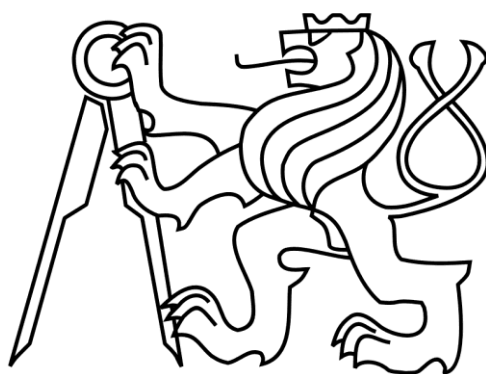


# České vysoké učení technické v Praze

## Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Diplomová práce

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Malá** Jméno: **Anna** Osobní číslo: **397233**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Výpočtové metody pro analýzu tenkostěnných i silnostěnných kompozitních nosníků**

Název diplomové práce anglicky:

**Computational methods for the analysis of thin-wall and thick-wall composite beams**

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši vhodných přístupů pro výpočty silnostěnných i tenkostěnných kompozitních nosníků pomocí MKP a pomocí analytických metod za účelem výpočtů statické tuhosti pro namáhání ohybem a smykem.
  2. Vyberte vhodné metody pro výpočtovou predikci tuhosti, které budou uplatněny na tenkostěnné a silnostěnné kompozitní nosníky.
  3. S pomocí experimentálních výsledků proveďte ověření přesnosti výpočtových přístupů (analytika, MKP) pro alespoň 1 vzorek tenkostěnného a 1 vzorek silnostěnného kompozitního nosníku.
  4. Pomocí ověřených metod proveďte studii predikce tuhosti na vzorcích nosníků odlišné kompozitní skladby a poměru tloušťky k délce nosníku. Z výsledků předešlé studie vyvodte závěry pro použitelnost metod.
  5. Pomocí výpočtových metod proveďte optimalizaci kompozitní skladby a geometrie vybrané komponenty.
- Doporučený rozsah 60 stran.

Seznam doporučené literatury:

KOLLAR, L. Peter a George S. SPRINGER. Mechanics of composite structures. New York: Cambridge University Press, 2003.  
BARBERO, Ever J. Introduction to composite materials design. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN 978-1-4200-7915-9.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Viktor Kulišek, ústav výrobních strojů a zařízení FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


**doc. Ing. Tomáš Mareš Ph.D., ústav mechaniky, biomech.a mechatr. FS**

Datum zadání diplomové práce: **28.04.2017**

Termín odevzdání diplomové práce: **18.08.2017**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomantka bere na vědomí, že je povinna vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

28. 4. 2014  
Datum převzetí zadání

Malá Anna  
Podpis studentky

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení vedoucího Ing. Viktora Kulíška.

Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpala, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

.....

podpis

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu práce Ing. Viktorovi Kulíškovi za odborné vedení této práce.

Výpočtové metody pro analýzu tenkostěnných  
i silnostěnných kompozitních nosníků

Computational methods for the analysis  
of thin-wall and thick-wall composite beams

# Anotace:

Tato diplomová práce se zabývá výpočtovými metodami pro analýzu silnostěnných i tenkostěnných nosníků mezikruhových průřezů z kompozitních materiálů. Jsou popsány zkoumané metody pro analytické výpočty (Timošenko, ABD matice, metody odhadu mezí) a metody pro výpočty metodou konečných prvků. Metody byly otestovány na zkušebních příkladech a jejich výsledky ověřeny s experimenty. Následně byla provedena studie porovnání výsledků vybraných metod na široké škále kompozitních nosníků různých skladeb. Vybraná metoda byla použita pro optimalizaci kompozitní hřídele vřetene.

**Klíčová slova:** *kompozit, nosník, ohyb, tuhost, MKP, optimalizace*

## **Abstract:**

This master's thesis is focused on computational methods for the analysis of thin-wall and thick-wall composite beams with a pipe cross-section. In the work, methods for analytical computations (Timoshenko, ABD matrix, method of limit estimations) are described together with approaches for finite element analysis. The models were tested on a various scale of composite beam examples and their results were verified with experiments. A case study of the selected methods was performed on a wide range of composite beams with different lay - up and thickness. The suitable method was used to optimize the composite spindle.

**Keywords:** *composite, beam, bending, stiffness, FEA, optimization*

## Obsah

<b>Seznam použitých symbolů .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Úvod .....</b>	<b>7</b>
<b>2. Teoretická část .....</b>	<b>9</b>
2.1    Základní rovnice pro výpočet kompozitů – laminátů .....	9
2.1    Metody pro výpočet laminátové trubky mezikruhového průřezu.....	11
2.1.1    Analytické metody .....	11
2.1.1.1    Transformace matice tuhosti.....	12
2.1.1.2    Výpočet pomocí ABD matic.....	13
2.1.1.3    Výpočet Timošenkovou metodou.....	13
2.1.1.4    Výpočet pomocí minima doplňkové energie .....	14
2.1.1.5    Výpočet pomocí minima deformační energie.....	14
2.1.1.6    Zhodnocení analytických metod.....	15
2.1.2    MKP přístupy.....	15
2.1.2.1    Obecné základy k výpočtu kompozitu pomocí MKP.....	15
2.1.2.2    Metody tvorby modelu.....	16
2.1.2.3    Prvky v programu Ansys ® .....	20
2.2    Shrnutí.....	26
<b>3. Cíle práce .....</b>	<b>27</b>
<b>4. Metodika řešení.....</b>	<b>28</b>
4.1    Silnostěnný nosník .....	29
4.1.1    Geometrie a materiálové vlastnosti trubky .....	29
4.1.2    Experiment.....	30
4.1.2.1    Průběh měření .....	30
4.1.2.2    Vyhodnocení měření.....	31
4.1.3    Analytický výpočet .....	34
4.1.4    MKP výpočet .....	35
4.1.4.1    Objemová skořepina .....	35
4.1.4.2    Skořepina .....	41
4.1.5    Porovnání tuhostí .....	46
4.2    Tenkostěnný nosník .....	48
4.2.1    Geometrie a materiálové vlastnosti.....	48
4.2.2    Experiment.....	49
4.2.3    Analytický výpočet .....	51
4.2.4    MKP výpočet .....	51
4.2.4.1    Objemová skořepina .....	52
4.2.4.2    Skořepina .....	52
4.2.5    Porovnání tuhostí .....	54
4.3    Shrnutí metodiky řešení .....	56
4.4    Závěr metodiky řešení .....	57
<b>5. Aplikace na příklady .....</b>	<b>58</b>

5.1	Verze v1 .....	58
5.1.1	Geometrie a materiálové vlastnosti.....	59
5.1.2	Výsledky analytického výpočtu [15] .....	59
5.1.3	MKP výpočet .....	60
5.1.4	Výsledky MKP výpočtu.....	60
5.1.5	Závěry .....	61
5.2	Verze v2 .....	63
5.2.1	Geometrie a materiálové vlastnosti.....	63
5.2.2	Výsledky analytického výpočtu .....	64
5.2.3	MKP výpočet .....	65
5.2.4	Výsledky MKP výpočtu.....	65
5.2.5	Závěry .....	65
5.3	Verze v3 .....	68
5.3.1	Geometrie a materiálové vlastnosti.....	68
5.3.2	Výsledky analytického výpočtu a výsledky dle [13] .....	68
5.3.3	MKP výpočet .....	69
5.3.4	Výsledky MKP výpočtu.....	69
5.3.5	Závěry .....	69
5.4	Závěry .....	72
<b>6.</b>	<b>Optimalizace.....</b>	<b>73</b>
6.1	Zadání úlohy .....	73
6.2	Postup řešení .....	74
6.3	Výsledky optimalizace.....	75
6.3.1	Výsledky pro CF1 – statická analýza: zatíženo silou .....	76
6.3.2	Výsledky pro CF2 – Modální analýza .....	78
6.3.3	Výsledky pro CF3 - statická analýza: vliv změny teploty .....	80
6.3.4	Výsledky pro CF4 – kombinace předchozích cílových funkcí.....	82
6.4	Závěry .....	83
<b>7.</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>84</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>85</b>
	<b>Seznam obrázků.....</b>	<b>86</b>
	<b>Seznam tabulek .....</b>	<b>88</b>
	<b>Seznam příloh.....</b>	<b>90</b>



## Seznam použitých symbolů

symbol	jednotka	název
$a$	[m]	rozměr optimalizovaného vřetene (viz Obr. 43)
$A$	[m <sup>2</sup> ]	plocha průřezu nosníku
$\tilde{A}$	[m <sup>2</sup> ]	plocha průřezu nosníku
$[A]$	[Nm <sup>-1</sup> ]	matice axiální tuhosti
$b$	[m]	rozměr optimalizovaného vřetene (viz Obr. 43)
$[B]$	[N]	matice vazební tuhosti
$[B]$	[m <sup>-1</sup> ]	operátor z uzlových posuvů na deformace
$c$	[m]	rozměr optimalizovaného vřetene (viz Obr. 43)
$[C_{t_i}]$	[m <sup>2</sup> N <sup>-1</sup> ]	matice poddajnosti i-té laminy v souřadném systému t1, t2, t3
$[\bar{C}], \bar{C}_{11}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	3 D matice tuhosti v x, y, z souřadném systému
$d_e$	[m]	vnější průměr nosníku
$d_i$	[m]	vnitřní průměr nosníku
$d_1$	[m]	vnitřní průměr optimalizovaného vřetene
$d_3$	[m]	vnější průměr optimalizovaného vřetene
$D$	[Nm <sup>2</sup> ]	ohybová tuhost
$\mathbf{d}$	[m]	vektor posuvu uzlového bodu
$[D]$	[Nm]	matice ohybové tuhosti
$E$	[Nm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti
$E_L$	[Nm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti v podélném směru
$E_T$	[Nm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti v příčném směru
$E_{1,2,3}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti ve směru 1, 2, 3
$(EJ)_{eq}$	[Nm <sup>2</sup> ]	ekvivalentní ohybová tuhost
$(EJ)_{eq\_ABD}$	[Nm <sup>2</sup> ]	ekvivalentní ohybová tuhost dle ABD metody
$(EJ)_{eq\_C}$	[Nm <sup>2</sup> ]	ekvivalentní ohybová tuhost dle metody minima doplňkové energie
$(EJ)_{eq\_E}$	[Nm <sup>2</sup> ]	ekvivalentní ohybová tuhost dle metody minima deformační energie
$(EJ)_{eq\_Tim}$	[Nm <sup>2</sup> ]	ekvivalentní ohybová tuhost dle Tim. metody

$E_{eq\_ABD}$	$[Nm^{-2}]$	ekvivalentní modul pružnosti dle ABD metody
$[E]$	$[Nm^{-2}]$	matice tuhosti
$[E_{t_i}]$	$[Nm^{-2}]$	matice tuhosti i-té vrstvy v $t_1, t_2, t_3$
$[E_{x_i}]$	$[Nm^{-2}]$	matice tuhosti i-té vrstvy v $x_1, x_2, x_3$
$[E_v]$	$[Nm^{-2}]$	matice tuhosti v $v_1, v_2, v_3$
$f$	$[Hz]$	frekvence
$F$	$[N]$	síla
$\mathbf{f}$	$[N]$	vektor ekvivalentních uzlových sil
$\mathbf{f}_c$	$[N]$	vektor sil v uzlových bodech elementu
$G$	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti ve smyku
$G_{LT}$	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti ve smyku ve směrech L, T
$G_{eq}$	$[Nm^{-2}]$	ekvivalentní smykový modul
$G_{12}, G_{23}, G_{13}$	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti ve smyku ve směrech 1, 2; 2, 3; 1, 3
$h_s$	$[m]$	tloušťka sublaminátu
$[H]$	$[Nm]$	matice příčné smykové tuhosti
$J$	$[m^4]$	kvadratický moment průřezu vzhledem k neutrální ose průřezu nosníku
$[J]$	$[m^2 N^{-1}]$	matice poddajnosti laminátu
$\mathbf{k}$	$[m^{-1}]$	vektor křivosti střední vrstvy laminátu
$[k]$	$[Nm^{-1}]$	matice tuhosti elementu
$[K]$	$[Nm^{-1}]$	matice tuhosti struktury
$L$	$[m]$	délka nosníku
$M$	$[Nm]$	moment
$\mathbf{M}$	$[N]$	vektor momentů vztažených na jednotku délky
$\mathbf{N}$	$[Nm^{-1}]$	vektor výslednic sil na jednotku délky
$[N]$	$[-]$	matice tvarových funkcí
$\overline{Q}_{ij}$	$[Nm^{-2}]$	matice mimoosé tuhosti
$\overline{Q}_{ij}^*$	$[Nm^{-2}]$	interlaminární matice mimoosé tuhosti
$r_e$	$[m]$	vnější poloměr nosníku
$r_i$	$[m]$	vnitřní poloměr nosníku
$r_i$	$[m]$	střední poloměr nosníku v i-té vrstvě
$\overline{S}_{ij}$	$[m^2 N^{-1}]$	matice poddajnosti
$t$	$[m]$	tloušťka laminátu

$t_i$	[m]	tloušťka i-té laminy
$t_k$	[m]	tloušťka k-té laminy
$t_1, t_2, t_3$	[-]	osy transformovaného souřadného systému laminy
$t_1, t_2, t_3$	[m]	tloušťky vrstev optimalizovaného vřetene
$[T_{\sigma}^{tv}]$	[-]	transformační matice napětí z $v_1, v_2, v_3$ do $t_1, t_2, t_3$
$[T_{\epsilon}^{vt}]$	[-]	transformační matice deformace z $t_1, t_2, t_3$ do $v_1, v_2, v_3$
$U$	[N]	smyková tuhost
$\mathbf{u}$	[m]	vektor posuvů uvnitř elementu
$v_F$	[m]	průhyb v místě zatížení silou F
$V$	[m <sup>3</sup> ]	objem elementu
$\mathbf{V}$	[Nm]	vektor posouvajících sil
$w$	[m]	průhyb nosníku
$w_{ABD}$	[m]	průhyb v místě zatížení metodou ABD matic
$w_c$	[m]	průhyb v místě zatížení metodou doplňkové energie
$w_E$	[m]	průhyb v místě zatížení metodou deformační energie
$w_F$	[m]	průhyb v místě zatížení silou F
$w_{Tim}$	[m]	průhyb v místě zatížení Timošenkovou metodou
$x$	[m]	podélná souřadnice vetknutého nosníku
$x_{max}$	[m]	maximální hodnota prodloužení, resp. zkrácení trubky vlivem změny teploty
$x_1, x_2, x_3$	[-]	osy hlavního souřadného systému
$y$	[m]	příčná souřadnice vetknutého nosníku
$y_{min}$	[m]	minimální hodnota průhybu ve směru osy y
$z_k$	[m]	souřadnice k-té laminy
$\bar{z}_k$	[m]	souřadnice střední roviny k-té laminy
$\alpha_i$	[°]	úhel natočení vláken v i-té vrstvě
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	[m]	úhel natočení vrstev optimalizovaného vřetene
$\boldsymbol{\gamma}$	[-]	vektor zkosů
$\delta$	[mN <sup>-1</sup> ]	poddajnost
$\delta_{400mm}, \delta_{600mm}$	[mN <sup>-1</sup> ]	poddajnost pro nosník délky 400 mm, resp. 600 mm
$\boldsymbol{\delta}$	[m]	vektor posuvů uzlových bodů elementu

$\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$	[-]	vektor poměrné deformace střední roviny laminátu
$\boldsymbol{\varepsilon}$	[-]	vektor deformace v bodě uvnitř elementu
$\kappa$	[-]	korekční součinitel smykové tuhosti
$v_1, v_2, v_3$	[-]	hlavní souřadný systém ortotropie
$\nu_{LT}, \nu_{TL}$	[-]	Poissonovo číslo
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$	[-]	Poissonovo číslo
$\boldsymbol{\sigma}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	vektor napětí
$\varphi_F$	[rad]	natočení v místě zatížení silou F

# 1. Úvod

Výrobní stroje, hnací hřídele a jiné komponenty průmyslových výrobků se tradičně konstruují a vyrábí z oceli, litiny, duralu a dalších konvenčních materiálů. Trendem se ale v poslední době stává snaha firem o náhradu těchto materiálů takzvanými nekonvenčními materiály. Obr. 1 uvádí příklad aplikace kompozitních materiálů v automobilovém průmyslu, konkrétně hnací hřídel automobilu. Obr. 2 pak uvádí využití ve výrobních strojích, konkrétně hybridní vřeteno kompozit - kov.

K vývoji v oblasti výrobních strojů uvádí [11] následující: „Vývoj v oblasti nosných soustav strojů je motivován zvyšováním konkurenceschopnosti výrobních strojů, tedy zlepšením užitných vlastností stroje a technologie: zvýšením přesnosti, zvýšením produktivity, zlepšením jakosti povrchu obrobku, snížením energetické náročnosti a zvýšením hospodárnosti. To vše při zajištění přiměřených ekonomických parametrů posuzovaných výrobní cenou stroje a provozními náklady. Z hlediska nosných soustav a jejich komponent lze tyto trendy charakterizovat následujícími požadavky:

- snižovat hmotnosti pohyblivých struktur,
- zvyšovat statickou a dynamickou tuhost stroje,
- zlepšovat tvarovou a rozměrovou přesnost nosné struktury stroje,
- snižovat výrobní cenu a čas výroby.“



*Obr. 1 Hnací hřídel automobilu z kompozitu [17]*



Obr. 2 Hybridní vřeteno kompozit – kov [11]

Jde tedy o snahu získat komponenty s nižší měrnou hmotností při zachování vysoké statické tuhosti a zvyšování modálních vlastností. Stroj by pak mohl být lehčí a zároveň stejně nebo více funkční, než pokud by byl vyroben z tradičních materiálů.

Diplomová práce na téma *Výpočtové metody pro analýzu tenkostěnných i silnostěnných kompozitních nosníků* se zabývá analýzou mezikruhových nosníků tvořených kompozitními laminami a jejím cílem je zhodnocení použitých metod výpočtu a snaha o jejich verifikaci.

Pro analýzu vybraných mezikruhových nosníků budou použity již známé a využívané analytické metody (metoda ABD matic, Timošenkova nosníku, minima deformační energie a minima doplňkové energie), metoda konečných prvků pro objemové těleso, metoda konečných prvků pro skořepinu a bude proveden experiment. Výsledkem by pak měla být predikce oblasti platnosti použitých metod. Ty pak budou použity na další vybrané nosníky. Následně bude za pomoci těchto vybraných metod provedena optimalizace kompozitní skladby a geometrie vybrané komponenty.

## 2. Teoretická část

Cílem této kapitoly je udělat přehled metod, které mohou být použity pro výpočet nosníku namáhaného na ohyb. Některé z metod budou vybrány a aplikovány v kapitole *Metodika řešení*, kde budou určovány oblasti jejich platnosti.

Analyzované nosníky budou tvořeny jednotlivými vrstvami sestávajícími se z výztuhy (vlákno) a výplně (matrice). Pevnost vrstev je dána především výztuhou, zatímco výplň slouží především jako pojivo a ochrana před vnějšími vlivy. Problémem při výpočtu kompozitních nosníků je oproti výpočtu nosníků z homogenních materiálů možnost vyššího vlivu příčného smyku. Smyková pevnost je totiž závislá na vlastnostech matrice. U homogenního materiálu lze vliv smyku zanedbat už tehdy, kdy je poměr délky ku průměru nosníku roven deseti. U kompozitu je ale vliv smyku podstatný i pokud je tento poměr roven 20 až 30. Proto je potřeba do výpočtu často zahrnout i prvky matice tuhosti související s příčnou smykovou tuhostí.

### 2.1 Základní rovnice pro výpočet kompozitů – laminátů

V této diplomové práci budou analyzovány kompozitní nosníky tvořené několika vrstvami jednosměrových kompozitních lamin. Takové materiály jsou ortotropní, tzn. že se jedná o materiál, u kterého existují tři navzájem kolmé roviny symetrie elastických vlastností.

Základními rovnicemi pro výpočty kompozitů jsou rovnice klasické laminační teorie, jejíž odvození je součástí většiny prací, které se zabývají problematikou mechaniky kompozitních materiálů, viz. např. [1]; [2]; [5]; [6]. Vztah daný rovnicí (2.1) je dán odvozením klasické laminační teorie. Dává do souvislosti síly a momenty působící v průřezu laminátu a posouvající síly s poměrnými deformacemi, křivostmi a zkosy.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \dots \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^0 \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$
$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{H}][\boldsymbol{\gamma}]$$

Matice  $[\mathbf{A}]$  je matice tahové tuhosti a dává do souvislosti složky sil vektoru  $\mathbf{N}$  s poměrnými deformacemi ve střední rovině  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ . Matice  $[\mathbf{B}]$  je matice vazební tuhosti a dává do souvislosti složky momentů vektoru  $\mathbf{M}$  a složky vektoru poměrné deformace ve střední rovině  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$  a zároveň složky vektoru vnitřních sil  $\mathbf{N}$  se složkami vektoru křivosti plochy  $\mathbf{k}$ . Matice  $[\mathbf{D}]$  je matice ohybové tuhosti a dává do souvislosti složky momentů

vektoru  $\mathbf{M}$  se složkami vektoru křivosti plochy  $\mathbf{k}$ . Matice  $[\mathbf{H}]$  je příčná smyková tuhost a dává do souvislosti složky vektoru posouvajících sil  $\mathbf{V}$  se složkami vektoru zkosů  $\boldsymbol{\gamma}$ .

Matice  $[\mathbf{H}]$  je používána pouze pokud platí Reissner-Mindlinova teorie skořepin (Reissner-Mindlinova teorie skořepin, rovněž FOST – First order shear theory, je založena na předpokladu, že hmotná normála, která byla před deformací přímá a kolmá na střednici, zůstává po deformaci přímá. [16]). Matice  $[\mathbf{H}]$  není používána v klasické laminační teorii, protože při splnění předpokladů klasické laminační teorie, především předpokladu (Kirchhoffovy podmínky), že kolmice ke středové ploše zůstanou kolmé i po deformaci, jsou obě složky vektoru zkosů nulové.

Vyjádření uvedených matic tuhostí viz. rovnice (2.2), (2.3), (2.4) a (2.5).

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k t_k ; i, j = 1, 2, 6 \quad (2.2)$$

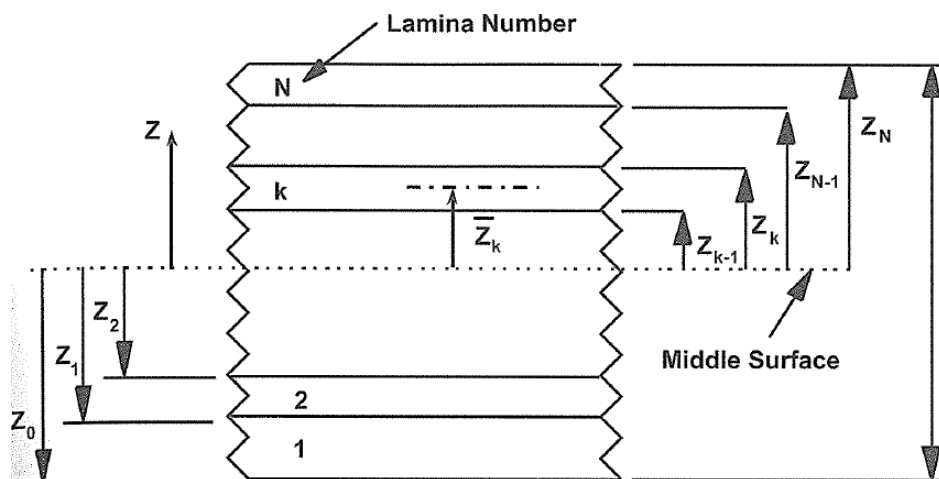
$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k t_k \bar{z}_k ; i, j = 1, 2, 6 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij})_k \left( t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) ; i, j = 1, 2, 6 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N (\overline{\mathbf{Q}}_{ij}^*)_k \left[ t_k - \frac{4}{t^2} \left( t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right] ; i, j = 4, 5 \quad (2.5)$$

$\overline{\mathbf{Q}}_{ij}$  je matice mimoosé tuhosti a  $\overline{\mathbf{Q}}_{ij}^*$  je intralaminární matice mimoosé tuhosti.

Obr. 3 znázorňuje geometrické souřadnice laminátu. Proměnná  $z_k$  je souřadnicí k-té laminy,  $\bar{z}_k$  je souřadnicí střední roviny k-té laminy,  $t$  je tloušťka laminátu a  $t_k$  je tloušťka k-té laminy.

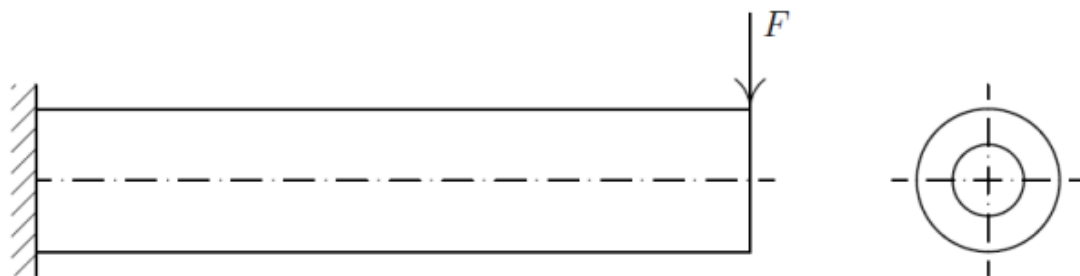


Obr. 3 Geometrie laminátu tvořeného  $N$  vrstvami [6]



## 2.1 Metody pro výpočet laminátové trubky mezikruhového průřezu

Pro teoretický popis jednotlivých metod bude využíván modelový příklad vetknutého mezikruhového nosníku, který je na volném konci zatížen osamělou silou  $F$ . Obr. 4 zobrazuje daný nosník. Dále jsou uvedeny analytické metody a MKP přístupy pro stanovení tuhosti, příp. průhybu nosníku mezikruhového průřezu zatíženého silou.



Obr. 4 Vetknutý nosník – modelový příklad nosníku namáhaného na ohyb a příčný smyk pro rychlý návrh kompozitní skladby a geometrie výztuže [9]

### 2.1.1 Analytické metody

Analýza nosníků pomocí analytických metod bude provedena pomocí čtyř metod, a to metoda dle ABD matic, Timošenkova nosníku, minima deformační energie a minima doplňkové energie. Poslední dvě uvedené dávají hranice (Hashin-Shtrikmanovy meze), ve kterých by se přesná hodnota měla nacházet. První uvedená metoda by se měla přesné hodnotě blížit, zatímco Timošenkova metoda, která se od ABD matic liší tím, že uvažuje smyk, bude v případech se zanedbatelným vlivem smyku téměř nebo zcela shodná s ABD maticemi oproti případům, kdy bude smyk zanedbatelný a tuhost, resp. průhyb se dle Timošenka tedy bude od metody dle ABD matic výrazněji lišit. Bude potřeba porovnání analytických metod s experimenty a MKP výpočty, aby byla možnost zhodnotit použitelnost na různé typy nosníků.

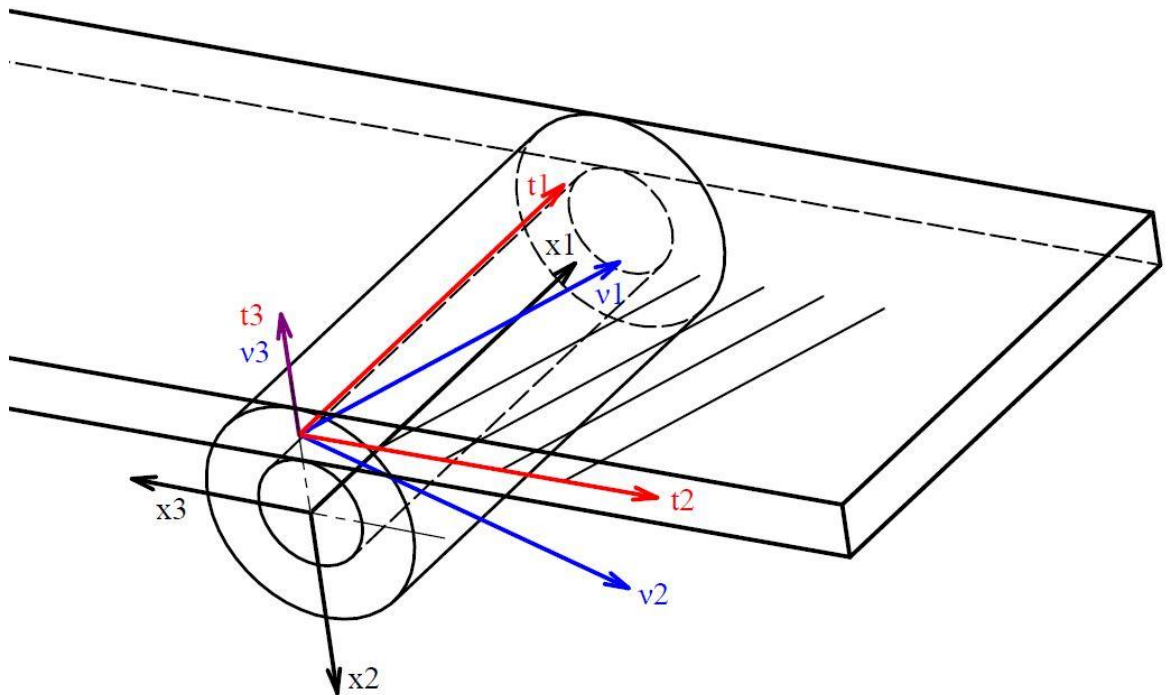
Průhyb nosníku znázorněného na Obr. 4 lze vyjádřit rovnicí (2.6), která je převzata z [9]. První a druhý člen závorky vyjadřuje průhyb vzniklý ohybem, zatímco třetí člen vyjadřuje průhyb od příčného smyku. Příčný smyk uvažuje Timošenkova metoda, ostatní zde zmíněné metody jej neuvažují. Průhyb v působišti síly je dán rovnicí (2.7). Vztahy (2.6) a (2.7) platí pro izotropní nosník. Snahou je tedy najít takové „tuhosti“ kompozitových trubek, aby bylo možné tyto rovnice použít i pro ně.

$$w = F \left( \frac{Lx^2}{2EJ} - \frac{x^3}{6EJ} + \frac{x}{\kappa GA} \right) \quad (2.6)$$

$$w = F \left( \frac{L^3}{3EJ} + \frac{L}{\kappa GA} \right) \quad (2.7)$$

### 2.1.1.1 Transformace matice tuhosti

Pro výpočet bude potřeba transformovat matici tuhosti ze souřadného systému laminy  $[E_v]$  do souřadného systému  $t$  na matici tuhosti  $[E_t]$ . Pro účely odhadu  $(EJ)_{eq}$  se pracuje jen s členem  $E_{11}$ , který je v  $[E_t]$  stejný jako v  $[E_x]$ , a proto není potřeba další transformace matice tuhosti do souřadného systému nosníku  $x_1, x_2, x_3$ . Obr. 5 znázorňuje souřadné systémy laminy, transformovaný a nosníku.



Obr. 5 Souřadné systémy [2]

Následující rovnice pro transformaci matice tuhosti jsou převzaty z [2].

Rovnice (2.8) uvádí vztah pro matici  $[E_t]$  v souřadném systému  $t$  i-té vrstvy. Dále jsou rozepsány jednotlivé matice, viz rovnice (2.9), (2.10) a (2.11).

$$[E_{t,i}] = [T_{\sigma}^{tv}] \cdot [E_v] \cdot [T_{\epsilon}^{vt}] \quad (2.8)$$

$$[T_{\sigma}^{tv}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & -2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sin^2 \alpha_i & \cos^2 \alpha_i & 2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \sin \alpha_i & -\cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cos^2 \alpha_i - \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[\mathbf{E}_v] = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT}E_T & 0 \\ \nu_{TL}E_L & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{T}_\varepsilon^{vt}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sin^2 \alpha_i & \cos^2 \alpha_i & -\cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ -2\cos \alpha_i \sin \alpha_i & 2\cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cos^2 \alpha_i - \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.1.1.2 Výpočet pomocí ABD matic

Následující rovnice pro výpočet pomocí ABD matic jsou převzaty z [5].

Efektivní modul se vypočítá dle rovnice (2.12), kde matice  $[\mathbf{A}]$  je dána vztahem (2.13) a pro  $M$  platí rovnice (2.14).

$$E_{eq\_ABD} = \frac{M}{t \cdot (A(3,3) \cdot A(2,2) - A(2,3) \cdot A(2,3))} \quad (2.12)$$

$$[\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{E}_{t_i}] \cdot t_i \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} M &= A(1,1) \cdot A(2,2) \cdot A(3,3) + 2 \cdot A(1,2) \cdot A(1,3) \\ &\quad \cdot A(2,3) - A(1,1) \cdot A(2,3) \cdot A(2,3) \\ &\quad - A(2,2) \cdot A(1,3) \cdot A(1,3) - A(3,3) \\ &\quad \cdot A(1,2) \cdot A(1,2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pro porovnávání jednotlivých metod bude potřeba ekvivalentní ohybová tuhost dle ABD metody  $(EJ)_{eq\_ABD}$ , pro kterou platí rovnice (2.15). Kvadratický moment průřezu  $J$  je dán rovnicí (2.16). Průhybová čára nosníku dle metody ABD matic pak bude z rovnice (2.6) vyjádřena rovnicí (2.17).

$$(EJ)_{eq\_ABD} = E_{eq\_ABD} \cdot J \quad (2.15)$$

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot (d_e^4 - d_i^4) \quad (2.16)$$

$$w_{ABD} = F \left( \frac{Lx^2}{2(EJ)_{eq\_ABD}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{eq\_ABD}} \right) \quad (2.17)$$

### 2.1.1.3 Výpočet Timošenkovou metodou

Následující rovnice pro výpočet Timošenkovou metodou jsou převzaty z [5] a [7].

Pro ohyb Timošenkova nosníku platí rovnice (2.18) analogická k (2.6), kde ohybová tuhost  $D$  je dána vztahem (2.19) a smyková tuhost je dána rovnicí (2.20).

$$w_{\text{Tim}} = F \left( \frac{Lx^2}{2D} - \frac{x^3}{6D} + \frac{x}{\kappa GA} \right) \quad (2.18)$$

$$D = (EJ)_{\text{eq\_Tim}} = E_{\text{eq\_ABD}} \cdot J \quad (2.19)$$

$$\kappa GA = \kappa G_{\text{eq}} \tilde{A} \quad (2.20)$$

Ekvivalentní smykový modul  $G_{\text{eq}}$  udává vztah (2.21) a plochu průřezu komponenty pro mezikruhový profil vztah (2.35).

$$G_{\text{eq}} = \frac{M}{t \cdot (A(1,1) \cdot A(2,2) - A(1,2) \cdot A(1,2))} \quad (2.21)$$

$$\tilde{A} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_e^2 - d_i^2) \quad (2.22)$$

Korekční součinitel rozložení smykového napětí je pro jednoznačnost volen  $\kappa=1$ . (Ve skutečnosti je jeho velikost závislá na tvaru průřezu a skladbě laminátu a jeho určení je velmi komplikované a často nepřesné.) [9]

#### 2.1.1.4 Výpočet pomocí minima doplňkové energie

Následující rovnice pro výpočet pomocí minima doplňkové energie jsou převzaty z [9].

Pro výpočet pomocí minima doplňkové energie je potřeba vyjádření matice poddajnosti pro jednotlivé laminy nosníku v souřadném systému  $t$ ; viz rovnice (2.23). Ekvivalentní ohybová tuhost daná metodou pomocí minima doplňkové energie je vyjádřena vztahem (2.24). Průhybová čára nosníku dle metody minima doplňkové energie pak bude z (2.6) vyjádřena rovnicí (2.25).

$$[\mathbf{C}_{t_i}] = [\mathbf{E}_{t_i}]^{-1} \quad (2.23)$$

$$(EJ)_{\text{eq\_C}} = \sum_{i=1}^n \frac{\pi \cdot r_i^3 \cdot t_i}{C_{t_i}(1,1)} \quad (2.24)$$

$$w_C = F \left( \frac{Lx^2}{2(EJ)_{\text{eq\_C}}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{\text{eq\_C}}} \right) \quad (2.25)$$

#### 2.1.1.5 Výpočet pomocí minima deformační energie

Následující rovnice pro výpočet pomocí minima deformační energie jsou převzaty z [9].

Ekvivalentní ohybová tuhost daná metodou pomocí minima deformační energie vychází z matic tuhosti v jednotlivých vrstvách; viz rovnice (2.26). Průhybová čára

nosníku dle metody minima deformační energie pak bude z (2.6) vyjádřena rovnicí (2.27).

$$(EJ)_{eq_E} = \sum_{i=1}^n \pi \cdot r_i^3 \cdot t_i \cdot E_{t_i}(1,1) \quad (2.26)$$

$$w_E = F \left( \frac{Lx^2}{2(EJ)_{eq_E}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{eq_E}} \right) \quad (2.27)$$

#### 2.1.1.6 Zhodnocení analytických metod

Z uvedených rovnic vyplývá, že metoda ABD matic a Timošenkova metoda by měly dávat podobné výsledky pro případy s malým vlivem smyku, protože ohybová tuhost je u obou metod shodná. Významnější přínos Timošenkovy metody je tedy pro nosníky s nízkým poměrem délky ku průměru, kdy je smyková tuhost výrazně nižší. Metoda ABD matic pro dlouhý štíhlý nosník bude pravděpodobně dávat výsledky blízké experimentálním datům.

Metoda minima deformační energie, která vychází z matic tuhosti v jednotlivých vrstvách, by měla představovat nejtuzší model nosníku, a tedy i nejnižší číselné hodnoty průhybu. Metoda minima doplňkové energie, která vychází z matic poddajnosti v jednotlivých vrstvách, by měla představovat nejpoddajnější model nosníku, a tedy i nejvyšší číselné hodnoty průhybu.

V [15] jsou uvedeny číselné hodnoty tuhostí a průhybu v místě zatížení deseti modelových nosníků shodných s nosníkem na Obr. 4 a rovněž grafy průhybových čar.

Aby mohly být výše uvedené metody použity, je potřeba znát parametry jednotlivých vrstev: tloušťka, orientace vláken, materiálové konstanty  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  a  $\rho$ .

## 2.1.2 MKP přístupy

### 2.1.2.1 Obecné základy k výpočtu kompozitu pomocí MKP

Obecné základy k výpočtům kompozitů MKP jsou převzaty z [1].

MKP spočívá v následujících krocích:

- 1) Je vytvořena síť představující strukturu.
- 2) Je určena matice tuhosti  $[k]$  každého elementu.
- 3) Matice tuhosti  $[K]$  struktury je určena z matic tuhosti jednotlivých elementů.

4) Zatížení struktury je nahrazeno ekvivalentním systémem sil tak, že síly působí na uzlové body.

5) Posuv uzlového bodu  $\mathbf{d}$  je dán rovnicí (2.28), kde  $\mathbf{f}$  je vektor sil reprezentující působící ekvivalentní uzlové síly.

$$[\mathbf{K}]\mathbf{d}=\mathbf{f} \quad (2.28)$$

6) Vektor  $\mathbf{d}$  je dál dělen do vektorů  $\boldsymbol{\delta}$ , které reprezentují posuv uzlových bodů konkrétního elementu.

7) Posuvy v bodě uvnitř elementu jsou pak dány rovnicí (2.29), kde  $\mathbf{u}$  je vektor posuvů a  $[\mathbf{N}]$  je matice tvarových funkcí.

$$\mathbf{u}=[\mathbf{N}]\boldsymbol{\delta} \quad (2.29)$$

8) Deformace v bodě uvnitř elementu jsou dány vztahem (2.30), kde  $[\mathbf{B}]$  je operátor z uzlových posuvů  $\boldsymbol{\delta}$  na deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\mathbf{B}]\boldsymbol{\delta} \quad (2.30)$$

9) Napětí v bodě uvnitř elementu jsou dána vztahem (2.31), kde  $[\mathbf{E}]$  je matice tuhosti charakterizující materiál.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{E}]\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Matice tuhosti elementu z bodu 2) je definována vztahem (2.32). Síly působící v uzlových bodech elementu jsou dány vektorem  $\mathbf{f}_c$ . Pokud  $V$  je objem elementu, pak rovněž pro  $[\mathbf{k}]$  platí vztah (2.33).

$$[\mathbf{k}]\boldsymbol{\delta}=\mathbf{f}_c \quad (2.32)$$

$$[\mathbf{k}] = \int_{(V)} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (2.33)$$

Kroky uvedené výše se používají jak pro izotropní, tak pro kompozitní materiály. Rozdíl je v matici tuhosti  $[\mathbf{E}]$ , jejíž určení je pro ortotropní materiály složitější.

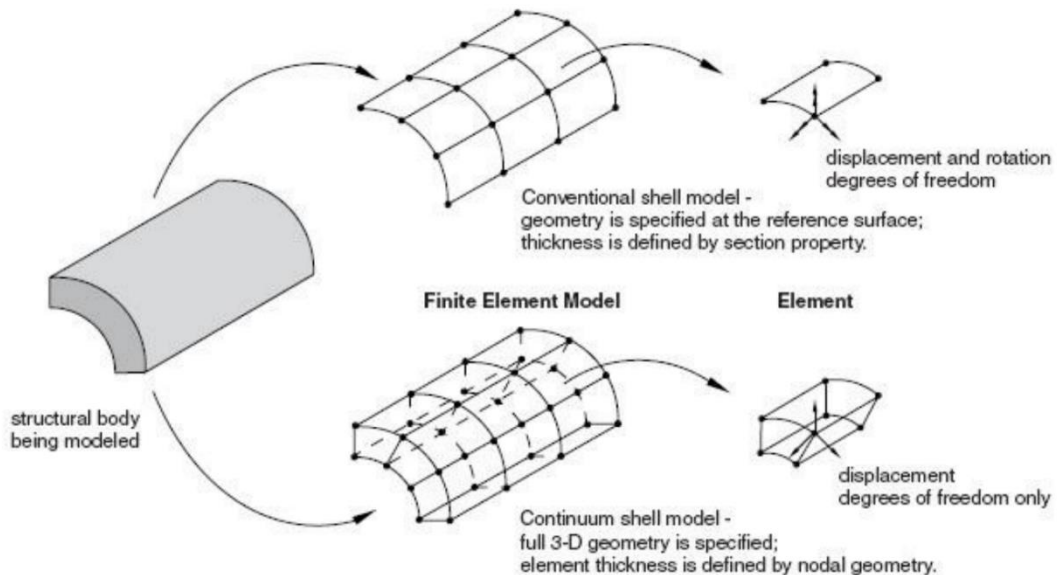
#### 2.1.2.2 Metody tvorby modelu

Možné přístupy pro modelování ilustruje Obr. 6. Strukturu z kompozitu je vhodné modelovat jako konvenční skořepinu (conventional shell model) nebo objemovou skořepinu (continuum shell model).

V případě konvenční skořepiny je geometrie dána referenční plochou, která může být střednicí, vnější či vnitřní plochou struktury, nebo ekvidistantní plochou v nějaké určité vzdálenosti např. od vnější plochy. Tloušťka skořepiny a parametry materiálu je potřeba rovněž vhodně přiřadit takové skořepině.

V případě objemové skořepiny je geometrie přímo vymodelována shodně se strukturou. To je výhodné zejména při definici kontaktů. Tloušťka je dána geometrií, jednotlivé tloušťky vrstev jsou dány poměrově. Materiálové parametry je potřeba opět vhodně přiřadit. Umožňují přesnější řešení vlivu příčného smyku.

V obou případech se nemodelují jednotlivá vlákna a matrice, ve které jsou umístěny, ale přiřazují se vlastnosti jednotlivým vrstvám.



Obr. 6 Přístupy pro modelování MKP [10]

Při podrobnějším zjednodušení do nosníkových prvků je vyžadován správný odhad hodnot ohybové tuhosti  $EJ$  a smykové tuhosti  $GA$ . Výpočet těchto materiálových parametrů je ale cílem této práce, a proto nejsou nosníkové prvky v této práci uvažovány.

Parametry materiálu, které je potřeba znát jsou [10]:

- pro prostorovou napjatost:  $E_1; E_2; E_3; \nu_{12}; \nu_{13}; \nu_{23}; G_{12}; G_{23}; G_{13}$
- pro rovinnou napjatost:  $E_1; E_2; \nu_{12}; G_{12}; (G_{23}; G_{13} - \text{není nutné zadávat, ale protože jsou mimo rovinu laminy nízké hodnoty smykových modulů, zadávají se pro prevenci nesmyslných deformací MKP modelu})$

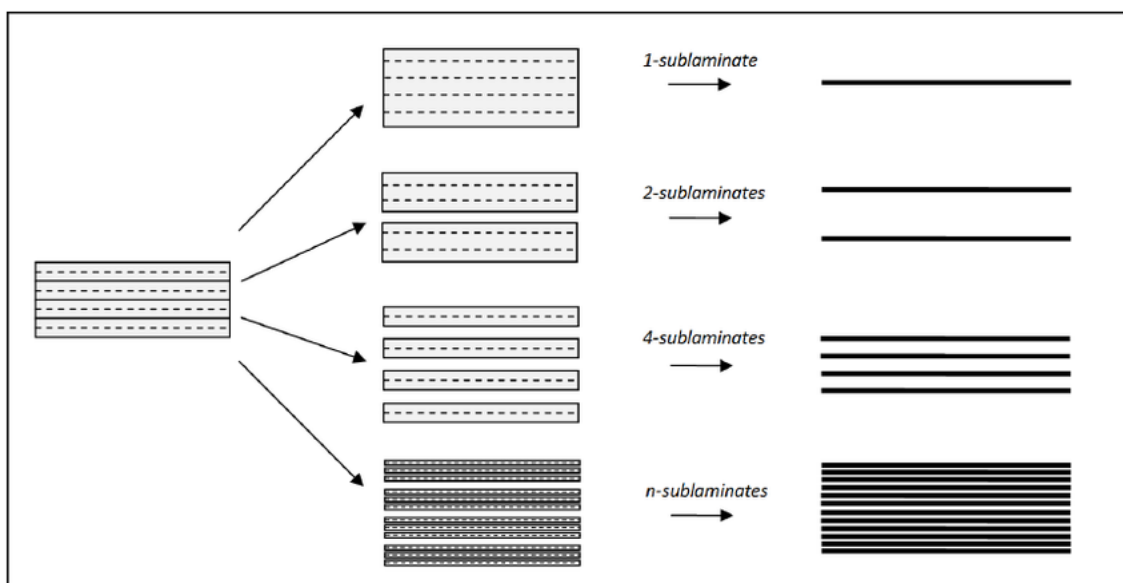
V [10] je uvedeno ke stavbě modelů a vyhodnocování výsledků následující: „Tvorba kompozitního modelu je časově náročnější oproti modelu z izotropního materiálu shodné geometrie. U kompozitního materiálu je nutnost definovat materiálovou orientaci, popř. je potřeba transformace materiálových parametrů. Skořepina tvořená vrstvenými elementy zvyšuje počet integračních bodů po tloušťce skořepiny a tím i počet dat ve srovnání s nevrstvenými prvky. S nárůstem dat pak souvisí i obtíže s vyhodnocováním výsledků.“

## Sublamináty

Následující teorie týkající se stavby modelu pomocí sublaminátů je převzata z [1].

Laminát z více vrstev může být analyzován jako skořepina, nebo pomocí objemových elementů. U skořepinových prvků je potřeba rozhodnout, zda je splněna podmínka poměru tloušťky ku délce tak, aby byla stále dodržena dostatečná přesnost výpočtu. U objemových modelů je pak problém s vystižením příčné smykové napjatosti, přičemž podrobnější model se stává výpočetně náročnějším.

Těmto problémům lze předejít rozdělením laminátu do sublaminátů. Obr. 7 toto rozdělení názorně zobrazuje. Každá vrstva může být shodných vlastností, např. ortotropní. Tloušťka každého elementu pak bude shodná s tloušťkou sublaminátu. Matice tuhosti  $[E]$  sublaminátu je dána vztahem (2.34), kde se dávají do vztahu průměrná napětí a průměrné deformace po tloušťce sublaminátu. Vhodnější je zápis pomocí matice poddajnosti  $[J]$  rovnicí (2.35), kde  $[E]=[J]^{-1}$ .



Obr. 7 Dělení laminátu do sublaminátů

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\epsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$



$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\epsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}]} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Pro případ rovinné napjatosti lze odvodit pro některé prvky matice poddajnosti prvního, druhého a šestého řádku, resp. sloupce, vztah (2.36), kde jsou vyjádřeny pomocí matice tahové tuhosti  $[\mathbf{A}]$  a tloušťky sublaminátu  $h_s$ .

Prvky  $J_{31}$ ;  $J_{32}$  a  $J_{36}$  jsou vyjádřeny pomocí matice ohybové tuhosti  $[\bar{\mathbf{Q}}]$  v souřadném systému  $x, y, z$ , prvků matice poddajnosti  $\bar{S}_{ij}$  v souřadném systému  $x, y, z$ , souřadnice  $z_k$  (viz Obr. 3) a matice tahové tuhosti  $[\mathbf{A}]$  rovnicí (2.37) jako suma přes jednotlivé vrstvy sublaminátu o počtu  $K_s$  vrstev. Prvky  $J_{41}$ ;  $J_{42}$ ,  $J_{46}$ ,  $J_{51}$ ;  $J_{52}$  a  $J_{56}$  jsou nulové.

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{26} \\ J_{61} & J_{62} & J_{66} \end{bmatrix} = h_s [\mathbf{A}]^{-1} \quad (2.36)$$

$$[J_{31} \quad J_{32} \quad J_{36}] = \sum_{k=1}^{K_s} (\bar{S}_{13} \quad \bar{S}_{23} \quad \bar{S}_{36})_k (z_k - z_{k-1}) [\bar{\mathbf{Q}}]_k [\mathbf{A}]^{-1} \quad (2.37)$$

Ze stavu normálové napjatosti sublaminátu jsou dále odvozeny rovnice (2.38) a (2.39).  $\bar{C}_{ij}$  jsou prvky matice tuhosti v souřadném systému  $x, y, z$ . Rovněž je také ze stavu normálové napjatosti odvozena nulovost prvků  $J_{43}$  a  $J_{53}$ .

$$\begin{bmatrix} J_{13} \\ J_{23} \\ J_{63} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{26} \\ J_{61} & J_{62} & J_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{h_s} \sum_{k=1}^{K_s} \left( \begin{Bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{63} \end{Bmatrix}_k \frac{z_k - z_{k-1}}{(\bar{C}_{33})_k} \right) \quad (2.38)$$

$$J_{33} = \frac{1}{h_s} \sum_{k=1}^{K_s} \left( \frac{z_k - z_{k-1}}{(\bar{C}_{33})_k} \right) - [J_{31} \quad J_{32} \quad J_{36}] \frac{1}{h_s} \sum_{k=1}^{K_s} \left( \begin{Bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{63} \end{Bmatrix}_k \frac{z_k - z_{k-1}}{(\bar{C}_{33})_k} \right) \quad (2.39)$$

Prvky čtvrtého a pátého sloupce matice poddajnosti  $[\mathbf{J}]$  jsou odvozeny ze stavu smykového zatížení sublaminátu. Pro prvky  $J_{44}$ ,  $J_{45}$ ,  $J_{54}$  a  $J_{55}$  platí rovnice (2.40), ostatní prvky jsou nulové.

$$\begin{bmatrix} J_{44} & J_{45} \\ J_{54} & J_{55} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_s} \sum_{k=1}^{K_s} \left( (z_k - z_{k-1}) \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix}_k \right) \quad (2.40)$$

Kombinací výše uvedených rovnic je získáno zjednodušení pro vztah (2.35) v podobě rovnice (2.41), kde  $[\mathbf{J}]$  je matice poddajnosti. Platí, že matice tuhosti je  $[\mathbf{E}] = [\mathbf{J}]^{-1}$ . Matice

tuhosti i matice poddajnosti jsou symetrické. Pro rovinnou napjatost platí vztah deformace-napětí uveden v rovnici (2.42).

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\epsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 & J_{36} \\ 0 & 0 & 0 & J_{44} & J_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & J_{55} & 0 \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix}}_{[J]=[E]^{-1}} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{26} \\ J_{61} & J_{62} & J_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

### 2.1.2.3 Prvky v programu Ansys ®

V následujících oddílech jsou podle [14] popsány typy prvků pro kompozitní modely používané při výpočtu v programu Ansys ®. Nastavení analýzy jako takové už bude vždy souviset s konkrétním zadáním úlohy, a proto není třeba je zde dále rozvíjet.

Elementy pro modelování kompozitu:

- skořepinové elementy (shell 181, shell 281)
- objemové elementy (solid 185, solid 186)
- elementy objemových skořepin (solshl 190)
- nosníky (beam 188, beam 189)

Pozn.: Nosníkové elementy nejsou pro účely diplomové práce vhodné, a proto zde dále nebudou popisovány.

### Skořepinové elementy

Skořepinové prvky jsou vhodné pro modelování tenkostěnných případně i silnostěnných struktur. Dávají dobré deformační výsledky v ohybu, a přitom nejsou výpočetně tolik náročné.

#### **SHELL 181 & SHELL 281**

Obr. 8 znázorňuje čtyřuzlový skořepinový prvek SHELL181, polohu uzlů a souřadnicový systém prvku. Obr. 9 znázorňuje osmiuzlový skořepinový prvek SHELL281, polohu uzlů a souřadnicový systém prvku. Uzly definují oba typy prvků, prvek SHELL 281 má navíc uzly uprostřed stěn, které nesmí být z prvku odebrány. Oba prvky mají šest stupňů volnosti v každém uzlu (posuvy ve směrech x, y a z a rotace okolo

souřadnicových os x, y a z). Jako výplňové prvky při generování sítě mohou být používány prvky trojúhelníkového tvaru.

Využití pro vrstvené aplikace pro modelování kompozitních skořepin nebo sendvičové konstrukce. Přesnost modelování kompozitních skořepin je zajištěna Reissner - Mindlinovou teorií skořepin. Oba prvky nezanedbávají příčné smykové deformace, příčná smyková tuhost elementu je matice 2x2, viz rovnice (2.43). Předpokládaná smyková deformace dle Batheho a Dvorkina pro čtyřuzlový skořepinový prvek je používána ke zmírnění „zamykání smyku“.

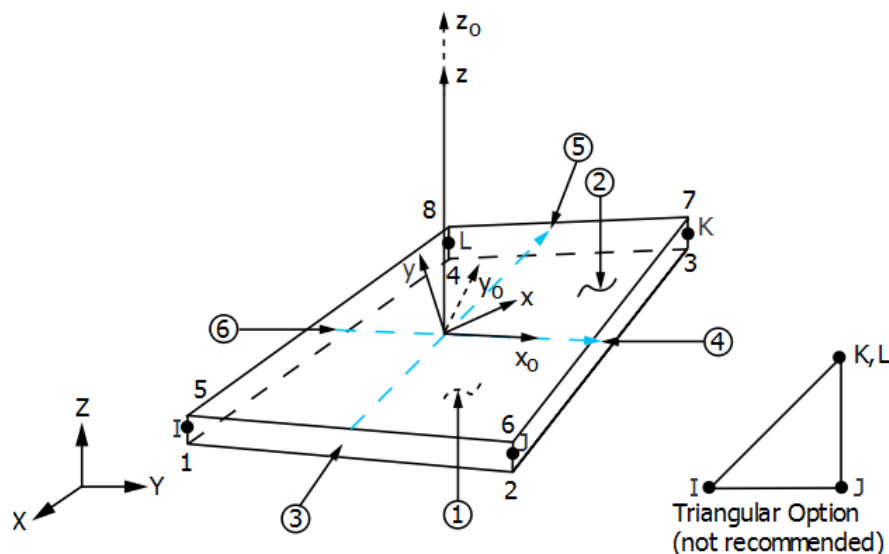
$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ \text{sym} & E_{22} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Pro skořepinu z izotropního materiálu je výchozí matice příčné smykové tuhosti elementu dána rovnicí (2.44). V případě ortotropního materiálu je počítána přes energetickou bilanci.

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} kGh & 0 \\ 0 & kGh \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

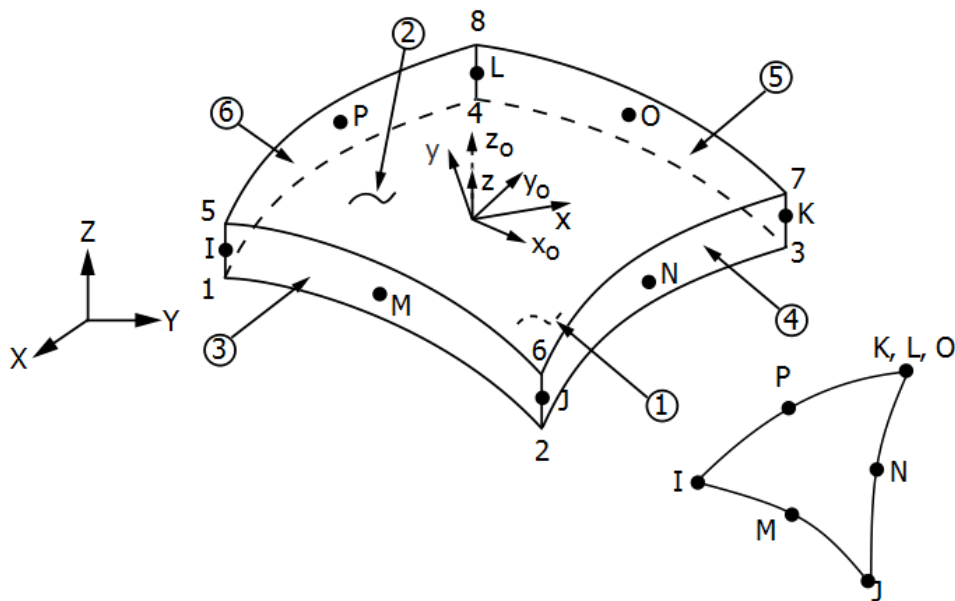
Korekční součinitel příčného smyku k je vypočten jednou na začátku analýzy pro jednotlivé sekce. Pro matici  $[\mathbf{E}]$  v rovnici (2.44) je korekční součinitel příčného smyku  $k=5/6$ , G je smykový modul a h je tloušťka skořepiny.

Lze definovat jednovrstvý prvek jeho tloušťku a další parametry. Rovněž může být prvek vícevrstvý, kde lze specifikovat tloušťku, materiál, orientaci a počet integračních bodů po tloušťce vrstvy.



$x_0$  = Element x-axis if ESYS is not provided.  
 $x$  = Element x-axis if ESYS is provided.

Obr. 8 Shell 181 [14]



$x_0$  = Element x-axis if element orientation (ESYS) is not provided.  
 $x$  = Element x-axis if element orientation is provided.

Obr. 9 Shell 281 [14]

## Objemové elementy

Objemové prvky jsou určeny k modelování silnostěnných struktur. Mimoto umožňují lepší začlenění dílců do modelových sestav. Aby objemové prvky fungovaly pro výpočet struktur z ortotropních materiálů, muselo by jich být po tloušťce velmi mnoho, a proto se pro takovéto výpočty nepoužívají. Kvadratický objemový prvek (SOLID 186) nabízí přesnější řešení, ale je výpočetně náročnější.

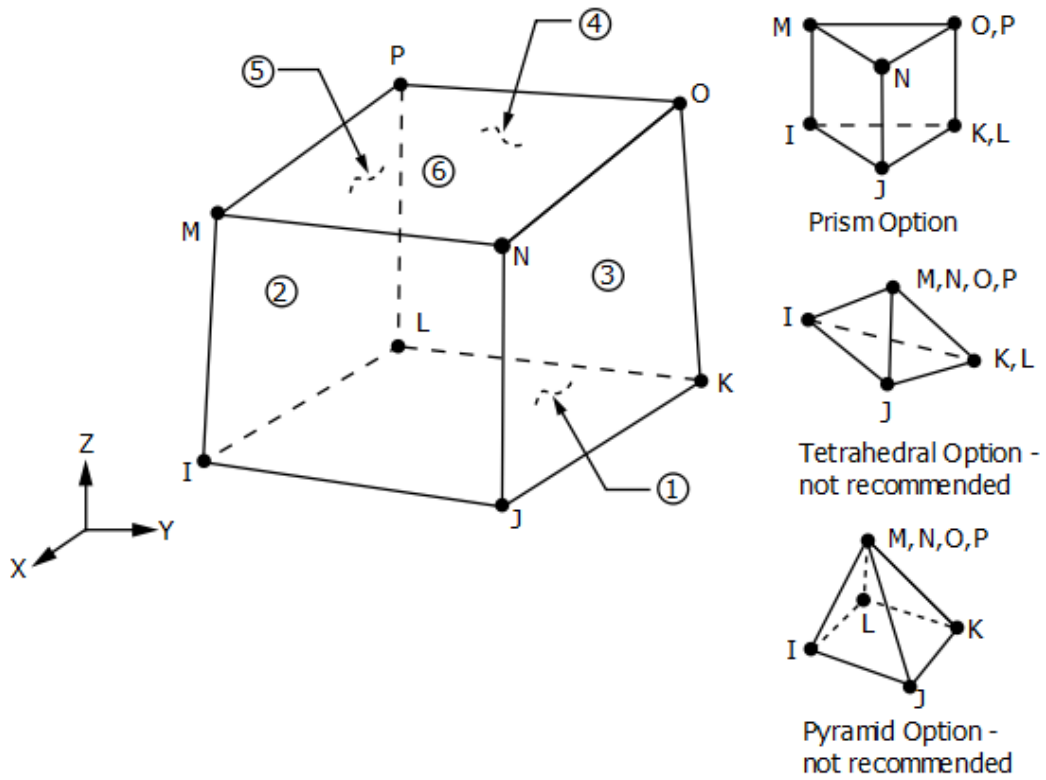
### SOLID 185 & SOLID 186

Obr. 10 znázorňuje osmiuzlový objemový prvek SOLID 185 polohu uzlů a souřadnicový systém prvku. Obr. 12 znázorňuje dvacetuzlový objemový prvek SOLID 186 polohu uzlů a souřadnicový systém prvku. SOLID 186 je prvek vyššího řádu než SOLID 185. Oba jsou definovány uzly, které mají tři stupně volnosti, a to posuvy uzlů ve směru  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Jsou k dispozici jako homogenní nebo vrstvené objemové prvky.

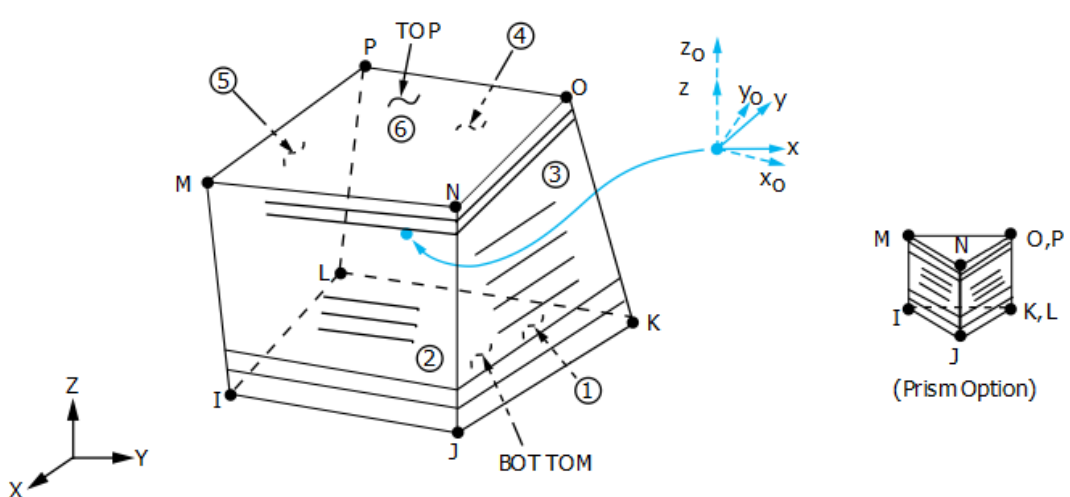
Vrstvený objemový prvek se používá pro silnostěnné skořepiny, nebo objemová tělesa. Lze definovat parametry kompozitu, jako jsou tloušťka, materiálová orientace a počet integračních bodů po tloušťce vrstvy. K dispozici je rovněž ve formě hranolu. Obr. 11 znázorňuje vrstvený objemový prvek pro SOLID 185. Obr. 13 znázorňuje vrstvený objemový prvek pro SOLID 186.

Vstupní data zahrnují anizotropní materiálové vlastnosti. Materiálová orientace odpovídá orientaci vrstev, která je založena na orientaci souřadného systému prvku.

Souřadnicový systém prvku se řídí orientací skořepiny, kde osa z je kolmá k rovině skořepiny. Uspořádání uzlů je takové, že roviny I-J-K-L a M-N-O-P jsou vnitřní (bottom) a vnější (top) roviny. Změna orientace uvnitř roviny vrstvy je možná příkazy stejně jako u skořepinových elementů.



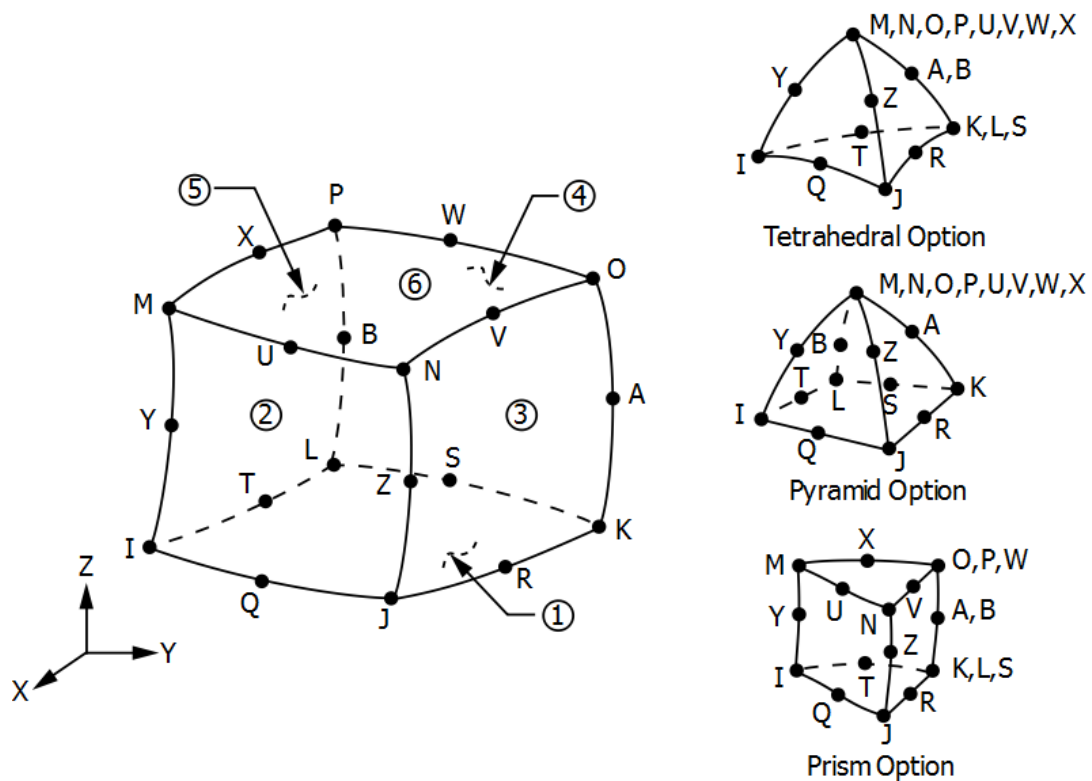
Obr. 10 Solid 185 [14]



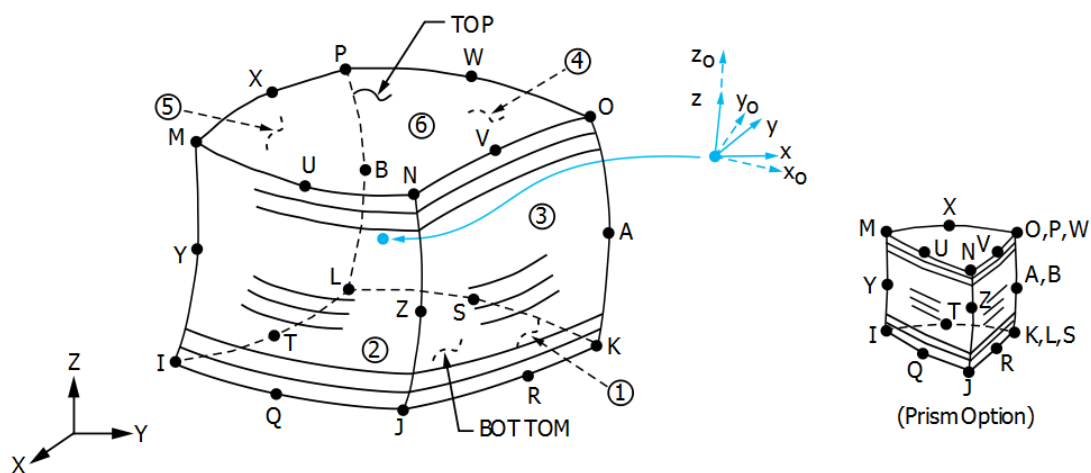
$x_0$  = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.

Obr. 11 Vrstvený objemový prvek Solid 185 [14]



Obr. 12 Solid 186 [14]



$x_0$  = Element x-axis if ESYS is not supplied.

$x$  = Element x-axis if ESYS is supplied.

Obr. 13 Vrstvený objemový prvek Solid 186 [14]

## Elementy objemových skořepin

Elementy objemových skořepin (solid-shell elementy) jsou používány někde na hranici mezi skořepinovými a objemovými elementy, tzn. že jsou používány jak pro tenkostěnné, tak i silnostěnné konstrukce. Dostatečně tenké elementy objemových

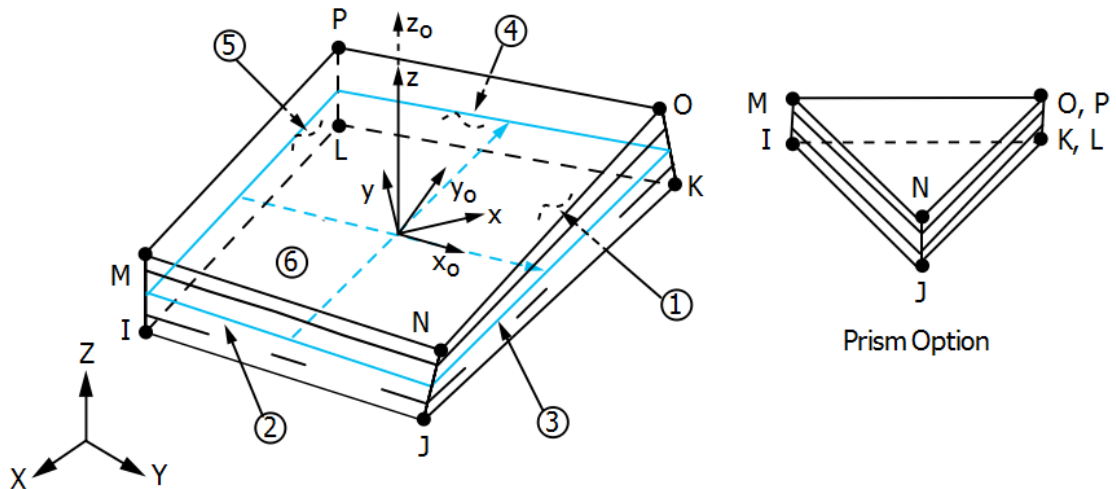
skořepin netrpí „zamykáním smyku“, a jsou schopné dát dobré výsledky pro rovinná napětí a rovinné deformace.

### **SOLSH 190**

Obr. 14 znázorňuje osmiuzlový objemový prvek SOLSH 190, polohu uzlů a souřadnicový systém prvku. Je definován uzly, které mají tři stupně volnosti, a to posuvy uzlů ve směru x, y a z. Rovněž je k dispozici v podobě hranolu jako vyplňující prvek při generování sítě.

Lze definovat parametry kompozitu, jako jsou tloušťka, materiálová orientace a počet integračních bodů po tloušťce vrstvy. Program přepočítává zadané tloušťky vrstev a škáluje je tak, aby byly v souladu s tloušťkou mezi uzly. Souřadnicový systém prvku se řídí orientací skořepiny, kde osa z je kolmá k rovině skořepiny. Uspořádání uzlů je takové, že roviny I-J-K-L a M-N-O-P jsou vnitřní (bottom) a vnější (top) roviny. Změna orientace uvnitř roviny vrstvy je možná příkazy stejně jako u skořepinových elementů.

Využití pro vrstvené aplikace pro modelování kompozitních skořepin nebo sendvičové konstrukce. Přesnost modelování kompozitních skořepin je zajištěna Reissner - Mindlinovou teorií skořepin.



$x_0$  = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.

Obr. 14 Solsh190

## 2.2 Shrnutí

V předcházejících kapitolách byly popsány metody, kterými se tato práce bude zabývat. Jsou to takové metody k určení tuhosti trubky, resp. průhybu zatížené trubky, jejichž výsledky jsou často odlišné.

Pro analytické metody se pro většinu trubek předpokládá, že metody minima deformační energie a minima doplňkové energie dávají hranice, ve kterých by se výsledná hodnota tuhosti, resp. průhybu, měla pohybovat a metody dle ABD matic a Timošenkova by měly být výsledkům ještě blíže. To jsou ovšem předpoklady, které platí pouze v některých případech. Jindy nejsou vůbec splněny a experimentem pak může být zjištěn zcela odlišný výsledek. Přesnost těchto analytických metod tedy není pro různé geometrické a materiálové parametry struktury shodná.

Pro výpočty MKP zde byly představeny jednotlivé způsoby, kterými se kompozitní trubka může vymodelovat. To je důležité pro chování trubky, pokud bude zatížena a bude zkoumána její tuhost, resp. průhybová čára při daném zatížení. Ověření správnosti modelu je možné experimentálně.

Je vhodné zvolit více typů geometrií (délka trubky, střední průměr, tloušťka stěny), popř. různé materiálové vlastnosti trubek, a aplikovat na ně představené metody pro zjištění jejich tuhostí. Následně porovnat odlišnosti výsledků pro jednotlivé úlohy. Výsledkem by pak mohla být jistá pravidla, která by určovala vhodnost použití metod pro dostatečně přesné určení tuhosti dané trubky.



### 3. Cíle práce

V této práci budou analyzovány mezikruhové nosníky, tenkostěnné i silnostěnné. Budou použity analytické metody a metody dle MKP, jejichž hodnoty tuhosti, resp. průhybu budou porovnány s experimenty.

Pro výpočet pomocí analytických metod bude vytvořen kód programu Matlab®. Ten bude sloužit k určení tuhosti trubky, případně průhybu při zatížení vetknutého nosníku osamělou silou či třibodovým ohybem. Tento kód bude modifikací kódu vytvořeného k bakalářské práci [15]. Vstupními parametry budou geometrické i materiálové charakteristiky a velikost zatěžující síly.

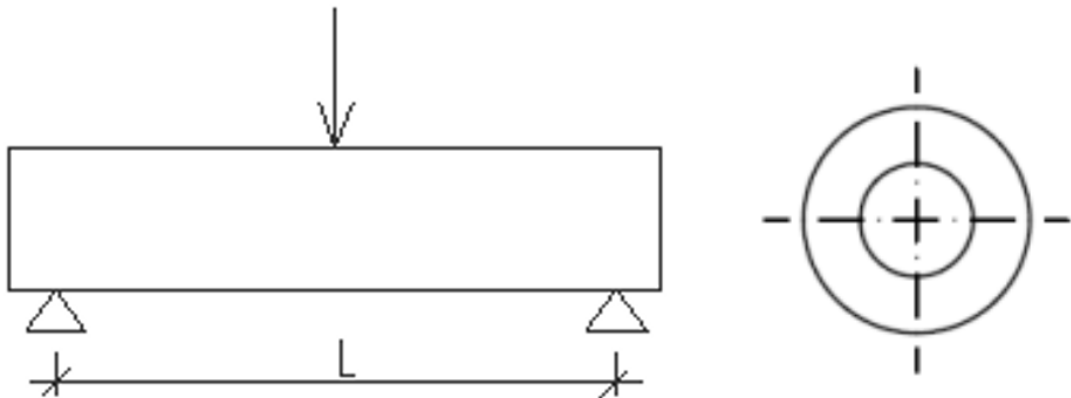
Nástrojem pro výpočet dle MKP bude program Ansys®. Geometrie a definice materiálu budou zadávány tak, jak je popsáno v teoretické části této práce. Rovněž tak volba vhodné sítě. Samotné zatížení a okrajové podmínky budou aplikovány dle konkrétního zadání analýzy.

Cílem práce je najít oblasti platnosti výpočtových metod. Ty pak budou aplikovány na příklady ke zhodnocení možností výpočtů použitými metodami.

Pomocí výpočtových metod pak bude provedena optimalizace kompozitní skladby a geometrie vybrané komponenty.

## 4. Metodika řešení

Jak bylo popsáno v předchozích kapitolách, je zde snaha o validaci výpočtových metod. Z tohoto důvodu byl proveden experiment – třibodový ohyb aplikován na 2 rozdílných roztečích podpor trubek. Pro to, aby bylo možné přímo vyhodnotit průhyb měřený během experimentu, byl vytvořen výpočtový model laminátového nosníku mezikruhového průřezu zatíženého třibodovým ohybem (viz Obr. 15), který bude použit pro vyhodnocení tuhosti a průhybu v působišti síly.



Obr. 15 Nosník zatížený třibodovým ohybem

Průhyb nosníku v působišti síly znázorněného na Obr. 15 lze vyjádřit rovnicí (4.1). První člen vyjadřuje průhyb vzniklý ohybem, zatímco druhý člen vyjadřuje průhyb od příčného smyku. [10]

$$w_F = \frac{FL^3}{48EJ} + \frac{FL}{4\kappa GA} \quad (4.1)$$

Vyhodnocením experimentu by měly být zjištěny tuhosti měřených trubek. Rovněž byly pro analýzu těchto trubek, známých geometrických a materiálových parametrů, provedeny výpočty dle MKP a analytické. Porovnáním výsledků by měly být nalezeny oblasti platnosti použitých metod.

Metody, které jsou popsány v teoretické části této práce, budou použity pro analýzu daného tenkostěnného i silnostěnného nosníku. Rovněž byl proveden experiment, který bude vyhodnocen a jehož výsledky by měly být ověřením pro výpočtové přístupy. Výstupem experimentu a MKP metod pro vyhodnocení budou hodnoty průhybu horního a spodního vlákna. Ze způsobu provedení experimentu, resp. MKP výpočtu lze považovat data pořízená pro horní vlákno pouze jako data orientační.

## 4.1 Silnostěnný nosník

Silnostěnný nosník bude v této práci uváděn také označením *trubka 1*.

### 4.1.1 Geometrie a materiálové vlastnosti trubky

Tříbodovým ohybem byla zatížena trubka s následujícími parametry:

Vnitřní poloměr  $r_i = 7$  mm a vnější poloměr  $r_e = 18,5$  mm.

Jednotlivé vrstvy trubky jsou vyrobeny ze stejného materiálu, jehož vlastnosti potřebné pro výpočet jsou:

Modul pružnosti v podélném směru  $E_L = 151408$  MPa

Modul pružnosti v příčném směru  $E_T = 5840$  MPa

Modul pružnosti ve smyku  $G_{LT} = 4205$  MPa

Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)  $\nu_{LT} = 0,33$

Tab. 1 uvádí tloušťky jednotlivých vrstev a úhly natočení vláken v dané vrstvě.

Tab. 1 Trubka 1 – geometrie a materiálové parametry

Vrstva	IR	OR	tloušťka	orientace
	vrstvy	vrstvy	stěny	výztuže
	[mm]	[mm]	mm	°
1	7,00	7,87	0,87	43,87
2	7,87	8,65	0,78	43,33
3	8,65	9,76	1,11	43,09
4	9,76	10,75	0,99	42,40
5	10,75	11,65	0,90	42,34
6	11,65	12,48	0,83	41,52
7	12,48	13,28	0,80	43,48
8	13,28	14,21	0,93	42,97
9	14,21	15,11	0,90	44,91
10	15,11	15,93	0,82	42,84
11	15,93	16,73	0,80	44,36
12	16,73	17,52	0,78	45,76
13	17,52	18,50	0,98	44,21

pozn.: Každá vrstva návinnu +--+ , tzn. pokud je dána orientace výztuže  $43,87^\circ$ , pak se jedná o vrstvu  $[43,87; -43,87; -43,87; 43,87]$ .

Pro vyhodnocení jsou důležité číselné hodnoty kvadratického momentu průřezu vzhledem k neutrální ose průřezu  $J$  a plocha průřezu  $A$  pro *trubku 1*. Tab. 2 uvádí jejich hodnoty.

Tab. 2 Kvadratický moment průřezu  $J$  a plocha průřezu  $A$  trubky 1

$J$ [mm <sup>4</sup> ]	90112
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	9,21E+02

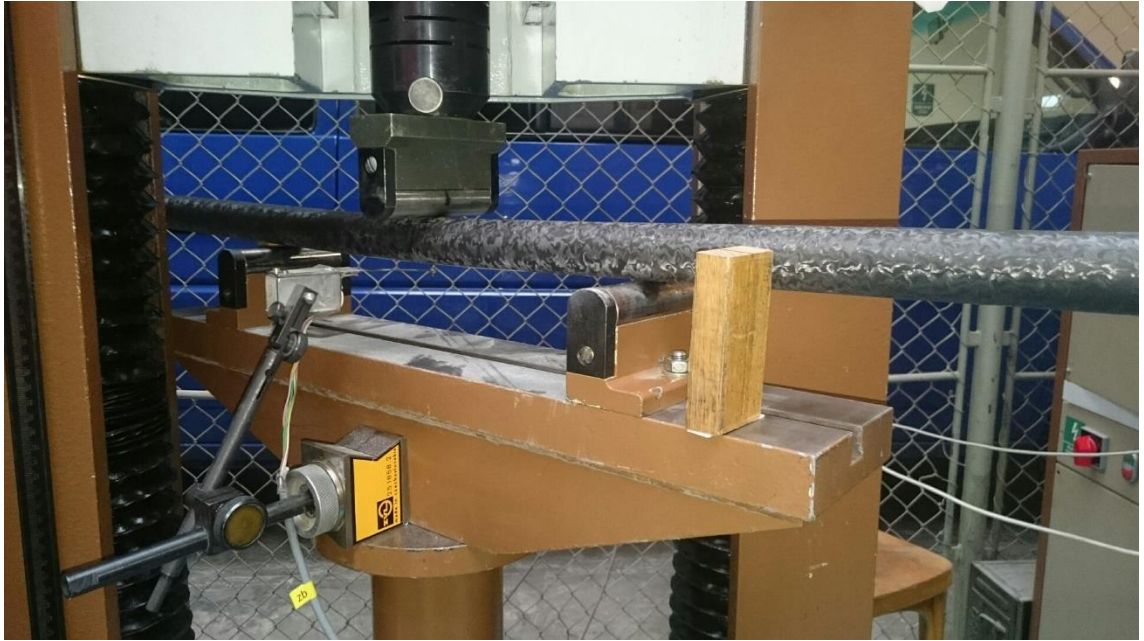
## 4.1.2 Experiment

### 4.1.2.1 Průběh měření

Měření bylo provedeno na 2 roztečích podpor trubek, a to 600 mm a 400 mm. Pro zatížení do 2000 N, resp. 4000 N byl měřen průhyb horního i spodního vlákna v místě působení síly. Výstupem experimentu byly hodnoty průhybu horního i spodního vlákna v působení síly pro daný časový okamžik a danou působící sílu. Tato data byla dále zpracována. Obr. 16 a Obr. 17 dokumentují experiment.



Obr. 16 Silnostěnný nosník – měření průhybu 1

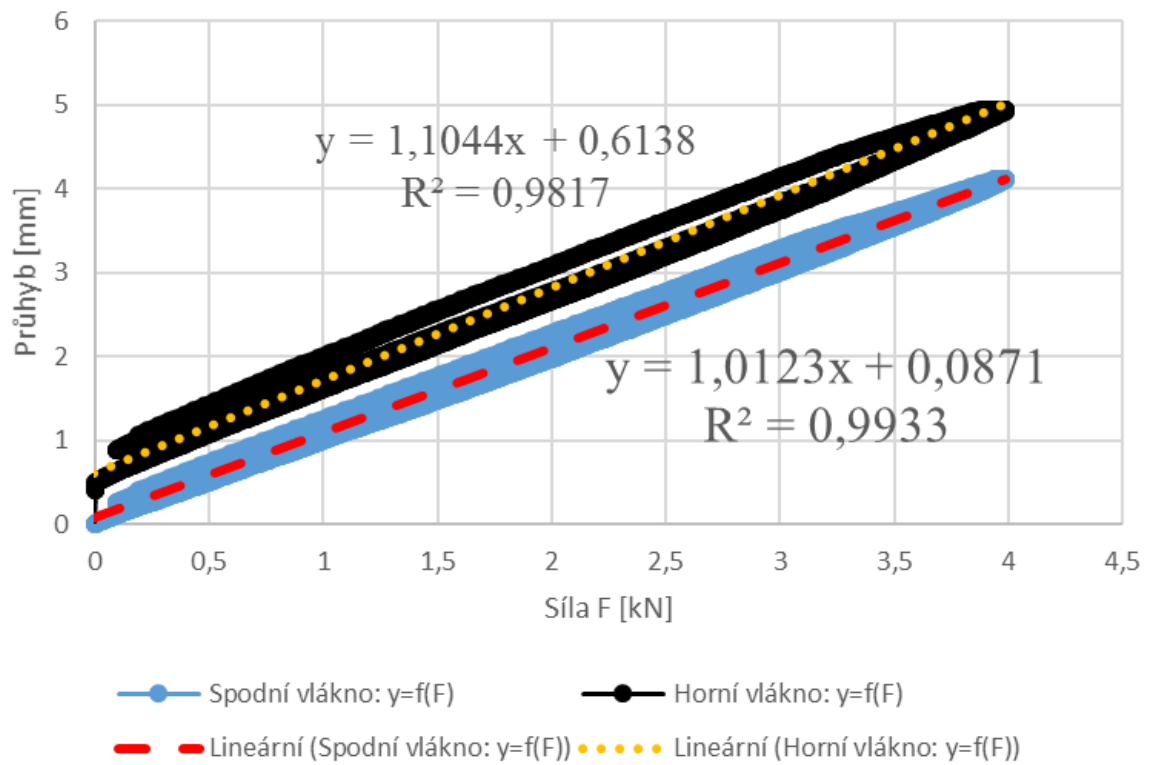


*Obr. 17 Silnostěnný nosník – měření průhybu 2*

#### 4.1.2.2 Vyhodnocení měření

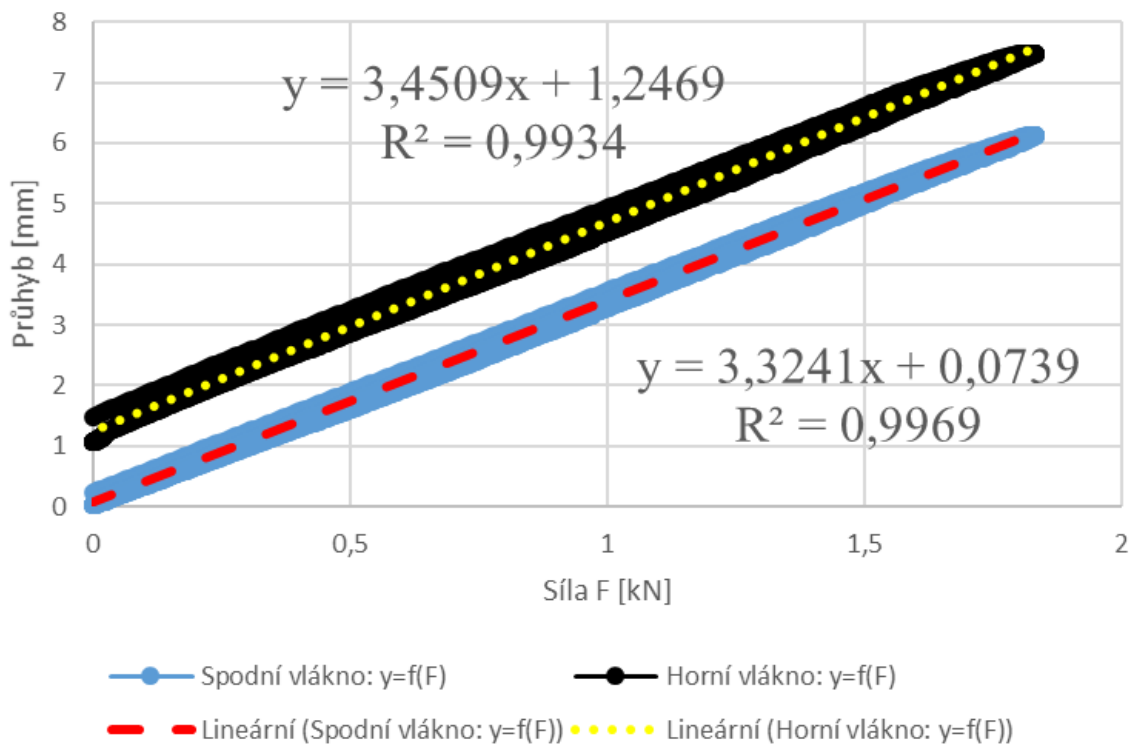
Pro vyhodnocení experimentu byla do grafu vynesena závislost velikosti průhybu na velikosti zatěžující síly. Tato závislost byla pomocí programu excel proložena lineární křivkou a pro ni stanovena rovnice pro průhyb v závislosti na proměnné síle. Koeficient (směrnice), který udává strmost křivky, pak dává poddajnost  $\delta$  daného nosníku. Níže jsou uvedeny grafy (Obr. 18 a Obr. 19) pro různé délky nosníku a místa měření spolu s rovnicemi lineárních křivek.

### Trubka 1 - 400 mm



Obr. 18 Trubka 1 -  $v_F=f(F)$  pro trubku délky 400 mm

### Trubka 1 - 600 mm



Obr. 19 Trubka 1 -  $v_F=f(F)$  pro trubku délky 400 mm

Pro další zpracování bude důležitá zmiňovaná poddajnost (koeficient, směrnice). Rovněž je ale zapotřebí si všimnout hodnoty průsečíku funkce s osou průhybu, kdy pro horní vlákno je průsečík výrazně vyšší než pro spodní vlákno. Tento rozdíl je dán způsobem provedení experimentu a nemá vliv na vyhodnocení, jež je závislé pouze na směrnici, strmosti křivky.

Pro průhyb v místě zatížení pro případ tříbodového ohybu, kdy je působiště síly v polovině délky nosníku, platí rovnice (4.2).

$$v_F = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot D} + \frac{F \cdot L}{4 \cdot U} \quad (4.2)$$

Poddajnost  $\delta$  je pak dána vztahem (4.3), kde  $L$  je délka nosníku,  $F$  je zatěžující síla,  $D$  je ohybová tuhost,  $U$  je smyková tuhost a  $\delta$  je poddajnost daná rovnicemi v grafech výše (Obr. 18 a Obr. 19).

$$\delta = \frac{v_F}{F} = \frac{L^3}{48 \cdot D} + \frac{L}{4 \cdot U} \quad (4.3)$$

Z (4.3) lze vypočítat hodnotu ohybové i smykové tuhosti, pokud do ní dosadíme naměřené hodnoty pro spodní vlákno pro obě délky nosníku. Soustava dvou rovnic pro obě délky nosníku o dvou neznámých  $D$  [Nmm<sup>2</sup>] a  $U$  [N], která je využita pro řešení, viz rovnice (4.4) a (4.5) níže.

$$\delta_{400\text{mm}} = \frac{400^3}{48 \cdot D} + \frac{400}{4 \cdot U} \quad (4.4)$$

$$\delta_{600\text{mm}} = \frac{600^3}{48 \cdot D} + \frac{600}{4 \cdot U} \quad (4.5)$$

Rovněž platí vztahy (4.6), kde  $J = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)$  je kvadratický moment průřezu vzhledem k neutrální ose průřezu nosníku, a (4.7), kde  $A = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2)$  je plocha průřezu nosníku a  $\kappa$  je korekční součinitel rozložení smykového napětí pro jednoznačnost volen roven 1, pomocí kterých jsou získány hodnoty modulu pružnosti v tahu  $E$  a modulu pružnosti ve smyku  $G$ .

$$D = EJ \quad (4.6)$$

$$U = \kappa GA \quad (4.7)$$

Geometrické hodnoty jsou dosazovány z parametrů daných výrobcem. Číselné hodnoty  $J$  a  $A$  jsou uvedeny v kapitole 4.1.1.

Hodnoty získané měřením jsou uvedeny v tabulkách níže. Tab. 3 uvádí hodnoty vypočtené dle rovnice (4.2). Tab. 4 uvádí hodnoty, které jsou získány z tytéž rovnice při zanedbání druhého členu, a tedy bez uvažování smyku.

Tab. 3 Tuhost trubky 1 – dána experimentem

Třibodový ohyb – vliv ohyb + smyk				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$\delta$ [mm/kN]	1,1044	3,4509	1,0123	3,3241
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,39E+09		1,38E+09	
U [N]	6,78E+05		2,03E+06	
E [Nmm <sup>-2</sup> ]	1,55E+04		1,54E+04	
G [Nmm <sup>-2</sup> ]	7,36E+02		2,20E+03	

Tab. 4 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána experimentem

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$\delta$ [mm/kN]	1,1044	3,4509	1,0123	3,3241
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,21E+09	1,30E+09	1,32E+09	1,35E+09
E [Nmm <sup>-2</sup> ]	13398	14471	14617	15023

Hodnota modulu pružnosti ve smyku pro horní vlákno velikosti 736MPa je velmi nízká, nýbrž hodnota smykového modelu vrstvy je cca 4000 MPa, a tedy hodnota je s největší pravděpodobností nesprávná. Pro spodní vlákno je hodnota smykové tuhosti 2200 MPa, a jedná se o přesnější výsledek, než výsledek pro horní vlákno. Pro další vyhodnocení a porovnání měření s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti D a hodnota smykové tuhosti U.

#### 4.1.3 Analytický výpočet

Analytický výpočet byl proveden pomocí programu Matlab® a to dle metod popsanych v teoretické části této práce. Kód programu je přílohou této práce (Příloha 1). K výpočtu tuhosti je zapotřebí pouze materiálových a geometrických vlastností uvedených v předcházejícím oddíle 4.1.1. Jsou tedy nezávislé na délce nosníku. Tab. 5 uvádí ohybovou a smykovou tuhost trubky dle jednotlivých analytických metod. Jejich hodnoty jsou nezávislé na délce nosníku.

Tab. 5 Tuhost trubky 1 – dána analytickými výpočty

	ABD metoda	Timošenko	min. dopl. e.	min. def. e.
EJ [Nmm <sup>2</sup> ]	1,54 E+09	1,54 E+09	9,06E+08	4,29E+09
$\kappa$ GA [Nmm <sup>2</sup> ]	-----	4,00 E+07	-----	-----



#### 4.1.4 MKP výpočet

*Trubka 1* bude analyzována MKP jako objemová skořepina, resp. skořepinové těleso. Bude ukázáno nastavení sítě, okrajových podmínek a zatížení pro konkrétní zadání této silnostěnné trubky. Pro porovnání s experimentem bude proveden výpočet dvou případů:

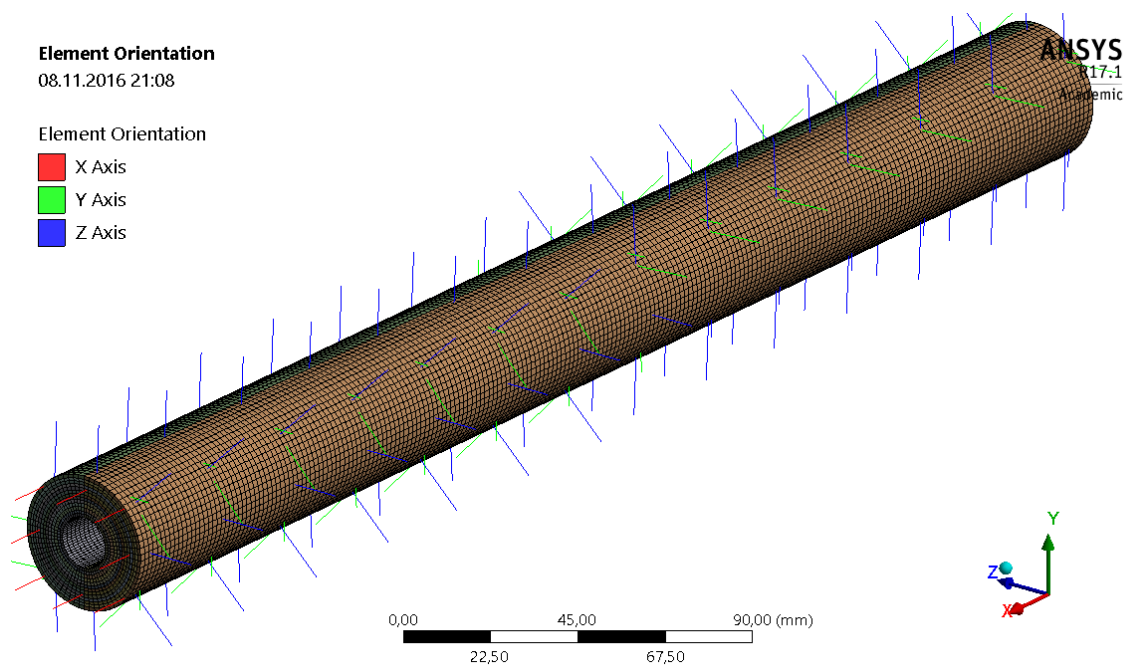
- tříbodový ohyb, který zanedbává příčné smykové složky pro přímé porovnání s experimentem, který byl vyhodnocen se zanedbáním smyku. Zde by měla být vyšší hodnota ohybové tuhosti  $D$ , než je skutečná hodnota.
- vetknutý nosník zatížený osamělou silou na volném konci a momentem, který zanedbává smykové složky, pro porovnání s experimentem, kdy jsou rovněž uvažovány ohyb i smyk.

##### 4.1.4.1 Objemová skořepina

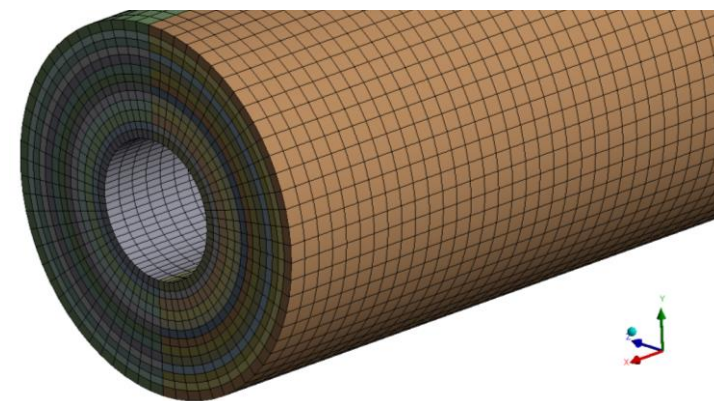
Daná trubka je složena ze 13 vrstev – skupin lamin a takto je rovněž jako objemová skořepina vymodelována. V každé skupině pak jsou nadefinovány čtyři vrstvy shodných tloušťek o úhlech natočení  $+-+.$

### Sít'

Sít' je vytvořena tak, aby byl pouze jeden element po tloušťce v každé vrstvě a jsou vytvořeny tzv. Solid Shell (SOLSH 190) elementy. Velikost elementu je 1,8 mm pro délku nosníku 400 mm a 2 mm pro délku nosníku 600 mm. Rovněž je nadefinována orientace elementů, aby model splňoval materiálové vlastnosti kompozitu.



*Obr. 20 Trubka 1 – síť, orientace elementů objemové skořepiny*



*Obr. 21 Trubka 1 – síť objemové skořepiny – detail*

## **Materiál**

Jednotlivým vrstvám jsou přiřazeny materiálové vlastnosti odpovídající dané trubce. Rovněž jsou nadefinovány tloušťka a úhel natočení jednotlivých lamin každé z vrstev jednotlivě.

## **Okrajové podmínky**

### Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)

Síla je aplikována do kruhu o průměru 5 mm uprostřed nosníku na vnější ploše trubky a to proto, že pak je nejvíce shodná s měřením. Okrajové podmínky jsou aplikovány

na vnější hrany na krajích trubky. Obr. 22 znázorňuje okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu pro případ ohybu se zanedbáním smyku. Obr. 23 pak uvádí detail působení síly.

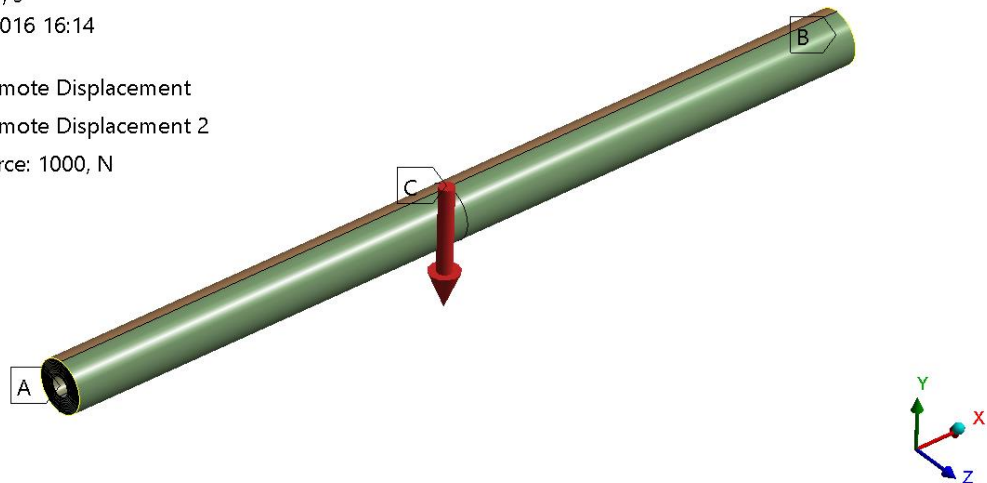
**D: Trubka\_1\_600mm**

nosnik\_1

Time: 1, s

19.11.2016 16:14

- A** Remote Displacement
- B** Remote Displacement 2
- C** Force: 1000, N



Obr. 22 Trubka 1 - okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu – pouze ohyb

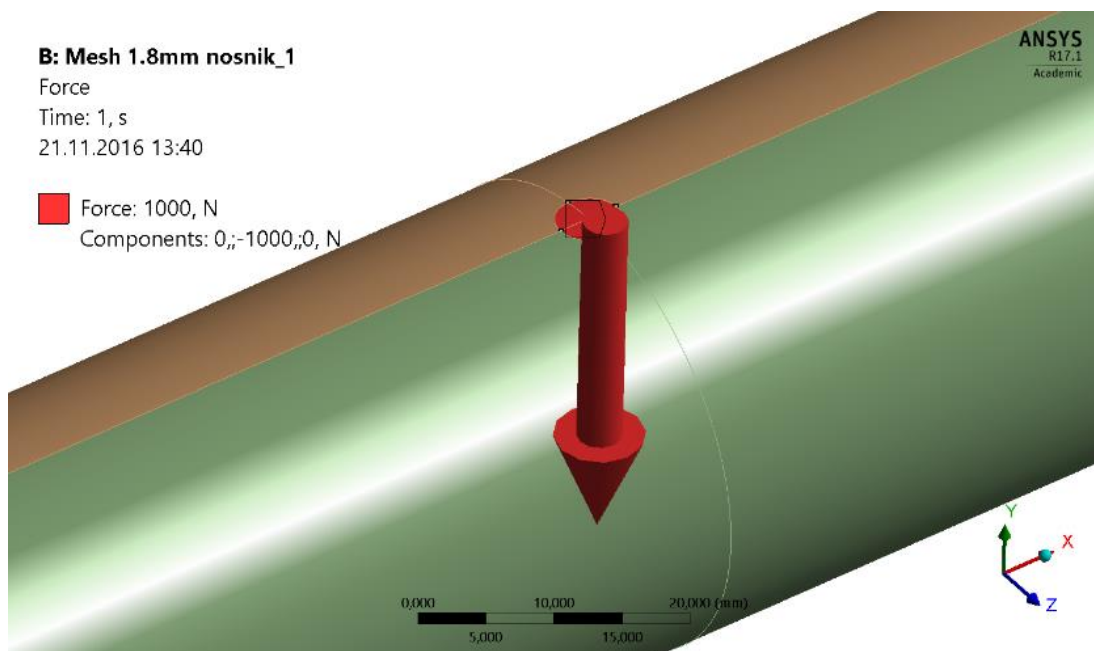
**B: Mesh 1.8mm nosnik\_1**

Force

Time: 1, s

21.11.2016 13:40

- Force: 1000, N**
- Components: 0,,-1000,,0, N**



Obr. 23 Trubka 1 – síla – detail pro objemovou skořepinu – pouze ohyb

Vetknutý nosník - vliv ohyb + smyk

Jedná se o model *trubky 1*, ta je vetknuta a na volném konci zatížena silou 1000 N v záporném směru osy y a ohybovým momentem 1000 Nmm ve směru osy z. Obr. 24

znázorňuje okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu pro případ vetknutého nosníku při uvažování vlivu ohybu a smyku.

**D: Trubka\_1\_600mm\_ohyb+smyk**

nosnik\_1

Time: 1, s

13.01.2017 13:36

ANSYS  
R17.1  
Academic

- A** Remote Force: 1000, N
- B** Moment: 1000, N·mm
- C** Fixed Support



Obr. 24 Trubka 1 - okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu – ohyb + smyk

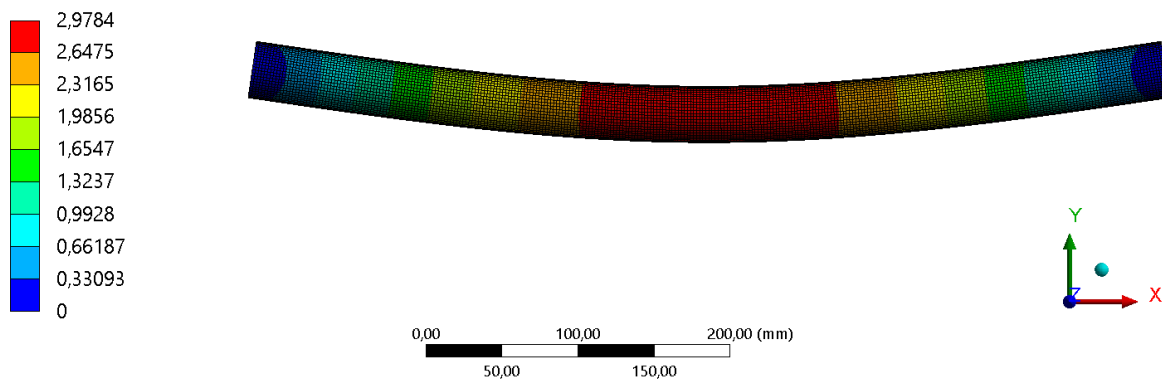
## Vyhodnocení výpočtu

### Tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)

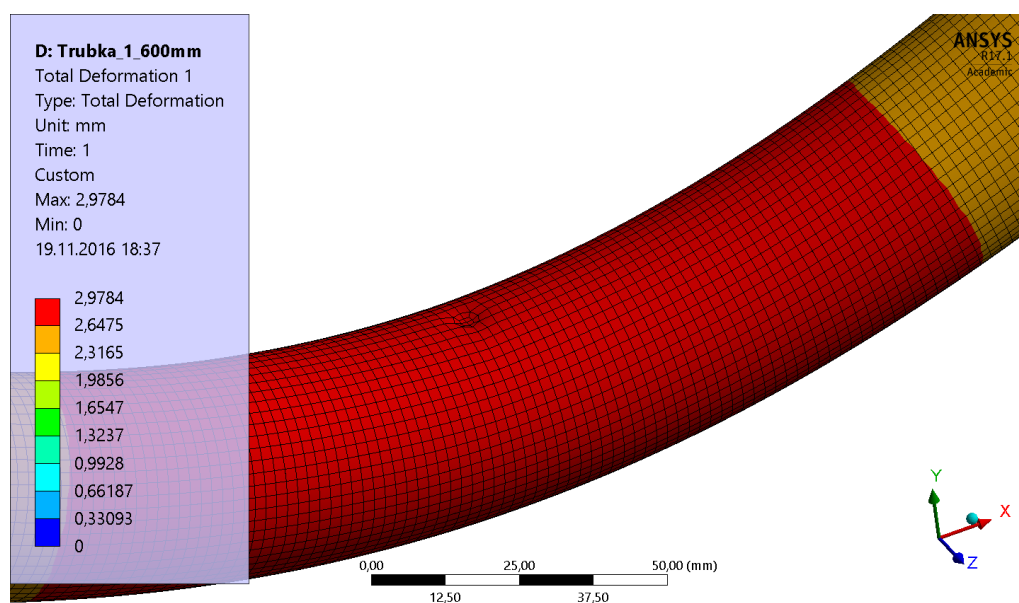
Jedná se o úlohu lineární statiky. Je aplikována síla 1000 N, pro kterou bude získána hodnota průhybu. Bude vyhodnocen průhyb horního i spodního vlákna. Poddajnost  $\delta$  je pak podílem velikosti průhybu a síly. Ohybová tuhost trubky je vyhodnocena obdobně, jak to bylo provedeno u experimentu, tříbodovém ohybu s vlivem ohybu a zanedbáním smyku. Na obrázcích níže (Obr. 25 a Obr. 26) je deformace nosníku po zatížení a detail působíště síly.

Tab. 6 uvádí číselné hodnoty ohybové tuhosti získané pomocí výstupů výpočtu dle MKP objemového tělesa obdobně jako tomu bylo u experimentu – tříbodovém ohybu s vlivem ohybu a zanedbáním smyku. Pro další vyhodnocení a porovnání zkoušky s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti D.

**D: Trubka 1\_600mm**  
Total Deformation 1  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1  
Custom  
Max: 2,9784  
Min: 0  
19.11.2016 18:35



Obr. 25 Trubka 1 - průhyb objemového tělesa



Obr. 26 Trubka 1 - průhyb objemového tělesa-detail působitě síly (zvětšeno 50x)

Tab. 6 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP objemového tělesa

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	0,88808	2,9713	0,8622	2,9449
$\delta$ [mm/N]	0,00088808	0,0029713	0,0008622	0,0029449
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	1,50E+09	1,51E+09	1,55E+09	1,53E+09

## Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk

Dle [8] platí pro daný případ zatížení a pro dané okrajové podmínky pro průhyb a natočení na volném konci vztahy (4.8) a (4.9).

$$v_F = \frac{F \cdot L}{U} + \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot D} - \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot D} \quad (4.8)$$

$$\varphi_F = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot D} - \frac{M \cdot L}{D} \quad (4.9)$$

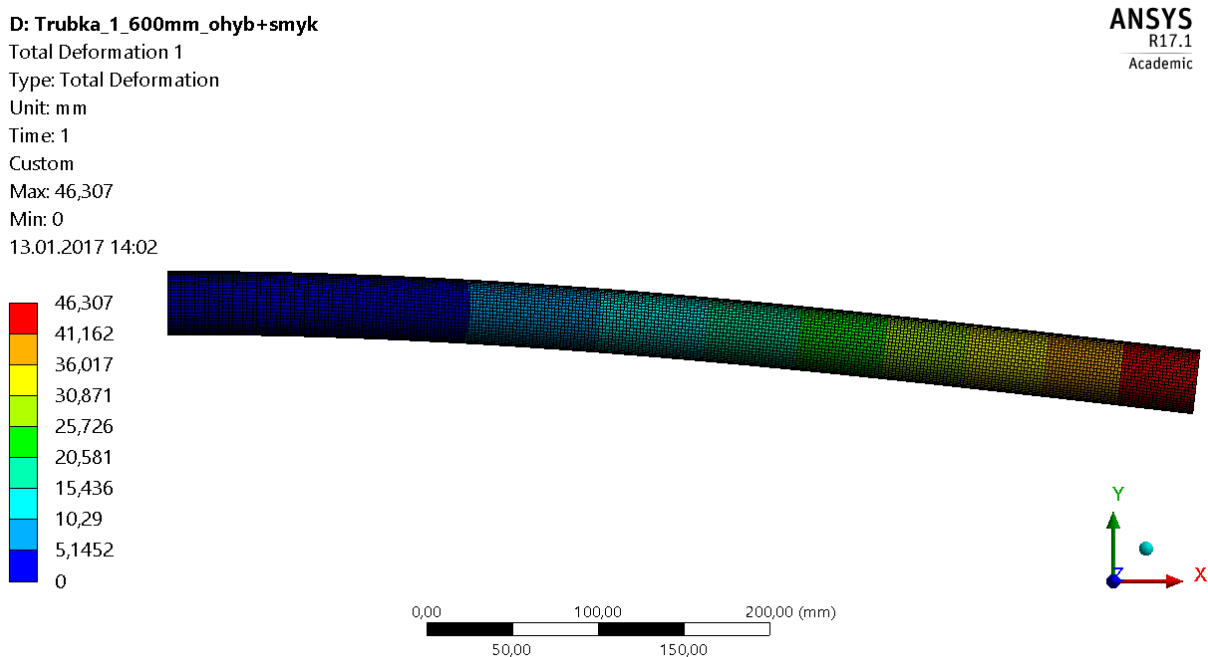
Ohybová tuhost je pak definována rovnicí (4.10) a smyková tuhost rovnicí (4.11).

$$D = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot \varphi_F} - \frac{M \cdot L}{\varphi_F} \quad (4.10)$$

$$U = 6 \cdot \frac{D \cdot F \cdot L}{6 \cdot D \cdot v_F - 2F \cdot L^3 + 3M \cdot L^2} \quad (4.11)$$

Pro samotné vyhodnocení bude tedy potřeba znát hodnoty průhybu a natočení v místě zatížení díky nimž bude dopočtena ohybová i smyková tuhost dle MKP z rovnic (4.10) a (4.11). Obr. 27 znázorňuje deformace nosníku po zatížení.

Tab. 7 uvádí číselné hodnoty ohybové a smykové tuhosti získané pomocí výstupů výpočtu dle MKP objemového tělesa postupem uvedeným výše. Pro další vyhodnocení a porovnání zkoušky s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti D a hodnota smykové tuhosti U.



Obr. 27 Trubka 1 – deformace objemového tělesa pro vyhodnocení ohybu + smyku

Tab. 7 Tuhost trubky 1 – dána MKP objemového tělesa

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 1 objemové	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	13,56	46,307
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	0,051377	0,11659
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,55E+09	1,54E+09
U [N]	-2,54E+06	-1,63E+06

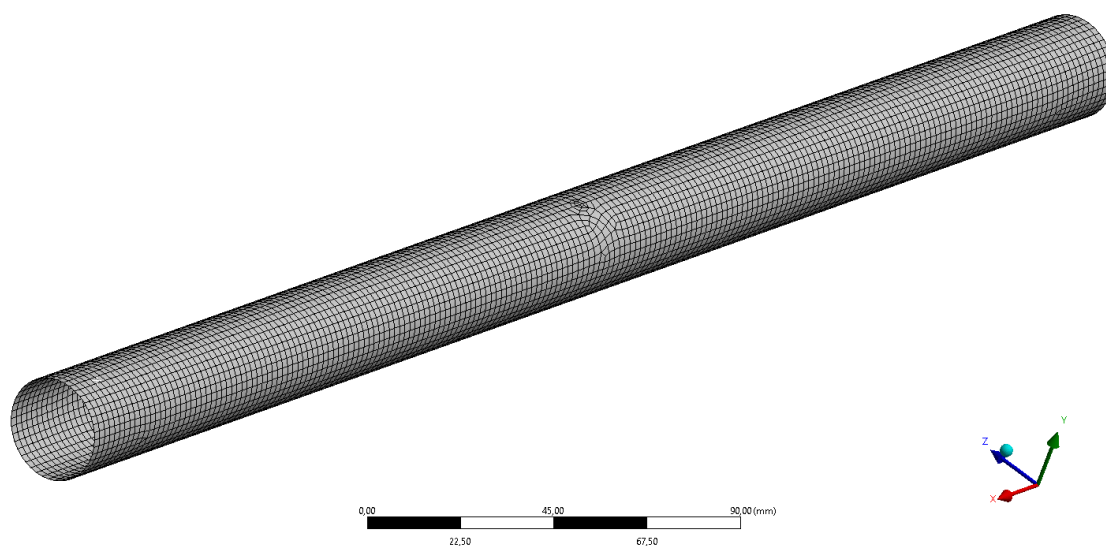
Hodnoty ohybové tuhosti jsou pro daný případ vyšší, než tomu bylo u třibodového ohybu se zanedbáním smyku výše. Pravděpodobně je predikována vyšší ohybová tuhost, než by měla být, což je následně dorovnáno zápornou hodnotou smykové tuhosti. Záporné hodnoty smykové tuhosti jsou fyzikálně nepřipustné. Tato chyba vznikla s největší pravděpodobností z důvodu nevhodného numerického modelu pro výpočet smykové tuhosti pro daný způsob vyhodnocení. Bohužel se tuto chybu nepodařilo v rámci diplomové práce opravit. Absolutní velikost smykové tuhosti je pro kratší nosník vyšší než pro delší nosník, což odpovídá fyzikálním předpokladům.

#### 4.1.4.2 Skořepina

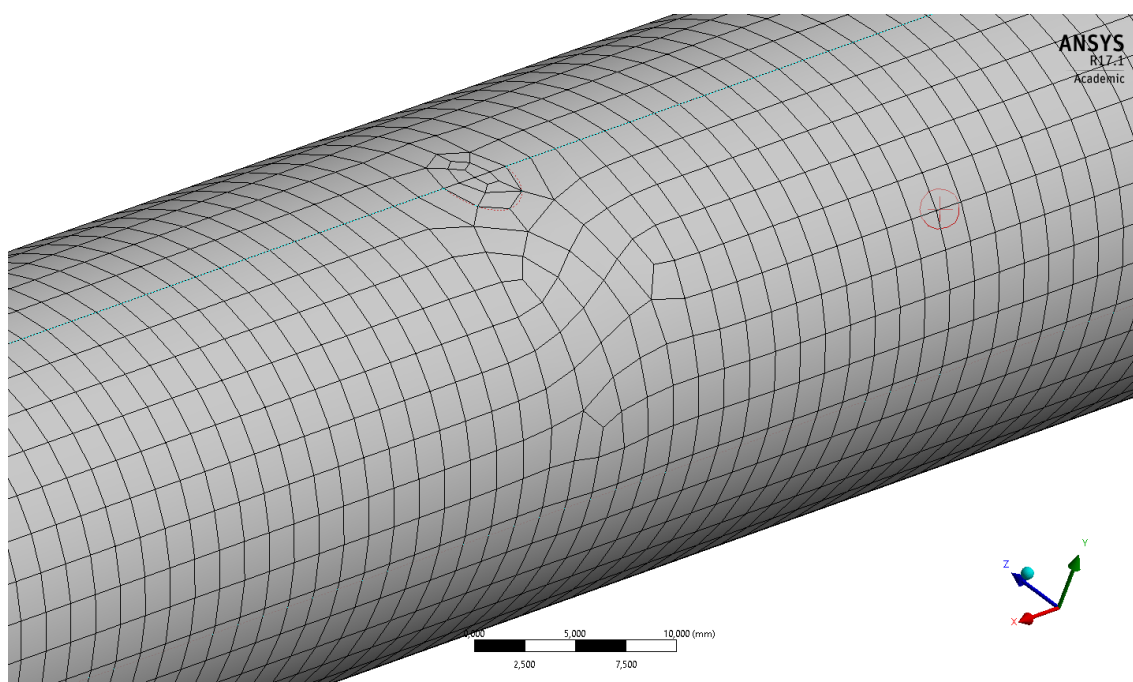
Daná trubka je složena z 52 lamin. Bude vymodelována válcová plocha – referenční plocha, které budou přiřazeny další geometrické a materiálové vlastnosti každé vrstvy. Referenční plocha bude mít různý poloměr pro případ, kdy bude představovat střednici, vnější či vnitřní plochu modelu trubky. Pro každý z těchto případů bude vytvořen zvláštní model, který bude samostatně analyzován a vyhodnocen. Ostatní nastavení všech třech variant budou shodná.

## Sít'

Sít' je vytvořena tak, aby velikost elementu byla dostatečná a s vyšším počtem elementů se výsledky už nijak výrazně neměnily. Velikost elementu je volena 2 mm pro délku nosníku 400 mm a 2 mm pro délku nosníku 600 mm. Sít' viz Obr. 28 a Obr. 29.



Obr. 28 Trubka 1 - síť skořepiny



Obr. 29 Trubka 1 – síť skořepiny – detail v působišti síly

## Materiál

Materiál je nadefinován samostatně pro *trubku 1* pomocí známých materiálových parametrů. Tloušťky vrstev, jejich natočení a samotný materiál jsou přiřazeny tabulkou referenční ploše.



## Okrajové podmínky

Okrajové podmínky – vazby i zatížení – jsou pro skořepinu zadávány totožně, jako tomu bylo u objemového modelu.

## Vyhodnocení výpočtu

Rovněž způsob vyhodnocení výpočtu skořepinového tělesa je shodné se způsobem aplikovaným pro výpočet objemového tělesa pomocí MKP.

### Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)

Obr. 30 a Obr. 31 znázorňují deformace nosníku po zatížení a detail působišť síly. Tab. 8, Tab. 9 a Tab. 10 uvádí číselné hodnoty ohybové tuhosti získané pomocí výstupů výpočtu dle MKP skořepiny obdobně jako tomu bylo u experimentu – třibodovém ohybu s vlivem ohybu a zanedbáním smyku, a to pro všechny tři způsoby, kterými byla modelována referenční plocha (RP). Pro další vyhodnocení a porovnání zkoušky s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti  $D$ .

**B: Trubka1\_400mm\_midsurface**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Unit: mm

Time: 1

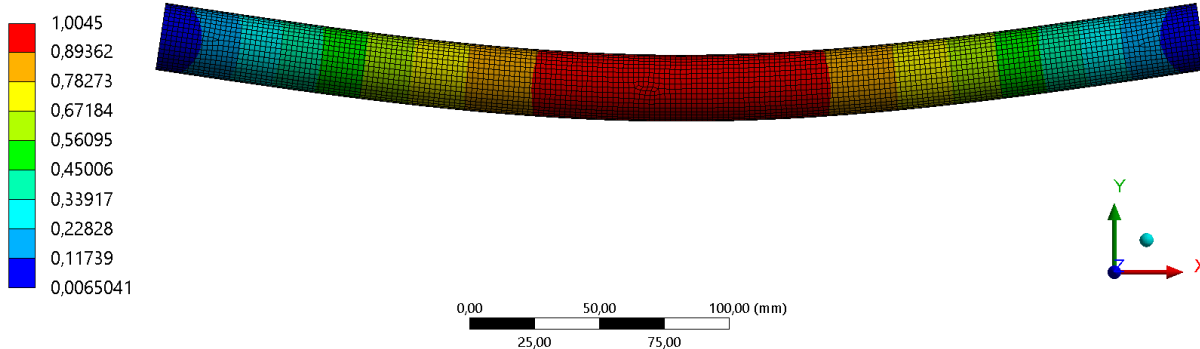
Custom

Max: 1,0045

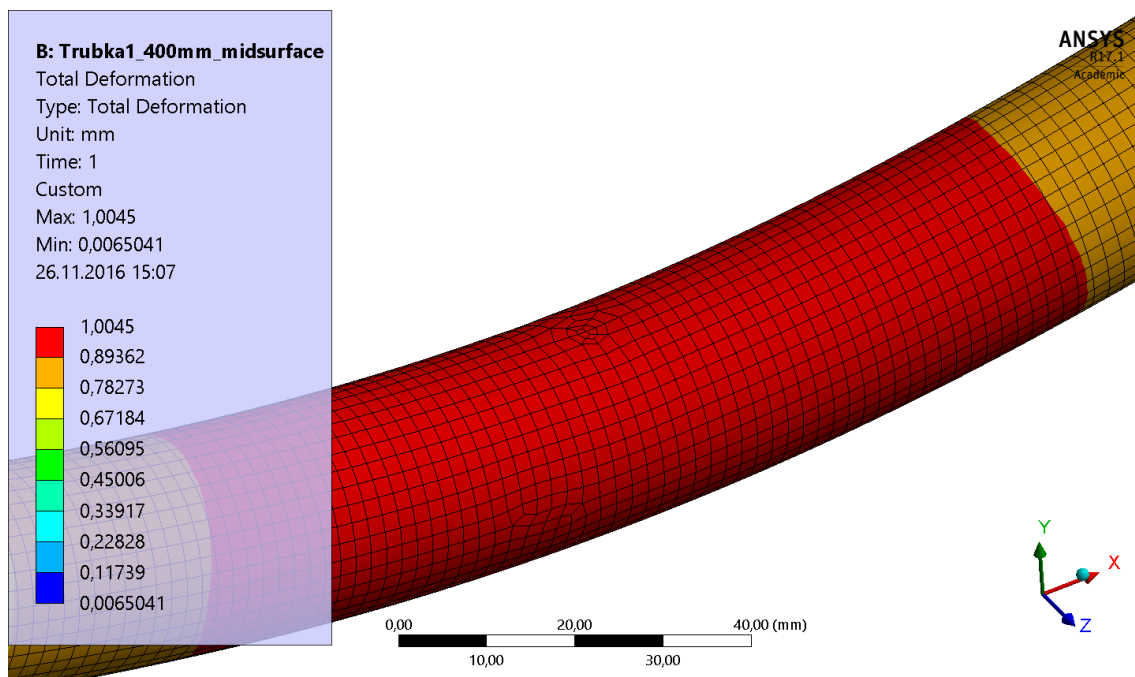
Min: 0,0065041

26.11.2016 15:06

ANSYS  
R17.1  
Academic



Obr. 30 Trubka 1 – průhyb skořepiny (zvětšeno 20x)



Obr. 31 Trubka 1 - průhyb skořepiny – detail působíště síly (zvětšeno 50x)

Tab. 8 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnitřní RP)

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	1,8712	6,278	1,8644	6,2713
$\delta$ [mm/N]	0,001871	0,006278	0,001864	0,006271
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	7,13E+08	7,17E+08	7,15E+08	7,18E+08

Tab. 9 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (RP střednice)

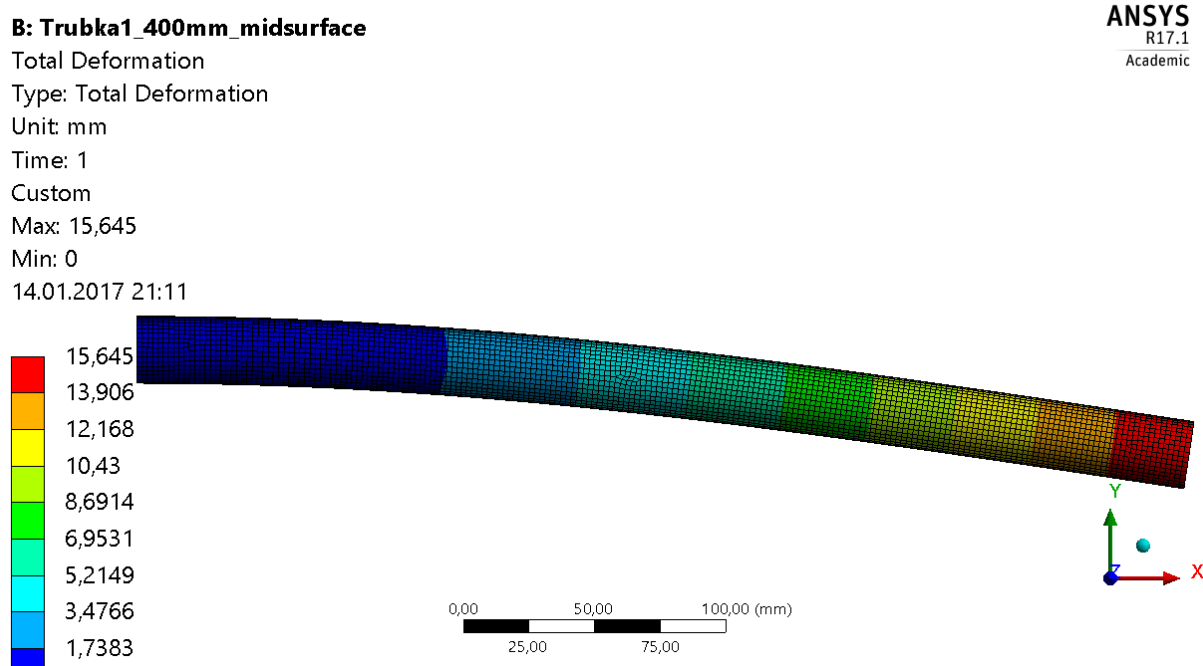
Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	1,0028	3,3931	0,99346	3,3836
$\delta$ [mm/N]	0,001003	0,003393	0,000993	0,003384
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	1,33E+09	1,33E+09	1,34E+09	1,33E+09

Tab. 10 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnější RP)

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	0,69263	2,6816	0,68076	2,6692
$\delta$ [mm/N]	0,000693	0,002682	0,000681	0,002669
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	1,93E+09	1,68E+09	1,96E+09	1,69E+09

## Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk

Obr. 32 znázorňuje deformace nosníku po zatížení. Tab. 11, 0 a Tab. 13 uvádí číselné hodnoty ohybové a smykové tuhosti získané pomocí výstupů výpočtu dle MKP skořepiny postupem shodným s postupem použitým pro objemové těleso – vetknutý nosník s uvažováním vlivu ohybu a smyku, a to pro všechny tři způsoby, kterými byla modelována referenční plocha (RP). Pro další vyhodnocení a porovnání zkoušky s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti  $D$  a hodnota smykové tuhosti  $U$ .



Obr. 32 Trubka 1 – deformace skořepiny pro vyhodnocení ohybu + smyku

Tab. 11 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (vnitřní RP)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 1 skořepina (BOTTOM)	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	29,261	99,098
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	1,10E-01	0,24821
D [Nmm <sup>2</sup> ]	7,24E+08	7,23E+08
U [N]	-4,42E+06	-2,23E+06

Tab. 12 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (RP střednice)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 1 skořepina (MIDDLE)	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	15,645	53,338
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	0,059201	0,13421
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,34E+09	1,34E+09
U [N]	-2,47E+06	-1,53E+06

Tab. 13 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (vnější RP)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 1 skořepina (TOP)	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	10,609	41,702
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	0,040303	0,10532
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,98E+09	1,70E+09
U [N]	-2,63E+06	-1,30E+06

Pro oba dva typy okrajových podmínek k výpočtu tuhosti trubky platí, že pokud je vnitřní plocha trubky modelovanou referenční plochou, pak je ohybová tuhost nejnižší a naopak, pokud je referenční plochou vnější plocha trubky, pak je ohybová tuhost dle MKP skořepiny nejvyšší. Z výsledků lze usuzovat, že nejvhodnější volbou referenční plochy pro silnostěnný nosník je střednice.

Podobně jako u předešlého modelu se objevila ve vyhodnocení záporná smyková tuhost a rovněž jako u předešlého modelu nebyla tato chyba opravena.

#### 4.1.5 Porovnání tuhostí

Porovnání výsledků jednotlivých metod je porovnáním smykových a ohybových tuhostí zjištěných dle jednotlivých metod – experiment, analytické řešení, MKP výpočet objemové skořepiny, resp. skořepinového tělesa. Vše bude pro lepší orientaci vztaženo k výstupu experimentu, jehož hodnoty jsou tedy hodnotami referenčními – 100 %.

Vyhodnocení měření a MKP výpočtů zohledňujících pouze ohyb probíhalo zvlášť pro horní a spodní vlákno, ale k jejich porovnání budou použity pouze výsledky pro spodní vlákno, jež lze předpokládat přesnější. Analytické metody byly aplikovány jiným způsobem. Tab. 14 uvádí porovnání ohybových tuhostí. Tab. 15 uvádí porovnání smykových tuhostí.

Výsledky experimentu a MKP metod jsou rozděleny do oddílů A a B dle typu okrajových podmínek. Výsledky analytických metod jsou jednotné pro oba dva oddíly.

oddíl A experiment – tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)  
 metody MKP - tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)

oddíl B experiment - tříbodový ohyb – vliv ohyb + smyk  
 metody MKP – vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk

Tab. 14 Trubka 1 – porovnání ohybových tuhostí

Veličina D [Nmm <sup>2</sup> ]	Oddíl A		[%]		Oddíl B		[%]	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
Experiment	1,32E+09	1,35E+09	100,0	100,0	1,38E+09		100,0	100,0
MKP objemové	1,55E+09	1,53E+09	117,4	112,9	1,55E+09	1,54E+09	111,9	111,1
MKP sk. (MID)	1,34E+09	1,33E+09	101,9	98,2	1,34E+09	1,34E+09	97,1	96,5
MKP sk. (TOP)	1,96E+09	1,69E+09	148,7	124,5	1,98E+09	1,70E+09	142,6	123,0
MKP sk. (BOT)	7,15E+08	7,18E+08	54,3	53,0	7,24E+08	7,23E+08	52,3	52,2
ABD metoda	1,54E+09		117,2	114,0	1,54E+09		111,5	
Min. dopl.energie	9,06E+08		68,8	66,9	9,06E+08		65,4	
Min. def. energie	4,29E+09		325,8	316,9	4,29E+09		309,9	

Tab. 15 Trubka 1 – porovnání smykových tuhostí

Veličina U [N]	Oddíl B		[%]	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
Experiment	2,03E+06		100,0	100,0
MKP objemové	-2,54E+06	-1,63E+06	-125,0	-80,4
MKP sk. (MID)	-2,47E+06	-1,53E+06	-121,9	-75,7
MKP sk. (TOP)	-2,63E+06	-1,30E+06	-129,7	-64,1
MKP sk. (BOT)	-4,42E+06	-2,23E+06	-217,9	-109,9
Timošenko	4,00E+07		1972,8	

Výsledky uvedené v oddíle A jsou blízké těm v oddíle B, jsou vždy o trochu vyšší (do 6 %, resp. do 15,9 % u metody minima deformační energie). Následující komentář se věnuje oddílu B.

Ohybová tuhost získaná dle MKP objemového tělesa i dle MKP skořepiny s referenční plochou střednicí je číselně ve výborné shodě s experimentem. Pokud by smyková tuhost byla dána průměrem absolutních hodnot smykových tuhostí obou délek nosníku, pak je rovněž ve výborné shodě.

Pokud je modelována silnostěnná trubka pomocí referenční plochy – vnější či vnitřní, pak je předpokládána ohybová tuhost dle těchto metod vzdálená hodnotě dané měřením,

a proto lze předpokládat, že takový postup pro silnostěnný nosník nebude vhodný. Daná metoda rovněž selhala při stanovení smykové tuhosti.

Z analytických metod je metoda dle ABD matic ve výborné shodě s experimentem, pokud se jedná o určení ohybové tuhosti. Timošenkova metoda, která se snaží o predikci smykové tuhosti, dává naprosto odlišné výsledky oproti naměřeným hodnotám a nepředpokládá se její vhodnost pro predikci smykové tuhosti u silnostěnného kompozitového nosníku mezikruhového průřezu.

Metody dle minima doplňkové a minima deformační energie dávají hranice, rozsah je ovšem velmi velký (cca 240%). Výsledky dané těmito metodami jsou tedy pouhým přiblížením, tedy orientační.

## 4.2 Tenkostěnný nosník

Metody, které byly aplikovány na silnostěnný nosník, budou použity na nosník tenkostěnný – *trubka 2*. Metodika řešení je totožná s postupem pro *trubku 1*, a proto zde již nebudou detailně popisovány jednotlivé postupy, a tedy v dalším budou uvedeny geometrie a materiálové vlastnosti tenkostěnného nosníku a výsledky dané jednotlivými metodami a následně jejich porovnání.

### 4.2.1 Geometrie a materiálové vlastnosti

Tříbodovým ohybem byla zatížena trubka s následujícími parametry:

Vnitřní poloměr  $r_i = 13$  mm a vnější poloměr  $r_e = 14,16$  mm.

Jednotlivé vrstvy trubky jsou vyrobeny ze stejného materiálu, jehož vlastnosti potřebné pro výpočet jsou:

Modul pružnosti v podélném směru  $E_L = 127\,648$  MPa

Modul pružnosti v příčném směru  $E_T = 6\,002$  MPa

Modul pružnosti ve smyku  $G_{LT} = 3\,400$  MPa

Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)  $\nu_{LT} = 0,345$

0 uvádí tloušťky jednotlivých vrstev a úhly natočení vláken v dané vrstvě.

Tab. 16 Trubka 2 – geometrie a materiálové parametry

Vrstva	IR vrstvy	OR vrstvy	tloušťka stěny	orientace výztuže
	[mm]	[mm]	[mm]	[°]
1	13	13,494	0,494	0,00
2	13,494	13,736	0,242	7,21
3	13,736	13,974	0,238	-7,34
4	13,974	14,16	0,186	87,14

Pro vyhodnocení jsou důležité číselné hodnoty kvadratického momentu průřezu vzhledem k neutrální ose průřezu  $J$  a plocha průřezu  $A$  pro trubku 2 uvedené v Tab. 17.

Tab. 17 Kvadratický moment průřezu  $J$  a plocha průřezu  $A$  trubky 2

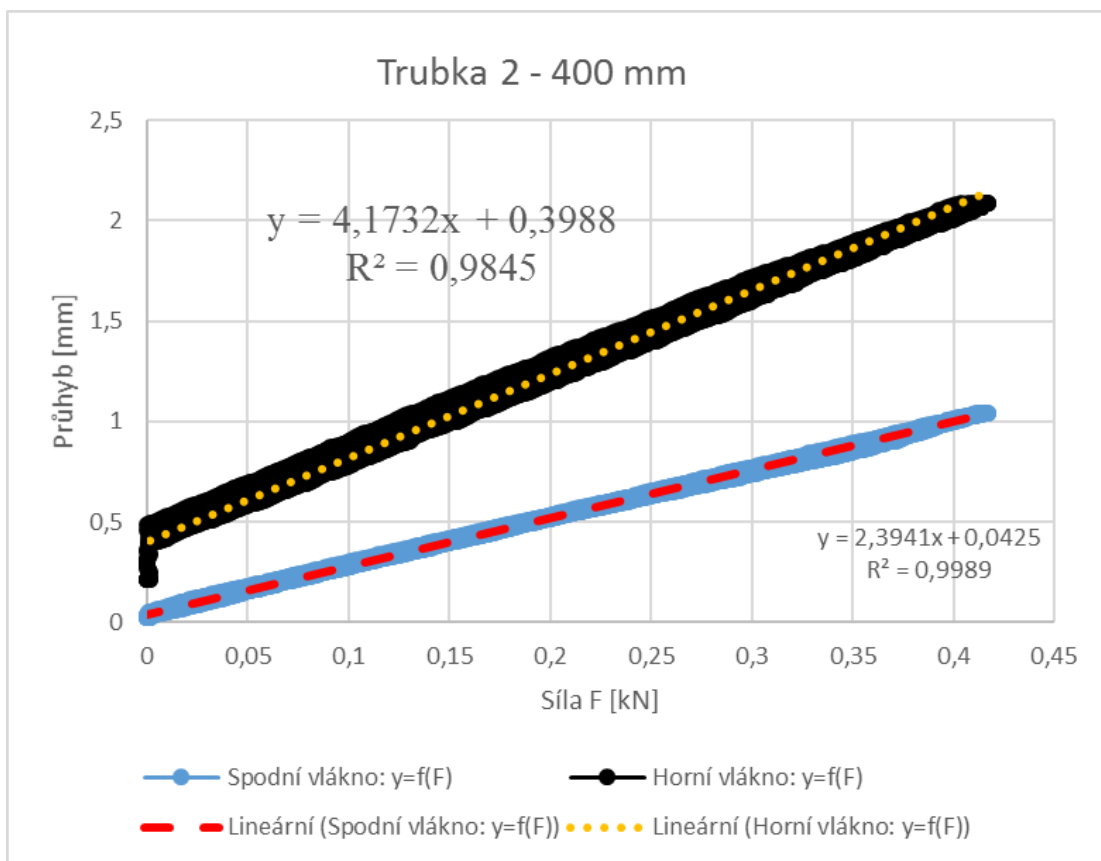
$J$ [mm <sup>4</sup> ]	9143
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	99



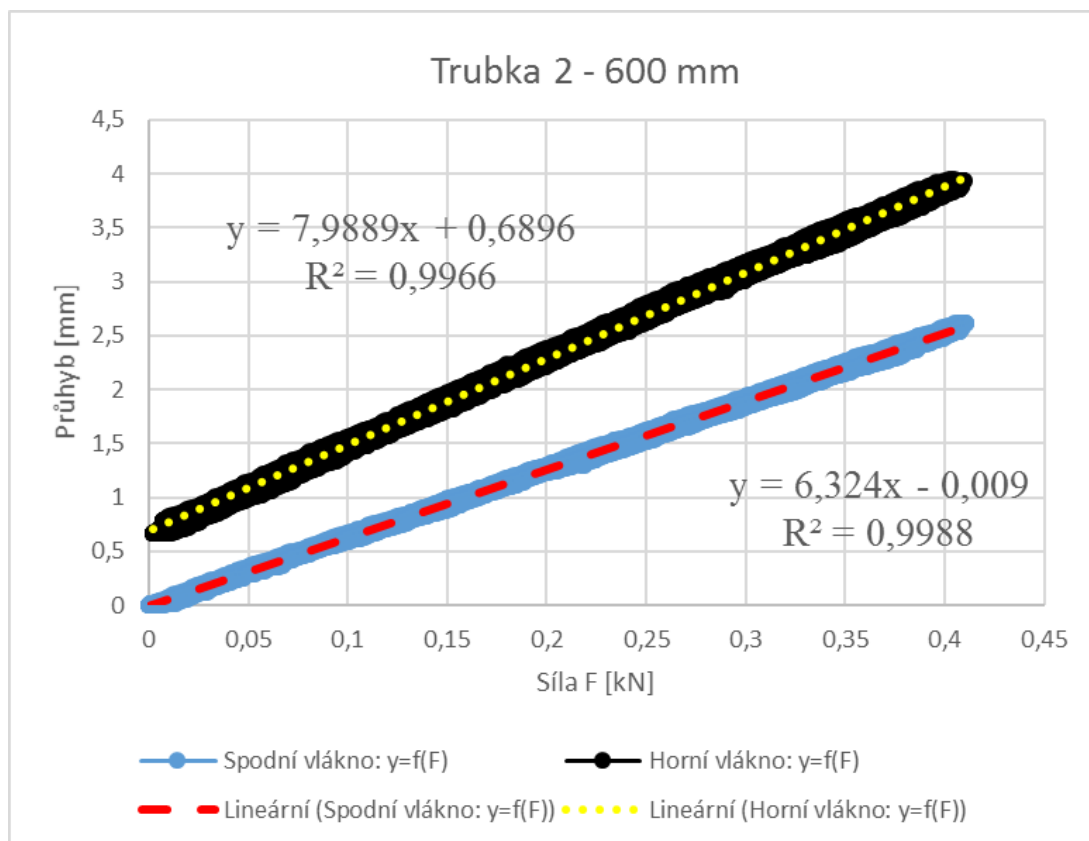
Obr. 33 Trubka 2 vlevo

#### 4.2.2 Experiment

Průběh měření byl shodný s průběhem měření silnostěnného nosníku. Obr. 34 znázorňuje závislost průhybu na síle pro rozteč podpor 400 mm. Obr. 35 znázorňuje tutéž závislost pro rozteč podpor 600 mm. Tab. 18 uvádí číselné hodnoty tuhostí smykové a ohybové získané měřením pro trubku 2. Tab. 19 pak uvádí číselné hodnoty ohybové tuhosti při zanedbání smyku.



*Obr. 34 Trubka 2 -  $v_F=f(F)$  pro trubku délky 400 mm*



*Obr. 35 Trubka 2 -  $v_F=f(F)$  pro trubku délky 600 mm*



Tab. 18 Tuhost trubky 2 – dána experimentem

Třibodový ohyb – vliv ohyb + smyk				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$\delta$ [mm/N]	0,0041732	0,007989	0,002394	0,006324
D [Nmm <sup>2</sup> ]	1,45E+09		9,15E+08	
U [N]	3,08E+04		1,07E+05	

Tab. 19 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána experimentem

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$\delta$ [mm/N]	0,004173	0,007989	0,002394	0,006324
D [Nmm <sup>2</sup> ]	3,19E+08	5,63E+08	5,57E+08	7,12E+08

Pro další vyhodnocení a porovnání měření s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti D a hodnota smykové tuhosti U.

#### 4.2.3 Analytický výpočet

Analytický výpočet proběhl rovněž shodně s výpočtem silnostěnného nosníku, a proto je zde uvedena pouze tabulka výsledků pro tenkostěnný nosník, viz Tab. 20.

Tab. 20 Tuhost trubky 2 – dána analytickými výpočty

	ABD metoda	Timošenko	min. dopl. e.	min. def. e.
EJ [Nmm <sup>2</sup> ]	9,77E+08	9,77E+08	7,91E+08	9,60E+08
$\kappa$ GA [Nmm <sup>2</sup> ]	-----	1,92E+06	-----	-----

Výsledné hodnoty ohybové a smykové tuhosti budou porovnány s výsledky dalších použitých metod výpočtu v oddíle 4.2.5.

#### 4.2.4 MKP výpočet

Trubka 2 byla analyzována MKP jako objemové, resp. skořepinové těleso. Všechna nastavení týkající se geometrie, sítě, okrajových podmínek, zatížení a postupu zadávání materiálových parametrů jsou shodná s výpočtem silnostěnného nosníku – trubky 1, pokud není uvedeno v konkrétním případě jinak.

#### 4.2.4.1 Objemová skořepina

Trubka vymodelována jako jedna vrstva, které jsou následně přiřazeny parametry definující laminy. Velikost elementů sítě je nadefinována na 2 mm. Okrajové podmínky jsou shodné s modelem silnostěnného nosníku. Následně jsou uvedeny tabulky s výslednými hodnotami ohybové a smykové tuhosti pro daná zatížení.

Tab. 21 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP objemového tělesa

Tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	2,5287	5,9649	1,463	4,8996
$\delta$ [mm/N]	0,002529	0,005965	0,001463	0,0049
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	5,27E+08	7,54E+08	9,11E+08	9,18E+08

Tab. 22 Tuhost trubky 2 – dána MKP objemového tělesa

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 3 objemové	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	23,469	75,582
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	8,06E-02	0,18159
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	9,88E+08	9,88E+08
$U$ [N]	2,05E+05	2,08E+05

Pro další vyhodnocení a porovnání zkoušky s analytickými metodami a s MKP bude použita hodnota ohybové tuhosti  $D$  a hodnota smykové tuhosti  $U$ . Narozdíl od předešlého silnostěnného modelu je zde i přes analogický postup vyhodnocení smyková tuhost kladná.

#### 4.2.4.2 Skořepina

Trubka vymodelována pomocí referenční plochy, a to vnitřní, střední a vnější. Následně jsou přiřazeny parametry definující trubku 2. Velikost elementů sítě je nadefinována na 2 mm. Okrajové podmínky jsou shodné s modelem silnostěnného nosníku. Následně jsou uvedeny tabulky s výslednými hodnotami ohybové a smykové tuhosti.

Tab. 23 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnitřní RP)

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	2,7803	6,5249	1,6531	5,3996
$k$ [mm/N]	0,00278	0,006525	0,001653	0,0054
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	4,80E+08	6,90E+08	8,07E+08	8,33E+08

Tab. 24 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (RP střednice)

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	2,6357	6,1856	1,508	5,0605
$k$ [mm/N]	0,002636	0,006186	0,001508	0,005061
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	5,06E+08	7,27E+08	8,84E+08	8,89E+08

Tab. 25 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnější RP)

Třibodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)				
Veličina	Horní vlákno		Spodní vlákno	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
$v_F$ [mm]	2,6863	6,1332	1,4952	4,9452
$k$ [mm/N]	0,002686	0,006133	0,001495	0,004945
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	4,96E+08	7,34E+08	8,92E+08	9,10E+08

Tab. 26 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (vnitřní RP)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 2 skořepina (BOTTOM)	
$L$ [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	25,585	81,982
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	8,65E-02	0,19556
$D$ [Nmm <sup>2</sup> ]	9,20E+08	9,17E+08
$U$ [N]	1,61E+05	1,62E+05

Tab. 27 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (RP střednice)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 2 skořepina (MIDDLE)	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	24,242	78,076
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	8,34E-02	0,18776
D [Nmm <sup>2</sup> ]	9,54E+08	9,55E+08
U [N]	2,03E+05	2,06E+05

Tab. 28 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (vnější RP)

Vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk		
Veličina	Trubka 2 skořepina (TOP)	
L [mm]	400	600
$v_F$ [mm]	23,591	75,379
$\phi_F$ [mm <sup>-1</sup> ]	8,06E-02	0,18061
D [Nmm <sup>2</sup> ]	9,88E+08	9,93E+08
U [N]	1,93E+05	1,95E+05

U tenkostěnného nosníku platí shodně jako tomu bylo u silnostěnného nosníku následující závěry:

Pokud je vnitřní plocha trubky modelovanou referenční plochou, pak je ohybová tuhost nejnižší a naopak, pokud je referenční plochou vnější plocha trubky, pak je ohybová tuhost dle MKP skořepiny nejvyšší.

Dále platí, že číselné hodnoty ohybových tuhostí jsou si pro všechny tři RP velmi blízké (rozdíl mezi hodnotami do deseti procent). Nelze jednoznačně určit, která z voleb RP je pro tenkostěnné nosníky nejvhodnější.

Hodnota smykové tuhosti je oproti silnostěnnému nosníku pro tenkostěnný nosník kladná. Lze se domnívat, že daný numerický model může být v kombinaci se způsobem vyhodnocení vhodný pro stanovení smykové tuhosti tenkostěnného nosníku.

#### 4.2.5 Porovnání tuhostí

Porovnání výsledků jednotlivých metod je porovnáním smykových a ohybových tuhostí zjištěných dle jednotlivých metod – experiment, analytické řešení, MKP výpočet objemového, resp. skořepinového tělesa. Vše bude pro lepší orientaci vztaženo k výstupu experimentu, jehož hodnoty jsou tedy hodnotami referenčními – 100 %.

Vyhodnocení měření a MKP výpočtů zohledňujících pouze ohyb probíhalo zvlášť pro horní a spodní vlákno, ale k jejich porovnání budou použity pouze výsledky pro spodní vlákno, jež lze předpokládat přesnější. Analytické metody byly aplikovány jiným způsobem. Tab. 29 uvádí porovnání ohybových tuhostí. Tab. 30 uvádí porovnání smykových tuhostí.

Výsledky experimentu a MKP metod jsou rozděleny do oddílů A a B dle typu okrajových podmínek. Výsledky analytických metod jsou jednotné pro oba dva oddíly.

- oddíl A            experiment – tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)  
                      metody MKP - tříbodový ohyb – vliv ohyb (smyk zanedbán)
- oddíl B            experiment - tříbodový ohyb – vliv ohyb + smyk  
                      metody MKP – vetknutý nosník – vliv ohyb + smyk

Tab. 29 Trubka 2 – porovnání ohybových tuhostí

Veličina D [Nmm <sup>2</sup> ]	Oddíl A		[%]		Oddíl B		[%]	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
Experiment	5,57E+08	7,12E+08	100,0	100,0	9,15E+08		100,0	100,0
MKP objemové	9,11E+08	9,18E+08	163,6	129,1	9,88E+08	9,88E+08	108,0	108,0
MKP sk. (MID)	8,84E+08	8,89E+08	158,8	125,0	9,54E+08	9,55E+08	104,3	104,4
MKP sk. (TOP)	8,92E+08	9,10E+08	160,1	127,9	9,88E+08	9,93E+08	108,0	108,6
MKP sk. (BOT)	8,07E+08	8,33E+08	144,8	117,1	9,20E+08	9,17E+08	100,6	100,3
ABD metoda	9,77E+08		175,4	137,3	9,77E+08		106,8	
Min. dopl. energie	7,91E+08		142,0	111,2	7,91E+08		86,5	
Min. def. energie	9,60E+08		172,3	134,9	9,60E+08		104,9	

Tab. 30 Trubka 2 – porovnání smykových tuhostí

Veličina U [N]	Ohyb + smyk		[%]	
	400 mm	600 mm	400 mm	600 mm
Experiment	1,07E+05		100,0	100,0
MKP objemové	2,05E+05	2,08E+05	192,3	194,8
MKP sk. (MID)	2,03E+05	2,06E+05	190,5	193,2
MKP sk. (TOP)	1,93E+05	1,95E+05	180,5	182,8
MKP sk. (BOT)	1,61E+05	1,62E+05	150,9	152,2
Timošenko	1,92E+06		1801,2	

Výsledky uvedené v oddíle A jsou ve srovnání s výsledky experimentu nepřesné (rozdíl okolo 30 % pro délku 600mm a okolo 60 % pro délku 400mm). Lze předpokládat, že je to z důvodu poměru tloušťky ku délce, protože pro delší nosník jsou výsledky

výpočtů numerických a analytických metod blíže referenčním hodnotám z experimentu. Následující komentář se věnuje oddílu B.

Všechny použité metody pro výpočet ohybové tuhosti dávají blízké výsledky. Hranice dané analytickými metodami (minima doplňkové a deformační energie) jsou užší, nicméně výsledky dané metodou ABD matic jsou vyšší než stanovené hranice. Výsledky ohybové tuhosti *trubky 2* jsou ve výborné shodě s experimentem.

Rovněž pro smykové tuhosti platí, že jsou si výsledky dle MKP metod blízké, ale nejsou v dobré shodě s experimentem. Timošenkova metoda předpokládá několikanásobně vyšší smykovou tuhost, než jaká byla naměřena, a proto lze učinit závěr, že její použití pro predikci smykové tuhosti tenkostěnného kompozitového nosníku mezikruhového průřezu je velmi nevhodné.

### 4.3 Shrnutí metodiky řešení

V této kapitole byly na vybrané kompozitní nosníky – *trubku 1* a *trubku 2* – aplikovány metody k predikci tuhosti takovýchto komponent. Bylo provedeno dvojí vyhodnocení experimentu, a to s uvažováním vlivu ohybu a smyku (oddíl B) anebo vyhodnocení s uvažováním vlivu ohybu a zanedbáním smyku (oddíl A). Rovněž byly použity dva typy okrajových podmínek pro vyhodnocení modelu dle metody konečných prvků. Třibodový ohyb s uvažováním vlivu ohybu a zanedbáním smyku pro přímé porovnání s experimentem (oddíl A) a vetknutý nosník s uvažováním vlivu ohybu a smyku (oddíl B) pro porovnání s experimentem, třibodovým ohybem s uvažováním vlivu ohybu a smyku. Hodnoty tuhosti získané pomocí metod zařazených do oddílu A jsou méně přesné než hodnoty získané metodami zařazenými v oddíle B. Dále se proto bude tato práce věnovat pouze numerickým metodám zařazeným do oddílu B a metodě vyhodnocení experimentu zařazené do oddílu B.

*Trubka 1* je příkladem silnostěnného a naopak *trubka 2* tenkostěnného mezikruhového nosníku. Tento rozdíl v tloušťce trubky pak způsobuje odlišnosti výsledků některých metod. Výsledky analytických a numerických metod byly vztaženy k referenčním hodnotám. Referenční hodnoty jsou takové, které jsou získány experimentálně.

Pokud bude prováděn výpočet ohybové tuhosti mezikruhového nosníku, pak lze dojít k výborné shodě s naměřenými daty pomocí skořepinového modelu MKP s referenční

plochou střednicí. Dle této metody by se shoda s referenčními hodnotami dala předpokládat do pěti procent pro silnostěnné i tenkostěnné nosníky.

Výpočet MKP pomocí objemového modelu vykazuje velmi dobré výsledky, rovněž tak analytická metoda ABD matic, jejíž výsledky jsou podobné. Pro obě metody platí předpokládaná shoda s experimentem do 10 % pro tenkostěnné trubky a do 15 % pro silnostěnné trubky.

Ostatní nosníky MKP – skořepina s vnitřní, resp. vnější referenční plochou – lze považovat za orientační. Jejich výsledky jsou velmi blízké (do 10 %) referenčním hodnotám pro tenkostěnné nosníky. Proto by měly být použity v případech, kdy je jejich použití vyžadováno a lze předpokládat, že je profil dostatečně tenkostěnný, aby dávaly dobré výsledky. Pro silnostěnné nosníky nemusí být tento způsob modelování vhodný.

Pokud by byla zkoumána smyková tuhost, pak není vhodná analytická Timošenkova metoda. Numerické výsledky pak dávají řádově shodné výsledky pro tenkostěnný nosník, a jsou tedy pouze orientační. Pro analýzu smykové tuhosti silnostěnného nosníku daná metodika výpočtu numerickými metodami selhala.

#### **4.4 Závěr metodiky řešení**

Pro predikci ohybové tuhosti mezikruhového kompozitního nosníku je nejvhodnější použití MKP modelu skořepiny s referenční plochou střednicí, a to jak pro tenkostěnné, tak silnostěnné nosníky.

Velmi vhodnou metodou je také MKP objemovými skořepinami a analytický výpočet pomocí ABD matic. MKP objemovými skořepinami bude použito v případech, kdy je takováto komponenta součástí většího celku a je potřeba v celém objemu např. pro vazby s okolními díly. Metoda ABD matic je oproti MKP metodám méně výpočetně náročná, a je tedy vhodná pro rychlé stanovení tuhosti konkrétního nosníku.

Z výsledků lze usuzovat, že stanovení smykové tuhosti pomocí numerických metod je přibližné – řádově přesné, a to pouze pro tenkostěnné nosníky. Pro zde analyzovaný silnostěnný nosník aplikované metody konečných prvků pro stanovení smykové tuhosti selhaly, nýbrž hodnota smykové tuhosti byla záporná, a tedy zvyšovala ohybovou tuhost, což je fyzikálně nepřipustné. Smyková tuhost dle analytické Timošenkovy metody je stanovena velmi nepřesně.

## 5. Aplikace na příklady

Výše uvedené metody byly následně aplikovány na příklady.

Ve verzi v1 jsou uvedeny nosníky dle [15], pro které platí, že:

- jsou složeny ze skleněných vláken a epoxidové pryskyřice.
- jsou silnostěnné o tloušťce 10 mm, středním poloměru 15 mm a délky 800 mm.
- jsou odlišné tloušťkami a úhly návinu jednotlivých vrstev.
- je 6 nosníků s vrstvami o tloušťkách v poměru 1:1:1:1, 1:2:3:4, nebo 4:3:2:1 a úhlech návinu  $[10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ]$  nebo  $[40^\circ, 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ]$ .
- jsou 4 nosníky s vrstvami o tloušťkách v poměru 1:1:1:1 a úhlech návinu  $\pm 45^\circ$ ,  $\mp 45^\circ$ ,  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  a  $[90^\circ, 0^\circ]_s$ .

Ve verzi v2 jsou uvedeny myšlené nosníky, pro které platí, že:

- jsou složeny z epoxidové pryskyřice s uhlíkovými vlákny.
- jsou o středním poloměru 20 mm a délky 800 mm.
- jsou odlišné tloušťkami a úhly návinu jednotlivých vrstev.
- celková tloušťka nosníků je 1 mm, 2 mm, nebo 4 mm a vrstvy jsou vždy v poměru 1:1:1:1 s úhly návinu  $[90^\circ, 0^\circ]_s$ ,  $[45^\circ, 0^\circ]_s$ ,  $\pm 45^\circ$ , a  $[90^\circ, 45^\circ]_s$ .

Jako referenční hodnota k vyhodnocení je pro verze v1 a v2 použita hodnota průhybu daná výpočtem MKP skořepinového modelu s referenční plochou střednicí, jelikož výše uvedená kapitola 4 uvádí tuto metodu jako nejvhodnější způsob výpočtu.

Ve verzi v3 jsou aplikovány uváděné metody výpočtu na nosníky dle [13], pro které platí, že:

- jsou tvořeny uhlíkovými vlákny v polymerní matrici.
- jsou o tloušťce 14 mm, středním poloměru 32 mm a délky 600 mm.
- jsou odlišné tloušťkami a úhly návinu jednotlivých vrstev.
- mají různý počet vrstev, které jsou většinou shodné tloušťky.
- jednotlivé vrstvy jsou o úhlech návinu  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  nebo  $-45^\circ$ .

Referenčními hodnotami pro porovnání výsledků pak jsou hodnoty ohybové tuhosti dle [13], jež jsou verifikovány autorem [13] a lze je považovat za přesné.

### 5.1 Verze v1

Vymodelovány nosníky, jejichž geometrie a materiálové vlastnosti jsou totožné s nosníky, které byly vyhodnocovány v [15]. V [15] byl nosník vetknutý a na volném



konci zatížený osamělou silou. V působišti síly pak byly známy hodnoty průhybu a rovněž do grafu vykreslena průhybová čára dle analytických metod. Shodně jsou aplikovány MKP metody.

### 5.1.1 Geometrie a materiálové vlastnosti

Modelován byl nosník o vnitřním poloměru  $r_i=10$  mm a vnějším poloměru  $r_e=20$  mm. Délka byla 800 mm, zatěžovací síla 1000 N. Materiál je epoxidové sklo, jehož vlastnosti potřebné pro výpočet jsou:

Modul pružnosti v podélném směru	$E_L = 54000\text{MPa}$
Modul pružnosti v příčném směru	$E_T = 18000\text{MPa}$
Modul pružnosti ve smyku	$G_{LT} = 9000\text{MPa}$
Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)	$\nu_{LT} = 0,25$

Tab. 31 uvádí tloušťky jednotlivých vrstev a úhly natočení vláken v dané vrstvě.

Tab. 31 Geometrie nosníku pro vl

Nosník	Tloušťka vrstev [mm]				Úhel natočení [°]			
	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>3</sub>	t <sub>4</sub>	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	2,5	2,5	2,5	2,5	10	20	30	40
2	1	2	3	4	10	20	30	40
3	4	3	2	1	10	20	30	40
4	2,5	2,5	2,5	2,5	40	30	20	10
5	1	2	3	4	40	30	20	10
6	4	3	2	1	40	30	20	10
7	2,5	2,5	2,5	2,5	-45	45	45	-45
8	2,5	2,5	2,5	2,5	45	-45	-45	45
9	2,5	2,5	2,5	2,5	0	90	90	0
10	2,5	2,5	2,5	2,5	90	0	0	90

### 5.1.2 Výsledky analytického výpočtu [15]

Tab. 32 uvádí hodnoty průhybu nosníku v působišti osamělé síly, které byly vypočteny analytickými metodami.

Tab. 32 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v1 dle BP – vypočteny analyticky

Nosník	Průhyb [mm]			
	W <sub>ABD</sub>	W <sub>Tim</sub>	W <sub>C</sub>	W <sub>E</sub>
1	40,45	40,52	46,90	36,65
2	45,63	45,69	52,06	39,63
3	36,34	36,41	41,51	33,48
4	40,45	40,52	36,03	30,64
5	36,34	36,41	33,33	29,23
6	45,63	45,69	40,92	33,20
7	57,75	57,80	64,12	49,12
8	57,75	57,80	64,12	49,12
9	40,03	40,10	39,02	38,21
10	40,03	40,10	42,08	41,21

Pro přehlednost je níže uveden přehled symbolů uvedených v Tab. 32, více viz oddíl 2.1.1 či seznam symbolů v úvodu této práce.

W<sub>ABD</sub> průhyb v působišti osamělé síly daný metodou dle ABD matic

W<sub>Tim</sub> průhyb v působišti osamělé síly daný Timošenkovou metodou

W<sub>C</sub> průhyb v působišti osamělé síly daný metodou dle minima doplňkové energie

W<sub>E</sub> průhyb v působišti osamělé síly daný metodou dle minima deformační energie

### 5.1.3 MKP výpočet

Pro lepší orientaci jsou výpočty MKP rozděleny do verzí:

Verze v1.0.1 Skořepina se střední rovinou jako referenční plochou.

Verze v1.0.2 Skořepina, kde vnitřní plocha trubky je referenční rovinou.

Verze v1.0.3 Skořepina, kde vnější plocha trubky je referenční rovinou.

Verze v1.0.4 Trubka modelována prvky objemových skořepin.

### 5.1.4 Výsledky MKP výpočtu

Tab. 33 uvádí hodnoty průhybu nosníku v působišti osamělé síly, které byly vypočteny MKP.

Tab. 33 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v1 dle MKP

Nosník	Průhyb [mm]			
	v1.0.1	v1.0.2	v1.0.3	v1.0.4
1	48,20	71,71	35,68	43,86
2	53,66	80,00	39,89	51,59
3	42,71	63,41	31,47	40,17
4	40,33	59,86	29,64	33,91
5	37,12	55,06	27,21	33,14
6	45,25	67,27	33,40	40,76
7	61,86	92,99	46,39	58,82
8	61,86	92,99	46,39	58,82
9	42,61	63,87	31,95	39,07
10	43,67	65,54	32,83	42,01

### 5.1.5 Závěry

Je sestavena tabulka (Tab. 34) k relativnímu porovnání výsledků, vztaženo k hodnotě průhybu dané pomocí MKP skořepiny s referenční plochou střednicí. Obr. 36 znázorňuje graf k relativnímu porovnání. Obr. 37 znázorňuje detail tohoto grafu.

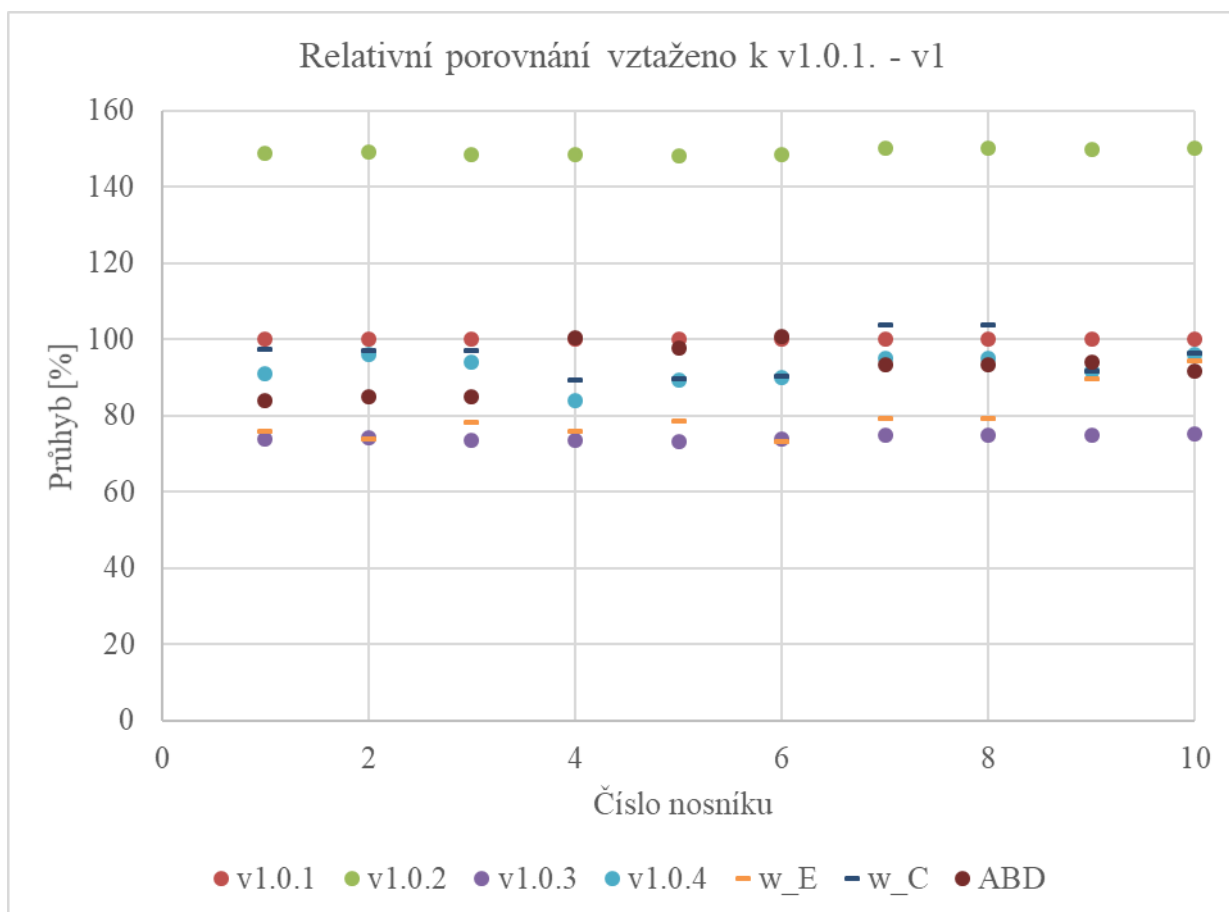
Verze v1 analyzuje dlouhý silnostěnný nosník. Lze tedy předpokládat významný vliv smyku. Pokud porovnáme výsledky MKP metod vůči sobě, pak si jsou poměry relativních hodnot průhybu jedné metody vůči jiné pro všechny nosníky velmi blízké.

Relativní hodnoty dle ABD metody jsou v rozptylu téměř 20 %. Dochází-li ke smyku, stává se ABD metoda více nepřesnou. Tak je definována – bez uvažování smyku. Blízkost ABD metody a MKP prvky objemových skořepin pro dané velmi silnostěnné nosníky neplatí. Metody dle minima doplňkové energie a dle minima deformační energie jsou pouze orientační a pro dané příklady neuvádí smysluplné výsledky.

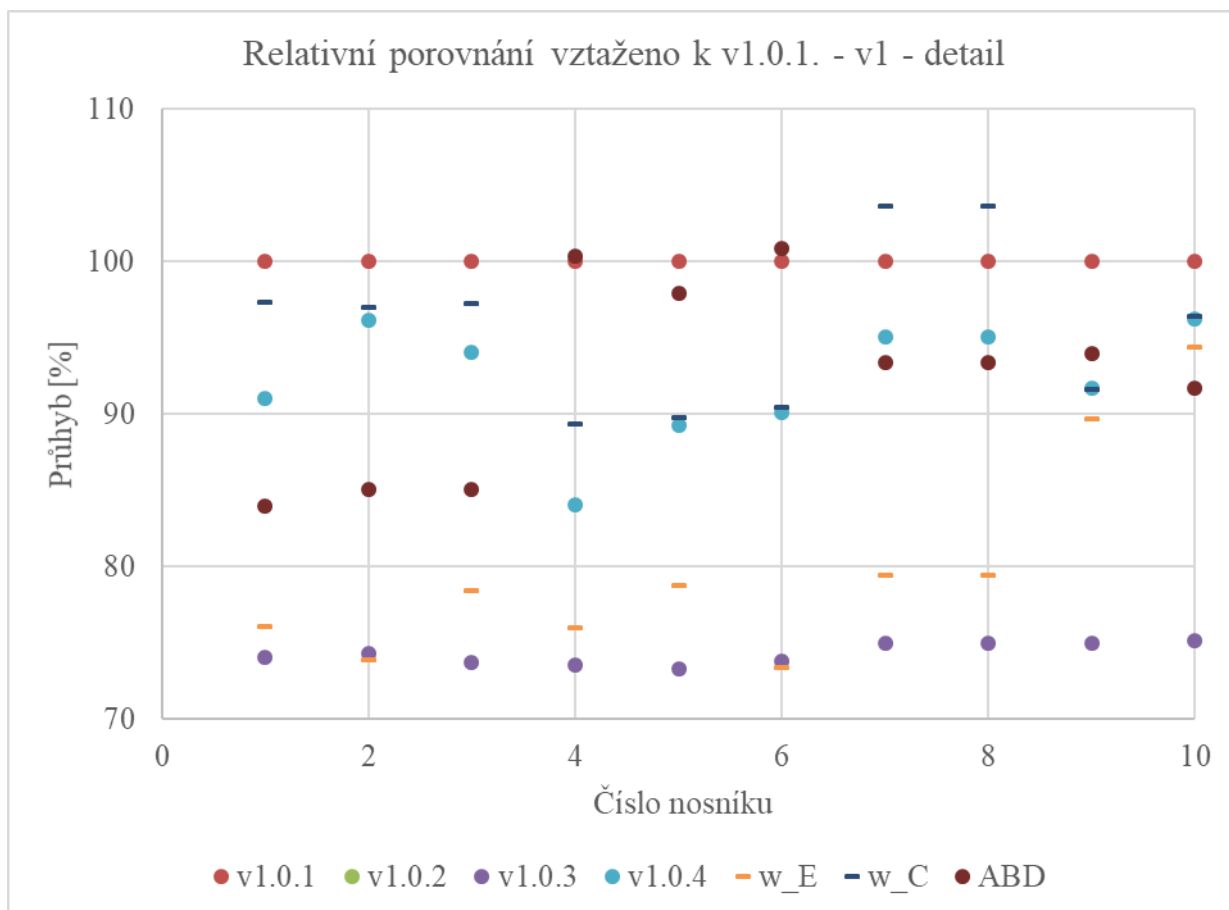
MKP prvky objemových skořepin je ve shodě s referenční metodou do 10 % téměř pro všechny nosníky, rozdíl okolo 10 % a nad 10 % platí pro nosníky 4, 5 a 6, které jsou o úhlech návinu [40°,30°,20°,10°], naopak metoda dle ABD matic je ve shodě s referenční metodou do 10 % téměř pro všechny nosníky, rozdíl nad 10 % platí pro nosníky 1, 2 a 3, které jsou o úhlech návinu [10°,20°,30°,40°]

Tab. 34 Relativní porovnání v1 vztaženo k v1.0.1 – tabulka

Nosník	v1.0.1	v1.0.2	v1.0.3	v1.0.4	WE	WC	WABD
	[%]						
1	100,0	148,8	74,0	91,0	76,0	97,3	83,9
2	100,0	149,1	74,3	96,1	73,9	97,0	85,0
3	100,0	148,5	73,7	94,1	78,4	97,2	85,1
4	100,0	148,4	73,5	84,1	76,0	89,3	100,3
5	100,0	148,3	73,3	89,3	78,8	89,8	97,9
6	100,0	148,7	73,8	90,1	73,4	90,4	100,8
7	100,0	150,3	75,0	95,1	79,4	103,6	93,4
8	100,0	150,3	75,0	95,1	79,4	103,6	93,4
9	100,0	149,9	75,0	91,7	89,7	91,6	93,9
10	100,0	150,1	75,2	96,2	94,4	96,4	91,7



Obr. 36 Relativní porovnání v1 vztaženo k v1.0.0 metodě – graf



Obr. 37 Relativní porovnání v1 vztaženo k v1.0.0 metodě – graf - detail

## 5.2 Verze v2

Jedná se opět o mezikruhový nosník, vetknutý a na volném konci zatížen osamělou silou. Tato verze je odlišná od v1 průřezy nosníků a je zde zvolen jiný materiál než ve verzi v1. Rovněž bude provedeno analytické řešení. Vyhodnocení jednotlivých metod modelování je provedeno obdobně jako ve verzi v1.

### 5.2.1 Geometrie a materiálové vlastnosti

Modelovány nosníky o středním poloměru  $r=20$  mm, které jsou od sebe odlišné tloušťkou a to tak, že jsou dány 4 typy orientace jednotlivých vrstev. Každé ze 4 typů orientace pak je složeno z vrstev o tloušťkách 0,25 mm, 0,5 mm nebo 1 mm. Celkem je tedy dáno 12 různých geometrií. Délka nosníku 800 mm a zatěžovací síla 10 N. Materiálem je opět jednosměrný kompozit, a to epoxidová pryskyřice s uhlíkovými vlákny, jehož vlastnosti potřebné pro výpočet jsou:

Modul pružnosti v podélném směru

$$E_L = 121000 \text{ MPa}$$

Modul pružnosti v příčném směru

$$E_T = 8600\text{MPa}$$

Modul pružnosti ve smyku

$$G_{LT} = 4700\text{MPa}$$

Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\nu_{LT} = 0,27$$

Tab. 35 uvádí tloušťky jednotlivých vrstev a úhly natočení vláken v dané vrstvě.

Tab. 35 Geometrie nosníku pro v2

Nosník	Tloušťka vrstev 1 až 4 [mm]				Úhel natočení vrstvy i [°]			
	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>3</sub>	t <sub>4</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>3</sub>	α <sub>4</sub>
1	0,25	0,25	0,25	0,25	90	0	0	90
2	0,25	0,25	0,25	0,25	45	0	0	45
3	0,25	0,25	0,25	0,25	45	-45	-45	45
4	0,25	0,25	0,25	0,25	90	45	45	90
5	0,5	0,5	0,5	0,5	90	0	0	90
6	0,5	0,5	0,5	0,5	45	0	0	45
7	0,5	0,5	0,5	0,5	45	-45	-45	45
8	0,5	0,5	0,5	0,5	90	45	45	90
9	1	1	1	1	90	0	0	90
10	1	1	1	1	45	0	0	45
11	1	1	1	1	45	-45	-45	45
12	1	1	1	1	90	45	45	90

### 5.2.2 Výsledky analytického výpočtu

Tab. 36 uvádí hodnoty průhybu v působišti osamělé síly, které byly vypočteny analytickými metodami.

Tab. 36 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v2 – vypočteny analyticky

Nosník	Průhyb [mm]			
	W <sub>ABD</sub>	W <sub>Tim</sub>	W <sub>C</sub>	W <sub>E</sub>
1	0,1304	0,1313	0,1310	0,1303
2	0,1361	0,1266	0,1276	0,1060
3	0,5141	0,5142	0,7059	0,2207
4	0,6965	0,6970	0,8230	0,3605
5	0,0651	0,0659	0,0654	0,0651
6	0,0629	0,0634	0,0638	0,0530
7	0,2566	0,2567	0,3523	0,1102
8	0,3476	0,3480	0,4109	0,1801
9	0,0323	0,0330	0,0327	0,0325
10	0,0312	0,0316	0,0318	0,0264
11	0,1273	0,1274	0,1749	0,0547
12	0,1725	0,1729	0,2042	0,0897

Je patrné, že horní a dolní meze, které jsou dány metodami minima deformační energie a minima potenciální energie, jsou v rozumném rozsahu pro nosníky 1, 2, 5, 6, 9 a 10, kde jsou vrstvy pod úhly natočení (90,0,0,90) a (45,0,0,45) nezávisle na jejich tloušťce. V ostatních případech dávají meze nepřesný odhad – příliš velký interval.

### 5.2.3 MKP výpočet

Pro lepší orientaci jsou výpočty MKP rozděleny do verzí:

- Verze v2.0.1      Skořepina se střední rovinou jako referenční plochou.
- Verze v2.0.2      Skořepina, kde vnitřní plocha trubky je referenční rovinou.
- Verze v2.0.3      Skořepina, kde vnější plocha trubky je referenční rovinou.
- Verze v2.0.4      Trubka modelována prvky objemových skořepin.

### 5.2.4 Výsledky MKP výpočtu

*Tab. 37 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v2 dle MKP*

Nosník	Průhyb [mm]			
	v2.0.1	v2.0.2	v2.0.3	v2.0.4
1	0,1444	0,1481	0,1415	0,1448
2	0,1332	0,1368	0,1305	0,1336
3	0,5098	0,5232	0,4976	0,5112
4	0,7055	0,7237	0,6888	0,7058
5	0,0722	0,0759	0,0694	0,0723
6	0,0665	0,0702	0,0638	0,0667
7	0,2535	0,2672	0,2416	0,2538
8	0,3523	0,3708	0,3360	0,3520
9	0,0360	0,0399	0,0332	0,0360
10	0,0332	0,0368	0,0305	0,0332
11	0,1257	0,1401	0,1143	0,1251
12	0,1754	0,1948	0,1598	0,1742

### 5.2.5 Závěry

Je sestavena tabulka (Tab. 38) k relativnímu porovnání výsledků, vztaženo k hodnotě průhybu dané pomocí MKP skořepiny s referenční plochou střednicí. Obr. 38 znázorňuje graf k relativnímu porovnání. Obr. 39 znázorňuje detail tohoto grafu.

Ve verzi v2, kde je analyzován tenkostěnný nosník, dochází ke shodě modelování objemovými skořepinami MKP a skořepinového modelování MKP, kdy je střednice referenční plochou skořepiny.

Relativní hodnoty dle ABD metody jsou ve velmi dobré shodě s hodnotami numerických výpočtů. Nosníky 1, 5 a 9 o úhlech návinu  $[90^\circ, 0^\circ]_s$  jsou nejvíce rozdílné oproti referenční metodě, nosníky jsou tužší a průhyb je o cca 10 % nižší než průhyb dle referenční metody. Ostatní nosníky jsou ve shodě do 6 %.

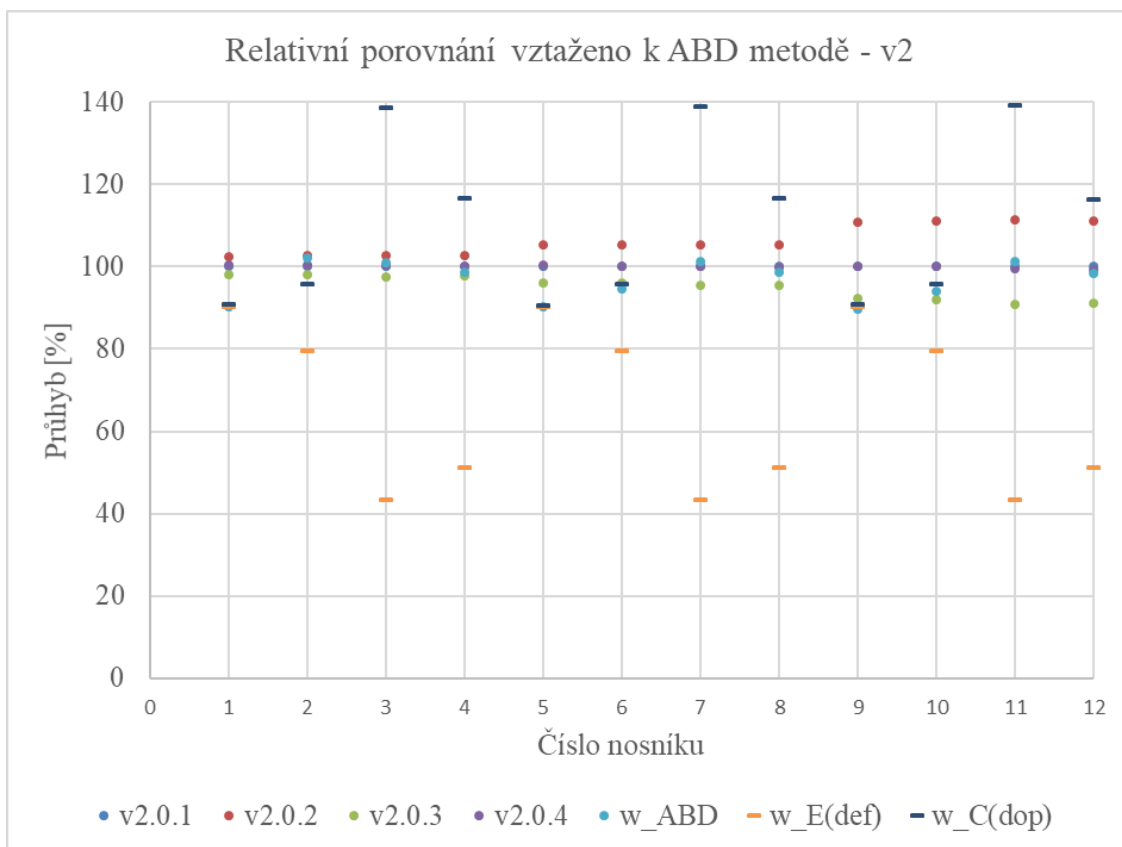
Metoda dle minima doplňkové energie a dle minima deformační energie jsou pouze orientační a pro dané příklady neuvádí smysluplné výsledky.

Lze předpokládat, že predikované výsledky numerických metod pro tenkostěnné nosníky jsou ve výborné shodě s přesnými hodnotami.

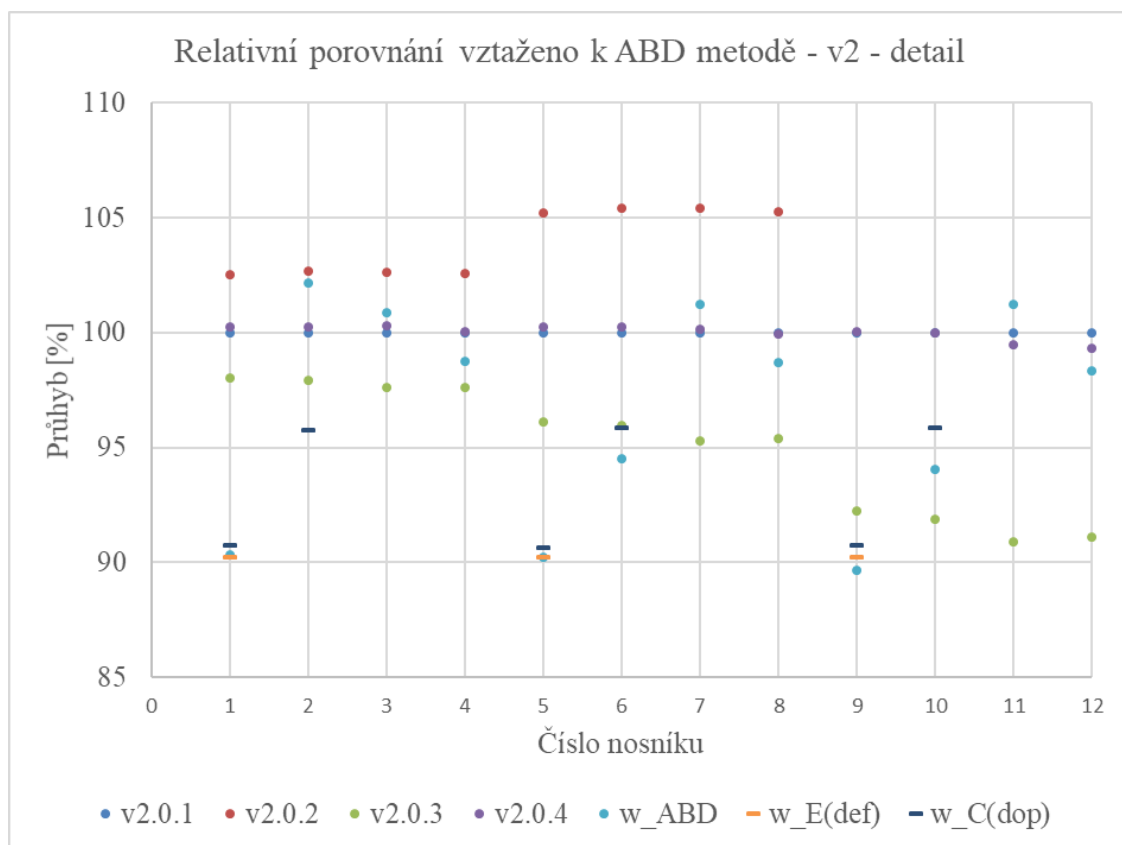
*Tab. 38 Relativní porovnání v2 vztaženo k v2.0.1 – tabulka*

Nosník	v2.0.1	v2.0.2	v2.0.3	v2.0.4	w_E	w_C	w_ABD
	[%]						
1	100,0	102,5	98,0	100,3	90,2	90,7	90,3
2	100,0	102,7	97,9	100,3	79,6	95,8	102,1
3	100,0	102,6	97,6	100,3	43,3	138,5	100,9
4	100,0	102,6	97,6	100,0	51,1	116,7	98,7
5	100,0	105,2	96,1	100,2	90,2	90,6	90,2
6	100,0	105,4	96,0	100,2	79,7	95,9	94,5
7	100,0	105,4	95,3	100,1	43,5	139,0	101,2
8	100,0	105,3	95,4	99,9	51,1	116,7	98,7
9	100,0	110,6	92,2	100,1	90,2	90,8	89,6
10	100,0	111,0	91,9	100,0	79,6	95,9	94,1
11	100,0	111,4	90,9	99,5	43,5	139,1	101,2
12	100,0	111,0	91,1	99,3	51,1	116,4	98,4





Obr. 38 Relativní porovnání v2 vztaženo k v2.0.1 – graf



Obr. 39 Relativní porovnání v2 vztaženo k v2.0.1 – graf – detail

### 5.3 Verze v3

V této verzi jsou analyzovány nosníky dle [13] a to pro další ověření platnosti používaných analytických a numerických metod. Porovnání je provedeno jako porovnání tuhostí vybraných trubek.

#### 5.3.1 Geometrie a materiálové vlastnosti

Modelovány jsou nosníky o vnitřním poloměru  $r_i=25$  mm a tloušťce  $t=14$  mm, které jsou odlišné počtem a orientací vrstev. Celkem je dáno 6 různých geometrií. Délka nosníku 600 mm. Materiálem je opět jednosměrný kompozit, a to polymerní matrice s uhlíkovými vlákny, jehož vlastnosti potřebné pro výpočet jsou:

Modul pružnosti v podélném směru  $E_L = 155000\text{MPa}$

Modul pružnosti v příčném směru  $E_T = 12100\text{MPa}$

Modul pružnosti ve smyku  $G_{LT} = 4400\text{MPa}$

Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)  $\nu_{LT} = 0,248$

Tab. 39 uvádí tloušťky jednotlivých vrstev a úhly natočení vláken v dané vrstvě.

Tab. 39 Geometrie nosníku pro v3

Nosník	Tloušťka vrstvy [mm]				Úhel natočení vrstvy [°]			
	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	14,0	---	---	---	90	---	---	---
2	7,0	7,0	---	---	90	0	---	---
3	7,0	7,0	---	---	90	45	---	---
4	4,7	4,6	4,7	---	90	45	0	---
5	3,5	3,5	3,5	3,5	90	45	-45	0
6	3,5	3,5	3,5	3,5	90	0	90	45

#### 5.3.2 Výsledky analytického výpočtu a výsledky dle [13]

Tab. 40 uvádí hodnoty ohybové tuhosti (EJ) jednotlivých nosníků, které jsou vypočteny analytickými metodami. Rovněž také tuhosti dle [13].

Tab. 40 Hodnoty tuhosti – vypočteny analyticky a dle [13]

Nosník	EJ [13]	EJ (ABD)	EJ (Tim)	EJ (C)	EJ (E)
	[Nmm <sup>2</sup> ]	[Nmm <sup>2</sup> ]	[Nmm <sup>2</sup> ]	[Nmm <sup>2</sup> ]	[Nmm <sup>2</sup> ]
1	18641	18273	18273	17439	17523
2	160560	126620	126620	159840	160610
3	23142	22879	22879	18888	53714
4	125200	95014	95014	122400	139590
5	111370	89398	89398	99924	125890
6	67434	76364	76364	62097	82316

### 5.3.3 MKP výpočet

Pro lepší orientaci jsou výpočty MKP rozděleny do verzí:

- Verze v3.0.1      Skořepina se střední rovinou jako referenční plochou.
- Verze v3.0.2      Skořepina, kde vnitřní plocha trubky je referenční rovinou.
- Verze v3.0.3      Skořepina, kde vnější plocha trubky je referenční rovinou.
- Verze v3.0.4      Trubka modelována prvky objemových skořepin.

### 5.3.4 Výsledky MKP výpočtu

Tab. 41 uvádí hodnoty ohybové tuhosti, které jsou vypočteny pomocí MKP.

Tab. 41 Hodnoty ohybové tuhosti pro v3 dle MKP

Nosník	Ohybová tuhost [Nmm <sup>2</sup> ]			
	EJ (v3.0.1)	EJ (v3.0.2)	EJ (v3.0.3)	EJ (v3.0.4)
1	1,77E+10	1,39E+10	2,14E+10	1,87E+10
2	1,47E+11	1,18E+11	1,74E+11	1,60E+11
3	2,26E+10	1,77E+10	2,75E+10	2,33E+10
4	1,12E+11	8,84E+10	1,36E+11	1,26E+11
5	1,00E+11	7,81E+10	1,22E+11	1,21E+11
6	6,84E+10	5,45E+10	8,20E+10	8,23E+10

### 5.3.5 Závěry

Je sestavena tabulka (Tab. 42) k relativnímu porovnání výsledků, vztaženo k hodnotě ohybové tuhosti dle [13]. Obr. 40 znázorňuje graf k relativnímu porovnání pro všechny metody. Obr. 41 znázorňuje graf k relativnímu porovnání vybraných metod.

Verze v3 prokazuje velmi dobrou shodu stanovení tuhosti dle MKP prvky objemových skořepin, nebo MKP skořepiny s referenční plochou střednicí s přesnou hodnotou. Dle

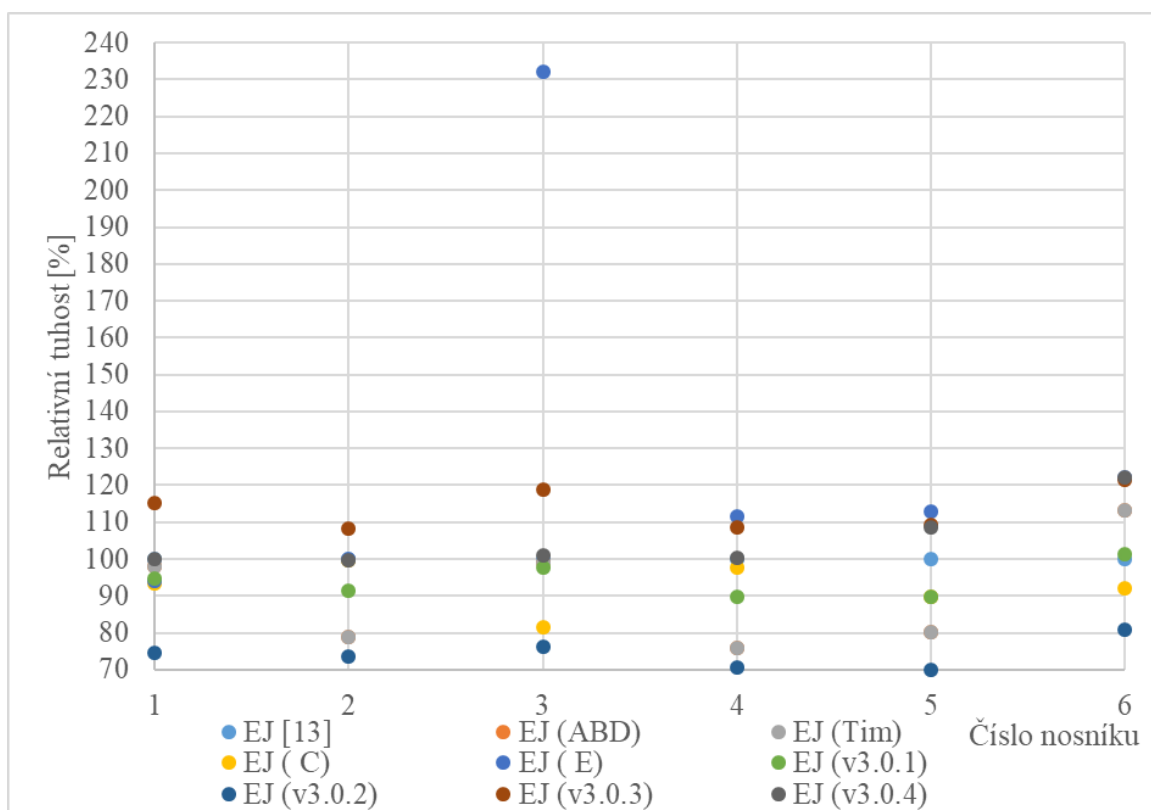
MKP s RP střednicí vykazují nosníky 2, 4 a 5, které mají vnější vrstvu o úhlu návinnu vláken 0°, o cca 10 % nižší tuhost, než je predikovaná tuhost. Ostatní nosníky jsou ve shodě s přesnými výsledky do 5,2 %. Dle MKP prvky objemových skořepin jsou výsledky pro nosníky 1, 2, 3 a 4 téměř shodné s přesnými hodnotami, zatímco výsledky pro nosníky 5 a 6 se liší o 8,7 % a 22 %. Lze se domnívat, že tento velký rozdíl zapříčinil vyšší počet vrstev u daných nosníků.

Při porovnání metody ABD matic s přesnými výsledky jsou hodnoty tuhosti obdobně jako u MKP skořepiny s RP střednicí nosníků 2, 4 a 5 značně rozdílné, a to o 20 až 25 % nižší. Výsledky pro ostatní nosníky jsou ve velmi dobré, nebo v dobré shodě s přesnými výsledky.

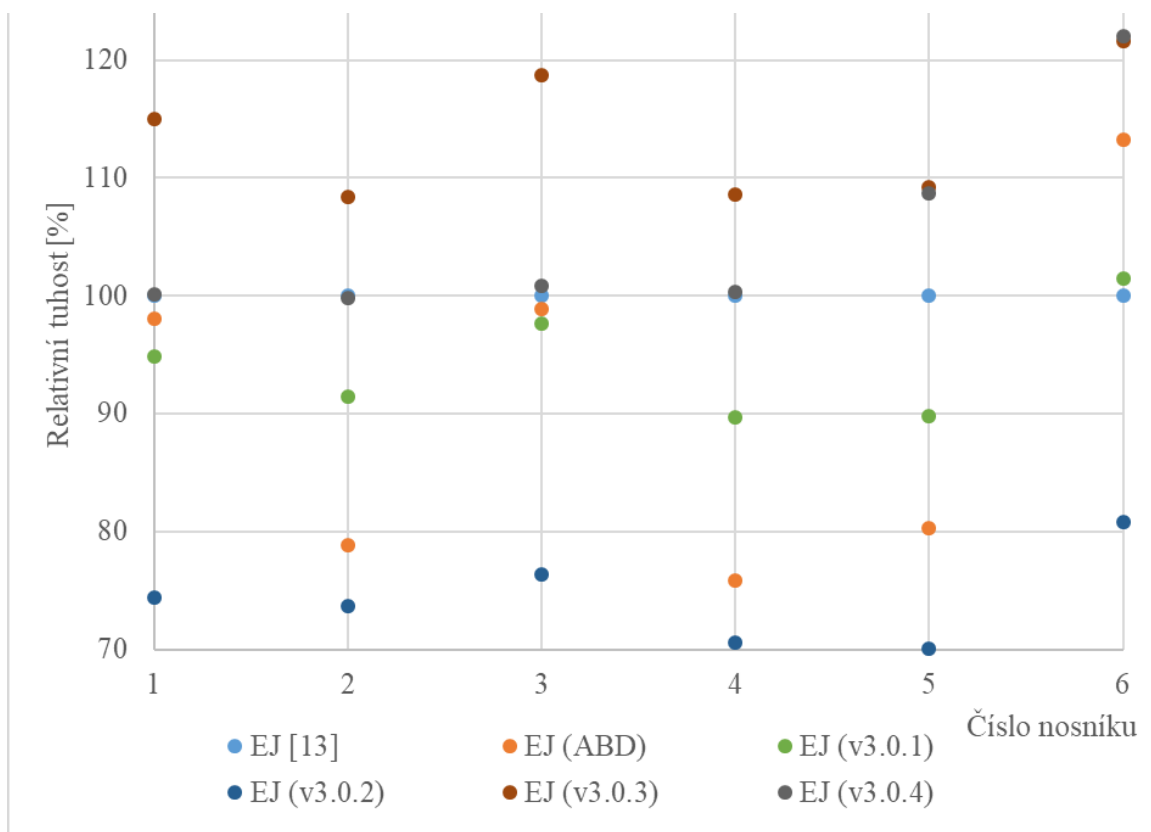
Analyzované nosníky byly shodných geometrických parametrů, a přesto jsou výsledky jednotlivých nosníků pro jednu danou metodu velmi odlišné. Lze tedy říci, že velmi důležitým parametrem pro přesnost dané metody je kromě tloušťky profilu i orientace jednotlivých vrstev a rovněž uspořádání - symetrie, antisymetrie apod.

Tab. 42 Relativní porovnání vztaženo k [13] – tabulka

Ohybová tuhost									
Nosník	EJ [13]	EJ (ABD)	EJ (Tim)	EJ (C)	EJ (E)	EJ (v3.0.1)	EJ (v3.0.2)	EJ (v3.0.3)	EJ (v3.0.4)
	[Nmm <sup>2</sup> ]								
1	100,0	98,0	98,0	93,6	94,0	94,8	74,4	115,0	100,1
2	100,0	78,9	78,9	99,6	100,0	91,4	73,7	108,4	99,8
3	100,0	98,9	98,9	81,6	232,1	97,7	76,3	118,7	100,9
4	100,0	75,9	75,9	97,8	111,5	89,7	70,6	108,5	100,3
5	100,0	80,3	80,3	89,7	113,0	89,8	70,1	109,2	108,7
6	100,0	113,2	113,2	92,1	122,1	101,5	80,8	121,6	122,0



Obr. 40 Relativní porovnání vztaheno k [13] – graf



Obr. 41 Relativní porovnání vztaheno k [13] – graf vybrané metody

## 5.4 Závěry

Verze v1 a verze v2 uvádí geometricky odlišné nosníky. Z výsledků verze v1, kdy je analyzován velmi silnostěnný nosník, lze usuzovat, že výsledky MKP metod skořepinového prvku s referenční plochou střednicí a prvky objemových skořepin budou v dobré až velmi dobré shodě s přesnými hodnotami. Ostatní metody se můžou jevit jako velmi nepřesné.

Z výsledků verze v2, kdy je analyzován tenkostěnný nosník, lze usuzovat, že výsledky všech numerických metod a analytické metody dle ABD matic jsou ve výborné shodě s přesnými hodnotami.

Rozdíl v rozptylu výsledků v1 a v2 je dán velkým vlivem smyku, který je u kompozitních elementů významnější než u elementů z tradičních homogenních izotropních materiálů.

Pro možné zpřesnění oblastí platnosti zde aplikovaných metod byly analyzovány nosníky verze v3, jejichž přesné hodnoty ohybové tuhosti byly zjištěny dle [13]. Verze v3 opět předpokládá velmi dobré výsledky pro MKP skořepinového prvku s referenční plochou střednicí a MKP objemovými skořepinami.

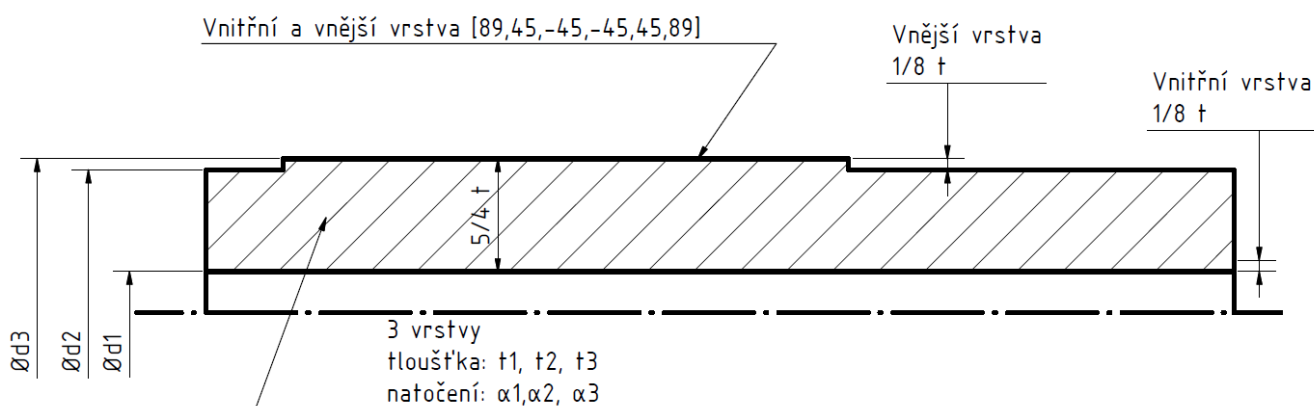
## 6. Optimalizace

Výše uvedené verifikované metody jsou použity pro optimalizaci materiálové skladby a geometrických vlastností myšleného kompozitního vřetene obráběcího stroje. Za tímto účelem je použit model prvky objemových skořepin z důvodu dobré přesnosti daného modelu a dobře proveditelného zadávání okrajových podmínek a parametrů optimalizace.

### 6.1 Zadání úlohy

Obr. 42 znázorňuje myšlené vřeteno a jeho parametry k optimalizaci. Jedná se o tyč mezikruhového průřezu s osazením pro ložiska.

- Technologická omezení:
  - min. 10 % vláken o úhlu návinu  $\pm 45^\circ$  a 10 % vláken o úhlu návinu  $89^\circ$
  - min. vnitřní průměr  $d_1=16$  mm
  - max. vnější průměr  $d_3=60$  mm
- Cíl optimalizace:
  - Vnitřní průměr, vnější průměr a skladba tyče (úhel natočení vláken a tloušťka vrstev uprostřed) při maximální tuhosti a teplotní odolnosti.

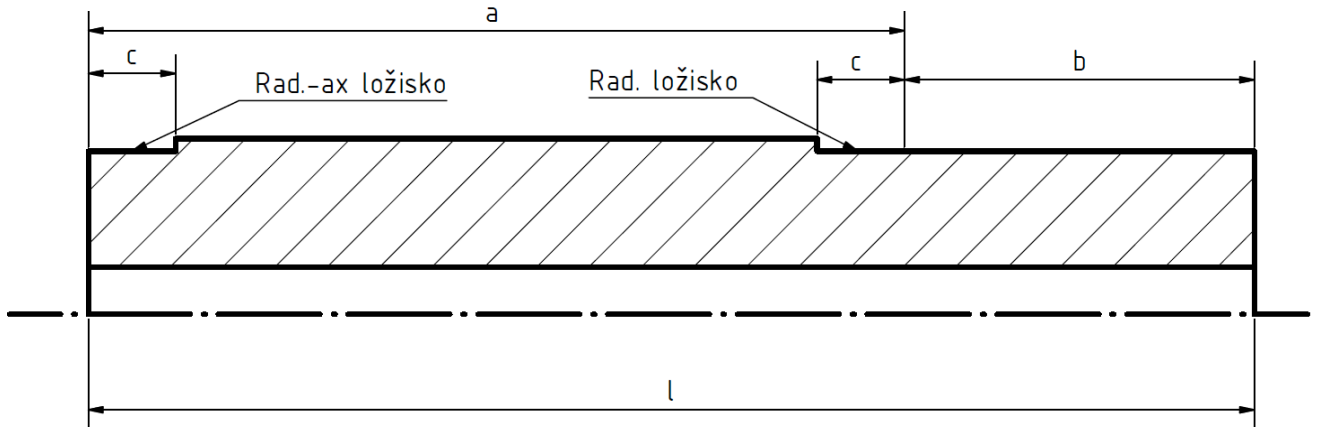


Obr. 42 Optimalizované vřeteno

Aby bylo možné posoudit vliv smyky, je trubka řešena ve dvou délkách, a to TR500 a TR800. Geometrie a číselné hodnoty délkových rozměrů viz Tab. 43 a Obr. 43.

Tab. 43 Číselné hodnoty délkových rozměrů optimalizované trubky

	a	b	c	l
TR 500	400	100	50	500
TR 800	600	200	50	800



Obr. 43 Délkové rozměry optimalizované trubky

## 6.2 Postup řešení

Byl vytvořen model pro výpočet dle MKP pro objemové těleso, viz 4.1.4.1 nebo 4.2.4.1. Model byl parametrizován a byly zadány omezující podmínky a závislosti.

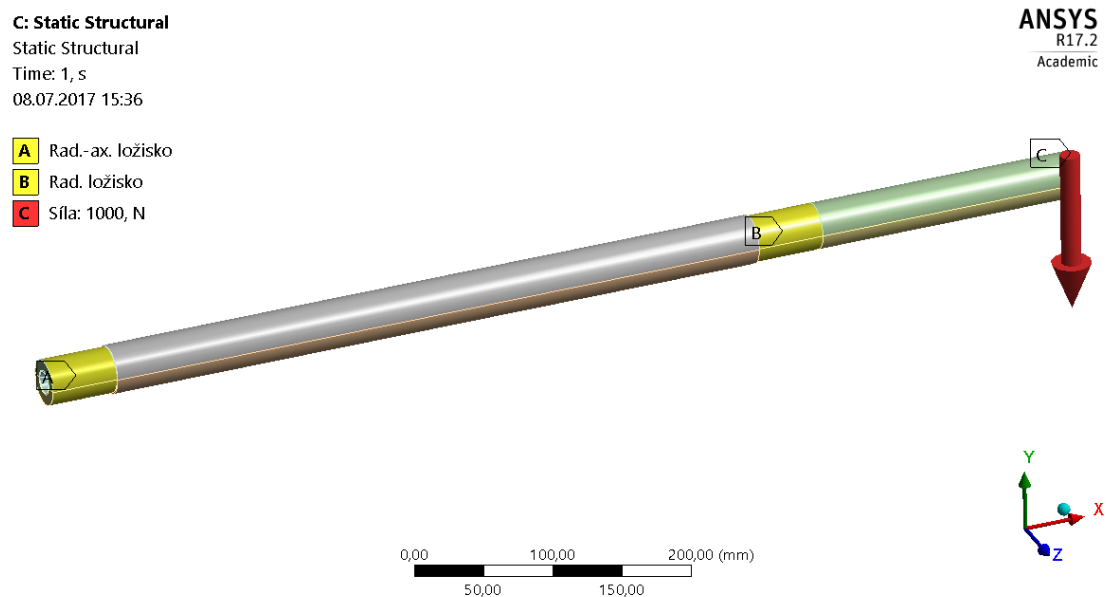
- optimalizační parametry:
  - $[\text{Ø}d_1; t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_1, t_2, t_3]$
- omezující podmínky:
  - $\min \text{Ø}d_1$  je ze zadání roven 16 mm, max. pak 20 mm
  - $t \in \langle 4; 10 \rangle$  mm
  - úhly natočení vláken vnitřních vrstev  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \langle 0; 89 \rangle^\circ$
  - poměrné tloušťky vnitřních vrstev  $t_1, t_2, t_3 \in \langle 0; 0,1 \rangle$
- Závislosti:
  - $\text{Ø}d_3 = \text{Ø}d_1 + 5/4 t$
  - $\text{Ø}d_2 = \text{Ø}d_1 + 9/8 t$

Byly definovány cílové funkce pro dosažení cíle optimalizace, a to:

- 1.CF Minimalizace absolutní hodnoty průhybu v místě zatížení osamělou silou.
- 2.CF Maximalizace první vlastní frekvence.
- 3.CF Nulová změna délky trubky vlivem změny teploty.
- 4.CF 1.CF, 2.CF a 3.CF současně při shodné váznosti.



1.CF a 2.CF jsou sestaveny s účelem najít takové řešení, kdy trubka dosáhne maximální tuhosti. 3.CF je definována tak, aby byly nalezeny parametry zajišťující teplotní odolnost trubky. Obr. 44 znázorňuje MKP model trubky, na který jsou aplikovány okrajové podmínky shodné pro všechny modely sloužící k řešení úlohy, rovněž je znázorněna působící síla použita pro 1.CF. 2.CF byla stanovena pomocí modální analýzy a 3.CF pomocí statické úlohy, kde byla řešena změna délky trubky při změně teploty o 10°C.



Obr. 44 MKP model pro optimalizaci – statická analýza

Optimalizace byla provedena aplikací genetického algoritmu, jež je součástí programu Ansys®, a to s následujícími parametry:

Počet jedinců v první generaci	100
Počet jedinců v druhé generaci a následujících generacích	50
Procento konvergence stability	5
Maximální počet iterací	20
Maximální počet výstupních jedinců	3

### 6.3 Výsledky optimalizace

Dále jsou uvedeny výsledky optimalizační úlohy. Pro každou CF jsou uvedena 3 řešení – varianty (V1, V2, V3) skladby a geometrie nosníku. Rovněž jsou uvedeny hodnoty dopočtených efektivních modulů pružnosti v tahu a ve smyku.

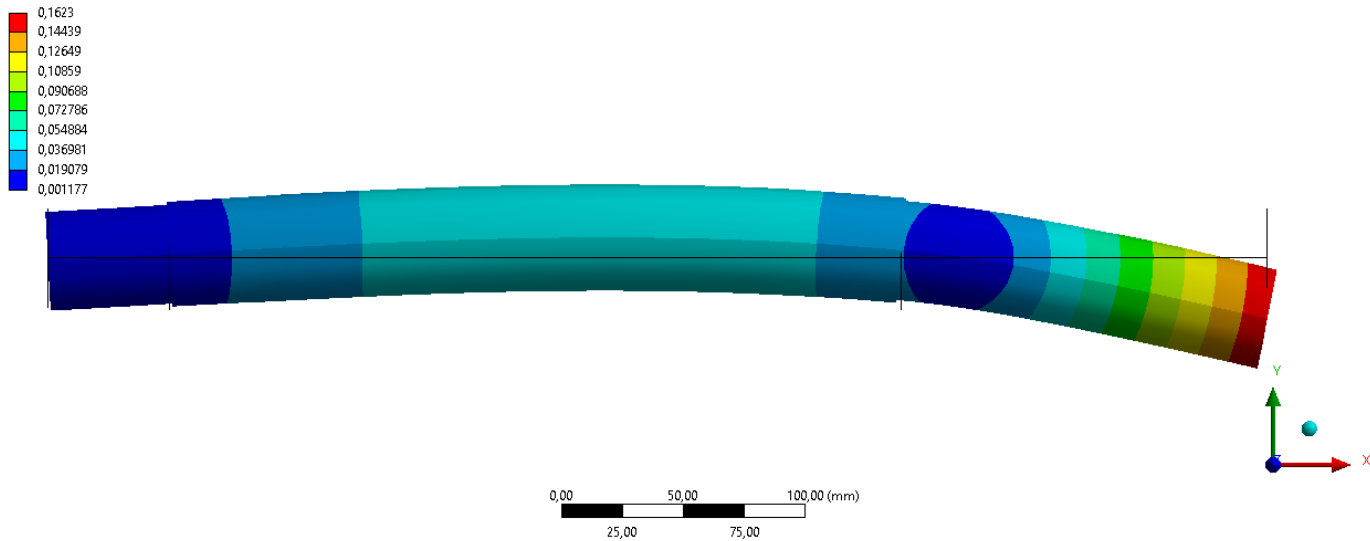
### 6.3.1 Výsledky pro CF1 – statická analýza: zatíženo silou

Tab. 44 uvádí jednotlivé varianty pro CF1. Obr. 45 znázorňuje deformovaný nosník délky 500 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF1, a to V1. Obr. 46 znázorňuje deformovaný nosník délky 800 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF1, a to V1.

Tab. 44 Výsledky TR500 a TR800 pro CF1

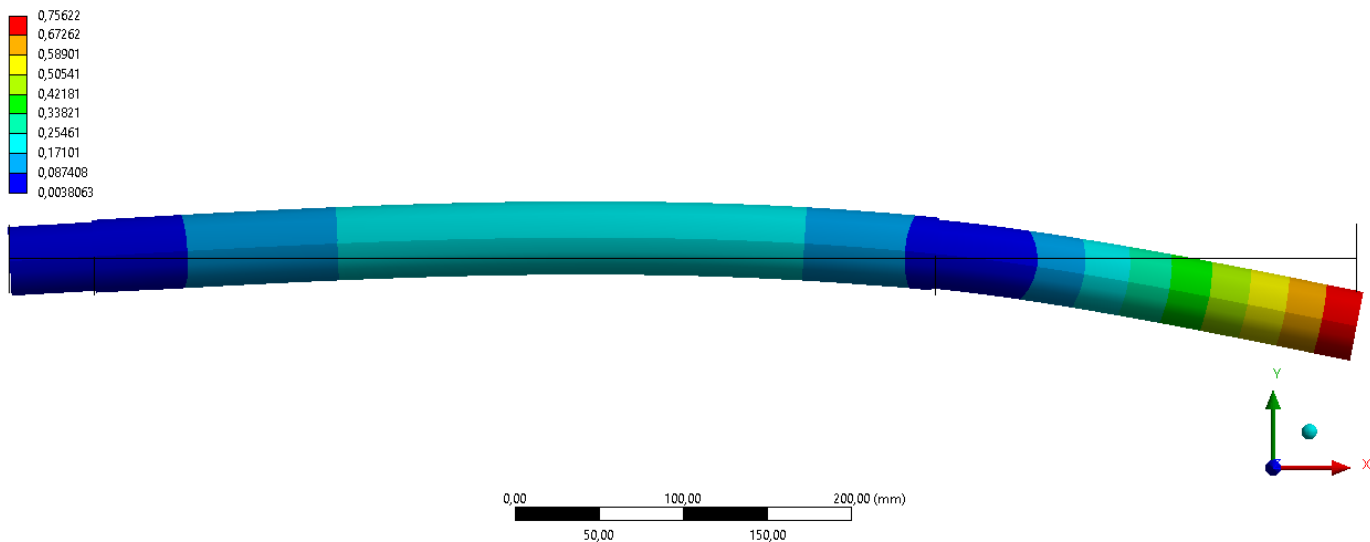
Statická analýza: zatíženo silou na volném konci						
CF1	500 mm			800 mm		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
d1 (mm)	19,3	19,2	19,8	19,6	19,2	19,7
t (mm)	9,7	9,7	9,5	9,7	9,7	9,6
t1 (mm)	5,3	1,4	3,3	2,1	5,2	4,8
t2 (mm)	1,2	5,4	1,5	5,1	1,2	1,9
t3 (mm)	3,3	2,9	4,7	2,5	3,3	3,0
$\alpha 1$ (°)	4,1	5,8	4,0	4,6	4,0	4,1
$\alpha 2$ (°)	14,8	9,8	26,0	10,5	10,0	20,1
$\alpha 3$ (°)	5,2	20,9	5,1	20,2	1,5	20,9
$E_x$ (MPa)	121390	108350	115230	110210	123080	105030
$E_y$ (MPa)	24439	24581	25370	24560	24573	24606
$G_{xy}$ (MPa)	9101	12696	11033	12204	8423	13037
$y_{min}$ (mm)	-0,16	-0,16	-0,16	-0,75	-0,76	-0,76

**B: Static Structural**  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1  
Max: 0,1623  
Min: 0,001177  
09.08.2017 14:44



*Obr. 45 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF1*

**B: Static Structural**  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1  
Max: 0,75622  
Min: 0,0038063  
09.08.2017 15:21



*Obr. 46 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF1*

CF 1 je postavena tak, aby byly nelezeny takové varianty skladby a geometrie nosníku, kdy je ohybová tuhost co nejvyšší.

Jednotlivé varianty uvádí vrstvy o úhlech návinu vláken v intervalu od  $1,5^\circ$  do  $26^\circ$  při téměř maximálním průměru a tloušťce nosníku.

Hodnoty efektivních modulů pružnosti jsou potvrzením snahy o návrh nosníku s vysokou ohybovou tuhostí, nýbrž jednotlivé varianty mají efektivní modul pružnosti ve směru osy x, který vyjadřuje axiální tuhost (tuhost v ohybu/taku), několikanásobně vyšší oproti efektivnímu modulu pružnosti ve směru osy y, který vyjadřuje tečnou tuhost.

Hodnoty efektivních modulů pružnosti ve směru osy x jsou v rozmezí od cca 105 000 Nmm<sup>-2</sup> do cca 120 000 Nmm<sup>-2</sup>, ve směru osy y jsou hodnoty okolo 25 000 Nmm<sup>-2</sup> a hodnoty smykového modulu jsou v rozmezí od cca 8 000 Nmm<sup>-2</sup> do cca 13 000 Nmm<sup>-2</sup>.

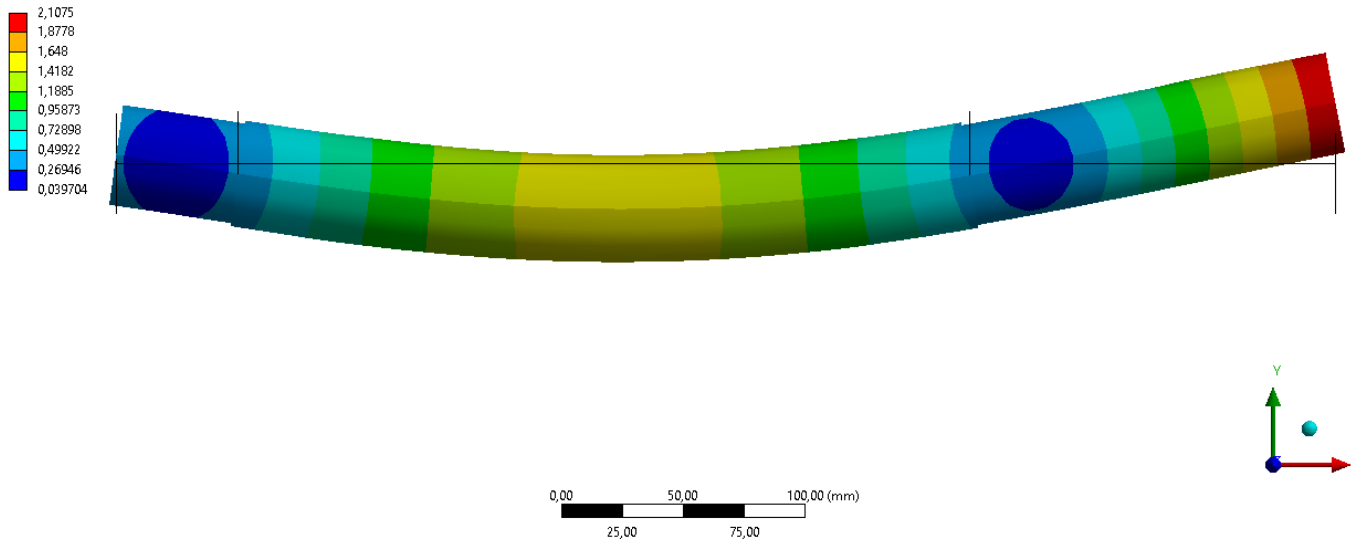
### 6.3.2 Výsledky pro CF2 – Modální analýza

Tab. 45 uvádí jednotlivé varianty pro CF2. Obr. 47 znázorňuje deformovaný nosník délky 500 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF2, a to V1. Obr. 48 znázorňuje deformovaný nosník délky 800 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF2, a to V1.

Tab. 45 Výsledky TR500 a TR800 pro CF2

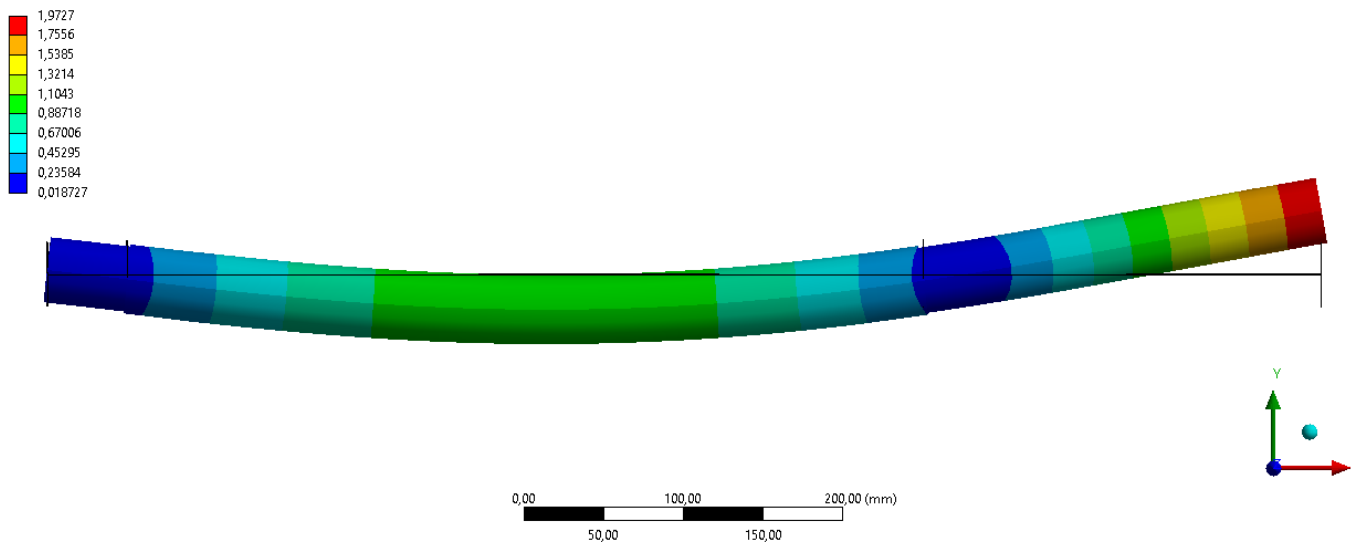
Modální analýza						
CF2	500 mm			800 mm		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
d1 (mm)	19,7	19,7	19,7	19,58	19,32	19,48
t (mm)	9,7	9,7	9,7	9,70	9,70	9,46
t1 (mm)	1,4	4,1	3,0	4,4	3,3	5,0
t2 (mm)	6,3	4,2	5,5	1,3	3,1	2,8
t3 (mm)	2,2	1,6	1,4	4,0	3,3	1,7
α1 (°)	4,1	5,8	5,8	3,6	3,0	4,00
α2 (°)	10,3	11,2	8,0	10,2	3,3	10,0
α3 (°)	33,5	22,0	2,1	1,9	1,3	22,0
E <sub>x</sub> (MPa)	98181	112600	121400	123140	124260	113660
E <sub>y</sub> (MPa)	25315	24313	24251	24575	24575	24960
G <sub>xy</sub> (MPa)	13651	11498	9176	8397	7961	10816
f (Hz)	34,30	34,19	34,13	13,53	13,45	13,26

**B: Modal**  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Frequency: 34,296 Hz  
Unit: mm  
Max: 2,1075  
Min: 0,039704  
09.08.2017 14:05



Obr. 47 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF2

**B: Modal**  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Frequency: 13,528 Hz  
Unit: mm  
Max: 1,9727  
Min: 0,018727  
09.08.2017 14:26



Obr. 48 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF2

CF 2 je postavena obdobně, jako CF 1, a proto jsou i výsledné hodnoty parametrů podobné. Jednotlivé varianty uvádí vrstvy o úhlech návinu vláken v intervalu od  $1,9^\circ$  do  $33,5^\circ$  při téměř maximálním průměru a tloušťce nosníku. Hodnoty efektivních modulů pružnosti jsou obdobné jako u CF 1.

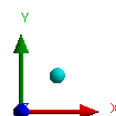
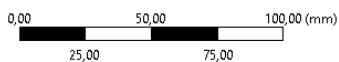
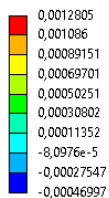
### 6.3.3 Výsledky pro CF3 - statická analýza: vliv změny teploty

Tab. 46 uvádí jednotlivé varianty pro CF3. Obr. 49 znázorňuje deformovaný nosník délky 500 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF3, a to V1. Obr. 50 znázorňuje deformovaný nosník délky 800 mm, který je výsledkem optimalizace při aplikování CF3, a to V1.

Tab. 46 Výsledky TR500 a TR800 pro CF3

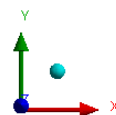
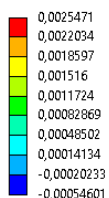
Statická analýza: vliv změny teploty						
CF3	500 mm			800 mm		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
d1 (mm)	18,3	19,2	18,3	18,3	16,7	19,6
t (mm)	4,7	9,7	4,7	4,7	5,7	5,5
t1 (mm)	3,2	3,4	2,9	2,9	0,7	1,6
t2 (mm)	0,9	4,2	1,3	1,3	3,4	2,2
t3 (mm)	0,6	2,1	0,5	0,5	1,6	1,7
$\alpha 1$ (°)	14,4	21,8	12,2	12,2	21,2	15,8
$\alpha 2$ (°)	14,5	10,5	29,9	29,9	13,0	13,9
$\alpha 3$ (°)	23,3	59,3	27,5	27,5	5,9	40,5
$E_x$ (MPa)	89779	77521	79123	79123	99829	69892
$E_y$ (MPa)	36917	34387	37196	37196	33371	36202
$G_{xy}$ (MPa)	16180	18279	18226	18226	13620	19818
$x_{max}$ (mm)	-4,65E-06	2,92E-05	-4,43E-05	1,66E-05	2,65E-05	-2,82E-05

**B: Static Structural**  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation(X Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
Max: 0,0012805  
Min: -0,00046997  
09.08.2017 20:07



*Obr. 49 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF3*

**B: Static Structural**  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation(X Axis)  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
Max: 0,0025471  
Min: -0,00054601  
09.08.2017 18:34



*Obr. 50 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF3*

CF 3 je postavena tak, aby byly nelezeny takové varianty skladby a geometrie nosníku, kdy při změně teploty nedochází ke změně délky nosníku, nebo je tato změna minimální.

Jednotlivé varianty uvádí vrstvy o úhlech návinnu vláken v intervalu od 5,9° do 59,3°, převažují ale ty do 30°, průměr  $d_1$  v horní polovině intervalu a tloušťku nosníku převážně u dolní hranice omezujícího intervalu.

Hodnoty efektivních modulů pružnosti jsou rozdílné oproti výsledkům předešlých cílových funkcí CF 1 a CF 2. Efektivní modul ve směru x se oproti předcházejícím výsledkům snížil, a to z hodnot v průměru okolo 110 000 Nmm<sup>-2</sup> na hodnoty od cca 70 000 Nmm<sup>-2</sup> do cca 100 000 Nmm<sup>-2</sup>, a naopak ve směru y zvýšil, a to z hodnot okolo 25 000 Nmm<sup>-2</sup> na hodnoty okolo 36 000 Nmm<sup>-2</sup> a došlo i ke zvýšení efektivního smykového modulu, a to z hodnot v průměru okolo 11 000 Nmm<sup>-2</sup> na hodnoty od cca 13 000 Nmm<sup>-2</sup> do cca 20 000 Nmm<sup>-2</sup>.

### 6.3.4 Výsledky pro CF4 – kombinace předchozích cílových funkcí

Tab. 47 uvádí jednotlivé varianty pro CF4. 0 uvádí porovnání výsledků cílových funkcí 1, 2 a 3, jež jsou referenčními, s výsledky cílové funkce 4.

Tab. 47 Výsledky TR500 a TR800 pro CF4

Vše						
CF4	500 mm			800 mm		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
d1 (mm)	19,2	19,4	18,7	18,6	19,2	16,4
t (mm)	9,7	9,7	9,3	9,5	9,7	9,4
t1 (mm)	1,9	3,4	4,2	3,5	2,6	3,2
t2 (mm)	3,9	5,0	3,2	2,8	5,4	3,7
t3 (mm)	3,9	1,3	2,0	3,2	1,7	2,5
$\alpha_1$ (°)	2,5	21,4	10,7	4,5	21,8	17,5
$\alpha_2$ (°)	20,7	2,8	8,9	23,1	10,5	7,4
$\alpha_3$ (°)	10,8	60,3	29,8	22,4	59,3	3,4
$E_x$ (MPa)	106890	95656	102130	95516	85992	113010
$E_y$ (MPa)	24780	31675	25631	24985	32868	25016
$G_{xy}$ (MPa)	14040	14953	13869	15765	16792	11222
f (Hz)	32,7	31,8	32,3	12,3	12,0	11,6
$y_{min}$ (mm)	-0,17	-0,18	-0,19	-0,94	-0,93	-1,16
$x_{max}$ (mm)	-6,16E-04	5,28E-04	1,08E-03	-4,41E-04	1,61E-04	2,09E-05



Tab. 48 Porovnání výsledků CF1, CF2 a CF3 s výsledky CF4

Porovnání CF		V1	V2	V3	V1	V2	V3
CF1	$y_{\min}$ (%)	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
CF2	$f$ (%)	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
CF3	$x_{\max}$ (%)	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
CF4	$f$ (%)	106,72	110,28	114,54	124,66	123,55	152,30
	$y_{\min}$ (%)	95,31	93,12	94,78	90,99	89,33	87,35
	$x_{\max}$ (%)	13261,80	1809,79	-2429,10	-2664,83	605,07	-73,88

CF 4, jež je kombinací předešlých cílových funkcí udává trubky s vrstvami o úhlech návinu v intervalu od 2,5° do 60,3°, ovšem převažují ty do 30°. Hodnoty průměru  $d_1$  a tloušťky nosníku jsou u horní hranice omezujících intervalů. Hodnoty efektivních modulů jsou číselně na rozmezí mezi jednotlivými cílovými funkcemi.

Pro lepší představu je zde uvedena tabulka k relativnímu porovnání číselných hodnot výsledků – první vlastní frekvence, průhybu a prodloužení. I přesto, že byl kladen důraz na shodnou vážnost cílových funkcí, jsou hodnoty změny první vlastní frekvence a průhybu vlivem zatížení řádově shodné, ale došlo k několikanásobné změně velikosti změny délky nosníku vlivem teploty. Výsledkem CF 3 jsou převážně varianty s vrstvami o úhlech návinu mezi 10° a 30°, zatímco pro CF1 a CF2 to jsou převážně úhly do 15°. Tímto jsou pak ovlivněny výsledky CF4.

## 6.4 Závěry

Byl vytvořen plně funkční model pro zjištění skladby a geometrických parametrů myšleného kompozitního vřetene tak, aby splňoval požadavky na ohybovou tuhost, celkovou tuhost či teplotní odolnost v podélném směru, jakožto model, jež měl za cíl splňovat všechny tři požadavky současně.

Výsledná řešení jsou taková, kde převažují vrstvy o úhlech návinu do 30° a nosník má tloušťku i průměr  $d_1$  u horní hranice omezujícího intervalu.

## 7. Závěr

Cílem této práce bylo najít oblasti platnosti aplikovaných analytických a numerických metod pro zjištění tuhosti daných tenkostěnných i silnostěnných mezikruhových nosníků. Ty byly použity na příklady. Následně pak byla provedena optimalizace geometrických a materiálových parametrů myšleného kompozitního vřetene, a to tak, aby byly splněny požadavky na tuhost a teplotní odolnost

Bylo zjištěno, že velmi vhodnou metodou pro predikci ohybové tuhosti tenkostěnného i silnostěnného mezikruhového kompozitního nosníku je model MKP, a to skořepina, kdy je referenční plochou střednice. Další vhodné metody jsou model MKP prvky objemových skořepin, jehož výhoda je možnost dobrého začlenění do větších soustav, jelikož je to model objemový, a analytický výpočet pomocí ABD matic. Nespornou výhodou uvedené vhodné metody pro výpočet, metody pomocí ABD matic, jsou nižší nároky na výpočetní výkon oproti numerickým metodám.

Lze tedy doporučit používání analytické metody pomocí ABD matic pro rychlé přiblížení hodnoty ohybové tuhosti myšlené kompozitní trubky a pro přesné stanovení MKP skořepiny s referenční plochou střednicí, případně model prvky objemových skořepin pro případy, kde bude použití vyžadováno.

Stanovení smykové tuhosti numericky bylo řádově přesné pro tenkostěnné nosníky, pro silnostěnné nosníky použité numerické metody selhaly. Metoda Timošenkova byla rovněž velmi nepřesná.

Metody byly aplikovány na příklady. Pro silnostěnné nosníky byly opět zjištěny dobré výsledky MKP skořepiny s referenční plochou střednicí a modelu prvky objemových skořepin. Pro tenkostěnné nosníky byly zjištěny dobré výsledky při použití všech numerických metod i analytické metody pomocí ABD matic.

Je důležité připomenout vliv smyku u kompozitních materiálů, který je významnější oproti izotropním materiálům a způsobuje pak výše uvedené rozdíly ve výsledcích silnostěnných a tenkostěnných trubek.

Model MKP prvky objemových skořepin byl použit pro parametrický model sloužící k optimalizaci geometrických a materiálových parametrů myšleného kompozitního vřetene. Jednotlivé výsledky – varianty potvrzovaly požadavky na tuhost svými hodnotami přepočtených efektivních modulů. Takovýto model lze tedy pro optimalizaci doporučit.

## Literatura

1. KOLLAR, L. P. a G. S. SPRINGER. Mechanics of composite structures. New York: Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521801652.
2. JONES, R. M. Mechanics of composite materials. 2nd ed. Philadelphia, PA: Taylor & Francis, c1999. ISBN 1-56032-712-x.
3. CHAWLA, K. K. Composite materials: science and engineering. 2nd ed. New York: Springer, 1998. Materials research and engineering (Unnumbered). ISBN 0-387-98409-7.
4. PROCHÁZKA, P. Základy mechaniky složených materiálů. Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0913-2.
5. LAŠ, V. Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.
6. BARBERO, E. J. Introduction to composite materials design. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN 978-1-4200-7915-9.
7. TIMOSHENKO, S.P. a J.N. GOODIER. Theory of elasticity. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1987. ISBN 9780070647206.
8. MRÁZ, P. a J. TALÁCKO. Konstrukce strojů s kompozitními materiály. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03540-9.
9. KULÍŠEK, V. a T. MAREŠ. Verifikované výpočtové modely silnostěnných kompozitních struktur. Praha. Výzkumná zpráva V-14-054 za projekt 1 - WP07\_\_KOMPOZITY, 2014.
10. KULÍŠEK, V. Návrh a analýza kompozitních konstrukcí [online]. Praha, 2007 [cit. 2016-11-06].  
Dostupné z: <http://www.mechanika2.fs.cvut.cz/documents/mkmkp.pdf>
11. Obráběcí stroje na EMO Hannover 2013.: sborník k odbornému semináři. Praha: Společnost pro obráběcí stroje, 2013. ISBN 978-80-904077-5-6.
12. MAREŠ, T., ZAVŘELOVÁ, T. a V. KULÍŠEK. Composite beam stiffness. Praha, 2017.
13. CANHUI Z., SUONG V. H. a L. Pei. A method to analyze the pure bending of tubes of cylindrically anisotropic layers with arbitrary angles including 0° or 90°. Composite Structures 109 (2014), s. 57-67, 2014.
14. Ansys Help ®
15. MALÁ A. Analytické výpočtové metody pro návrh kompozitních elementů výrobních strojů. Praha. Bakalářská práce, 2015.
16. Modelování skořepinových konstrukcí MKP [online]. Praha: ČVUT v Praze Fakulta strojní, 2009 [cit. 2017-04-04]. Dostupné z: [http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/predmety/mkp1/podklady/skorepiny\\_ju.pdf](http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/predmety/mkp1/podklady/skorepiny_ju.pdf)
17. CARBON FIBRE COMPOSITE DRIVE SHAFTS [online]. 2017 [cit. 2017-05-01]. Dostupné z: <http://www.carbon-light.com/Drive%20Shafts.html>
18. LAMPEAS, G. a K. FOTOPOULOS. Interlaminar Stresses Calculation Using a Stacked-Shell Finite Element Modeling Approach. International Journal of Applied Mechanics [online]. 2015, 07(05), 1550067- [cit. 2017-05-07]. DOI: 10.1142/S1758825115500672. ISSN 1758-8251. Dostupné z: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1758825115500672>

## Seznam obrázků

Obr. 1 Hnací hřídel automobilu z kompozitu [17].....	7
Obr. 2 Hybridní vřeteno kompozit – kov [11] .....	8
Obr. 3 Geometrie laminátu tvořeného N vrstvami [6] .....	10
Obr. 4 Vetknutý nosník – modelový příklad nosníku namáhaného na ohyb a příčný smyk pro rychlý návrh kompozitní skladby a geometrie výztuže [9].....	11
Obr. 5 Souřadné systémy [2].....	12
Obr. 6 Přístupy pro modelování MKP [10].....	17
Obr. 7 Dělení laminátu do sublaminátů .....	18
Obr. 8 Shell 181 [14].....	21
Obr. 9 Shell 281 [14].....	22
Obr. 10 Solid 185 [14] .....	23
Obr. 11 Vrstvený objemový prvek Solid 185 [14].....	23
Obr. 12 Solid 186 [14] .....	24
Obr. 13 Vrstvený objemový prvek Solid 186 [14].....	24
Obr. 14 Solsh190.....	25
Obr. 15 Nosník zatížený třibodovým ohybem .....	28
Obr. 16 Silnostěnný nosník – měření průhybu 1 .....	30
Obr. 17 Silnostěnný nosník – měření průhybu 2 .....	31
Obr. 18 Trubka 1 - $v_F=f(F)$ pro trubku délky 400 mm.....	32
Obr. 19 Trubka 1 - $v_F=f(F)$ pro trubku délky 400 mm.....	32
Obr. 20 Trubka 1 – síť, orientace elementů objemové skořepiny.....	36
Obr. 21 Trubka 1 – síť objemové skořepiny – detail .....	36
Obr. 22 Trubka 1 - okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu – pouze ohyb .....	37
Obr. 23 Trubka 1 – síla – detail pro objemovou skořepinu – pouze ohyb.....	37
Obr. 24 Trubka 1 - okrajové podmínky a zatížení pro objemovou skořepinu – ohyb + smyk.....	38
Obr. 25 Trubka 1 - průhyb objemového tělesa .....	39
Obr. 26 Trubka 1 - průhyb objemového tělesa-detail působíště síly (zvětšeno 50x). 39	
Obr. 27 Trubka 1 – deformace objemového tělesa pro vyhodnocení ohybu + smyku .....	40

Obr. 28 Trubka 1 - síť skořepiny .....	42
Obr. 29 Trubka 1 – síť skořepiny – detail v působišti síly.....	42
Obr. 30 Trubka 1 – průhyb skořepiny (zvětšeno 20x) .....	43
Obr. 31 Trubka 1 - průhyb skořepiny – detail působišti síly (zvětšeno 50x) .....	44
Obr. 32 Trubka 1 – deformace skořepiny pro vyhodnocení ohybu + smyku .....	45
Obr. 33 Trubka 2 vlevo .....	49
Obr. 34 Trubka 2 - $v_F=f(F)$ pro trubku délky 400 mm.....	50
Obr. 35 Trubka 2 - $v_F=f(F)$ pro trubku délky 600 mm.....	50
Obr. 36 Relativní porovnání $v_1$ vztaženo k $v_{1.0.0}$ metodě – graf .....	62
Obr. 37 Relativní porovnání $v_1$ vztaženo k $v_{1.0.0}$ metodě – graf - detail .....	63
Obr. 38 Relativní porovnání $v_2$ vztaženo k $v_{2.0.1}$ – graf .....	67
Obr. 39 Relativní porovnání $v_2$ vztaženo k $v_{2.0.1}$ – graf – detail .....	67
Obr. 40 Relativní porovnání vztaženo k [13] – graf .....	71
Obr. 41 Relativní porovnání vztaženo k [13] – graf vybrané metody .....	71
Obr. 42 Optimalizované vřeteno .....	73
Obr. 43 Délkové rozměry optimalizované trubky .....	74
Obr. 44 MKP model pro optimalizaci – statická analýza .....	75
Obr. 45 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF1 .....	77
Obr. 46 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF1 .....	77
Obr. 47 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF2 .....	79
Obr. 48 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF2 .....	79
Obr. 49 Deformace nosníku délky 500 mm pro stanovení CF3 .....	81
Obr. 50 Deformace nosníku délky 800 mm pro stanovení CF3 .....	81

## Seznam tabulek

Tab. 1 Trubka 1 – geometrie a materiálové parametry .....	29
Tab. 2 Kvadratický moment průřezu J a plocha průřezu A trubky 1 .....	30
Tab. 3 Tuhost trubky 1 – dána experimentem.....	34
Tab. 4 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána experimentem .....	34
Tab. 5 Tuhost trubky 1 – dána analytickými výpočty.....	34
Tab. 6 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP objemového tělesa.....	39
Tab. 7 Tuhost trubky 1 – dána MKP objemového tělesa.....	41
Tab. 8 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnitřní RP)	44
Tab. 9 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (RP střednice) .....	44
Tab. 10 Tuhost trubky 1 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnější RP)	44
Tab. 11 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (vnitřní RP).....	45
Tab. 12 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (RP střednice).....	46
Tab. 13 Tuhost trubky 1 – dána MKP skořepiny (vnější RP).....	46
Tab. 14 Trubka 1 – porovnání ohybových tuhostí .....	47
Tab. 15 Trubka 1 – porovnání smykových tuhostí .....	47
Tab. 16 Trubka 2 – geometrie a materiálové parametry .....	49
Tab. 17 Kvadratický moment průřezu J a plocha průřezu A trubky 2 .....	49
Tab. 18 Tuhost trubky 2 – dána experimentem.....	51
Tab. 19 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána experimentem .....	51
Tab. 20 Tuhost trubky 2 – dána analytickými výpočty.....	51
Tab. 21 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP objemového tělesa.....	52
Tab. 22 Tuhost trubky 2 – dána MKP objemového tělesa.....	52
Tab. 23 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnitřní RP) .....	53
Tab. 24 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (RP střednice) .....	53
Tab. 25 Tuhost trubky 2 se zanedbáním smyku – dána MKP skořepiny (vnější RP)	53
Tab. 26 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (vnitřní RP).....	53
Tab. 27 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (RP střednice).....	54
Tab. 28 Tuhost trubky 2 – dána MKP skořepiny (vnější RP).....	54

Tab. 29 Trubka 2 – porovnání ohybových tuhostí .....	55
Tab. 30 Trubka 2 – porovnání smykových tuhostí .....	55
Tab. 31 Geometrie nosníku pro v1 .....	59
Tab. 32 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v1 dle BP – vypočteny analyticky ...	60
Tab. 33 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v1 dle MKP .....	61
Tab. 34 Relativní porovnání v1 vztaženo k v1.0.1 – tabulka.....	62
Tab. 35 Geometrie nosníku pro v2.....	64
Tab. 36 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v2 – vypočteny analyticky .....	64
Tab. 37 Hodnoty průhybu v působišti síly pro v2 dle MKP .....	65
Tab. 38 Relativní porovnání v2 vztaženo k v2.0.1 – tabulka.....	66
Tab. 39 Geometrie nosníku pro v3.....	68
Tab. 40 Hodnoty tuhosti – vypočteny analyticky a dle [13].....	69
Tab. 41 Hodnoty ohybové tuhosti pro v3 dle MKP.....	69
Tab. 42 Relativní porovnání vztaženo k [13] – tabulka .....	70
Tab. 43 Číselné hodnoty délkových rozměrů optimalizované trubky .....	74
Tab. 44 Výsledky TR500 a TR800 pro CF1 .....	76
Tab. 45 Výsledky TR500 a TR800 pro CF2 .....	78
Tab. 46 Výsledky TR500 a TR800 pro CF3 .....	80
Tab. 47 Výsledky TR500 a TR800 pro CF4.....	82
Tab. 48 Porovnání výsledků CF1, CF2 a CF3 s výsledky CF4 .....	83

## Seznam příloh

Příloha 1      Kód programu Matlab ® pro analytické výpočty tuhosti kompozitní trubky.

Pozn.: Přílohy jsou pouze v elektronické podobě, a to na CD umístěném na zadních deskách této práce. Na CD je rovněž umístěna elektronická verze této diplomové práce.