Diplomová práce

České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra počítačů

Identifikace vlastních klíčů v systému generálního a hlavních klíčů

Marek Kryška

Vedoucí: Radomír Černoch, MSc.
Obor: Otevřená informatika
Studijní program: Umělá inteligence
Listopad 2017

Poděkování

Rád bych poděkoval mému vedoucímu Radomíru Černochovi MSc., za příležitost pracovat na tomto projektu, za trpělivou ochotu při vymýšlení, testování a sepisování tohoto textu a za jeho neskonalý optimismus a nadšení, které mi vždy velmi v řešení práce pomohlo.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

. . . . . .
Marek Kryška

V Praze, 12. listopadu 2017

Abstrakt

Řešením systému klíčů a zámků rozumíme fyzickou výrobu klíče a blokování v zámku. Návrh řešení musí odpovídat podmínkám, jenž jsou dané zákazníkem a říkají nám, jaké klíče otvírají které zámky v systému. Nalezení takového řešení je až na určitou třídu diagonálních lock-chartů, jak ukazuje relevantní literatura [14], dokázaný NP-úplný problém. Tato práce se zabývá převodem obecného zadání z této třídy na onu určitou třídu, jenž jsme schopni řešit polynomiální časovou složitostí.

Práce nejprve formalizuje problém a představuje čtenáři základní vhled do notace lock-chartů. Poté se snaží najít vhodný převod úlohy hledání vlastního lock-chartu do třídy problému P, kde zkouší aplikovat převody do bipartitních grafů anebo převody pomocí teorie množin. Ukazuje, že problém lze převést na třídu P jen pro určité typy zadání lock-chartu.

V praktické části pak představuje několik algoritmů s přidanými parametry, kterými práce zkouší různé přístupy k nalezení maximálního řešení. Uvádí algoritmy konečné a optimální jako je třeba SAT nebo různé stromové prohledávací struktury a algoritmy heuristické jako je metoda biklastrování a hladová kritéria. Práce ukazuje, že kombinací heuristických a optimálních algoritmů dosahujeme velmi dobrých výsledků v hledání vlastního lock-chartu.

Klíčová slova: lock-chart, klíč, zámek, diagonála

Vedoucí: Radomír Černoch, MSc.

Abstract

Lock-chart solving (also known as general and master key solving) is a process for designing mechanical keys and locks so that every key can open and be blocked in a certain user-defined system of locks. Solving this problem is proven as NP-*hard* problem except a class of diagonal lock-charts. Known literature [14] shows that diagonal lock-chart can be solved in polynomial time. This study goal is to extract diagonal lock-chart from general assigmennt.

Study formalizes problem and introduces basic insight into lock-chart notations. Then it will try to find suitable conversion of eigen lock-chart to a problem from P class. There are several ways of doing it from conversion to biparte graph to conversion by set theory, but none of them are applicable to general type of lock-chart.

In the practical chapters, the study introduces several algorithms with additional parameters, which examine different approaches of finding maximal binary diagonal. It introduces finity and optimal algorithms such as SAT solvers or two tree-search based procedures and also shows heuristic algorithms such as biclustering method and three greedy criterias. This thesis shows, that combination of heuristic and optimal algorithms can achieve very good results in finding eigen lock-chart.

Keywords: lock-chart, key, lock, diagonal

Title translation: Finding individual keys in a master-key system

Obsah

Obrázky

Tabulky

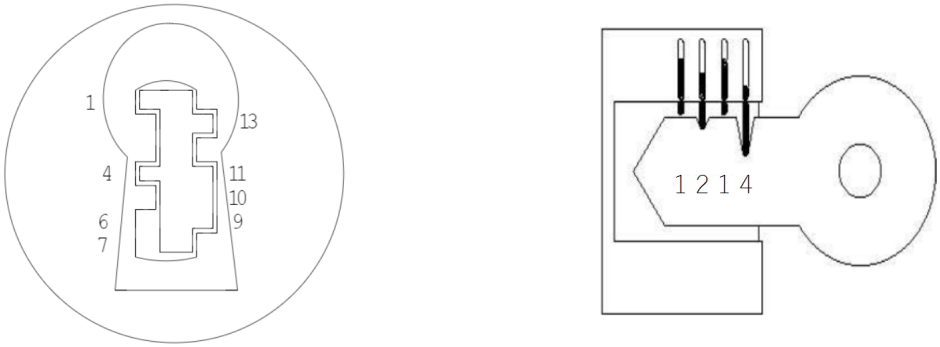
Kapitola 1

Úvod

Jen málo vynálezů provází lidskou historii tak dlouho jako mechanické zámky a klíče. Jejich počátky můžeme vystopovat do období Mezopotámie a pak další zdokonalení provedené starověkými Egypťany. Během průmyslové revoluce se i zámky a klíče dočkaly svého vylepšení, především zdokonalením od Linuse Yale Sr. a později Jr. Díky ceně mají dnes mechanické zámky největší zastoupení na trhu a vyrábí se ve velkých počtech. Stačí se jen zamyslet, kolik zámků jsme museli otevřít při cestě do práce anebo kolik klíčů nám cinká v kapse u kalhot.

Zámky a klíče zaujímají v naší kultuře neochvějné místo. Od běžného každodenního předmětu, bez kterého si neumíme představit život - zapomenutí klíčů doma je již ustáleným klišé pro začátek špatného dne - nebo pro romantizovanou verzi v rámci pořekadel, či nepolapitelného zloděje se šperhákem, jenž otevře cokoliv. Není divu, že otvírání zámků bez originálního klíče, tedy *lockpicking*, dokonce existuje ve formě sportu. Už samotný francouzsky král Ludvík XVI. byl vášnivým podporovatelem a účastníkem takových soutěží. Dnes se kromě kriminálních seriálů a filmů setkáme s lokcpickingem třeba v počítačových hrách, kde bez této schopnosti nejste schopni projít určenými lokacemi.

Mechanické zámky a klíče se vyznačují ještě jednou zvláštností a to nejen dobou, jenž slouží lidstvu. Ačkoliv moderní svět zažívá nástup elektronických zámků a jiných alternativních metod zabezpečení, mechanické zámky a klíče jako by tento fakt vůbec neohrožoval, naopak na trhu stále zaujímají dominantní místo. Můžeme tvrdit, že je to snad konzervativní povahou lidí a víry v ověřený způsob bezpečnosti nebo faktem, že fyzicky vyrobený klíč je bytelný a jen těžko jej něco poničí a například po vystavení extrémnějším teplotám či počasí (mráz, déšť, letní vedra) bude pravděpodobně stejně funkční. Reálný důvod bude praktičtější, výroba klíčů a zámků na mechanické bázi je stále nejlevnější, způsobem, ačkoliv do budoucna by se dalo očekávat, že cesta povede smíšením elektronických a mechanických zámků k zvýšení kvality zabezpečení.



Obrázek 1.1: Profil klíče a řezání klíče.

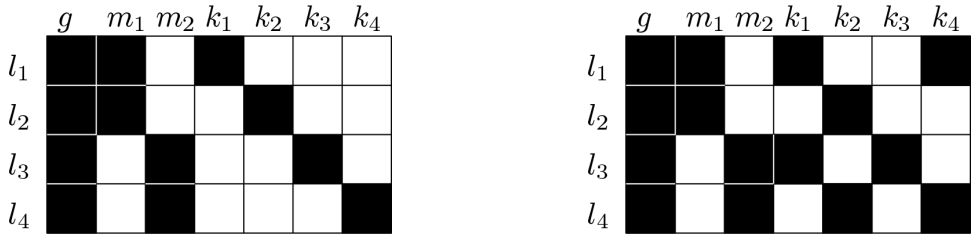
1.1 Pin-tumbler technologie

Klasická technologie zámku typu pin-tumbler spočívá ve dvou aspektech klíče. Za prvé je to jeho *profil*. Ten udává, zda klíč úspěšně zajede do cylindru (dále o něm budeme hovořit pouze jako o zámku). Na Obrázku 1.1 na levé straně vidíme příklad takového zámku a klíče, jenž do něj zapadá. Zámek v uvedeném příkladě je po stranách vytvarován do pozic 1, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13 a přijme každý klíč, jenž je vytvarován stejnou kombinací nebo její podmnožinou. Tedy například klíč z obrázku s tvarováním 1, 4, 9, 10, 11, 13 přijímá.

Druhý aspekt je *řezání* klíče. Na Obrázku 1.1 vpravo vidíme, že pokud je klíč zasunutý do zámku, tak jeho řezání zaplní tzv. *piny*. Jestliže se řezání klíče shoduje s délkou pinů, jsme schopni klíčem otočit v zámku a tím ho otevřít. Pinů, jak je vidět i na obrázku, může být na sobě naskládáno více a tím vytváří *oddělující* hranici. Pokud spodní piny zaklapnou do řezání klíče a oddělující hranice je v rovině, jsme schopni klíčem otočit a zámek otevřít. Jestliže by alespoň na jedné pozici měl klíč špatné řezání, nevytvoří se oddělující hranice a zámek nebude možno otevřít.

1.1.1 Lock-chart

Bezpečností systém obsahuje množinu klíčů a množinu zámků. Každý klíč z množiny pak otvírá nějakou danou podmnožinu zámků. Jedním ze způsobů, jak zapsat tuto skutečnost je *lock-chart*. Lock-chart je v podstatě binární maticí, kde řádek odpovídá zámku, sloupec klíči a jejich průnik skutečnosti, zda klíč otvírá daný zámek. Jestliže má klíč otvírá pouze jeden zámek, hovoříme o něm jako o *vlastním*. Pokud klíč otvírá více zámků jedná se o klíč *hlavní* a jestliže otvírá všechny zámky říkáme, že se jedná o klíč *generální*. Jestliže máme lock-chart, který pokud převedeme na strom, kde každý uzel je klíč a platí pro něj, že jestliže klíč otevře zámek, tak jej otevřou i všechny



Obrázek 1.2: Vlevo strukturovaný a vpravo nestrukturovaný lock-chart

zámky v jeho implikovaném podstromu, pak mluvíme o takovém lock-chartu jako o *strukturovaném*. Všechny ostatní lock-charty jsou *nestrukturované*.

1.2 Zámky v literatuře

Ačkoliv jsme zmínili, že mechanické zámky jsou v naší společnosti samozřejmostí a matematický přepis problému lze přesně provést, není mnoho prací které by se touto problematikou zabývalo. Společnosti, jenž vyrábějí zámky a klíče, reálně využívají kombinaci softwaru, se kterým lze počítat jen určité třídy problému a může požadovat velké množství preprocesovacího výkonu, a ručního dopočítávání s kontrolou člověka. Výsledky se můžou občas spíš blížit přibližným odhadům než optimálnímu řešení.

Existuje studie, která převádí problém na CSP. Ulrich Junker [13] převádí CSP do podoby hierarchie stromu, kde každý uzel je menší část problému. Jelikož se struktura skoro podobá stromu, lze problém ve velikosti stromu řešit polynomiálně a ve velikosti všem podproblémů exponenciálně.

Důležitou prací je pro nás diplomová práce Anny Lawer [1], která problém převádí na NP-úplnou úlohu. Dále provádí převod mezi rozšířeními lock-chartu a převodem na SAT. Lawer se pak ještě zaměřuje na větší bezpečnost pro zákazníka, jmenovitě tedy minimalizaci počtu klíčů, které otevřou zámek, tedy minimalizaci případu, kdy dva různí zákazníci otevřou zámek sobě navzájem.

Radomír Černoch [14] ve své dizertační práci pak ukazuje, že některé třídy lock-chartů jsou polynomiálně řešitelné, zatímco k ostatním třídám musíme využít různých optimalizačních algoritmů jako jsou modifikace $SATu$ nebo algoritmy na bázi CSP, neboť stále zůstávají ve třídě problému NP-úplných (pokud se nenajde důkaz $P = NP$). Černoch využívá tzv. *rotating constant method* [18], mezi společnostmi hojně využívané strategie k fyzickému návrhu klíčů, jenž fixuje určité pozice v řezání klíče podle klíčů hlavních. Tato metoda pak umožňuje vyřešit diagonální lock-chart ve složitosti třídy P, díky převodu na problém hledání největší antichain v částečném uspořádání.

1.3 Cíl práce

Hledáme tedy způsob, jak třídy *NP-úplných* problémů řešit efektivněji. Víme, že jsme schopni diagonální lock-charty vyřešit v polynomiálním čase [14]. Na základě myšlenky rozděl a panuj se pokusíme najít v obecném zadání tento polynomiální podproblém, po jehož vyřešení se obecné zadaní zredukuje.

Úkolem se pak stává nalezení největšího diagonálního (v textu ukážeme, že postačí pouze vlastní) lock-chartu v obecném zadání.

Tato práce si dává za cíl několik úkolů:

1. Formalizovat tento problém v rámci existující literatury.
2. Převod úlohy na již existující problémy.
3. Nalézt konečný algoritmus zaručující optimální řešení a zároveň takový algoritmus, jenž vrací řešení v polynomiálním čase.

Kapitola 2

Formalizace

V této kapitole si na začátku zavedeme několik definic a pojmů ke kterým se budeme dále v textu odkazovat. Jedná se o všeobecně známé informace z oboru počítačových věd, je tedy zavedeno jen to, co se bezprostředně týká výsledků a zkoumání cílů práce. Vynecháváme zavádění základních axiomů (případně paradoxů tím vznikajících), stejně tak neřešíme všechny přípustné podoby algoritmů nebo grafů, neboť nejsou pro tuto práci relevantní. Pro čtenáře pohybující se v této oblasti by nemělo jít o nové pojmy, přesto je raději pro pořádek uvádíme. Poté navážeme definicemi lock-chartů, představením problémů této práce a návrhy jeho řešení, které detailně ukážeme v následující kapitole.

2.1 Důležité matematické definice.

V této sekci si zavedeme několik definic z oblasti diskrétní matematiky [10].

Definice 2.1. (Množina). Mějme konečně mnoho symbolů $d_1,\ldots,d_n$, poté skupině takovýchto symbolů $\{d_1,\ldots,d_n\}$ říkáme *množina*. Nechť existuje množina A. Množina B, která vznikla smazáním některých prvků z množiny A se nazývá její *podmnožinou* (značeno $B \subseteq A$). Množiny bývají obecně značeny velkým písmenem (např. A, B, C) zatímco její prvky ($a \in A$) písmeny malými. Počet prvků množiny nazýváme její *velikostí* (jestliže mluvíme o prázdné množině $\emptyset$, pak její velikost je rovna nule). Na množinách lze provádět operace sjednocení ($A \cup B$), průniku ($A \cap B$) a rozdílu ($A \setminus B$). Jestliže platí $|A| > |B|$, pak je B *vlastní podmnožinou* A a značíme tento vztah jako $B \subset A$.

Definice 2.2. (Relace). Mějme n množin $X_1,\ldots,X_n$ a kartézsky součin $X_1 \times \ldots \times X_n$ pak libovolnou podmnožinu tohoto kartézského součinu nazveme *relací*. Jestliže se n rovná $n = 1$, relaci nazýváme unární, jestliže $n = 2$, relaci nazýváme binární. Nechť je R relace na $X \times X$. Pro všechny x, x', $x'' \in X$: jestliže platí, že $(x, x) \in R$, pak říkáme, že je *reflexivní*. Jestliže $(x, x) \in R$ neplatí pro žádné x pak nazýváme relací *ireflexivní*. Pokud platí

zároveň $(x, x^{'}) \in R$ a $(x^{'}, x) \in R$, což implikuje $x = x^{'}$, pak říkáme, že je relace *antisymetrická*. Jestliže máme $(x, x^{'}) \in R$ a zároveň $(x^{'}, x^{''}) \in R$, což implikuje, že platí $(x, x^{''}) \in R$ pak o relaci R říkáme, že je *tranzitivní*. Mějme relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, pak o ní můžeme říct, že se jedná o *částečné uspořádání*.

Definice 2.3. (Funkce). Nechť jsou X a Y množiny a mějme $f : X \to Y$. Pak o f jako o relaci na $X \times Y$ můžeme hovořit jako o *funkci*, pokud $(x, y) \in f$. Funkce je *prostá* jestliže pro libovolná x_1, $x_2 \in X$, které se nerovnají $x_1 \neq x_2$, platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkce je *surjektivní*, jestliže pro každý prvek cílové množiny $y \in Y$ existuje nějaký vzor $x \in X$. Jestliže je funkce zároveň prostá a surjektivní, říkáme, že se jedná o *bijekci*. Pokud máme dvě zobrazení $f : X \to Y$ a $f^{-1} : Y \to X$, pak říkáme, že f^{-1} je *inverzní* zobrazení k funkci f, jestliže platí pro všechny dvojice (x, y), kde $x \in X$ a $y \in Y$, že $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

2.2 Úvod do algoritmizace

Jelikož výstupem této práce je mimo jiné i škála různých algoritmů, tedy přístupů jak daný problém vyřešit, zavádíme čtenáři pár základních definic z oblasti algoritmizace. Ta nám dá malý přehled o tom, jaké jsou přístupy k řešení daných výpočetních problémů a různá úskalí, které můžou při jistých metodách řešení nastat [11].

Definice 2.4. (Konečný algoritmus). Pod pojmem algoritmus rozumíme postup k řešení nějakého obecného problému. Jako *konečný algoritmus* nazveme takový algoritmus, který pro libovolně velké množství vstupních údajů v konečném počtu kroků skončí.

Když mluvíme v této práci o nějakém algoritmu a (jelikož se zaměřujeme na speciální podmnožinu všech možných typů algoritmů), tak má význam jako nějaká procedura, která vrací celé číslo. Nemá smysl očekávat jiný výstup, než celé kladné číslo v případě existujícího řešení nebo nula v případě, že algoritmus nenašel řešení žádné.

(Optimální a částečné řešení). Nechť existuje algoritmus $a \in A$, kde A je množina různých algoritmů a funkce f nám říká návratovou hodnotu algoritmu k danému problému. Řekněme o výsledku funkce $f(a)$, že je řešením pokud $f(a) > 0$ a hovoříme o něm jako o *optimálním*, pokud pro všechny ostatní algoritmy řešící stejný problém, tedy všechny $a^{'} \in \{A \setminus a\}$, platí, že $a^{'} \neq a$ a $f(a) \geq f^{'}(a^{'})$. Jestliže platí, že $f(a) > f(a^{'}) > 0$ pak hovoříme o tom, že algoritmus $a^{'}$ dává *částečné* řešení. V případě $f(a) = 0$ říkáme, že algoritmus nevrací žádné řešení.

(Heuristický algoritmus). Mějme algoritmus, řekněme o něm, že je to *heuristický* algoritmus jestliže není zaručeno, že nalezne optimální řešení, ale pouze vhodné přiblížení k řešení. Důvody k upřednostnění takového algoritmu

před jiným optimálním (nalezne vždy správné řešení) může být časová, či paměťová složitost.

(Asymptotická složitost). Při řešení problémů výpočetní techniky náš zajímá, jak porovnat efektivitu a rychlost různých algoritmů. Ke klasifikaci algoritmů se obvykle používá tzv. *asymptotická složitost*, což je rozdělení algoritmů do tříd složitostí, u kterých platí, že od určité velikosti dat, je algoritmus dané třídy vždy pomalejší než algoritmus třídy předchozí, bez ohledu na to, jestli je některý z počítačů c-násobně výkonnější (c je zde libovolná konstanta). Škála v nekonečnu slouží k rozlišení jednotlivých tříd. Říká, že pokud se n blíží k nekonečnu, tak neexistuje reálná konstanta taková, aby byl algoritmus z vyšší třídy rychlejší než ten z třídy předchozí.

$1 \ll \log(n) \ll n \ll n \cdot \log(n) \ll n^k \ll k^n \ll n! \ll n^n$

Standardně se asymptotické složitost zapisuje pomocí Landauovi notace (např. $\mathcal{O}(n^2)$ pro kvadratickou funkci).

Definice 2.5. (Třída složitosti P a NP). Řekněme, že rozhodovací úloha U_1 (tj. taková jenž má binární výstup "ANO", "NE") leží ve třídě P jestliže existuje deterministický Turingův stroj, který rozhodne jazyk L_{U_1} a pracuje v polynomiálním čase. Řekněme, že rozhodovací úloha U_2 leží ve třídě NP jestliže existuje nedeterministický Turingův stroj, který rozhodne jazyk L_{U_2} a pracuje v polynomiálním čase.

Alternativně lze NP problémy definovat tak, že je to množina problémů, u kterých lze pro dodaný výsledek v polynomiálním čase ověřit jeho správnost (ale obecně nikoliv nalézt řešení v polynomiálním čase). Dodejme ještě poznámku, že platí $P \subset NP$ a otázka platnosti rovnosti $P = NP$ je stále otevřená a nevyřešená.

2.3 Teorie grafů

V této sekci zavedeme několik formalismů týkající se teorie grafů, neboť ty nám slouží jako mocný nástroj nejen při vizualizaci lock-chartu, ale i při jeho řešení za předpokladu převodu úlohy na podobnou v oblasti teorie grafů.[8]

Definice 2.6. (Orientovaný graf). *Orientovaný graf* G je trojice (V, E, ϵ), kde V je neprázdná konečná množina vrcholů (též zvaných uzlů), E je konečná množina jmen hran (též zvaných orientovaných hran) a ϵ je přiřazení, které každé hraně $e \in E$ přiřazuje uspořádanou dvojici vrcholů a nazývá se vztah *incidence*.

Uveďme pro doplnění ještě další pojmy spojené s orientovanými grafy. Jestliže platí $\epsilon(e) = (u, v)$ pro $u, v \in V$, potom o vrcholu u říkáme, že je počáteční vrchol hrany e a vrchol v je koncový vrchol hrany e; značíme $PV(e) = u$ a $KV(e) = v$. O vrcholech u, v říkáme, že jsou krajní vrcholy hrany e, též že jsou incidentní s hranou e.

Definice 2.7. (Neorientovaný graf). *Neorientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \epsilon)$, kde V je neprázdná konečná množina vrcholů (též zvaných uzlů), E je konečná množina jmen hran a ϵ je přiřazení, které každé hraně $e \in E$ přiřazuje množinu $\{u, v\}$ (kde u, $v \in V$ jsou vrcholy) a nazývá se vztah *incidence*.

V dalších notacích pro zjednodušení vynecháme vztah incidence při zápisu grafu. Pro účely této práce a dalších formalismů se nebude jeho definice nijak měnit.

Definice 2.8. (Matice sousednosti). Mějme konečnou množinu vrcholů grafu $G = (V, E)$, kterých je n a čtvercovou matici $A = n \times n$, jejíž hodnota na místě a_{vu} je celé číslo odpovídající počtu hran vedoucích z vrcholu v do vrcholu u, pak takové matici říkáme *matice sousednosti*. Prvky na diagonále tak obvykle odpovídají počtu hran vedoucích z vrcholu v zpět do vrcholu v.

Definice 2.9. (Stupeň vrcholu/uzlu). Mějme daný orientovaný graf $G = (V, E)$. Vstupní stupeň vrcholu v, značíme jej $d^-(v)$, je roven počtu hran, pro které je v koncovým vrcholem (které do vrcholu v vstupují), tj. $d^-(v) = |\{e \in E; KV(e) = v\}|$. Výstupní stupeň vrcholu v, značíme jej $d^+(v)$, je roven počtu hran, pro které je v počátečním vrcholem (které z vrcholu v vystupují), tj. $d^+(v) = |\{e \in E; PV(e) = v\}|$. Stupeň vrcholu v, značíme jej $d(v)$, je roven počtu hran, které jsou incidentní s vrcholem v, tj. $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$. Je dán neorientovaný graf $G = (V, E, \epsilon)$. Stupeň vrcholu v, značíme jej $d(v)$, je roven počtu hran, které jsou incidentní s vrcholem v.

Definice 2.10. (Bipartitní graf). Nechť existuje graf $G = (V, E)$ takový, že V lze rozdělit na dvě množiny V_1 a V_2 tak, že platí $V = V_1 \cup V_2$ a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Pak o grafu G říkáme, že je *bipartitní*.

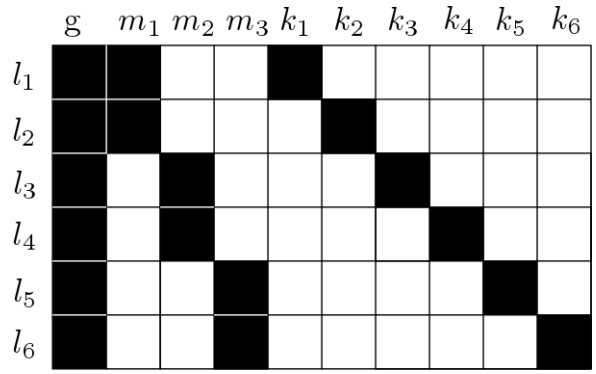
Definice 2.11. (Souvislý graf). Nechť $G = (V, E)$ je graf a v, $u \in V$ jsou jeho dva libovolné vrcholy. Jestliže existuje cesta mezi každými dvěma vrcholy v a u, pak říkáme, že takový graf G je *souvislý*.

Definice 2.12. (Kružnice a cyklus). Mějme orientovaný či neorientovaný graf $G = (V, E)$. Jestliže existuje v grafu G cesta (tj. sled vrcholů a hran, které se v cestě neopakují) a je uzavřená (začíná ve stejném vrcholu, kde i končí) pak o této cestě říkáme, že je to *cyklus*, pokud je graf orientovaný, anebo *kružnice* pokud se jedná o graf neorientovaný.

Definice 2.13. (Strom). Mějme orientovaný či neorientovaný graf $G = (V, E)$. Řekněme o něm, že se jedná o *strom* pokud je souvislý a neobsahuje kružnici.

2.4 Lock-chart

Tato sekce se zabývá definicí lock-chartu. Ten vzniká z potřeby mít formu v jaké zapsat vazby a podmínky mezi klíči a zámky. Lock-chart nám tedy slouží jako zadání, které může nabývat mnoho podob. Uvedeme několik typu lock-chartů včetně několika, jenž se přímo netýkají této práce. Důvod existence tolika druhů lock-chartů je dán nejednotností postupů výrobců při zadávání a zpracování klíčových systémů.



Obrázek 2.1: Obecný lock-chart.

Definice 2.14. (Obecný lock-chart). Obecným lock-chartem rozumíme trojici $\{K, L, E\}$. K je množina klíčů (keys) a L je množina zámků (locks), které jsou navzájem disjunktní $L \cap K = \emptyset$. E je pro nás binární relace na $L \times K$ a nazýváme ji množinou hran (edges).

Existuje přímá spojitost mezi lock-chartem a grafem [1]. Každý lock-chart $\{K, L, E\}$ je z definice také neorientovaným bipartitním grafem $\{K, L, E \cup E^{-1}\}$ s nezávislými množinami K a L. Z toho lze zjednodušit definici E jako $E(k) = \{l \in L | (k, l) \in E\}$, $E(l) = \{k \in K \ | (k, l) \in E\}$. Tedy platí, že pokud $(k, l) \in E$ pak můžeme říct, že "klíč k otvírá zámek l". V opačném případě říkáme, že "zámek l blokuje klíč k".
V textu budeme obecný lock-chart díky jeho rozšířenosti a univerzálnosti nazývat zjednodušeně pouze jako lock-chart.

Příklad 2.15. Obrázek 2.1 na straně 9 znázorňuje obecný lock-chart. Sloupce reprezentují klíče a řádky reprezentují zámky. Jestliže je políčko matice zabarvené černě značí to, že daný klíč ve sloupci otvírá příslušný zámek v řádku. Formálně bychom údaje z matice zapsali jako:

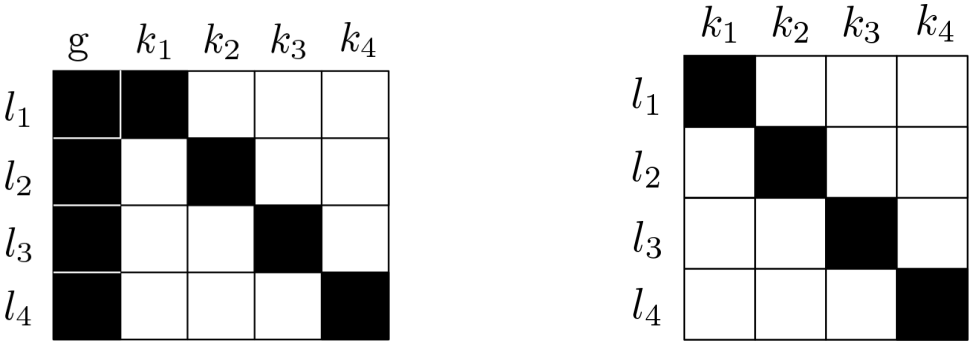
$K = \{g, m_1, m_2, m_3, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$
$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$
$E = \{(g, l_1), \ldots, (m_1, l_1), (m_1, l_2), \ldots, (k_1, l_1), (k_2, l_2), \ldots\}$

Tedy z definice platí následující tvrzení: $E(g) = L$, $E(m_1) = (l_1, l_2)$ a $E(k_i) = E(l_i)$ pro $1 \geq i \geq 6$.

Definice 2.16. (Generální, hlavní a vlastní klíč). Nechť je K množina klíčů, L množina zámků, E množina hran a $k \in K$. Jestliže $|E(k)| = 1$ pak k je nazýván *vlastním* klíčem. Jestliže $|E(k)| > 1$ pak o k říkáme, že je *hlavním* klíčem. A pokud platí, že $|E(k)| = |L|$ pak o k mluvíme jako o klíči *generálním*.

Lock-chart na Obrázku 2.1 na straně 9 obsahuje jeden generální klíč g, tři hlavní klíče m_1, m_2, m_3 a šest vlastních klíčů od k_1 do k_6.

Pravděpodobně nejjednodušším případem lock-chartu s generálním klíčem je diagonální lock chart. Každý takový lock-chart je pak definován pouze



Obrázek 2.2: Diagonální a vlastní lock-chart.

jediným parametrem a to počtem jeho vlastních klíčů.

Definice 2.17. (Diagonální lock-chart). Jestliže lock-chart obsahuje pouze jediný generální klíč a žádný další hlavní klíč, nazýváme pak takový lock-chart *diagonálním*.

Levý lock-chart na Obrázku 2.2 na straně 10 je diagonální. Má pět klíčů $K = \{g, k_1, k_2, k_3, k_4\}$ a čtyři zámky $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$. Každý vlastní klíč k_1, k_2, k_3, k_4 otevírá právě jeden zámek $E(k_i) = \{l_i\}$ a generální klíč otevírá všechny zámky $E(g) = L$.

Pokud odstraníme z tohoto typu lock-chartu generální klíč dostaneme ještě jednoduší lock-chart. Ten se sice v praxi příliš nepoužívá, ale pro tuto práci je stěžejní.

Definice 2.18. (Vlastní lock-chart). Jestliže lock-chart neobsahuje žádný hlavní klíč pak o něm hovoříme jako *vlastním* lock-chartu.

Příklad vlastního lock-chartu najdeme na pravé straně v Obrázku 2.2 na straně 10.

Pro úplnost ještě zavádíme definici pro vztah dvou lock-chartů ve smyslu podmnožiny. Vlastní lock-chart z Obrázku 2.2 na straně 10 je zároveň částečným lock-chartem lock-chartu diagonálního na stejném obrázku vlevo.

Definice 2.19. (Částečný lock-chart). Nechť $\mathrm{T} = \{\mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{E}\}$ je lock-chart, pak $\bar{\mathrm{T}} = \{\bar{\mathrm{K}}, \bar{\mathrm{L}}, \bar{\mathrm{E}}\}$ je *částečný* lock-chart k lock-chartu T pokud platí, že $\bar{\mathrm{K}} \subseteq \mathrm{K}$, $\bar{\mathrm{L}} \subseteq \mathrm{L}$ a $\bar{\mathrm{E}} \subseteq \mathrm{E}$. Tedy píšeme, že $\bar{\mathrm{T}} \subseteq \mathrm{T}$.

2.5 Množina vlastních klíčů.

Cílem této práce je extrahování částečného lock-chartu z obecného zadání bez přidaných podmínek, tak aby splňoval podobu maximálního lock-chartu vlastního. Tedy pokud si představíme zadaný lock-chart jako binární matici, naším úkolem je najít největší diagonálu zámků otvíraných klíči.

Nejnaivnějším přístupem k nalezení takové diagonály by bylo přeskupení zadaného lock-chartu do podoby obecného lock-chartu z Obrázku 2.1 na straně 9. V takovém případě by stačilo pouze "ukrojit"pravou část matice. Problémy ale v této metodě nastávají dva a jak se dále v práci ukáže jsou to problémy klíčové (jak ve smyslu tématu práce tak v důležitosti). První z problému je počet takových kombinací lock-chartu. Museli bychom vyzkoušet $|K|! \cdot |L|!$ množností, což by znamenalo exponenciální růst počtu kombinací v závislosti na vstupní matici.

Definice 2.20. (Permutace). Nechť je n, $k \in \mathbb{W}$. *Faktoriál* je funkce $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Počátek řady je definován jako $0! = 1$. Jako *binomický koeficient* pak nazýváme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, který říká počet k voleb z n objektů. Jinými slovy tuto funkci můžeme nazývat jako *permutaci*.

Druhý problém je praktičtější. Reálné zadání lock-chartu totiž nemusí být *"hezky"* zadané jako v doposud uvedených obrázcích, ale může nabývat až skoro náhodných tvarů. Toto je zapříčiněno lidských zásahem do tvorby lock-chartu. Ten se totiž nemusí zapisovat postupným systematickým řazením hlavních a vlastních klíčů. Zároveň v obecném zadaní předpokládáme existenci hlavních a centrálních vložek.

Definice 2.21. (Hlavní zámek a centrální vložka). Nechť je K množina klíčů, L množina zámků, E množina hran a $k \in K$. Jestliže $|E(l)| = 1$ pak l je nazýván *vlastním* zámkem. Jestliže $|E(l)| > 1$ pak o k říkáme, že je *hlavním* zámkem. A pokud platí, že $|E(l)| = |K|$ pak o l mluvíme jako o *centrální vložce*.

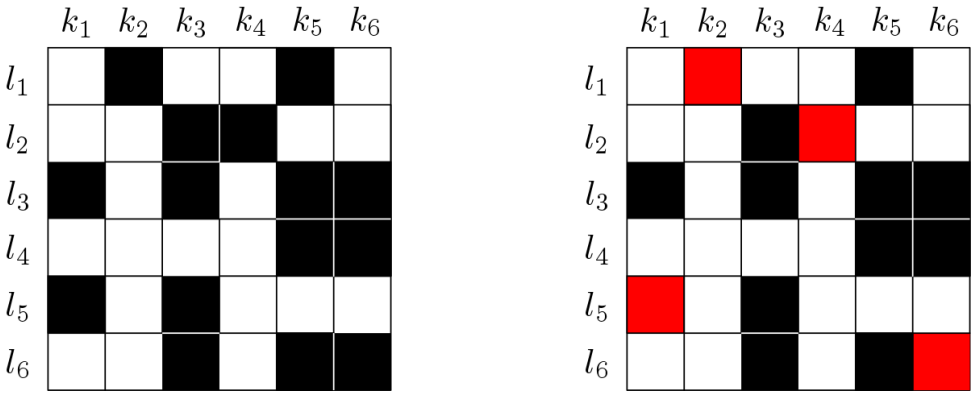
Centrální vložka a hlavní zámky jsou vlastně takovou obdobou hlavních a generálních klíčů jen z opačné dimenze lock-chartu a to z množiny zámků.

2.5.1 Formální definice problému

(Přiřazení vlastního klíče a zámku). Z definicí uvedených výše víme, že vlastní klíčem rozumíme takový klíč $k \in K$, pro který platí $|E(k)| = 1$. Jestliže platí, že $E(k) = l$ a zároveň $|E(k)| = 1$ pro nějaký zámek $l \in L$ pak říkáme, že "k je vlastním klíčem zámku l". V opačném případě tvrdíme, že "k není vlastním klíčem žádného zámku z L". Obdobné tvrzení platí pokud máme $E(l) = k$ a zároveň $|E(l)| = 1$, pak říkáme, že "l je vlastním zámkem klíče k". V opačném případě tvrdíme, že "l není vlastním zámkem žádného klíče z K".

Definice 2.22. (Řešení). Mějme lock-chart $T = (K, L, E)$. Nechť existuje množina dvojic klíčů a zámků $o = \{(k_i, l_j), \dots\}$. Mějme, že pro každou dvojici (i, j) v množině o platí, že $E(k_i) = l_j \wedge E(l_j) = k_i$, což znamená, že všechny dvojice klíčů a zámků (k_i, l_j) v o tvoří bijekci. Jestliže pro všechny $(k_i, l_j) \in o$ platí, že $E(k_i) = E(l_j) = 1$ pak říkáme, že o je *řešením* problému hledání vlastních klíčů (vlastního lock-chartu).

Definice 2.23. (Optimální řešení vlastních klíčů). Nechť máme množinu všech řešení $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$, kde o_i je jedno řešení pro $i \in \mathbb{N}$. Počtu dvojic



Obrázek 2.3: Lock-chart a jeho maximální vlastní částečný lock-chart.

přiřazení vlastního klíče k zámku $|o_i|$ říkáme velikost řešení. Řekněme, že řešení je *optimální* pokud se rovná $o_{max} = max\{|o_1|, |o_2|, \ldots, |o_n|\}$.

Vidíme, že optimální řešení je takové, které najde bijekci vlastních klíčů k vlastním zámkům a je zároveň bijekcí maximální.

Definice 2.24. (Částečné a žádné řešení vlastních klíčů). Nechť máme dvě řešení o, o_{max}, kde o_{max} je optimálním řešením. Jestliže $|o| > 0$ a zároveň $o \subset o_{max}$ pak říkáme, že se jedná o *částečné* řešení. Pokud $|o_{max}| = 0$, pak říkáme, že zadání nemá *žádné* řešení.

Případ, že by zadání nemělo řešení je pouze teoretický. Reálně by mohl nastat pouze v případě, že lock-chart nemá žádné zámky otvírané klíči a takové zadaní je z principu nesmyslné. Jakmile existuje alespoň jeden případ, kdy klíč otevírá zámek, tak se tento případ rovná řešení o velikosti $|o| = 1$. Stejně tak nemá uvažovat v případě řešení o velikosti $|o| = 1$ o dalších částečných řešeních, neboť řešení velikosti 1 je nejmenší možné.

Poznamenejme ještě, že optimálních řešení může být více, pak o částečném řešení hovoříme v souvislosti s tím optimálním řešením ke kterému se vztahuje. Obecně neplatí, že každé částečné řešení je podmnožinou každého optimálního.

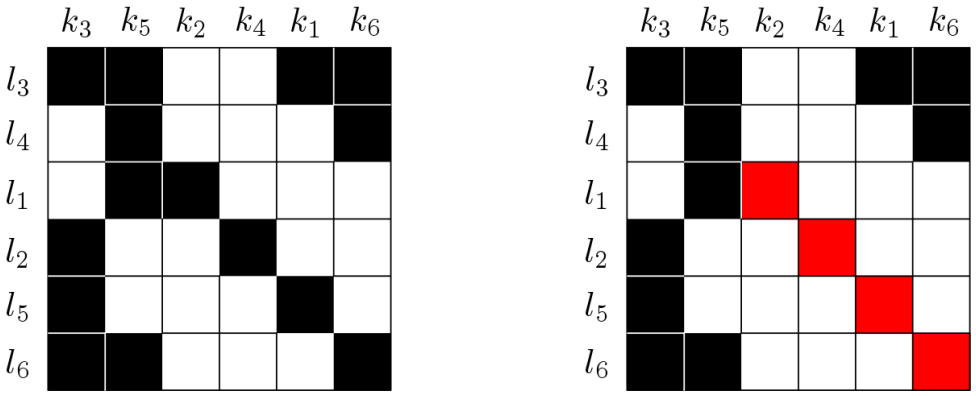
Příklad 2.25. Mějme dané zadání lock-chartu z Obrázku 2.3 na straně 12. Vlevo je zadání od výrobce a vpravo je vyznačená maximální množina vlastních klíčů. Červená barva značí přiřazení vlastního klíče jeho příslušnému zámku.

Maximálním řešením problému hledání maximální množiny vlastních klíčů je množina $o_{max} = \{(k_1, l_5), (k_2, l_1), (k_4, l_2), (k_6, l_6)\}$.

Velikost řešení je $|o_{max}| = 4$.

Pro ilustraci je ještě uveden Obrázek 2.4 na straně 13 stejného problému, jen s permutovanými řádky a sloupci matice pro lepší přehlednost čtenáře a jednodušším vizuálním ověření správnosti řešení.

Jde si všimnout toho, že maximální, tedy optimální, řešení nemusí být



Obrázek 2.4: Permutovaný lock-chart z Obrázku 2.3 a jeho maximální vlastní částečný lock-chart.

nutně pouze jen jedno v celém zadání.

Například množina dvojic $\{(k_1, l_5), (k_2, l_1), (k_4, l_2), (k_6, l_4)\}$ je také optimálním řešením.

2.5.2 Převod problému do třídy P

Můžeme si položit otázku, zda jde nalezení maximálního vlastního lock-chartu převést na jiný výpočetní problém. Exponenciální růst složitosti daný permutacemi zadaného lock-chartu není nijak lákavý k prozkoumání. Převedením na *"jednodušší"* úlohu bychom získali lepší představu o časové složitosti problému od které se dá dále optimalizovat. Jako první se vybízí maximální párování [2] díky možnému převodu lock-chartu na bipartitní graf z definice obecného lock-chartu. Zároveň víme, že hledání maximálního párování lze převést na úlohu toků v sítích a jsme takovou úlohu schopni řešit v polynomiálním čase.

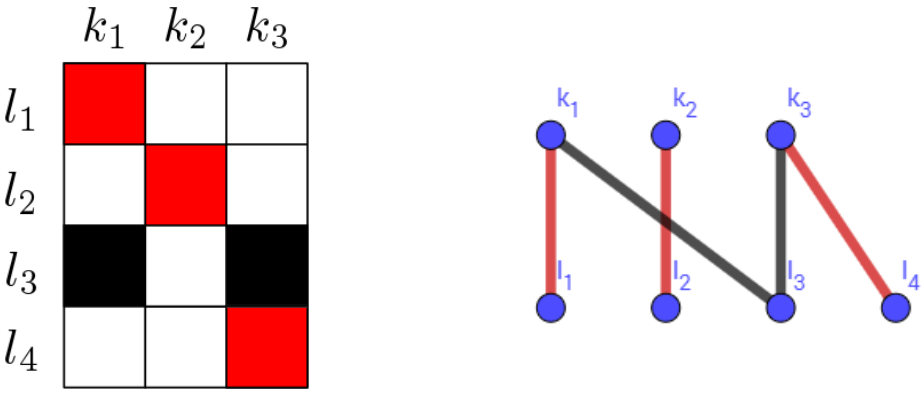
Definice 2.26. (Maximální párování). Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. Množina $\{M \subseteq E\}$ se nazývá párováním grafu G, pokud žádné dvě hrany v M nemají společný vrchol. Prázdná množina je pak párováním na každém grafu.

Maximální párování grafu je takové párování, které má nejvíce hran. Graf může mít několik různých maximálních párování.

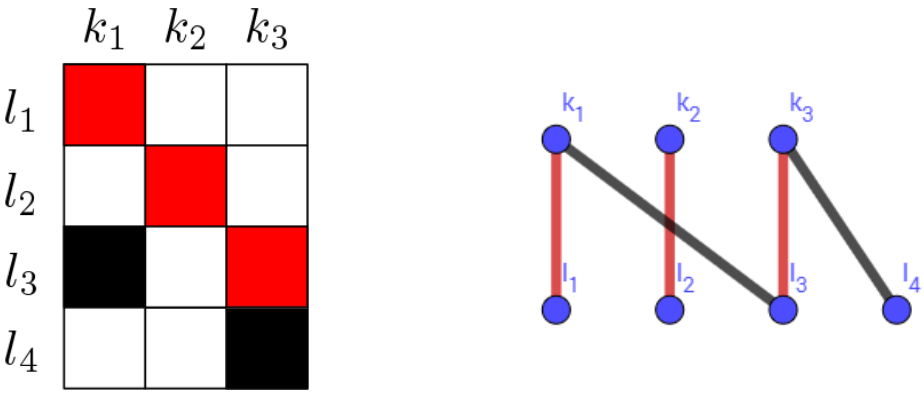
Pro úplnost ještě uvádíme definici perfektního párování, neboť se jedná o speciální případ, kdy zadaný lock-chart je již vlastní.

Definice 2.27. (Perfektní párování). Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. *Perfektní párování* grafu je párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu. Grafy s lichým počtem vrcholů nemohou mít perfektní párování. Každé perfektní párování je zároveň maximálním párováním.

Na Obrázku 2.5 na straně 14 vidíme, že takový převod je perspektivní. Vyznačené maximální párování je skutečně naší hledanou maximální dia-



Obrázek 2.5: Lock-chart a jeho příslušné maximální párování (to se rovná vlastnímu lock-chartu).



Obrázek 2.6: Lock-chart a jeho příslušné maximální párování (to se nerovná vlastnímu lock-chartu).

gonálou. Platí tedy, že každé maximální párování se rovná maximálnímu vlastnímu lock-chartu? Tedy, odpovídá každé maximální párování nějakému optimálnímu řešení úlohy? Odpověď na tuto otázku je bohužel záporná. Není tak těžké najít protipříklad viz Obrázek 2.6 na straně 14.

Zkusíme převod grafu, tedy nějakého uspořádání vrcholů, na podobu binární matice, tedy lock-chartu. Chceme najít v tomto uspořádání nějakou vlastnost, která by byla ekvivalentní s hledáním našeho vlastního částečného lock-chartu. V matematických definicích jsme si v úvodu této kapitoly pověděli o částečném uspořádání. To je relací, která je zároveň reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Pokud bychom předpokládali, že zadání splňuje vlastnosti částečného uspořádání, jako vhodná volba ekvivalence s vlastním lock-chartem se jeví nalezení antichain podmnožiny.

Definice 2.28. (Antichain). Nechť S je množina vrcholů částečného uspořádání. Řekneme o jeho podmnožině $A \subseteq S$, že je *antichain* pokud nejsme schopni žádné dva vrcholy porovnat.

Jinými slovy platí to, že mezi každými dvěma vrcholy z podmnožiny A neexistuje žádná relace. [16]

Graf převedeme na matici následovně: Nejdříve vytvoříme matici sousednosti pro zadaný graf a poté tuto matici interpretujeme jako lock-chart, kde řádky a sloupce odpovídají stejným vrcholům ze zadaného grafu.

Jelikož je množina reflexivní, vzniká nám v lock-chartu diagonála. Z vlastnosti antisymetrie máme zaručeno, že po seřazení řádků a sloupců vznikne trojúhelníková matice, tedy máme jisté, že bude v nejhorším případě i čtvercová podmnožina řádků a sloupců ve tvaru trojúhelníkové matice a z definice množiny antichain víme, že každé dva uzly z její množiny jsou na sobě nezávislé, v tomto případě nejsou spojeny hranou. To znamená, že pokud políčko matice má nenulovou hodnotu a není prvkem diagonály, pak víme, že pro daný řádek a sloupec tohoto políčka, tedy dvou různých vrcholů platí, že oba dva nemohou být přítomny v antichain množině. Maximální antichain podmnožina je skutečně ekvivalentem maximálního vlastního částečného lock-chartu.

Příklad 2.29. Na Obrázku 2.7 na straně 16 vidíme vpravo zadání, které splňuje podmínky částečného uspořádání. Vlevo na stejném obrázku je pak jeho převod do podoby grafu a červeně vyznačená maximální podmnožina antichain.

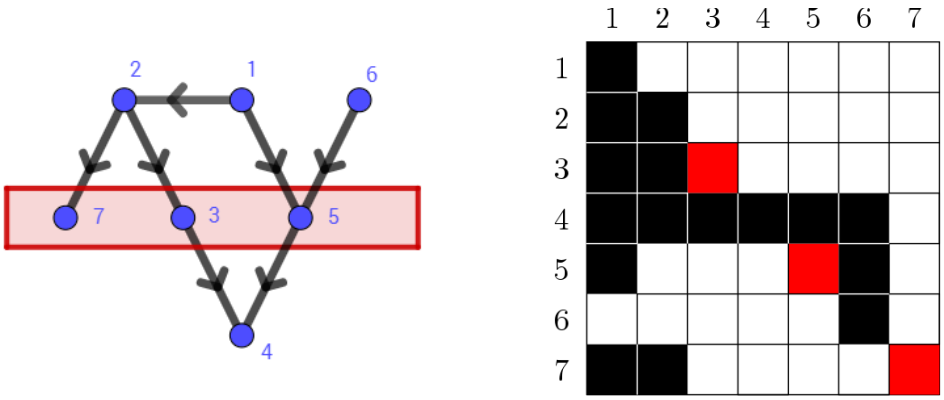
Maximálním řešením problému hledání maximální množiny vlastních klíčů je množina $o_{max} = \{(k_3, l_3), (k_5, l_5), (k_7, l_7)\}$. Velikost řešení je $|o_{max}| = 3$.

Všímáme si však jedné zvláštnosti na rozdíl od převodu na maximální párování uvedené výše. Graf je orientovaný a neobsahuje uzel pro každý klíč a každý zámek, ale pouze pro každou dvojici k_i a l_i pro $i \in \mathbb{N}$, kde se dané indexy i rovnají. Toto je způsobeno počátečním předpokladem, že zadání splňuje podmínky částečného uspořádání.
Je například lock-chart na Obrázku 2.3 na straně 12 částečné uspořádání? Díky permutaci na Obrázku 2.4 na straně 13 víme, že není (stačí si zkontrolovat, že daná matice nemůže být nikdy trojúhelníková). Ale zde přesně leží problém převodu. Za prvé se omezujeme jen na určitou třídu zadání lock-chartu (obecně nemusí být v podobě částečného uspořádání) a za druhé abychom ověřili, že zadání je skutečně částečným uspořádáním, museli bychom opět provést počet permutací, který roste exponenciálně s velikosti zadaného vstupu.

2.5.3 Převod problému do třídy NP

Jelikož nejsme schopni převést úlohu na jinou ze třídy P, což by značně usnadnilo výpočetní složitost, provedeme alespoň převod na SAT, který nám pak poslouží jako dolní odhad při tvorbě nových algoritmů.

Definice 2.30. (Konjunktivní normální forma). Mějme výrokovou proměnou x, její určené literály jsou pak x a $\neg x$. Jako klauzuli označujeme disjunkci literálů (značíme $x \vee y$ pro literály x a y) a pokud máme konjunkci klauzulí (značíme $a \wedge b$ pro klauzule a a b), pak o takové konjunkci říkáme, že je to formule v CNF neboli v *konjunktivní normální formě*. Velikost CNF značíme



Obrázek 2.7: Částečné uspořádání (s vyznačeným antichain) a převedení do lock-chartu

jako $|C|$ pro množinu všech klauzulí C.

SAT (Boolean satisfiability problem) je kombinatorický problém, který se snaží vyřešit formuli. To znamená, že pro nějakou formuli F ve tvaru CNF, jenž obsahuje konjunkci klauzulí, se snažíme najít ohodnocení tak, aby byly všechny klauzule splněné. Úloha leží ve třídě NP-*úplných* problémů (dokázána Cook-Levin větou [9], [15] v sedmdesátých letech minulého století). Pokud jsou všechny klauzule v zadání maximálně o velikosti n literálů hovoříme o n-SAT [12].

Samotný převod problému provedeme následovně: Mějme zadaný lock-chart, tedy množinu klíčů K, množinu zámků L a množinu hran E. Jako množinu proměnných vezmeme všechny klíče, zámky a pozice v lock-chartu kde nějaký klíč otevírá zámek.

Tedy formálně:

$Lit = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, l_1, l_2, \ldots, l_m, e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,m}, e_{2,1}, \ldots, e_{n,m}\}$, kde i, j jsou indexy klíčů a zámků a $e_{i,j} \in E$ je hrana mezi daným klíčem a zámkem $k_i \in K$, $l_j \in L$.

Klauzule pak máme následujících tvarů:

1. Pokud vybereme klíč $k \in K$ a zámek $l \in L$ do řešení a platí, že $E(k) = l$ a $E(l) = k$, pak říkáme, že dvojice (k, l) je součástí řešení.
2. Jestliže máme hranu $e \in E$ v řešení, která je daná jako $E(k) = l$, kde je $k \in K$, pak součástí řešení je i klíč k.
3. Jestliže máme hranu $e \in E$ v řešení, která je daná jako $E(l) = k$, kde je $l \in L$, pak součástí řešení je i zámek l.
4. Pokud vybereme klíč $k \in K$ do řešení, pak musí být alespoň jedna hrana z něj vedoucí v řešení.

5. Pokud vybereme zámek $l \in L$ do řešení, pak musí být alespoň jedna hrana z něj vedoucí v řešení.

6. Jestliže máme hranu $e \in E$ v řešení a existuje jiná hrana $e' \in E$, která se shoduje v jednom z krajních uzlů s uzlem vedoucím z e, pak taková hrana e' není součástí řešení.

Přepis klauzulí je pak následující pro $1 \leq i, u \ \leq |K|$ a $1 \leq j, h \leq |L|$:

1. $\neg \mathrm{k}_i \vee \neg \mathrm{l}_j \vee \mathrm{e}_{i,j}$ pro $\forall i, j$.
2. $\neg \mathrm{e}_{i,j} \vee \mathrm{k}_i$ pro $\forall i, j$.
3. $\neg \mathrm{e}_{i,j} \vee \mathrm{l}_j$ pro $\forall i, j$.
4. $\neg \mathrm{k}_i \vee \mathrm{e}_{i,1} \vee \ldots \vee \mathrm{e}_{i,|L|}$ pro $\forall i, j$.
5. $\neg \mathrm{l}_j \vee \mathrm{e}_{1,j} \vee \ldots \vee \mathrm{e}_{|K|,j}$ pro $\forall i, j$.
6. $\neg \mathrm{e}_{i,j} \vee \neg \mathrm{e}_{i,h}$ pro $\forall i, j, h$, kde $j \neq h$.
7. $\neg \mathrm{e}_{i,j} \vee \neg \mathrm{e}_{u,j}$ pro $\forall i, j, u$, kde $i \neq u$.

Mějme na paměti, že ne všechny typy klauzulí se musí v lock-chartu vyskytovat. Pokud bychom měli třeba zadaný lock-chart vlastní, tak pak nemá poslední dvě pravidla smysl generovat. Množinu takto vygenerovaných klauzulí nazveme Cls.

Příklad 2.31. Vezměme jako zadání lock-chartu Obrázek 2.5 na straně 14. Formule pro převod úlohy budou vypadat následovně:

1. $\neg \mathrm{k}_1 \vee \neg \mathrm{l}_1 \vee \mathrm{e}_{1,1}$
   $\neg \mathrm{k}_2 \vee \neg \mathrm{l}_2 \vee \mathrm{e}_{2,2}$
   $\neg \mathrm{k}_1 \vee \neg \mathrm{l}_3 \vee \mathrm{e}_{1,3}$
   $\neg \mathrm{k}_3 \vee \neg \mathrm{l}_3 \vee \mathrm{e}_{3,3}$
   $\neg \mathrm{k}_3 \vee \neg \mathrm{l}_4 \vee \mathrm{e}_{3,4}$
2. $\neg \mathrm{e}_{1,1} \vee \mathrm{k}_1$
   $\neg \mathrm{e}_{2,2} \vee \mathrm{k}_2$
   $\neg \mathrm{e}_{1,3} \vee \mathrm{k}_1$
   $\neg \mathrm{e}_{3,3} \vee \mathrm{k}_3$
   $\neg \mathrm{e}_{3,4} \vee \mathrm{k}_3$
3. $\neg \mathrm{e}_{1,1} \vee \mathrm{l}_1$
   $\neg \mathrm{e}_{2,2} \vee \mathrm{l}_2$
   $\neg \mathrm{e}_{1,3} \vee \mathrm{l}_3$
   $\neg \mathrm{e}_{3,3} \vee \mathrm{l}_3$
   $\neg \mathrm{e}_{3,4} \vee \mathrm{l}_4$
4. $\neg \mathrm{k}_1 \vee \mathrm{e}_{1,1} \vee \mathrm{e}_{1,3}$
   $\neg \mathrm{k}_2 \vee \mathrm{e}_{2,2}$
   $\neg \mathrm{k}_3 \vee \mathrm{e}_{3,3} \vee \mathrm{e}_{3,4}$
5. $\neg \mathrm{l}_1 \vee \mathrm{e}_{1,1}$
   $\neg \mathrm{l}_2 \vee \mathrm{e}_{2,2}$
   $\neg \mathrm{l}_3 \vee \mathrm{e}_{1,3} \vee \mathrm{e}_{3,3}$
   $\neg \mathrm{l}_4 \vee \mathrm{e}_{3,4}$
6. $\neg \mathrm{e}_{1,1} \vee \neg \mathrm{e}_{1,3}$
   $\neg \mathrm{e}_{3,3} \vee \neg \mathrm{e}_{3,4}$
   $\neg \mathrm{e}_{1,3} \vee \neg \mathrm{e}_{3,3}$

Můžeme si ověřit, že červeně vyznačené řešení na straně 14 je skutečně i maximálním řešením těchto klauzulí. Stejně tak protipříklad zvedený u Obrázku 2.6 na straně 14 již díky převodu na SAT nehrozí být pokládán jako řešení.

Máme sice správně formálně přespaný náš problém do úlohy typu SAT, ale pokud se pozorně podíváme na vygenerovaná pravidla, žádné nám nezaručuje případ, kdy jsou všechny klauzule splnitelné. Žádný literál totiž nenabývá pravdivé hodnoty, tedy máme řešení, avšak velikosti nula (jak jsme již výše definovali, korektně toto nepovažujeme ani za řešení).

Proto je potřeba ještě zavést další sadu klauzulí, které nám zaručí, že nalezneme maximální řešení a žádné jiné (menší). Je nutné SAT jako takový iterovat přes permutace výběru h klíčů z celkových $|K|$ pro ověření existence řešení velikosti h.

Příklad 2.32. Vezměme ještě jednou lock-chart z Obrázku 2.5 na straně 14. Jelikož má zadání tři klíče, tedy $|K| = 3$, budeme SATem iterovat velikost řešení od 1 do 3. To znamená, že pro každou iteraci i budeme přidávat klauzule o velikosti $v_i = |K| - i$ pro $i = \{0, 1, 2\}$.

V každé iteraci přidáme příslušné omezující klauzule do zadání úlohy SAT:

1. (Iterace 1.)
   $k_1 \vee k_2 \vee k_3$
2. (Iterace 2.)
   $k_1 \vee k_2$
   $k_2 \vee k_3$
   $k_1 \vee k_3$
3. (Iterace 3.)
   k_1
   k_2
   k_3

Teoreticky vzato by šlo už v první iteraci interpretovat všechny klíče jako pravdivé, ale prakticky algoritmy pro řešení SATu (např. miniSAT) se snaží minimalizovat počet pravdivých literálů, tedy v první iteraci považuje za nutnou podmínku učinit pravdivým pouze jeden literál.

Kapitola 3

Algoritmy

V této kapitole si ukážeme algoritmy implementované k hledání maximálního vlastního lock-chartu ze zadání. Zavádíme několik druhů algoritmů, které se navzájem různě doplňují, volají a snaží se zlepšit řešení výsledku algoritmů jiných.

3.1 Kritérium

Než se vrhneme na konkrétní implementace algoritmů zaveďme si kritérium jako komparátor mezi dvěma uzly grafu. Tedy pro naše konkrétní zadání lock-chartu maticí mějme, že každý klíč $k \in K$ a každý zámek $l \in L$ je zároveň uzlem, případně spojen hranou pokud existuje přiřazení $e \in E$ takové, že platí $\epsilon(e) = (k, l)$. Říkáme tedy, že máme množinu uzlů $U = \{K \cup L\}$. Pokud hovoříme o nějakém libovolném kritériu c znamená to, že jsme schopni booleovsky (ohodnocením true nebo false) vyhodnotit následující nerovnost $c : u \geq v$ pro každé dva uzly $u, v \in U$.

Definice 3.1. (Jednoznačně dané vyhodnocení kritéria). Řekněme, že vyhodnocení je *jednoznačně dané*, pokud je deterministické.

3.2 Ověření správnosti řešení

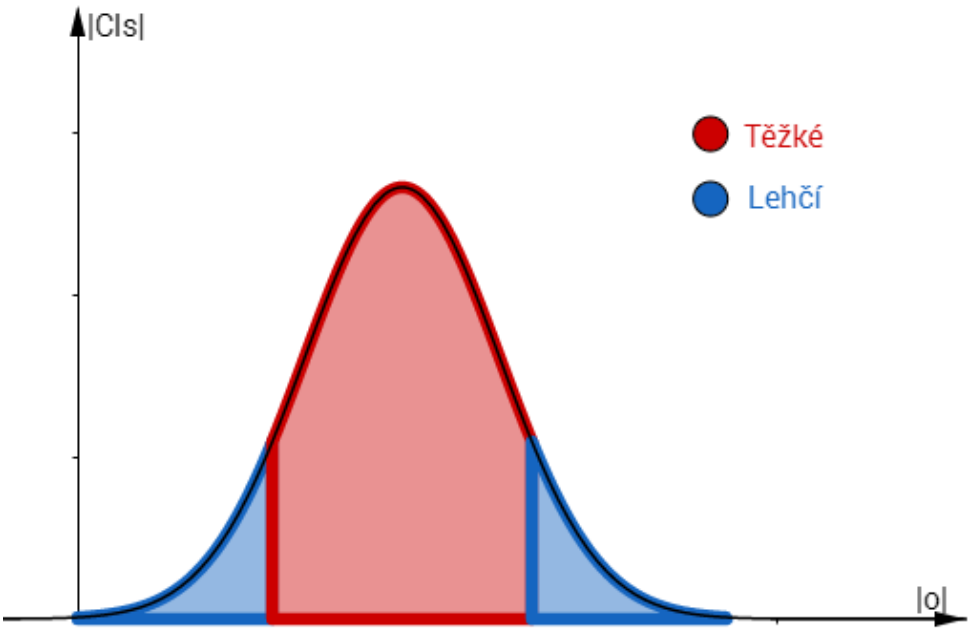
To že je problém ve třídě NP znamená, že jsme schopni v polynomiálním čase ověřit správnost řešení. Jelikož budeme potřebovat proceduru ke kontrole, zda už daný iterační či rekurzivní algoritmus máme ukončit a vrátit nalezené řešení, zavádíme polynomiální kontrolu výsledku.

Algoritmus 3.1. (Ověření řešení).

```
vstup  : lock-chart T = (K, L, E)
výstup : true pokud je řešení diagonálou, false pokud není
1  Funkce Ověř-Řešení(T)
2      for k : K do
3          col = true;
4          for l : L do
5              if (k, l) ∈ E then
6                  if col then
7                      col = false;
8                  else
9                      return false
10                 end
11             end
12         end
13         if col then
14             return false
15         end
16     end
17     for l : L do
18         row = true;
19         for k : K do
20             if (k, l) ∈ E then
21                 if row then
22                     row = false;
23                 else
24                     return false
25                 end
26             end
27         end
28         if row then
29             return false
30         end
31     end
32     return true;
```

3.3 Algoritmy s optimálním řešením

Jak jsme si již výše definovali, algoritmus který vrací optimální řešení je nejlepší možný, co se týče správnosti a velikosti řešení. Problém je v tom, že jsme schopni převést hledání maximálního vlastního částečného lock-chartu



Obrázek 3.1: Odhad počtu klauzulí v závislosti na velikosti řešení

nejlépe na úlohu SAT, která leží ve třídě složitosti NP-úplných úloh.

3.3.1 SAT

Zásadní nevýhodou jakékoliv implementace SATu je exponenciální nárůst klauzulí podle velikosti zkoumaného lock-chartu. Na Obrázku 3.1 na straně 21 vidíme odhad očekávaného nárůstu počtu klauzulí. Tento odhad jsme vyčíslili z odhadovaného počtu klauzulí pro i-tou iteraci přidaných podmínek pro vynucení velikosti právě rovné $i + 1$ (jestliže iterujeme od 0). Odhad se tak vlastně rovná binomické větě. Modrou barvou máme vyznačený odhad oblastí, na které bychom mohli výpočetně dosáhnout s dobrou výpočetní technikou, u červené sekce nemáme zaručeno, že algoritmus vůbec neselže na nedostatek paměti. Mějme na paměti, že toto uvažujeme pro obecné zadání, jestliže budeme řešit malé lock-charty (řádově do desítek klíčů a zámků), SAT se pravděpodobně dopočítá. Jestliže budeme řešit lock-chart větších velikostí (řádově stovky a více klíčů a zámků), modrá oblast na ukázané křivce se pravděpodobně zmenší směrem od středu.

Všímáme si jiného trendu. Jelikož odhad se blíží podobě binomickému rozdělení, "lehčí"sekce se nachází na obou koncích křivky. Z toho nám plynou dva případy:

1. Řešení leží na krajích rozdělení.

   To znamená, že pokud začneme iterovat algoritmus SATu od 1 výše, můžeme dosáhnout alespoň na částečné řešení, které využijeme v dalších

algoritmech. Pokud bychom iterovali od shora dolů, tedy od $min(|K|, |L|)$ níže, můžeme dosáhnout na optimální řešení jako na první nalezené řešení.

2. Řešení leží ve středu rozdělení.

   V takovém případě platí, že můžeme dostat částečné řešení při hledání směrem nahoru od 1 jako v minulém případě, avšak hledání odshora dolů nám nic nepřinese. K optimálnímu řešení se pravděpodobně pomocí SATu nedostaneme.

Mějme instanci SATu a předpokládejme, že se s ní díky počtu vygenerovaných klauzulí nedopočítáme optimálního řešení. Má smysl o takovém algoritmu vůbec uvažovat? Řekněme, že existuje nějaký jiný rychlý algoritmus, který nám pomůže "přehoupnout"se přes velikosti řešení, kde je počet klauzulí kriticky velký. To udělá tak, že nám poskytne nějaké částečné řešení. Od tohoto výsledku se můžeme dále pokoušet řešení vylepšit. Pak má smysl v kombinaci s takovým rychlým (např. heuristickým) algoritmem SAT kombinovat. Proto následující algoritmy budou sloužit spíše k optimalizaci a vylepšení řešení, které najdeme jinými rychlejšími metodami.

SAT bez modifikací

Algoritmus 3.2. (SAT bez modifikací).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$
výstup : Přiřazení vlasních klíčů a zámků

```
1  Funkce SAT(T)
2      for i = 1 : min(|K|, |L|) do
3          Lit = K ∪ L ∪ E;
4          Cls = SAT-Klauzule(Lit);
5          řešení = 0;
6          Cls ∪ Omezující-Klauzule(Lit, i);
7          s = Vyřeš-SAT(Cls);
8          if s je modelem Cls then
9              Ověř-Řešení (s);
10             řešení = Extrahuj-Řešení(s);
11         else
12             return řešení
13         end
14     end
```

Jedná se o čistou implementaci převodu z úlohy hledaní maximální částečného vlastního lock-chartu na SAT úlohu z minulé kapitoly. Funkce SAT-Klauzule převádí jednotlivé klíče a zámky do vztahů, které podmiňují vlastní

částečný lock-chart. Funkce Omezující-Klauzule přidává podmínku pro pravdivost právě i klíčů a tedy i řešení o velikosti maximálně i. Ověř-Řešení je procedura pro korektnost výsledku. Funkce Vyřeš-SAT vyhodnotí, které literály dostanou booleovskou proměnou true a které false, tak aby všechny klauzule byly splněné (pokud to jde). Jestliže jde najít takové ohodnocení pro všechny klauzule říkáme, že s je modelem množiny klauzulí Cls. Funkce Extrahuj-Řešení slouží k převodu z výsledku SATu na naší dvojici klíčů a zámků o.

SAT s redukcí

Nechť existuje lock-chart $T = (K, L, E)$ s optimálním řešením $o_{max} > n$. Mějme instanci SATu, jenž nalezla nějaké částečné řešení velikosti n v iteraci i, kde $i < min(|K|, |L|)$. Pak stačí pro iteraci $i + 1$ v SATu uvažovat k řešení pouze částečný lock-chart T', který neobsahuje klíče $k \in K$, jenž nesplňují nerovnost $|L| - |E(k)| + 1 \geq n$ a zámky $l \in L$, které nesplňují nerovnost $|K| - |E(l)| + 1 \geq n$.

Algoritmus 3.3. (SAT s redukcí).

```
   vstup  : lock-chart T = (K, L, E)
   výstup : Přiřazení vlasních klíčů a zámků
1  Funkce SAT(T)
2      for i = 1 : min(|K|, |L|) do
3          Lit = K ∪ L ∪ E;
4          Cls = SAT-Klauzule(Lit);
5          řešení = 0;
6          Cls ∪ Omezující-Klauzule(Lit, i);
7          s = Vyřeš-SAT(Cls);
8          if s je modelem Cls then
9              Ověř-Řešení (s);
10             řešení = Extrahuj-Řešení(s);
11             (K, L, E) = Redukce-Lock-Chartu(K, L, E);
12         else
13             return řešení
14         end
15     end
```

Důkaz. Jestliže jsme nalezli částečné řešení o velikosti n, znamená to, že se jedná buď o optimální řešení $o_{max} = n$ anebo o řešení menší než optimální $o_{max} > o_n$. To znamená, že řešení může obsahovat jedině zámky a klíče, které neotvírají a nejsou otevírány alespoň $n - 1$ příslušnými klíči a zámky. Mějme klíč $k \in K$, nerovnost $|L| - |E(k)| + 1 \geq n$ nám říká, že klíč k neotvírá alespoň $|L| - |E(k)|$ zámků, počet neotvíraných zámků v řešení je $n - 1$.

Kdyby existoval klíč $k' \in K$, který neotvírá $|L| - |E(k')| < n - 1$ zámků, už z nerovnice vidíme, že je to méně, než je potřeba k řešení, kde je neotvíráno $n - 1$. Pro zámky platí obdobné tvrzení. □

Mějme stejný algoritmus pro SAT jako v algoritmu 3.2 na straně 22. Přidejme navíc funkci Redukce-Lock-Chartu, která na konci každé iterace, jež nalezne řešení, odebere příslušný počet řádků a sloupců lock-chartu, které nesplňují nerovnost danou předpisem redukce.

SAT s počátečním částečným řešením

Mějme částečné řešení o velikosti n, tedy i dané přiřazení klíčů a zámků o, kde $|o| = n$. Potom můžeme SAT využít jako vylepšovací metodu od dané velikosti částečného řešení. Tedy začneme iteraci algoritmu od daného n. Níže uvedený pseudokód obsahuje redukci prostoru při nalezení částečného řešení stejně jako v algoritmu 3.3 na straně 23.

Algoritmus 3.4. (SAT s s počátečním částečným řešením).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$, velikost částečného řešení n
výstup : Přiřazení vlasních klíčů a zámků

```
1  Funkce SAT(T, n)
2      for i = n : min(|K|, |L|) do
3          Lit = K ∪ L ∪ E;
4          Cls = SAT-Klauzule(Lit);
5          řešení = 0;
6          Cls ∪ Omezující-Klauzule(Lit, i);
7          s = Vyřeš-SAT(Cls);
8          if s je modelem Cls then
9              Ověř-Řešení (s);
10             řešení = Extrahuj-Řešení(s);
11             (K, L, E) = Redukce-Lock-Chartu(K, L, E);
12         else
13             return řešení
14         end
15     end
```

Poznámka: Všimněme si, že nevyužíváme konkrétní přiřazení daného řešení vstupem o, ale pouze jeho velikost. Kdybychom SAT modifikovali tak, aby začínal na konkrétním částečném řešení, tedy i jeho přiřazení klíčů k zámkům, mohli bychom dojít k horšímu (menšímu) řešení.

3.3.2 Strom podle kritéria

Mějme množinu seřazených uzlů, které říkáme sekvence. Každý uzel je buďto klíčem nebo zámkem. Předpokládejme, že pokud budeme procházet sekvenci v pořadí od prvního prvku do posledního a v každému kroku daný uzel odstraníme z grafu, zbude nám pouze diagonála. Tedy mějme řadu $s = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, kde $n \leq |K| + |L|$ a $u_i \in U$ pro $i \in \mathbb{N}$, která značí pořadí klíčů a zámků, které musíme z lock-chartu odstranit, aby nám zůstaly pouze klíče, zámky a hrany, přiřazující vlastní klíče zámkům.

Jestliže máme sekvenci s a po odstranění všech uzlů z s nám zůstane nějaké řešení o, pak tento vztah zapisujeme jako $s \Rightarrow o$.

Nechť máme sekvenci s_{subopt}, která nám říká, jak dostat řešení o_{subopt}, kde $|o_{subopt}| \leq |o_{max}|$, pro o_{max}, které je optimálním řešením úlohy.

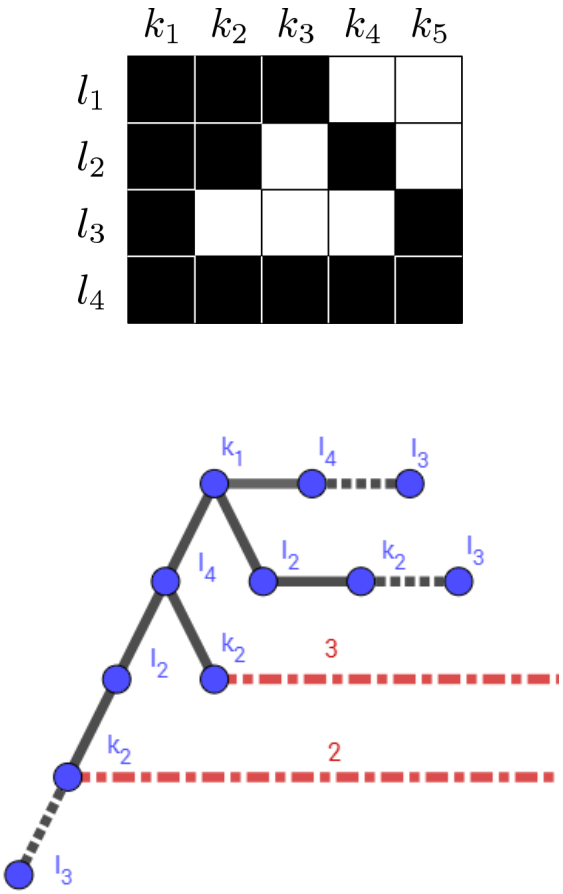
Definice 3.2. (Blízká řešení). Nechť máme dvě různá řešení úlohy o_1, o_2, kde $|o_1| < |o_2|$ a dvě sekvence s_1, s_2, kde $s_1 \Rightarrow o_1$ a $s_2 \Rightarrow o_2$. Říkáme, že *míra blízkosti* je počet úprav v sekvenci, přidání nového prvku (uzlu ze sekvence) do množiny řešení nebo smazáním posledního prvku (uzlu ze sekvence) z množiny řešení.

Předpokládejme, že řešení o_{subopt} leží blízko o_{max}, tedy jestliže si znázorníme sekvenci do podoby stromu, kde nejlevější větve symbolizují sekvenci s_{subopt} částečného řešení o$_{subopt}$, pak tento předpoklad říká, že by se v takovém stromě mohlo nacházet lepší řešení vzdálené mírou blízkosti, tedy daný počtem backtracků (odebrání uzlu) a dalšího prohledávání (přidání uzlu) ve stromě.

Definice 3.3. (Úplná sekvence). Nechť máme lock-chart $T = (K, L, E)$ a kritérium, které generuje sekvenci s. Pokud sloučíme sekvenci s a uzly (klíči, zámky), které sekvence s neobsahuje, vytvoříme tak novou sekvenci s', jenž nazýváme *úplnou* pokud prvních $|s|$ prvků v řadě s' je totožných $|s|$ prvním prvkům řady s. Jinými slovy, jedná se o řadu obsahující všechny uzly z lock-chartu T, seřazené podle daného kritéria.

Poznamenejme si, že úplná sekvence má účel především účel takový, abychom mohli v algoritmu uvažovat všechny uzly. Jestliže v definici blízkého řešení mluvíme o odstranění posledního prvku, myslíme tím prvek jenž nemusí být nutně posledním uzlem úplné sekvence.

Postup k hledání optimálního řešení je následující: Procházíme strom do hloubky dokud nenajdeme první řešení (nemusí být nutně optimální, jelikož to závisí na volbě kritéria). Jakmile na něj narazíme, nastavíme si spodní hranici hloubky pod kterou už nemusíme hledat. Backtrackujeme o dva uzly výše a zkoušíme v sekvenci změnit daný uzel za klíč nebo zámek, který v sekvenci po něm následuje. Jestliže nacházíme lepší nebo stávající nejlepší nalezené řešení, přepisujeme spodní hranici a hodnotu nejlepšího řešení, pokud se tak nestalo zkoušíme další uzel v pořadí až do konce dané sekvence. Jestliže jsme vyčerpali všechny uzly, backtrakujeme o uzel výš, jestliže jsme v koření



Obrázek 3.2: Lock-chart a jeden z jeho možných stromů podle kritéria

stromu vracíme poslední nalezené řešení jako optimální.

V postupu jsme uvedli několik tvrzení, které dokážeme. Jako první to bude korektnost ořezávání stromu. Tedy fakt, že přepsáním spodní hranice prohledávání nikdy neztratíme optimální řešení.

Důkaz. Mějme částečné řešení o_{subopt} o velikosti $|o_{subopt}| = n$, sekvenci přes níž jsme se k tomuto řešení dostali, tedy $s_{subopt} \Rightarrow o_{subopt}$ o velikosti $|s_{subopt}| = m$. To znamená, že jsme odstranili z lock-chartu m klíčů a zámků (uzlů) a máme částečný čtvercový lock-chart o velikosti $|K^{'}| \cdot |L^{'}|$, kde $|K^{'}| = |L^{'}| = |K|+|L|-|s_{subopt}|$ pro $K^{'} \subset K$ a $L^{'} \subset L$. Pokud bychom odstranili lichý počet uzlů, lock-chart který nám zbyde už nebude čtvercový a při odstranění sudého počtu uzlů bude částečný lock-chart menší než původní, tedy nemůžeme dalším prohledáváním do hloubky najít lepší řešení. □

Dále ještě uvádíme tvrzení, že při nalezení nějakého řešení provádíme dva kroky backtracku místo tradičního jednoho. Stejně jako v minulém případě, ani u toto drobného prořezání prostoru nám nehrozí ztráta optimálního řešení.

Důkaz. Mějme částečné řešení o_{subopt} o velikosti $|o_{subopt}| = n$, sekvenci přes níž jsme se k tomuto řešení dostali, tedy $s_{subopt} \Rightarrow o_{subopt}$ o velikosti $|s_{subopt}| = m$. Jestliže jsme se k částečnému řešení dostali pomocí odstranění m uzlů, žádná jiná kombinace odstranění m uzlů nemůže zvětšit výsledný prořezaný částečný vlastní lock-chart. Nejbližší lepší řešení jsme schopni najít pomocí sekvence o velikosti $m - 2$ (pokud takové existuje). □

Algoritmus 3.5. (Strom podle kritéria).

```
   vstup  : lock-chart T = (K, L, E), sekvence s
   výstup : Velikost vlastního lock-chartu
 1 Funkce CT(T, s)
 2 |  v_max = 0;
 3 |  used = {};
 4 |  CT-Rekurze(T, s, 0, |s|);
 5 |  return v_max;
 6 Funkce CT-Rekurze(T, s, h, lb)
 7 |  if lb == h then
 8 |  |  return false;
 9 |  end
10 |  for node : s do
11 |  |  if node ∈ used then
12 |  |  |  continue;
13 |  |  end
14 |  |  T' = T \ {node};
15 |  |  used = used ∪ node;
16 |  |  if Ověř-Řešení(T') then
17 |  |  |  if Velikost-Řešení(T') ≥ v_max then
18 |  |  |  |  v_max = Velikost-Řešení(T');
19 |  |  |  |  lb = h;
20 |  |  |  |  used = used \ {node};
21 |  |  |  |  return true;
22 |  |  |  end
23 |  |  else
24 |  |  |  solFound = CT-Rekurze(T', s, h+1, lb);
25 |  |  |  if solFound then
26 |  |  |  |  used = used \ {node};
27 |  |  |  |  return false;
28 |  |  |  end
29 |  |  end
30 |  end
```

Příklad 3.4. Mějme zadaný lock-chart z Obrázku 3.2 na straně 26 a kritérium, které nám vygenerovalo úplnou sekvenci $s = \{k_1, l_4, l_2, k_2, k_3, k_5, l_3\}$. Inicializujme si dolní hranici na $lb = |s|$ a hodnotu nejlepšího nalezeného

řešení na $v_{max} = 0$.

Při prohledání nejlevějšího podstromu narážíme v hloubce $h = 4$ na první řešení o velikosti $|s_{subopt}| = 2$. Můžeme tedy spodní hranici lb nastavit na $lb = 4$ a hodnotu nejlepšího nalezeného řešení na $v_{max} = 2$. Nalezené řešení je $o_{subopt} = \{(k_3, l_1), (k_5, l_3))\}$.

Backtrackujeme o dvě patra stromu na uzel l_4 a zkoušíme odstranit uzel v sekvenci po l_2, čímž se stává uzel k_2. Po jeho odstranění nalézáme řešení o velikosti 3, tedy pro $lb = 3$, $v_{max} = 3$ a $o_{subopt} = \{(k_3, l_1), (k_4, l_2), (k_5, l_3))\}$.

Backtrackujeme o dvě patra stromu výše, ale po vyzkoušení všech ostatních prvků sekvence, namísto uzlu l_4 a posléze po dalším backtracku uzlu k_1, nenalézáme lepší řešení. $o_{max} = \{(k_3, l_1), (k_4, l_2), (k_5, l_3))\}$ a velikost optimálního řešení je $|o_{max}| = 3$;

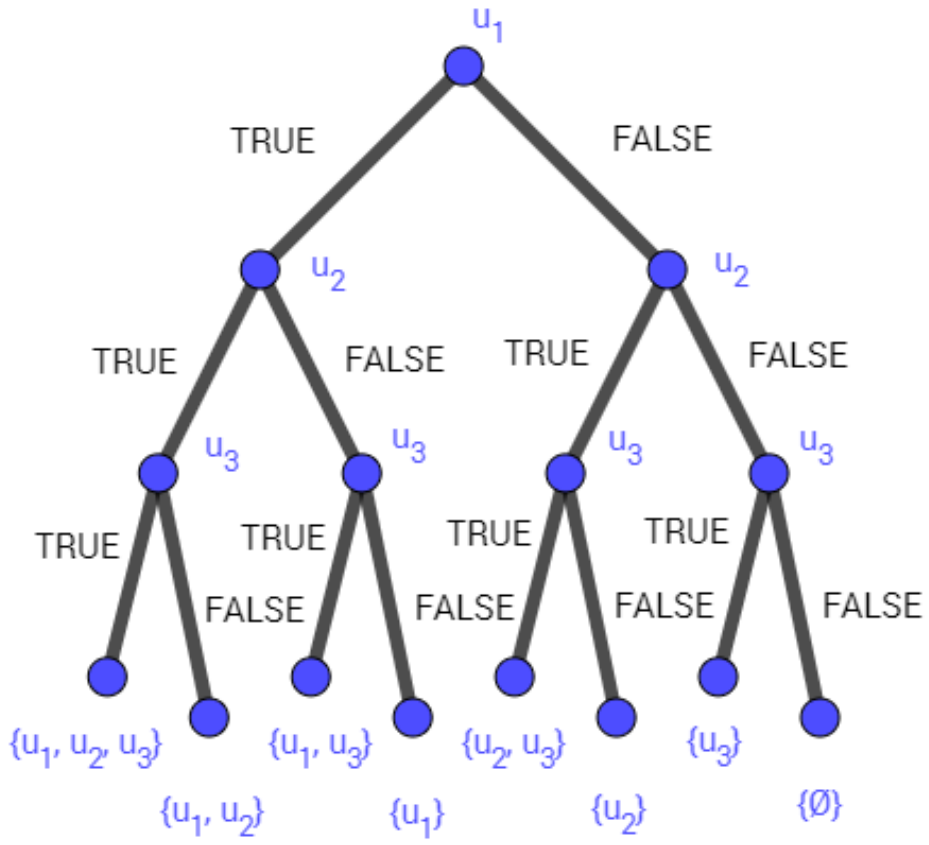
3.3.3 Binární strom podle kritéria

Algoritmus 3.6. (Binární strom podle kritéria).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$, sekvence s
výstup : Velikost vlastního lock-chartu

```
1  Funkce BCT(T, s)
2      v_max = 0;
3      BCTRecursion(T, s.první(), 0, |s|);
4      return v_max;
5  Funkce BCTRecursion(T, s, h, lb)
6      if lb == h then
7          return;
8      end
9      if Ověř-Řešení(T) then
10         if Velikost-Řešení(T) ≥ v_max then
11             v_max = Velikost-Řešení(T);
12             lb = h;
13         end
14     end
15     node = s;
16     T' = T \ {node};
17     BCTRecursion(T', s.next(), h+1, lb);
18     BCTRecursion(T, node.další(), h, lb);
```

U algoritmu stromu podle kritéria leží jeden optimalizační problém. Můžeme totiž projít stejnou cestou ve stromu dvakrát, což vede ke zbytečnému výpočetnímu výkonu navíc. Stejnou cestou rozumíme dvě sekvence s_1 a s_2,



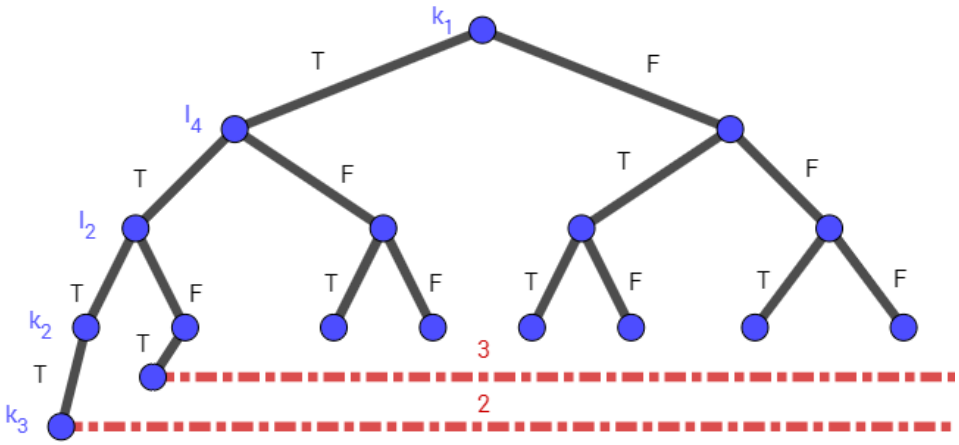
Obrázek 3.3: Obecně zapsaný binární strom pro tři uzly

kde $s_1 = s_2$, ale pořadí prvků v sekvencích se liší. Abychom se backtrackování stejnou cestou v jiném pořadí ve stromu vyhnuli, sestavíme strom binárně, tedy v každém uzlu stromu se bude rozhodovat, zda daný uzel patři do sekvence vygenerované kritériem nebo ne.

Na Obrázku 3.3 na straně 29 máme strom pro sekvenci čítající tři prvky, tedy pro lock-chart o velikosti 2×1 (nebo po transpozici matice 1×2). V každém uzlu se algoritmus rozhoduje, zda daný uzel bude ležet v sekvenci, jenž vede k optimálnímu řešení. Tedy TRUE větev nám říká, že daný uzel u nebude v optimální řešení o_{max} (TRUE jelikož tvrzení, že bude z původního lokc-chartu smazán je pravda), větev FALSE pak říká opak, tedy uzel u leží v o_{max}. Nejlevější cesta stromem k listu končí odstraněním všech uzlů grafu, nejpravější cesta naopak všechny uzly zanechává.

Jestliže pořadí uzlů pro jednotlivé hloubky generuje nějaké kritérium, říkáme, že se jedná o *binární strom podle kritéria*. Předpokládáme, že optimální řešení bude ležet buďto v nejlevější cestě anebo v cestě jí blízké.

Postup k hledání optimálního řešení je následující: Procházíme strom do



Obrázek 3.4: První dvě nalezená řešení v binárním stromu

hloubky dokud nenajdeme první řešení (nemusí být nutně optimální, to závisí na volbě kritéria). Jakmile na něj narazíme, nastavíme si spodní hranici hloubky pod kterou už nemusíme hledat a backtrackujeme o dva uzly výše. Až do tohoto momentu byl postup stejný jako u obecného stromu. Rozdíl je v tom, že jakmile vkročíme do uzlu přes hranu FALSE neupravujeme našemu rekurzivnímu volání hloubku o jedničku jako u větví TRUE. Větev FALSE totiž nezvětšuje délku sekvence, tedy z hlediska velikosti řešení jej nemusí zmenšovat. Jestliže nacházíme lepší řešení upravíme parametry hranic a nejlepšího dosaženého řešení, pokud nalezneme lepší stejné řešení po menším počtu TRUE hran, pak parametry také přepisujeme. Končíme ve chvíli, kdy jsme celý strom prošli.

Příklad 3.5. Mějme zadaný lock-chart z Obrázku 3.2 na straně 26 a kritérium, které nám vygenerovalo úplnou sekvenci $s = \{k_1, l_4, l_2, k_2, k_3, k_5, l_3\}$. Inicializujme si dolní hranici na $lb = |s|$ a hodnotu nejlepšího nalezeného řešení na $v_{max} = 0$.

Při prohledání nejlevějšího podstromu narážíme v hloubce $h = 4$ při rozhodování u uzlu $u = k_3$ na první řešení o velikosti $|s_{subopt}| = 2$. Můžeme tedy spodní hranici lb nastavit na $lb = 4$ a hodnotu nejlepšího nalezeného řešení na $v_{max} = 2$. Nalezené řešení je $o_{subopt} = \{(k_3, l_1), (k_5, l_3))\}$.

Backtrackujeme o dvě patra stromu na uzel l_2. Volíme, že l_2 nebude v sekvenci hranou FALSE, poté jdeme levou hranou a odebíráme z potenciálního řešení uzel k_2. Voláme rekurzivně samo sebe a při rozhodování na uzlu $u = k_3$ nalézáme řešení o velikosti 3, tedy v $lb = 3$, $v_{max} = 3$ a $o_{subopt} = \{(k_3, l_1), (k_4, l_2), (k_5, l_3))\}$.

Backtrackujeme o dvě patra stromu na uzel l_2. Jelikož jsme vyzkoušeli obě větve, tak backtrackujeme na uzel l_4. Pro zjednodušení obrázku nerozvíjíme dále strom do hloubky, protože víme, že již nalezené řešení je optimální z předchozích řešení tohoto příkladu. Algoritmus by dále procházel všechny

uzly až do hloubky tří větví TRUE, ale nenašel by již lepší řešení, tedy $o_{max} = \{(k_3, l_1), (k_4, l_2), (k_5, l_3))\}$ a velikost optimálního řešení je $|o_{max}| = 3$;

Pro zjednodušení pseudokódu, neuvažujeme optimálnější verzi s dvojitým backtrackem při nalezení řešení, ale pouze s jedním. V kódu také pro přehlednost zapisujeme první prvek sekvence s jako $s.první$ a následující prvek v sekvenci jako $node.další$.

3.4 S heuristickým řešením

Vidíme, že zásadní problém výše uvedených algoritmů je jejich výpočetní složitost, kde k rostoucímu počtu klíčů a zámků roste exponenciálně i složitost problému. Proto navrhujeme heuristické procedury na ořezání prostoru grafu, tedy nalezení nějakého částečného lock-chartu pro následné dopočítání algoritmy optimálními.

3.4.1 Biklastrování

Metoda biklastrování (v textu budeme náš uvedený a modifikovaný algoritmus dále už jen jako BC od anglického slova biclustering poprvé použité Borisem Mirkinem [3]), jenž bývá dnes nejčastěji používaná k vytěžování dat v oblasti bioinformatiky [4] se ukázal jako perspektivní přístup k analýze rozsáhlých datových souborů. Myšlenka biklastrování stojí na rozeznávání podobnosti a jejich následné označení ve vstupních datech.
V praxi můžeme pak pomocí metody biklastrování identifikovat třeba skupiny genů, které jsou koherentní v rámci skupin podmínek, tyto skupiny se nazývají biclustery. Geny patřící ke stejnému biclusteru by měli mít blízké biologické funkce [5], [6].
Mějme ale na paměti, že v obecné formě je biklastrování dokázáno jako *NP-těžký* problém, lze jej totiž převést na problém hledání maximálního párování přes hrany v úplném bipartitním grafu [7].

Myšlenka biklastrování se tedy nezdá býti až tak špatná. Hledáme totiž v ideálním případě takový částečný lock-chart, který má podobu lock-chartu vlastního. Pokoušíme se tedy vytvořit takový klastr, jenž v binární matici rozezná diagonálu.

Definice 3.6. (Metoda biklastrování). Nechť $T = \{K, L, E\}$ je lock-chart, pak $BC(K, L, E) = \{\bar{K}, \bar{L}, \bar{E}\}$ je funkce, kde $\bar{K} \subseteq K$, $\bar{L} \subseteq L$, $\bar{E} \subseteq E$. Neboli jedná se o proceduru, jenž ořeže zadaný lock-chart do podoby menšího částečného lock-chartu.

Postup k hledání heuristického řešení je následující: Zvolíme parametr r, jenž nám říká na kolik klastrů chceme lock-chart rozdělit. Parametr r odpovídá 2^r klastrům. Mějme zvolené kritérium c, které najde vhodné místo k řezu

lock-chartu, tedy místo kde lock-chart rozdělíme na dva částečné lock-charty sobě disjunktní. Poté ověříme, zda dané částečné lock-charty nejsou řešením. Pokud ano, vracíme velikost řešení. Pokud ne, pokračujeme v dalším řezu. Ve chvíli kdy vyčerpáme nastavené množství řezů vracíme největší nalezené řešení z množiny vytvořených částečných lock-chartů T_i, kde $i \in \{1, .., 2^k\}$.

Ani zde však není nic bez problému. Úspěch algoritmu závisí na dvou parametrech (r, c) a nic nám nezaručuje, že nalezneme vůbec nějaké řešení.

(Volba kritéria řezu c.) V první řadě si řekněme, co od takového kritéria očekáváme. Cílem je najít takové místo, tedy takovou dvojici klíčů z K anebo dvojici zámků z L mezi kterými provedeme řez. Jelikož se snažíme o co nejlepší časovou výpočetní složitost, uvažujme, že se jedná o polynomiální proceduru, tedy chceme aby každému klíči a zámku v lock-chartu přiřadil reálné číslo. Jedná se tedy o funkci $c : K \cup L \to \mathbb{R}$. Jako vhodné místo k provedení řezu se zdá být taková dvojice klíčů (zámků), kde je rozdíl jejich kritérií maximální nebo naopak minimální.

Toto vede k následující úvaze: Pokud si seřadíme řádky a sloupce matice (lock-chartu), pomůže to nějak řešení biklastrování? Případně úvahu druhým směrem. Existuje nějaké seřazení, které nám usnadní řezy lock-chartů?

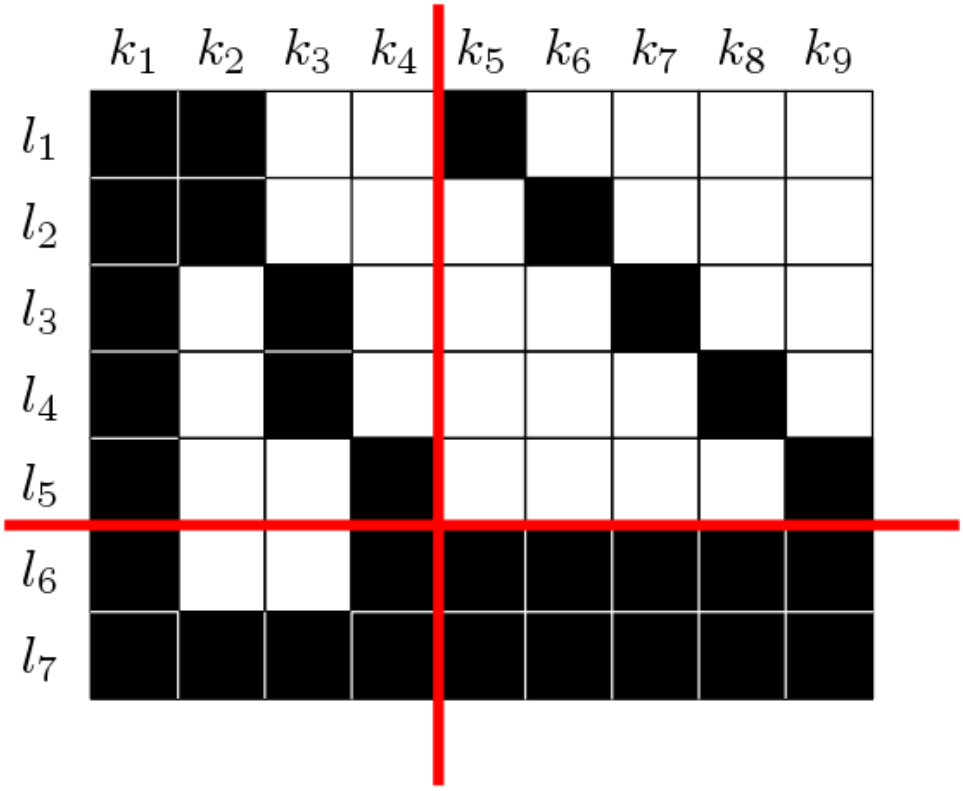
Definice 3.7. (Úplné řazení). Nechť máme lock-chart $T = (K, L, E)$ a kritérium řezu c, které každému klíči a zámku přiřadí reálné číslo, tedy $c : K \cup L \to \mathbb{R}$. Jestliže dokážeme jednoznačně seřadit lock-chart T, pak říkáme, že se jedná o *úplné řazení*

Mějme diagonální lock-chart z Obrázku 2.2 na straně 10. Pokud bychom jako funkci c vzali počet otvíraných zámků, případně pro řádky matice počet klíčů otvírajících příslušný zámek a předem dané indexování klíčů, pak dostáváme úplné řazení. Problém je ale takový, že obecně nejsme úplné řazení schopni nalézt, tedy obecně platí, že neexistuje jednoznačné kritérium k řazení. Stačí si vyzkoušet třeba příklad z Obrázku 2.3 na straně 12.

Reálně se proto nakonec osvědčila nejlépe jedna z nejjednodušších funkcí řezu a to počet hran, které z vedou z klíče do daného zámku Tedy pro každé políčko matice M (o rozměrech $|K| \times |L|$) vypočteme hodnotu následující formulí $m_{i,j} = |E(k_i)|$ a hodnotu sloupce pro klíč k_i jako $c : k_i \to \sum_{j=1}^{|L|} m_{i,j}$. Všímáme si, že hodnota není závislá na volbě zámku.

V algoritmu můžeme provést ještě jednu optimalizaci k urychlení výpočtu. Ohodnocení řádků a sloupců lock-chartu provádíme pouze jednou při spuštění, tedy neuvažujeme možnost, že řez může změnit ohodnocení klíčů a zámků při rozdělení na částečné lock-charty. Toto zjednodušení by mohlo být implementováno k urychlení výpočtu.

(Volba parametru r). Vidíme, že má smysl uvažovat parametr r z intervalu $1 \leq r \leq log_2(|K| \cdot |L|)$, kde K je množina klíčů a L je množina zámků. Přičemž



Obrázek 3.5: Řezy při perfektní volbě parametru r

dolní limit nám říká, že provedeme pouze jeden řez a horní limit naopak, že každé políčko matice, tedy každý prvek lock-chartu bude v jednom klastru.

Předpokládejme, že máme perfektní kritérium řezu, tedy takové, že dokáže oddělit generální a hlavní klíče od klíčů vlastních pomocí jednoho řezu a stejnou proceduru i pro centrální vložku a vložky hlavní. Pak by optimální volba parametru r byla $r = 2$.

Příklad 3.8. Na Obrázku 3.5 na straně 33 máme znázorněný příklad perfektního kritéria řezu. Pomocí dvou řezů mezi klíči k_4, k_5 a zámky l_6, l_7 jsme schopni oddělit maximální vlastní lock-chart.

Příklad 3.9. Mějme zadaný lock-chart z Obrázku 3.2 na straně 26 a volbu parametru $r = 3$. Kriteriální funkci řezu zvolme následovně: $m_{i,j} = |E(k_i)| \cdot |E(l_j)|$ a řez budeme provádět na místě, kde je rozdíl průměrného kritéria pro nějaké dva řádky nebo sloupce matice největší. Nejprve spočteme hodnoty matice M podle vzorce pro $m_{i,j}$. Dostáváme pravou matici ohodnocení z Obrázku 3.6 na straně 35. Následně vypočteme průměrnou hodnotu řádku a sloupců a podle nich seřadíme řádky a sloupce matice.

(Iterace 1). Mějme ohodnocenou matici z Iterace 1 na Obrázku 3.10 na straně 36. Jelikož největší rozdíl $d = 13 - 7.8 = 4.2$ je mezi řádky jedna a dva provedeme zde řez. Dále by algoritmus procházel paralelně obě dvě podmatice, my však budeme sledovat pouze tu dolní, jelikož vidíme, že horní

oddělená podmatice není nijak zajímavá k prozkoumání (může obsahovat vlastní částečný lock-chart o velikosti maximálně 1).

(Iterace 2). Řez provádíme mezi prvním a druhým sloupcem díky rozdílu $d = 8 - 5.3 = 2.7$. Všímáme si, že jsme hodnoty jednotlivých polí matice a tedy i průměry příslušných řádků a sloupců přepočítali oproti Iteraci 1. Pokračujeme to další iterace pouze s pravou částí matice, i když algoritmus zpracovává podmatice obě.

(Iterace 3). Provedeme řez mezi prvním a druhým sloupcem pro rozdíl $d = 3.3 - 1.6 = 1.7$ Při dalším zavolání rekurze bychom pouze ověřili, že pravá podmatice je vlastním částečným lock-chartem.

Z rekurzí se nám vrátí několik řešení, jelikož jsme zvolili parametr $r = 3$, máme tedy $2^3 = 8$ potencionálních řešení. Množina velikostí všech řešení by vypadala následovně $V = 1, 3$, přičemž řešení o velikosti jedna se několikrát opakovalo.

Výsledkem metody je tedy $o = \{(k_3, l_1), (k_4, l_2), (k_5, l_3))\}$, shodou náhod i hledané optimální řešení o_{max}.

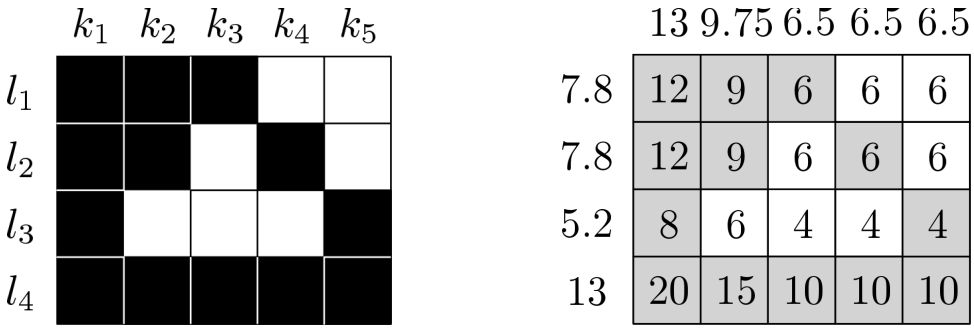
Algoritmus 3.7. (Metoda biklastrování).

vstup : lock-chart T, parametr k
výstup : Velikost vlastního lock-chartu

```
1  Funkce BC(T, k)
2      if k ≠ 0 then
3          Rozděl T podle výsledku řez(T) na T1 a T2;
4          a =BC(T1, k-1);
5          b =BC(T2, k-1);
6          return max(a, b);
7      else
8          if Ověř-Řešení(T) then
9              if Velikost-Řešení(T) > v_max then
10                 return Velikost-Řešení(T);
11             end
12         else
13             return 0;
14         end
15     end
```

Poznámky k příkladu: Je zcela jasné, že v tomto příkladě nemá smysl dále řezat "plné"řádky a sloupce, jenž nám zbudou po rozdělení. Jen bychom plýtvali výpočetními prostředky. Ilustrované tři iterace jsou tedy i znázorněním optimalizované verze BC.

Všímáme si však, že volba kritéria zapříčinila, že jsme vlastně osekávali



Obrázek 3.6: Matice ohodnocení M před seřazením.

o jeden klíč nebo zámek při každé iteraci. Obecně to nemusí pro dané kritérium platit, ale zkusme vytvořit takové pravidlo, které postupně ořezává prostor po jednom klíči nebo zámku.

3.4.2 Hladové kritérium

Mějme zadaný lock-chart ve formě bipartitního grafu. V minulé kapitole jsme si ukázali, že metodou maximálního párování nelze dosáhnout požadovaného výsledku. Je tedy potřeba nějakým způsobem omezit graf tak, aby řešení bylo jednoznačné a korektní.

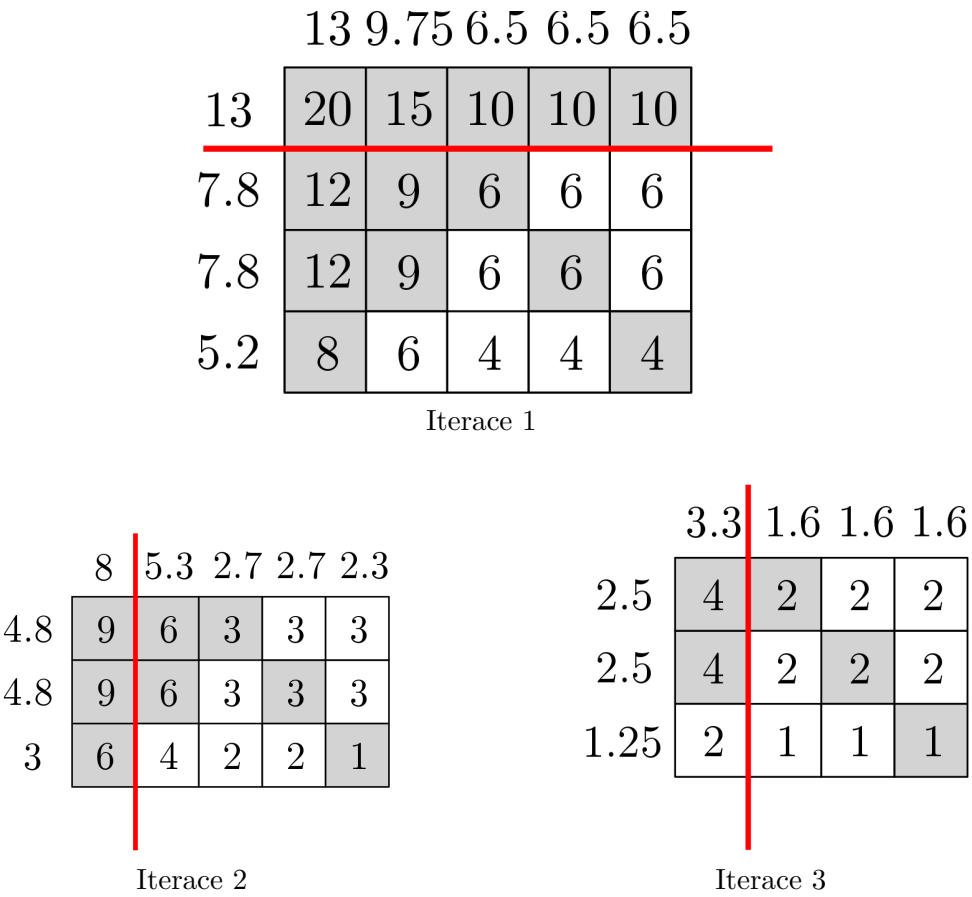
Definice 3.10. (Jednoznačné řešení). Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, množinu klíčů K a množinu zámků L, kde platí $|K| = |L| = |E|$ a zároveň $d(l) = d(k)$ pro všechna $k \in K$ a $l \in L$. Takovou množinu E nazveme perfektním párováním, jestliže pro všechny k platí, že $|E(k)| = 1$ a pro všechna l platí $|E(l)| = 1$. Pak o této množině hovoříme jako o *jednoznačném řešení*.

Na Obrázku 3.11 na straně 37 máme příklad takového jednoznačného řešení. Vidíme, že se shoduje s vlastním lock-chartem.

Hledáme tedy nějaké pravidlo (kritérium) podle kterého bychom z původního zadaného lock-chartu dostali částečný vlastní lock-chart a jeho příslušný graf v podobě perfektního párování. Je potřeba nějakým způsobem z množiny uzlů $U = \{k_1, k_{|K|}, \ldots, l_1, l_{|L|}\}$ mazat prvky, tak abychom po konečném počtu kroků dostali řešení (ne nutně optimální). Jedná se tedy v podstatě o speciální případ metody biklastrování, kdy provádíme řez tak, aby výsledkem byl sloupce (řádek) a zbytek matice.

Definice 3.11. (Hladový výběr). Mějme množinu uzlů U, kde každý uzel $u \in U$ má ohodnocení $p : u \rightarrow \mathbb{R}$. Řekněme, že výběr prvku z U je *hladový*, jestliže vybíráme prvek $max(p(U))$. [17]

Definujme si funkci p jako stupeň uzlu. Pravidlo hladového výběru pak vypadá nadějně. Skutečně se chceme co nejdříve zbavit z lock-chartu především generálních a hlavních klíčů (obdobně centrálních a hlavních vložek).

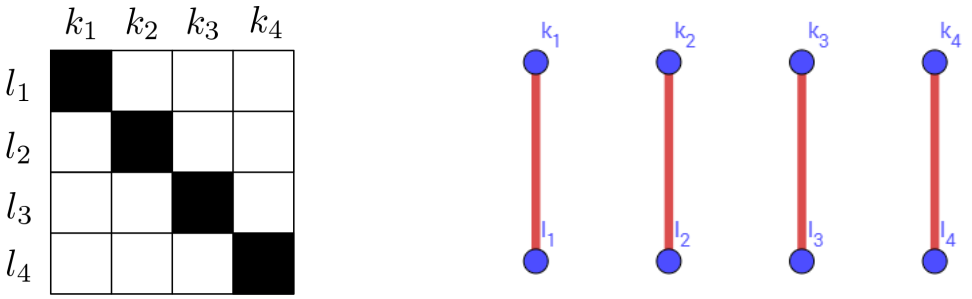


Obrázek 3.10: Tři iterace metody biklastrování

Příklad 3.12. Mějme zadaní z Obrázku 2.5 na straně 14. Pak funkce p vrací následující vektor pro $p : \{k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3, l_4\} \to \{2, 1, 2, 1, 1, 2, 1\}$.

Pokud pomocí tohoto hladového kritéria vygenerujeme sekvenci $s = \{l_3, k_1, k_3, k_2, l_1, l_2, l_4\}$, tak už po jednom kroku, tedy odstranění uzlu l_3 dostáváme optimální řešení $|o_{max}| = 3$. Problém nastává ve chvíli, kdy pořadí uzlů se stejnou kardinalitou prohodíme existuje dalších 96 seřazení, kde se dostaneme pouze k částečnému řešení $|o_{subopt}| = 2$. Potřebujeme tedy silnější kritérium, než pouhý stupeň uzlu.

(Perspektivní hrana). Mějme prvotní ohodnocení stupněm vrcholu. Chceme dále seřadit ty vrcholy, které se ve svém stupni shodují s alespoň jedním jiným uzlem, tedy vyhodnotit, který z nich je "perspektivnější"do budoucna a který ne. Víme, že jednoznačné řešení má podobu perfektního párování v grafu, což je to takový stav, kdy se stupně rovnají velikosti jedna. Přidáváme, tedy navíc pravidlo, které řadí uzly podle toho, zda nějaká hrana z něj vedoucí není hranou jedinou uzlu druhého. Formálně každé hraně pro každý uzel přiřadíme celé číslo $single : u \to \{a_1, \ldots, a_n\}$ pro $u \in U$ a $a_i \in \mathbb{N}$,



Obrázek 3.11: Perfektní párování pro vlastní lock-chart

tedy vektor přirozených čísel každému uzlu, jenž odpovídá stupňům uzlům koncovým k příslušným hranám. Jestliže v daném vektoru není obsaženo číslo jedna hovoříme pak o takovém vrcholu jako o perspektivnějším ve smyslu v porovnání se všemi ostatními uzly se stejným stupněm.

Myšlenka je tedy následující: Jestliže z uzlu vede cesta hranou do koncového uzlu pouze se stupněm jedna, pak pokud tento uzel (počáteční) odstraníme, tuto cestu z potencionálního řešení navždy ztratíme. Pokoušíme se tedy ji ponechat ve výsledné podmatici co nejdéle.

Algoritmus 3.8. (Hladový bez modifikací).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$
výstup : Velikost vlastního lock-chartu

```
1 Funkce Hladový(T)
2     while Maximální-Párování(T) ≠ |E| do
3         n = max(T);
4         if 1 ∉ single(n) then
5             T = T \ {node};
6         end
7     end
8     return Velikost-Řešení(T);
```

Příklad 3.13. Mějme zadaní z Obrázku 2.5 na straně 14. Funkce *single* vrací následující vektory pro vrcholy $single : k_1 \to \{1, 2\}$, $single : k_2 \to \{1\}$, ..., $single : l_4 \to \{2\}$.

Pomocí hladového kritéria zvolíme uzel k odstranění z lock-chartu. Hladové kritérium vyhodnotí jako největší uzly tři a to k_1, k_3 a l_3 s velikostí 2. Aplikujeme na ně přidané pravidlo perspektivní hrany, tedy $single : k_1 \to \{1, 2\}$, $single : k_3 \to \{2, 1\}$ a $single : l_3 \to \{2, 2\}$. Z příslušných výsledků funkcí vidíme, že jako jasný vítěz a tedy kandidát k odstranění je uzel l_3, jelikož jako jediný neobsahuje perspektivní hranu. Po odstranění uzlu dostáváme optimální řešení $|o_{max}| = 3$.

Ve výše uvedeném příkladě jsme viděli, že lze touto metodou získat opti-

mální řešení, toto však neplatí obecně. Perspektivní hranou pouze zvyšujeme pravděpodobnost nalezení lepšího řešení.

Hladový s redukcí počátečního prostoru

Mějme následující tvrzení: Jestliže je uzel obsažen v nějakém maximálním párování pak je bude spíše ležet v konečném řešení. Jestliže tedy máme deterministický algoritmus pro hledání maximálního párování - vrátí po opakovaném volání na stejném vstupu jedno a totéž párování, pak pokud toto párování zavoláme na lock-chart $T = (K, L, E)$ k dalšímu hledání řešení budeme uvažovat pouze ty uzly příslušného bipartitního grafu, které byly obsaženy v daném maximální párování.

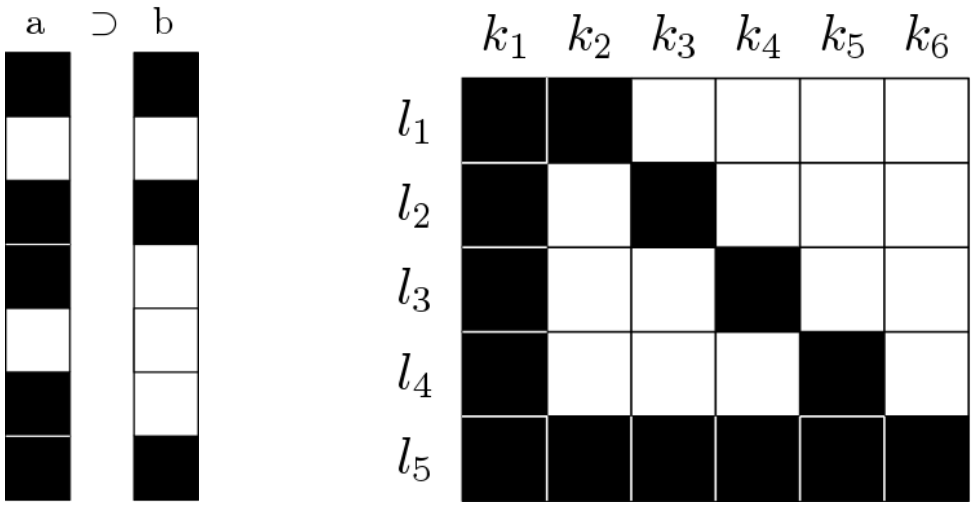
Algoritmus 3.9. (Hladový s redukcí počátečního prostoru).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$
výstup : Velikost vlastního lock-chartu

```
1 Funkce Hladový(T)
2 |  T = T ∩ Maximální-Párování(T);
3 |  while Maximální-Párování(T) ≠ |E| do
4 |  |  n = max(T);
5 |  |  if 1 ∉ single(n) then
6 |  |  |  T = T \ {node};
7 |  |  end
8 |  end
9 |  return Velikost-Řešení(T);
```

Hladový s odstraněním duplikací

V průběhu iterací hladového algoritmu může nastat situace, kdy vzniknou dva totožné řádky nebo sloupce v matici dané zadaným lock-chartem. Tato modifikace řešení nejen problém vzniklých duplikací, ale i odstranění prázdných uzlů, které vznikají při nutnosti smazání perspektivního uzlu. Obě operace zlepšují velikost řešení za cenu výrazného zpomalení průběhu algoritmu.



Obrázek 3.12: Kritérium podmnožiny s protipříkladem optimálnosti

Algoritmus 3.10. (Hladový s odstraněním duplikací).

vstup : lock-chart $T = (K, L, E)$
výstup : Velikost vlastního lock-chartu

```
1  Funkce Hladový(T)
2      T = T ∩ Maximální-Párování(T);
3      while Maximální-Párování(T) ≠ |E| do
4          n = max(T);
5          if 1 ∉ single(n) then
6              T = T \ {node};
7              T = Odstraň-Duplikace(T);
8          end
9      end
10     return Velikost-Řešení(T);
```

Výběr hladového kritéria je daný dosáhnutím poměrně dobrých výsledků proti výpočetnímu výkonu. Obecně lze ale algoritmů využívajících nějaké kritérium dosadit kritérium vlastní podle zadaného typu lock-chartu (tyto úvahy dále rozvineme v další kapitole). Pro doplnění ještě uvedeme dva poznatky s experimenty s volbou kritéria:

(Kritérium podmnožiny). Mějme řádek (sloupec) daný je binární řetězec, kde 1 symbolizuje, že klíč otevírá (zámek je otvírán) a 0 opak. Řekněme, že jsou dva binární řetězce a, b v relaci podmnožina jestliže pro $c = |a - b|$ platí, že $min(c) = 0$. Tedy neobsahuje žádnou -1, což znamená, že řetězec s méně vstupy obsahuje jen tytéž otvírané položky jako řetězec s větším počtem otvíraných. Libovolný neprázdný řetězec je podmnožinou generálního klíče. Takové kritérium bohužel není obecně optimální a oproti hladovému je

k výpočtu složitější, ale pro určité třídy problémů by mohlo poskytnou řešení optimální.

(Pravidelné odstraňování řádků a sloupců). Toto přidané kritérium vypadá na první pohled rozumně, jelikož se snažíme dosáhnou čtvercové matice jako výsledku. Má ho však smysl uvažovat pouze v případech, kdy máme zajištěno, že lock-chart neobsahuje duplicity, což dává zároveň požadavek na výpočetní výkon.

Kapitola 4

Experimenty

V této kapitoly si ukážeme výsledky běhů implementovaných algoritmů a ověříme některé hypotézy, které porovnávají jejich běh, co se týče času a velikosti řešení.

Pracujeme s dvěma sadami dat:

(Veřejná sada dat). Tato sada dat byla vyjmuta z diplomové práce Anny Lawer [1]. Dokonce zanecháváme pro přehlednost čtenáře i stejnou notaci pojmenování příkladů. Sada se dělí na tři typy příkladů. Máme tu ty které jsou označeny jako lehké, ty jsou zhruba do velikosti 20 klíčů. Středně těžké jsou do 40 a zároveň obsahují více hlavních klíčů a jako těžké jsou považovány příklady zhruba do 100 klíčů. Sada obsahuje 20 příkladů.

(Komerční sada dat). Tato sada nemá žádné příhodné rozdělení jako sada veřejná. Snad jen poznamenáme, že se zde vyskytují příklady od velikosti řádu jednotek až po stovek. Největší příklad obsahuje zhruba 2000 klíčů a zámků. V tabulkách porovnávající algoritmy nebudeme uvažovat tento komerční příklad $G11$ ačkoliv byl testován. Důvodem je jeho rozsáhlost, protože jen dva z algoritmů doběhly (hladová kritéria bez duplikací) a kdybychom ho započítali do průměrných hodnot výrazně by zlepšil tyto dva algoritmy co se týče velikosti řešení a neúměrně je zhoršil v rámci časového výsledku. Sada obsahuje 11 příkladů včetně vyloučeného příkladu G11. Největším dopočítaným příkladem pro všechny algoritmy se tak stává komerční příklad o velikosti zhruba 500 klíčů a zámků.

Dále budeme uvádět jednotlivé značení algoritmů v tabulkách a grafech:

H odpovídá hladovému kritériu, **BC** metodě biklastrování a **SAT** standardně implementaci SATu. Přidaný parametr **R** nebo negace **¬R** odpovídá počáteční redukci prohledávacího prostoru podle metody maximálního párování nebo nevyužití redukce a parametr **D** nebo negace **¬D** odpovídá odstranění duplikací v prostoru pro každou iteraci daného algoritmu nebo jeho nepoužití. Mějme na paměti, že **SAT redukovaný** odpovídá redukci prostoru klauzulí a ne parametru **R**. U každé metody biklastrování přidáváme

typ	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$	t_1	t_n	ex [%]
SAT redukovaný	1.0000	9.1279	0.0017	4.5458	100
SAT redukovaný H R ¬D	16.9151	16.9151	0.0052	0.0052	100
SAT redukovaný H R D	17.2112	17.2112	0.0289	0.0289	100
SAT redukovaný H ¬R ¬D	16.9151	16.9151	0.0050	0.0050	100
SAT redukovaný H ¬R D	17.2112	17.2112	0.0160	0.0160	100
SAT nahoru	1.0000	9.7621	0.0016	6.7261	100
SAT dolů	15.2085	15.2085	0.4741	0.4741	85

Tabulka 4.1: Průměrné hodnoty SAT pro veřejnou sadu dat.

číslo, které odpovídá parametru řezu r, takže například BC R D 15 by říkalo, že $r = 15$. Zároveň u této metody uvažujeme jako kritérium řezu pouze podle klíče, tedy místo kde řez provádíme bylo spočteno pouze na základě informací dané klíčem.

Dále se budeme v tabulkách odkazovat na pět klíčových čísel. $|o_1|$ nám říká velikost prvního nalezeného řešení daným algoritmem a $|o_n|$ řešení posledního. t_1 je pak odpovídající čas nalezení prvního řešení a obdobně t_n je čas nalezení finálního řešení. Hodnota *ex* nám udává pro kolik procent příkladů vrátil algoritmus aspoň nějaký výsledek. Speciálně u veřejné sady ještě přidáváme ke zkoumání kolonku *opt*, který říká kolik procent příkladů doběhlo k optimálnímu řešení. Díky rozsáhlosti a komplexitě neveřejných dat není optimální řešení u všech těchto příkladů známo. Hodnotu *opt* uvádíme pouze v Tabulce 4.3 na straně 43.

Uveďme ještě, že zde uvedené metody biklastrování v sobě volají i výpočet hladového kritéria v případě, že chceme u jednotlivých klastrů vyhodnotit, zda se v nich nenachází vlastní lock-chart. Tato modifikace byla přidaná za účelem zvýšení šance nalezení řešení.

Všechny testy probíhaly na výpočetním serveru ČVUT FEL Hyperion, kde bylo k dispozici až 16 vláken a 124 GB paměti RAM. Každému algoritmu byl přiřazený timeout 2 hodiny, ale málokterý z průběhů musel být tímto timeoutem zaříznutý, protože buď doběhl dříve anebo výpočet selhal na nedostatku paměti.

4.1 Hypotézy o SATu

Mějme hypotézu takovou: *SAT algoritmus vrací optimální řešení.*

Z uvedených tabulek vidíme, že tvrzení hypotézy není dost silné, aby platilo, neboť u veřejné sady dekrementační SAT v 15% případů nevrací žádné řešení. U komerční sady dat je situace ještě horší, žádná varianta SATu zde nedobíhá stoprocentně a když se podíváme u veřejné sady na

	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$	t_1	t_n	ex [%]
SAT redukovaný	1.0000	5.2360	0.0395	29.8451	100
SAT redukovaný H R ¬D	23.9639	24.8413	0.1437	0.3306	72.73
SAT redukovaný H R D	33.0140	33.8888	2.4923	3.8956	100
SAT redukovaný H ¬R ¬D	21.7335	24.0994	0.1888	0.4242	72.73
SAT redukovaný H ¬R D	23.8255	24.6979	1.3200	2.4596	72.73
SAT nahoru	1.0000	5.2360	0.0387	31.0238	100
SAT dolů	12.8836	12.8836	1.8745	1.8745	36.36

Tabulka 4.2: Průměrné hodnoty SAT pro neveřejnou sadu dat.

typ	opt [%]
SAT redukovaný	25
SAT redukovaný H R ¬D	80
SAT redukovaný H R D	100
SAT redukovaný H ¬R ¬D	80
SAT redukovaný H ¬R D	100
SAT nahoru	50
SAT dolů	85

Tabulka 4.3: Počet optimálních řešení pro jednotlivé SAT instance.

počet nalezených optimálních řešení, tak vidíme, že pouze SAT redukovaný s odstraněním duplicit nachází vždy optimální řešení.

Přeformulujeme hypotézu takto: *Jestliže SAT algoritmus doběhne, pak vrací optimální řešení.*

Tedy jestliže uvažujeme pouze takové příklady, kdy nám stačila k dopočítání paměť a SAT měl veškeré výpočetní prostředky aby doběhl, pak na všech takových příkladech SAT vrací optimální řešení. Na Obrázku 4.3 na straně 50 máme dva takové průběhy u příkladů z veřejné sady M108 a M109. SAT pak vrací optimální řešení na všechny příklady, kde dobíhá. Hypotézu z dat potvrzujeme, i když jsme stejného výsledku mohli docílit teoretickým důkazem správnosti hypotézy.

Důkaz. Algoritmus postupně iteruje přes všechny možné velikosti řešení, tedy od 1 do $|K|$ pokud jdeme směrem nahoru a ve směrů dolů je první nalezené řešení největší možné. Máme tedy zaručeno, že SAT vyzkouší existenci všech velikostí řešení v jednom směru a maximální možnou ve směru druhém.

Předkládáme ještě jednu hypotézu: *SAT dolů vrací nejlepší řešení, ale je nejméně spolehlivý.*

Z Tabulek 4.1 a 4.2 vidíme, že SAT dolů má nejnižší pravděpodobnost, že vůbec dosáhne na nějaké řešení v porovnání s ostatními typy SATů, tedy je skutečně nejméně spolehlivý. Avšak ve chvíli, kdy už řešení vrací,

typ	SAT dolů
H R ¬D	1.0343
H R D	1.0195
H ¬R ¬D	1.0586
H ¬R D	1.0145
BC R ¬D 2	1.2351
BC R D 2	1.1601
BC ¬R ¬D 2	1.1794
BC ¬R D 2	1.1392
BC R ¬D K/2	1.0806
BC R D K/2	1.0333
BC ¬R ¬D K/2	1.0946
BC ¬R D K/2	1.0282
Strom podle kritéria H	1.0104
Binární strom podle H	1.0104
SAT redukovaný	1.7792
SAT redukovaný H R ¬D	1.0195
SAT redukovaný H R D	1.0050
SAT redukovaný H ¬R ¬D	1.0157
SAT redukovaný H ¬R D	1.0000
SAT nahoru	1.6636
SAT dolů	1.0000

Tabulka 4.4: SAT dolů v porovnání s ostatními algoritmy.

tak vrací nejlepší, jak dokazuje Tabulka 4.4 na straně 44, která ukazuje korelaci optimálnosti dvou řešení vrácené dvěma různými algoritmy. Jestliže je tento index větší, než 1 tak je daný porovnávaný algoritmus lepší, jestliže je výsledkem korelace 1 tak jsou si algoritmy rovny a číslo menší než 1 říká, že je algoritmus horší, než ten se kterým je porovnáván. Tento index je počítán jako srovnání všech příkladů, kdy oba algoritmy vrací nějaké řešení. SAT dolů s výjimkou SAT redukovaný H ¬R D nad všemi ostatními algoritmy ostře dominuje. SAT dolů vrací nejlepší možné řešení, pokud už nějaké vrací.

4.2 Hypotéza o hladovém algoritmu

Hladové kritérium je jeden z přístupů, kde pomocí mnoha iterací nezlepšujeme nějaké částečné řešení, ale pouze vracíme jedno jediné nalezené touto procedurou. Proto uvažujeme následující hypotézu: *Hladové kritérium nachází nejvyšší první řešení* $|o_1|$ *mezi všemi uvedenými algoritmy.* Navíc k této hypotéze prozkoumáme jestli je odpovídající čas t_1 ze všech časů prvních řešení minimální.

Budeme mezi sebou porovnávat pouze některé implementace jednotlivých

typ	$\|o_1\|$	t_1 [s]	ex [%]
H R ¬D	16.9151	0.0110	100
H R D	17.2112	0.0259	100
H ¬R ¬D	16.9151	0.0099	100
H ¬R D	17.2112	0.0221	100
BC R ¬D 2	8.8425	0.0064	100
BC R D 2	4.1549	0.0043	100
BC ¬R ¬D 2	8.8425	0.0059	100
BC ¬R D 2	4.1549	0.0040	100
BC R ¬D K/2	10.1949	0.0076	100
BC R D K/2	5.6676	0.0090	100
BC ¬R ¬D K/2	10.1949	0.0072	100
BC ¬R D K/2	5.6676	0.0071	100
SAT redukovaný	1.0000	0.0017	100
SAT nahoru	1.0000	0.0016	100
SAT dolů	15.2085	0.4741	85

Tabulka 4.5: Porovnání prvního řešení a jeho času pro veřejná data

algoritmů, neboť jestliže by nějaký modifikovaný algoritmus využíval částečné řešení hladového kritéria, tak víme, že se první řešení bude s hladových kritériem shodovat a čas nalezení prvního řešení nebude nikdy menší. Výjimku tvoří metoda biklastrování, kde sice hladový algoritmus využíváme ke kontrole výsledku, ale díky řezání prostoru se jeho velikost mění. Jinými slovy, hladové kritérium, zde řeší nějaký menší podproblém a můžeme ho uvažovat ke srovnání.

V Tabulkách 4.5 a 4.6 máme vyznačenou hodnotu průměrné velikosti prvního řešení $|o_1|$ a času jeho nalezení t_1. Všímáme si, že nejmenších časů dosahují skoro všechny metody biklastrování a SAT redukovaný se SATem nahoru, ale co se týče do velikosti řešení hladové kritérium zcela jasně dominuje v obou sadách. Hypotézu potvrzujeme.

4.3 Hypotéza o biklastrování

Hypotéza: *Volba kritéria řezu podle klíče dominuje nad volbou pro sloučená kritéria klíče a zámku.*

V minulé kapitole jsme na příkladě ukazovali kritérium řezu, které počítalo ohodnocení klíče jako průměr hodnot sloupce matice M, kde každé políčko $m_{i,j}$ bylo dáno násobkem počtu klíčů a zámků pro daný řádek i a sloupec j. Tato hypotéza říká, že dosáhneme vždy lepších výsledku v metodě biklastrování pokud namísto $m_{i,j} = |k_j| \cdot |l_i|$ hodnotu políčka matice vypočteme pouze jako $m_{i,j} = |k_j|$. V Tabulce 4.7 vidíme, že je taková hypotéza správná pouze pro malou volbu parametru řezu r. Tento úkaz je zapříčiněný tím, že krité-

typ	$\|o_1\|$	t_1 [s]	ex [%]
H R ¬D	31.9171	0.4075	100
H R D	33.0140	2.1703	100
H ¬R ¬D	25.4610	0.4232	100
H ¬R D	28.4160	2.6374	100
BC R ¬D 2	9.1143	0.1806	100
BC R D 2	2.6261	0.0644	100
BC ¬R ¬D 2	8.1399	0.1893	100
BC ¬R D 2	2.0215	0.0523	100
BC R ¬D K/2	11.5810	0.2349	100
BC R D K/2	4.7785	0.1557	100
BC ¬R ¬D K/2	11.4508	0.2576	100
BC ¬R D K/2	5.0251	0.1074	100
SAT redukovaný	1.0000	0.0395	100
SAT nahoru	1.0000	0.0387	100
SAT dolů	12.8836	1.8745	36.36

Tabulka 4.6: Porovnání prvního řešení a jeho času pro neveřejná data

typ	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$
BC R ¬D 2	9.6150	22.0744	1.2413	12.5370
BC R D 2	3.6823	23.1888	1.1669	12.5370
BC ¬R ¬D 2	9.2245	23.0745	1.2413	12.7735
BC ¬R D 2	3.3455	23.7668	1.1669	12.7735
BC R ¬D K/2	11.5424	25.0603	6.7747	25.4648
BC R D K/2	5.6408	26.3080	2.1696	26.4845
BC ¬R ¬D K/2	11.4946	26.0071	5.9081	25.6730
BC ¬R D K/2	5.7458	27.3708	2.1696	26.9275

Tabulka 4.7: Porovnání kritérií řezu BC (vlevo podle klíče a vpravo podle násobení).

rium násobku se odvažuje více řezat směrem ke středu lock-chartu, zatímco kritérium dané pouze klíčem má tendenci ořezávat lock-chart po sloupcích a tím se blížit hladovému kritériu.

Fakt, že jsou si hodnoty řešení blízké pro volbu $r = |K|/2$ je dán opět příkladem G09. Pokud bychom jej z měření vypustili průměrná hodnota $|o_n|$ spadne na $|o_n| = 21 \pm 1$. Hypotéza tedy platí jen pro malou volbu parametru řezu r.

4.3.1 Biklastrování proti hladovému kritériu

Tuto podkapitolu uvádíme jen jako poznámku k naměřeným datům. Jelikož se jedná pouze o jediný příklad a k testování algoritmů byla použita omezeně velká sada dat, nejsme schopni vyvodit z výsledku příkladu G09 žádné pravidlo

nebo typ třídy příkladu se kterým do budoucna počítat.

Z uvedených tabulek si všímáme následujícího pozorování. Metoda biklastrování vrací pro stejnou sadu parametrů R, D vždy stejné nebo horší řešení, než hladové kritérium s jedinou výjimkou a to u komerčního příkladu G09.

Jelikož nemůžeme v této práci komerční příklady zveřejnit, dovolujeme si přednést alespoň teoretickou úvahu, proč - jak je vidět i přiloženém Obrázku B.1 na straně 59 - v tomto příkladě dosahuje metoda biklastrování lepších výsledků (co se týče do velikosti řešení) než hladové kritérium.

Metoda biklastrování si před provedením řezu lock-chart seřadí (resp. jeho řádky a sloupce tedy klíče a zámky). Hladové kritérium tak nečiní, to si pouze napočítá vhodnou sekvenci kandidátu k odstranění. Předpokládejme, že existují dva klíče nebo zámky, které mají stejnou hodnotu pro hladové kritérium, tedy jsou navzájem z pohledu kritéria ekvivalentní. Jelikož hladové kritérium funguje deterministicky, tak v takovém případě vždy upřednostní jeden z uzlů (např. pomocí indexu daného klíče nebo zámku). Rozdíl je tedy následující: biklastrování má šanci upřednostnit díky opakovanému řazení a dělení lock-chartů jiný z dvojice ekvivalentních uzlů.

Pro příklad G09 vrací metoda biklastrování o řád vyšší řešení, než metoda hladová. V tomto příkladě všechny hladová kritéria vrací velikost řešení pouze $|o_h| = 11$.

4.4 Hypotézy o volbě parametru

Hypotéza: *Algoritmus s parametrem D pro odstranění duplikace nám zaručí lepší řešení za cenu horšího času, než jeho protějšek s parametrem D zakázaným.*

Že velikost řešení bude větší pro algoritmy se zapnutým parametrem D, než s vypnutým ¬D se dala už odhadnout z Tabulek 4.5 a 4.6. Předkládáme Obrázek 4.6 pro veřejná data a Obrázek 4.9 pro komerční data se srovnáním jak velikosti řešení, tak i rychlosti nalezení takového řešení. S výjimkou dvou metod biklastrování se hypotéza potvrzuje.

V Tabulce 4.8 na straně 48 máme vynesené hodnoty $|o_v|$ pro velikost řešení z veřejné sady a velikost řešení $|o_n v|$ ze sady neveřejné. Tabulka nám říká o kolik procent jsme schopni najít lepší řešení při použití parametru D a a za jaké procentuální zvýšení doby nalezení takového řešení. Jestliže se v tabulce nachází záporná hodnota, říká to, že nalézáme menší řešení v případě, že se nachází ve sloupci s velikostí řešení anebo v rychlejším čase v případě, že se hodnota nachází ve sloupci pro čas výpočtu. Taková situace nastává pouze u dvou algoritmů a to u: BC R 2 a BC ¬R 2. Tedy u metod biklastrování při parametru řezu $r = 2$.

typ	$\lvert o_v \rvert$ [%]	t_v [%]	$\lvert o_n v \rvert$ [%]	$t_n v$ [%]
H R	0.8676	38.4854	1.6894	68.3817
H ¬R	0.8676	36.5406	5.4847	72.3479
BC R 2	1.7327	-0.3059	3.5641	-4.1101
BC ¬R 2	1.7327	0.3345	0.8805	-1.7965
BC R K/2	2.1444	33.4965	2.7256	69.0191
BC ¬R K/2	2.1444	27.2162	3.0688	69.0226
SAT redukovaný H R	0.8676	68.5278	15.4053	84.3559
SAT redukovaný H ¬R	0.8676	50.6691	1.2265	70.5783

Tabulka 4.8: Procentuální rozdíl v parametru D pro obě sady

Z výsledku je zřejmé, že odstraňování duplicit příliš nevyplácí. Zlepšení ve většině případů přesahuje hodnotu 3% za zhruba desetinásobné zhoršení času nalezení tohoto řešení.

Hypotéza: *Velikost řešení ovlivní nastavení parametru R maximálně o 20% u malých příkladů.*

V Tabulce 4.9 na straně 49 vidíme, že jednotlivé dvojice algoritmů lišící se pouze v parametru R mají stejné výsledky. Tabulka obsahuje průměrné výsledky pro veřejnou sadu dat. Pro tyto příklady se tedy řešení liší o 0%.

Vezměme Tabulku 4.11 na straně 53 pro neveřejná data. Z ní vypočítejme průměrnou rozdíl dvojic řešení podle parametru R. Výsledkem je pak Tabulka 4.10 na straně 49, kde vidíme, že žádný z rozdílu nepřesahuje 20%.

Hypotézu potvrzujeme.

4.5 Vyhodnocení

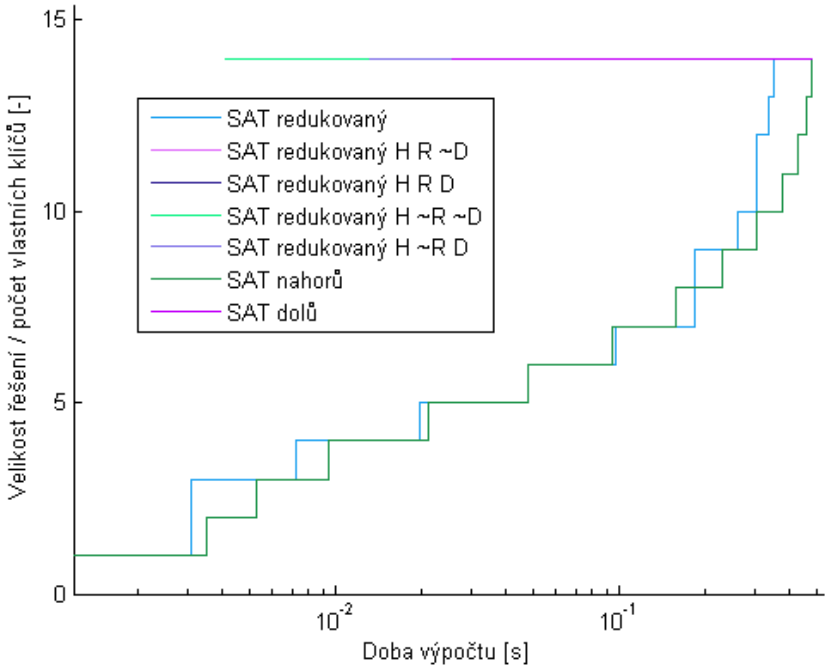
V této části se budeme odkazovat na graf pro veřejná data z Obrázku B.2 na straně 60 a na graf pro neveřejná data z Obrázku B.3 na straně 61. Je z něj zřejmé, že pro malé příklady se chovají různé algoritmy biklastrování podobně, kdežto u větších sad, tj. ze sady dat neveřejných, volba parametru řezu r může za dražší cenu času přinést lepší řešení. V obou sadách se velmi podobně chová SAT redukovaný a SAT nahoru, což není žádné překvapení, neboť se oba algoritmy liší pouze v oné redukci, jinak iterují po stejném pořadí velikostí. Na malých datech zároveň tolik nehraje role hladového kritéria a dalších SATů s výjimkou SATu dolů, který má výrazně horší čas, než výše zmíněné algoritmy. U větších typů příkladů z neveřejné sady se už roztahují nůžky v sekci hladových kritérií. Odstraňování duplicity zlepšuje řešení, ale trvá ho nalézt déle a počáteční redukce prostoru může zlepšit řešení až o 20%.

typ	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$
H R ¬D	16.9151	16.9151
H R D	17.2112	17.2112
H ¬R ¬D	16.9151	16.9151
H ¬R D	17.2112	17.2112
BC R ¬D 2	8.8425	15.0220
BC R D 2	4.1549	15.5518
BC ¬R ¬D 2	8.8425	15.0220
BC ¬R D 2	4.1549	15.5518
BC R ¬D K/2	10.1949	16.3389
BC R D K/2	5.6676	17.0550
BC ¬R ¬D K/2	10.1949	16.3389
BC ¬R D K/2	5.6676	17.0550
Strom podle kritéria H	17.2112	17.2112
Binární strom podle H	17.2112	17.2112
SAT redukovaný	1.0000	9.1279
SAT redukovaný H R ¬D	16.9151	16.9151
SAT redukovaný H R D	17.2112	17.2112
SAT redukovaný H ¬R ¬D	16.9151	16.9151
SAT redukovaný H ¬R D	17.2112	17.2112
SAT nahoru	1.0000	9.7621
SAT dolů	15.2085	15.2085

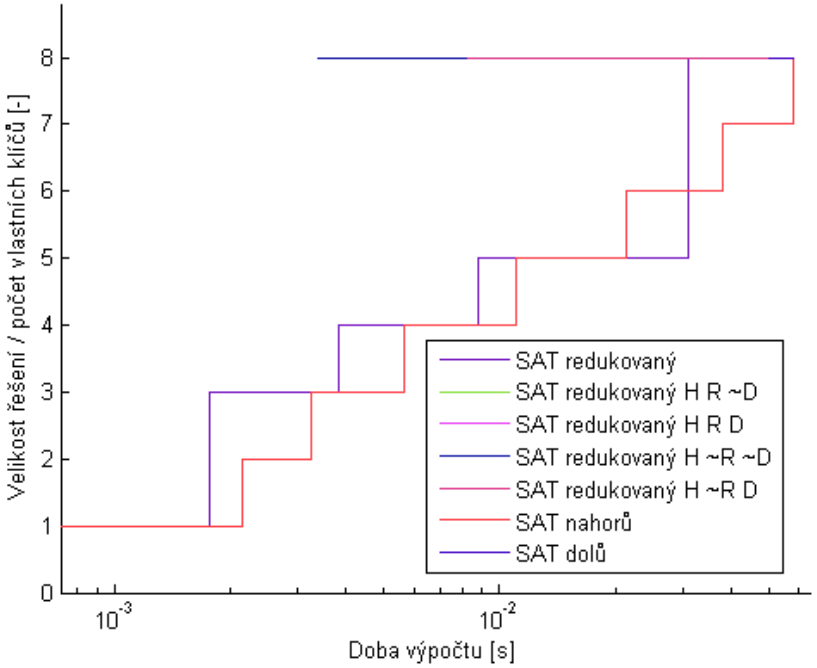
Tabulka 4.9: Průměrně první a poslední řešení pro veřejnou sadu příkladů.

typ	rozdíl [%]
H ¬D	11.25
H D	7.49
BC ¬D 2	5.65
BC D 2	13.01
BC ¬D K/2	0.57
BC D K/2	2.51
SAT redukovaný H ¬D	4.88
SAT redukovaný H D	16.17

Tabulka 4.10: Rozdíl v parametru R pro neveřejnou sadu dat.

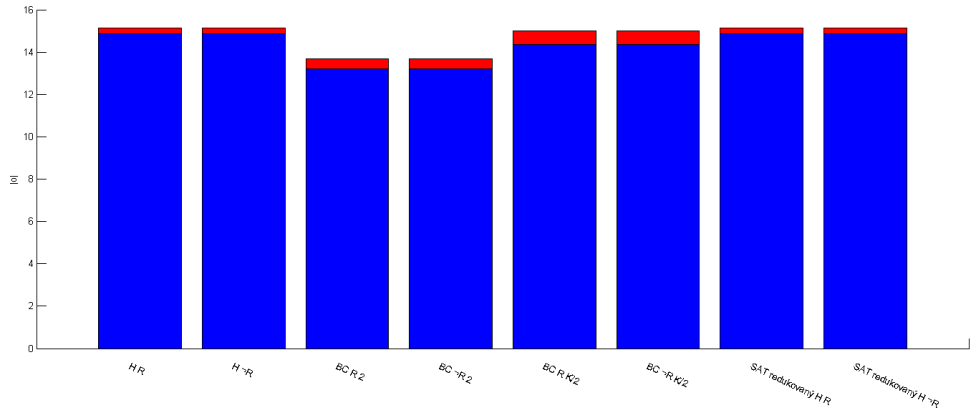


Průběh hledání řešení SAT pro příklad M108.

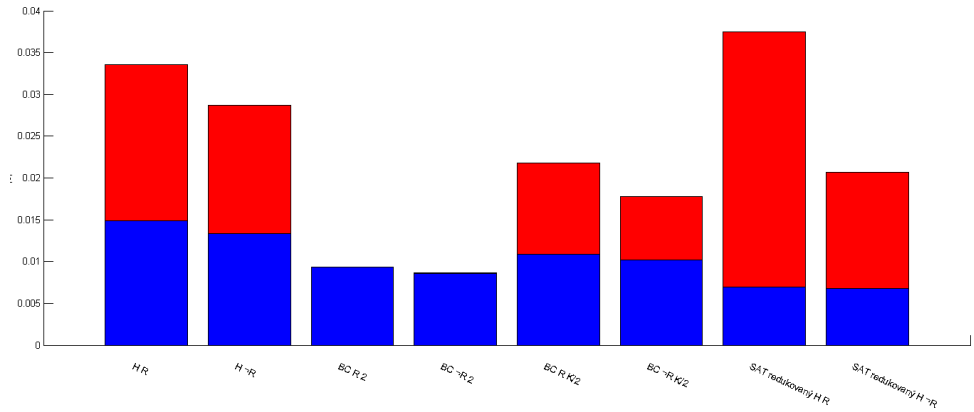


Průběh hledání řešení SAT pro příklad M109.

Obrázek 4.3: SAT konvergence k řešení.

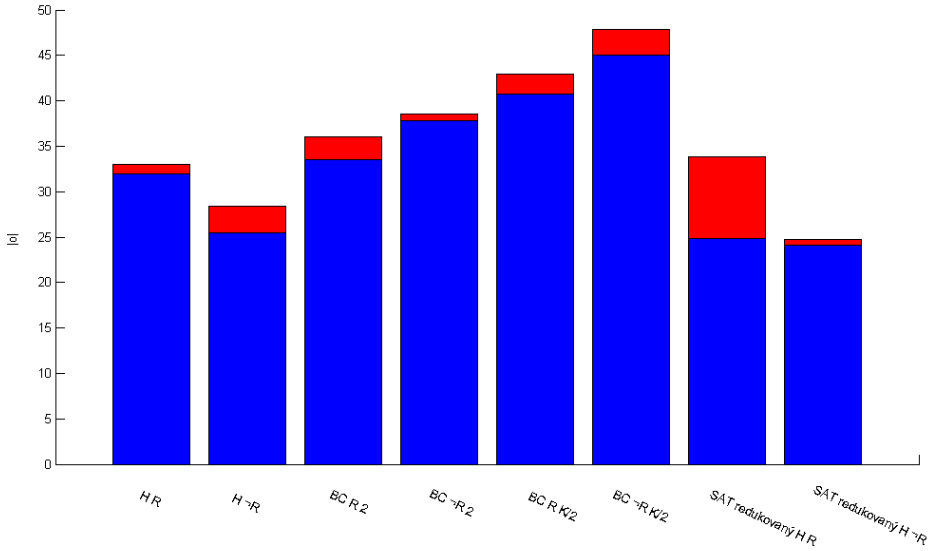


Změna velikosti řešení na veřejných datech.

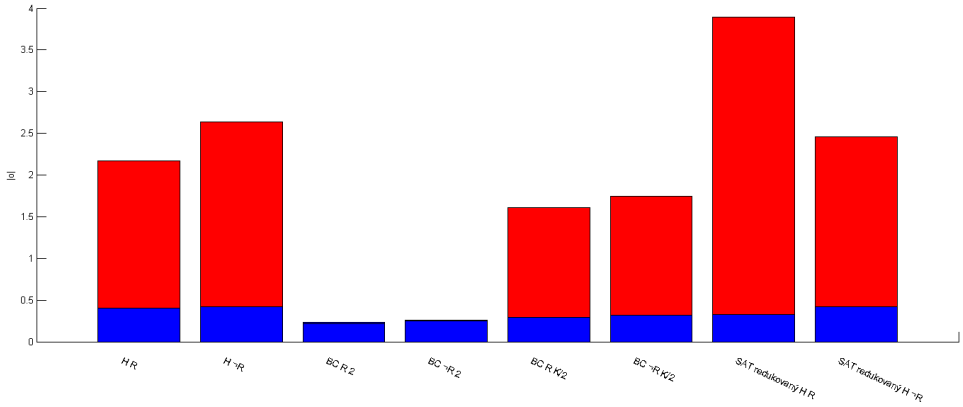


Změna rychlosti času nalezení řešení na veřejných datech.

Obrázek 4.6: Závislost na parametru D pro veřejná data



Změna velikosti řešení na neveřejných datech.



Změna rychlosti času nalezení řešení na neveřejných datech.

Obrázek 4.9: Závislost na parametru D pro neveřejná data

typ	$\|o_1\|$	$\|o_n\|$
H R ¬D	31.9171	31.9171
H R D	33.0140	33.0140
H ¬R ¬D	25.4610	25.4610
H ¬R D	28.4160	28.4160
BC R ¬D 2	9.1143	33.5461
BC R D 2	2.6261	36.0257
BC ¬R ¬D 2	8.1399	37.8554
BC ¬R D 2	2.0215	38.5279
BC R ¬D K/2	11.5810	40.6963
BC R D K/2	4.7785	42.9769
BC ¬R ¬D K/2	11.4508	45.0280
BC ¬R D K/2	5.0251	47.8791
Strom podle kritéria H	21.3019	27.4256
Binární strom podle H	21.3019	22.1495
SAT redukovaný	1.0000	5.2360
SAT redukovaný H R ¬D	23.9639	24.8413
SAT redukovaný H R D	33.0140	33.8888
SAT redukovaný H ¬R ¬D	21.7335	24.0994
SAT redukovaný H ¬R D	23.8255	24.6979
SAT nahoru	1.0000	5.2360
SAT dolů	12.8836	12.8836

Tabulka 4.11: Průměrně první a poslední řešení pro neveřejnou sadu příkladů.

Kapitola 5

Závěr

Řešení lock-chartu je teoreticky i prakticky komplexní problém. Představili jsme několik druhů přístupů k nalezení maximální vlastního částečného lock-chartu. Lokalizace takového lock-chartu může výrazně uspíšit výpočet lock-chartu obecného a tím i výpočet k přiřazení řezání reálných klíčů při výrobě. Ukázali jsme hlavní výhody a nevýhody jednotlivých přístupů. Máme velmi rychle prořezávání prostoru pomocí biklastrování, rychlé nalezení slušného částečného řešení pomocí hladového kritéria, jenž se dá dále kombinovat s algoritmy, které prohledávají stromy různých řešení v okolí nalezeného částečného výsledku. V neposlední řadě jsme ukázali převod na SAT, který umí v určitých modifikacích vracet dobré výsledky, ale velmi nestabilní.

5.1 Vylepšení do budoucna

Představujeme pár úvah a cest, které by v budoucnu v řešení problému hledání vlastních lock-chartů stály k prozkoumání:

5.1.1 Volba kritéria

Velkou otázkou zůstává jestli existuje lepší a rychlejší způsob, jak ohodnotit klíče a zámky. Podle takovýchto ohodnocení jsme například schopni volit místa řezu v metodách biklastrování. Cílem je toto ohodnocení spočítat, co možná nejefektivněji a ideálně u něj nemít potřebu ho přepočítávat v průběhu iterací.

5.1.2 Existence optimálního polynomiálního algoritmu

V této práci ukazujeme polynomiální algoritmy, které však obecně nemusí vracet optimální řešení. Existují optimální polynomiální procedury pro určité

třídy lock-chartu. Pokud bychom měli zadání bez vložek, lze uvažovat o metodě podmnožin. V situaci, kdy je zadaný lock-chart částečným uspořádáním, jsme pomocí antichain taktéž schopni problém vyřešit. Existence optimální polynomiální procedury pro obecný lock-chart je stále otevřený problém.

5.1.3 Přiřazení algoritmů k jednotlivým třídám příkladů

Problémem zůstávají testovací sady. Jak jsme již dříve uvedli existuje minimum prací k tématu klíčových systémů a pouze jedna jediná, která představuje veřejnou sadu příkladů. Komerčních příkladů je ještě méně a se zhruba 30 příklady lze těžko dělat statisticky signifikantní rozdělení na typy tříd příkladů. Je tedy možné, že určitý typ algoritmu velmi dobře řeší určitý typ příkladů, ale abychom tuto otázku zodpověděli, museli bychom mít přístup k většímu počtu zadání.

5.1.4 Nalezení diagonály

Jelikož naše zadání neuvažuje přidané podmínky z rozšíření lock-chartu, jedná se prakticky o nalezení nejdelší jednotkové diagonály v binární matici. Tato práce pak může skýtat potenciál pro zcela jinou výzkumnou oblast, kde je zrovna hledání takové binární diagonály žádoucí.

Příloha A

Literatura

[1] Anna Lawer. *Calculation of Lock Systems.* MA thesis, Royal Institute of Technology, 2004.

[2] Alan Gibbons. *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press, Chapter 5, 1985.

[3] Mirkin, Boris. *Mathematical Classification and Clustering.* Publisher Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-4159-7, 1996.

[4] Cheng KO, Law NF, Siu WC, Liew AW, *Identification of coherent patterns in gene expression data using an efficient biclustering algorithm and parallel coordinate visualization.* BMC Bioinformatics, 2008 Apr 23.

[5] Haifa Ben Saber, Mourad Elloumi *A novel biclustering algorithm of binary microarray data: BiBinCons and BiBinAlter.* PubMed Central®, Published online 2015 Nov 30. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4666179/.

[6] Chen H-C, Zou W, Tien Y-J, Chen JJ *Identification of Bicluster Regions in a Binary Matrix and Its Applications.* PLoS ONE 8(8): e71680, 2013 https://doi.org/10.1371/journal.pone.0071680

[7] Peeters R *The maximum edge biclique problem is NP-complete.* Discrete Applied Mathematics. 131: 651–654. doi:10.1016/S0166-218X(03)00333-0, 2003.

[8] Jiří Demel *Grafy a jejich aplikace* nakladatelství Academia, Praha 2002, ISBN 80-200-0990-6

[9] Cook, Stephen. *The complexity of theorem proving procedures* Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. pp. 151–158, 1971.

[10] Matoušek J., Nešetřil J. (2007): Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, Praha

[11] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald L.; Stein, Clifford (2001). Introduction to Algorithms (Second ed.). MIT Press and McGraw–Hill. pp. 651–664. ISBN 0-262-03293-7.

[12] Eén N., Sörensson N. (2004) An Extensible SAT-solver. In: Giunchiglia E., Tacchella A. (eds) Theory and Applications of Satisfiability Testing. SAT 2003. Lecture Notes in Computer Science, vol 2919. Springer, Berlin, Heidelberg

[13] Junker, U. (1998, October). Constraint-based Problem Decomposition for a Key Configuration Problem. In International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (pp. 265-279). Springer Berlin Heidelberg.

[14] Černoch, R., Kuželka, O., Železný, F. (2016). Polynomial and Extensible Solutions in Lock-Chart Solving. Applied Artificial Intelligence, 30(10), 923-941.

[15] Levin, Leonid (1973). Universal search problems. Problems of Information Transmission (in Russian). 9 (3): 115–116. Translated into English by Trakhtenbrot, B. A. (1984). "A survey of Russian approaches to perebor (brute-force searches) algorithms". Annals of the History of Computing. 6 (4): 384–400.

[16] Agnew, R. P. "Minimax Functions, Configuration Functions, and Partitions."J. Indian Math. Soc. 24, 1-21, 1961.

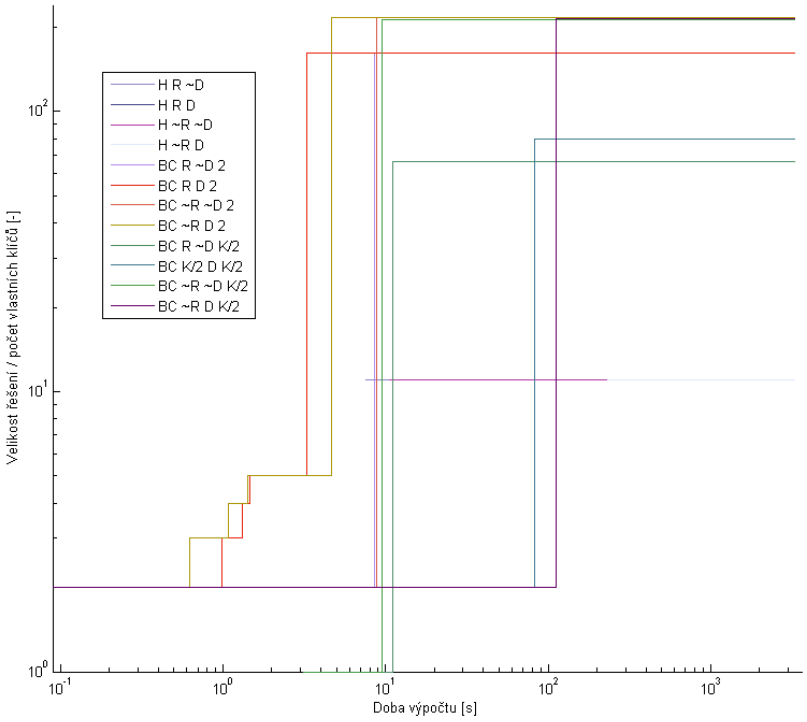
[17] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001) [1994], "Greedy algorithm", Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1-55608-010-4

[18] Don O'Shall. The Definitive Guide to RCM – Rotating Constant Method of Master Keying. Locksmithing Education, 2015. isbn: 9781937067137. url: https://books.google.cz/books?id=5Hz_rQEACAAJ.

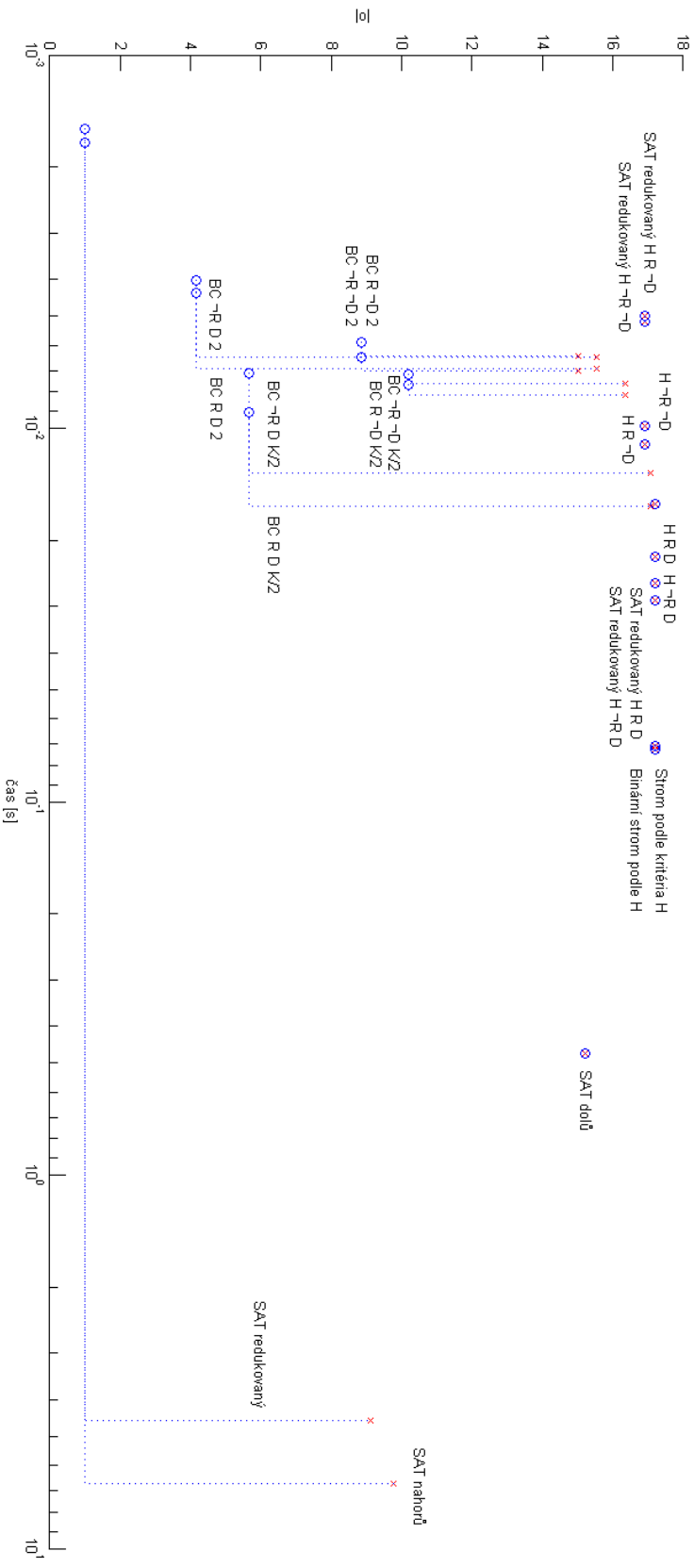
Příloha B

Obrázky

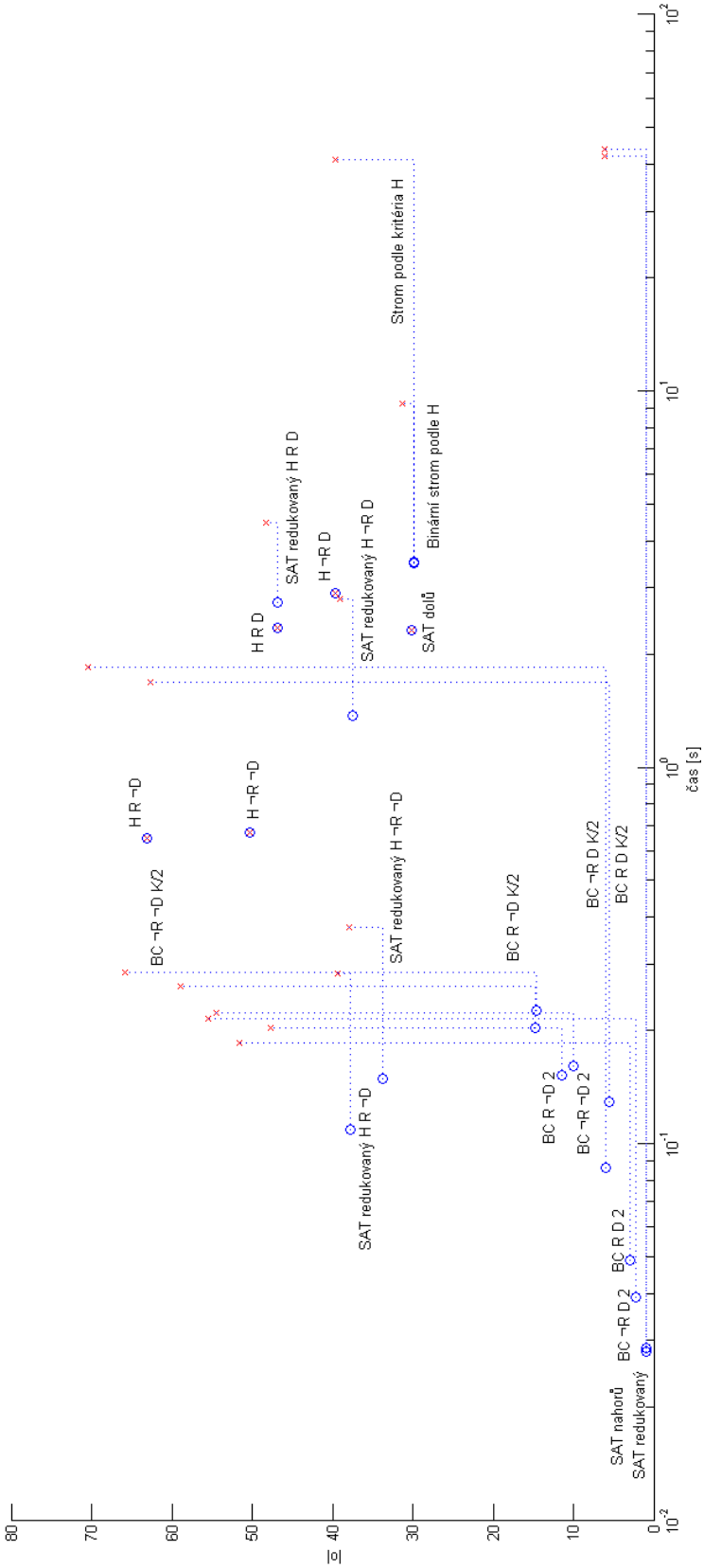
V této příloze předkládáme některé grafy a obrázky, na něž se sice v textu odkazujeme, ale nebyly kvůli své velikosti použity přímo v textu.



Obrázek B.1: Příklad G09 konvergence k řešení.



Obrázek B.2: Výsledky pro veřejná data.



Obrázek B.3: Výsledky pro neveřejná data.

Příloha C

Obsah CD

V přiloženém CD se nachází zdrojové kódy v jazyce C++. Část kódu je převzata z dizertace Radomíra Černocha [14] jako například třídy pro lock-chart a výpočet binomické věty. Třída *eigen.cpp* obsahuje všechny uvedené algoritmy z této práce. Instrukce ke spuštění algoritmů jsou uvedené v přiloženém README na CD. Dále jsou na CD všechny uvedené grafy, naměřená data spolu s diplomovou prací ve formátu *.pdf* a matlabový skript k vygenerování uvedených tabulek z textu.

Czech Technical University in Prague
Faculty of Electrical Engineering

Department of Computer Science

DIPLOMA THESIS AGREEMENT

Student: Kryška Marek

Study programme: Open Informatics
Specialisation: Artificial Intelligence

Title of Diploma Thesis: Finding individual keys in a master-key system

Guidelines:

Problem definition: The input to the algorithm is a lock-chart, namely a set of keys, a set of locks and a key-to-lock relation which specifies which keys should open each lock. The output is a set of master keys and central locks, whose removal leaves the largest set of individual keys in the lock-chart (keys that open exactly 1 lock) and their corresponding locks.
1) Formalize the problem using the graph theory or the relational algebra.
2) Review existing literature and describe related combinatorial problems.
3) Translate the problem of finding individual keys into a chosen combinatorial problem, for which efficient algorithms exist, or design your own algorithm. Compare and contrast different approaches and describe their pros and cons.
4) Compare runtime of selected algorithms on a provided set of testing instances. Use the public dataset from [4] and a commercial dataset from the CyberCalc project.

Bibliography/Sources:

[1] Matoušek J., Nešetřil J. (2007): Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, Praha
[2] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald L.; Stein, Clifford (2001). Introduction to Algorithms (Second ed.). MIT Press and McGraw?Hill. pp. 651?664. ISBN 0-262-03293-7.
[3] Eén N., Sörensson N. (2004) An Extensible SAT-solver. In: Giunchiglia E., Tacchella A. (eds) Theory and Applications of Satisfiability Testing. SAT 2003. Lecture Notes in Computer Science, vol 2919. Springer, Berlin, Heidelberg
[4] Lawer, A. (2004). Calculation of Lock Systems. Master. Royal Institute of Technology.

Diploma Thesis Supervisor: Radomír Černoch, MSc.

Valid until the end of the winter semester of academic year 2018/2019

prof. Dr. Michal Pěchouček, MSc.
Head of Department

prof. Ing. Pavel Ripka,CSc.
Dean

Prague, July 21, 2017