

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky



Diplomová práce

Identifikace koherentních struktur za použití metody FTLE

Vypracoval: Bc. Tomáš Hurský

Vedoucí práce: Ing. Tomáš Hyhlík Ph.D.

2017

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hurský** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **408904**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Identifikace koherentních struktur za použití metody FTLE

Název diplomové práce anglicky:

Identification of Coherent Structures by using FTLE Method

Pokyny pro vypracování:

V rešeršní části práce popište co jsou koherentní struktury a jaká je jejich souvislost s víry. Věnujte se popisu kinematiky proudového pole. Diskutujte Eulerův a Lagrangeův popis. Popište metodu FTLE. Identifikaci víry si ověřte na několika testovacích případech. Proveďte vlastní identifikaci vírových struktur z CFD řešení proudění okolo špatně obtékaného tělesa. Rozsah průvodní zprávy: cca 60 stran

Seznam doporučené literatury:

dle doporučení vedoucího práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Tomáš Hyhlík Ph.D., 12112

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **27.04.2017**

Termín odevzdání diplomové práce: **14.08.2017**

Platnost zadání diplomové práce: **26.10.2018**

Podpis vedoucí(ho) práce

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Tomáš Hurský
Název Diplomové práce:	Identifikace koherentních struktur za použití metody FTLE
Anglický název:	Identification of Coherent Structures by using FTLE Method
Akademický rok:	2016/2017
Obor studia	Aplikovaná mechanika
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky
Vedoucí diplomové práce:	Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 62 Počet obrázků: 35 Počet příloh: 1x CD
Klíčová slova:	Koherentní struktury, Lyapunův exponent, FTLE, případ dvou sousedních vírů, případ klikatého proudu, Ahmed Body, CFD
Keywords:	Coherent Structures, Lyapun exponent, FTLE, Double gyre, Meandering Jet, Ahmed Body, CFD
Anotace:	Diplomová práce je zaměřena na identifikaci koherentních struktur v proudovém poli. Začátek práce patří především druhům popisu proudového pole a metodám, jak identifikovat koherentní struktury. Následně je odvozen a popsán význam Lyapunova exponentu, který je využíván v metodě FTLE pro identifikaci koherentních struktur. Tato metoda je v této práci detailněji popsána a aplikována na identifikaci koherentních struktur v analytických modelech proudového pole jako je případ dvou sousedních vírů a případ klikatého proudu. Závěrečná část této práce se věnuje analýze proudění kolem špatně obtékaného tělesa Ahmed body. Je zde popsán model Ahmed Body a parametry, kterými lze řídit odporový koeficient. Následně se zde nalézá CFD analýza proudění, kterou jsou vyhodnoceny koherentní struktury, jak za pomoci zmíněné FTLE metody, tak za pomoci vykreslení rychlostního vektorového pole, či za pomoci vykreslení proudnic.

Abstract:

The master thesis is focused on the identification of coherent structures in the flow field. The beginning of the work is mainly a description of the flow field and methods for identifying the coherent structures. Subsequently, the meaning of Lyapunov exponent, which is used in the FTLE method for identifying the coherent structures, is derived and described. This method is described in more detail in this work and applied to the identification of the coherent structures in analytical models of the flow field, such as the double gyre and the meandering jet. The final part of this work deals with the analysis of the flow around the bluff body. The master thesis describes also the Ahmed body model and the parameters that can be used to control the drag coefficient. Subsequently, this thesis provides the CFD flow analysis that evaluates coherent structures, both with the help of the FTLE method and with the help of the velocity vector field plotting, or with the help of the streamlines drawing.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovával samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Praze dne 11.8.2017

.....

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své diplomové práce panu Ing. Tomáši Hyhlíkovi Ph.D. za konstruktivní připomínky a rady při řešení problematiky identifikace koherentních struktur v proudovém poli. Dále bych rád poděkoval svým rodičům za podporu studia vysoké školy.

Obsah

1	Seznam použitých symbolů	9
1.1	Základní symboly	9
1.2	Dolní indexy	11
1.3	Horní indexy	11
2	Úvod	12
2.1	Motivace	13
2.2	Cíl práce	14
3	Koherentní struktury	15
4	Kinematika proudového pole	17
4.1	Eulerův popis	18
4.1.1	Zrychlení	19
4.1.2	Identifikace koherentních struktur	19
4.2	Lagrangeův popis	20
4.2.1	Deformační gradient	21
4.2.2	Cauchyho Greenův deformační tenzor	22
5	Metoda FTLE (Finite-time Lyapunov exponent)	24
5.1	Definice Lyapunova exponentu	24
5.2	Popis algoritmu na výpočet FTLE	26
6	Aplikace FTLE analýzy na analytické případy vírových struktur v proudových polích	32
6.1	Případ dvou sousedních vírů	32
6.2	Případ klikatého proudu	36

7 Proudění kolem špatně obtékaného tělesa (Ahmed body)	40
7.1 CFD analýza modelu Ahmed body	42
7.1.1 Popis úlohy	42
7.1.2 Síť	43
7.1.3 Okrajové podmínky	47
7.1.4 Vyhodnocení	48
8 Závěr	57
9 Literatura	59
10 Obsah přiloženého CD	62

1 Seznam použitých symbolů

1.1 Základní symboly

Symbol	Jednotky	Význam
t	(s)	Čas
T	(s)	Délka časového úseku
Δt	(s)	Časový krok
\mathbf{x}, \mathbf{X}	(m)	Prostorové souřadnice
\mathbf{u}	(m)	Pole posuvů
\mathbf{F}	(1)	Deformační gradient
\mathbf{J}	(1)	Jacobiho matice
V	(m ³)	Objem
\mathbf{C}	(1)	Cauchyho Greenův tenzor deformace
ψ	(1)	Proudová funkce
\mathbf{U}, \mathbf{V}	(m.s ⁻¹)	Složky vektoru rychlostí
H	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.1)
ϵ	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.2) a (6.2.2)
ω	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.2) a (6.2.2)
g	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.1)
p	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.2)
b	(1)	Konstanta z rovnice (6.1.2)
Ω	(1)	Zkoumaná oblast
B	(1)	Konstanta z rovnice (6.2.1)
B_0	(1)	Konstanta z rovnice (6.2.2)
m	(1)	Konstanta z rovnice (6.2.1)
\mathbf{e}	(1)	Jednotkový vektor
ρ	(kgm ⁻³)	Hustota

Symbol	Jednotky	Význam
u, v	$(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	Rychlost
σ	(1)	Lyapunův exponent
λ	(1)	Vlastní čísla
a	$(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	Zrychlení
k	(1)	Konstanta z rovnice (6.2.1)
L	(m)	Délka zkoumané oblasti
S	(s^{-1})	Tenzor rychlosti deformace
Ω	(s^{-1})	Tenzor vířivosti
c_d	(1)	Součinitel odporu
F_d	(N)	Odporová síla
A	(m^2)	Plocha
φ	(°)	Úhel sklopení
Sh	(1)	Strouhalovo číslo
f	(Hz)	Frekvence
D	(m)	Charakteristický rozměr tělesa
Ma	(1)	Machovo číslo
ν	$(\text{m}^2\text{s}^{-1})$	Kinematická viskozita
τ	(m^2)	Napětí

1.2 Dolní indexy

Symbol	Význam
i, j	U vektoru označuje složku vektoru ($x=1, y=2, z=3$)
0	Počáteční stav ($t=0$)
t	Stav v obecném čase t
A, B	Označuje bod
G, J	Označuje analytický případ ($G=$ případ dvou sousedních vírů, $J=$ případ klikatého proudu)
zvuk	Označuje rychlost zvuku
w	Hodnota na stěně

1.3 Horní indexy

Symbol	Význam
$+$	Označuje bezrozměrnou veličinu
T	Označuje veličinu v čase T

2 Úvod

Pochopení koherentních struktur a jejich chování je velmi důležitým úkolem dnešní vědní disciplíny mechaniky tekutin, a proto se touto problematikou zabývá mnoho vědeckých pracovišť a je vyvíjena spousta metod pro identifikaci koherentních struktur. Jedním ze dvou pohledů, jak lze popsat zkoumanou tekutinu, je Eulerový popis, který pozoruje změnu kinematických veličin v daném (vyjmutém) objemu tekutiny. Do nejzákladnějších metod z Eulerova popisu patří tzv. metoda Q -kritéria [1], která ukazuje oblasti, kde převládá vířivost nad poměrnou deformací. Podobných metod jako je metoda Q -kritéria je mnoho (např. metoda Δ -kritéria [2], metoda rozkladu tenzoru gradientu rychlosti na tři části tzv. "metoda triple decomposition of vorticity" [3] atd.). Druhým důležitým popisem je Lagrangeův popis, který sleduje pohyb částice kontinua. Pro Lagrangeův popis je jednou z nejzákladnějších metod identifikace koherentních struktur metoda FTLE (Finite time Lyapunov exponent) [5]. Metoda FTLE popisuje střední logaritmickou rychlost vzdalování se dvou sousedních trajektorií, které jsou od sebe vzdáleny o velmi malý úsek.

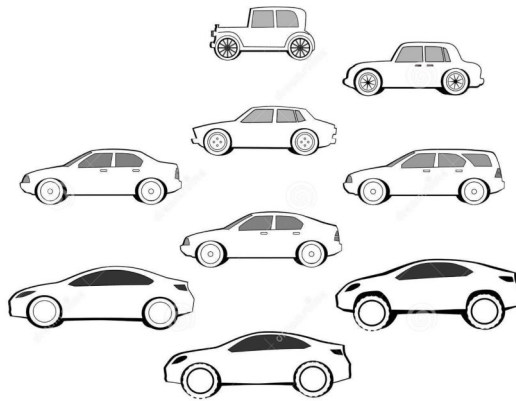
Metoda FTLE pro identifikace koherentních struktur má fyzikální význam jak pro čas, který plyne dopředu, tak i pro čas, který plyne pozpátku. Výpočtem Lyapunova exponentu z času, který plyne pozpátku i dopředu, vzniknou hranice, které se vzájemně protínají. Pro průsečík hranic vzniklého z hranice dopředu jdoucího času a zpětně jdoucího času platí, že po hranici, která vznikla z dopředu jdoucího času přivádí částici do tohoto průsečíku. Naopak po hranici, která vznikla ze zpětně jdoucího času platí, že částici odvádí pryč od průsečíku.

Při proudění kolem špatně obtékaného tělesa jako je např. Ahmed body (viz. kapitola 7) vznikají v místě úplavu víry, které lze označovat jako koherentní struktury. Využitím metody FTLE mohou být identifikovány polohy těchto struktur na základě určení hranic vzniklých z metody FTLE.

2.1 Motivace

Zkoumání koherentních struktur a zjišťování jejich vlastností má veliký význam jak na poli vědním, tak i na poli vývoje.

Už při samotném návrhu tvaru automobilu se musí dbát na to, aby automobil měl co nejmenší odpor proti proudící tekutině. Tento odpor je přímo spojen s odporovým koeficientem, který je závislý na odtržení. Při pozorování koherentních struktur a jejich vzniku při obtékání automobilu lze identifikovat místa odtržení a dále také vznik vírů. Touto identifikací je možné odhalit místa, která jsou aerodynamicky nepřijatelná pro automobil a lze tím snížit odpor automobilu. Proto se v posledních několika desetiletích upouští od hranatých tvarů automobilů a je snaha, aby automobily měly, co nejoblejší tvary. Hezký design není jediným důvodem, proč se automobily vyrábějí s čím dál obměššími tvary. Jedním z dalších důvodů je také trend snižování spotřeby paliva automobilů, který úzce závisí na snižování odporu automobilu.



Obrázek 2.1: Evoluce tvaru automobilů (převzato z [18]).

2.2 Cíl práce

Práce uvádí popisy proudového pole a popisuje metodu FTLE pro identifikaci koherentních struktur. Tato metoda pro identifikaci koherentních struktur je použita na testovacích úlohách dvou sousedních vírů a klikatého proudu jak pro čas jdoucí dopředu, tak pro čas jdoucí nazpět. Dále práce obsahuje CFD analýzu, která probíhá v prostředí Ansys Fluent. Jako špatně obtékané těleso je zvoleno "Ahmed body", na kterém se následně zvolí řezné roviny, z kterých se získají data (polohy uzlů a jím příslušící rychlosti) pro FTLE metodu. Po výpočtu Lyapunova exponentu (ze získaných dat) pro čas jdoucí dopředu a zpětně se zobrazí vzniklé hranice, z kterých se pak identifikují koherentní struktury.

Bodově jsou cíle práce takovéto:

- Popis koherentních struktur a jejich souvislost s víry
- Popis kinematiky proudového pole
- Popis FTLE metody a následně její aplikace na dvou zvolených analytických případech proudového pole
- Identifikace koherentních struktur v CFD analýze špatně obtékaného tělesa

3 Koherentní struktury

Kapitola je založena na práci [19]. Pojem koherentní struktury lze chápat mnoha způsoby, avšak ve spojitosti s touto prací budou koherentní struktury chápány především jako vírové struktury. Pro koherentní struktury (vírové struktury) není ustálená žádná definice. Koherentní struktury lze označovat jako oblasti kde:

- je zvýšená kinetická energie
- pohyb částic je nepředvídatelný
- trajektorie částic kontinua tvoří uzavřené smyčky

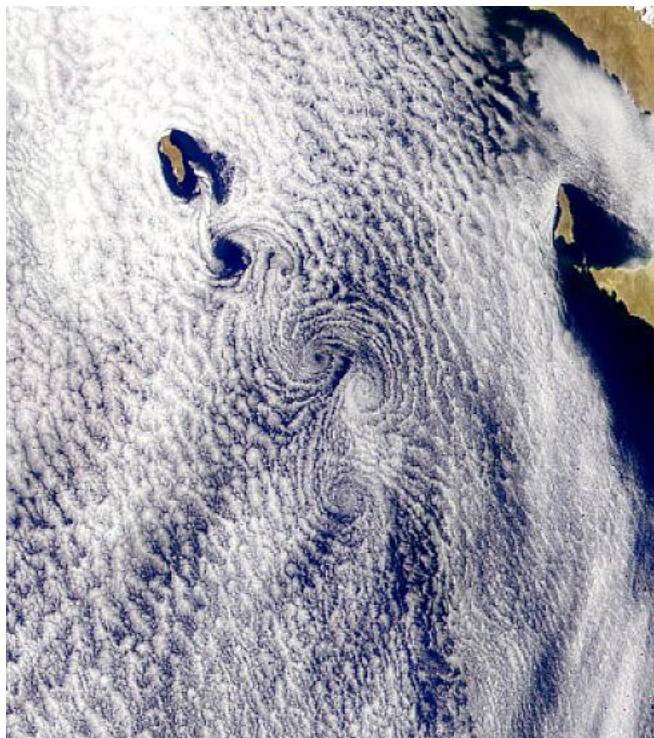
Pomocí těchto základních vlastností by mohly být definovány koherentní struktury.

Koherentní struktury a jejich vznik je také úzce spjat s režimem proudění (turbulentní a laminární). Turbulentní režim proudění nemá přesnou definici. Turbulentní proudění by se dalo definovat podle těchto vlastností:

- vysoké Reynoldsovo číslo
- prostorovost
- neuspořádanost (deterministický chaos)
- difúzní charakter
- disipativnost
- pohyb kontinua (spektrum měřítek)

Laminární režim proudění je pak takový režim proudění, který má tendenci se po jakémkoliv vnesení nepravidelnosti nebo neuspořádanosti do systému vrátit zpět do původního stavu [15]. Pak lze říci, že tento režim proudění tlumí poruchy. Koherentní struktury (vírové struktury) vznikají jak při laminárním proudění, tak i

při proudění turbulentním. Ukázkovým příkladem pro laminární proudění mohou být koherentní struktury, které vznikají při proudění kolem válce v místě úplavu. Tento jev se nazývá vírová Karmánova stezka, která je například pozorovatelná v atmosféře (obrázek č.3.1).



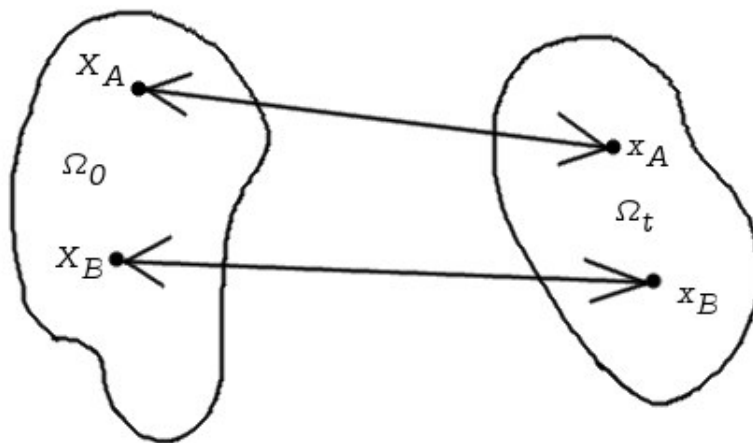
Obrázek 3.1: Vírová karmánova řada vzniklá v atmosféře (převzato z [12]).

Pro turbulentní režim proudění je charakteristický vznik koherentních struktur a často se uvádí, že koherentní struktury jsou podstatou turbulentního proudění. V běžném životě lze koherentní struktury vzniklé v turbulentním proudění pozorovat častěji než u laminárního proudění (např. v jezu v řece, promíchávání dvou tekutin apod.)

4 Kinematika proudového pole

Tato kapitola a její podkapitoly se opírají o práci [6]. Prostor, v němž řešíme kinematiku a dynamiku tekutiny, nazýváme proudovým polem. Pro kinematiku proudového pole se používají obvykle dva základní principy popisu.

Prvním obvyklým popisem je Lagrangeův popis, pro který je význačné zavedení pevně zvolené referenční oblasti Ω_0 (odpovídá času $t = 0$) a zavedení zdeformované oblasti Ω_t (odpovídá času $t > 0$). Zdeformovaná oblast Ω_t obsahuje stejné materiálové částice jako referenční oblast Ω_0 .

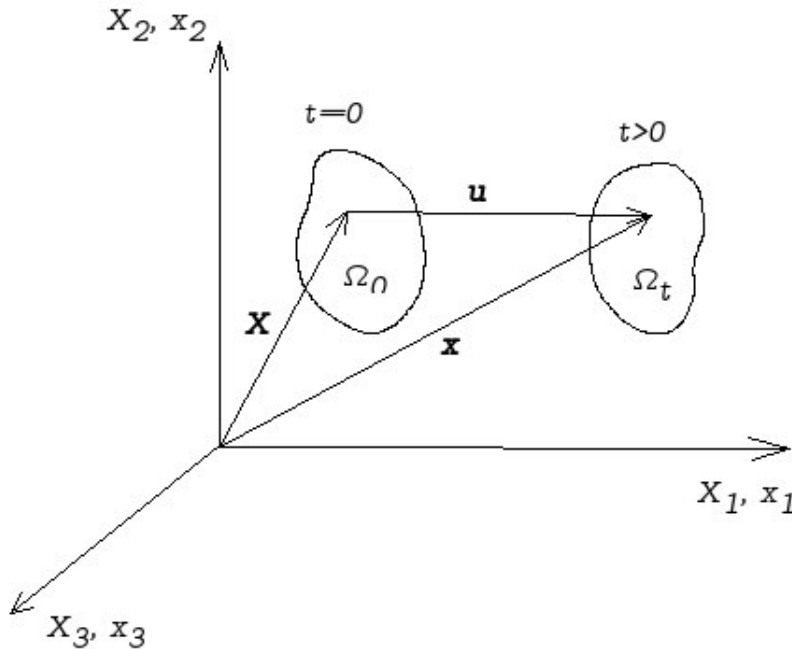


Obrázek 4.1: Zobrazení pohybu částic z Ω_0 do Ω_t .

Dalším popisem kinematiky proudového pole je Eulerův popis, pro který je charakteristický zvolený kontrolní objem v prostoru Ω . Hranice kontrolního objemu v různých časech je neměnná a zároveň v různých časech je kontrolní objem vyplněn jinými materiálovými částicemi. Tyto dva přístupy popisu kinematiky proudového pole mezi sebou jsou ekvivalentní.

Pro popis polohy materiálové částice (částice kontinua) v referenční oblasti je zaveden průvodič $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Pokud je zkoumaná oblast v pohybu, tak se materiálová částice z referenční polohy posune o posuv \mathbf{u} do nové prostorové souřadnice $\mathbf{x} \in \Omega_t$ [6].

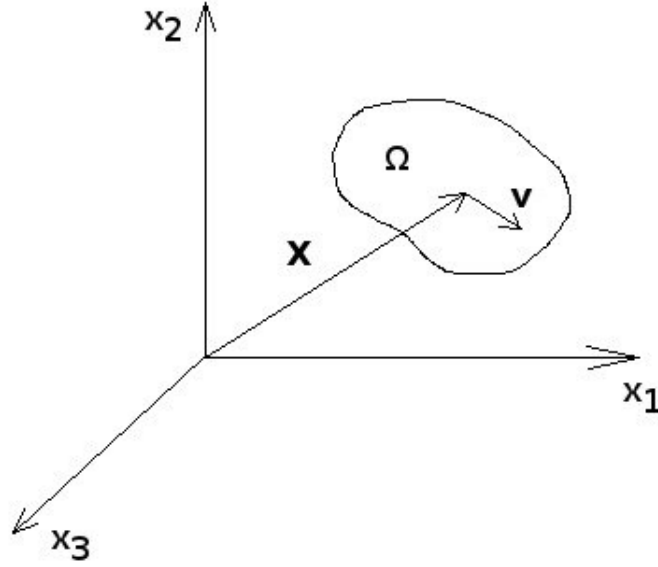
$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (4.0.1)$$



Obrázek 4.2: Popis oblastí v kontinuu.

4.1 Eulerův popis

V úvodu této kapitoly bylo uvedeno, že Eulerův popis pracuje s pevně zvoleným kontrolním objemem (kontrolní oblastí) a v tomto kontrolním objemu jsou hlavními proměnnými polohový vektor $\mathbf{x} \in R^3$ a čas t . Kinematický stav kontrolního objemu je popsán rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ materiálových částic, které daným kontrolním objemem protečou. Tato rychlost je okamžitou rychlostí a nepředstavuje rychlost jedné materiálové částice, ale představuje rychlost, která náleží dané prostorové souřadnici, kde se konkrétní materiálová částice právě nachází (viz. obrázek č.4.3).



Obrázek 4.3: Kontrolní oblast popsána Eulerovým přístupem.

4.1.1 Zrychlení

Při popisu proudového pole Eulerovým přístupem je rychlostní pole předem známo a nebo je dopočteno z pohybových rovnic. Toto rychlostní pole je závislé na prostorových souřadnicích \mathbf{x} kontrolního objemu a na čase t , proto pak zrychlení v Eulerově popisu je vyjádřeno dle rovnice (4.1.1)

$$a_i = \frac{dv_i(x_j, t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{x_j}{t}. \quad (4.1.1)$$

Poslední člen rovnice odpovídá rychlosti v_j , a pak výsledná složka zrychlení a_i je dána rovnicí (4.1.2)

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j. \quad (4.1.2)$$

4.1.2 Identifikace koherentních struktur

Na základě práce [15] lze rychlost v_i v poloze $x_j + dx_j$ vyjádřit dle rovnice (4.1.3)

$$v_i(x_j + dx_j, t) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (4.1.3)$$

kde člen $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ vyjadřuje relativní změnu rychlosti ve dvou sousedních bodech a je způsoben nehomogenitou proudového pole. Tento člen se nazývá gradient tenzoru rychlosti a lze tento tenzor rozložit na symetrickou S_{ij} a antisymetrickou část Ω_{ij} dle rovnice (4.1.4)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{x_j} + \frac{v_j}{x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{x_j} - \frac{v_j}{x_i} \right) = S_{ij} + \Omega_{ij}. \quad (4.1.4)$$

Symetrický tenzor S_{ij} vyjadřuje tenzor rychlosti deformace a antisymetrický tenzor Ω_{ij} vyjadřuje tenzor rotace. Na tomto rozkladu je založena většina Eulerovských metod pro identifikaci koherentních struktur. Jak bylo zmíněno již dříve, tak jednou ze základních metod je metoda Q-kriteria, která je založena na porovnání vířivosti a poměrné deformaci částice kontinua. Pokud vířivost v dané oblasti převládá nad smykovou deformací, tak se v této oblasti nachází vířová struktura [9].

4.2 Lagrangeův popis

Při použití Lagrangeova popisu jsou fyzikální pole závislá na souřadnicích X_i materiálového bodu v oblasti Ω_0 . Pro definování funkce popisující zdeformovanou oblast Ω_t je dále třeba znát pole posuvů $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, a pak dále ze vztahu (4.0.1) lze tuto funkci odvodit jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = x(\mathbf{X}, t), \quad (4.2.1)$$

kde počáteční podmínka je:

$$x(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}. \quad (4.2.2)$$

4.2.1 Deformační gradient

Jestliže je souřadnice \mathbf{x} funkcí \mathbf{X} , lze zavést definici:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{X}} \quad (4.2.3)$$

lze dále ekvivalentně zapsat

$$\mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{x}). \quad (4.2.4)$$

Veličina \mathbf{F} se nazývá deformačním gradientem a je tenzorem druhého řádu. V matematice se tato veličina nazývá Jacobiho maticí zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$. Aby existovalo řešení, je nutné, aby platilo:

$$\mathbf{J} = \det(\mathbf{F}) \neq 0. \quad (4.2.5)$$

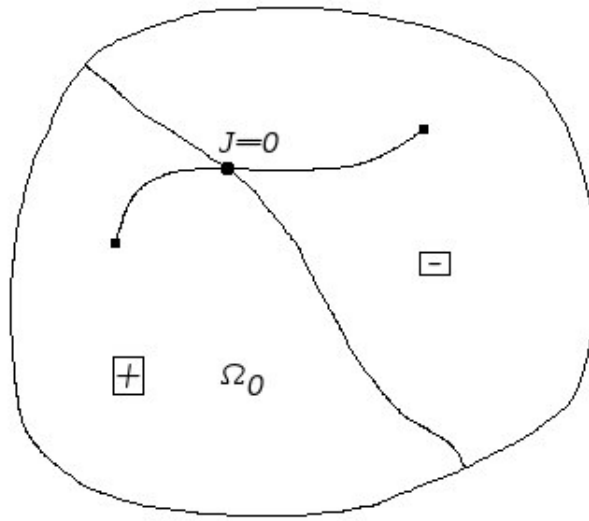
Podle obrázku č.4.4 je zřejmé, že $\det(\mathbf{F})$ může nabývat pouze jen hodnoty kladné a nebo jen hodnoty záporné v oblasti Ω_0 . Jakýkoliv přechod od hodnoty $J > 0$ k hodnotě $J < 0$ a nebo naopak by znamenalo, že v průběhu přechodu by se musela překročit hranice $J = 0$ (viz. obrázek č. 4.4), což je podle podmínky (4.2.5) nepřípustné. Pokud bude zavedena substituce

$$dV_t = \mathbf{J}dV_0. \quad (4.2.6)$$

Je nemožné, aby vznikl záporný objem, a proto jediným správným fyzikálním výsledkem je $J > 0$. Při vyjádření konečných objemů referenční oblasti Ω_0 , zdeformované oblasti Ω_t a zároveň při uvažování dostatečně zvolené malé oblasti Ω_0 lze uvažovat

$$V_t \simeq \mathbf{J}V_0. \quad (4.2.7)$$

Z rovnice (4.2.7) lze pak definovat Jacobiho matici zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ jako poměr lokálních objemů.



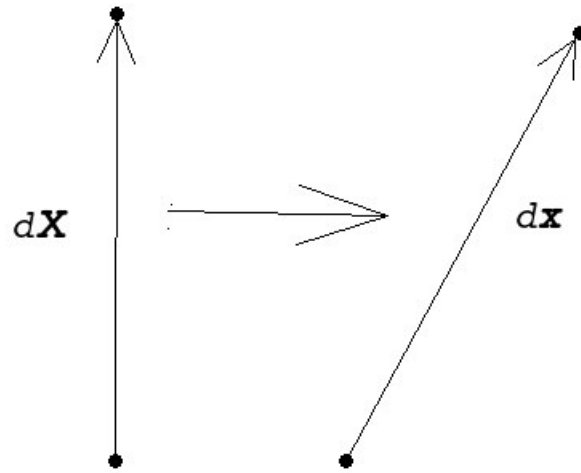
Obrázek 4.4: Přechod z oblasti $J > 0$ do $J < 0$.

4.2.2 Cauchyho Greenův deformační tenzor

Při uvažování totálního diferenciálu zobrazení (4.2.1) bude získáno

$$dx_i = \frac{dx_i}{dX_j} dX_j. \quad (4.2.8)$$

Rovnici (4.2.8) lze chápat jako linearizované zobrazení úsečky $d\mathbf{X}$ (ležící v referenční oblasti Ω_0) na deformovanou úsečku $d\mathbf{x}$ (ležící v referenční oblasti Ω_t) podle obrázku č.4.5.



Obrázek 4.5: Zobrazení přetvořené úsečky.

Výpočet velikosti úsečky z referenční oblasti Ω_0

$$\|d\mathbf{X}\|^2 = (dL)^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (4.2.9)$$

Výpočet velikosti deformované úsečky v oblasti Ω_t

$$\|d\mathbf{x}\|^2 = (dl)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T d\mathbf{F}^T d\mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (4.2.10)$$

Byl získán vztah

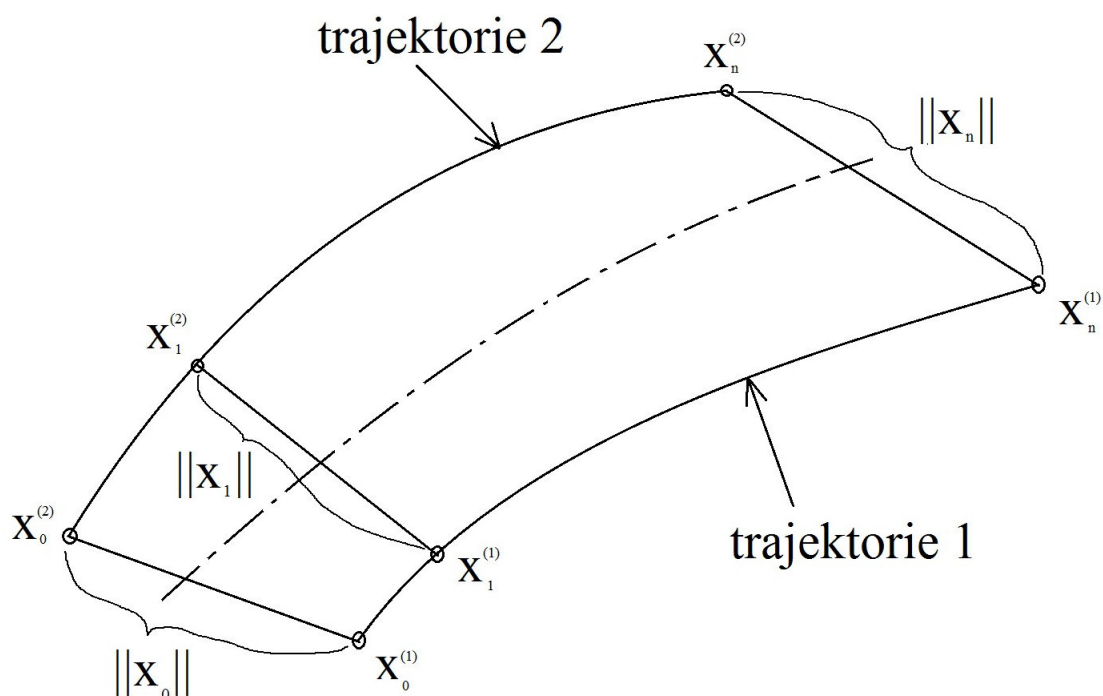
$$\mathbf{C} = d\mathbf{F}^T d\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_i}. \quad (4.2.11)$$

Tento metrický tenzor \mathbf{C} je označován jako Cauchyho Greenův tenzor, který je symetrický a pozitivně definitní [6].

5 Metoda FTLE (Finite-time Lyapunov exponent)

5.1 Definice Lyapunova exponentu

Metoda je založena na určení tzv. Lyapunova exponentu $\sigma_{t_0}^T(x)$, který pro určitý časový interval dokáže identifikovat rozbíhavost blízkých sousedních trajektorií, které vcházejí z velmi blízkých počátečních podmínek částic kontinua [5].



Obrázek 5.1: Blízké trajektorie.

Na obrázku č.5.1 jsou naznačeny dvě sousední trajektorie, kde $n=0,1,2,\dots,N$ znázorňují různé časové úseky. Pro spojitý čas je vzdálenost blízkých trajektorií přímo úměrná $e^{\sigma_{t_0}^T(x)}$. Jakmile se alespoň jeden z Lyapunova exponentu rovná kladnému číslu, tak ve zkoumaném prostředí nastává chaos (v kontextu této práce to znamená,

že ve zkoumaném kontrolním objemu se nachází koherentní struktura). Kladný Lyapunův exponent znamená, že trajektorie částic kontinua se rozbíhají a pro záporný Lyapunův exponent se trajektorie částic kontinua přibližují. Pomocí vědomosti rozbíhání a přibližování trajektorií částic kontinua lze určit hranice mezi koherentními strukturami (např. víry). Pro tyto hranice platí, že částice kontinua nemůže tuto čáru překročit [8].

Pro vytvoření vztahu na výpočet Lyapunova exponentu je využita rovnice (4.2.10) a je dále upravena do tvaru (5.1.1)

$$\|d\mathbf{x}\| = \sqrt{\partial\mathbf{X}^T \mathbf{C} \partial\mathbf{X}}. \quad (5.1.1)$$

Z rovnice je vidět, že prostřední člen pod odmocninou je Cauchyho Greenův deformační tenzor, o kterém se ví, že je symetrický. Proto dále tento symetrický tenzor je převeden na diagonální tvar tenzoru. Proces lze provést, pokud existují vlastní čísla tenzoru C a pokud existuje takový vlastní vektor \mathbf{x} tenzoru C , který je nenulový. Pak platí:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (5.1.2)$$

Existuje-li $\lambda_{1,2,3}$ takové, pro které platí, že vlastní vektory $x_{1,2,3}$ jsou nenulové, tak platí vztah (5.1.3)

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (5.1.3)$$

Pak lze zvolit novou bázi jednotkových vektorů následovně

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{x_1}{\|x_1\|} \\ e'_2 &= \frac{x_2}{\|x_2\|}. \\ e'_3 &= \frac{x_3}{\|x_3\|} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Pro tuto nově zvolenou bázi můžeme přepsat Cauchyho Greenův deformační tenzor do tvaru

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.5)$$

Pro zjištění maximální vzdálenosti $\|x\|$ je třeba vybrat maximální vlastní číslo Cauchyho Greenova deformačního tenzoru a to pak vztah (5.1.1) se modifikuje na tvar:

$$\max_{\partial \mathbf{x}(0)} \|dx\| = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{C})} \|\partial \mathbf{X}\|. \quad (5.1.6)$$

Tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí (5.1.7)

$$\max_{\partial x(0)} \|dx\| = e^{\sigma_{t_0}^T(x)|T|} \partial \mathbf{X}. \quad (5.1.7)$$

Po porovnání rovnice (5.1.6) a (5.1.7) lze získat vztah pro Lyapunovův exponent $\sigma_{t_0}^T(x)$

$$\sigma_{t_0}^T(x) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{C})}. \quad (5.1.8)$$

5.2 Popis algoritmu na výpočet FTLE

Takzvaný nultý krok, který je třeba udělat před spuštěním FTLE analýzy, je vygenerování dat ze zkoumaného analytického, či numerického modelu. Vygenerovaná data jsou souřadnice uzlů sítě (strukturovaná nebo nestrukturovaná) a jim odpovídající dané složky rychlostí. Po vygenerování dat je známa velikost dané zkoumané oblasti, pro kterou se vytvoří strukturovaná síť. Tím získáme polohy jednotlivých uzlů, které budou popsány vektory souřadnic \mathbf{X}_0 a \mathbf{Y}_0 . Dalším důležitým bodem pro analýzu je určení časové délky T zkoumaného děje a časového kroku Δt , který plyne z časové délky konvekce. Obě veličiny jsou důležité především pro přesnost výpočtu.

Důkaz ukazující špatnou přesnost výpočtu pro malý zvolený čas plyne z definice Cauchyho Greenova tenzoru deformace, který popisuje změnu délky souřadnic v konečné poloze ku souřadnicím v počáteční poloze. Kdyby byl daný děj příliš krátký, tak by se částice nestihly vzdálit od své původní polohy o příliš velkou vzdálenost. Způsobilo by to malý Lyapunův exponent, který by pak neidentifikoval hranice mezi odlišnými dynamickými systémy [2].

Pro získání konečných poloh uzlů (částic) se využije klasický vzorec z mechaniky (5.2.1)

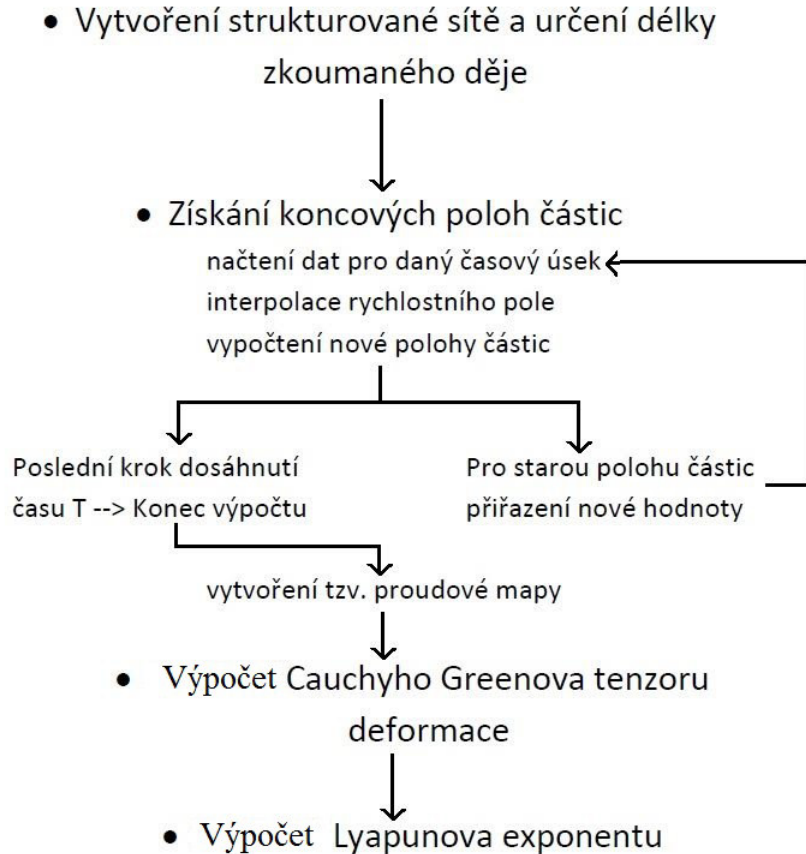
$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta t * \mathbf{U} \tag{5.2.1}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \Delta t * \mathbf{V}.$$

V rovnici (5.2.1) vystupuje počáteční poloha \mathbf{X}_0 a \mathbf{Y}_0 , odkud se daná částice pohybuje. Dále je třeba znát složky vektorů rychlostí \mathbf{U} a \mathbf{V} v daných počátečních polohách uzlů (částic). Jelikož při výpočtu může nastat případ, že vygenerované polohy uzlů (částic) se liší od poloh uzlů (částic), které byly vytvořeny pro strukturovanou síť, tak je třeba dané rychlosti interpolovat tak, aby odpovídaly polohám uzlů pro strukturovanou síť. Protože v rovnici (5.2.1) se vyskytuje časový krok Δt , tak proto bude vždy získána nová poloha, která se bude lišit od počáteční polohy jen o velmi malý úsek \mathbf{X} a \mathbf{Y} . Je také třeba tento algoritmus opakovat tolikrát, kolikrát se vejde časový krok Δt do doby trvání celého děje T .

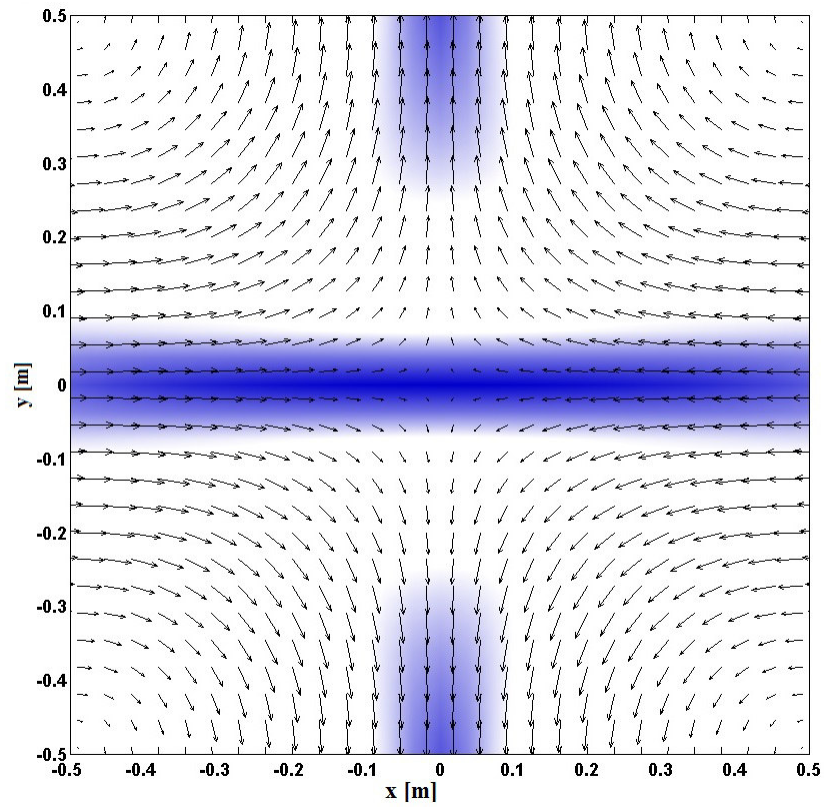
Předposledním důležitým bodem pro tuto analýzu je získání Cauchyho Greenova deformačního tenzoru, který se vypočítá podle rovnice (4.2.11). Z ní lze vidět, že je potřeba tzv. proudová mapa, která bude vytvořena z vektorů koncové polohy uzlů (částic) \mathbf{X} a \mathbf{Y} .

Pro získání Lyapunova exponentu je už téměř vše známo. Podle rovnice (5.1.8) lze vidět, že už stačí jen získat největší vlastní číslo Cauchyho Greenova deformačního tenzoru a pak už je známo pro tuto rovnici vše. Výsledkem jsou dva vektory naplněné Lyapunovými exponenty, které odpovídají příslušným polohám uzlů (pozn. jeden z výsledných vektorů odpovídá času jdoucímu dopředu a druhý odpovídá výsledku vycházejícího z času jdoucího nazpět).



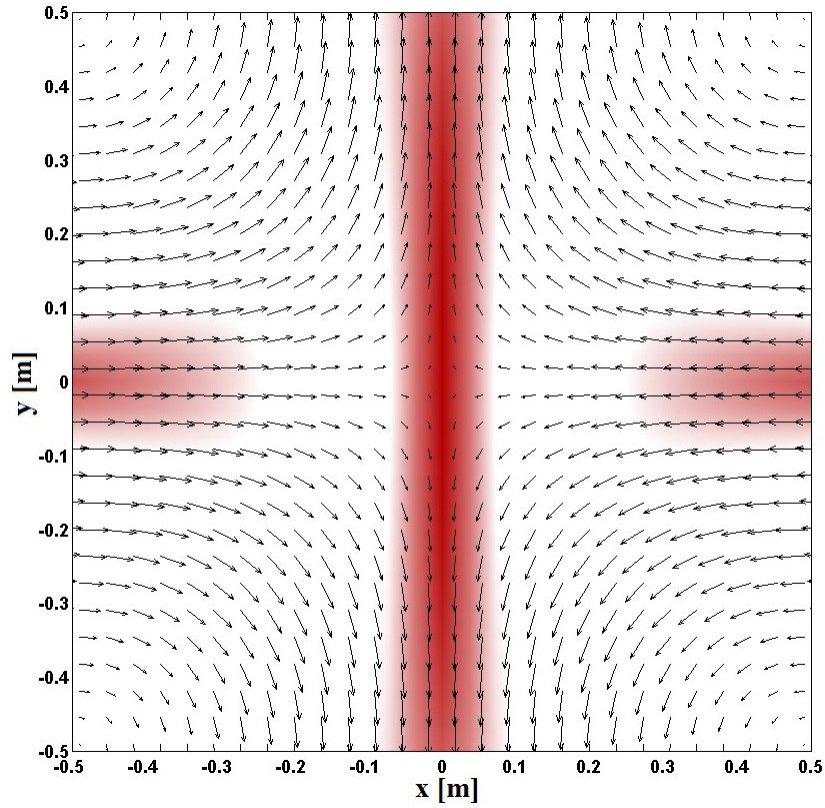
Obrázek 5.2: Schema postupu při řešení metodou FTLE.

Vykreslením Lyapunových exponentů se zjistí, že pro čas jdoucí dopředu a čas jdoucí nazpět se umístění daných hranic liší, protože hranice vzniklá pro čas jdoucí dopředu představuje přitékání (viz. obrázek č.5.3).



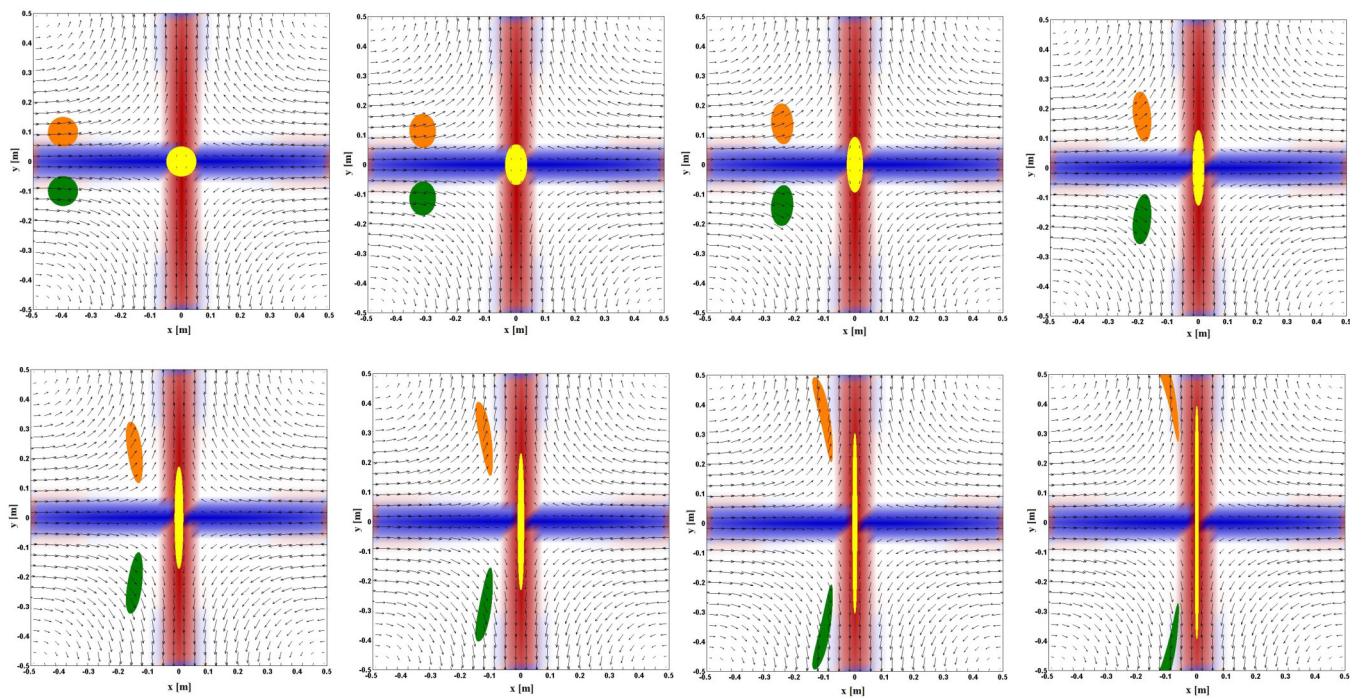
Obrázek 5.3: Hranice pro čas jdoucí dopředu (převzato z [20]).

Hranice vzniklá z výpočtu pro čas plynoucí nazpět představuje odtok (viz. obrázek č.5.4).



Obrázek 5.4: Hranice pro čas jdoucí nazpět (převzato z [20]).

Při vykreslení těchto dvou výsledků do jednoho obrázku získáme hranice pro hledané koherentní struktury. Uváží-li se položení částice na hranici vzniklou z času jdoucího dopředu, tak se tato částice pouze pohybuje ve směru dané hranice k hranici vzniklé z času, který jde nazpět, kde se tato částice deformuje (viz. obrázek č.5.5).



Obrázek 5.5: Ukázka deformace částice na hranici vzniklé od času, který jde nazpět (převzato z [20]).

6 Aplikace FTLE analýzy na analytické případy vírových struktur v proudových polích

V této práci jsou představeny dva analytické případy vírových struktur v proudových polích. První z případů je případ dvou sousedních vírů ¹. Druhým případem, který je analyzován v této práci, je analytický případ klikatého proudu ². U obou těchto analytických případů je vygenerováno rychlostní vektorové pole, pro které je aplikována FTLE analýza, která se používá pro popis vzniklých koherentních struktur.

6.1 Případ dvou sousedních vírů

Tato podkapitola byla založena na pracích [2] a [7]. Analytický případ vírových struktur je použit především pro prozkoumání FTLE analýzy a její kvality popisu koherentních struktur. V úvodu kapitoly bylo naznačeno, že se jedná o dva víry, které se otáčejí opačným směrem. Proudové pole tohoto případu je popsáno proudovou funkcí v rovnici (6.1.1)

$$\psi(x, y, t) = H \sin(\pi g(x, t)) \sin(\pi y), \quad (6.1.1)$$

kde jednotlivé členy znamenají:

$$g(x, t) = p(t)x^2 + b(t)x \quad (6.1.2)$$

$$p(t) = \epsilon_G \sin(\omega_G t). \quad (6.1.3)$$

$$b(t) = 1 - 2\epsilon_G \sin(\omega_G t) \quad (6.1.4)$$

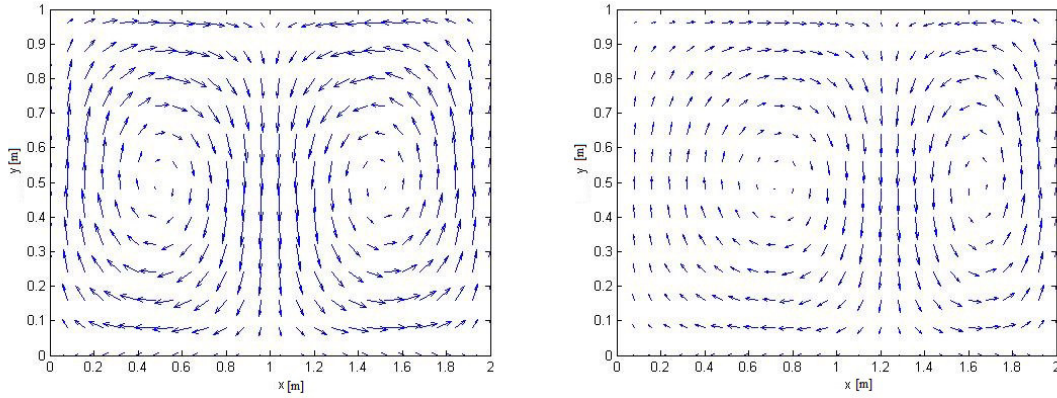
¹v anglickém názvu tzv. "Double Gyre"

²v anglickém názvu tzv. "Meandering Jet"

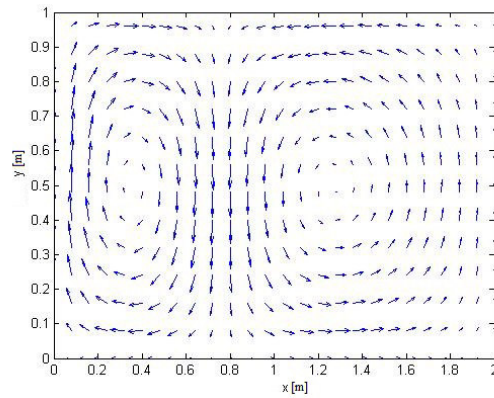
Jak je vidět z rovnice (6.1.2), tak pro případ $\epsilon_G = 0$ se jedná o časově nezávislé proudové pole a v případě $\epsilon_G \neq 0$ se jedná o časově závislý případ. V této práci se především objeví pole, které je časově závislé. Podle práce [1] jsou jednotlivé parametry proudové funkce vyjádřeny hodnotami: $A=0.1$, $\omega_G = 2\pi$ a $\epsilon_G = 0.25$. Velikost zkoumané oblasti je $[0,2] \times [0,1]$ m. Pro vykreslení vektorového rychlostního pole je potřeba znát parciální derivace proudové funkce viz. rovnice (6.1.5)

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\
 & \cdot \\
 v &= \frac{\partial\psi}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{6.1.5}$$

Na obrázku č.6.1 lze nalézt vzniklé vektorové rychlostní pole pro různé časové úseky ($t= 0; 0.25; 0.5; 0.75$ a 1), na nichž je vidět, že se jedná o periodický děj, protože v časech $t= 0$ $t=0.5$ a $t=1$ je vektorové pole totožné a v časech $t=0.25$ a $t=0.75$ jsou víry posunuty na pravou nebo levou stranu.



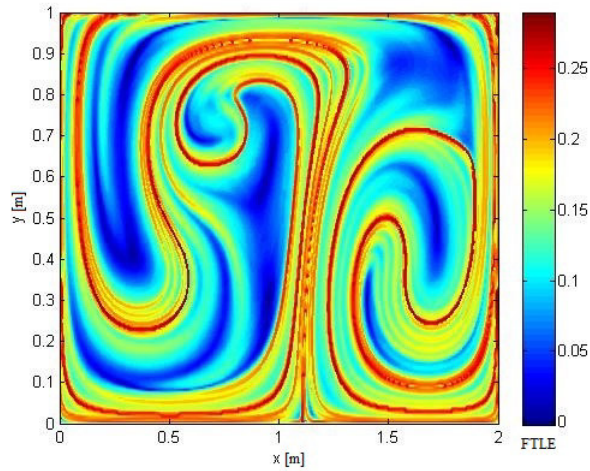
(a) Ukázka vektorového rychlostního pole pro časy $t=0$; $t=0.5$.
 (b) Ukázka vektorového rychlostního pole pro časy $t=0.25$ s.



(c) Ukázka vektorového rychlostního pole pro časy $t=0.25$ s.

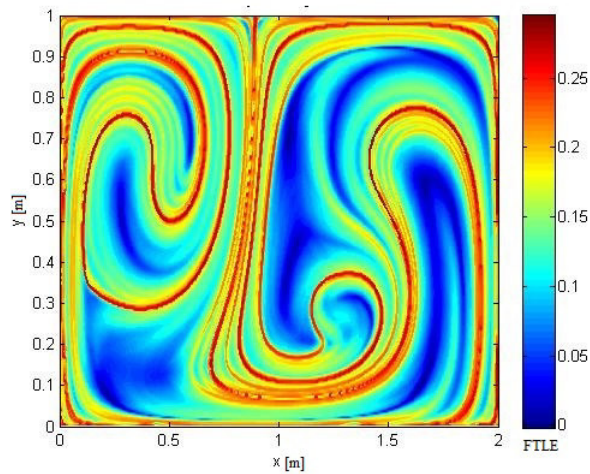
Obrázek 6.1: Rychlostní vektorová pole pro různé časy.

Pro identifikaci koherentních struktur je v této kapitole použita FTLE analýza jak pro čas plynoucí dopředu, tak i pro čas plynoucí nazpět. Na obrázku č.6.2 jsou vidět vzniklé hranice pro vypočtený Lyapunův exponent z času jdoucího dopředu.



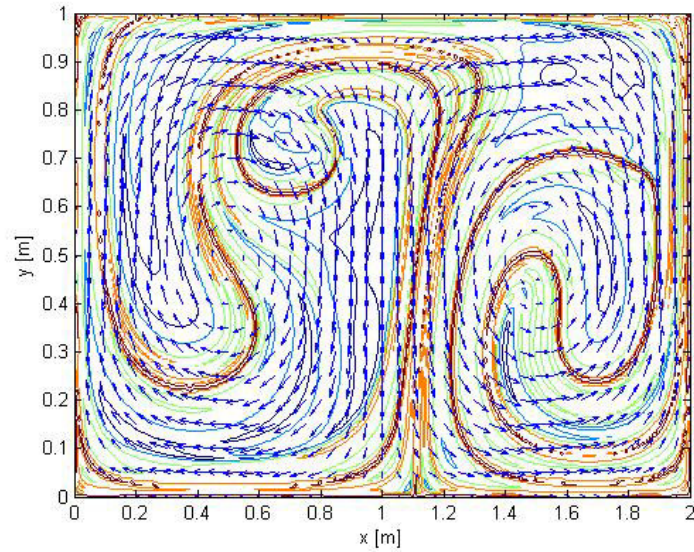
Obrázek 6.2: FTLE analýza pro tyto parametry $H=0.1$, $\epsilon_G = 0.25$, $\omega_G = 2\pi/10$, $T=20$ s.

Na obrázku 6.3 je vidět zobrazení Lyapunova exponetu, který byl vypočten z času jdoucího nazpět. Opět jsou zde vidět hranice, které ohraničují koherentní struktury.

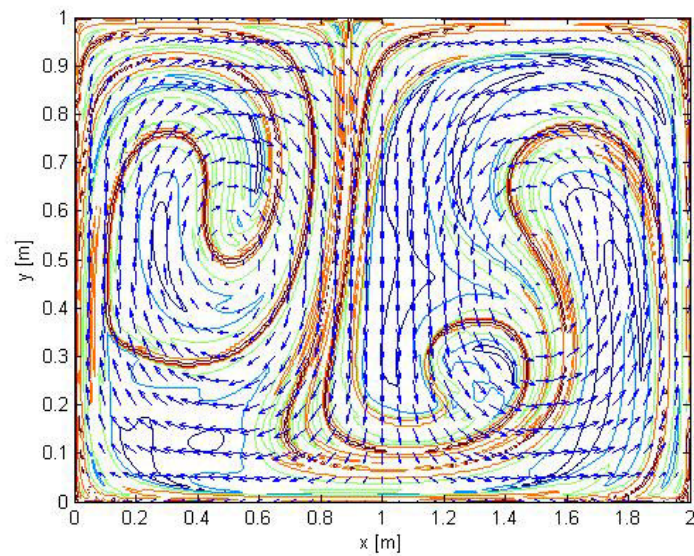


Obrázek 6.3: FTLE analýza pro tyto parametry $H=0.1$, $\epsilon_G = 0.25$, $\omega_G = 2\pi/10$, $T=20$ s.

Pro lepší názornost a přehlednost jsou na obrázku č.6.4a vykresleny kontury Lyapunova exponenu z obrázku č.6.2 společně s vektorovým rychlostním polem. To samé je provedeno na obrázku č.6.4b, avšak s tím rozdílem, že zde je Lyapunův exponent vypočítán z času jdoucího nazpět.



(a) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí dopředu.



(b) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí nazpět.

Obrázek 6.4: Vykreslení kontur Lyapunova exponentu společně s vektorovým rychlostním polem pro tytéž parametry jako na obrázku č.6.2 a obrázku č.6.3.

6.2 Příklad klikatého proudu

Na základě práce [4] je definováno chování tekutiny dle proudové funkce v rovnici (6.2.1)

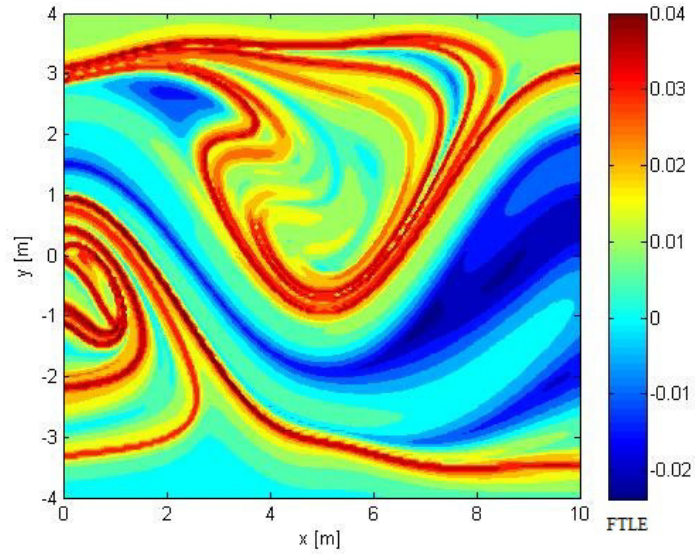
$$\psi(x, y, t) = -\tanh\left(\frac{y - B\cos kx}{\sqrt{1 + (kB\sin kx)^2}}\right) + my, \quad (6.2.1)$$

kde jednotlivé parametry z této rovnice jsou zvoleny dle zmíněné práce [4]. $B_0 = 1.2, L = 10, k = 2\pi/L, m=0.1, \omega_J = 0.1$ a $\epsilon_J = 0.3$. Hodnotu B lze dopočítat z rovnice (6.2.2)

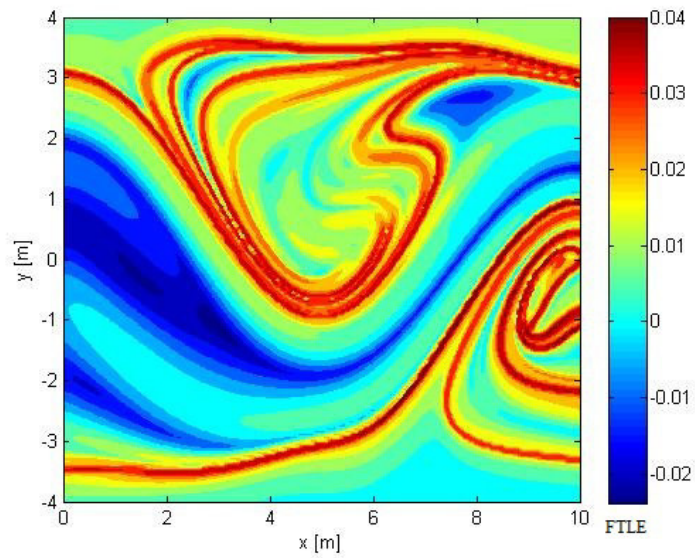
$$B = B_0 + \epsilon_J \cos(\omega_J t). \quad (6.2.2)$$

Předchozí kapitola pojednávala o analytickém případě dvou sousedních vírů a i zde se stejným způsobem získají rychlosti dle rovnice (6.1.5).

Na obrázku č.6.5a je pro analytický případ klikatého proudu vykreslen Lyapunův exponent, který je určen pro čas jdoucí dopředu v oblasti $[0,10] \times [-4,4]$ m. Na obrázku č.6.5a je pro tentýž analytický případ vykreslen Lyapunův exponent, který je určen pro čas jdoucí zpětně. Na obou obrázcích lze vidět vzniklé hranice, které ohraničují koherentní struktury.



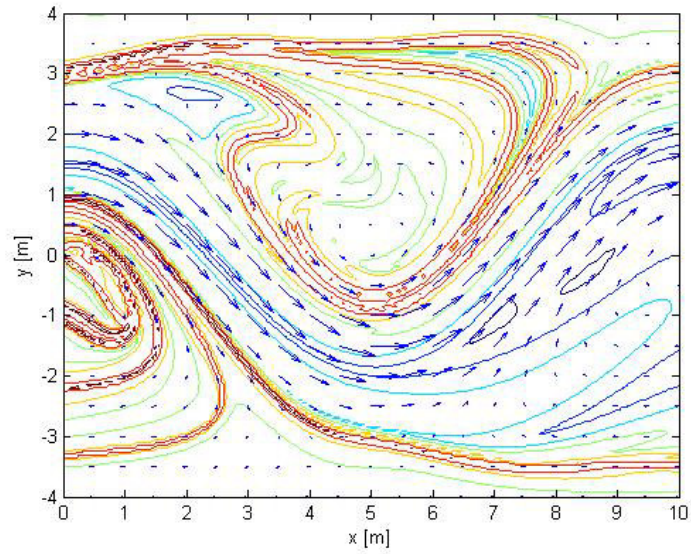
(a) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí dopředu.



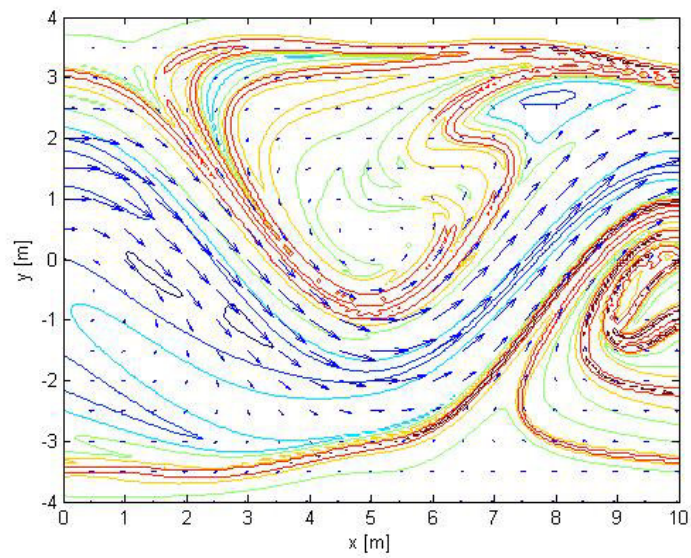
(b) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí nazpět.

Obrázek 6.5: FTLE analýza pro tyto parametry $B_0 = 1.2, L = 10m, c = 0.1, k = 2\pi/L, \epsilon_J = 0.3, \omega_J = 0.1, T = 125.6 \text{ s}, \Delta t = 0.05 \text{ s}$.

Pro lepší názornost a přehlednost jsou na obrázku č.6.6a vykresleny kontury Lyapunova exponenu z obrázku č.6.5a společně s vektorovým rychlostním polem. To samé je provedeno na obrázku č.6.6b, avšak s tím rozdílem, že zde je Lyapunův exponent vyjádřen z času jdoucího nazpět.



(a) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí dopředu.



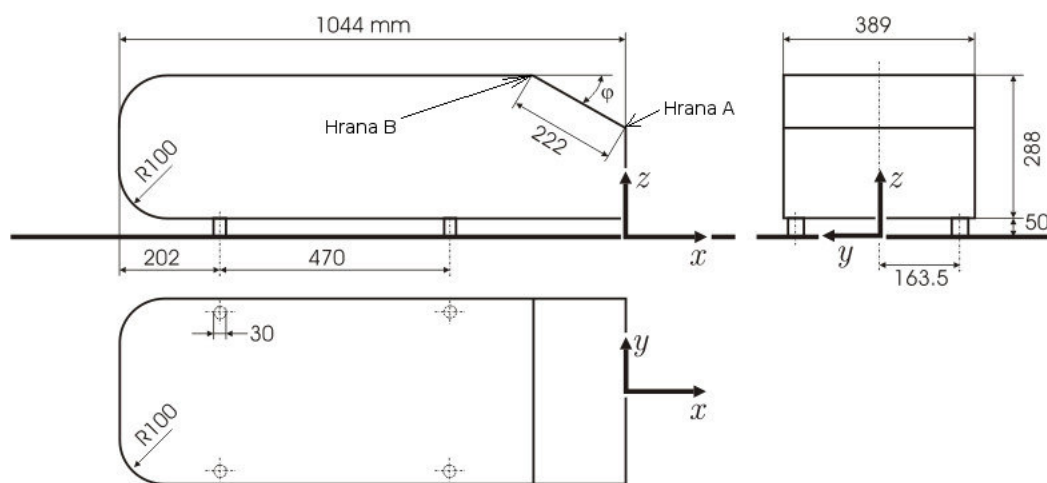
(b) Lyapunův exponent vypočítaný pro čas jdoucí nazpět.

Obrázek 6.6: Vykreslení kontur Lyapunova exponentu společně s vektorovým rychlostním polem pro tytéž parametry jako na obrázku č.6.5a.

7 Proudění kolem špatně obtékaného tělesa (Ahmed body)

Špatně obtékané těleso je takové těleso, kde při proudění kolem tohoto tělesa dojde k odtržení proudící tekutiny na povrchu tohoto tělesa. Pro zkoumání aerodynamických jevů při obtékání špatně obtékaného tělesa jako je třeba automobil se často využívají zjednodušené modely vozidel, které nemají tak složitou geometrii a je jednoduché je zhotovit.

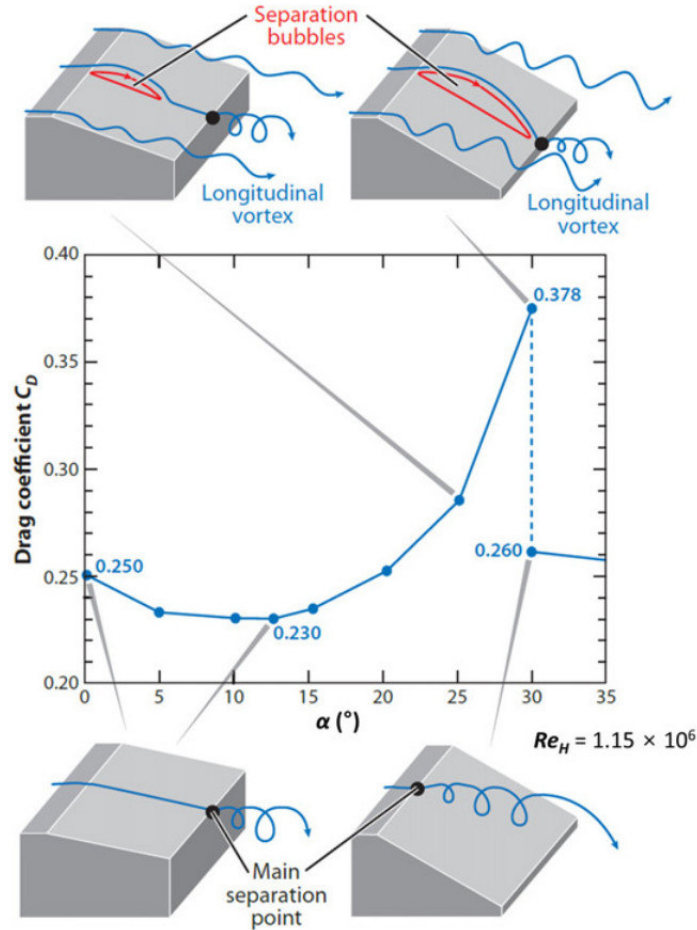
Jedním ze základních modelů, který se používá pro zkoumání aerodynamických vlastností automobilů, je model Ahmed body, který byl představen v práci [13]. Podle práce [13] bude zvolena stejná geometrie modelu Ahmed body (viz. obrázek č.7.1). Z hlediska aerodynamiky je u modelu Ahmed body nejzajímavějším místem zadní část tohoto modelu, která je sklopena o úhel φ . V závislosti na úhlu sklopení zadní části modelu Ahmed body byl naměřený odporový součinitel c_d (tato závislost viz. obrázek č.7.2), který se vypočítá dle rovnice (7.0.1)



Obrázek 7.1: Rozměry modelu Ahmed body (převzato z [13]).

$$c_d = \frac{2 * F_d}{\rho * A * v^2}. \quad (7.0.1)$$

Jednotlivé členy v této rovnici znamenají: A je přední plochu tělesa, F_d je odporová síla, ρ je hustota tekutiny a v je rychlost nenarušeného proudu tekutiny.



Obrázek 7.2: Závislost úhlu naklonění zadní části modelu Ahmed body na odporovém součiniteli (převzato z [14]).

Na obrázku č.7.2 lze vidět, že k odtrhávání proudu tekutiny dochází na dvou možných místech. První možné místo, kde se proud tekutiny odtrhne od tělesa je "Hrana A" viz. obrázek č.7.1. Tento případ odpovídá rozsahu úhlu $0^\circ \leq \varphi \leq 12.5^\circ$ a $30^\circ \leq \varphi \leq 35^\circ$. Dalším možným místem odtržení je "Hrana B" viz. obrázek č.7.1. Tento případ odpovídá úhlu $12.5^\circ < \varphi \leq 30^\circ$. V obou případech se v místě odtržení proudu tekutiny začne tvořit podélný vír, který dále pokračuje do místa

úplavu za modelem. Zajímavým případem je úhel sklopení $\varphi=30^\circ$, kde pro tento úhel existují dva režimy. První režim je případ vysokého odporu ¹, který vzniká především pro větší rychlosti a odpovídá odporovému koeficientu $c_d=0.378$. Druhý režim vzniká v případě, že již nastal první režim, ale jelikož se začne snižovat rychlost, tak vzniklý podélný vír se začne zkracovat až do chvíle, kdy podélný vír vymizí úplně a nastane přilnutí proudící tekutiny ke skloněné rovině. Tento režim je případ malého odporu² a odporový koeficient pro tento režim je $c_d=0.26$. Další vírovou (koherentní) strukturou, která vzniká při obtékání modelu Ahmed body, je dvojice vírů vznikající v místě úplavu těsně za modelem [14].

Další parametr, který je důležitý pro řízení odporového koeficientu, je bezrozměrné Strouhalovo číslo, které je definováno jako

$$Sh = \frac{f * D}{v}. \quad (7.0.2)$$

Jednotlivé členy rovnice (7.0.2) znamenají: f značí frekvenci vzniku vírů, D je charakteristický rozměr a v je rychlost nenarušeného proudu tekutiny. Strouhalovo číslo je známo z experimentů, a proto se často využívá pro dopočítání časové periody vzniku vírů.

7.1 CFD analýza modelu Ahmed body

7.1.1 Popis úlohy

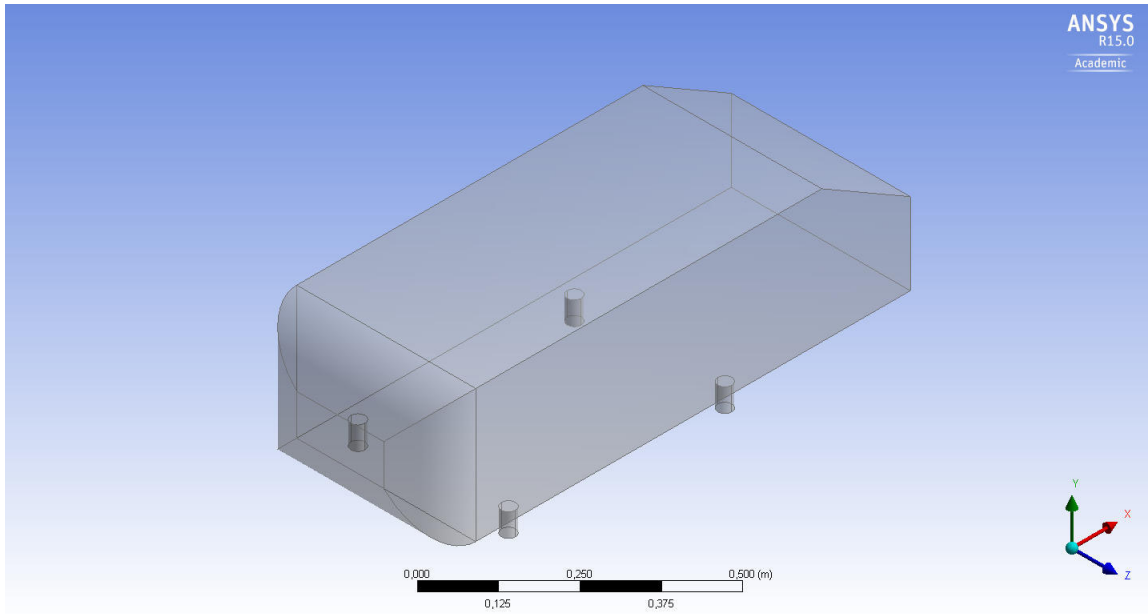
Jedná se o úlohu prostorového nestacionárního proudění kolem modelu Ahmed body (viz. obrázek č.7.3). Proudící tekutina je vzduch, který vstupuje do zkoumaného prostředí známou rychlostí. Vstupní rychlost je 40 m s^{-1} , což není příliš vysoká rychlost ve srovnání s rychlostí zvuku $v_{zvuk} = 343 \text{ m s}^{-1}$ odpovídající teplotním podmínkám $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Poměr mezi rychlostí nenarušeného proudu tekutiny a rychlostí zvuku tekutiny se nazývá Machovým číslem

¹v anglickém názvu tzv."high-drag regime"

²v anglickém názvu tzv."low-drag regime"

$$Ma = \frac{v}{v_{zvuk}}. \quad (7.1.1)$$

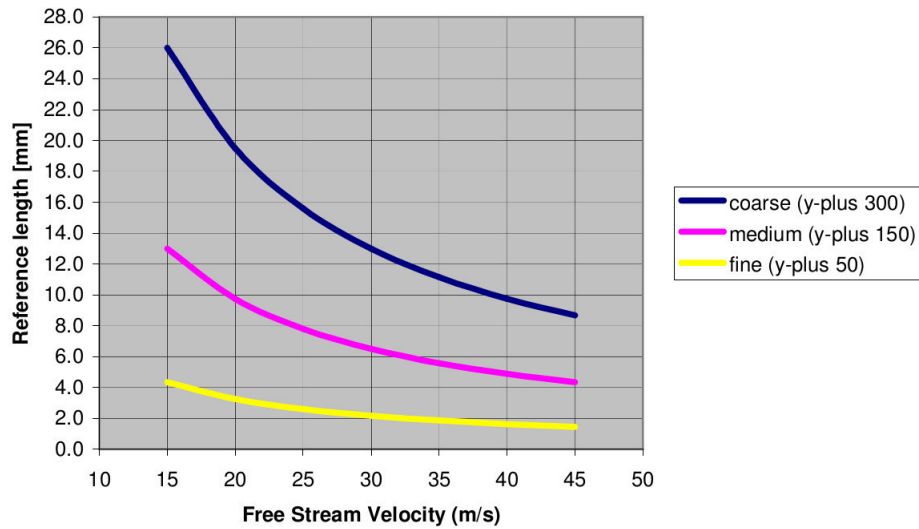
Pokud Machovo číslo pro danou úlohu nepřesahuje hodnotu $Ma=0.3$, tak lze proudící tekutinu uvažovat jako nestlačitelnou. Pro tuto úlohu Machovo číslo odpovídá hodnotě $Ma=0.05$, proto vzduch bude uvažován jako nestlačitelná tekutina.



Obrázek 7.3: Isometrický pohled na Ahmed body.

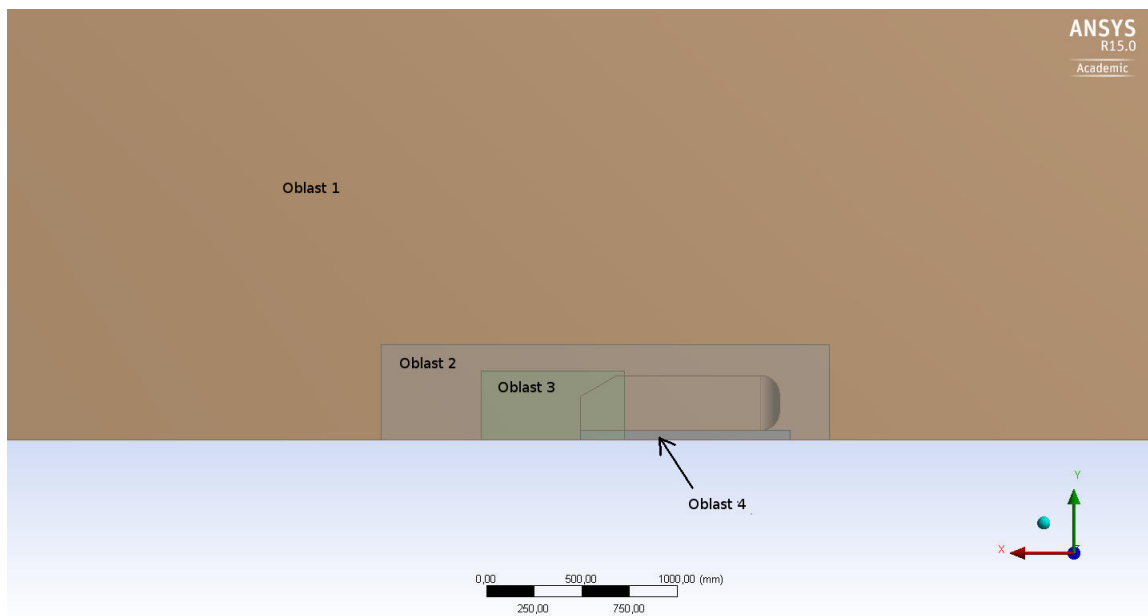
7.1.2 Síť

Síť je vytvořena dle doporučení práce [10] a je nastavena na variantu hrubé sítě podle obrázku č.7.4. Pro takto zvolenou variantu sítě by mělo zhruba odpovídat 2 - 5 mil. buněk. V případě CFD analýzy vytvořené v této práci, tak síť obsahuje 2 036 758 buněk.



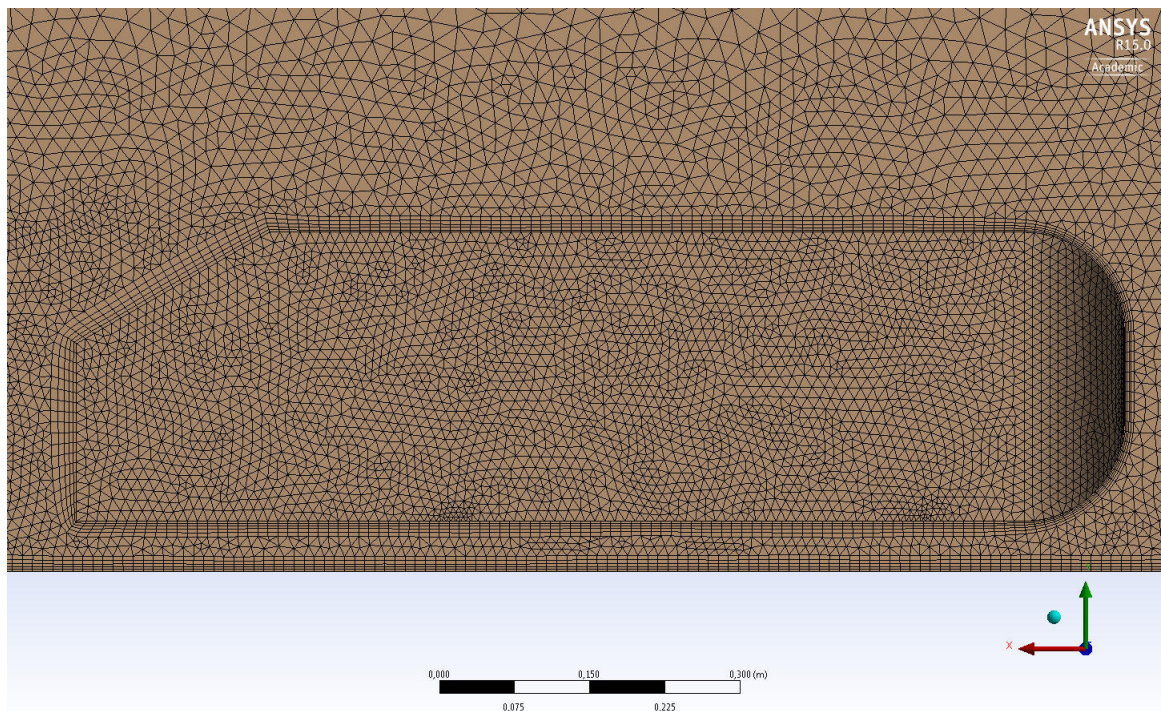
Obrázek 7.4: Závislost rychlosti nenarušeného proudu na velikosti buněk (převzato z [10]).

Síť je rozdělena na 4 oblasti (viz obrázek č.7.5). "Oblast 4" odpovídá prostoru mezi vozovkou (zemí) a modelem Ahmed body. "Oblast 3" odpovídá prostoru za modelem Ahmed body, kde bude vznikat dvojice vírů. Pro tyto dvě zmíněné oblasti ("oblast 4" a "oblast 3") byla zvolena nejmenší velikost buňky size=10mm. "Oblast 3" představuje oblast, kde by měl vzniknout úplav, a proto je zde velikost buňky size=15mm.



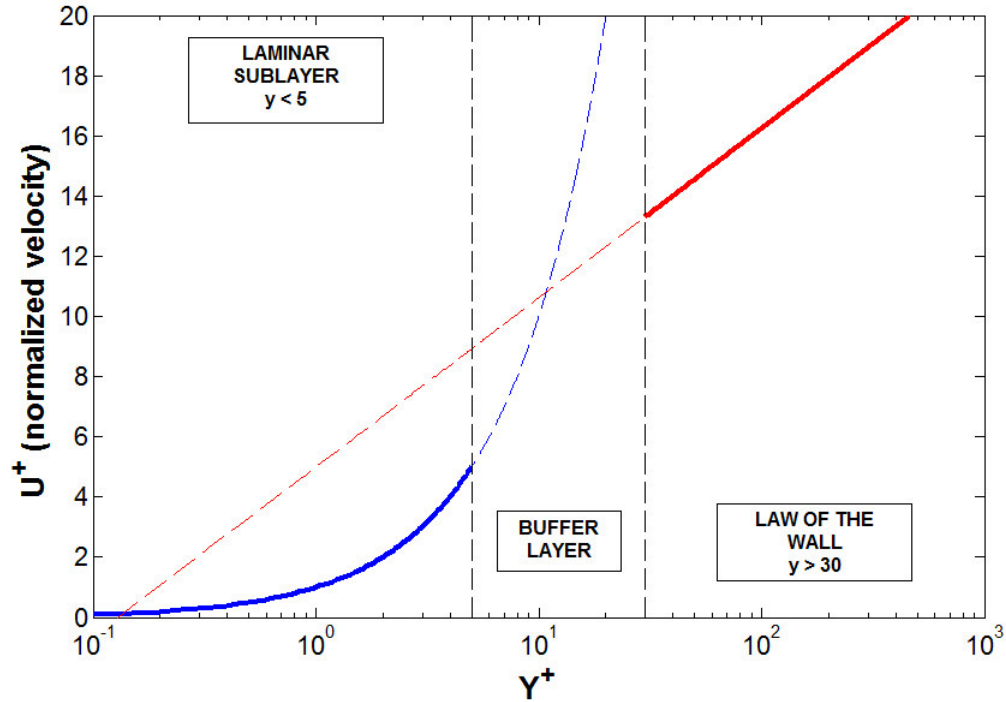
Obrázek 7.5: Rozdělení zkoumaného prostředí na 4 oblasti.

Vliv mezní vrstvy je dalším důležitým bodem pro tvorbu sítě, kde je třeba síť kolem tělesa přizpůsobit tvaru tělesa a vytvořit tzv. prizmatickou síť. Pro prizmatickou síť pak bude platit, že tloušťka vrstev poroste se vzdáleností od povrchu. Dále je třeba uvažovat vliv mezní vrstvy i na vozovce (viz. obrázek č.7.6).



Obrázek 7.6: Vytvořená prizmatická síť kolem vozovky a modelu Ahmed body.

Z obrázku č.7.6 si lze dále všimnout, že tloušťka prizmatické sítě se kolem modelu Ahmed body mění a to především kvůli stěnové funkci. Tato stěnová funkce popisuje vztah mezi bezrozměrnou rychlostí v^+ a bezrozměrnou vzdáleností od stěny y^+ (viz. obrázek č.7.7).



Obrázek 7.7: Stěnová funkce (převzato z [16]).

Bezrozměrná rychlost v^+ se vyjádří dle rovnice (7.1.2) a bezrozměrná vzdálenost od stěny y^+ se vyjádří dle rovnice (7.1.3)

$$v^+ = \frac{v}{v_\tau} \quad (7.1.2)$$

$$y^+ = \frac{y}{\nu} v_\tau. \quad (7.1.3)$$

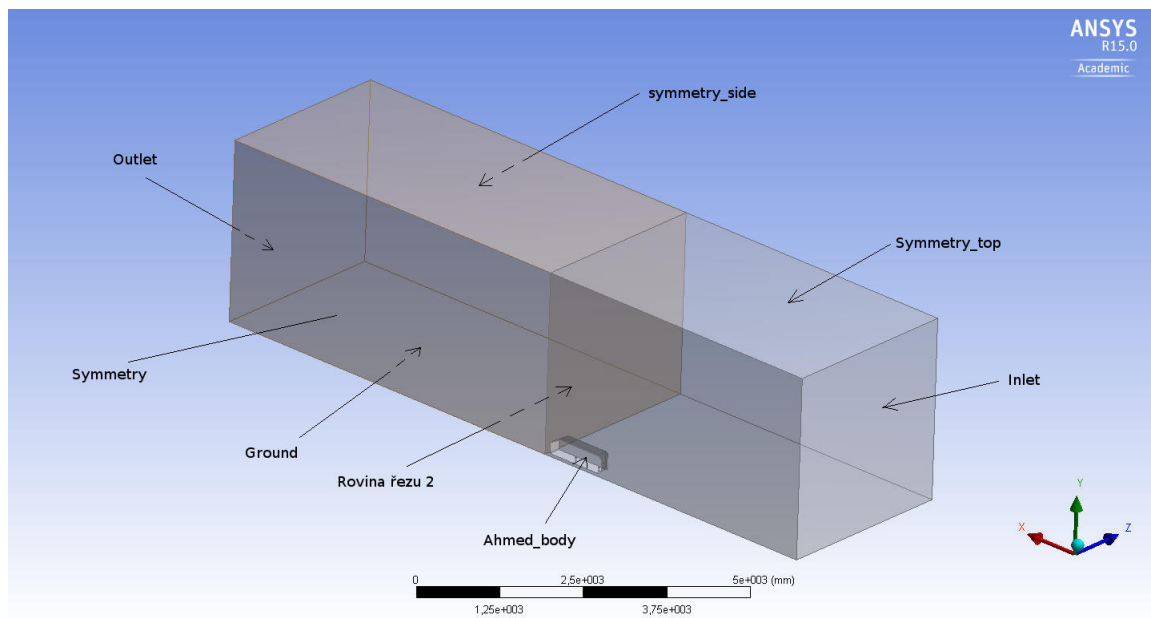
Z těchto rovnic jednotlivé členy znamenají: v je rychlost nenarušeného proudu, y je vzdálenost částice od stěny, ν je kinematická viskozita a v_τ je rychlost na stěně, která je dána rovnicí (7.1.4)

$$v_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (7.1.4)$$

V rovnici (7.1.4) ρ značí hustotu tekutiny a τ_w značí smykové napětí na stěně.

7.1.3 Okrajové podmínky

Model Ahmed body je symetrické těleso vůči rovině x-z, proto i těleso představující tekutinu bude symetrické. Další z okrajových podmínek je neuvažování tření na horní a boční stěně objemu tekutiny.



Obrázek 7.8: Grafické znázornění oblastí, kde se budou definovat okrajové podmínky.

Oblast	Označení okrajové podmínky	Hodnota
Inlet	velocity-inlet	40 m.s ⁻¹
Outlet	pressure-outlet	0 Mpa
Ground	wall	-
Ahmed_body	wall	-
Symmetry_side	symmetry	-
Symmetry_top	symmetry	-
Symmetry	symmetry	-

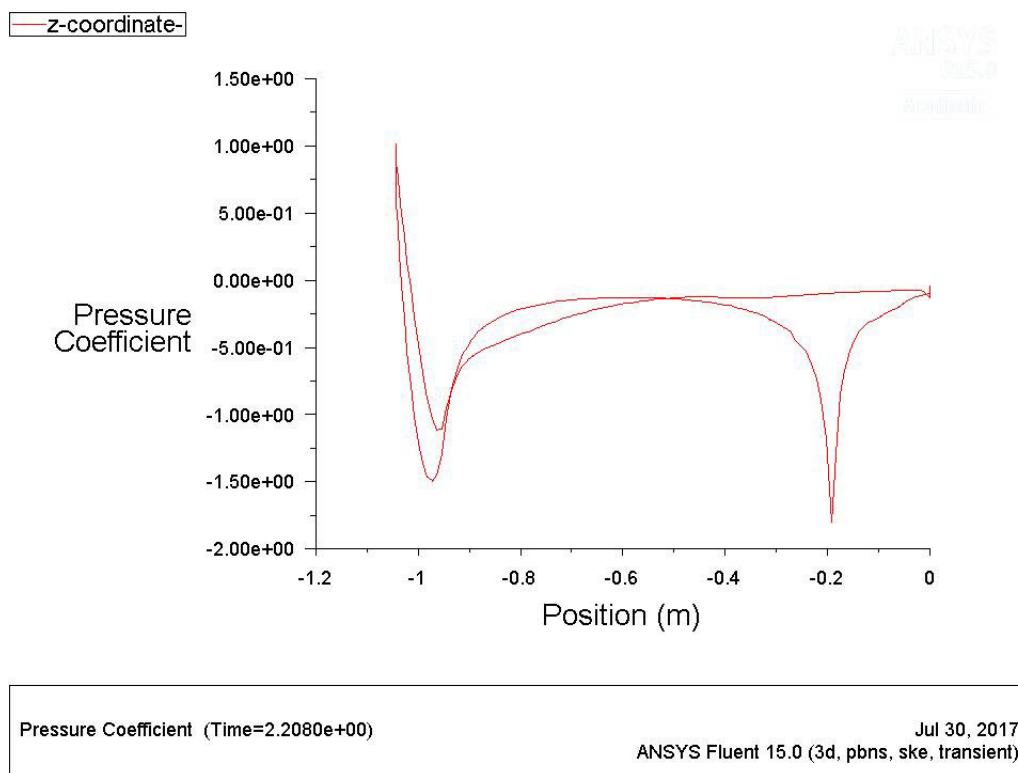
7.1.4 Vyhodnocení

Aby mohla být aplikována metoda FTLE na identifikaci koherentních struktur, tak je třeba úlohu řešit jako přechodový děj, protože FTLE metoda potřebuje znát, jak se dané rychlostní pole vyvíjí během průběhu daného časového úseku. Výpočet přechodové úlohy vyžaduje znalost časového kroku, pro který bude daná úloha řešena. Jako nejvýhodnější pro řešení zjištění časového kroku se nabízí zjistit časový krok ze Strouhalova čísla (viz. rovnice (7.1.5)), neboť Strouhalovo číslo závisí na rozměru obtékaného tělesa, rychlosti a především na frekvenci vzniku vírových struktur. Jako charakteristický rozměr je zde obtížné zvolit jeden z rozměrů modelu Ahmed body, proto dle literatury [17] bude za charakteristický rozměr dosazeno $D=\sqrt{A}$, kde A odpovídá přední ploše modelu Ahmed body včetně uvažování dolních pilířů.

$$t = \frac{\sqrt{A}}{Sh * v} = \frac{0.}{0.265 * 40} = 0.01s. \quad (7.1.5)$$

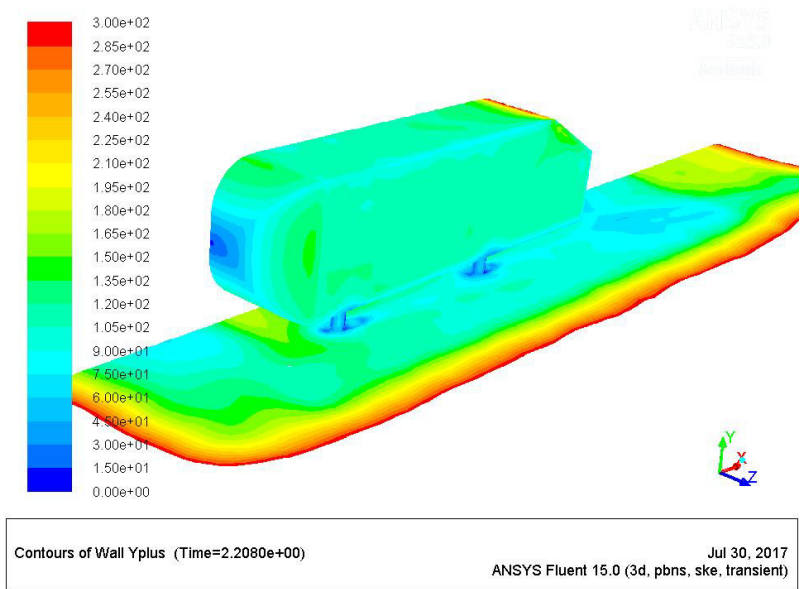
Čas t odpovídá periodě vzniku vírů. Aby mohl být popsán vznik vírů (koherentních struktur), tak se časový krok musí zvolit menší než perioda vzniku vírů t . Časový krok se zvolil odhadem $\Delta t=0.001s$ a pro tento časový krok bylo provedeno 2208 časových kroků. To odpovídá časovému úseku $T=2.208s$.

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly a jak je zřejmé z obrázku č.7.2, tak pro úhel φ odpovídají dva režimy součinitele odporu. V této úloze nastává režim velkého odporu, kterému odpovídá experimentální odporový koeficient $c_d=0.378$. Z CFD analýzy vyšel odporový koeficient $c_d=0.34$, a tak chyba CFD analýzy odporového koeficientu je kolem 8%. Průběh odporového koeficientu podél hrany ve směru "z" je vidět na obrázku č.7.9.

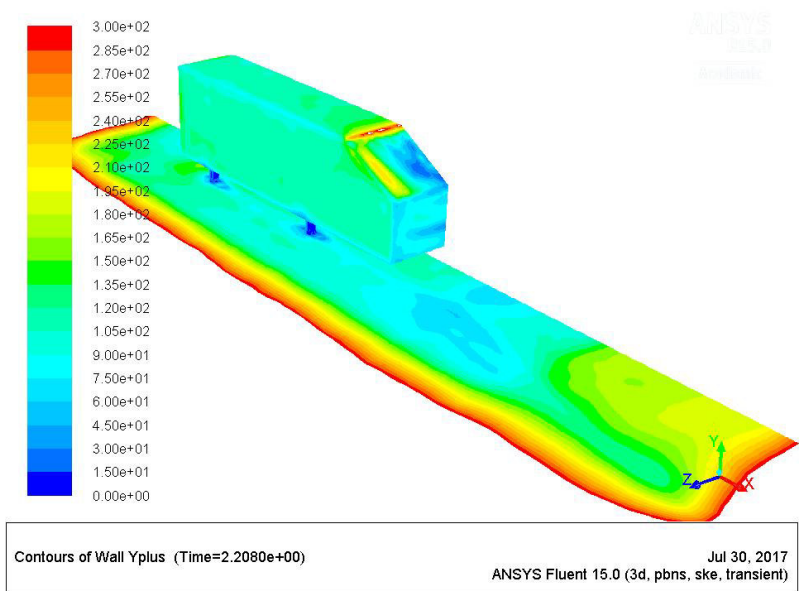


Obrázek 7.9: Průběh odporového součinitele c_d podél hrany modelu ahmed body ve směru z.

Z obrázku č.7.10 vyplývá, že y^+ na modelu Ahmed body se pohybují v rozmezí 100-200, což odpovídá obrázku č.7.4 variantě pro středně hrubou síť, která má hodnoty y^+ kolem 150. Na obrázku č.7.10b je vidět na hraně po sklápění vysoké hodnoty y^+ , které se pohybují kolem hodnoty 300, což odpovídá předpokládané variantě hrubé sítě z obrázku č.7.4. Tyto výsledné hodnoty y^+ nejsou zcela správné, ale protože tato CFD analýza postupuje podle práce [10], tak i pro tak hrubou síť budou vycházet uspokojivé výsledky.



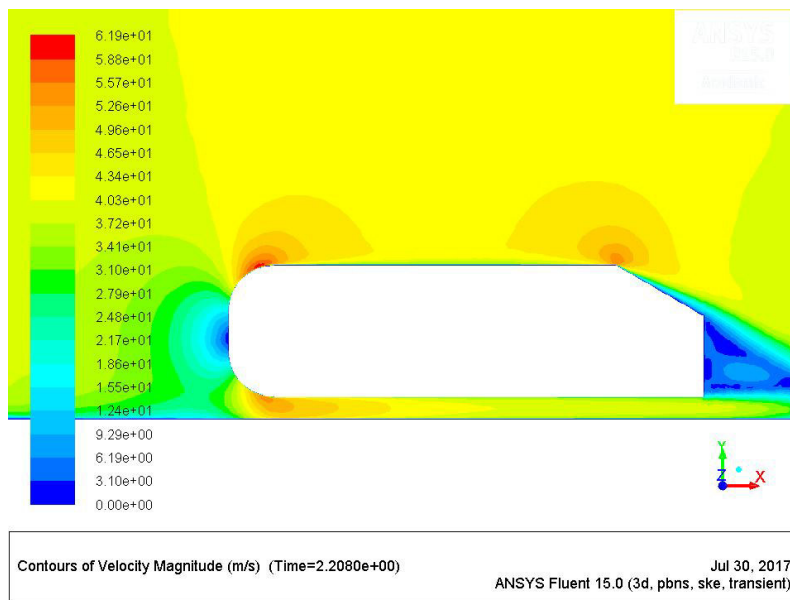
(a) Přední náhled na model Ahmed body.



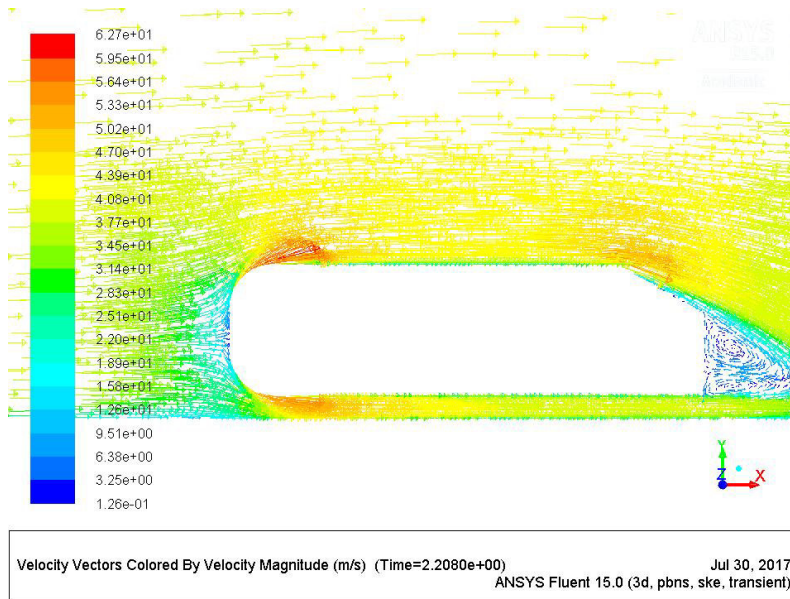
(b) Zadní náhled na model Ahmed body.

Obrázek 7.10: Hohnoda y^+ na stěně 1/2 modelu Ahmed body a na okolní vozovce.

Pro identifikaci koherentních struktur je jednou z nejdůležitějších veličin rychlost. Pro obtékání model Ahmed body v "rovině 1" (pozn. oblast "Symmetry" z obrázku č.7.8) je ukázáno rychlostní pole na obrázku č.7.11a a na obrázku č.7.11b je vykresleno rychlostní vektorové pole.



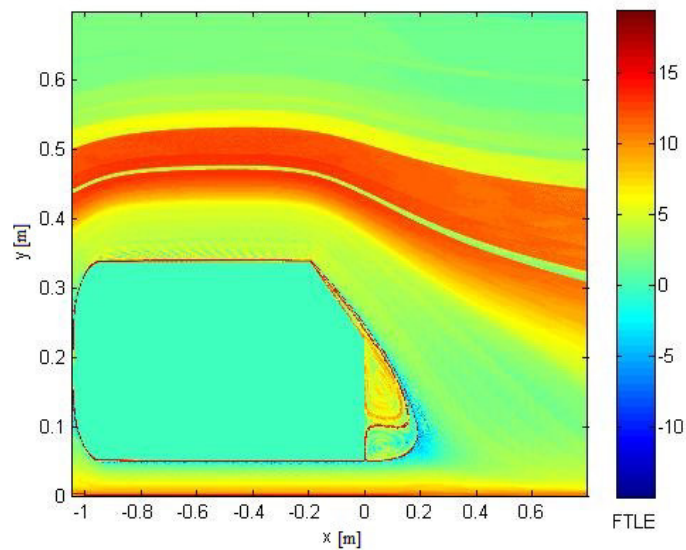
(a) Rychlostní pole.



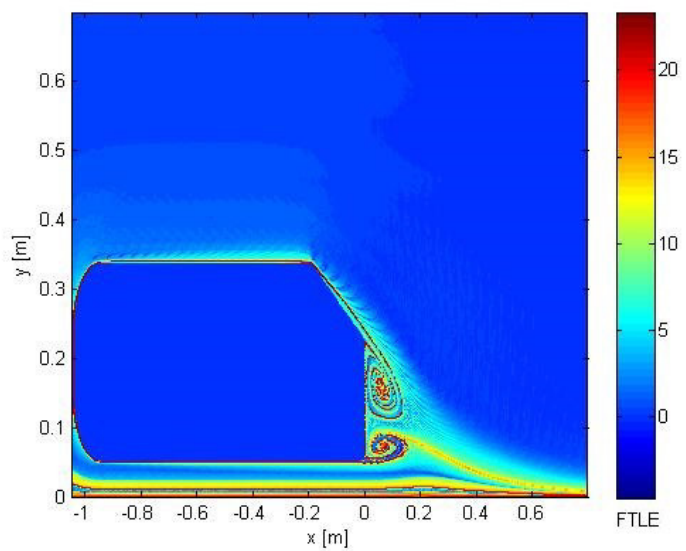
(b) Vektorové rychlostní pole.

Obrázek 7.11: Zobrazení rychlostí.

Na obrázku č.7.12 se nachází zobrazený Lyapunův exponent, pomocí kterého jsou vyznačeny hranice koherentních struktur odpovídající "rovině 1".



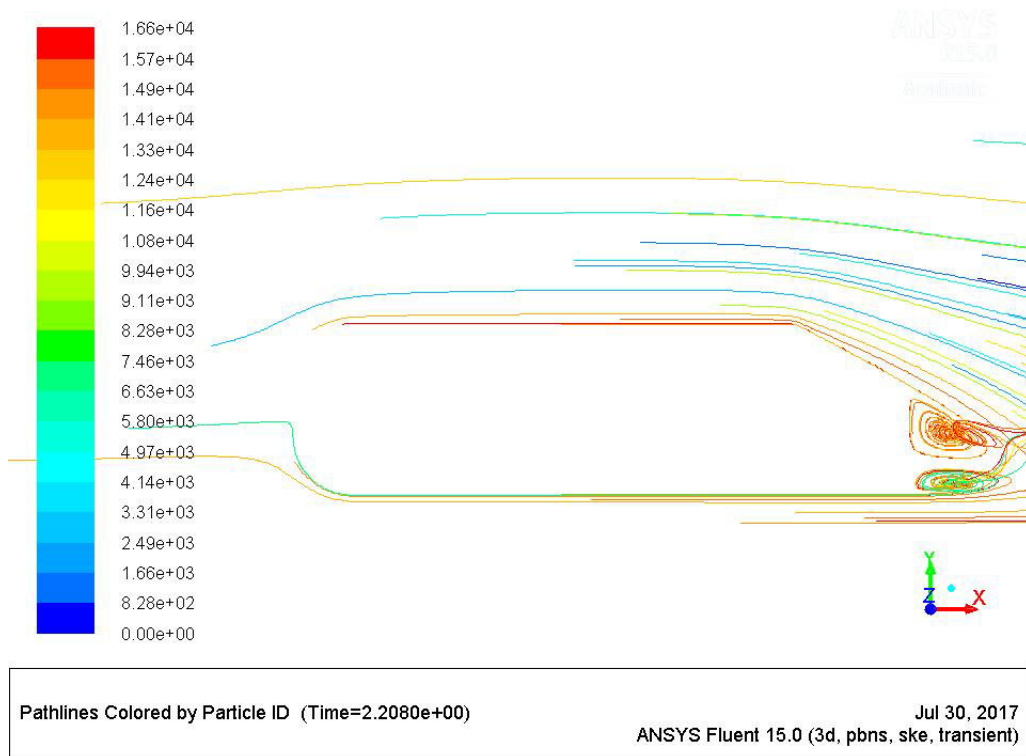
(a) Pro dopředně jdoucí čas.



(b) Pro zpětně jdoucí čas.

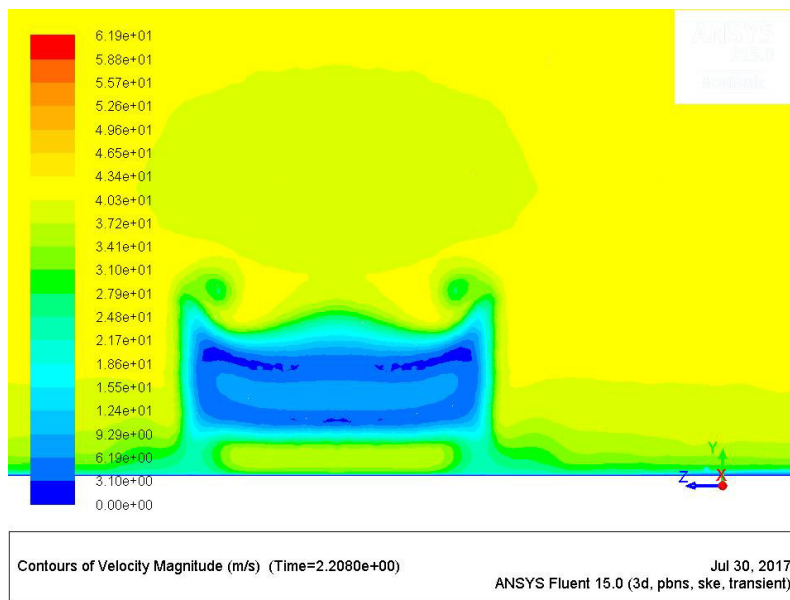
Obrázek 7.12: FTLE metoda aplikovaná v "rovině 1".

Jak je zřejmé z FTLE analýzy a vektorového rychlostního pole, tak v místě úplavu v blízkosti modelu Ahmed body se nachází koherentní struktura v podobě dvou vířů. Tato struktura může být také ukázána proudnicemi (viz. obrázek č. 7.13).

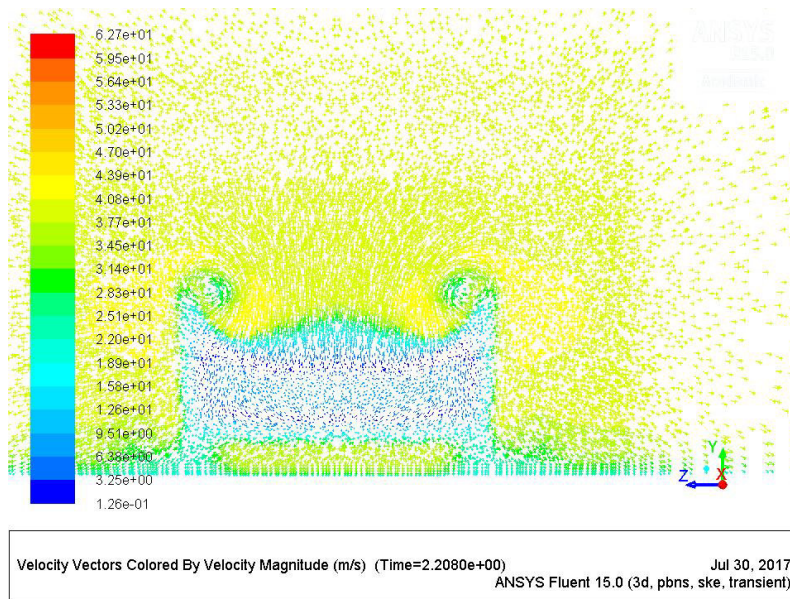


Obrázek 7.13: Zobrazení trajektorií částic v řezu 1.

Dalším místem, kde je provedeno vyhodnocení koherentních struktur, je v "rovině 2" (pozn. oblast "Rovina řezu" z obrázku č.7.8. Tato oblast je od zadní stěny modelu Ahmed body vzdálena o 0.1m). Pro tuto rovinu je opět zobrazeno rychlostní pole viz. obrázek č.7.14a a rychlostní vektorové pole viz. obrázek č.7.14b.



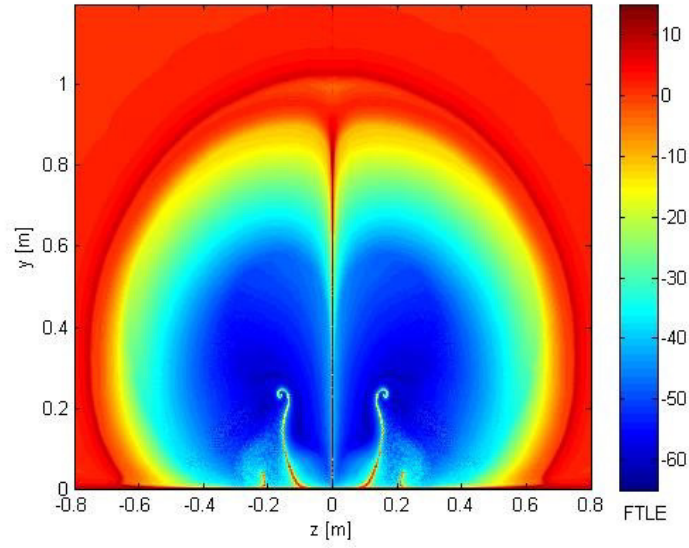
(a) Rychlostní pole.



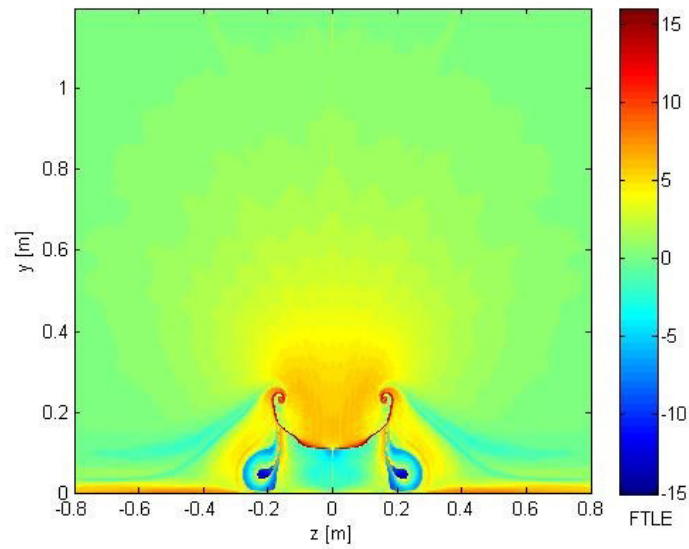
(b) Vektorové rychlostní pole.

Obrázek 7.14: Zobrazení rychlostí

Na obrázku č.7.15 je vykreslen Lyapunův exponent, který zobrazuje hrany, pomocí kterých jsou identifikovány koherentní struktury v "rovině 2".



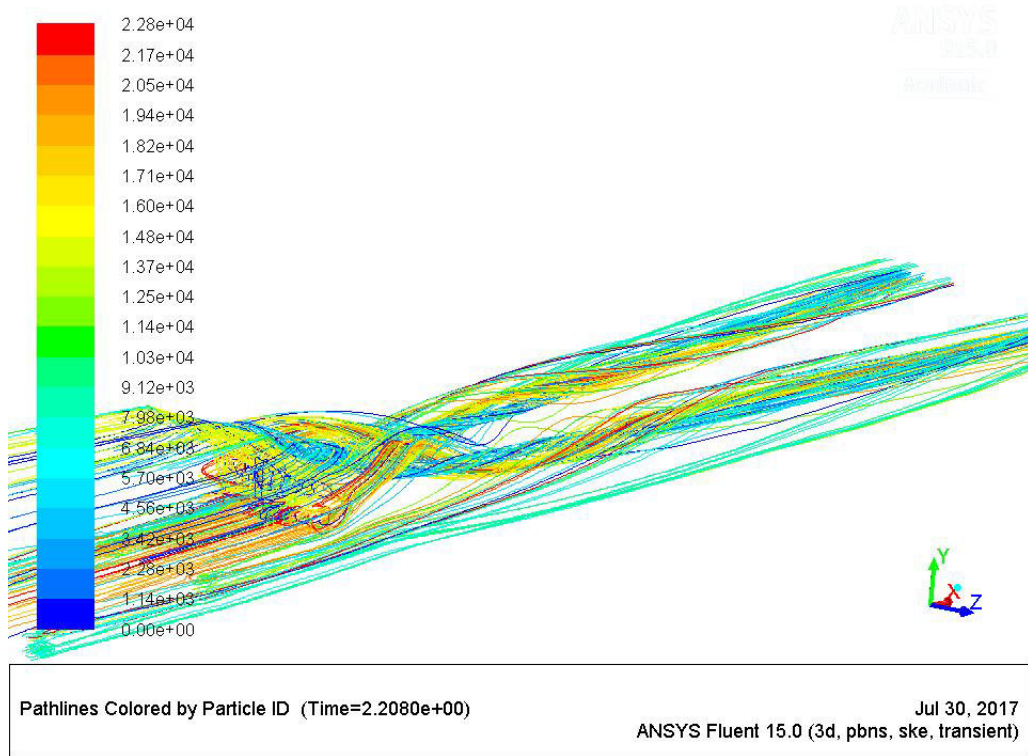
(a) Pro čas jdoucí dopředu.



(b) Pro čas jdoucí nazpět.

Obrázek 7.15: FTLE metoda aplikovaná v místě řezu 2.

Vzniklá koherentní struktura pro "rovinu 2" odpovídá dvěma vírům, které vznikají na "hraně 2". Tyto dva podélné víry jsou zobrazeny na obrázku č.7.16.



Obrázek 7.16: Zobrazení trajektorií částic za modelem Ahmed body.

8 Závěr

Na základě práce [5] a [1] byla popsána metoda FTLE identifikace koherentních struktur, u které bylo ukázáno, že má fyzikální význam jak pro čas, který plyne dopředu, tak i pro čas, který plyne nazpět (viz. kapitola 5).

Tato metoda byla aplikována na dvou analytických případech proudového pole. Prvním analytickým případem byl případ dvou sousedních vírů. Případ byl testován pro čas plynoucí dopředu, i pro čas plynoucí zpětně. Obě varianty byly analyzovány na časovém úseku $T=20\text{s}$ s časovým krokem $\Delta t=0.001\text{s}$ pro oblast $[0\ 2] \times [0\ 1]\text{m}$. Jak vyplývá z obrázku č.6.2 a obrázku č.6.3, tak se pro tento případ proudového pole podařilo identifikovat hranice, které definují oblasti koherentních struktur. V tomto případě se podařilo identifikovat dva víry ležící vedle sebe, což odpovídalo i vektorovému zobrazení rychlostí pro tento případ proudění. Druhým analytickým případem bylo proudové pole klikatého proudu. I zde byl tento analytický případ proudového pole analyzován pro čas jdoucí dopředu i nazpět. Analýza zde proběhla pro časový úsek $T=125.6\text{ s}$ s časovým krokem $\Delta t=0.05\text{s}$ pro oblast $[0\ 10] \times [0\ 4]\text{m}$. Pro takto zvolené parametry analýzy byly zjištěny pomocí FTLE analýzy tři víry, které jsou rozmístěny střídavě vedle sebe, podobně jak je to u vírové Karmánovy stezky (viz. obrázek č.6.5)

Kromě aplikace FTLE metody na analytických případech proudových polí byla provedena CFD analýza proudění kolem špatně obtékaného tělesa Ahmed body. Celý výpočet probíhal pro prostorovou úlohu, avšak vyhodnocení koherentních struktur bylo provedeno pro dvě roviny. První analyzovaná rovina byla rovina symetrie. Pomocí FTLE metody se podařilo identifikovat dvojici vírů, které ležely v blízkosti tělesa v místě úplavu (viz. obrázek č.7.12b). Takto identifikovaná koherentní struktura souhlasila s vykresleným vektorovým polem a proudnicemi. Jak bylo zmíněno v kapitole (7), tak pro případ úhlu nastavení sklopení zadní roviny $\varphi = 30^\circ$ odpovídají dva režimy odtrhávání proudu tekutiny od tělesa. Na obrázku č.7.12 je ukázáno odtrhávání tekutiny na "hraně 2". Pro tento případ odtrhávání proudu

tekutiny odpovídá režim vysokého odporu, kterému odpovídá experimentální odporový koeficient $c_d = 0.378$. Z CFD analýzy vychází odporový koeficient $c_d = 0.34$. Při porovnání odporových koeficientů z experimentu a uskutečněné CFD analýzy, tak chyba CFD analýzy vychází zhruba 8 %. Druhou analyzovanou oblastí je "rovina 2" (viz. obrázek č.7.8). V této rovině byly pomocí FTLE analýzy identifikovány dva víry, které vznikají odtrháváním proudu tekutiny na "hraně 2" (viz. obrázek č. 7.15). Dále koherentní struktura dvou vírů byla identifikována také pomocí vykreslení vektorového rychlostního pole (viz. obrázek č. 7.14b). Dalším důkazem správnosti vykreslení dvou vírů potvrzuje obrázek č.7.16, ukazující dva podélné víry v prostoru zobrazené pomocí proudnic.

Jak je vidět z výsledků FTLE metody pro analytické případy proudových polí a nebo pro CFD analýzu proudění kolem špatně obtékaného tělesa, tak FTLE metoda spolehlivě odhaluje koherentní struktury. Bohužel její kvalita je závislá na délce trvání zkoumaného jevu, a proto když je časový děj krátký, tak Lyaponův exponent se nestihne vyvinout do takové míry, aby vyznačil všechny hranice, které jsou spojeny s koherentními strukturami.

Tato práce identifikovala koherentní struktury pomocí FTLE metody pouze v roviněm případě, a proto by bylo zajímavé se dále věnovat identifikaci koherentních struktur pomocí FTLE analýzy v trojrozměrném prostoru.

9 Literatura

- [1] HOLMÉN, Vivianne. *Methods for Vortex Identification*. Lund, 2012, 46 s. 1404-6342. Lund University. Vedoucí práce Alexandros Sopasakis. Dostupné z: <http://www.ctr.maths.lu.se/media/thesis/2013/FMA820.pdf>
- [2] JAKOBSSON, Johan. *Investigation of Lagrangian Coherent Structures - To Understand and Identify Turbulence*. Gothenburg, Sweden, 2012. CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY. Vedoucí práce Dr. Ronnie Andersson. Dostupné z: <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/159465.pdf>
- [3] KOLÁŘ, V. *Vortex Identification: New requirements and limitations*. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2007, pp. 638-652. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.473.26&rep=rep1&type=pdf>
- [4] PEIKERT, R., A. POBLITZER, F SADLO a B SCHINDLER. *A Comparison of Finite-time and Finite-Size Lyapunov Exponents*. *Topological Methods in Data Analysis and Visualization*. 2014, p.p. 187-200. DOI: 10.1007/978-3-319-04099-812.
- [5] SHADDEN, S. C., F. LEIKEN a J. E. MARSDEN. *Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows*. 2005, p.p. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.007.
- [6] PLEŠEK, Jiří. *Nelineární mechanika kontinua s příklady*. 2015. Dostupné z: <http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/MK/MK2015.pdf>
- [7] STEVEN, L., B. W. ROWLEY a C. W. ROWLEY. *Fast Computation of FTLE Fields for Unsteady Flows: A Comparison of Methods*. 2009. DOI: 10.1063/1.3270044.
- [8] BRANICKI, M. a S. WIGGINS. *Finite-time Lagrangian transport analysis: stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite-time Lyapunov*

- exponents*. Nonlin. Processes Geophys., 17, 1– 36 , 2010. Dostupné z: <https://www.nonlin-processes-geophys.net/17/1/2010/npg-17-1-2010.pdf>
- [9] GREEN, M. A., C. W. ROWLEY a G. HALLER. *Detection of Lagrangian coherent structures in 3D turbulence*. 2007. DOI: 10.1017/S0022112006003648.
- [10] LANFRIT, Marco. *Best practice guidelines for handling Automotive External Aerodynamics with FLUENT*. 2005. Dostupné z: http://www.southampton.ac.uk/~nwb/lectures/GoodPracticeCFD/Articles/Ext_Aero_Best_Practice_Ver1_2.pdf
- [11] AIDER, Jean-Luc a Jean-François BEAUDOIN. *Drag and lift reduction of a 3D bluff body using flaps*. 2008.. Dostupné z: http://www.southampton.ac.uk/~nwb/lectures/GoodPracticeCFD/Articles/Ext_Aero_Best_Practice_Ver1_2.pdf
- [12] [online]. [cit. 2017-07-29]. Dostupné z: https://www.google.cz/search?q=karmanova+virova+stezka&client=ubuntu&hs=IR&channel=fs&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjFpoG91q7VAhWMmLQKHQZkC4wQ_AUICigB&biw=1920&bih=985#imgrc=GhC8cH8MdZ2t8M:
- [13] AHMED, S.R., G. RAMM a G. FALTIN. *Some Salient Features Of The Time-Averaged Ground Vehicle Wake*. DOI: 10.4271/840300.
- [14] KIM, Dongri, Hoon LEE, Wook YI a Haecheon CHOI. *A bio-inspired device for drag reduction on a three-dimensional model vehicle*. DOI: 10.1088/1748-3190/11/2/026004.
- [15] DVOŘÁK, Rudolf a Karel KOZEL. *Matematické modelování v aerodynamice*. ISBN 80-01-01541-6.
- [16] [online]. [cit. 2017-07-31]. Dostupné z: https://www.google.cz/search?q=wall+function+ansys&client=ubuntu&channel=fs&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiXvLu6obLVAhVBb1AKHWfpA0gQ_AUICigB&biw=1920&bih=985#imgrc=CJivR4_9hAKtIM:

- [17] ZHOU, Y., Y. LIU a L. HUANG. *Fluid-Structure-Sound Interactions and Control: Proceedings of the 2nd Symposium on Fluid-Structure-Sound Interactions and Control*. ISBN 978-3-642-40371-2.
- [18] [online]. [cit. 2017-07-31]. Dostupné z: https://www.google.cz/search?biw=1920&bih=985&tbm=isch&sa=1&q=shape+evolution+of+car&oq=shape+evolution+of+car&gs_l=psy-ab.3..7962.13924.0.14137.13.13.0.0.0.0.221.1202.6j4j1.11.0..0..1.1.64.psy-ab.2.5.763..0j0i67k1j0i7i30k1j0i8i7i30k1j0i30k1.85oDbZbs0XU#imgrc=904s9S_1HfTrGM:
- [19] URUBA, Vávlac. *Turbulence*. ISBN 978-80-01-05600-4.
- [20] HUNTLEY, H. S., B. L. B. L. LIPPHARDT, Jr., A. D. KIRWAN a Jr., M. H. M. SULMAN. *How to Read a Map of Lagrangian Coherent Structures*. Dostupné z: <http://www.whoj.edu/files/whojserver.do?id=116284&pt=2&p=133811>

10 Obsah příloženého CD

Označení	Název souboru	Popis
[A]	Diplomova_prace-Hursky	Diplomová práce ve formátu "pdf".
[B]	FTLE_Double_gyre.m	Spouštěcí skript FTLE analýzy pro případ dvou sousedních vírů.
[C]	Lyapun_D_g.m	Funkce volaná skriptem [B] pro výpočet Lyapunova exponentu.
[D]	Double_Gyre.m	Funkce volaná skriptem [B] pro vygenerování dat.
[E]	FTLE_Meandering_jet.m	Spouštěcí skript FTLE analýzy pro případ střídavého proudu.
[F]	Lyapun_jet.m	Funkce volaná skriptem [E] pro výpočet Lyapunova exponentu.
[G]	Meandering_jet.m	Funkce volaná skriptem [E] pro vygenerování dat.
[H]	Ahmed_body-4-02207.cas	Soubor (.case) pro spuštění modelu Ahmed body v prostředí Fluent
[I]	Ahmed_body-4-02207.dat	Data vypočtená pro CFD analýzu Ahmed body.
[J]	Ahmed_body_symm.m	Spouštěcí skript FTLE analýzy pro "rovinu 1" Ahmed body.
[K]	Lyapun_Ahmed_body_symm.m	Funkce volaná skriptem [J] pro výpočet Lyapunova exponentu.
[L]	Ahmed_body_wake.m	Spouštěcí skript FTLE analýzy pro "rovinu 2" Ahmed body.
[M]	Lyapun_Ahmed_body_wake.m	Funkce volaná skriptem [L] pro výpočet Lyapunova exponentu.