdíl je jen ve strmosti nárůstu (různé hodnoty dynamické viskozity), na rozdíl od kapalin neneutonských, kde může být různý. Dle toho, jaký je průběh smykového napětí v závislosti na rychlostním gradientu, můžeme neneutonské kapaliny dělit na:

- houstnoucí (škroby, malty)
- řídnoucí (polymery, latexy)
- s mezí toku (čokoláda, zubní pasta)
- kombinované (houstnoucí s mezí toku apod.) [3, 4, 6]



Obr. č. 2: Newtonské kapaliny [6]



Obr. č. 3: Neneutonské kapaliny [6]

## 2.2 Reologie

Reologie je nauka popisující vlastnosti tekutin při jejich pohybu. Protože každá neneutonská kapalina má svůj vlastní zákon viskozity, je nutné její parametry zjistit měřením. Nejčastěji se měření provádí v trubním (kapilárním) nebo rotačním viskozimetru. Na základě měření jí pak lze zařadit do jednotlivých reologických modelů. Jelikož nelze použít jednotnou

viskozitu, byla pro neneutonské kapaliny definována zdánlivá viskozita  $\eta$  (2.2), jejíž hodnota nemusí být konstantní po celý rozsah rychlostního gradientu. [3, 4, 6]

$$\eta = \frac{\tau}{du/dy} \quad (2.2)$$

$\tau_y$	[Pa] počáteční napětí
K	[Pa.s <sup>n</sup> ] součinitel konzistence
n	[-] tokový index
$\eta$	[Pa.s] zdánlivá viskozita

## 2.3 Reologické model

Dle chování je možné neneutonskou kapalinu zařadit do níže uvedených modelů

- dvouparametrický – Binghamův
- dvouparametrický mocninový
- mocninový tříparametrický – Bulkley – Herschelův [3, 4, 6]

### 2.3.1 Dvouparametrický

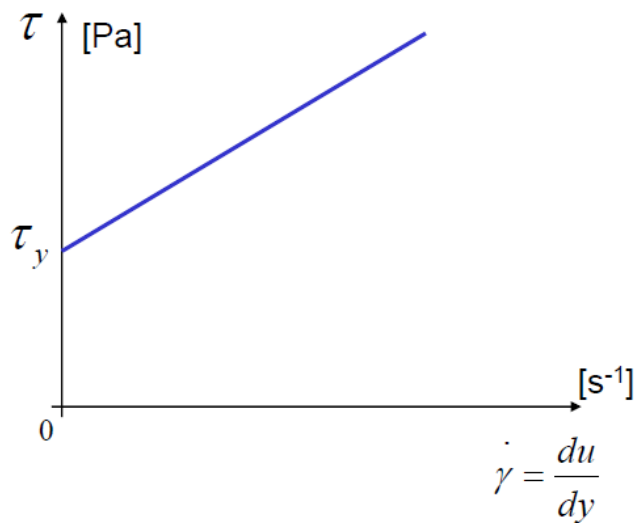
#### Binghamův model

Dvouparametrický model je definovaný dvěma koeficienty počátečním napětím  $\tau_y$  a Binghamskou viskozitou  $\eta_B$ . Počáteční napětí určuje hodnotu smykového napětí, do které se ještě dané kapalina chová jako tuhé pružné těleso. Teprve po jeho překonání začne látka téct. Binghamská viskozita určuje strmost nárůstu smykového napětí při dalším zvyšování rychlosti.

Mezi tento typ neneutonských kapalin například patří vrtné odpady, zubní pasta, čokoláda apod. [3, 4, 6]

$$\tau = \tau_y + \eta_B \left( \frac{du}{dy} \right) \quad (2.3)$$

$\tau_y$	[Pa] počáteční napětí
$\eta_B$	[Pa.s] Binghamská viskozita



Obr. č. 4: Dvouparametrický – Binghamův model

### Cassonův model

Cassonův model vychází z Binghamova modelu s tím rozdílem, že je jeho matematický popis mírně upraven. Jednotlivé parametry modelu jsou upraveny odmocninou (2.4). [3, 4, 6]

$$\tau^{1/2} = \tau_c^{1/2} + (\mu_c \cdot \dot{\gamma})^{1/2} \quad (2.4)$$

$\tau_c$  [Pa] počáteční napětí

$\mu_c$  [Pa.s<sup>n</sup>] Cassonův součinitel konzistence

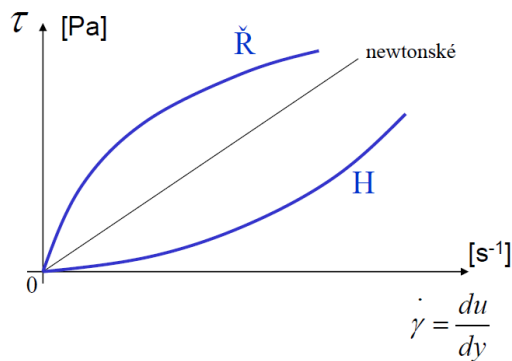
### 2.3.2 Mocninový dvouparametrický

Mocninový dvouparametrický model je řízen dvěma reologickými parametry součinitelem konzistence  $K$  a tokovým indexem  $n$ , který udává, zda daná tekutina bude řádnout, či houstnout. [3, 4, 6]

$$\tau = K \cdot \left( \frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.5)$$

$K$  [Pa.s<sup>n</sup>] součinitel konzistence

$n$  [-] tokový index



Obr. č. 5: Dvouparametrický mocninový

Když je  $n$  menší než jedna a zároveň není menší než 0, dochází k řídnutí a pokud je větší tak naopak k houstnutí. [3, 4, 6]

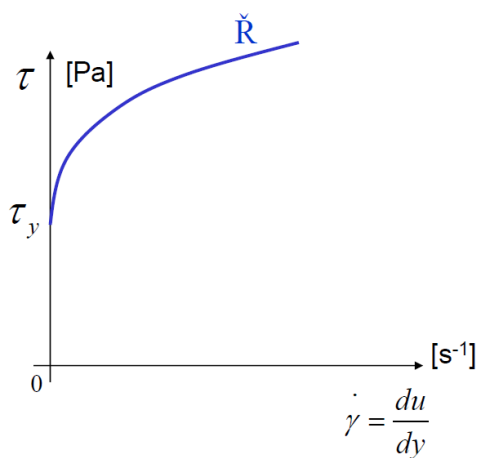
$0 < n < 1$	řídnoucí směs
$n > 1$	houstnoucí směs

### 2.3.3 Mocninový tříparametrický Bulkley – Herschelův (visko-plastické)

Mocninový tříparametrický model se vyznačuje tím, že k počátku pohybu potřebuje dosáhnout počátečního napětí  $\tau_y$ . Teprve po-té se dostává směs do pohybu. Po dosažení počátečního napětí se pak chová dle dvouparametrického reologického modelu. [3, 4, 6]

$$\tau = \tau_y + K \cdot \left(\frac{du}{dy}\right)^n \tag{2.6}$$

$\tau_y$	[Pa] počáteční napětí
$K$	[Pa.s <sup>n</sup> ] součinitel konzistence
$n$	[-] tokový index



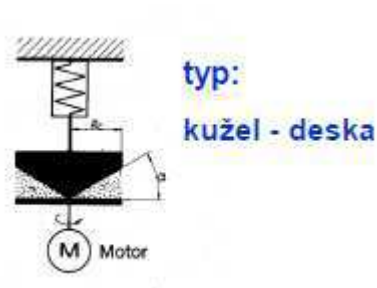
Obr. č. 6: Mocninový tříparametrický – Bulkley – Herschelův

## 2.4 Reometrie

Reometrie je vědní disciplína zabývající se určováním reologických parametrů kapalin a směsí. Podle těchto parametrů je dále umožněno rozdělení jednotlivých neneutonských kapalin do skupin dle jejich chování.

Existují dva základní typy přístrojů, které se k tomu využívají. Jedná se o rotační a trubní (kapilární) viskozimetr. [3, 4, 6]

### 2.4.1 Rotační viskozimetr



Obr. č. 7: Typ: kužel – deska [6]



Obr. č. 8: Typ dva soustředěné válce [6]

Princip měření v rotačním viskozimetru spočívá v měření:

- rychlosti otáčení rotujícího válce, čímž se dojde ke stanovení rychlostního gradientu  $du/dy$
- kroutící moment na hřídeli, který určuje smykové napětí, respektive sílu potřebnou k otáčení

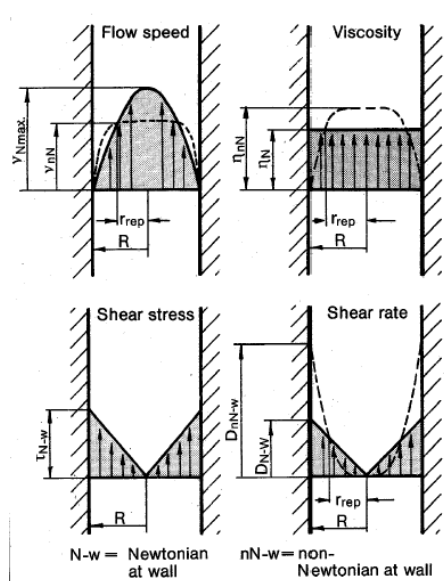
Změřené hodnoty smykového napětí (kroutícího momentu) a rychlostního gradientu (rychlosti otáčení) se následně vynesou do grafu – reogramu. [3, 4, 6, 15]

$$\tau = fn \left( \frac{du}{dy} \right) \quad (2.7)$$

## 2.5 Popis proudění

Na níže uvedeném obrázku (Obr. č. 9) je zobrazen rozdíl proudění v potrubí newtonské a neneutonské kapaliny. Průběh rychlosti v profilu je stejně jako průběh lokální viskozity rozdílný. Naopak tvar rozdělení smykového napětí je stejný. Přičemž platí, že maximální smykové napětí je na stěně (jehož hodnota se liší dle daných podmínek) a nulové v hydrodynamické ose proudu. [3, 4, 6, 15]





Obr. č. 9: Struktura proudu nN a N kapaliny [6]

Tvar rozdělení smykových napětí zůstává konstantní, protože platí stejná rovnováha sil pro newtonské i neneutonské kapaliny.

Pro napětí na stěně platí:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{4 \cdot \tau_0}{D} \quad (2.8)$$

Pro napětí v libovolné pozici  $r$  uvnitř proudu:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2 \cdot \tau}{r} \quad (2.9)$$

Z čehož vyplývá vztah:

$$\tau(r) = \frac{2 \cdot \tau_0}{D} \cdot r \quad (2.10)$$

Principem popisu proudění je získání vztahu mezi střední rychlostí proudu, tlakovým gradientem a reologickými vlastnostmi kapaliny, případně směsi.

Tuto rovnici lze získat při použití:

- obecné rovnice hybnosti
- specifické konstitutivní rovnice pro daný typ kapaliny
- definiční rovnice pro střední rychlost proudu

Rovnice pro jednotlivé typy kapalin jsou uvedeny níže (Obr. č. 10). [3, 4, 6, 15]

Model	Laminar flow in a cylindrical pipe, $V=f(\tau_w)$
Newtonian	$V = \frac{\tau_w D}{8\mu}$
Power law	$V = \frac{D}{2} \left( \frac{n}{3n+1} \right) \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{1/n}$
Bingham plastic	$V = \frac{D\tau_w}{8\eta} \left( 1 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^4 \right)$ $\zeta = \frac{r}{r_w}$
Casson model	$V = \frac{2D\tau_w}{k} \left( 1 - \frac{16}{7}\sqrt{\zeta} + \frac{4\zeta}{3} - \frac{\zeta^4}{21} \right)$
Herschel Bulkley	$V = \frac{D}{2} \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\zeta^2}{a} (1-\zeta)^a + \frac{2\zeta}{b} (1-\zeta)^b + \frac{1}{c} (1-\zeta)^c \right)$ $a = 1 + \frac{1}{n}$ $b = 2 + \frac{1}{n}$ $c = 3 + \frac{1}{n}$

Obr. č. 10: Rovnice proudění pro jednotlivé typy reologických modelů nenewtonských kapalin [6]

## 2.6 Stanovení energetické ztráty třením

Obecně se stanovení energetické ztráty třením rozděluje do třech kroků. Prvním krokem ke stanovení energetické ztráty třením je stanovení reologických parametrů, buď přímým měřením hodnot z rotačního viskozimetru, nebo převedením z pseudo-reogramu na reogram při měření v kapilárním viskozimetru. Druhým krokem je určení režimu proudění za pomoci Reynoldsova čísla  $Re$ . Třetím krokem je pak určení hydraulického gradientu. [3, 4, 6, 15]

### 2.6.1 Určení hydraulického gradientu

Pro určení hydraulického gradientu existují dva možné postupy, které se dále odlišují dle režimu proudění.

- Scale-up
- frikční model

#### Frikční model

##### Laminární proudění

Frikční model pro laminární proudění využívá vztah získaný z integrace rovnice odpovídajícího reologického modelu přes průřezovou plochu potrubí. Výsledný vztah zobrazuje závislost  $V_m$  a hydraulického gradientu  $I_m$ . [3, 4, 6, 15]

$$I_m = \frac{\Delta P}{g \cdot L \cdot \rho_f} = \frac{\lambda_{nN}}{D} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_f} \cdot \frac{v_m^2}{2 \cdot g} \quad (2.11)$$

$$\lambda_{nN} = \frac{64}{Re_{nN}} \quad (2.12)$$

### 3. Proudění tekutiny v potrubí

Jelikož se práce zabývá prouděním určité tekutiny v potrubí, je důležité objasnit, jaké síly při proudění vznikají a jaké základní stavy mohou vzniknout.

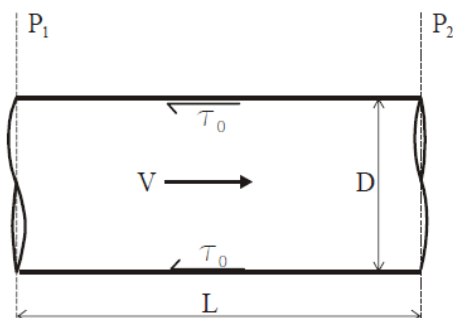
#### 3.1 Rovnice zachování hybnosti

Základní popis pohybu tekutiny v potrubí je určen rovnicí o zachování hybnosti. V případě, že je splněna podmínka dokonalé tekutiny a podmínka ustáleného rovnoměrného proudění, platí níže uvedené rovnice (3.1) a (3.2). [3, 4, 6, 11, 15]

$$-\frac{dP}{dx} \cdot A = \tau_0 \cdot O \quad (3.1)$$

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{4 \cdot \tau_0}{D} \quad (3.2)$$

Rozdíl tlaku působící na určitou délku potrubí o ploše  $A$  je roven třecímu napětí na stěně potrubí o obvodě  $O$  (Obr. č. 11).

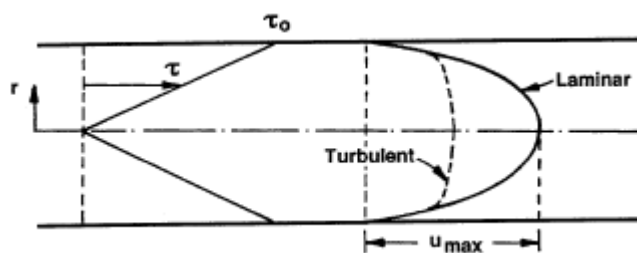


Obr. č. 11: Rovnice zachování hybnosti [11]

#### 3.2 Popis proudění v potrubí

Jak lze vidět na níže uvedeném obrázku (Obr. č. 12) třecí napětí dosahuje maximální hodnoty na vnitřní stěně potrubí a následně lineárně klesá k nule ve středu potrubí. Pro 2D proudění platí níže uvedená rovnice popisující třecí napětí distribuované v kruhovém potrubí. [3, 4, 6, 14, 10]

$$-\frac{dP}{dx} = \tau \frac{2}{r} \quad (3.3)$$



Obr. č. 12: Distribuce třecího napětí [15]

V obou režimech proudění laminárního i turbulentního je pak hodnota bodové rychlosti proudu maximální v jeho středu a parabolicky klesá směrem k okraji potrubí.

Třecí napětí, které působí na stěnu popisuje Newtonův zákon viskozity, který říká, že napětí působící na stěnu potrubí je funkcí rychlostního gradientu. [3, 4, 6, 11, 15]

$$\tau = \mu_f \left( -\frac{dv_x}{dr} \right) \quad (3.4)$$

Na základě výše uvedených rovnic distribuce tečného napětí v kruhovém potrubí a Newtona zákona viskozity lze odvodit rovnici rozložení rychlosti v laminárním režimu proudění (3.5).

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{r}{2 \cdot \mu_f} \quad (3.5)$$

Integrací rovnice rychlostního gradientu o dané ploše  $A$  lze získat vztah mezi hodnotou střední rychlosti proudění v potrubí  $v_f$  a poklesem tlaku.

$$v_f = \frac{D^2}{32 \cdot \mu_f} \cdot \left( \frac{dP}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Pokles tlaku v potrubí při laminárním proudění je pak popsán rovnicí (3.7).

$$\left( \frac{dP}{dx} \right) = \frac{32 \cdot \mu_f \cdot v_f}{D^2} \quad (3.7)$$

Porovnáním modelu poklesu tlaku v potrubí při laminárním proudění a obecné silové bilance je dosažena rovnice pro třecí napětí na stěnu při laminárním proudění (3.8). [3, 4, 6, 14, 10]

$$\tau_0 = \mu_f \cdot \frac{8 \cdot v_f}{D} \quad (3.8)$$

### 3.3 Stanovení režimu proudění

K určení režimu proudění slouží Reynoldsovo číslo  $Re$ , které je dáno poměrem setrvačných a viskózních sil od proudění v potrubí.

$$Re = \frac{v_f \cdot D \cdot \rho_f}{\mu_f} \quad (3.9)$$

Hranice mezi laminárním a turbulentním režimem proudění se obecně předpokládá 2300, ale může se dle jednotlivých případů lišit. [3, 4, 6, 11, 15]

### 3.4 Proudění směsí

Proudění směsí je závislé na vlastnostech pevných částic a nosné kapaliny. Tato kapalina se pak může chovat jako newtonská kapalina (například voda), nebo jako neneutonská kapalina, či směs vody a jemných částic, která se chová jako neneutonská kapalina.

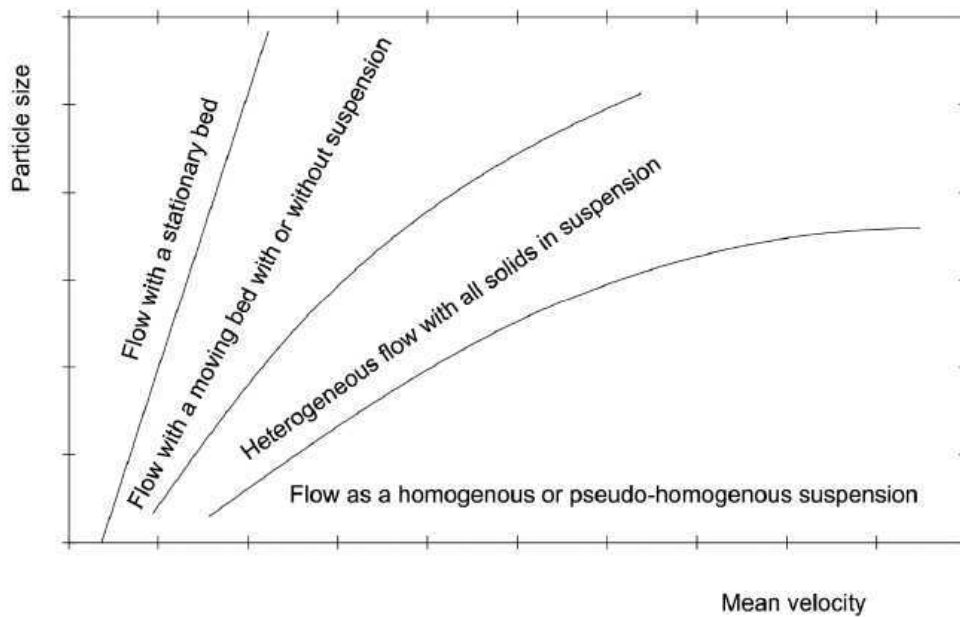
Při proudění směsí s hrubými částicemi obvykle dochází k jeho rozvrstvení, respektive k heterogennímu proudění. Což je způsobeno usazováním hrubozrnných pevných částic vlivem gravitačních sil. Ty jsou pak dále podporovány vzájemným kontaktem.

Naopak proti usazení působí povrchové síly, které ovlivňují zejména malá částice. U větších částic to mohou být hydraulické vztlakové síly vyvolané zvyšováním rychlostního gradientu a otáčením částic. [3, 4, 6, 11, 15]

### 3.5 Homogenní a pseudohomogenní proudění

Směsi s výskytem jemných částic (menší než 40  $\mu\text{m}$ ) při turbulentním proudění mají tendenci se chovat jako homogenní proudění. Částice jsou dopravovány v celém profilu proudění a nedochází k jejich usazení.

Naopak při proudění směsí větších částic (větší než 100  $\mu\text{m}$ ) dochází k mírně odlišnému chování. Při rychlostech střední rychlosti proudu několik metrů za sekundu dochází k transportování částic v průřezu proudu turbulentní difúzí, ale oproti homogennímu proudění se jejich koncentrace s výškou snižuje. [3, 4, 6, 11, 15]



Obr. č. 13: Režim proudění směsí s pevnými částicemi [12]

### 3.6 Heterogenní proudění

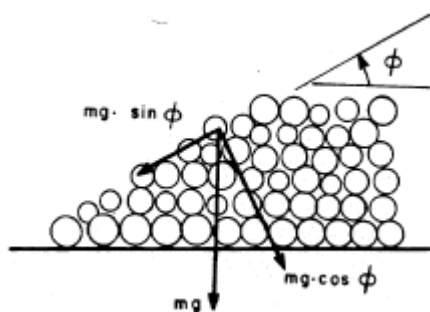
S výskytem větších pevných částic (větších než  $400\ \mu\text{m}$ ) dochází ke změně homogenního proudění, případně pseudohomogenního proudění, na heterogenní. Dále platí, že s poklesem střední rychlosti proudění se zvyšuje nerovnoměrnost koncentrace částic a hydraulický gradient.

Při úplné stratifikaci jsou částice akumulovány v dolní části profilu potrubí, kde jsou v kontaktu samy se sebou a stěnami potrubí. Kontakt se stěnou potrubí může být kontinuální při výskytu nepohybujícího se lože, či jeho sunutí, nebo sporadický vlivem rolujících se a poskakujících částic.

Popis působení částic vzájemným kontaktem sypkých materiálů vychází z Coulombovo práce (1773) a definuje, že normálové napětí se skládá z hydrostatického tlaku způsobený proudící tekutinou a vnitřního tření částic způsobený jejich vzájemným kontaktem.

Napětí způsobené kontaktem zrn má tedy dvě složky:

- normálové napětí
- vnitřní třecí napětí



Obr. č. 14: Napětí způsobené kontaktem zrn [5]

Dle Coulombova zákona lze tyto dvě napětí definovat třecím koeficientem  $\tan \varphi$ .

$$\tan \varphi = \frac{\tau_s}{\sigma_s} = \frac{\tau_s}{\rho_f \cdot g \cdot (S_s - 1) \cdot C_{vb} \cdot H_s} \quad (3.10)$$

Na částice, které se v proudu srážejí a vzájemně na sebe působí, působí stejně napětí, jako v případě předešlém. Koeficient popisující poměr těchto napětí se však nazývá koeficient dynamického tření. [5, 6, 12]

$$\tan \varphi' = \frac{\tau_{sb}}{\sigma_s} \quad (3.11)$$

$\tan \varphi'$	[-] koeficient vnitřního tření
$S_s$	[-] specifická hustota usazeného materiálu
$S_f$	[-] specifická hustota dopravující kapaliny
$H_{sh}$	[m] výška třecí vrstvy
$C_b$	[-] koncentrace usazeného materiálu

### 3.6.1 Proudění s nepohyblivou vrstvou usazeného materiálu

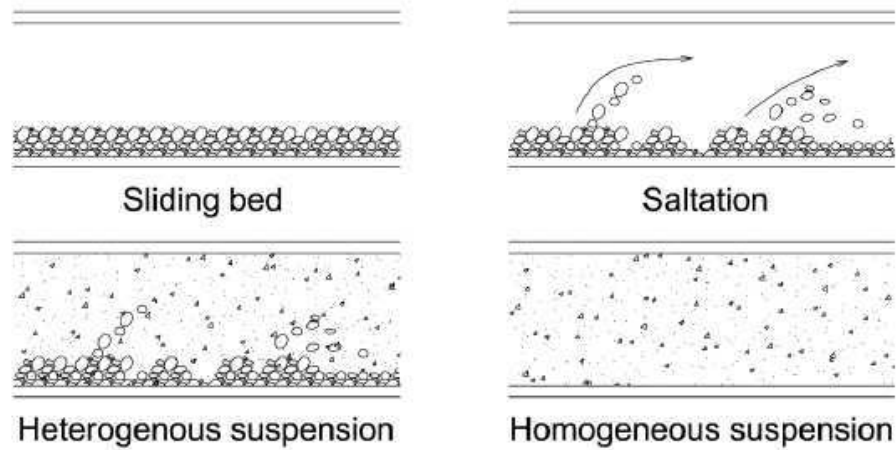
Když je rychlost proudění dostatečně nízká, hrubozrnné částice se usadí a vytvoří sedlinu zrnitého materiálu, nad kterou proudí nosná kapalina. Zvyšováním rychlosti proudění nosné kapaliny dochází na povrchu sedliny k pohybu jednotlivých pevných částic (poskakováním a rolováním). Dalším zvyšováním rychlosti se zvyšuje výška vrstvy poskakujících, rolujících či vzájemně kolidujících částic.

Naopak postupné snižování rychlosti způsobuje rozvrstvení usazených částic na dně potrubí. Nejprve jsou usazeny hrubší částice a teprve poté menší. Což dále může vést k různým problémům s ucpáváním potrubí, snížením průtočnosti apod. Bod udávající hranici zastavení depozitu hrubých částic byl nejprve studován Durandem a jeho spolupracovníky (Gilbert, 1960) Ten pak definoval hodnotu střední rychlosti udávající

horní limit, při kterém se ještě materiál nepohybuje. Tato rychlost byla označena jako  $V_{sm}$ . [5, 6, 12]

### 3.6.1 Proudění se sunoucí se vrstvou usazeného materiálu

Při dalším zvyšování rychlosti proudění dochází k uvolnění sedliny a k jejímu sunutí po dně potrubí. Zároveň však dále dochází k pohybu částic na povrchu sunoucího se lože. Pokračujícím zvyšování rychlosti může nakonec dojít k úplné homogenizaci proudění.



Obr. č. 15: Typ proudění směsí s pevnými částicemi [12]

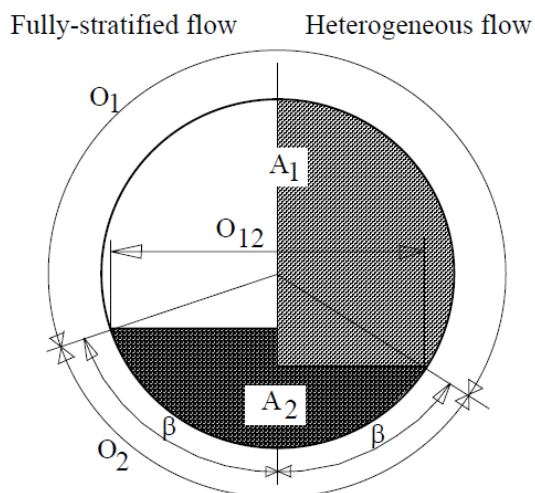


## 4. Modelování stratifikovaného proudění

Modelování stratifikovaného proudění slouží k popisu proudění materiálu usazeného na dně potrubí nebo proudění v kombinaci s prouděním heterogenní suspenze. Pro popis takového proudění existují modely odlišující se počtem vrstev, které jsou definovány například dle koncentrace, nebo poréznosti transportovaného materiálu. [5, 6, 12]

### 4.1 Dvouvrstvý model

Když se v potrubí dopravuje společně s nosnou kapalinou písek nebo štěrk, může za určitých podmínek vznikat stratifikované proudění. Důvodem je tendence pevných částic se usazovat v nosné kapalině, či směsi. Stratifikovaný proud směsi vytváří dvě formy proudu, proud s menším množstvím částic a proud s vyšším množstvím částic. Dle tvaru koncentračního profilu proudu lze rozdělit proud na plně stratifikovaný nebo částečně stratifikovaný (Obr. č. 16). [5, 6, 12]



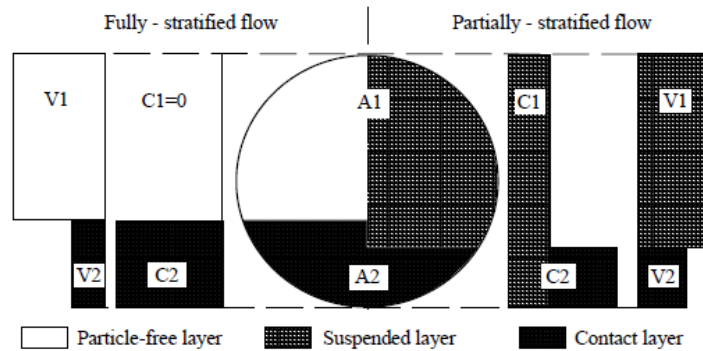
Obr. č. 16: Dvouvrstvý model [5]

Dvouvrstvý model bere v úvahu rozvrstvení průtoku směsi a převádí skutečný model koncentračního profilu do zjednodušeného dvouvrstvého modelu. Pokud je proud směsi plně stratifikovaný, jsou všechny pevné částice upoutány ke dnu, kde se sunou po dně potrubí. Všechny částice v pohybujícím se bloku jsou pak v plném vzájemném kontaktu a jejich objemová koncentrace pevných částic se přibližuje koncentraci sypkého materiálu. Poloha horní hrany vrstvy pevných částic je dána úhlem  $\beta$ .

Při částečné stratifikaci proudu je v horní vrstvě transportována velká část hmotnosti dopravovaných částic. Předpokládá se, že usazené částice, nejsou nijak ovlivněny

částicemi transportovanými proudem v horní vrstvě a jeho hranicích. Rozložení rychlosti a distribuce koncentrace se idealizuje jako rovnoměrné v obou vrstvách (Obr. č. 17).

V případě, že není proudění zcela stratifikované je proudění označováno jako heterogenní. Částice jsou nesené jak v horní vrstvě proudící suspenze, tak v dolní vrstvě sunoucího se materiálu. [11, 5, 6]



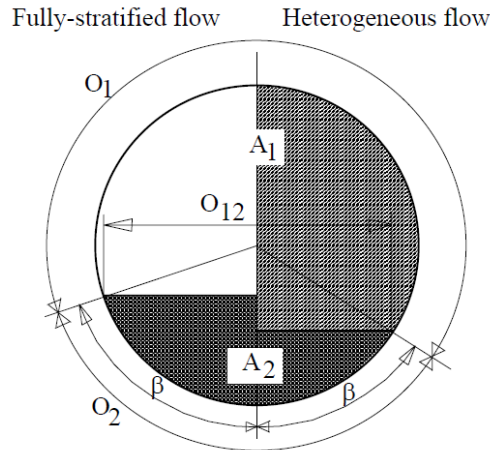
**Obr. č. 17: Schématické znázornění rozložení rychlosti a koncentrace [5]**

Dle Bagnolda (1956) existují dva mechanismy podporující částice při proudění v nosné kapalině, a to mechanismy kapalně suspenze a vnitřního kontaktu hrubozrnných částic. Mechanismus vzájemně se ovlivňujících hrubozrnných částic může být v případě stacionární, nebo pohybující lavice hrubozrnného materiálu spojitý, nebo při občasném pohybu jednotlivých částic nespojitý. Pohybující se částice poskakováním a valením na dně řeky ovlivňující proudění nad nimi jsou v říčním inženýrství definovány jako chod splavenin, naopak proudění nad ním jako pohyb plavenin. Pro proudění v trubce, je pak definován další termín kontaktní proud. Jedná se o proud mezi proudem splavenin a plavenin zahrnující vliv pohybujících se částic nad stagnující, nebo pohybující se vrstvou materiálu. Předpokládá, že částice v dolní vrstvě přenášejí svou ponořenou hmotnost přímo na nosič, zatímco ponořená hmotnost nesuspendovaných částic je přenášena přes mezičásticové kontakty na stěnu potrubí. [11, 5, 6]

Dle modelu je chování proudu řízeno principem silové rovnováhy mezi řídicími a odporovými silami v proudu ve dvou vrstvách. Řídící síla tlakového proudění v horizontální trubce vzniká tlakovým gradientem po dané délce úseku. Odporová síla je zastoupena třecím napětím vznikající důsledkem působení proudu na hranice vrstev a stěny potrubí. Důležitým poznatkem je, že stejná formulace rovnováhy sil mezi řídicí a odporovou složkou sil s kombinací třecího koeficientu vyjadřuje Darcy-Weisbachovu rovnici pro třecí ztráty v potrubí při proudění vody. [5, 6, 12]

#### 4.1.1 Matematická formulace modelu

Matematický model je složen ze dvou základních rovnic, rovnice zachování hmotnosti a hybnosti ve směsi proudu v obou vrstvách dvouvrstvého modelu. Výsledky rovnic zachování hmoty jsou počítány iterací. Proud se v daném úseku předpokládá neměnný a stabilní. [5, 6, 12]



Obr. č. 18: Plně stratifikované a heterogenní proudění [5]

#### Hmotnostní bilance pro proudění ve dvouvrstvém modelu

Použitím zákona zachování hmotnosti ve dvouvrstvém modelu je dána rovnováha

Pro proudění směsi:

$$Q_m = Q_{m1} + Q_{m2} \quad (4.1)$$

$$V_m \cdot A = V_1 \cdot A_1 + V_2 \cdot A_2 \quad (4.2)$$

Pro proudění pevných částic:

$$Q_s = Q_{s1} + Q_{s2} \quad (4.3)$$

$$V_s \cdot A_s = C_{vi} \cdot V_s \cdot A + V_2 \cdot A_2 = V_1 \cdot A_1 \cdot C_1 + V_2 \cdot A_2 \cdot C_2 \quad (4.4)$$

Pro proudění směsi:

$$Q_f = Q_{f1} + Q_{f2} \quad (4.5)$$

$$V_f \cdot A_f = (1 - C_{vi}) \cdot V_f \cdot A = (1 - C_1) \cdot V_1 \cdot A_1 + (1 - C_1) \cdot V_2 \cdot A_2 \quad (4.6)$$

Objemová rovnováha pevných částic je dána:

$$C_{vi} \cdot A = C_1 \cdot A_1 + C_2 \cdot A_2 \quad (4.7)$$

Zavedením  $C_{vd} = Q_s / Q_m$  do rovnice (4.4) pro proudění pevných částic platí rovnice:

$$C_{vd} \cdot A \cdot V_m = V_1 \cdot A_1 \cdot C_1 + V_2 \cdot A_2 \cdot C_2 \quad (4.8)$$

## Zachování hybnosti pro proudění ve dvouvrstvém modelu

Zákon zachování rovnováhy hybnosti je formulován jako rovnováha mezi řídicími a odporovými silami působící na hranicích proudění v každé vrstvě potrubí určité délky v horizontální poloze. [5, 6, 11]

Rovnováha sil pro horní vrstvu je dána:

$$\Delta PA_1 = \tau_1 \cdot O_1 \cdot L + \tau_{12} \cdot O_{12} \cdot L \quad (4.9)$$

Rovnováha pro dolní vrstvu je dána:

$$\Delta PA_2 + \tau_{12} \cdot O_{12} \cdot L = (\tau_{2f} + \tau_{2s}) \cdot O_2 \cdot L \quad (4.10)$$

Součtem obou rovnic je dána rovnováha sil v celém profilu:

$$\Delta PA = \tau_1 \cdot O_1 \cdot L + (\tau_{2f} + \tau_{2s}) \cdot O_2 \cdot L \quad (4.11)$$

Odporová síla proti proudu je dána viskózním a mechanickým třením na hranice proudění.

## Mechanické tření ve dvouvrstvém modelu

### Mechanické tření mezi pevnými částicemi a stěnou potrubí

Pevné částice svým vzájemným kontaktem a kontaktem se stěnou potrubí přenáší svou ponořenou hmotnost do stěny potrubí. Což je zdroj odporové síly působící kontaktním prouděním částic proti proudovým řídicím silám.

Od začátku pohybu stacionárního lože rozhodují dvě síly. Řídicí síla pohybu materiálu a síla rezistentní působící proti pohybu lavice. Řídicí síla má tendenci uvést lavici do pohybu působením tlakového gradientu v ploše průřezu lavice a třecího napětí na jejím povrchu. Naopak rezistentní síla, zamezující pohybu, je složena ze síly mechanického tření mezi stěnou potrubí a částicemi v lůžku.

Normálové napětí mezi hrubozrnnými částicemi a stěnou potrubí je označena jako  $\sigma_s$ . Celková normálová síla  $F_N$  se získá integrací normálového napětí po hranici, kde se lavice dotýká stěny potrubí.

$$F_N = D \cdot \int_0^\beta \sigma_s d\alpha \quad (4.12)$$

Od bodu začátku sunutí lože se celková normálová třecí síla rovná  $F_N \mu_s$ , kde je  $\mu_s$  koeficient mechanického tření mezi zrny a stěnou potrubí.

Konečná odporová síla způsobená pohybujícím se blokem pevných částic je dána:

$$\mu_s \cdot F_N = \tau_{2s} \cdot O_2 \quad (4.13)$$

Závislost hloubky normálového napětí působící na potrubí je dána rovnicí:

$$\frac{d\sigma_s}{dz} = \rho_w \cdot g \cdot (S_s - S_f) \cdot C_{vb} \quad (4.14)$$

$z$	[m] výška lože
$g$	[m.s <sup>-2</sup> ] gravitační zrychlení
$\rho_w$	[kg.m <sup>-3</sup> ] hustota vody
$S_s$	[-] relativní hustota částic
$S_f$	[-] relativní hustota tekutiny
$C_{vb}$	[-] pórovitost

Pokud je vynecháno povrchové třecí napětí a úhel  $\beta$  určuje vertikální polohu suspendovaného materiálu bez přítomnosti kontaktního proudu, rovná se normálové napětí  $\sigma_s$  v libovolném bodě:

$$\sigma_s = \rho_w \cdot g \cdot (S_s - S_f) \cdot C_{vb} \cdot \frac{D}{2} \cdot (\cos \alpha - \cos \beta) \quad (4.15)$$

Normálová síla je pak po integraci rovna:

$$F_N = g \cdot (\rho_s - \rho_f) \cdot C_{vb} \cdot \frac{D^2}{2} \cdot (\sin \beta - \beta \cdot \cos \beta) \quad (4.16)$$

Rozdíl mezi silou  $F_N$  a  $F_W$  je v ponořené hmotnosti sypkého lože. Síla  $F_W$  zohledňuje gravitační efekt sypkého materiálu.

$$F_W = g \cdot (\rho_s - \rho_f) \cdot C_{vb} \cdot \frac{D^2}{4} \cdot (\beta - \sin \beta \cdot \cos \beta) \quad (4.17)$$

$$\frac{D^2}{4} \cdot (\beta - \sin \beta \cdot \cos \beta) = A_2 \quad (4.18)$$

Pro hustou fázi průtoku  $F_N=2 \cdot F_W$ . Silová rovnováha pro bod počátku pohybu průtoku husté fáze proudu je:

$$\frac{\Delta P}{L} \cdot A = \mu_s \cdot 2 \cdot F_W \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta P}{L} \cdot A = \mu_s \cdot 2 \cdot g \cdot (\rho_s - \rho_f) \cdot C_{vb} \cdot A \quad (4.20)$$

Hydraulický gradient pro dosažení počátku pohybu husté fáze proudu je pak:

$$I_{pg} = \frac{1}{\rho_f \cdot g} = 2 \cdot \mu_s \cdot (S_s - 1) \cdot C_{vb} \quad (4.21)$$

Třecí napětí  $\tau_s$  způsobené mechanickým třením mezi zrnitým ložem v kontaktní vrstvě a stěnou potrubí není závislé na rychlosti proudění. Jeho hodnota se určuje z normálového napětí, způsobené působením zrnitého materiálu na stěnu potrubí. [5, 6, 12]

### Třecí napětí kapaliny na hranici proudu

Vnitřní tření mezi proudící nosnou kapalinou a hranicemi proudu je závislé na rychlosti a lze jej popsat mezními třecími napětími  $\tau_I, \tau_{I2}, \tau_{If}$ .

Třecí napětí je dáno rychlostním gradientem proudící tekutiny a podmínkami hranice proudění, respektive třecím koeficientem  $\lambda$ . Ten je určován dle režimu proudění a drsností povrchu. Darcy-Weisbachův třecí koeficient  $\lambda$  je dán Reynoldsovým číslem  $Re$ , nebo drsností  $k$ . [5, 6, 12]

$$Re = \frac{V \cdot D_h \cdot \rho_f}{\mu_f} \quad (4.22)$$

$$D_h = 4 \cdot \frac{A}{O} \quad (4.23)$$

Třecí koeficient stěny potrubí pro proudění v horní vrstvě  $\lambda_I$  je pak dán:

$$\lambda_I = fn \left( \frac{v_1 \cdot D_{h1} \cdot \rho_f}{\mu_f}, k \right) \quad (4.24)$$

Třecí koeficient stěny potrubí pro proudění v dolní vrstvě  $\lambda_2$  je dán:

$$\lambda_2 = fn \left( \frac{v_2 \cdot D_{h2} \cdot \rho_f}{\mu_f}, k \right) \quad (4.25)$$

Koeficient tření pro proudění v horní vrstvě působící na povrch usazeného materiálu  $\lambda_{I2}$  se určuje odlišně, protože je dán podmínkami povrchu. Pokud lze říci, že povrch lůžka je rovný, je drsnost úměrná průměru částic pro turbulentní tok kapaliny přes hranici, která je naprosto hrubá.

Ploché rozhraní mezi vrstvami je většinou splněno v toku s velmi hrubými částicemi. V toku s jemnými částicemi se objevuje přechodová zóna nazývaná **smykovou vrstvou** s koncentračním a rychlostním gradientem. Rozhraní se pak stává spíše virtuální, pro něž není velikost částice parametrem určující mezifázové tření. Dle Wilsonově analýzy je pro mezifázové tření rozhodující tloušťka smykové vrstvy. To souvisí s hydraulickým gradientem v celkovém průtoku. [5, 6, 12]

$$\lambda_{12} = 0.87 \cdot \left( \frac{I_m}{S_S - 1} \right)^{0.78} \quad (4.26)$$

Třecí napětí pro hranice proudění nosné kapaliny je pak dáno:

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1}{8} \cdot \rho_f \cdot v_1^2 \quad (4.27)$$

$$\tau_2 = \frac{\lambda_2}{8} \cdot \rho_f \cdot v_2^2 \quad (4.28)$$

$$\tau_{12} = \frac{\lambda_{12}}{8} \cdot \rho_f \cdot (v_1 - v_2)^2 \quad (4.29)$$

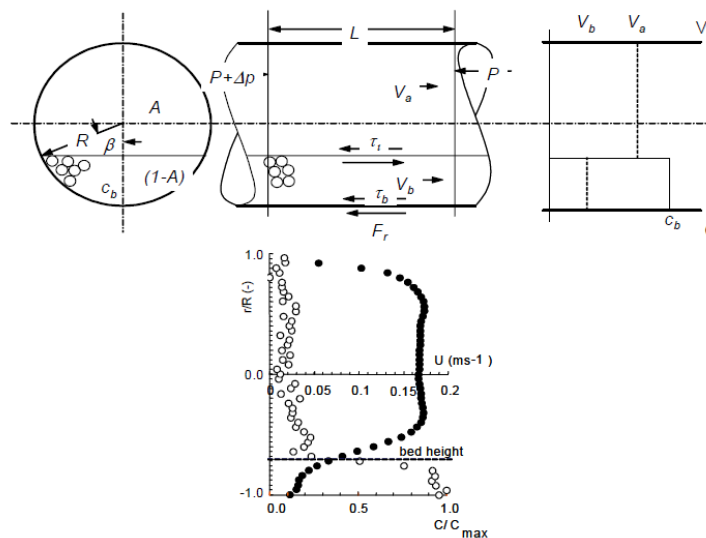
## 4.1 Modely s newtonskou nosnou kapalinou

Počet modelů pro popis chování stratifikovaného proudění pro newtonské kapaliny je oproti modelům pro newtonské kapaliny o mnoho menší. Je to způsobeno zejména složitostí určení reologických parametrů newtonských kapalin a zároveň málo podrobný výzkum jejího chování s hrubozrnným materiálem.

Jednotlivé modely s newtonskou nosnou kapalinou se obecně liší dle modelování koncentrace pevných částic v každé vrstvě a jakým způsobem je popsáno napětí působící na povrchu vrstvy pevných částic a stěny potrubí.

### 4.1.1 Model Pullum a kol. 2004

Základem modelu dle Pulluma a kol. je model popsáný Wilsonem, který vychází z předpokladu, že jsou všechny pevné částice upoutány v usazené vrstvě, která může být stacionární, nebo se sunout po dně. Model tedy předpokládá, že všechny hrubé částice nejsou dopravovány nosnou tekutinou, ale jsou upoutány ke dnu potrubí.



Obr. č. 19: Obecný dvouvrstvý model [9]

Jednotlivé důležité charakteristiky lze vidět na Obr. č. 19. Parametr  $\beta$  určuje polohu horní hrany vrstvy zrnitého materiálu v potrubí o průměru  $D$  a  $\alpha$  vertikální polohu libovolného bodu.

Hlavním problémem řešení dvouvrstvého modelu je bilance řídicí síly zrnitého materiálu s jeho odporovou silou (viz. kapitola 4.1).

$$\Delta p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - A) + \tau_i \cdot D \cdot \sin(\beta) = \mu_s \cdot N + \tau_b \cdot D \cdot \beta \quad (4.30)$$

$$\Delta p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot A = \tau_w \cdot D \cdot (\pi - \beta) + \tau_i \cdot D \cdot \sin(\beta) \quad (4.31)$$

Výše uvedené rovnice lze použít jak pro dvouvrstvý model s newtonskou nosnou kapalinou, tak pro dvouvrstvý model s neneutonskou nosnou kapalinou. Rozdíl ve vyhodnocování modelů je v určení třecího napětí, koncentrace vrstvy hrubých částic a třecích podmínek.

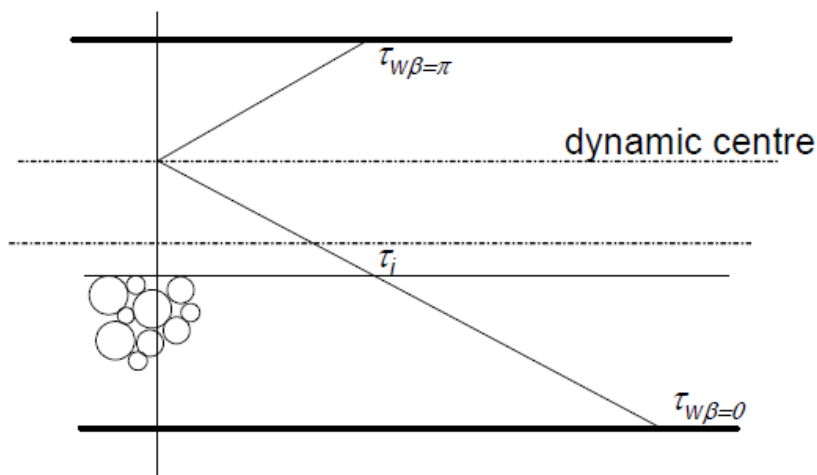
Hodnocení třecího napětí však vyžaduje neneutonskou formulaci odpovídající třecím faktorům. Ty lze použít dle odpovídajícího modelu dané tekutiny (reologické modely), které jsou řešeny analyticky pro laminární proudění, zatímco pro turbulentní proudění jsou řešeny použitím metody Wilson, Thomas nebo Slatterovým modelem.

Běžným předpokladem pro vyhodnocení proudu nad vrstvou pevných částic je, že proud v horní vrstvě proudí v kruhovém průřezu o stejném ekvivalentním průměru  $D_e$ .

$$D_e = \frac{4 \cdot A}{D \cdot (\pi - \beta - \sin\beta)} \quad (4.32)$$

Tento přístup však ignoruje rozdíl mezi drsností stěny a povrchu vrstvy usazených hrubozrnných částic. Přesto se tento přístup zdá vhodný pro proudění nad stacionárním ložem. Drsnost je pak určena dle Sparrowa a Haji-shieka výpočtem rychlosti proudící newtonské kapaliny při laminárním proudění v potrubí, z níž je pak inverzně určena změna třecího faktoru jako funkce  $D_e$ . Výhodou tohoto přístupu je, že pro laminární proudění není výpočet závislý na rozdělení průtočné plochy horní vrstvy dle příslušných nestejných rozhraní (stěna potrubí a povrch lože)





Obr. č. 20: Rozdělení napětí dle plochy symetrie [9]

Pro newtonské proudící kapaliny v kruhovém potrubí bez výskytu vrstvy pevných částic platí, že maximální napětí se vyskytuje na vnitřní stěně potrubí a pak lineárně klesá na nulu ve středu potrubí. U neneutonské kapaliny s počátečním napětím musí napětí působící na stěnu potrubí, či na hranici vrstvy pevných částic k počátku pohybu překonat hodnotu počátečního napětí. Nahrazením povrchového třecího napětí za hodnotu počátečního napětí do rovnice modelu lze určit třecí napětí zajišťující počátek pohybu dolní vrstvy modelu (4.33).

$$\tau_y \geq \frac{2 \cdot c_b \cdot \mu_s \cdot \rho_f \cdot (\rho_s - 1) \cdot g \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right) \cdot (1 - A)}{D \cdot \left[[(\pi - \beta) + \sin\beta] \cdot \left(\frac{1 - A}{A}\right) + \sin\beta - \beta\right]} \quad (4.33)$$

Uvedená rovnice je platná za předpokladu, že distribuce napětí je v rámci povrchu vrstvy pevných částic jednotná. Aktuální distribuce napětí může být určena extrakcí celkovým napětím z newtonského rychlostního profilu dle Sparrowa a Haji-Shieka:

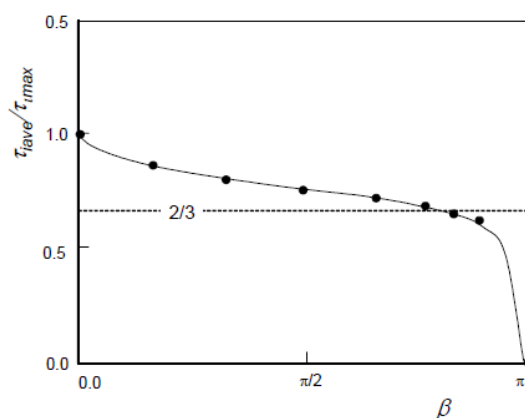
$$\tau(x, y) = \mu \dot{\gamma}(x, y) \quad (4.34)$$

Kde lokální napětí je vyhodnoceno z druhé invariance tensoru napětí, který je pro proudění:

$$\dot{\gamma}(x, y) = \left( (\partial U(y, x) / \partial x)^2 + (\partial U(y, x) / \partial y)^2 \right)^{1/2} \quad (4.35)$$

Distribuce i výpočet napětí je nezávislý na reologických parametrech tekutiny, režimu proudění, ale přesto je rovnice platná pro neneutonské proudění.

Pullum porovnáním změny normalizované průměrného mezivrstvého napětí s polohou vrstvy zrnitého materiálu zjistil, že je nezbytné kritické napětí  $\tau_{yc}$  navýšit koeficientem  $3/2$ .

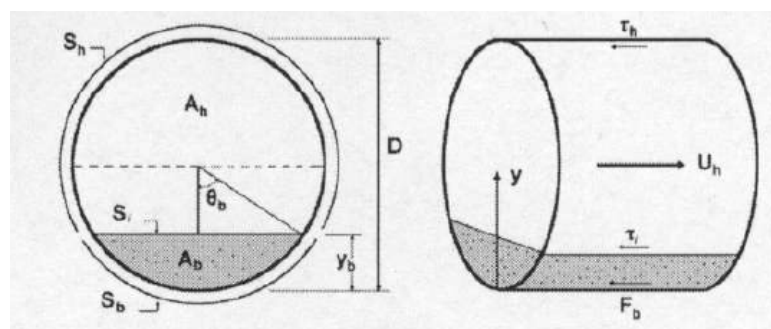


Obr. č. 21: Změna normalizovaného průměrného mezifázového napětí s polohou vrstvy [9]

Model také předpokládá, že u třecí síly  $\mu N$  mezi ponořenými částicemi a stěnou potrubí je koeficient tření konstantní, tedy nezávislý na rychlosti sunoucí se vrstvy zrnitého materiálu, jeho organizaci a lokálním aplikovaným napětím. Dle Pulluma je však koeficient funkcí koncentrace částic a tření, to je ale potřeba teprve potvrdit výzkumem. [10]

#### 4.1.2 Model Rojas a Saez 2012

Model Rojas a Saez (2012) vychází z dvouvrstvého modelu pro newtonské kapaliny, který je dále upraven pro neneutronské kapaliny Cassonova typu (2.4).



Obr. č. 22: Model dle Rojas a Saez [10]

Režim proudění je určen dle Reynoldsova čísla  $Re_t$  stanovený rovnicí:

$$Re_t = 1050 \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{Ca}{370} \right)^{0,4} \right] \quad (4.36)$$

Kde je  $Ca$  Cassonovo číslo určeno:

$$Ca = \frac{D_h^2 \cdot \rho_h \cdot \tau_c}{\mu_c^2} \quad (4.37)$$

Přechodová rychlost je pak dána:

$$Re_t = \frac{D_h \cdot U_t \cdot \rho_h}{\mu_c} \quad (4.38)$$

$D_h$  [m] hydraulický průměr horní vrstvy

### Turbulentní proudění

Dle teorie Wilsona a Thomase při proudění neneutonské kapaliny Cassonova modelu pro povrchovou rychlost  $U$  platí níže uvedená rovnice

$$U = U_n + 2,5 \cdot u^* \cdot \ln \left( \frac{1 - \xi}{1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\xi} + \frac{1}{3} \cdot \xi} \right) + u^* \cdot \left[ \xi \cdot (2,5 + 1,25 \cdot \xi) + 11,6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\xi} + \frac{1}{3} \cdot \xi \right) \right] \quad (4.39)$$

$U_n$  [m.s<sup>-1</sup>] rychlost ekvivalentní newtonské kapaliny

$\xi$  [-] poměr  $\tau_c$  a  $\tau_w$

$u^*$  [m.s<sup>-1</sup>] třecí rychlost

Při výskytu nadkritického proudění se předpokládá, že třecí napětí horní vrstvy jsou v rovnováze ( $\tau_w = \tau_h = \tau_i$ ). Z toho pak lze odvodit rovnici (4.40).

$$A_h \cdot \frac{dP}{dx} = -\tau_w \cdot (S_h + S_i) \quad (4.40)$$

$S_i$  [m] délka hranice mezi dvěma vrstvami

$S_h$  [m] délka stěny potrubí v horní vrstvě

Efektivní viskozita Cassonova modelu je dána:

$$\mu = \frac{\mu_c}{(1 - \sqrt{\xi})^2} \quad (4.41)$$

Pro turbulentní proudění newtonské kapaliny je její rychlost  $U_n$  stanovena použitím předpokladu  $\tau_w = \tau_i$  v rovnici (4.42). K určení součinitele tření  $f_i$  je využita rovnice (4.43). To pak vede k určení rychlosti  $U_n$  přes Reynoldsovo číslo (4.38). Výsledná rychlost  $U = U_h$  je pak dána rovnicí (4.39).

$$\tau_i = \frac{1}{2} \cdot \rho_h U_h^2 \cdot f_i \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot f_i}} = -0,86 \cdot \ln \left( \frac{d_{ph}}{3,7 \cdot D_h} + \frac{2,51}{Re_h \cdot \sqrt{2 \cdot f_i}} \right) \quad (4.43)$$

$d_{ph}$  [m] průměr zrna

Pro výpočet rychlosti směsi je pak použita rovnice vycházející z rovnice zachování hmoty.

$$U_s = \frac{U_h \cdot A_b}{A} \quad (4.44)$$

$U_s$  [m.s<sup>-1</sup>] střední rychlost směsi

$U_h$  [m.s<sup>-1</sup>] rychlost proudu v horní vrstvě

### Laminární proudění

V případě, že není překonáno počáteční napětí nenewtonské kapaliny  $\tau_c$  nelze použít rovnici, kde je zohledněna rychlost sedimentace  $w$ , která zahrnuje vliv koncentrace částic a jejich tvar (4.45).

$$C_h = \frac{C_b \cdot D^2}{2 \cdot A_h} \int_{\theta_b}^{\pi/2} \exp \left( -\frac{w \cdot d}{2 \cdot \varepsilon} \cdot [\sin \gamma - \sin(\theta_b)] \right) \cdot \cos^2 \gamma \, d\gamma \quad (4.45)$$

V tomto případě se pak koncentrace pevných látek uvažuje jako uniformní. Dále za těchto podmínek platí, že  $C_h = C_s$ , tedy že koncentrace v horní vrstvě se rovná koncentraci směsi. Plocha horní vrstvy se zjednodušeně uvažuje jako kruhová skládající se z částí jádra a třecího kruhového prstence mezivrstvy. Hydraulický průměr  $D_p$  popisující střed proudění nad vrstvou pevných částic je pak vyjádřen jako funkce průměru horní vrstvy, počátečního napětí proudící nenewtonské kapaliny a třecího napětí rozdělené v kruhovém potrubí.

$$D_p = \frac{D_h \cdot \tau_c}{\tau_w} \quad (4.46)$$

$D_p$  [m] průměr popisující střed proudění  
nenewtonskou kapalinou nad vrstvou  
usazených pevných částic

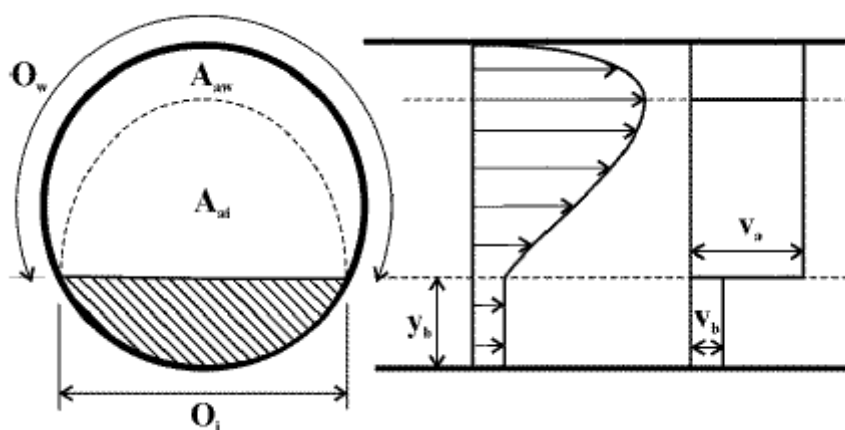
Analytické řešení pro rychlostní pole v potrubí kruhovitěho průřezu pro Cassonův model nenewtonské kapaliny vede k níže uvedené rovnici (4.47).

$$\frac{8 \cdot U_h}{D_h} = \left( \frac{\tau_w}{\mu_c} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{16}{7} \cdot \sqrt{\xi} + \frac{4}{3} \cdot \xi - \frac{1}{21} \cdot \xi^4 \right] \quad (4.47)$$

Kombinací rovnice (4.47) a (4.44) vznikne vztah mezi geometrií horní vrstvy a třecím napětím  $\tau_w$  pro určení celkové střední rychlosti.

S kombinací další rovnice (4.40) a (4.46) je umožněn výpočet geometrie horní vrstvy a tlakového gradientu jako funkce rychlosti posuvu lože. [10]

#### 4.1.3 Model Matoušek a kol. 2015



Obr. č. 23: Schématické zobrazení usazeného materiálu – sunuté lože [7]

#### Třecí napětí horní vrstvy

Třecí napětí v horní vrstvě matematického dvouvrstvého modelu se skládá z třecího napětí nosné kapaliny  $\tau_{fi}$  a třecího napětí hrubozrnných částic  $\tau_{si}$ .

$$\tau_i = \tau_{fi} + \tau_{si} \quad (4.48)$$

#### Napětí od nosoucí kapaliny

Při laminárním proudění a nulové rychlosti pohybu usazeného zrnitého materiálu se povrchové třecí napětí  $\tau_{fi}$  může považovat rovné třecímu napětí na stěnu potrubí pro horní vrstvu modelu  $\tau_a$ . Pokud se ovšem lože pohybuje a výška smykové vrstvy narůstá je vhodné uvážit, zda pořád platí  $\tau_a = \tau_{fi}$ . Předpokládá se totiž, že každé napětí je spojené s jiným hydraulickým poloměrem (Obr. č. 23).

$$R_{hai} = \frac{A_{ai}}{O_i} \quad (4.49)$$

$$R_{haw} = \frac{A_{aw}}{O_a} \quad (4.50)$$

Kde  $A_{aw}$  je část plochy horní vrstvy ovlivněná stěnou potrubí a  $A_{ai}$  naopak ovlivněná povrchem sunoucího se lože.

Třecí napětí působící v horní vrstvě způsobené nosnou kapalinou je pak dáno:

$$\tau_{fi} = f(v_i, R_{hai}, \tau_y, k, n) \quad (4.51)$$

$$\tau_a = f(v_a, R_{haw}, \tau_y, k, n) \quad (4.52)$$

Kde je  $V_i = V_a - V_b$ ,  $V_a$  zastupuje průměrnou rychlost proudění v horní vrstvě a  $V_b$  rychlost sunoucího se lože v dolní vrstvě. To je řešeno pro laminární proudění nenewtonské kapaliny H-B typu použitím rovnice o zachování hybnosti dle Chiltona a Stainsbyho (1998).

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{4 \cdot K}{D} \cdot \left(\frac{8 \cdot v_m}{D}\right)^n \cdot \left(\frac{3 \cdot n + 1}{4 \cdot n}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - X} \cdot \left(\frac{1}{1 - aX - b \cdot X^2 - cX^3}\right)^n \quad (4.53)$$

$$X = \frac{4 \cdot L \cdot \tau_y}{D \cdot \Delta p} \quad (4.54)$$

$$a = \frac{1}{2 \cdot n + 1} \quad (4.55)$$

$$b = \frac{1}{(n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} \quad (4.56)$$

$$c = \frac{2 \cdot n^2}{(n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} \quad (4.57)$$

Další možností definování třecího napětí je použití explicitního řešení dle Swamee a Aggarwala (2011). Ten však platí za předpokladu kruhového průřezu.

$$Re = \frac{8 \cdot D^n \cdot v_m^{2-n} \cdot \rho}{K} \cdot \left(\frac{0,5 \cdot n}{1 + 3n}\right)^n \quad (4.58)$$

$$He = \frac{D^2 \cdot \rho}{K} \cdot \left(\frac{\tau_y}{K}\right)^{n/(2-n)} \quad (4.59)$$

$$f = \frac{64}{Re} + \frac{64}{Re} \left\{ \frac{He}{\left[36 + \left(\frac{1,5}{n}\right)^{2,46}\right]^{0,5} \cdot Re} \right\}^{\frac{0,598 \cdot n}{2-n}} \quad (4.60)$$

f

[-] Darcy – Weisbachův součinitel ztráty tření

Hodnota třecího napětí působící nosnou kapalinou na stěnu potrubí je funkcí reologických parametrů a hydraulického poloměru. Na základě toho vyvstává otázka, jak moc tyto parametry ovlivňují výslednou hodnotu třecího napětí, a tedy i dvouvrstvý model.

Analýza citlivosti reologických parametrů může být pro vyhodnocení dvouvrstvého modelu velice významná. Zvláště pak v případě, že se potvrdí předpoklad změny reologických parametrů během měření. Předpokládá se totiž, že se vlivem působení částic a změny teploty, tyto parametry mění.

Proto se diplomová práce mimo jiné zabývá analýzou změny reologických parametrů před a po experimentálním měření a jejich vlivem na výsledky dvouvrstvého modelu.

Dalším problémem výpočtu třecího napětí je předpoklad kruhovitěho průřezu. Při výskytu vrstvy pevných částic totiž plocha průřezu horní vrstvy kruhový tvar nemá. Aby bylo zjištěno, jak moc toto zjednodušení ovlivňuje výsledek dvouvrstvého modelu, je součástí práce porovnání výsledků dvouvrstvého modelu s modelem, který toto neuvažuje.

#### Napětí od hrubozrnných částic

Pokud by všechny částice lavice byly pouze v kontaktu se stěnou potrubí, rovnalo by se normálové napětí na jejím povrchu nule. Ve skutečnosti tomu tak ale není a na povrchu vrstvy usazených pevných částic dochází k jejich pohybu poskakováním, valením a vzájemnému kontaktem. Hmotnost ponořených částic v kontaktním proudu je pak určena povrchovým třecím napětím působícím na povrchu lavice.

Napětí, které vzniká působením těchto sil se rovná:

$$\tau_{si} = \frac{1}{2} \cdot (\rho_s - \rho_f) \cdot g \cdot H_{sh} \cdot c_b \cdot \tan \varphi \quad (4.61)$$

Napětí způsobené působením sunoucího se materiálu v horní vrstvě modelu lze stanovit iterací s použitím rovnice zachování hybnosti a rovnice zachování hmotnosti. Výsledkem je pak rychlost sunoucího lože  $v_b$ , třecí napětí na stěnu potrubí  $\tau_a$  a následně i celkové napětí způsobené působením pevných částic vrstvy  $\tau_i$ . [7]

#### **Třecí napětí dolní vrstvy**

Napětí působící v dolní vrstvě modelu vyvolané třením mezi ložem a stěnou potrubí se rovná součtu napětí vyvolané nosnou kapalinou, respektive vnitřním třením kapaliny  $\tau_{fb}$  a napětím způsobené mechanickým třením pevných částic  $\tau_{sb}$ .

$$\tau_b = \tau_{fb} + \tau_{sb} \quad (4.62)$$

### Napětí od nosoucí kapaliny

Třecí napětí od nosné kapaliny je způsobené třením mezi stěnou potrubí a spodní hranou lože pevných částic. Způsoby jeho vyjádření jsou celkem dva.

První způsob je stanovení třecího napětí nosné kapaliny  $\tau_{sb}$  za pomoci hydraulického poloměru  $R_{hbw}$ .

$$R_{hbw} = \frac{A_b}{O_b} \quad (4.63)$$

Kde  $A_b$  je plocha profilu potrubí, který je obsazen usazenými pevnými částicemi a  $O_b$  je délka stěny, která je v kontaktu se sunoucím se ložem.

Další postup je obdobný jako v předchozím případě, aplikuje se rovnice hybnosti pro laminární proudění.

$$\tau_{fb} = f(v_b, R_{hbw}, \tau_y, k, n) \quad (4.64)$$

Druhou možnost stanovení třecího napětí od nosné kapaliny lze použít za předpokladu, že na tření se podílí pouze slabá vrstva kapaliny mezi stěnou potrubí a sunoucím se ložem. Pro laminární proudění newtonské kapaliny B-H typu lze pak aplikovat konstitutivní rovnici za pomoci poměru  $V_b/d$ .

$$\tau_{fb} = \tau_y + k \cdot \left(\frac{v_b}{d}\right)^n \quad (4.65)$$

### Napětí od hrubozrnných částic

Napětí vznikající působením hrubozrnného materiálu na stěnu potrubí je řešeno za pomoci koeficientu mechanického tření  $\mu_s$  použitého v níže uvedené rovnici.

$$\tau_{sb} = \mu_s \cdot \frac{F}{O_b} \quad (4.66)$$

Kde  $F=F_w$  tedy síla ponořeného usazeného materiálu působící na stěnu potrubí, nebo  $F=F_n$  hydrostatická síla působící lavice na stěnu potrubí (viz kapitola 4.1.1).

Řešením sil působících uvnitř lože pevných částic se dosáhne hodnoty koeficientu mechanického tření  $\mu_s$ .

Dle Matouška a kol. (2015) lepší výsledky vykazuje rovnice, ve které je za  $F$  dosazena síla ponořeného materiálu působící na stěnu potrubí  $F_w$ . [7]



## Výpočet modelu

Za výše uvedených předpokladů a experimentálních dat, lze použít dva různé přístupy modelu. Základní model je model předpovídající tlakovou ztrátu a koncentraci. Druhý pak inverzní, který na základě naměřených experimentálních dat dopočítává důležité hodnoty jako je koeficient mechanického tření  $\mu$  a rychlost pohybu dolní vrstvy  $V_b$ .

### Predikční forma modelu

Predikční forma modelu předpovídá průběh tlakového gradientu  $I_m$ , dopravní koncentrace  $C_{vd}$  a rychlost dolní vrstvy  $V_b$ .

Vstupy modelu jsou zejména reologické parametry  $\tau_y$ ,  $k$ ,  $n$ , základní charakteristiky kapaliny a pevných částic  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $d$ ,  $c_b$ ,  $\tan\phi'$ . Dále je do modelu nutné zadat hodnoty z vizuálního pozorování, to znamená průběh výšky třecí vrstvy  $H_{sh}$  a vrstvy usazených pevných částic  $y_b$ .

### Inverzní forma modelu

Tento inverzní dvouvrstvý model pro neneutonské kapaliny je založen na rovnicích vyplývajících ze silové a hmotnostní rovnováhy a mezních třecích rovnic. Ty lze řešit za pomoci měřených vstupů ( $\tau_y$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $V_m$ ,  $i_m$ ,  $C_{vd}$ ) a vizuálně vyhodnocených vstupů ( $y_b/D$ ,  $H_{sh}/D$ ) a další předpokládaných hodnot koeficientů ( $c_b$  a  $\tan\phi'$ ). Dle vizuálního pozorování organizace pevných částic se koncentrace pevných částic bude blížit koncentraci částic kulovitého tvaru ( $c_b=0,54$  a  $\tan\phi'=0,32$ ).

Pomocí těchto předpokladů a vypsání vstupních hodnot lze stanovit analyzované hodnoty. Mezi hodnoty řešení patří rychlost vrstvy pevných částic  $V_b$  a koeficient mechanického tření  $\mu_s$ . Přičemž  $V_b$  je výsledek použité rovnováhy v horní vrstvě modelu a  $\mu_s$  ve vrstvě dolní. Právě koeficient mechanického tření pak lze použít jako vstupní hodnotu predikčního modelu. [7]

#### 4.1.4 Model dle Krupičky 2014

Nejvýraznějším a nejdůležitějším rozdílem modelu dle Krupičky a dvouvrstvým modelem, kterým se diplomová práce zabývá, je v použitých předpokladů a zjednodušení. Model dle Krupičky (2014) na rozdíl od vybraného dvouvrstvého modelu pro výpočet třecího napětí nevyužívá rovnici, která je platná za předpokladu kruhového průřezu. Ale počítá výstupní hodnoty numerickým způsobem za pomoci výpočetní bodové sítě vytvořené ve vzniklém prostoru nad vrstvou pevných částic. Nepočítá tedy s jednou

střední rychlostí, ale s bodovými rychlostmi rozmístěnými dle vzniklého tvaru proudění. Dalším rozdílem je to, že tento model neuvažuje žádnou třetí vrstvu jako model dle Matouška a kol. (2015).

To nabízí výbornou příležitost pro porovnání klasického dvouvrstvého modelu, který počítá s předpokladem kruhovitěho průřezu a průměrné rychlosti  $V_a$  s numerickým modelem, který s tímto zjednodušením nepočítá. Zároveň se ukáže, zda vnesení třetí vrstvy do dvouvrstvého modelu napomůže k lepším výsledkům.

### **Výpočet modelu**

Model obsahuje dvě výpočetní varianty. V první variantě jsou vstupujícími hodnotami střední průměrná rychlost  $V_m$ , výška vrstvy usazeného materiálu  $y_b$  a jeho rychlost  $V_b$ . Výstupem je tlakový gradient  $I_m$ . Druhá varianta je obdobná, akorát je vstupem tlakový gradient  $I_m$  a výstupem střední průměrná rychlost  $V_m$ .

## 5. Experimentální data a měření

Součástí podkladů pro vyhodnocení dvouvrstvého modelu, jsou experimentální data naměřená dříve při jiných pracích, ale i data z vlastních měření. Doplnění již naměřených experimentálních dat o svá vlastní měření, bylo provedeno z důvodu přesného popisu dějů, ke kterým při proudění směsi dochází a doplnění dalších dat měřených při proudění kapalin jiných reologických parametrů.

### 5.1 Experimentální trubní okruh

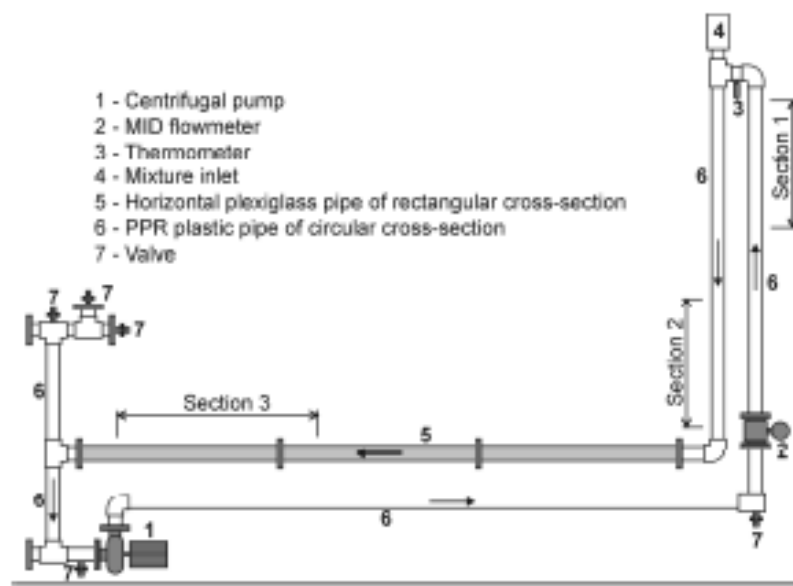
Všechna experimentální data pochází z měření provedených ve Vodohospodářské laboratoři Českého vysokého učení technického v Praze na trubním zařízení.

Zařízení na měření použitých experimentálních dat se skládá z horizontální a vertikální části trubního vedení. Horizontální část je 6,2 m dlouhá složená z 3,0x2,0 m a 1,0x0,2 m dlouhého potrubí z plexiskla. Použitý materiál potrubí umožňuje pozorovat rozvrstvení proudění, což je důležité při stanovení důležitých bodů průběhu celého procesu (počátek pohybu usazeného materiálu, stanovení výšky usazeného materiálu apod.) Celková délka okruhu je 22,96 m a objem 45,08 l. S přičtením objemu příslušenství zařízení jako je například plnicí nádrž dosahuje objem až 68,2 l.

Pro měření diferenciálního tlaku je umístěn v horizontální části trubní linky manometr Siemens sitrans P DSIII na potrubí z plexiskla (DN 50,0 mm) a ve vertikální části manometry Fisischer Rosemount DP1151 na potrubí z PE (DN 51,4 mm).

Měření průtoku zajišťuje elektromagnetický průtokoměr Krohne Optiflux 500 osazený nad výstupním otvorem odstředivého čerpadla. Průtok čerpadla EBARA 3M 40-200/7,5kW lze regulovat frekvenčním měničem TECO GD100-011G-4 11 kW. Charakteristické parametry čerpadla jsou výkon 7,5 kW, průměr oběžného kola 200 mm, maximální průtok  $11,67 \text{ l}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pro měření teploty kapaliny proudící v trubní lince slouží teploměr umístěný ve vertikální části potrubí.

Reologické parametry neneutonských kapalin jsou měřeny v rotačním viskozimetru HAAKE Viscotester VT550. [7]



Obr. č. 24: Schéma experimentálního okruhu DN50 [7]

## 5.2 Použitý materiál

Jelikož je cílem práce popis dvouvrstvého proudění obsahující hrubozrnnou směs s nosnou kapalinou specifických vlastností, která se chová jako neneutonská kapalina, bylo potřeba použít pro měření dvě složky směsi, hrubozrnný materiál a kapalinu nechovající se dle klasického Newtonského zákona viskozity. [7]

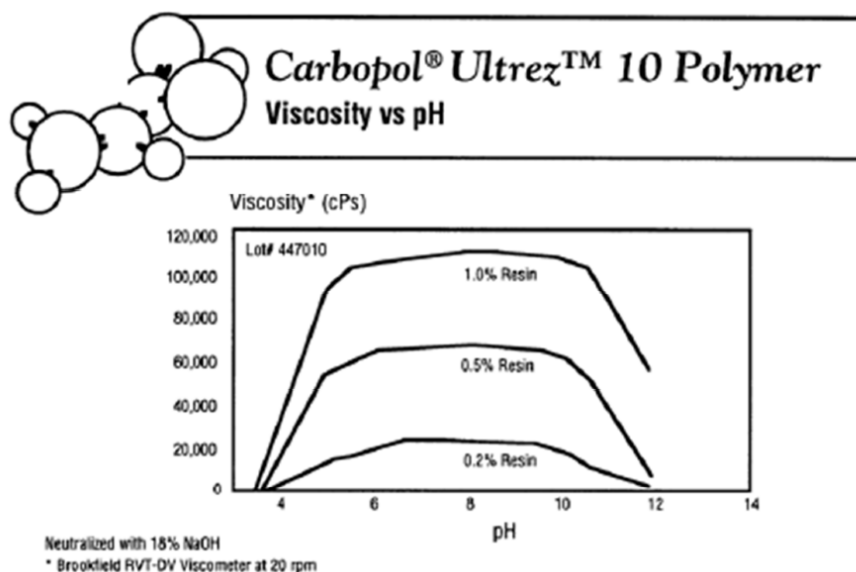
### 5.2.1 Hrubozrnné částice

Hrubozrnný materiál je zastoupen skleněnými korálky TK1.5 jako náhražka materiálu vyskytující se v těžebním průmyslu. Skleněné kuličky lze považovat za monodispergované s  $d_{50}=1,55$  mm. Testy ukázaly, že se velikost zrna pohybuje v rozmezí 1,66 až 1,50 mm. Jejich hustota je dle měření  $\rho_s = 2488$  kg.m<sup>-3</sup> a jejich koncentrace ve volné sunuté vrstvě  $c_{b,lp}=0,61$ . [7]

### 5.2.2 Nosná kapalina

Nosnou kapalinu zastupuje směs vody a Carbopolu Ultrez 10 Polymer (CBP). CBP je polymer kyseliny polyakrylové v podobě prášku s velikostí jedné částice 2 – 7 mikrometrů, který se při styku s vodou hydratuje a rozptýlí. Při přípravě se po smíchání prášku s vodou směs upravuje neutralizací na pH v rozpětí 5 – 10, čímž se dosahuje nárůstu viskozity kapaliny. Závislost viskozity na hodnotě pH pro zvolený Carbopol

Ultrez 10 Polymer je vidět na Obr. č. 25. Jako neutralizační činidlo byl zvolen hydroxid sodný (NaOH). [7]



Obr. č. 25: Carbopol Ultrez 10 Polymer – Viskozita vs. pH [7]

Po úpravě se CBP chová jako visko-plastická tekutina odpovídající tříparametrickému modelu Herschel-Bulkley typu. Její hustota je  $\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  a reologické parametry se mění se změnou hmotnostní koncentrace. Jelikož se diplomová práce zabývá hodnocením závislosti dvouvrstvého modelu na změně reologických parametrů nosné kapaliny byly během experimentálního měření použity směsi s různou hmotnostní koncentrací, a tedy s různou reologií.

Reologické parametry byly změřeny před, během i po měření v trubním viskozimetru Haake VT550. [7]

### 5.3 Převzatá experimentální data

Pro měření již převzatých experimentálních dat, byl použit stejný materiál, popsáný výše, jako u vlastních měření. Tyto data bylo však nutné rozšířit o vlastní měření, aby bylo docíleno vyhodnocení modelu pro experimentální data měřená při větší škále kapalin různých reologických parametrů.

Dalším důvodem měření vlastních experimentálních dat bylo přesné popsání postupu měření a jevů, ke kterým při měření dochází. Proto je popis měření popsán až za touto kapitolou.

**Tab. č. 1: Převzatá měření a jejich reologické parametry**

Název měření	$\tau_y$ [Pa]	K [Pa.s <sup>n</sup> ]	n [-]
CBPO_130a_TK1_5_20140719_a	0.35	0.65	0.56
	0.35	0.61	0.56
CBPO_130a_TK1_5_20140719_b	0.35	0.61	0.56
	0.21	0.28	0.64
	0.06	0.28	0.63
CBPO_175a_TK1_5_20140803_a	3.76	2.64	0.48
	0.81	1.41	0.50

## 5.4 Vlastní měření experimentálních dat

Během měření experimentálních dat byl brán velký zřetel na přesnost. Hustota bodů měření byla taková, aby výsledné křivky měření (dopravní koncentrace a tlakového gradientu) byly co nejhladší. Zároveň bylo měření provedeno v co nejkratším možném časovém intervalu, aby se reologické parametry kapaliny měnily co nejméně.

**Tab. č. 2: Vlastní měření a jejich reologické parametry**

Název měření	$\tau_y$ [Pa]	K [Pa.s <sup>n</sup> ]	n [-]
CBPO_150_TK1_5_20171205_a	0.79	1.44	0.49
	1.13	1.21	0.51
	1.35	1.06	0.54
	1.55	1.16	0.52
CBPO_250c_TK15_20171220_a	8.32	4.56	0.46
	8.79	4.90	0.46
	6.93	4.30	0.46
	5.06	3.74	0.46

### 5.4.1 Popis měření

Před začátkem každého měření se trubní linka propláchla a vyprázdnila. Po-té se za pomoci obtoku do linky načerpala nově namíchaná neneutonská kapalina. Nakonec se celý systém odvzdušnil a do linky se přidalo známé množství hrubých částic, které dále sloužilo ke stanovení objemové koncentrace. Ta byla stanovena jako poměr známého objemu částic vnesených do trubní linky a celkového objemu trubní linky.

Již popsaná trubní linka a její příslušenství umožňovalo během měření zaznamenávat dopravní koncentraci  $C_{vd}$ , tlakový gradient  $I_m$ , a navíc aktuální průměrnou rychlost proudící směsi  $V_m$ .

Důležitou informací experimentálních dat je i visuální hodnocení. Jelikož je zařízení vybaveno průhledným potrubím je umožněno sledování dějů, které při proudění tekutiny

nastanou. Jedná se zejména o sledování stratifikovaného proudění od bodu, kdy dochází k počátku pohybu usazených částic do okamžiku, kdy je ještě možné lidským okem zaznamenat pohyb jednotlivých částic na vrstvě usazených pevných částic. Během každého bodu měření bylo z vizuálního hodnocení zaznamenána výška třecí vrstvy  $H_{sh}$  a výška vrstvy pevných částic  $y_b$ . Zároveň bylo v každém bodě zaznamenáno krátké video při různých světelných podmínkách, pro další budoucí hodnocení.

Při experimentálním pokusu výše zmíněné tekutiny nesoucí uvedené hrubozrné částice byla postupně zvyšována rychlost proudění. Při malých rychlostech, než bylo překonáno počáteční napětí neneutonské kapaliny, nedocházelo k žádnému pohybu, jak vrstvy částic, tak nosné kapaliny. Teprve po překonání počátečního napětí se dostala nosná kapalina do pohybu. Při dalším zvýšení rychlosti bylo možno zaznamenat první známky eroze třecí vrstvy, tedy pohyb jedné vrstvy hrubozrných částic na povrchu nehybné vrstvy uloženého materiálu. Následným zvyšováním rychlosti se postupně zvyšoval počet částic pohybujících se charakteristickým pohybem (poskakování, valení apod.). Výška těchto částic pak byla zaznamenána jako výška třecí vrstvy  $H_{sh}$ . Zároveň se zaznamenala i výška vrstvy pevných částic  $y_b$  pod třecí vrstvou pohybujících se částic.

Dalším zvyšováním rychlosti bylo dosaženo bodu, kdy došlo k pohybu celé vrstvy pevných částic. Přestože se obě části dolní vrstvy daly do pohybu, stále bylo možné rozeznat třecí vrstvu a vrstvu pevných částic pod ní, která se pohybovala nižší rychlostí. Po dalším zvyšování rychlosti se snižovala výška lože a zároveň se zvyšoval počet vrstev pohybujících se hrubozrných částic v horní části posunujícího se materiálu. Když bylo dosaženo rychlosti, při které již nebylo možné rozeznat jednotlivé vrstvy pevných částic, bylo vizuální měření ukončeno.

Měření tlakového gradientu a dopravní koncentrace však pokračovalo dál do bodu, kdy byly všechny částice ve vlnosku a už se tedy nejednalo o stratifikované proudění. Kompletní záznam průběhu tlakového gradientu v závislosti na rychlosti pak umožňoval odhadnout bod změny laminárního proudění na turbulentní, který se většinou nacházel v inflexním bodě křivky, jak lze vidět na níže uvedeném obrázku (Obr. č. 26). Kompletní křivka dopravované koncentrace umožňovala odečtení celkové koncentrace částic při vlnosku všech částic obsažených v trubní lince.

Reologické parametry neneutonské kapaliny byly měřeny v rotačním viskozimetru před začátkem měření, během něho a na jeho konci. U každého vzorku pak byla změřena

i jeho teplota, aby bylo umožněno vyhodnocení vlivu změny teploty na změně reologických parametrů.

#### 5.4.2 Analýza výsledků experimentálních dat

K analýze použitého dvouvrstvého modelu s neneutonskou nosnou kapalinou bylo vybráno a použito celkem 5 měření. Tyto měření zastupují neneutonské kapaliny různých reologických parametrů a proudění hrubých částic s různou koncentrací (Tab. č. 3).

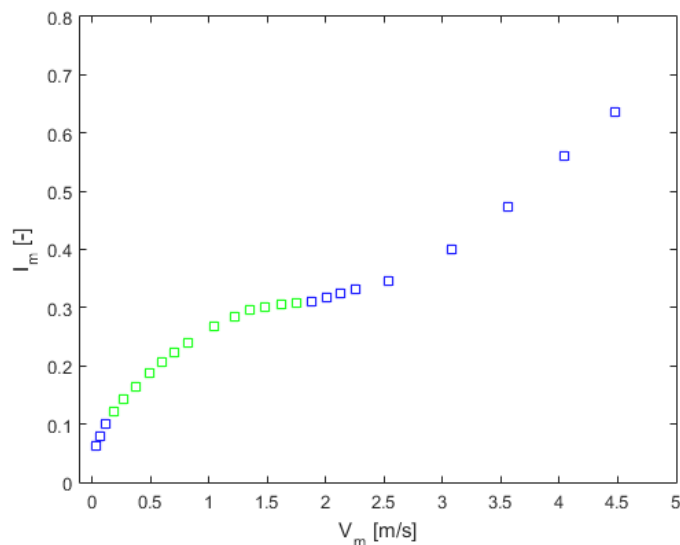
Tab. č. 3: Měření reologických parametrů

Název měření	$\tau_y$ [Pa]	K [Pa.s <sup>n</sup> ]	n [-]	T [°C]
CBPO_130a_TK1_5_20140719_a	0.35	0.65	0.56	27.2
	0.35	0.61	0.56	31.1
CBPO_130a_TK1_5_20140719_b	0.35	0.61	0.56	31.1
	0.21	0.28	0.64	34.3
	0.06	0.28	0.63	33.0
CBPO_150_TK1_5_20171205_a	0.79	1.44	0.49	18.5
	1.13	1.21	0.51	20.5
	1.35	1.06	0.54	20.5
	1.55	1.16	0.52	21.0
CBPO_175a_TK1_5_20140803_a	3.76	2.64	0.48	26.0
	0.81	1.41	0.50	27.0
CBPO_250c_TK1_5_20171220_a	8.32	4.56	0.46	18.5
	8.79	4.90	0.46	21.5
	6.93	4.30	0.46	22.5
	5.06	3.74	0.46	28.5

Základem každého měření je průběh I-V křivky (Obr. č. 26) zobrazující navyšování tlakového gradientu zvyšováním rychlosti proudění.

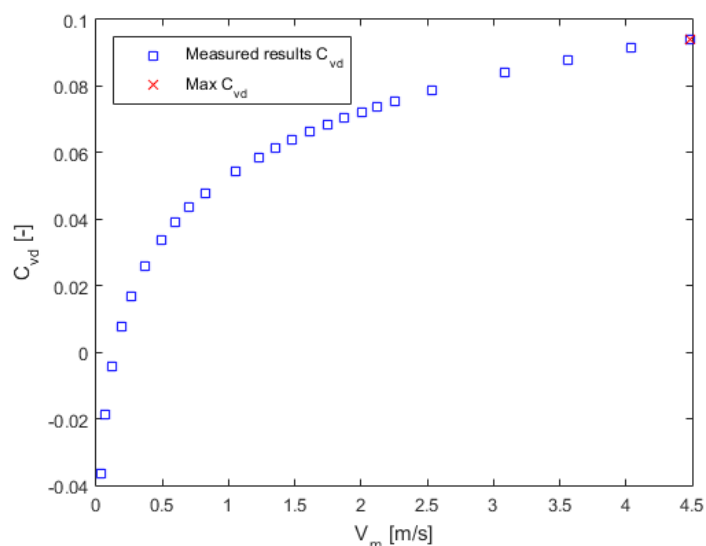
Důležitou částí naměřené I-V křivky je přechodový úsek z laminárního na turbulentní proudění. Jelikož se diplomová práce zaměřuje zejména na predikci dat při laminárním proudění, udává tato hranice horní úsek hodnocených dat.





Obr. č. 26: Naměřená I – V křivka z měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205\_a

Další neméně důležitou křivkou, přímo měřenou na trubní lince, je křivka zobrazující změnu dopravované koncentrace v závislosti na zvyšování rychlosti proudění (Obr. č. 27). Maximální hodnota na vrcholu křivky pak označuje celkovou koncentraci částic, která by měla souhlasit s hodnotou koncentrace částic vypočtenou před jejich přidáním do trubní linky.



Obr. č. 27: Naměřená křivka dopravní koncentrace z měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205\_a

### Analýza naměřených reologických parametrů

Jak již bylo zmíněno, před každým měřením a po jeho ukončení byla změřena hodnota jednotlivých reologických parametrů nosné newtonské kapaliny ( $\tau_y$ ,  $K$ ,  $n$ ). Důvodem

stanovení reologických parametrů před a po měření je zejména předpoklad, že se tyto hodnoty budou měnit. Tento předpoklad se nakonec potvrdil.

V některých případech měření se reologické parametry nenewtonských kapalin liší až o desítky procent. Experimentální data, která vykazovala takto velké rozdíly nebyla vůbec pro další hodnocení modelu využita, protože by jejich výsledky mohly vyhodnocení modelu zkreslit.

Při měření byla mimo jiné měřena i teplota nenewtonské kapaliny, a to vždy před měřeními jejích reologických parametrů. Tato měření ukázala, že se teplota kapaliny během měření postupně zvyšuje. Jeden z důvodů měnících se reologických parametrů nenewtonské kapaliny tedy může být změna teploty. Zároveň je možné, že je to způsobené výskytem hrubých částic, které mohou svým pohybem narušit konzistenci kapaliny. To však není předmětem této diplomové práce. Ale může být námětem dalších vědeckých prací.

Změny reologických parametrů nenewtonských kapalin během jejich proudění v potrubí může významně narušit výpočet matematického modelu. Proto je nutné zjistit, jak moc je model na změnu reologických parametrů citlivý, což je předmětem dalšího bodu této diplomové práce.

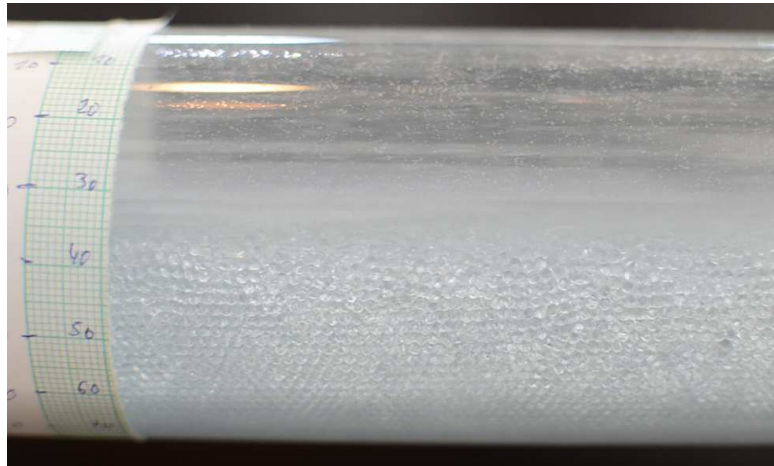
Tato analýza mimo jiné poukazuje na to, že se tyto změny reologických parametrů můžou dít i ve skutečných směsích v praxi. Proto může být výzkum zabývající se změnou reologických parametrů nenewtonských kapalin nesoucí pevné částice nezbytný pro další úpravu modelu a pochopení tohoto tématu.

### **Analýza vizuálních pozorování**

Dalšími důležitými daty jsou vizuální pozorování výšky vrstvy pevných částic  $y_b$  a třecí vrstvy na jejím povrchu  $H_{sh}$ .

Třecí vrstva je definována jako horní část lože, ve které jednotlivá zrna poskakují a jsou výrazně ovlivněna horní vrstvou, ve které proudí nosná kapalina. Postupným zvyšováním rychlosti dochází nejprve k pohybu jednotlivých částic na povrchu lavice. Dalším zvyšováním se začíná pohybovat celá vrstva o velikosti jedné částice. Narůstajícím zvyšováním rychlosti narůstá i počet vrstev částic, které jsou blízce ovlivněny proudící kapalinou nad nimi. Současně platí, že zvyšováním třecí vrstvy se snižuje výška vrstvy pevných částic, která je pod ní. Toto vzájemné působení končí stavem, kdy dojde ke sjednocení obou částí a již není možné jednotlivé vrstvy od sebe rozeznat.

Vyhodnocení hodnoty jednotlivých výšek se stává zvyšováním rychlosti obtížnější. Při vyšších rychlostech, kdy je rozdíl obou vrstev málo patrný, se stává hodnocení vrstev závislé na daném pozorovateli. Proto by citlivostní analýza modelu měla obsahovat i vyhodnocení vizuálního pozorování, aby se zjistilo, jak může chyba pozorovatele ovlivnit výsledky modelu.

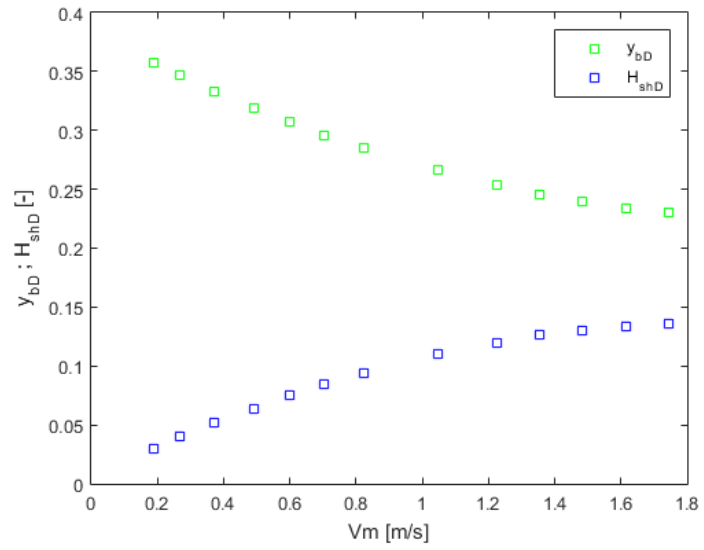


Obr. č. 28: Fotografický záběr na sunoucí se lože

Během měření bylo zjištěno, že výška třecí vrstvy u vnitřní stěny potrubí byla odlišná od výšky třecí vrstvy v jejím středu. Což lze vzhledem ke skutečnému rozdělení rychlosti předpokládat. Tento jev je však nutné pro další výpočty zanedbat a brát hodnotu výšky třecí vrstvy jednotnou a určenou z pozorování u vnitřní stěny potrubí. Důvodem je snadnější vizuální vyhodnocování. Odečítání výšky ve středu třecí vrstvy je totiž o mnoho obtížnější než na jejím okraji.

Z důvodu názornějšího zobrazení jednotlivých hodnot vizuálního pozorování, byly výšky vrstev vydělené průměrem potrubí, čímž se získalo procentuální zastoupení v daném potrubí. Tyto hodnoty jsou dále označeny  $y_{bD}$  a  $H_{shD}$ .

Na níže uvedeném obrázku (Obr. č. 29) lze vidět zvyšující se procentuální zastoupení výšky třecí vrstvy  $H_{sh}$ , a naopak snižující se procentuálního zastoupení výšky vrstvy pevných částic  $y_b$ . To samozřejmě odpovídá popisu měření uvedený výše. Zajímavé je ovšem vidět, jak se jednotlivé hodnoty přibližují a téměř se na konci měření rovnají.



**Obr. č. 29: Výsledky vizuálního pozorování výšky lavice  $y_{bd}$  a třecí vrstvy  $H_{shD}$  pro měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205\_a**

## 6. Testování dvouvrstvého modelu

Danou problematiku, jak již bylo zmíněno, popisují celkem čtyři matematické modely. První model dle Pulluma a kol. (2004) je založen na zjednodušujícím předpokladu jednotné drsnosti stěny potrubí a povrchu usazeného materiálu. Což může do jisté míry platit pro laminární proudění a nulové rychlosti pohybu dolní vrstvy. Jelikož se však diplomová práce zabývá zejména vyhodnocením úspěšnosti predikce modelu při laminárním proudění a při nenulové rychlosti pohybu vrstvy pevných částic, je tento model nevyhovující.

Druhý model dle Rojase a Sáeze (2012) je oproti ostatním modelům velice obecný. Lze ho použít při určitých úpravách pro proudění newtonských i neneutonských kapalin. Jeho úprava pro popis obou typů nosných kapalin však může vést k přílišnému zjednodušení modelu a ke špatnému popisu daného proudění. Vzhledem k tomu, že se tato práce zabývá pouze prouděním pevných částic s nosnou neneutonskou kapalinou H-B typu, není vhodné, aby byl využíván model, který je příliš obecný.

Z výše uvedených důvodů je pro další hodnocení vybrán model dle Matouška a kol. (2015). V tomto modelu je například zajímavé rozdělení prostoru horní vrstvy na dvě plochy. Jedna přísluší k třecímu napětí působící na stěnu potrubí a druhá k třecímu napětí vyvolané kontaktem pohybujících se částic na rozhraní obou vrstev, což model dle Pulluma a kol. vynechává a zjednodušuje.

Testování zvoleného dvouvrstvého modelu je provedeno pomocí naměřených experimentálních dat na trubní lince ve Vodohospodářské laboratoři. Pro jejich měření byly použity nosné kapaliny s různými hodnotami tří reologických parametrů, aby se co nejlépe vyhodnotila vhodnost zvoleného dvouvrstvého modelu.

Kromě ověření použitelnosti modelu je provedena podrobná citlivostní analýza, aby bylo možné vyhodnotit citlivá místa modelu.

Dvouvrstvé matematické modely popisující specifické proudění predikují cílové hodnoty na základě zjednodušujícího předpokladu střední rychlosti. Tedy neuvažují rozdílné bodové rozdělení rychlosti, ale pouze jednu střední hodnotu. Důsledky tohoto zjednodušení je možné vyhodnotit na matematickém modelu dle Krupičky (2014), který počítá s bodovým rozdělením rychlosti proudění nad vrstvou pevných částic. Zároveň lze porovnáním výsledků modelů, zjistit míru ovlivnění výsledků predikčního modelu při použití zjednodušujícího předpokladu kruhovitého průřezu proudění v horní vrstvě

modelu. Model dle Krupičky totiž tento předpoklad nevyužívá, ale počítá se skutečným tvarem průřezu proudění.

## 6.1 Citlivostní analýza dvouvrstvého modelu

Citlivostní analýza je provedena na predikční formě modelu doplněná hodnotou koeficientu mechanického tření  $\mu_s$  odvozenou z inverzní formy modelu.

### 6.1.1 Volba konfigurace predikčního modelu

Vstupy predikčního modelu, který je cílem citlivostní analýzy, jsou reologické parametry newtonské nosné kapaliny  $\tau_y$ ,  $k$ ,  $n$ , které jsou i předmětem citlivostní analýzy a její hustota  $\rho_f$ . Vstupními parametry hrubozrnných částic jsou koncentrace  $c_b$  (na základě pozorování odhadnuta na hodnotu  $c_b=0,54$ ), hustota  $\rho_s$  a průměrná velikost jedné částice  $d$ . Z vizuálních pozorování to pak jsou výška vrstvy usazených pevných částic  $y_b$  a výška třecí vrstvy  $H_{sh}$ . Dalšími vstupy jsou střední průměrná rychlost  $V_m$  a průměr potrubí  $D$ . Poslední vstupní hodnotou je pak koeficient mechanického tření  $\mu_s$ , který byl odvozen z výsledků inverzního modelu. Naopak výstupy jsou tlakový gradient  $I_m$  a dopravní koncentrace  $C_{vd}$ .

Napětí vznikající působením hrubozrnného materiálu na stěnu potrubí je řešeno za pomoci rovnice (4.66), kde  $F$  je síla ponořeného usazeného materiálu působící na stěnu potrubí, která je dle Matouška a kol. (2015) vhodnější.

Pro stanovení třecího napětí vyvolané pohybem vrstvy pevných částic, byl zvolen výpočet, kde je jeho hodnota funkcí rychlosti sunoucí se vrstvy usazených částic a velikosti částice ( $V_b/d$ ).

Třecí napětí působící na hraně obou vrstev je stanovena za pomoci výšky vrstvy  $H_{sh}$ , která byla odečtena z vizuálního pozorování při experimentálním měření.

### 6.1.2 Citlivostní analýza komponentů modelu

Jak již bylo řečeno reologické parametry newtonských kapalin se mohou během měření měnit, ať už je to vlivem teploty, nebo působením pevných částic. Z toho důvodu je základním cílem citlivostní analýzy vyhodnotit citlivost predikčního modelu na změnu tří reologických parametrů  $\tau_y$ ,  $K$  a  $n$ .

Dalším cílem citlivostní analýzy je zjištění citlivosti modelu na změnu parametrů získaných vizuálním pozorováním, protože jsou z části závislé na daném pozorovateli.

## Reologické parametry

Testovanou kapalinu H-B typu popisují tři parametry počáteční napětí  $\tau_y$ , součinitel konzistence  $K$  a tokový index  $n$ . U každého tohoto parametru byla provedena citlivostní analýza a vyhodnocena míra jeho závislosti na výsledek modelu.

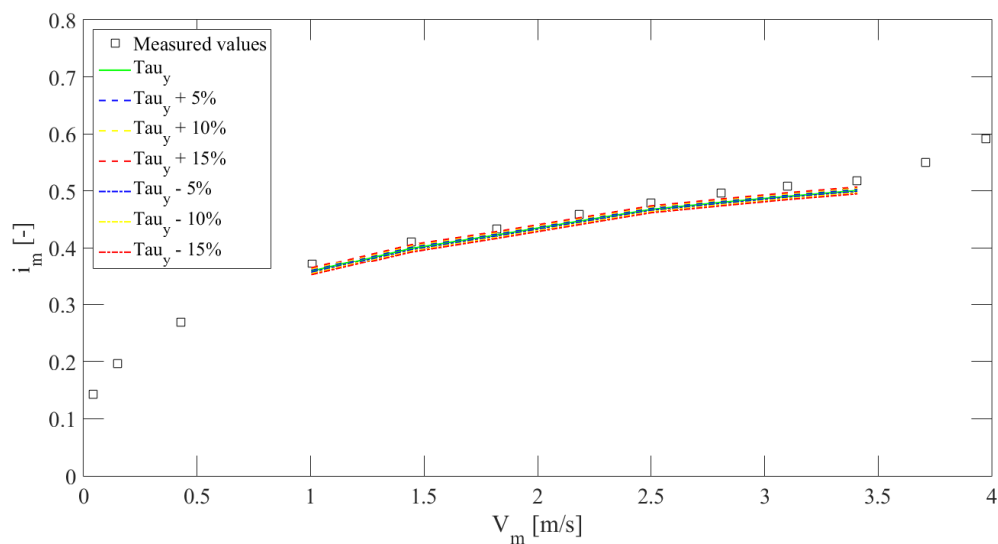
### Počáteční napětí

Počáteční napětí, jak je vidět níže (Obr. č. 30), (Obr. č. 31) a (Obr. č. 32), výsledek modelu ovlivňuje minimálně. Přestože počáteční napětí rozhoduje, kdy se dostane nosná kapalina do pohybu, není rozhodujícím parametrem analyzovaného dvouvrstvého modelu.

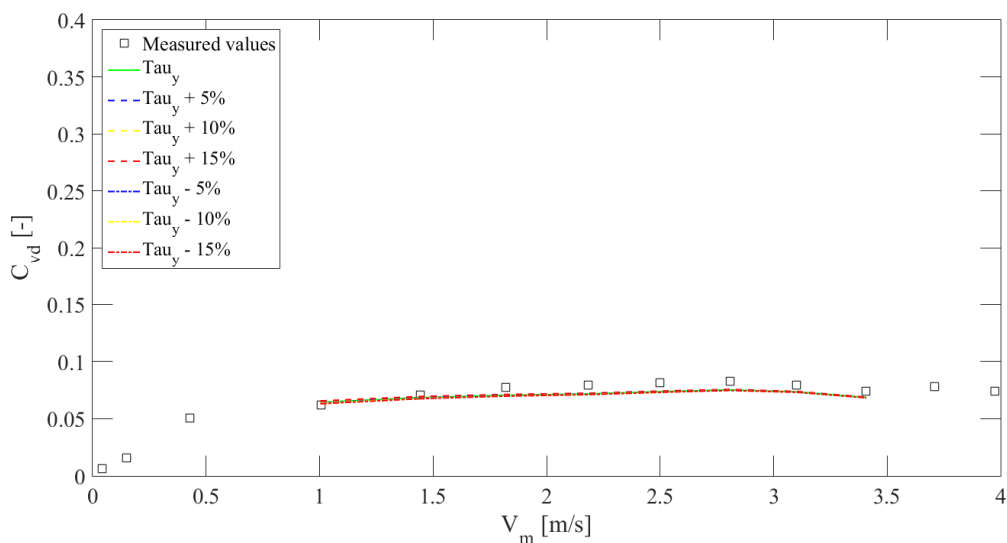
Experimentální měření ukazují, že právě počáteční napětí se během měření mění nejvíce. Někdy rozdíl hodnot počátečního napětí změřené před začátkem experimentu a po ukončení dosahoval 20 %.

Zajímavé je ovšem zjištění, že výsledek výpočtu rychlosti dolní vrstvy  $V_b$ , je na změně počátečního napětí citlivější, než výsledek výpočtu dopravní koncentrace a tlakového gradientu.

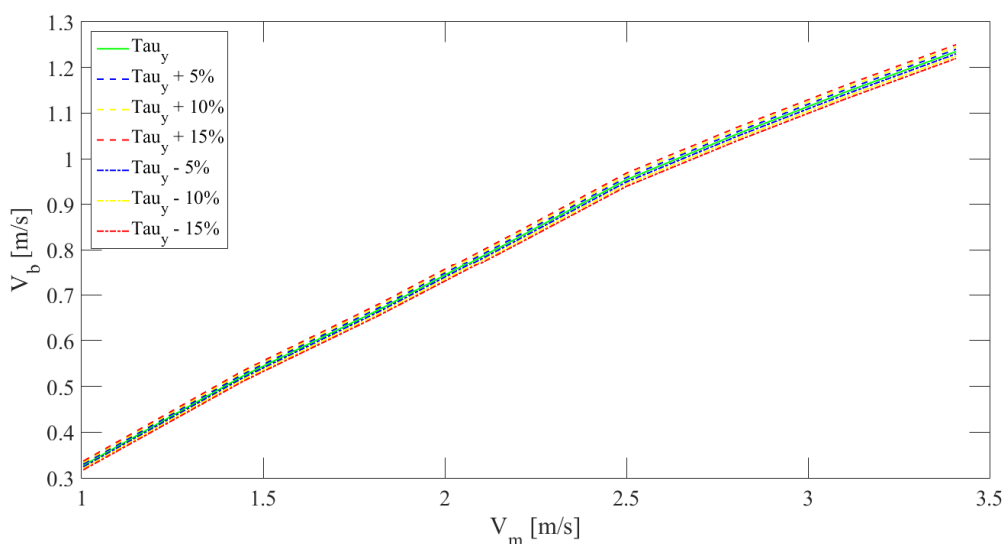
Přesto lze říci, že citlivost modelu na změnu počátečního napětí je minimální i s uvažováním velkých rozdílů, které během měření nastaly.



Obr. č. 30: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na počátečním napětí  $\tau_y$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a



Obr. č. 31: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na počátečním napětí  $\tau_y$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a



Obr. č. 32: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti dolní vrstvy  $V_b$  na počátečním napětí  $\tau_y$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a

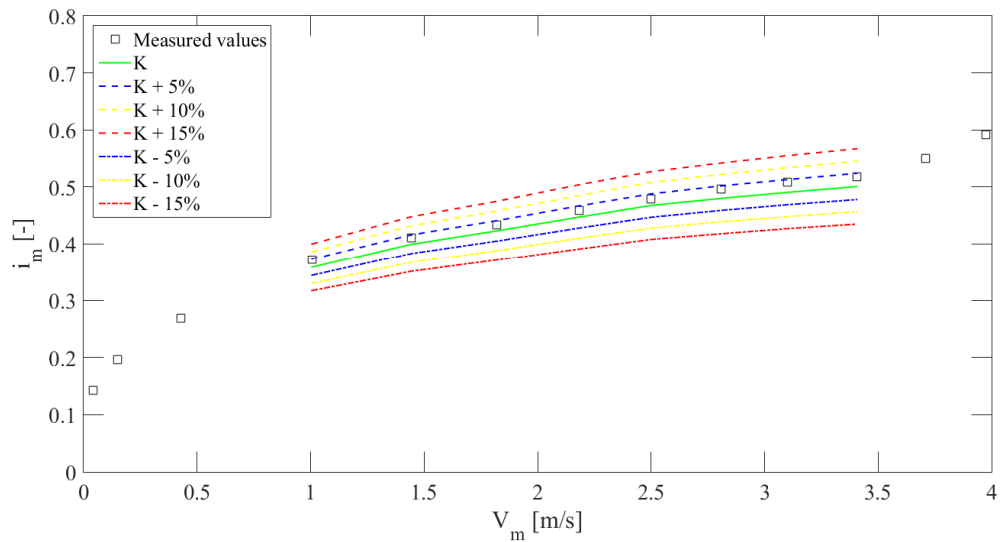
### Součinitel konzistence

Citlivost predikčního modelu na součiniteli konzistence  $K$  je o mnoho větší, než tomu je u počátečního napětí  $\tau_y$ .

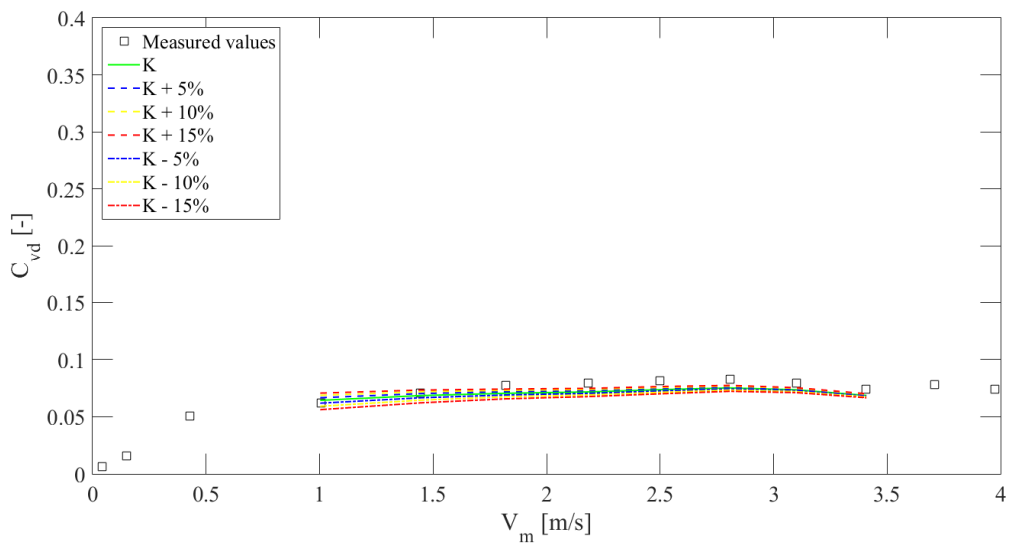
Změna tohoto parametru během experimentálního měření je oproti změně počátečního napětí menší, přesto u některých měření došlo i k rozdílu 10 %, což už výsledek modelu může značně ovlivnit, jak je vidět níže (Obr. č. 33). Nutno dodat, že je tento parametr citlivý pouze na predikci tlakového gradientu. Dopravní koncentraci změna součinitele



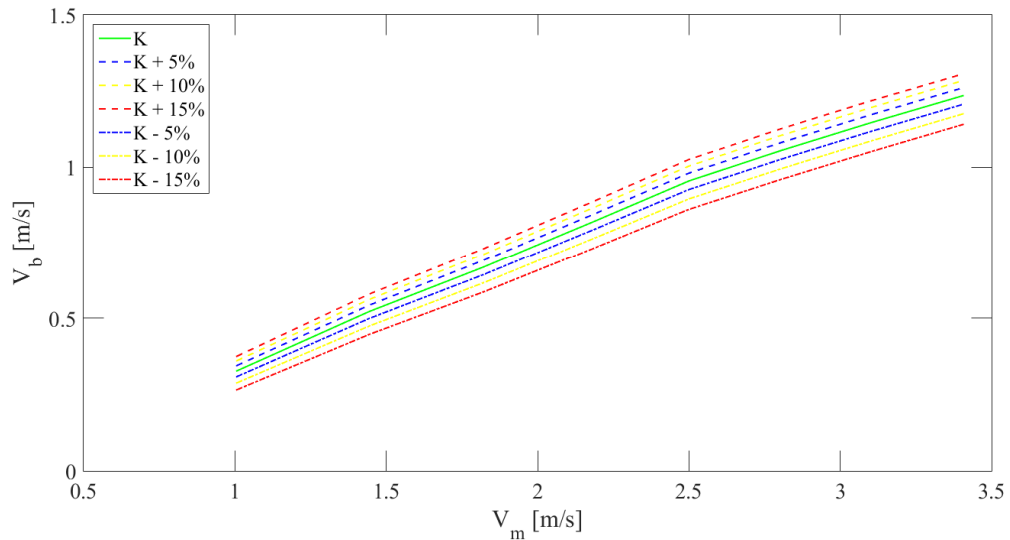
konzistence ovlivňuje minimálně. Výsledky výpočtu rychlosti lože  $V_b$  na změně součinitele konzistence  $K$  jsou citlivé obdobně jako výsledky tlakového gradientu, což lze vidět na níže uvedeném obrázku (Obr. č. 35).



**Obr. č. 33: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na součiniteli konzistence  $K$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**



**Obr. č. 34: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na součiniteli konzistence  $K$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**

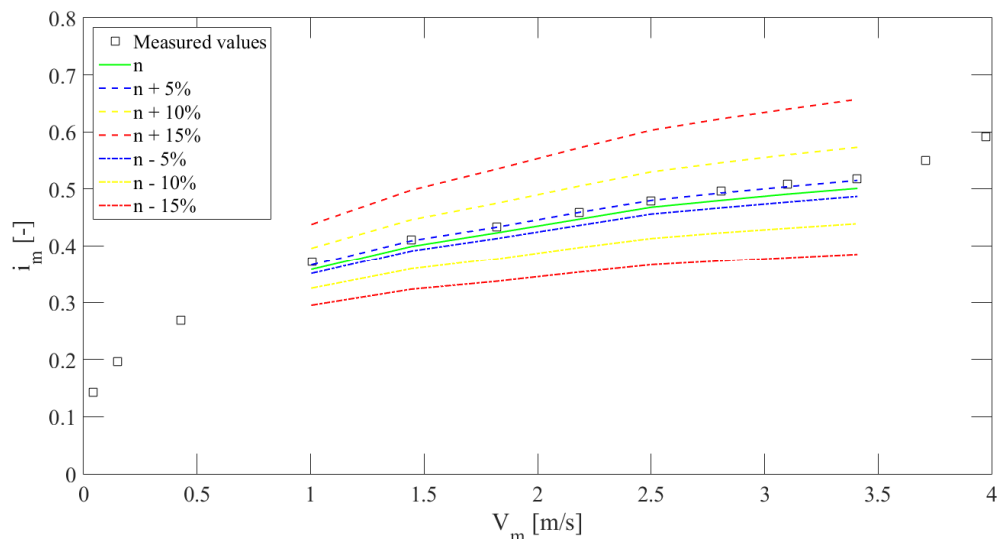


Obr. č. 35: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti lože na součiniteli konzistence K pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a

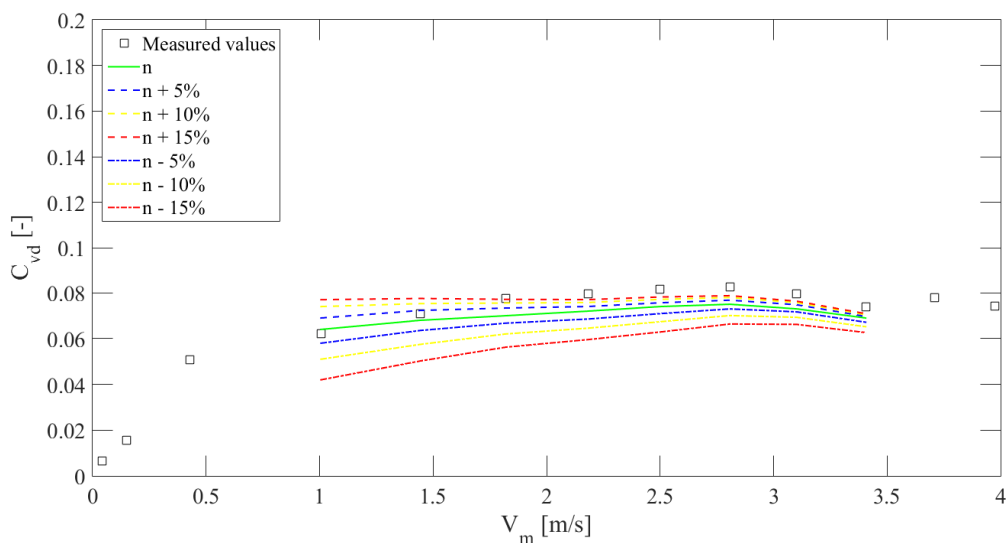
### Tokový index

Tokový index je ze všech reologických parametrů kapaliny nejvýznamnější, i malá změna tohoto parametru může vyvolat velice odlišné výsledky modelu. Na druhou stranu se tento parametr během měření měnil jen minimálně. Rozdíl od střední průměrné hodnoty z naměřených dat většinou nepřesahoval 5 %.

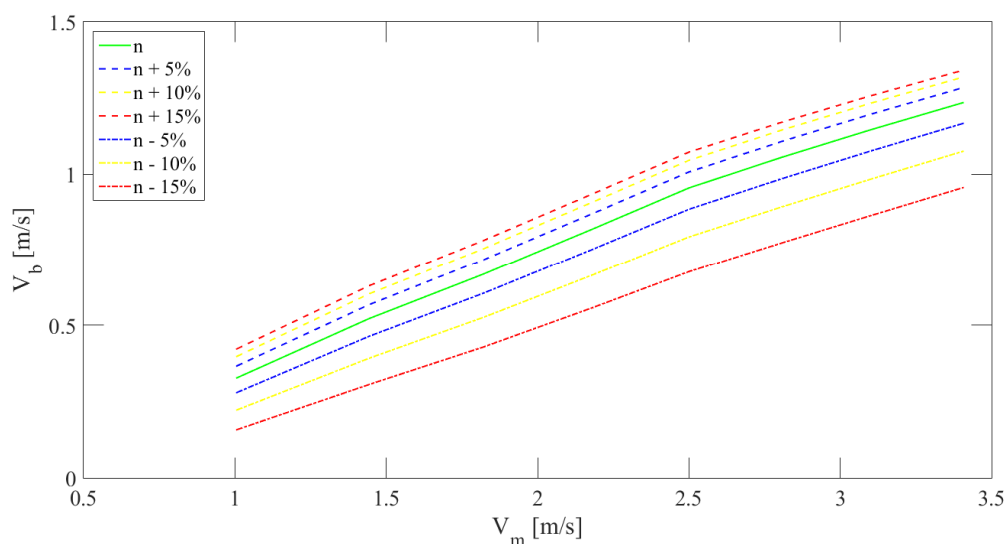
Významná citlivost modelu na tokovém indexu se objevuje zejména u predikce tlakového gradientu a výpočtu rychlosti lože. U dopravní koncentrace je citlivost menší.



Obr. č. 36: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na tokovém indexu n pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a



Obr. č. 37: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na tokovém indexu  $n$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a



Obr. č. 38: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti lože na tokovém indexu  $n$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a

### Vyhodnocení

Citlivostní analýza reologických parametrů ukázala, že dvouvrstvý model je z reologických parametrů nejvíce závislý na součiniteli tokového indexu  $n$ . Přesto je však významnost pro dvouvrstvý model srovnatelná se součinitelem konzistence  $K$ . Vezme-li se v úvahu jejich změna během měření. Tokový index se totiž mění mnohem méně než součinitel konzistence. Jeho změna během měření dosahuje obvykle 5 %, kdežto u součinitele konzistence je změna až 10 %. Proto lze říci, že tyto dva reologických parametry ovlivňují výsledek dvouvrstvého modelu stejnou měrou.

Naopak počáteční napětí se během měření mění nejvíce, ale na samotný výsledek dvouvrstvého modelu má vliv minimální.

### **Parametry z vizuálního pozorování**

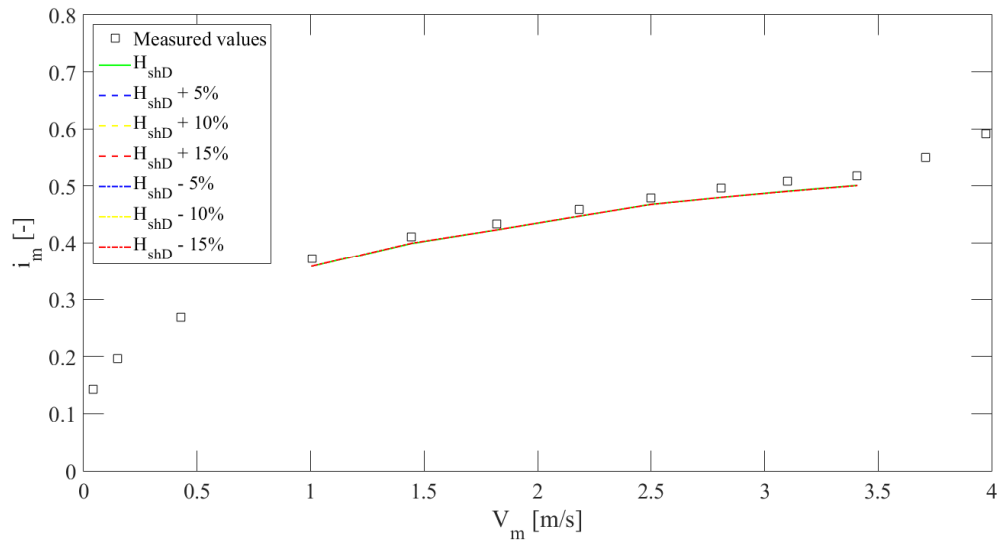
Parametry vyhodnocené během měření vizuálním způsobem jsou výška třetí vrstvy  $H_{sh}$  a výška vrstvy pevných částic  $y_b$ . Při měření se každá hodnota zapsala přímo během měření a zároveň se při každém stavu zaznamenalo krátké video, aby bylo možné každou hodnotu ověřit i po měření.

Stanovení těchto hodnot pozorováním je do jisté míry subjektivní. Určení hranice mezi třetí vrstvou a výškou sunoucí se vrstvy pevných částic je při nízkých rychlostech proudění vcelku snadné. Ale dalším zvyšováním rychlosti proudění, a tudíž i rychlosti lože, určení výšek jednotlivých vrstev již tak snadné není. Ve chvíli, kdy jsou jednotlivé části vrstvy špatně rozeznatelné, přichází na řadu subjektivní názor daného pozorovatele. Z toho důvodu je vhodné provést citlivostní analýzu i u těchto parametrů a zjistit, jak moc na jejich změnu model reaguje.

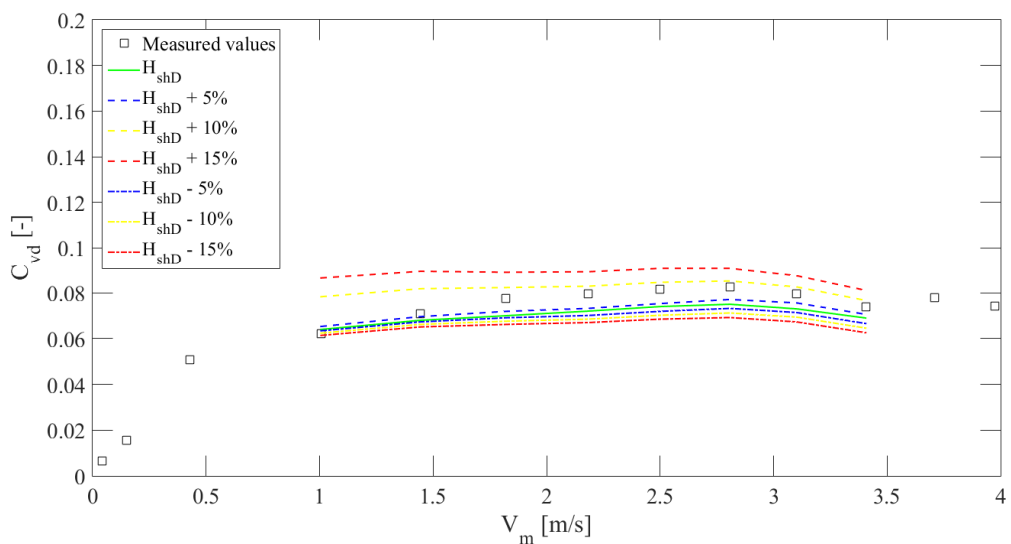
#### Výška třetí vrstvy

Výška třetí vrstvy neovlivňuje predikci tlakového gradientu, ale dopravní koncentraci. Dle níže uvedeného obrázku není změna výšky třetí síly příliš rozhodující. Rozhodující je ovšem správné stanovení hodnot v jednotlivých bodech měření. Vykreslená linie měřených hodnot dopravní koncentrace tvarově neúplně souhlasí s linií určenou modelem. Proto je správné odečítání hodnot důležité zejména pro správné určení průběhu křivky.

Dále je zajímavé vidět, že při snížení hodnot výšky třetí vrstvy se rozdíl hodnot dopravní koncentrace s narůstající rychlostí zvyšují a se zvýšením naopak (Obr. č. 40).



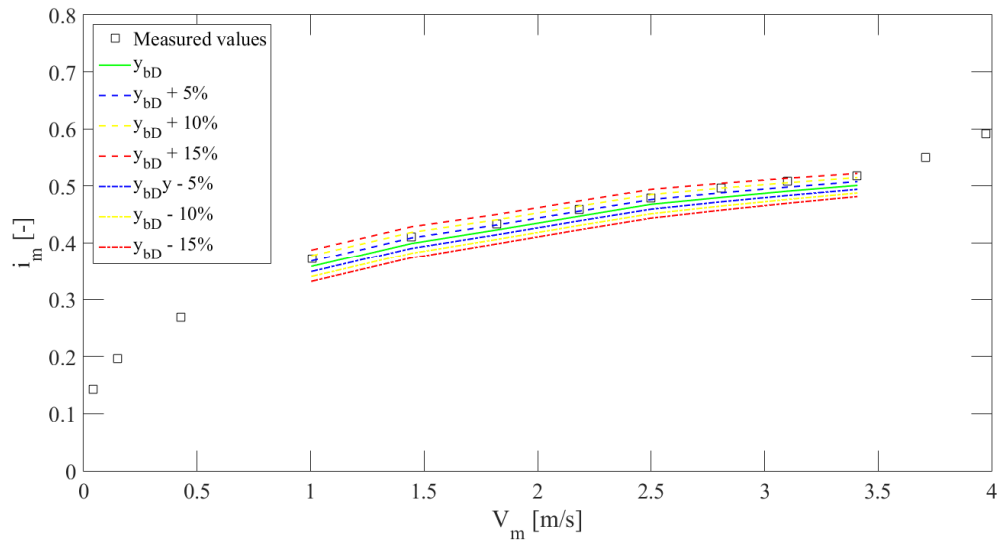
**Obr. č. 39: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na výšce třecí vrstvy  $H_{shD}$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**



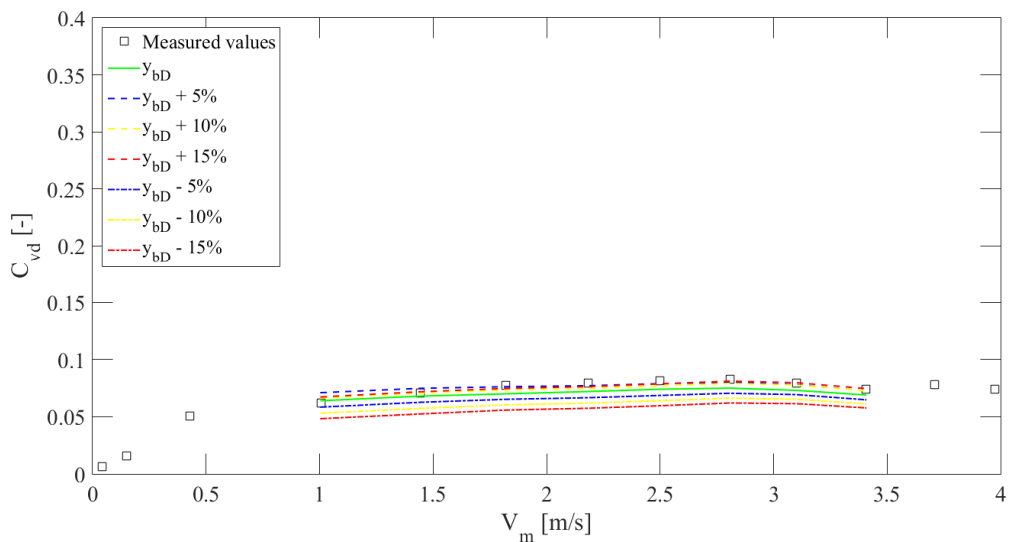
**Obr. č. 40: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na výšce třecí vrstvy  $H_{shD}$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**

### Výška sunoucí se vrstvy pevných částic

Výška vrstvy usazených pevných částic je hodnota, která je důležitá pro předpověď dopravní koncentrace i tlakového gradientu. Jak je vidět na níže uvedeném obrázku, průběh určených hodnot během měření je stejně důležitý, jak tomu bylo u výšky třecí vrstvy.



**Obr. č. 41: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na výšce vrstvy pevných částic  $y_{bD}$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**



**Obr. č. 42: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na výšce vrstvy pevných částic  $y_{bD}$  pro měření CBP0\_175a\_TK1\_5\_20140803\_a**

### Vyhodnocení

Citlivost modelu na hodnotách stanovených z vizuálního pozorování není oproti reologickým parametrům tolik výrazná. Přesto mohou model dosti ovlivnit, zejména hodnotami odečtenými při rychlostech, kdy je identifikace hranice mezi třecí vrstvou a vrstvou lože pouhým okem značně obtížná.

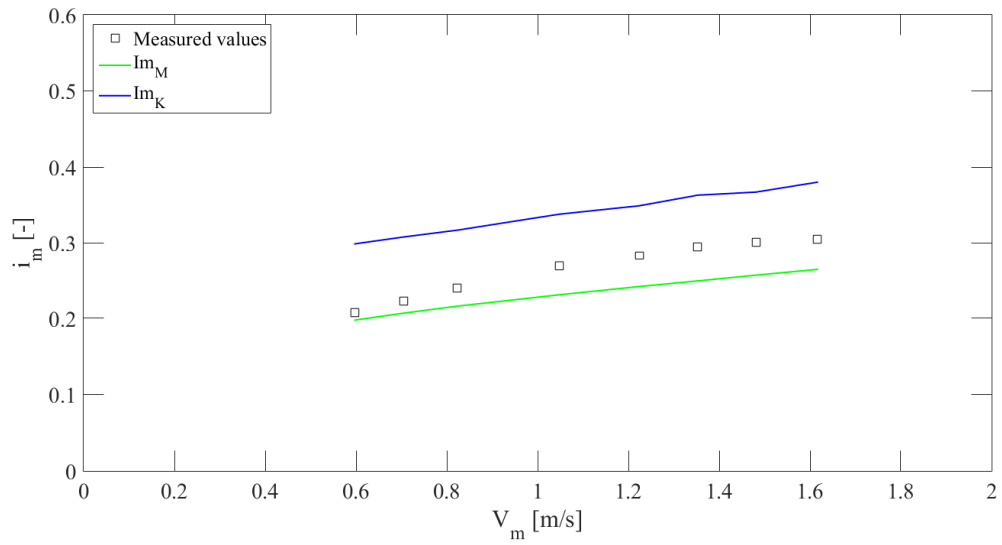
## 6.1 Vyhodnocení modelu s modelem počítající s bodovým rozdělením rychlostí

Predikční model dle Matouška a kol. (2015), který je předmětem citlivostní analýzy a hodnocení předpovědní schopnosti vyjadřuje proudění nad vrstvou usazeného materiálu střední průměrnou rychlostí  $V_a$ . To samozřejmě značně snižuje výpočetní náročnost v porovnání s modelem dle Krupičky (2014) uvažující rozdělení bodových rychlostí.

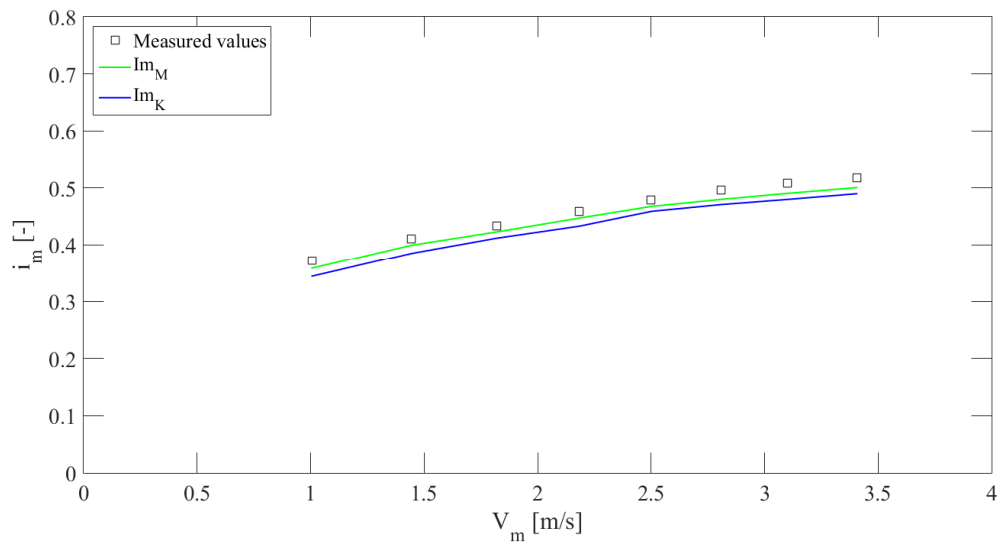
Aby bylo možné vyhodnotit míru vlivu zjednodušujícího předpokladu dvouvrstvého modelu dle Matouška a kol. (2015) byly výsledky predikční formy modelu porovnány s výsledky modelu dle Krupičky (2014) počítající s rozdělením bodových rychlostí a bez předpokladu kulovitého tvaru proudění nad vrstvou pevných částic.

Pro porovnání obou modelů byly vybrány tři měření. V druhém měření je vidět, že se výsledky obou modelů velice dobře blíží naměřeným hodnotám (Obr. č. 44). Což poukazuje na správnost predikce obou modelů. Zároveň se však ukazuje, že model dle Matouška a kol. (2015), který počítá se střední průměrnou rychlostí vykazuje lepší výsledky. To je pak nejvíce patrné na porovnání první sady dat (Obr. č. 43), kde predikce modelu dle Matouška a kol. (2015) je výrazně lepší, než je tomu u výsledků druhého modelu. Ve třetím měření je pak predikce obou modelů velice podobná. Avšak model dle Matouška a kol. (2015) i u této sady dat vykazuje mírně lepší výsledky.

Lepší výsledky predikční formy modelu dle Matouška a kol. (2015) jsou pravděpodobně způsobeny způsobem řešení vlivu třetí vrstvy. Model dle Krupičky (2014) totiž nezohledňuje výskyt třetí vrstvy. Lze tedy říct, že pro predikci důležitých charakteristik proudění směsi pevných částic nesené neneutonskou nosnou kapalinou není přesné určení bodových rychlostí výrazně důležité. Naopak důležité se zdá být vnesení do predikčního modelu hodnocení třetí vrstvy.

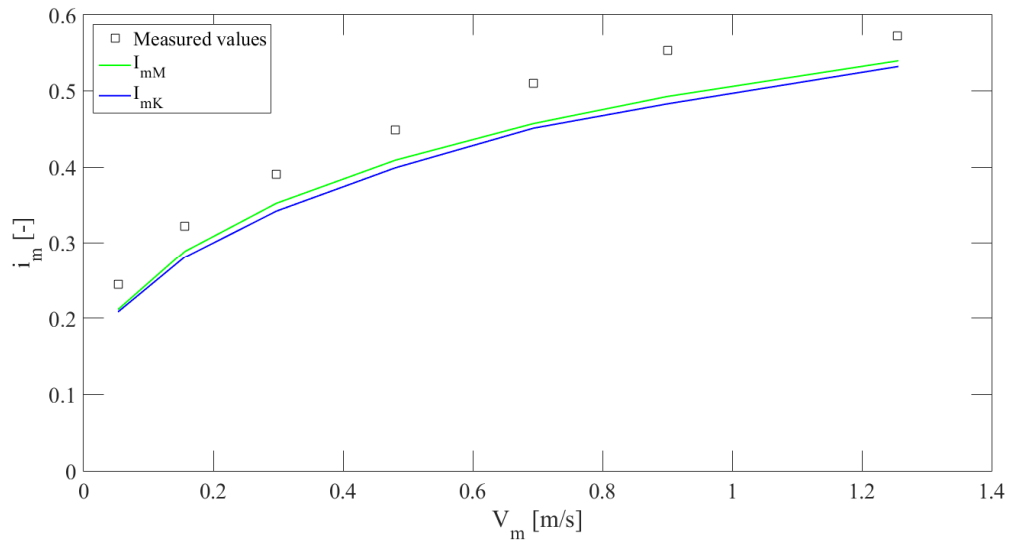


**Obr. č. 43: Porovnání modelů pro měření CBP0\_150a\_TK1\_5\_20171205\_a**



**Obr. č. 44: Porovnání modelů pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803\_a**



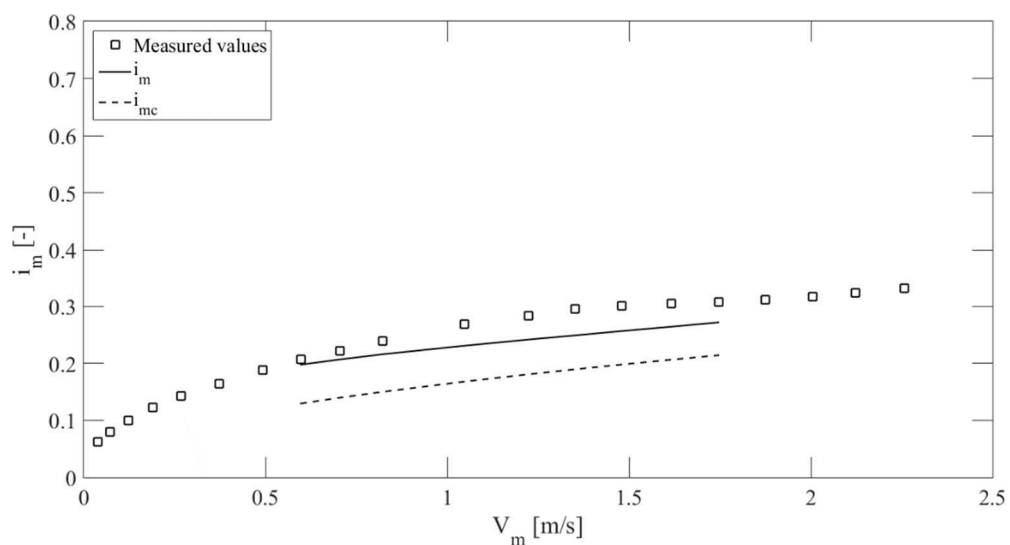


Obr. č. 45: Porovnání modelů pro měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c

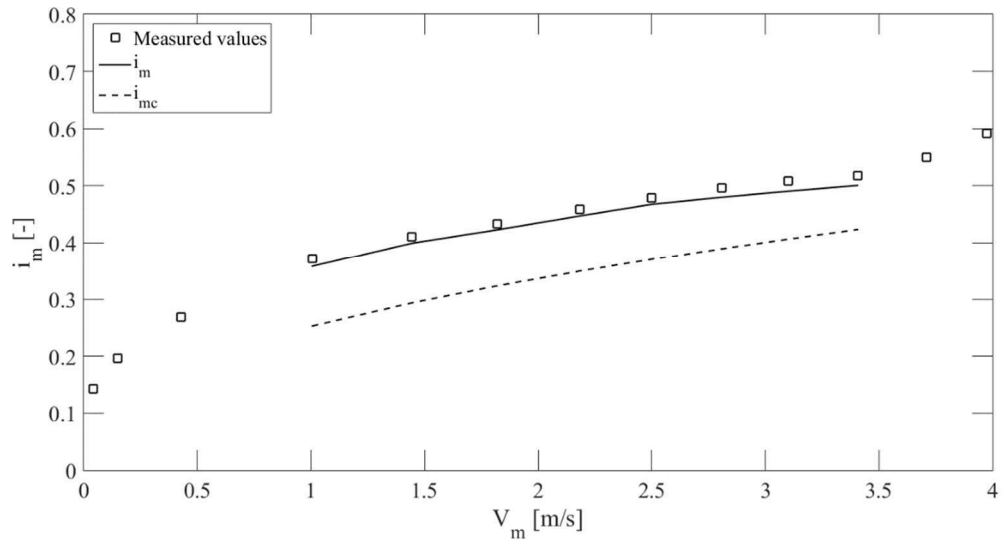
## 6.2 Vyhodnocení předpovědní schopnosti predikčního modelu

Vstupy predikčního modelu jsou popsány výše v kapitole 6.1.1 a výstupy jsou průběhy tlakového gradientu  $I_m$ , dopravní koncentrace  $C_{vd}$  a rychlosti sunoucí se vrstvy usazeného materiálu  $V_b$ .

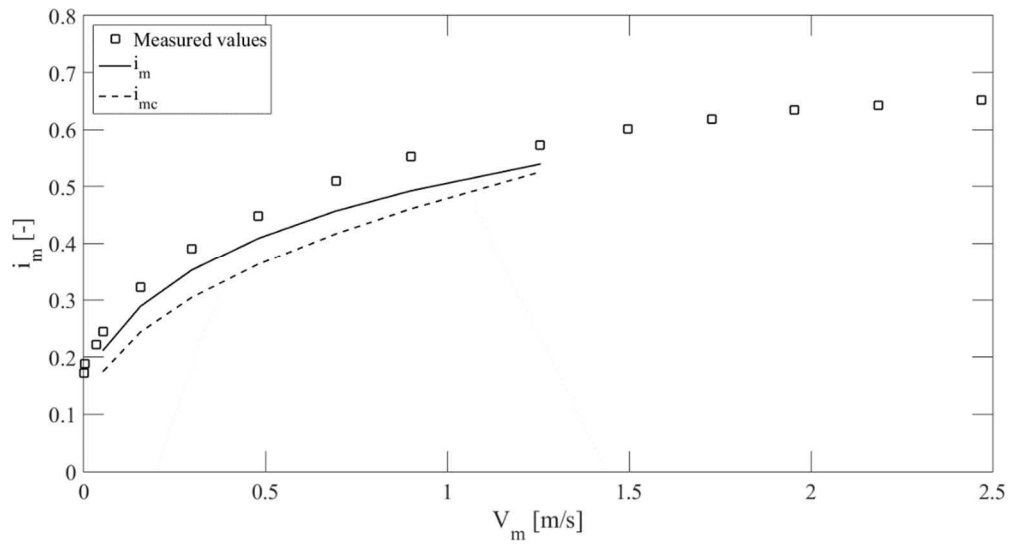
Na níže uvedených obrázcích lze vidět, že pro použitá experimentální data byla predikční forma modelu dle Matouška a kol. (2015) velice úspěšná. Předpověď tlakového gradientu a dopravní koncentrace velice dobře odpovídá naměřeným hodnotám ve všech třech měření.



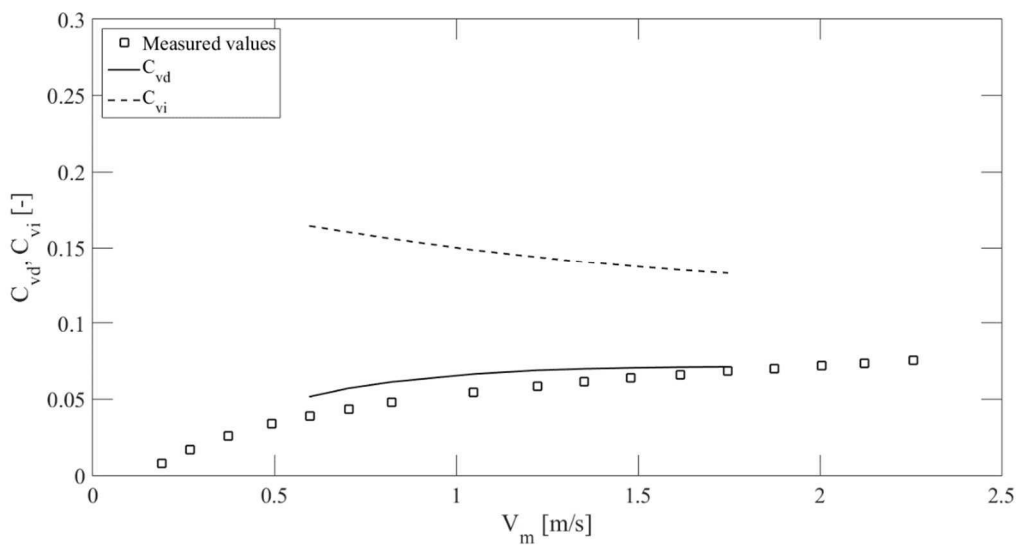
Obr. č. 46: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0\_150a\_TK1\_5\_20171205\_a



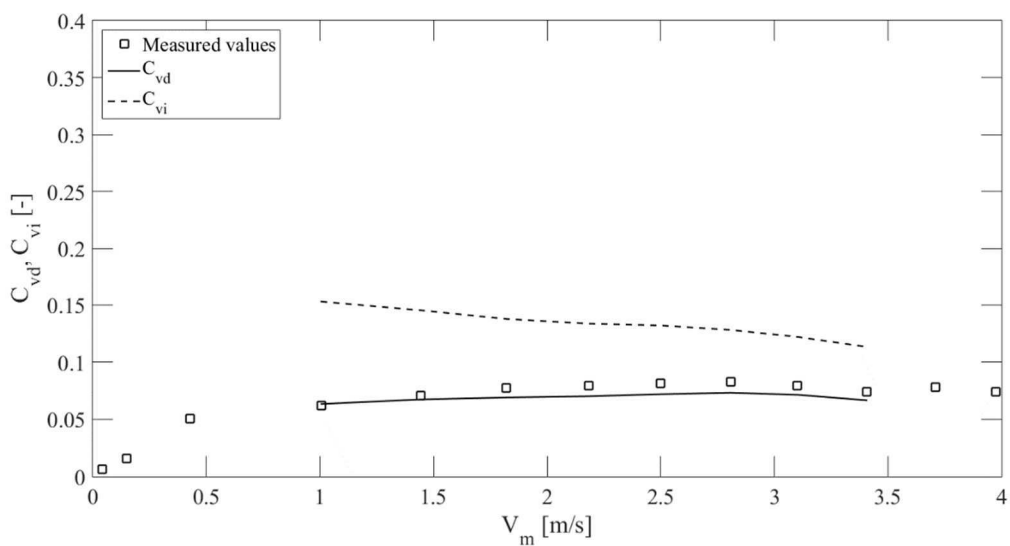
Obr. č. 47: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803\_a



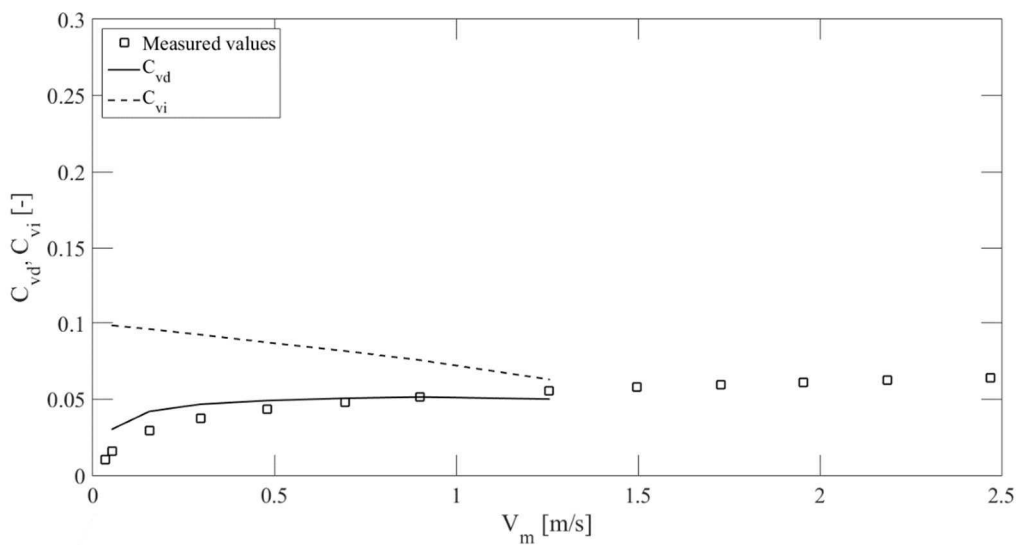
Obr. č. 48: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c



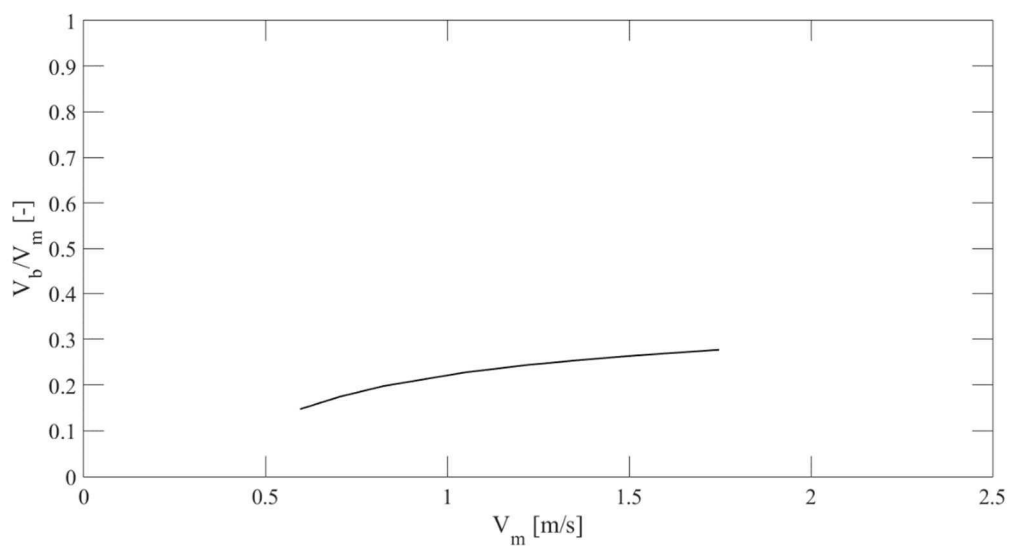
Obr. č. 49: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0\_150a\_TK1\_5\_20171205\_a



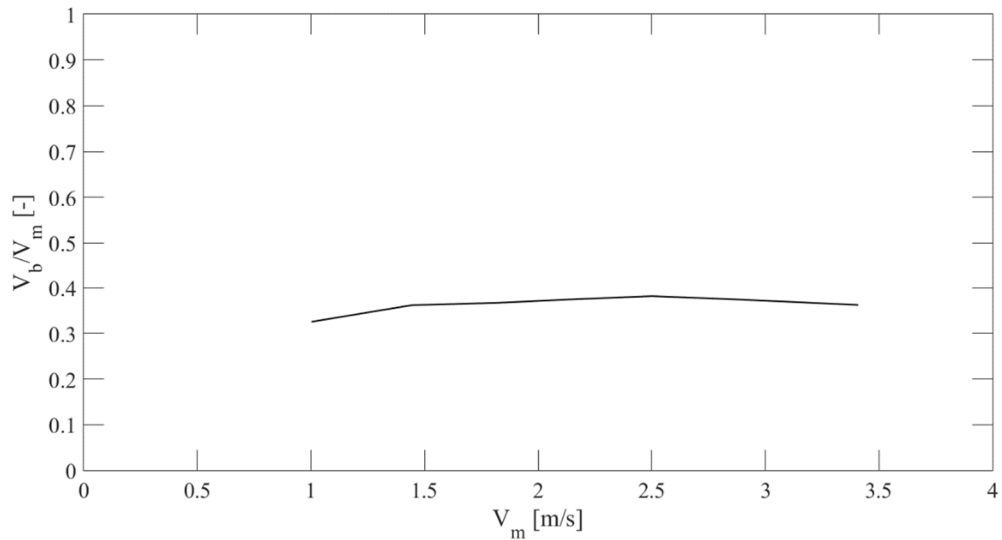
Obr. č. 50: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803\_a



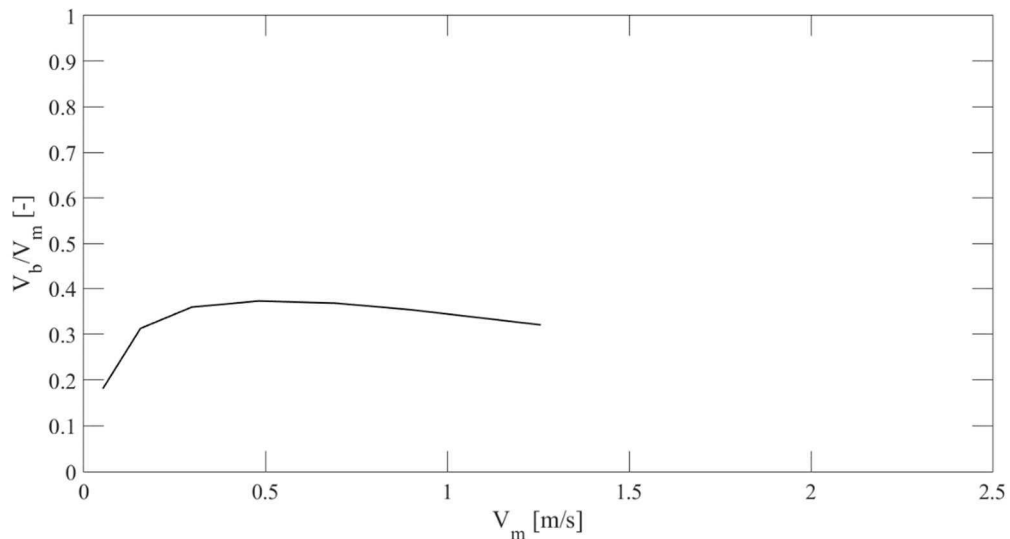
Obr. č. 51: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c



Obr. č. 52: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0\_150a\_TK1\_5\_20171205\_a



**Obr. č. 53: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803\_a**



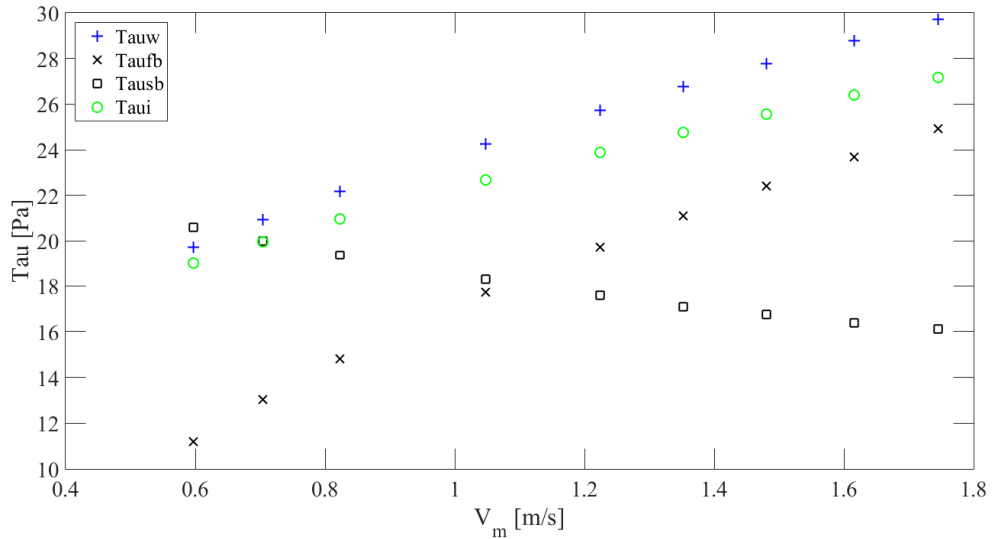
**Obr. č. 54: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c**

### 6.3 Vyhodnocení třecího napětí na rozhraní dvou vrstev

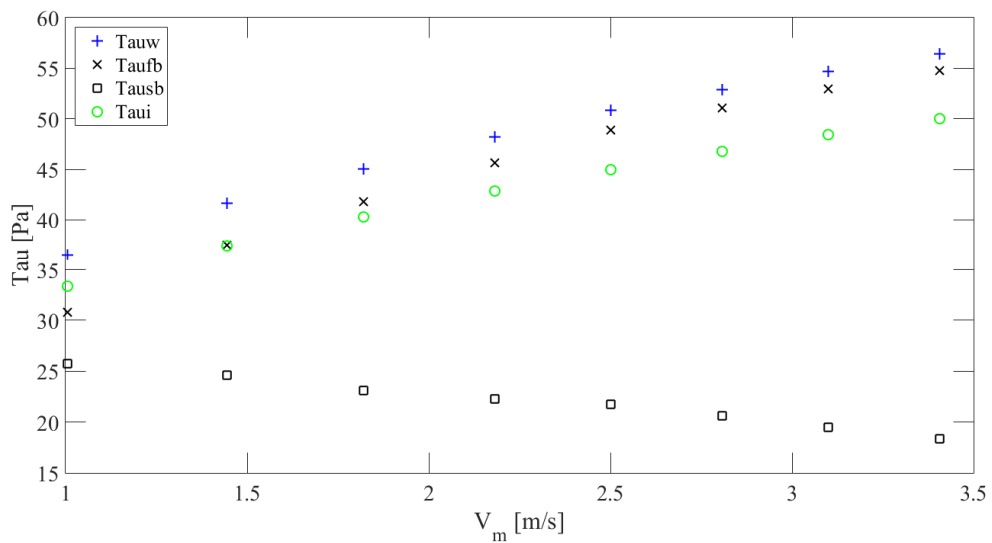
Určení třecího napětí na rozhraní vrstev je jedno z klíčových částí hodnoceného dvouvrstvého modelu. Zejména z důvodu odlišnosti od ostatních popsanych modelů, které uvažují předpoklad, že třecí napětí na rozhraní vrstev je stejné jako třecí napětí v horní vrstvě působící na stěně potrubí. Matematický dvouvrstvý model dle Matouška a kol. (2015) tento předpoklad nevyužívá a řeší tyto napětí zvlášť za pomoci odlišných hydraulických poloměrů.

### 6.3.1 Vyhodnocení průběhu napětí

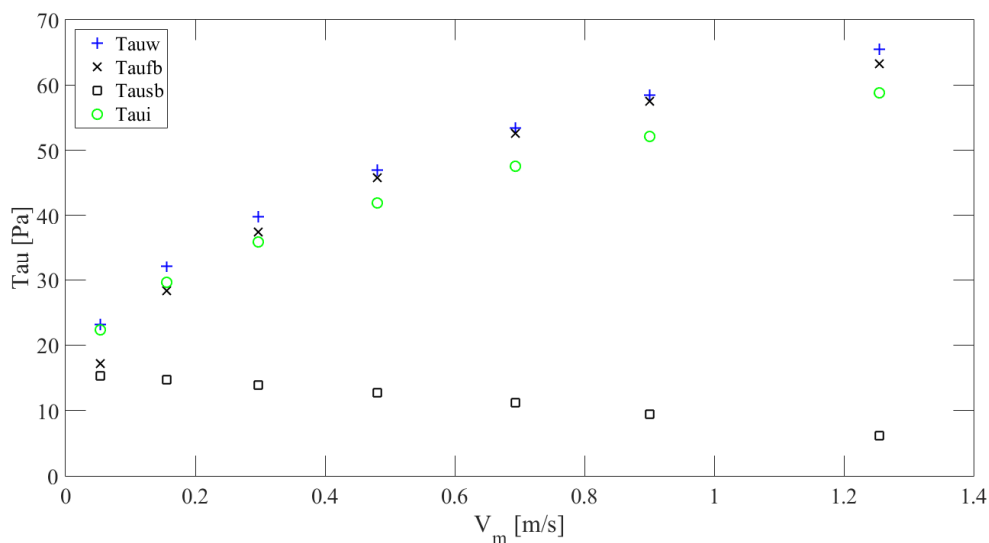
Pro vyhodnocení tohoto předpokladu byl využit predikční model a experimentální data ze tří měření. Výsledný průběh napětí lze vidět na níže uvedených obrázcích (Obr. č. 55, Obr. č. 56 a Obr. č. 57).



Obr. č. 55: Průběh napětí z měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205a



Obr. č. 56: Průběh napětí z měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a



Obr. č. 57: Průběh napětí z měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c

Průběh třecího napětí na stěně potrubí v horní vrstvě  $\tau_w$  (+) a třecí napětí na rozhraní obou vrstev  $\tau_i$  (o) je viditelně odlišný. Hodnota třecího napětí na hraně vrstev  $\tau_i$  je při vyšších rychlostech až o 14 % nižší, než třecí napětí na stěně potrubí  $\tau_w$ . Zároveň je patrné, že zvyšováním rychlostí proudění je pokles třecího napětí na hraně obou vrstev větší, než tomu je u třecího napětí na stěně potrubí. To potvrzuje předpoklad, že průběhy obou napětí stejná nejsou a je vhodné je počítat zvlášť.

Porovnáním všech třech měření je dále patrné, že zvyšováním viskozity nosné kapaliny se rozdíl zmíněných napětí zvyšuje. U prvního měření je tedy rozdíl nejmenší a u třetího největší. Zároveň lze z obrázků vyčíst zvyšující se hodnoty třecího napětí působící nosnou kapalinou v dolní vrstvě modelu  $\tau_{fb}$  způsobené zvyšující se viskozitou nosné kapaliny.

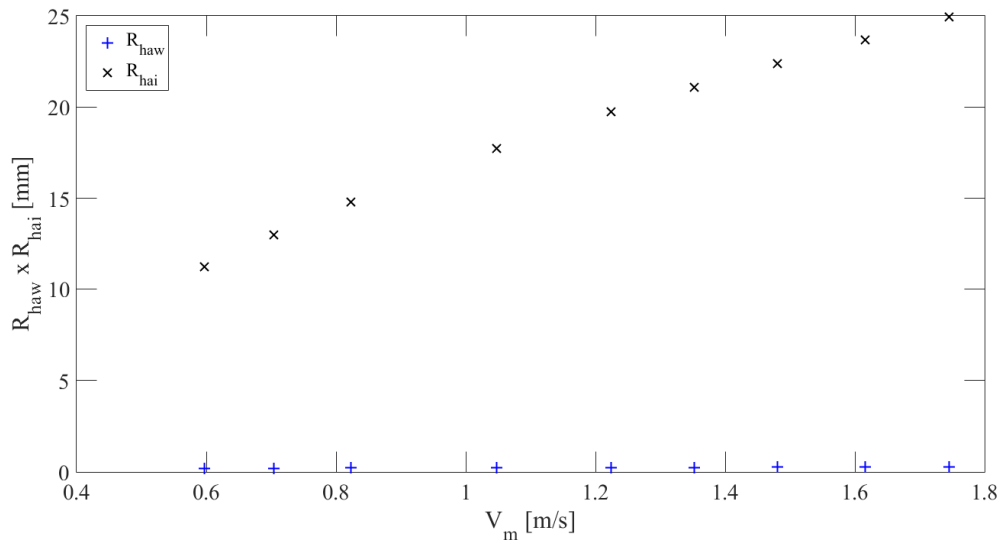
### 6.3.2 Vyhodnocení hydraulických poloměrů

V předchozí kapitole bylo ověřeno, že třecí napětí na rozhraní obou vrstev a třecí napětí na stěně potrubí v horní vrstvě nemají stejný průběh a je tedy vhodné je počítat zvlášť. Řešením výpočtu těchto třecích napětí je stanovení hydraulického poloměru. Kde  $R_{hai}$  je hydraulický poloměr příslušící třecímu napětí na rozhraní obou vrstev a  $R_{haw}$  pak hydraulický poloměr třecího napětí působící na stěnu potrubí.

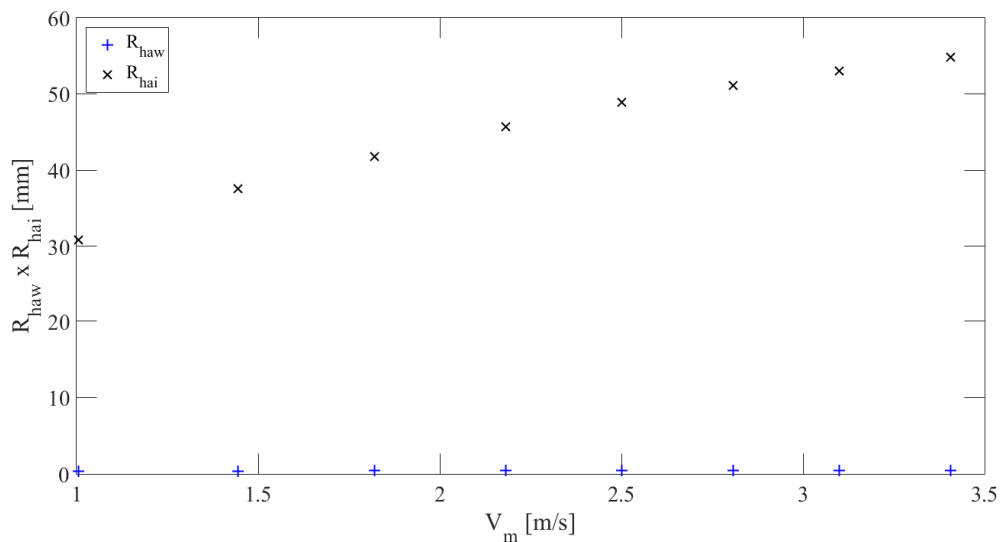
Jak se jednotlivé hydraulické poloměry příslušící určitému napětí chovají lze vidět na níže uvedených obrázcích. Hydraulický poloměr pro tření na stěně potrubí se zvyšuje velice pomalu. Naopak hydraulický poloměr pro tření na hraně obou vrstev se s narůstající

rychlostí zvyšuje mnohem výrazněji. To je způsobeno zvyšující se výškou třecí vrstvy  $H_{sh}$ .

Porovnáním níže uvedených obrázků je možné si všimnout rozdílu v průběhu hydraulických poloměrů příslušící třecímu napětí na rozhraní obou vrstev. Odlišný průběh hydraulických poloměrů je v první řadě způsobený vlastností nosné kapaliny a v druhé pak různou objemovou koncentrací pevných částic.

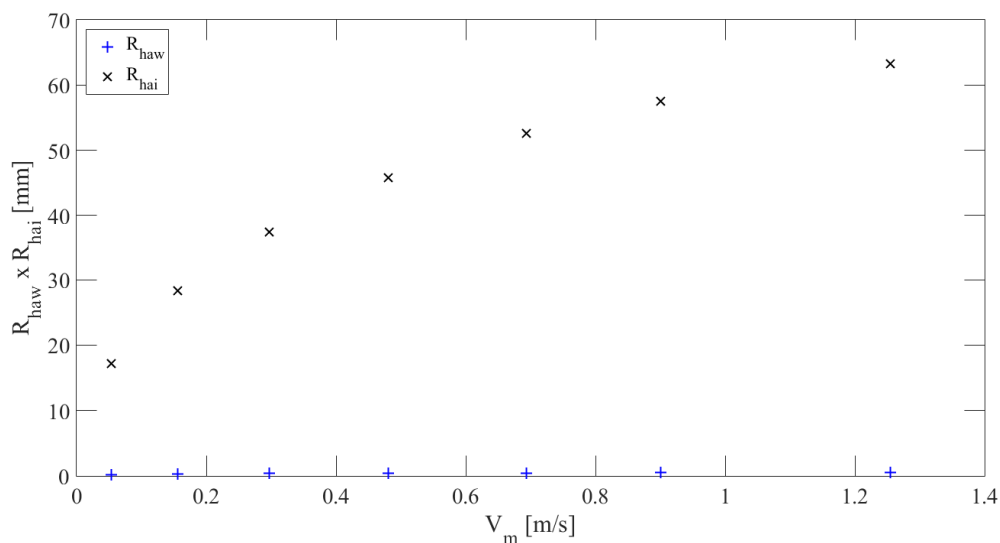


**Obr. č. 58: Průběh hydraulických poloměrů  $R_{hai}$  a  $R_{hw}$  pro měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205a**

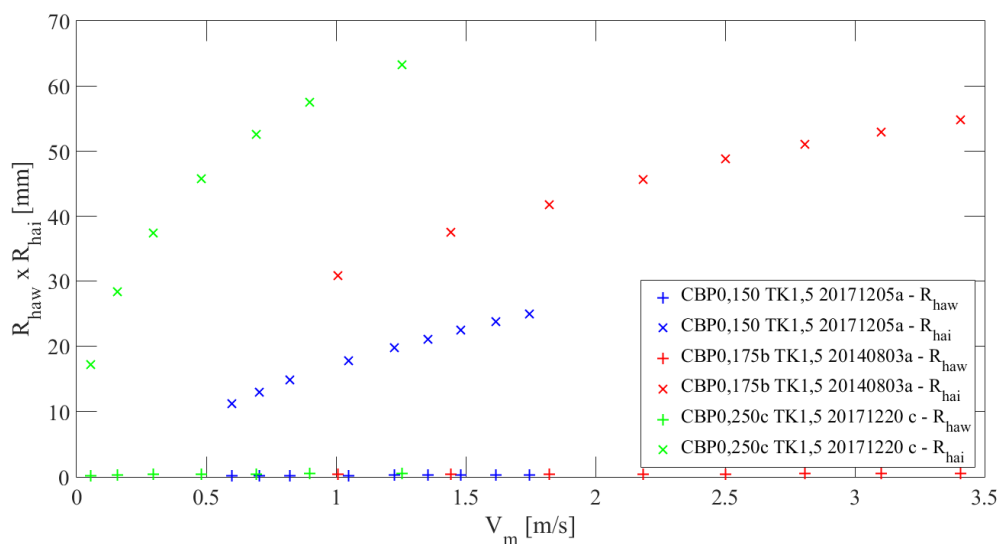


**Obr. č. 59: Průběh hydraulických poloměrů  $R_{hai}$  a  $R_{hw}$  pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a**





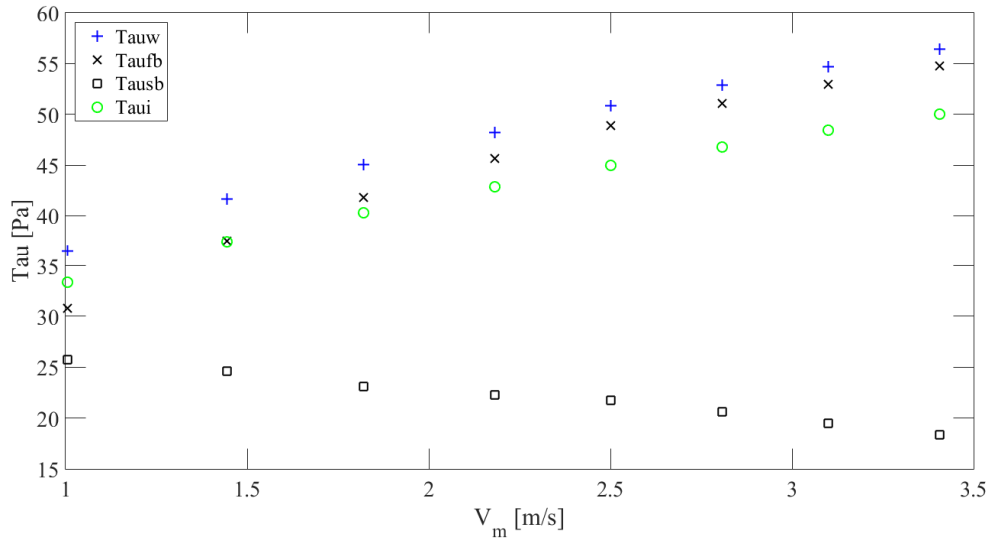
Obr. č. 60: Průběh hydraulických poloměrů  $R_{hai}$  a  $R_{hw}$  pro měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_c



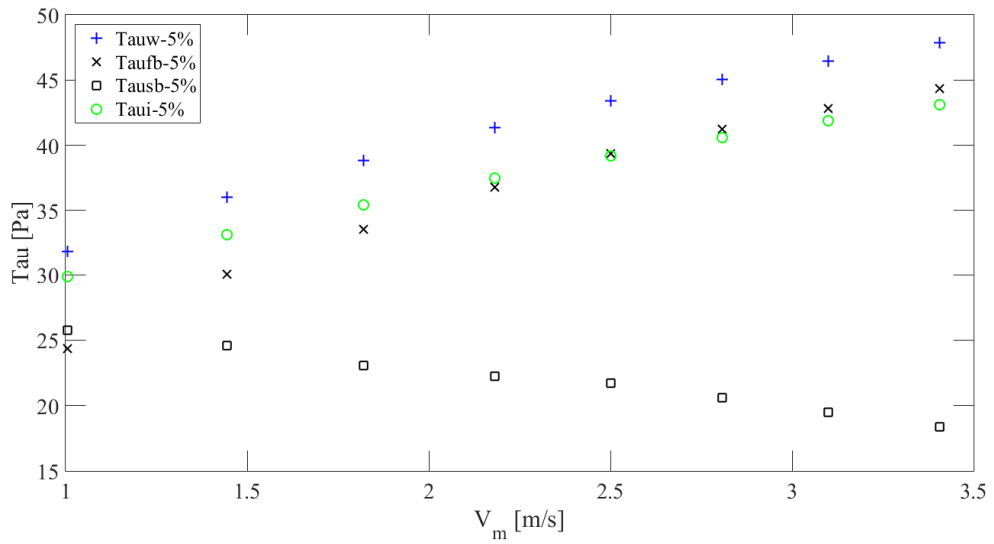
Obr. č. 61: Průběh hydraulický poloměrů  $R_{hai}$  a  $R_{hw}$  pro všechny tři měření

### 6.3.3 Citlivostní analýza změny reologických parametrů na třecích napětí

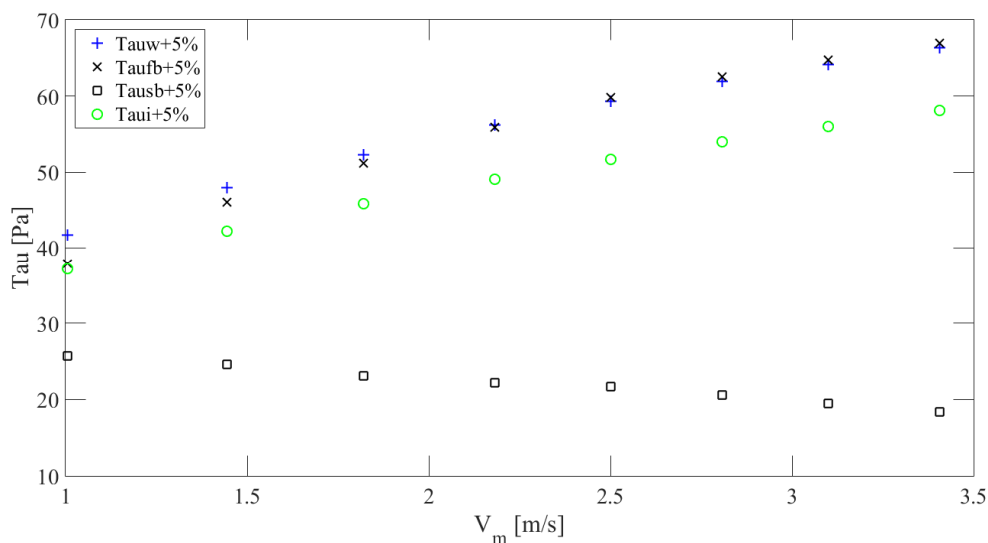
Z důvodu změny reologických parametrů newtonské kapaliny během měření je vhodné, provést citlivostní analýzu i u třecích napětí, které jsou předmětem této kapitoly. Tato analýza je, obdobně jako předchozí, provedena na predikční formě dvouvrstvého modelu dle Matouška a kol. (2015). Reologické parametry však nejsou měněny zvlášť, ale jsou všechny navýšeny, nebo sníženy celkově o 5 %.



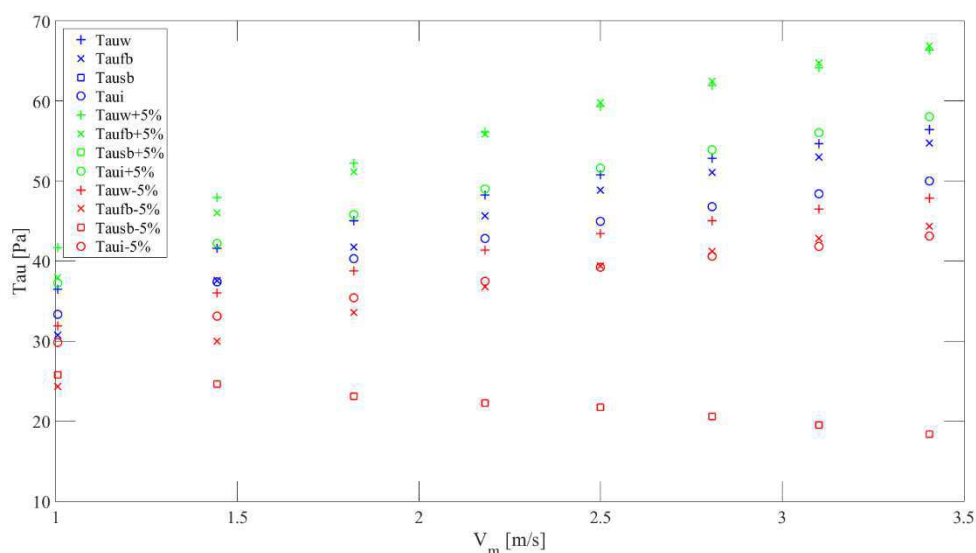
**Obr. č. 62: Výsledná napětí při použití počátečních reologických parametrů pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a**



**Obr. č. 63: Výsledná napětí při snížení reologických parametrů o 5 % pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a**



**Obr. č. 64: Výsledná napětí při zvýšení reologických parametrů o 5 % pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a**



**Obr. č. 65: Celkové vyhodnocení napětí při změně reologických parametrů pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a**

Mechanické tření vyvolané posunem dolní vrstvy  $\tau_{sb}$  pevných částic se nemění, protože není závislé na nosné neneutonské kapalině. Ostatní třecí napětí se však mění. Při snížení reologických parametrů se všechny napětí snižují a při zvýšení naopak zvyšují ovšem vždy v jiné míře.

Zvýšením reologických parametrů se rozdíl mezi třecím napětím na rozhraní vrstev  $\tau_i$  (o) a třecím napětím na stěně potrubí v horní vrstvě  $\tau_w$  (+) zvyšuje. Jejich snížením je pak rozdíl menší.

Citlivostní analýzou závislosti reologických parametrů na výsledných napětích se ukázalo, že i relativně malá změna reologických parametrů může výsledek třecích napětí značně ovlivnit.

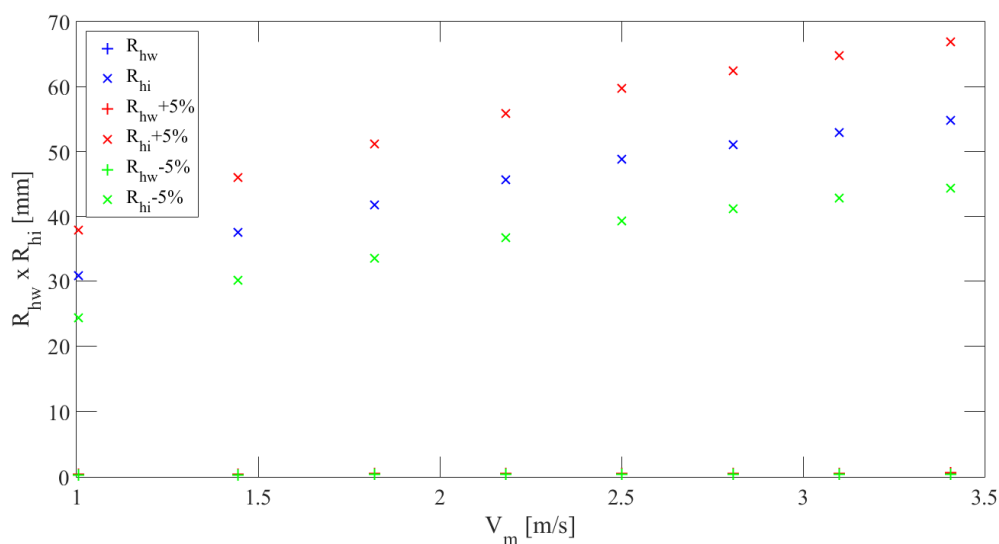
Nejlépe je to vidět na třecím napětí dolní vrstvy  $\tau_{fb}$  (x), které se při snížení parametrů o 5 % téměř rovná napětí na rozhraní vrstev  $\tau_i$  (o) a při zvýšení naopak napětí na stěně potrubí v horní vrstvě  $\tau_w$  (+).

### 6.3.4 Citlivostní analýza změny reologických parametrů na hydraulických poloměrech

Citlivostní analýza hydraulických poloměrů pro jednotlivá zájmová třecí napětí této kapitoly byla vyhodnocena na stejných podmínkách jako v kapitole předešlé.

Její výsledky, které lze vidět níže, nejsou nijak překvapivé. Hydraulický poloměr třecího napětí působící na stěnu potrubí je téměř konstantní a třecí napětí na rozhraní vrstev nikoliv. Při zvýšení reologických parametrů se hodnoty hydraulického poloměru příslušící třecímu napětí na rozhraní vrstev zvyšují také a při jejich snížení jeho hodnoty naopak klesají.

Podstatné je ovšem to, že i při relativně malých změnách reologických parametrů, indikují hodnoty hydraulického poloměru  $R_{hi}$  výrazné změny.



Obr. č. 66: Celkové vyhodnocení hydraulických poloměrů při změně reologických parametrů pro měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803a

## 7. Závěr

Hlavním úkolem diplomové práce bylo sestavení vhodného dvouvrstvého modelu pro matematický popis proudění hrubozrnné směsi s neneutonskou nosnou kapalinou a ověření jeho predikční schopnosti na výsledcích vlastního experimentálního měření. Dílčími cíli práce pak bylo vyhodnocení vlivu reologických parametrů na výsledky modelu, vyhodnocení určení hydraulického poloměru pro stanovení třecího napětí na povrchu sunutého lože a vyhodnocení určení součinitele ztráty tření na rozhraní vrstev. Aby bylo hodnocení dvouvrstvého modelu dostatečně komplexní, byla poskytnutá data rozšířena o vlastní měření. Tato měření byla provedena pro nosné kapaliny s nízkou a vysokou zdánlivou viskozitou.

Za pomoci těchto experimentálních dat byla provedena citlivostní analýza, která ukázala, že zvolený predikční dvouvrstvý model je ze tří reologických parametrů neneutonské nosné kapaliny nejvíce citlivý na tokovém indexu  $n$ . Pokud se však uváží případná změna reologických parametrů během měření a citlivost zároveň, zdá se být důležitost tokového indexu  $n$  a součinitele konzistence  $K$  pro hodnocený model stejná. Naopak třetí reologický parametr počáteční napětí  $\tau_y$ , přestože se při měření měnil nejvíce, má na výsledky predikčního modelu vliv minimální. Dalším předmětem citlivostní analýzy bylo vyhodnocení dat odečítaných vizuálním způsobem. Tato část citlivostní analýzy ukázala, že citlivost modelu na výšce vrstvy pevných částic  $y_b$  a třecí vrstvy  $H_{sh}$  je o mnoho menší než na reologických parametrech nosné kapaliny.

Po citlivostní analýze následovalo porovnání zvoleného dvouvrstvého modelu s alternativním modelem dle Krupičky (2014), který pro výpočty neuvažuje zjednodušující předpoklad proudění v kruhovém průřezu v horní vrstvě, ale počítá se skutečným tvarem průřezové plochy nad zrnitým ložem. Toto vyhodnocení pak ukázalo, že zavedené zjednodušení nevede k výrazně horším výsledkům. Naopak se zjistilo, že dvouvrstvý model, který je předmětem této práce, vykazuje lepší výsledky než alternativní testovaný model. To bylo pravděpodobně způsobeno modelováním třecí vrstvy na rozhraní vrstev ve dvouvrstvě modelu. Třecí vrstva totiž není v alternativním modelu uvažována.

Následně se přistoupilo k samotnému vyhodnocení predikce dvouvrstvého modelu. To ukázalo, že výsledky predikčního modelu se velice dobře blíží všem naměřeným

experimentálními daty, které byly provedeny při proudění nosných kapalin různých reologických parametrů.

Výsledky třecích napětí predikčního modelu ukázaly, že průběhy třecího napětí na stěně potrubí a třecího napětí na rozhraní vrstev se vzájemně liší. To je velice důležitý výsledek, který ukazuje, že stanovení těchto napětí za pomoci rozdílných hydraulických poloměrů je správné řešení.

Navazující hodnocení výsledků hydraulických poloměrů ukázala, že vlivem zvyšující se rychlosti proudění hydraulický poloměr příslušící třecímu napětí na stěně potrubí zůstává téměř konstantní, ale druhý hydraulický poloměr příslušící třecímu napětí na rozhraní vrstev stoupá.

Výše uvedené výsledky vypovídají o tom, že hodnocený dvouvrstvý model se ubírá správnou cestou a je dobré s ním dále pracovat a rozšiřovat ho. Dle výsledků citlivostní analýzy a porovnání s experimentálními daty se jeho vhodným rozšířením jeví doplněk předpovídající změny reologických parametrů neneutonské nosné kapaliny během jejího proudění například vlivem změny teploty, či výskytu pevných částic.

## Seznam literatury a podkladů

1. Chilton, R. A., Stainsby, R., 1998, Pressure loss equations for laminar and turbulent non-Newtonian pipe flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(5).
2. Chilton, RA and R Stainsby, 1998, "Pressure loss equations for laminar and turbulent non-Newtonian pipe flow", *Journal of Hydraulic Engineering* 124(5) pp. 522 ff
3. Kesely, M., 2014, Vyhodnocování ztrát třením při proudění neneutonských směsí v potrubí (Evaluation of Frictional Headloss in Pipe Flow of non-Newtonian Mixtures). Bc thesis, Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Hydraulics and Hydrology, Praha (in Czech).
4. Kesely, M., 2016, Vyhodnocení usazovacích rychlostí hrubozrnných částic ve visko-plastické kapalině a třecích ztrát při proudění jejich směsí (Evaluation of settling velocity of coarse particles in visco-plastic fluid and frictional loss in complex slurry flow). Ing thesis, Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Hydraulics and Hydrology, Praha (in English).
5. Matoušek, V., 2004, Dredge Pumps and Slurry Transport. Lecture notes. Delft University of Technology.
6. Matoušek, V., 2013, Základy proudění neneutonských kapalin. HY3V course slides, ČVUT, Praha.
7. Matoušek, V., Pěník, V., Pullum, L., and Chryss, A. 2015. Experimental study of bed friction in stratified flow with viscoplastic carrier in pipe. Proc. 17th Int. Conference on Transport & Sedimentation of Solid Particles, Delft, Netherlands, pp. 175-184 (ISBN 0867-7964)
8. Pěník, V., Kesely, M., Matoušek, V., 2015, Coarse particle support in turbulent flow of visco-plastic carrier. International Conference on Experimental Fluid Mechanics 2015, Prague, Czech Republic.
9. Pullum, L., Graham, L., Slatter, P., 2004. A non-Newtonian two-layer model and its application to high density hydrotransport. 16th International Conference on Hydrotransport. Part 2. 579-593.
10. Pullum, L., Sellgren A., 2013, Non-Settling Slurry Basics. GIW Slurry Course.

11. Rojas, M. R., Saez, A. E., 2012, Two-layer model for horizontal pipe flow of Newtonian and non-Newtonian settling dense slurries. *Industrial & Chemical Research*, 51(20),
12. Sandip, K. L., 2010, A Study on Slurry Flow Modelling in Pipeline. PhD thesis, National Institute of Technology, Department of Chemical Engineering, Dungapur, India.
13. Slatter, P. T., 1999, The role of rheology in the pipelining of mineral slurries, *Mineral Processing and Extractive Metallurgy*, 20(1).
14. Swamee, P. K., Aggarwal, N., 2011, Explicit equations for laminar flow of Herschel-Bulkley fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 89(6).
15. Wilson, K. C. et al. *Slurry Transport Using Centrifugal Pumps*. 3rd ed. New York: Springer, 2006. ISBN 978-0-387-23262-1.
16. Krupička, J., 2014, Mathematical and Physical Modelling of Pipe Flow of Settling Slurries, Doctoral thesis, Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Hydraulics and Hydrology, Prague



## Seznam příloh

Příloha č. 1: Výsledky měření CBP0_130a_TK1_5_20140729_a.....	90
Příloha č. 2: Výsledky měření CBP0_130a_TK1_5_20140729_b.....	91
Příloha č. 3: Výsledky měření CBP0_150_TK1_5_20171205a.....	92
Příloha č. 4: Výsledky měření CBP0_175b_TK1_5_20140803.....	93
Příloha č. 5: Výsledky měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_a.....	94

## Seznam obrázků

Obr. č. 1: Popis Newtonského zákona viskozity .....	12
Obr. č. 2: Newtonské kapaliny [6].....	12
Obr. č. 3: Neneutonské kapaliny [6] .....	12
Obr. č. 4: Dvouparametrický – Binghamův model.....	14
Obr. č. 5: Dvouparametrický mocninový .....	15
Obr. č. 6: Mocninový tříparametrický – Bulkley – Herschelův .....	15
Obr. č. 7: Typ: kužel – deska [6]      Obr. č. 8: Typ dva soustředěné válce [6] .....	16
Obr. č. 9: Struktura proudu nN a N kapaliny [6] .....	17
Obr. č. 10: Rovnice proudění pro jednotlivé typy reologických modelů neneutonských kapalin [6].....	18
Obr. č. 11: Rovnice zachování hybnosti [11] .....	19
Obr. č. 12: Distribuce třecího napětí [15] .....	20
Obr. č. 13: Režim proudění směsí s pevnými částicemi [12] .....	22
Obr. č. 14: Napětí způsobené kontaktem zrn [5] .....	23
Obr. č. 15: Typ proudění směsí s pevnými částicemi [12] .....	24
Obr. č. 16: Dvouvrstvý model [5].....	25
Obr. č. 17: Schématické znázornění rozložení rychlosti a koncentrace [5].....	26
Obr. č. 18: Plně stratifikované a heterogenní proudění [5].....	27
Obr. č. 19: Obecný dvouvrstvý model [9] .....	31
Obr. č. 20: Rozdělení napětí dle plochy symetrie [9] .....	33
Obr. č. 21: Změna normalizovaného průměrného mezifázového napětí s polohou vrstvy [9].....	34
Obr. č. 22: Model dle Rojas a Saez [10].....	34
Obr. č. 23: Schématické zobrazení usazeného materiálu – sunuté lože [7].....	37
Obr. č. 24: Schéma experimentálního okruhu DN50 [7].....	44
Obr. č. 25: Carbopol Ultrez 10 Polymer – Viskozita vs. pH [7] .....	45
Obr. č. 26: Naměřená I – V křivka z měření CBP0_150_TK1_5_20171205_a.....	49
Obr. č. 27: Naměřená křivka dopravní koncentrace z měření CBP0_150_TK1_5_20171205_a.....	49
Obr. č. 28: Fotografický záběr na sunoucí se lože.....	51

Obr. č. 29: Výsledky vizuálního pozorování výšky lavice $y_{bD}$ a třecí vrstvy $H_{shD}$ pro měření CBP0_150_TK1_5_20171205_a.....	52
Obr. č. 30: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na počátečním napětí $\tau_y$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	55
Obr. č. 31: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na počátečním napětí $\tau_y$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	56
Obr. č. 32: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti dolní vrstvy $V_b$ na počátečním napětí $\tau_y$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	56
Obr. č. 33: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na součiniteli konzistence $K$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	57
Obr. č. 34: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na součiniteli konzistence $K$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	57
Obr. č. 35: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti lože na součiniteli konzistence $K$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	58
Obr. č. 36: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na tokovém indexu $n$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	58
Obr. č. 37: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na tokovém indexu $n$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	59
Obr. č. 38: Zobrazení citlivosti výpočtu rychlosti lože na tokovém indexu $n$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	59
Obr. č. 39: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na výšce třecí vrstvy $H_{shD}$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	61
Obr. č. 40: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na výšce třecí vrstvy $H_{shD}$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	61
Obr. č. 41: Zobrazení citlivosti predikce tlakového gradientu na výšce vrstvy pevných částic $y_{bD}$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	62
Obr. č. 42: Zobrazení citlivosti predikce dopravní koncentrace na výšce vrstvy pevných částic $y_{bD}$ pro měření CBP0_175a_TK1_5_20140803_a.....	62
Obr. č. 43: Porovnání modelů pro měření CBP0_150a_TK1_5_20171205_a.....	64
Obr. č. 44: Porovnání modelů pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803_a.....	64
Obr. č. 45: Porovnání modelů pro měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	65
Obr. č. 46: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0_150a_TK1_5_20171205_a.....	65

Obr. č. 47: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803_a.....	66
Obr. č. 48: Hodnocení tlakového gradientu předpovězený predikční formou modelu pro měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	66
Obr. č. 49: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0_150a_TK1_5_20171205_a.....	67
Obr. č. 50: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803_a.....	67
Obr. č. 51: Hodnocení dopravní koncentrace předpovězená predikční formou modelu pro měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	68
Obr. č. 52: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0_150a_TK1_5_20171205_a.....	68
Obr. č. 53: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803_a.....	69
Obr. č. 54: Hodnocení rychlosti vypočtené predikční formou modelu pro měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	69
Obr. č. 55: Průběh napětí z měření CBP0_150_TK1_5_20171205a.....	70
Obr. č. 56: Průběh napětí z měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	70
Obr. č. 57: Průběh napětí z měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	71
Obr. č. 58: Průběh hydraulických poloměrů $R_{hai}$ a $R_{hw}$ pro měření CBP0_150_TK1_5_20171205a.....	72
Obr. č. 59: Průběh hydraulických poloměrů $R_{hai}$ a $R_{hw}$ pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	72
Obr. č. 60: Průběh hydraulických poloměrů $R_{hai}$ a $R_{hw}$ pro měření CBP0_250c_TK1_5_20171220_c.....	73
Obr. č. 61: Průběh hydraulický poloměrů $R_{hai}$ a $R_{hw}$ pro všechny tři měření.....	73
Obr. č. 62: Výsledná napětí při použití počátečních reologických parametrů pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	74
Obr. č. 63: Výsledná napětí při snížení reologických parametrů o 5 % pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	74
Obr. č. 64: Výsledná napětí při zvýšení reologických parametrů o 5 % pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	75

Obr. č. 65: Celkové vyhodnocení napětí při změně reologických parametrů pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a.....	75
Obr. č. 66: Celkové vyhodnocení hydraulických poloměrů při změně reologických parametrů pro měření CBP0_175b_TK1_5_20140803a .....	76

## Seznam tabulek

Tab. č. 1: Převzatá měření a jejich reologické parametry.....	46
Tab. č. 2: Vlastní měření a jejich reologické parametry .....	46
Tab. č. 3: Měření reologických parametrů.....	48

## Seznam symbolů

$\Delta P$	tlakové ztráty	[Pa]
$\mu_c$	Cassonův součinitel konzistence	[Pa.sn]
A	plocha	[m <sup>2</sup> ]
a	koeficient	[-]
b	koeficient	[-]
c	koeficient	[-]
C	objemová koncentrace	[-]
$C_a$	Cassonovo číslo	
$c_b$	koncentrace usazeného materiálu	[-]
$C_{vb}$	koncentrace částic v usazené vrstvě	[-]
$C_{vd}$	dopravní koncentrace	[-]
$C_{vi}$	objemová koncentrace pevných částic	[-]
d	průměr částice	[m]
D	průměr potrubí	[m]
$D_e$	ekvivalentní průměr	[m]
$dP/dx$	tlakový gradient	[-]
$du/dy$	rychlostní gradient	[s <sup>-1</sup> ]
F	síla	[N]
$F_N$	normálová síla	[N]
$F_w$	normálová síla zohledňující gravitační efekt sypkého materiálu	[N]
g	gravitační zrychlení	[m.s <sup>-2</sup> ]
He	Hedstromovo číslo	[-]
$H_{sh}$	výška třecí vrstvy	[m]
$I_m$	hydraulický gradient	[-]
K	součinitel konzistence	[Pa.sn]
L	délka úseku	[m]
O	obvod	[-]
$O_h$	délka stěny potrubí v horní vrstvě	[m]
$O_i$	délka hranice mezi dvěma vrstvami	[m]
Q	průtok	[m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> ]
r	poloměr	[-]
Re	Reynoldsovo číslo	[-]

$Re_{nN}$	Reynoldsovo číslo neneutonské kapaliny	[-]
$R_{hai}$	hydraulický poloměr příslušící napětí od částic v horní vrstvě	[m]
$R_{haw}$	hydraulický poloměr příslušící napětí na stěnu potrubí v horní vrstvě	[m]
$R_{hbw}$	hydraulický poloměr příslušící napětí od nesoucí kapaliny v dolní vrstvě	[m]
$S$	specifická hustota usazeného materiálu	[-]
$\tan \varphi'$	koeficient vnitřního tření	[-]
$V_m$	střední rychlost proudění	[m.s <sup>-1</sup> ]
$w$	rychlost sedimentace	[m.s <sup>-1</sup> ]
$X$	koeficient	[-]
$\beta$	úhel	[°]
$\varepsilon$	koeficient	[-]
$\eta_B$	Binghamská viskozita	[Pa.s]
$\lambda$	Darcy-Weisbachův třecí koeficient	[-]
$\mu$	dynamická viskozita	[Pa.S]
$\mu_s$	Coulombův třecí koeficient	[-]
$\xi$	koeficient	[-]
$\pi$	Ludolfovo číslo	[-]
$\rho$	hustota	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\tau$	smykové napětí	[Pa]
$\tau_0$	smykové napětí na stěně	[Pa]
$\tau_a$	třecí napětí na stěně potrubí	[Pa]
$\tau_b$	třecí napětí od sunoucího se usazeného sypkého materiálu	[Pa]
$\tau_c$	počáteční napětí	[Pa]
$\tau_{fb}$	třecí napětí dolní vrstvy vyvolené kapalinou	[Pa]
$\tau_{fi}$	třecí na mezivrstvě od nosné kapaliny	[Pa]
$\tau_i$	třecí napětí na stěnu třecí vrstvě	[Pa]
$\tau_{sb}$	třecí napětí horní vrstvy vyvolené částicemi	[Pa]
$\tau_{si}$	třecí na mezivrstvě od hrubozrnných částic	[Pa]
$\tau_w$	třecí napětí na stěně potrubí	[Pa]
$\tau_y$	počáteční napětí	[Pa]



## Index

f	kapalina
nN	neneutonská
1	první vrstva
2	druhá vrstva
s	částice
w	voda
c	Cassonovo
h	horní vrstva
n	newtonská
i	třetí vrstva mezi dolní a horní vrstvou
a	horní vrstva
b	dolní vrstva

## Přílohy

**Příloha č. 1: Výsledky měření CBP0\_130a\_TK1\_5\_20140729\_a**

Point	$V_m$ [m.s <sup>-1</sup> ]	$I_m$ [-]	$C_{vd}$ [-]	$y_{bD}$ [-]	$H_{sD}$ [-]
1	0.0248	0.0335	-0.0373	0.35	0.02
2	0.1319	0.0622	-0.0011	0.33	0.03
3	0.2557	0.0854	0.0004	0.33	0.08
4	0.4849	0.1079	0.0037	0.32	0.08
5	0.7498	0.1541	0.0106	0.26	0.09
6	0.8828	0.1648	0.0180	0.22	0.11
7	1.1179	0.1676	0.0341	0.18	0.12
8	1.3860	0.1751	0.0479		
9	1.6865	0.2262	0.0579		
10	2.0318	0.2647	0.0623		
11	2.4018	0.2974	0.0647		
12	2.7243	0.3229	0.0756		
13	2.9120	0.3420	0.0790		
14	3.1986	0.3748	0.0803		
15	3.6713	0.4392	0.0853		
16	3.9906	0.4866	0.0873		
Point	$\tau_y$ [Pa]	K [Pa.s <sup>n</sup> ]	n [-]	Temperature [°C]	
-	0.35	0.65	0.56	27.2	
-	0.35	0.61	0.56	31.1	

**Příloha č. 2: Výsledky měření CBP0\_130a\_TK1\_5\_20140729\_b**

Point	$V_m$ [m.s <sup>-1</sup> ]	$I_m$ [-]	$C_{vd}$ [-]	$y_{bD}$ [-]	$H_{sD}$ [-]
1	0.0322	0.0609	-0.14685	0.53	0
2	0.1815	0.1400	-0.00105	0.53	0.02
3	0.4377	0.2045	0.024491	0.43	0.07
4	0.8349	0.2655	0.083134	0.41	0.01
5	1.4394	0.3238	0.12852	0.39	0.012
6	1.7076	0.3506	0.138342	0.37	0.013
7	1.9444	0.3588	0.142486	0.35	0.015
8	2.1750	0.3600	0.144018		
9	2.3966	0.3637	0.143635		
10	2.6090	0.3710	0.144111		
11	2.8145	0.3816	0.143984		
12	3.0132	0.3959	0.147338		
13	3.2372	0.4127	0.151271		
14	3.4332	0.4294	0.156414		
15	3.6235	0.4481	0.160128		
16	3.8039	0.4629	0.166271		
Point	$\tau_y$ [Pa]	$K$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	$n$ [-]	Temperature [°C]	
1	0.35	0.61	0.56	31.1	
16	0.21	0.28	0.64	34.3	
16	0.06	0.28	0.63	33	

**Příloha č. 3: Výsledky měření CBP0\_150\_TK1\_5\_20171205a**

Point	$V_m$ [m.s <sup>-1</sup> ]	$I_m$ [-]	$C_{vd}$ [-]	$y_{bD}$ [-]	$H_{sD}$ [-]
1	0.0379	0.0629	-0.0973	0.39	0.00
2	0.0725	0.0802	-0.0380	0.39	0.00
3	0.1227	0.0998	-0.0144	0.39	0.02
4	0.1906	0.1225	-0.0016	0.35	0.04
5	0.2673	0.1427	0.0057	0.31	0.06
6	0.3726	0.1644	0.0187	0.29	0.06
7	0.4920	0.1886	0.0215	0.29	0.06
8	0.5976	0.2072	0.0237	0.29	0.08
9	0.7046	0.2224	0.0311	0.29	0.08
10	0.8233	0.2392	0.0364	0.28	0.10
11	1.0481	0.2684	0.0470	0.28	0.10
12	1.2237	0.2832	0.0504	0.26	0.12
13	1.3529	0.2950	0.0542	0.24	0.12
14	1.4807	0.3014	0.0568	0.22	0.13
15	1.6161	0.3055	0.0600	0.22	0.14
16	1.7458	0.3082	0.0624	0.20	0.15
17	1.8749	0.3114	0.0648	0.19	0.14
18	2.0046	0.3174	0.0678		
19	2.1236	0.3239	0.0699		
20	2.2567	0.3314	0.0710		
21	2.5354	0.3465	0.0741		
22	3.0816	0.3994	0.0734		
23	3.5575	0.4739	0.0741		
24	4.0426	0.5606	0.0757		
25	4.4808	0.6362	0.0772		
Point	$\tau_y$ [Pa]	K [Pa.s <sup>n</sup> ]	n [-]	Temperature [°C]	
1	0.79	1.44	0.49	18.5	
7	1.13	1.21	0.51	20.5	
16	1.35	1.06	0.54	20.5	
16	1.55	1.16	0.52	21.0	

**Příloha č. 4: Výsledky měření CBP0\_175b\_TK1\_5\_20140803**

Point	$V_m$ [m.s <sup>-1</sup> ]	$I_m$ [-]	$C_{vd}$ [-]	$y_{bD}$ [-]	$H_{sD}$ [-]
1	-0.0059	0.0334		0.32	0.03
2	-0.0063	0.0868		0.30	0.05
3	0.0421	0.1425	-0.1046	0.30	0.05
4	0.1480	0.1958	-0.0100	0.29	0.06
5	0.4273	0.2685	0.0431	0.27	0.08
6	1.0063	0.3715	0.0594	0.25	0.09
7	1.4441	0.4108	0.0681	0.25	0.10
8	1.8208	0.4341	0.0749	0.23	0.12
9	2.1826	0.4584	0.0769	0.22	0.13
10	2.5002	0.4796	0.0788	0.20	0.13
11	2.8075	0.4959	0.0799		
12	3.1006	0.5087	0.0770		
13	3.4055	0.5174	0.0714		
14	3.7090	0.5502	0.0752		
15	3.9757	0.5920	0.0715		
16	4.2275	0.6262	0.0746		
17	4.5123	0.6699	0.0763		
18	4.7634	0.7088	0.0792		
Point	$\tau_y$ [Pa]	$K$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	$n$ [-]	Temperature [°C]	
1	3.76	2.03	0.48		

**Příloha č. 5: Výsledky měření CBP0\_250c\_TK1\_5\_20171220\_a**

Point	$V_m$ [m.s <sup>-1</sup> ]	$I_m$ [-]	$C_{vd}$ [-]	$y_{bD}$ [-]	$H_{sD}$ [-]
1	0.0011	0.1723		0.22	0.04
2	0.0034	0.1879		0.22	0.04
3	0.0354	0.2215	-0.2865	0.22	0.04
4	0.0539	0.2445	-0.1446	0.22	0.04
5	0.1563	0.3225	0.0346	0.21	0.05
6	0.2973	0.3902	0.0562	0.19	0.07
7	0.4809	0.4483	0.0620	0.18	0.09
8	0.6936	0.5097	0.0741	0.15	0.12
9	0.9003	0.5529	0.0730	0.13	0.15
10	1.2552	0.5727	0.0631	0.08	0.23
11	1.4962	0.6016	0.0582	0.05	0.28
12	1.7275	0.6188	0.0602	0.01	0.35
13	1.9542	0.6351	0.0612		
14	2.1867	0.6424	0.0632		
15	2.4703	0.6524	0.0624		
16	2.7206	0.6672	0.0630		
17	2.9690	0.6800	0.0638		
18	3.3294	0.6985	0.0647		
19	3.6438	0.7112	0.0653		
20	3.9287	0.7182	0.0626		
Point	$\tau_y$ [Pa]	$K$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	$n$ [-]	Temperature [°C]	
1	8.32	4.56	0.46	18.5	
9	8.79	4.90	0.46	21.5	
15	6.93	4.30	0.46	22.5	
20	5.06	3.74	0.46	28.5	